Diskrete Mathematik **FTB-INF**
Dr. Martin E. Müller **WS 24/25**

Übungsblatt 9 - Mengenlehre - Teil 2

1. (a) Geben Sie die Identität einer beliebigen Menge A in Mengenschreibweise an.
(b) Warum folgt aus $A \rightleftharpoons B$ $B \rightleftharpoons A$?
(c) Warum folgt aus $A \rightleftharpoons B$ und $B \rightleftharpoons C$, $A \rightleftharpoons C$?

2. Begründen Sie, warum die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 42\}$ bijektiv sind, also warum $\mathbb{N} \rightleftharpoons \{n \in \mathbb{N} : n \geq 42\}$ gilt.

3. Stellen Sie eine Liste mit möglichst vielen Mengen auf, von denen Sie wissen, dass sie abzählbar sind.

4. Schreiben Sie eine Python-Funktion `finiteSubsets` welche alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ rekursiv aufzählt.

Hinweis: Schreiben Sie zuerst eine Funktion `powerSet(A)` welche Ihnen die Potenzmengen von A berechnet und rufen Sie dann diese Funktion von ihrer Funktion `finiteSubsets` auf. (ähnlich wie `fixedSizeSubsets` aus der Vorlesung `combs` aufruft)

5. Wiederholen Sie den Beweis der Überabzählbarkeit einer Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge und versuchen Sie diesen in eigenen Worten wiederzugeben.

6. Geben Sie alternative Schreibweisen für $[3, 3]$, $[3, 3)$, $(4, 3]$ sowie $[3, 3] \cup [4, 4]$ an.

7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\sqrt{2} \in [1, 2]$
(b) $[1, 3] \cap [3, 4] = \{2\}$
(c) $\sqrt{2} \in [-1, 1]$
(d) $42 \in (42, 43]$
(e) $42 \in [42, 43)$
(f) $42 \in (42, 43)$
(g) $42 \in [41.99, 42.1]$
(h) $42 \in (41.99, 42.1)$
(i) $[1, 2] \cup [2, 3] = \{2\}$
(j) $[1, 2) \cup [2, 3] = \{2\}$

8. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $[0, 100] \cup (2, 3] = (2, 3]$
(b) $[1, 3) \cup [2, 4] = (1, 4)$
(c) $[42, 43] \setminus (43, 44] = [42, 43]$
(d) $[42, 43) \setminus [43, 44] = [42, 43]$
(e) $[\sqrt{2}, \pi] \subseteq (-1/2, 39/10)$
(f) $[-2, 2) \cup (2, 4] = (1, 4)$

9. Wiederholen Sie den Beweis der Überabzählbarkeit von $(0, 1]$ aus der Vorlesung und geben Sie ihn in eigenen Worten wieder.

10. Beweisen Sie, dass $[0, 1)$ überabzählbar ist.

11. Geben Sie die bijektive Abbildung f zwischen den beiden Intervallen $[3, 8]$ und $[2, 4]$ mit einer Formel der Form $f(x) = ..$ an.

Mögliche Theoriefragen:

- Wann ist eine unendliche Menge abzählbar?
- Was besagt der Satz von Cantor?
- Was beweist Cantors erstes Diagonalelement?
- Geben Sie eine undnedliche, abzählbare Menge an.
- Geben Sie eine undnedliche, überabzählbare Menge an.
- Warum kann ein Intervall bei dem mindestens ein Endpunkt $\pm\infty$ ist nicht geschlossen sein?
- Warum muss $(0, 1)$ überabzählbar sein, wenn $(0, 1]$ überabzählbar ist?