Skriptum - Logik (Grundlagen) (v 1.1)

Dieses (lücken)-Skriptum begleitet die Vorlesung Diskrete Mathematik (Mathematik für Informatiker) an der Fachhochschule Vorarlberg. Es ist jedoch nicht vollständig und eignet sich daher (ohne Ergänzungen) nicht zur Vorbereitung auf die Prüfung. Beispiele, Beweise und zum Teil auch textuelle Ergänzungen werden während der Vorlesung gemeinsam erarbeiten.

Die Vorlesung folgt in weiten Teilen dem Buch *Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker* von Edmund Weitz [1]. Dieses Buch verfolgt den Ansatz, dass Informatiker*innen in Ihrem späteren Berufsleben mehr angewandte (konkrete) Mathematik benötigen anstelle von „reiner" Mathematik, welche Mathematik der Mathematik wegen betreibt und in der Lehre oft abstrakt und ohne nähere Betrachtung von Anwendungen bleibt. Unser Anwendungswerkzeug der Wahl: Programmieren! Sie lernen in unserer Vorlesung die mathematischen Begriffe, Methoden und vor allem deren Anwendungen, indem Sie diese in Computerprogramme „übersetzen". Wir werden dafür (wie auch Herr Weitz) PYTHON und JUPYTERLAB verwenden.

Das Skriptum enthält mit hoher Wahrscheinlichkeit auch Fehler (typographisch sowie inhaltlich). Bitte melden Sie jeden Fehler der Ihnen auffällt. Ihre Kommilitonen (und natürlich auch ich) werden es Ihnen danken!

Eine **Aussage** ist (grob gesagt) ein sprachliches Gebilde (== ein Satz/Text) das entweder wahr oder falsch ist.

$\Rightarrow$ Sie kann nicht wahr und falsch gleichzeitig sein:

Wahre Aussagen habe den Wahrheitswert w, falsche den Wahrheitswert f.

Beispiele für Aussagen:

- ▷ „11 ist eine Primzahl“ ist eine Aussage.
- ▷ „$1 + 1 = 2$“ ist eine Aussage
- ▷ „$1 + 2 = 2$“ ist eine Aussage
- ▷ „Dies ist ein falscher Satz“ ist eine Aussage
- ▷ „$1 + 1$“ ist Aussage

Eine **Aussageform** ist ein sprachliches Gebilde, in dem freie Variablen, also Platzhalter, vorkommen und erst bei Einsetzen von Werten Aussagen liefern.

z.B.:

- ▷ „$x + 1 = 2$“ ist für wahr, sonst falsch
- ▷ „x ist älter als Anton“

Für Variablen kann man beliebige Symbole (z.B. lateinische oder griechische Buchstaben (lernen Sie das griechische Alphabet!)) verwenden.

Aussagen können verknüpft werden, um „komplexere“ Aussagen zu erhalten.

z.B. ist der Satz

„11 ist eine Primzahl“ **und** „$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl“

wieder eine Aussage, die einen Wahrheitswert hat.

Das Wort **und** ist dabei ein sogenanntes **Verknüpfungswort** (Konnektor).

Weitere Verknüpfungsworte sind „oder“, „nicht“, „wenn ..., dann ...“.

Diese müssen wir mathematisch „präzisieren“, um damit arbeiten zu können.

Für die Ermittlung des Wahrheitswertes einer verknüpften Aussage genügt es dann, die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen mit den Konnektoren zu verknüpfen.

z.B.:

Aussage A:
Aussage B:

A und B hat den Wahrheitswert von A **und** B, also A und B muss wahr sein, damit A und B wahr ist und wir schreiben

Konjunktion: (A und B, $A \wedge B$)

Sind A und B Aussagen, dann ist auch „A und B“ - dargestellt durch $(A \wedge B)$ - eine Aussage, die sogenannte (logische) Konjunktion.

$(A \wedge B)$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Mithilfe von **Wahrheitstafeln** können wir die Wahrheitswerte von verknüpften (zusammengesetzten) Aussagen definieren:

Unsere verknüpfte Aussage

„11 ist Primzahl“ und „$\sqrt{2}$ ist rational“

hat somit den Wahrheitswert

Disjunktion: (A oder B, $A \vee B$)

Seien A und B Aussagen, dann ist auch „A oder B“ - dargestellt durch $(A \vee B)$ - eine Aussage, die sogenannte (logische) Disjunktion.

$(A \vee B)$ ist genau dann wahr, wenn A wahr ist, **oder** wenn B wahr ist oder wenn A und B beide wahr sind ($\neq$ entweder!).

== $(A \vee B)$ ist wahr, wenn zumindest eine Aussage wahr ist.

Negation: (nicht A, $\neg A$)

Sei A eine Aussage, dann ist auch „nicht A“ - dargestellt durch $\neg A$ - eine Aussage, die sogenannte (logische) Negation.

Die Aussage $(\neg A)$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Implikation: (Wenn A dann B, $A \Rightarrow B$)

Seien A und B Aussagen, dann ist auch „wenn A dann B" - dargestellt durch $A \Rightarrow B$ - eine Aussage, die sogenannte (logische) Implikation.

Die Aussage $(A \Rightarrow B)$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Implikation beschreibt, wie aus einer Aussage ein andere Aussage „geschlussfolgert" werden kann.

$\Rightarrow$ Der Schluss aus einer falschen „Voraussetzung" ist immer wahr.
== Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern

z.B.:

Äquivalenz: (A genau dann, wenn B, $A \Leftrightarrow B$)

Seien A und B Aussagen, dann ist auch „A genau dann, wenn B" - dargestellt durch $A \Leftrightarrow B$ - eine Aussage, die sogenannte (logische) Äquivalenz.

Die Aussage ($A \Leftrightarrow B$) ist genau dann wahr, wenn A und B beide den gleichen Wahrheitswert haben.

PYTHON: `Konjunktion`

Mit Wahrheitstafeln kann man auch **zusammengesetzte Aussagen** vergleichen bzw. die Äquivalenz zweier Aussagen Beweisen.

z.B. $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$

Wichtigste Aufgabe der Aussagenlogik: Ausdrücken von Sätzen/Texten in logischen Termen.

z.B. ist der Satz

„Ich fahre nach Wien und heute ist nicht Montag“

in folgendem logischem Term ausdrückbar:

$$q \wedge \neg p$$

mit der Aussage q = „ich fahre nach Wien“ und p = „heute ist Montag“.

Die Wahrheitstafel für diese zusammengesetzte Aussage ist

Auch die Umkehrung (logischer Term $\rightarrow$ Satz) sollte beherrscht werden.

z.B. $p \vee \neg q$ mit p = „die Sonne scheint“ und q = „zwei mal zwei ist fünf“ ergibt

„Die Sonne scheint **oder nicht** zwei mal zwei ist fünf”
= „Die Sonne scheint **oder** zwei mal zwei ist **nicht** fünf“.

Bei einer Implikation ($p \Rightarrow q$) heißt die erste Aussage p Voraussetzung, Prämisse bzw. **hinreichende Bedingung** für q. Die zweite Aussage q Folgerung, Konklusion bzw. **notwendige Bedingung** für p.

Anders ausgedrückt:

Eine Bedingung B heißt **notwendig** für den Sachverhalt S, wenn $S \Rightarrow B$

== der Sachverhalt ist ohne die Bedingung B nicht erfüllbar
== es geht nicht ohne

z.B.:

- ▷ Notwendig dafür, daß eine Zahl durch 6 teilbar ist (S), ist, daß sie gerade ist (B).
- ▷ Notwendig für das Erzielen eines Korbs ist (S), daß es einen Korb gibt (B)
  == daß ein Korb existiert.

Eine Bedingung B heißt **hinreichend** für den Sachverhalt S, wenn $B \Rightarrow S$

== Immer wenn B gilt, gilt auch S
== es geht aber auch anders!

z.B.:

- ▷ Hinreichend dafür, daß eine Zahl durch 6 teilbar ist (S), ist, daß sie durch 12 teilbar ist (B).
  (Eine andere hinreichende Bedingung wäre z.B. Teilbarkeit durch 18)
- ▷ Hinreichend dafür, daß die Straße naß ist, ist, daß es geregnet hat.
  (wäre auch mit einem Wasserschlauch möglich)

Eine **logische Formel** bezeichnet einen sinnvollen logischen Ausdruck.

Eine **Tautologie** ist eine Formel, die stets wahr ist. (z.B. $p \lor \neg p$).

Eine **Kontradiktion** ist eine Formel, die stets falsch ist. (z.B. $p \land \neg p$).

Beweis mittels Wahrheitstafel:

z.B. $p \land \neg p$

Zwei Formeln p und q heißen (logisch) äquivalent - dargestellt durch $p \equiv q$ - genau dann, wenn die Formel $(p \Leftrightarrow q)$ eine Tautologie ist.

$\Rightarrow$ Wir können logische Formeln „vereinfachen“, indem wir äquivalente Teilformeln „austauschen“

Dabei sind folgende Äquivalenzen oft hilfreich:

Auch hier können wir Wahrheitstafeln zum Beweis verwenden.

z.B. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Wir können dies aber auch „programmatisch" „Beweisen":

PYTHON: `evalDist`

Mit diesen Äquivalenzen können wir z.B. die Formel

$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$$

folgendermaßen vereinfachen:

Auf diese Art kann man auch mathematische Beweise führen!

Quantoren

Quantoren werden in der Mathematik oft eingesetzt, um Sachverhalte „kompakt“ aufzuschreiben. Diese werden ihnen in höheren Semestern immer wieder begegnen. Daher sollten Sie diese kompakte Schreibweise beherrschen, damit Sie sich auf den eigentlichen Inhalt kommender Vorlesungen konzentrieren können.

Ist A eine Aussageform, in der eine freie Variable x vorkommt - man schreibt dafür $A(x)$ - dann bedeutet

$\forall x : A(x) \equiv$ „für alle x gilt $A(x)$“

und

$\exists x : A(x) \equiv$ „es gibt ein x mit $A(x)$.“

$\forall$ ist dabei der sogenannte **Allquantor**, $\exists$ der sogenannte **Existenzquantor.**

Ein Quantor „bindet“ somit die frei vorkommenden Variablen einer Aussageform.

z.B.:

- ▷

- ▷

Beide „Sätze“ sind Aussagen $\Rightarrow$ sie haben einen Wahrheitswert == sind wahr oder falsch.

Man kann auch (und muß dies auch falls notwendig) die Bezugsmenge eines Quantors angeben:

Diese Aussage ist gleichbedeutend mit

Es dürfen auch mehrere freie Variablen in Aussageformen vorkommen:

Diese Aussage ist wahr.

Negation von Quantoren

Wann ist

wahr? Genau dann wenn es ein x gibt, für das $A(x)$ nicht gilt

Wann ist

wahr? Genau dann, wenn für alle x $\neg A(x)$ wahr ist

„Manchmal“ findet man auch folgende Existenzquantoren:

Abschließendes Beispiel:

Der Satz „Alle Sportler sind Nichtraucher“ ist als logischer Term

Wie negieren wir diese Aussage?
== Wann ist diese Aussage falsch?

Dies sollte für eine allererste Einführung in die Logik (für Informatiker) reichen und Sie sollten jetzt die notwendigen Grundlagen für das weitere Studium der Mathematik kennen und beherrschen. Das mathematische Teilgebiet der Logik umfaßt jedoch noch wesentlich mehr wie wir hier behandeln können. Hier sei auf Spezialvorlesungen oder auch die Literatur verwiesen.

Literatur

[1] E. Weitz, Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker. 2021, https://www.springer.com/de/book/9783662626177