Übungsblatt 8 - Relationen und Funktionen

1. Geben Sie eine Relation R an, welche für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ alle Elemente $(x, y) \in A \times B$ enthält deren Summe gerade ist.

2. Geben Sie eine Relation über den natürlichen Zahlen an, welche eine Quadratzahl a mit ihrer Quadratwurzel verknüpft, welche also z.B. $(2, 4)$ sowie $(3, 9)$ enthält, jedoch nicht $(2, 3)$ oder $(1, 4)$.

3. Welche der folgenden Mengen sind Funktionen:

(a) $A = \{(n, 2n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

(c) $C = \{(1, 2), 3, (4, 5)\}$

(d) $D = \{(1, 3), (3, 5), (4, 5)\}$

(e) $E = \{(1, 3), (1, 5), (4, 5)\}$

(f) $F = \{(1, 3), (1, 2), (4, 5)\}$

Begründen Sie ihre Antworten.

4. Erweitern Sie die Funktion `onlyTuples` aus der Vorlesung in der Art, dass sie nur noch `True` zurückgibt, wenn im Übergabeparameter nur 2-Tupel vorkommen. Testen Sie anhand einiger Beispiele mit ihrer neuen Funktion, ob eine Menge von 2-Tupeln eine Funktion darstellt.

5. Ist die Funktion $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ injektiv? Geben Sie jeweils eine Funktion (als Menge von Tupeln) an, die injektiv, surjektiv und bijektiv ist. Geben Sie für ihre injektive Funktion auch die Umkehrfunktion f^{-1} an. Invertieren Sie f. Was können Sie über f^{-1} sagen?

6. Schreiben Sie eine Funktion, die testet, ob ihr Argument (das bereits durch `isFunction` getestet wurde) injektiv ist.

7. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen folgender Funktion

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to -0.5 \cdot x \end{cases}.$$

Invertieren Sie h und zeichnen Sie auch den Funktionsgraphen von h^{-1}.

8. Ewrklären Sie anhand der beiden Abbildungen „Kinobesucher zu Kinoplatz“ und „Kinoplatz zu Kinobesucher“ die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv. Was „wünscht“ sich der Kinobesitzer von der Abbildung? Was der Kinobesucher?

9. Bilden Sie für die Funktionen $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 23), (4, 23)\}$ und $g = \{(2, 7), (23, 8), (42, 9)\}$ $g \circ f$. Stellen Sie die Funktionen f, g sowie $g \circ f$ in Mengendiagrammen dar. Ist $g \circ f$ injektiv, surjektiv oder beides? Was muss für f und g gelten, damit $g \circ f$ sicher injektiv ist?

10. Schreiben Sie ein PYTHON Funktion `comp(f,g)`, welche die Komposition von zwei (endlichen) Funktionen im mathematischen Sinne berechnet, also z.B. für

`list(comp({(1,2), (2,3)},{(2,10), (3,5)}))` als Resultat `[(2, 5), (1, 10)]` liefert.

11. Werden durch $(m, n) \mapsto m + n$ und $(m, n) \mapsto m - n$ Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$ definiert? Begründen Sie ihre Antworten.

12. Geben Sie eine Äquivalenzrelation an, welche die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ in Äquivalenzklassen unterteilt, die jeweils alle Zahlen aus A enthalten, die zu 3 modulo kongruent sind.

13. Wie viele Äquivalenzklassen „erzeugt“ die Äquivalenzrelation aus Aufgabe 12.? Geben Sie alle Elemente der Äquivalenzklasse an, welche die 2 enthält.

Mögliche Theoriefragen:

- Warum ist $f(x) = x^2$ nicht injektiv?
- Warum hat eine nicht injektive Funktion im allgemeinen keine Umkehrfunktion?
- Warum ist $f(x) = x^2$ (genau genommen) keine Funktion?
- Warum kann ein Kreis nicht durch eine Funktion beschrieben werden?
- Was ist eine Äquivalenzrelation?
- Geben Sie die mathematisch korrekte Definition des $+$-Operators an.
- Inwiefern hängen relationele Datenbanken und mathematische Relationen zusammen?