Diskrete Mathematik | **FTB-INF**
Dr. Martin E. Müller | **WS 24/25**

Skriptum - Mengenlehre (Grundlagen) - Teil 2 (v 1.1)

Dieses (lcken)-Skriptum begleitet die Vorlesung Diskrete Mathematik (Mathematik fr Informatiker) an der Fachhochschule Vorarlberg. Es ist jedoch nicht vollstndig und eignet sich daher (ohne Ergnzungen) nicht zur Vorbereitung auf die Prfung. Beispiele, Beweise und zum Teil auch textuelle Ergnzungen werden whrend der Vorlesung gemeinsam erarbeiten.

Die Vorlesung folgt in weiten Teilen dem Buch *Konkrete Mathematik (nicht nur) fr Informatiker* von Edmund Weitz [1]. Dieses Buch verfolgt den Ansatz, dass Informatiker*innen in Ihrem spteren Berufsleben mehr angewandte (konkrete) Mathematik bentigen anstelle von „reiner“ Mathematik, welche Mathematik der Mathematik wegen betreibt und in der Lehre oft abstrakt und ohne nhere Betrachtung von Anwendungen bleibt. Unser Anwendungswerkzeug der Wahl: Programmieren! Sie lernen in unserer Vorlesung die mathematischen Begriffe, Methoden und vor allem deren Anwendungen, indem Sie diese in Computerprogramme „bersetzen“. Wir werden dafür (wie auch Herr Weitz) Python und JupyterLab verwenden.

Das Skriptum enthlt mit hoher Wahrscheinlichkeit auch Fehler (typographisch sowie inhaltlich). Bitte melden Sie jeden Fehler der Ihnen auffllt. Ihre Kommilitonen (und natrlich auch ich) werden es Ihnen danken!

Bisher „nur“ unendliche Mengen die rekursiv aufzählbar (wir können eine Funktion schreiben, welche die Menge „generiert“) waren. Es gibt aber noch (∞ viel) mehr!

Doch wie kann man deren Gößen vergleichen, wenn man ihre Elemente wegen der Unendlichkeit nicht zählen kann??

Indem man ihre Elemente „vergleicht“:

Mathematisch bedeutet das, daß zwei endliche Mengen genau dann gleich viele Elemente haben, wenn es eine **Bijektion** von der einen Menge auf die Andere gibt (dargestellt durch die Pfeile).

Dies „funktioniert“ auch fr unendliche Mengen (erstmals Cantor):

> Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig (haben gleich viele Elemente), wenn es eine Bijektion von A auf B gibt und man schreibt $A \rightleftharpoons B$.

Gibt es eine Bijektion einer beliebigen Menge auf sich selbst?

Dies ist die **Identität** von A.

$\Rightarrow$ Eine Menge A ist gleichmächtig zu sich selbst (weil es die Identität gibt).

Folgt aus $A \rightleftharpoons B$ $B \rightleftharpoons A$?

Folgt aus $A \rightleftharpoons B \rightleftharpoons C$ $A \rightleftharpoons C$?

Sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^+$ gleich mächtig?
== Gibt es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^+$?

Sind $\mathbb{N}$ und eine „beliebige“ endliche Menge A gleich mächtig?

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ ist „größer“ als jede endliche Menge

Mengen mit gleicher Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ heißen **abzählbar unendlich**.

Wenn $\mathbb{N} \rightleftharpoons A$ mit Bijektion f, können wir die Elemente von A „der Reihe nach“ nach aufzählen ($f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ...)

Ist eine Menge abzählbar unendlich oder endlich, ist sie abzählbar.

Da $\mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{N}^+$ ist $\mathbb{N}^+$ abzählbar unendlich und hat somit „gleich viele“ Elemente wie $\mathbb{N}$, obwohl wir wissen, daß $0 \in \mathbb{N}$ aber $0 \notin \mathbb{N}^+$ (da $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus 0$).

Auch $\mathbb{Z}$ ist gleich mächtig (== ist „gleich groß“) wie $\mathbb{N}$, obwohl wir ∞ viele Elemente kennen (alle negativen, ganzen Zahlen), die $\in \mathbb{Z}$ aber nicht $\in \mathbb{N}$ sind. Dies mag unituitiv sein, ist aber mathematisch korrekt und das „Wesen“ der Unendlichkeit!

∞ ist eben keine Zahl sondern ein Denkkonzept!

Jede Teilmenge A von $\mathbb{N}$ ist abzählbar, da entweder

- $\triangleright$ A beschränkt

- $\triangleright$ A ist nicht beschränkt

$\Rightarrow$ Jede Teilmenge von $\in \mathbb{N}$ ist abzählbar und auch jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

Auch die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist wieder eine abzählbare Menge (siehe z.B. Weitz bzw. $\mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{Z}$) und somit auch eine Menge von unendlich vielen, unendlich abzählbaren Mengen wie z.B.

mit

(siehe Cantors erstes Diagonalelement == „Beweis“, daß $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich).

Wir können jedoch **nicht abzählbare** Mengen konstruieren, indem wir Mengen von Mengen betrachten.

$\Rightarrow$ Wie kann man die Menge aller vierelementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ aufzählen?

z.B. 4-Elementige Teilmengen von $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

und wir erinnern uns an $\mathcal{P}(M)$ als Menge aller Teilmengen einer Menge M (== Potenzmenge)

PYTHON: `Mengen_2`

Im folgenden werden wir zeigen, daß

> die Potenzmenge jeder abzählbar unendlichen Menge nicht mehr abzählbar ist.

Der Beweis beruht auf dem **Satz von Cantor** welcher besagt, daß es nicht möglich ist, irgendeine Menge A auf ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ surjektiv abzubilden.
Dies ist die zentrale Aussage dieses Kapitels!

Sei f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ auf die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Jede natürliche Zahl wird auf Menge von natürlichen Zahlen abgebildet.

Über $f(n)$ wissen wir nur, daß es Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind.
Auch gleiche Mengen wären erlaubt, also ist $f(n)$ nicht injektiv.

Jetzt erweitern wir unsere Tabelle um die Spalte $n \in f(n)$ und Definition der Menge Y mit allen Elementen für die $n \notin f(n)$ gilt.

Im Beispiel

Kann $Y = f(m)$ sein?
== kann Y in der zweiten Spalte „auftauchen“?

$\Rightarrow$ Y kann nie in zweiter Spalte stehen
$\Rightarrow$ Es existiert mindestens eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die von f nicht „getroffen“ wird.
$\Rightarrow$ f ist nicht surjektiv!

Wenn f irgndeine Abbildung irgendeiner Menge A in ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist, dann kann man immer die Menge

definieren, die auch ein Element von $\mathcal{P}(A)$ ist. Y kann dann nicht zum Wertebereich von f gehören, da das zu einem Widerspruch führen würde. Daher ist f nicht surjektiv.

Wenn sich A nicht surjektiv auf $\mathcal{P}(A)$ abbilden lässt, dann erst recht nicht bijektiv.

$\Rightarrow$ A und $\mathcal{P}(A)$ sind also nicht gleich mächtig!

Da $\mathcal{P}(A)$ mindestens so viele Elemente wie A hat, können wir zu jeder Menge A eine Menge finden, die „größer" ist und zwar um so viel größer, daß es nicht möglich ist, die Elemente der beiden Menge paarweise zuzuordnen.

Die Potenzmenge jeder abzählbaren, unendlichen Menge ist nicht mehr abzählbar (z.B. $\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathcal{P}(\mathbb{P})$, ...).

Mit demselben Beweis folgt, daß $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ „größer" wie $\mathcal{P}(A)$ und daß $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$ „größer" wie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ist.

$\Rightarrow$ Es gibt nicht nur eine Form der Unendlichkeit, sondern unendlich viele!!

Und wie können wir das auf Zahlen übertragen?

Mit Hilfe von **Intervallen!!**

Ein Intervall ist (informell) ein zusammenhängendes Stück der Zahlengerade.
== Menge von reellen Zahlen mit Eigenschaft, dass mit je zwei Zahlen, die zu der Menge gehören, alle Zahlen dazwischen auch dazugehören müssen.

Sind diese beiden Zahlen a und b, schreibt man für das Intervall $[a, b]$.

Gehört einer der Endpunkte (a oder b) nicht zum Intervall, schreibt man $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b).

Intervalle, bei denen mindestens ein Endpunkt zum Intervall gehört, nennt man **abgeschlossen**

Sind beide Endpunkte nicht im Intervall ((a, b)), nennt man das Intervall **offen**.

Ein Intervall kann sich auch nach links ($(-\infty, b]$) oder rechts ($[a, \infty)$) unendlich ausdehnen. Da ∞ keine Zahl ist, ist es dann zumindest auf der „∞-Seite" offen.

Intervalle in Mengenschreibweise:

Da Intervalle Mengen sind, können wir die Rechenoperationen von Mengen auf Intervalle anwenden. Hierbei hilft es oft, die Intervalle auf der Zahlengeraden darzustellen:

z.B. $[1, \pi] \cap (2, 6)$

Weitere Beispiele:

Intervalle zu denen mehr als eine Zahl gehört nennt man **echte Intervalle**. Und echte Intervalle können eben nicht rekursiv aufgezählt werden!

Um dies zu Beweisen betrachten wir nochmal $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist dann entweder endlich oder unendlich und wir können $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in zwei disjunkte Mengen

aufteilen, wobei $\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ gerade die endlichen Teilmengen sind und $\mathcal{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ die unendlichen.

In Aufgabe 4., Übungsblatt 9 haben wir eine Python-Funktion geschrieben, welche alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ($== \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$) erzeugt
$\Rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$ ist rekursiv aufzählbar $\Rightarrow$ abzählbar unendlich.

Da die Vereinigung zweier rekursiv aufzählbarer Mengen wieder rekursiv aufzählbar ist (siehe oben) und wir wissen, dass

nicht recursive aufzählber ist, kann $\mathcal{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ nicht rekursiv aufzählber sein
$\Rightarrow \mathcal{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar!
$\Rightarrow$ es gibt „viel mehr“ unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ als endliche.

Lassen Sie uns zu guter Letzt noch zeigen, dass

- ▷ Teilmengen von abzählbaren Mengen abzählbar sind,
- ▷ Obermengen von überabzählbaren Mengen überabzählbar sind und
- ▷ dass Intervalle (und somit auch $\mathbb{R}$) überabzählbar sind.

Da wir Informatiker sind, führen wir diesen Beweis auch auf „Informatikerart“ und werden zeigen, dass

- ▷ es eine bijektive Abbildung von $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ auf $(0, 1]$ gibt, indem wir
- ▷ ein Abbildung zwischen jeder Teilmenge von $\mathbb{N}$ auf eine reelle Zahl im Intervall $[0, 1]$ bilden.

Sei dazu χ_a die Binärdarstellung einer Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$. Dann können wir die n-te Nachkommastelle dieser Zahl mit der natürlichen Zahl n identifizieren. Dann ordnen wir jeder Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine solche Zahl zu. Ist $n \in A$, soll die n-te Nachkommastelle von χ_a Eins sein, sonst Null.

Zur Menge

gehört also die Zahl

danach folgen nur noch Nullen.

Weitere Beispiele:

$\Rightarrow$ Wir können so jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 abbilden!

Jedoch ist z.B. die Zahl $\frac{1}{2}$ 2 mal getroffen

Dies ist immer dann der Fall, wenn die eine Zahl an der n-ten Stelle eine 1 und danach nur noch 0-en hat, die Zweite an der n-ten-Stelle eine 0 gefolgt von 1-en.

Die Zahlen mit einer 1 gefolgt von 0-en sind dabei die endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, also gerade $\in \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$

Lassen wir diese weg, wird die Abbildung, die jeder Menge A die Zahl χ_a zuordnet, injektiv

$\Rightarrow$ Die Abbildung $\mathcal{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ auf $(0,1]$ ist bijektiv
$\Rightarrow$ $(0,1]$ ist überabzhlbar

Somit muss auch $(0,1)$ überabzählbar sein, denn wenn $(0,1)$ abzählbar wäre, müsste

auch abzählbar sein.
$\Rightarrow$ Teilmengen von abzählbaren Mengen sind abzählbar.

$\Rightarrow$ Obermengen von überabzählbaren Mengen sind überabzählbar.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Alle echten Intervalle sind „gleich groß“ == haben dieselbe Mächtigkeit.
== es gibt eine Bijektion zwischen ihnen, die durch die Geradengleichung „beschrieben“ wird:

Literatur

[1] E. Weitz, Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker. 2021, https://www.springer.com/de/book/9783662626177