

Le théorème de Noether

Son centenaire, sa signification et sa portée.

Jérôme Perez

Ensta ParisTech, Laboratoire de Mathématiques Appliquées

Publié dans : Quadrature, le journal des mathématiques pures et épiciées, n°100, Avril-Mai-Juin 2018

12 novembre 2018

Dans ce texte les vecteurs de \mathbb{R}^3 sont surmontés d'une flèche, \vec{r} , sauf s'ils sont unitaires et sont alors affublés d'un chapeau, \hat{u} . La quantité ℓ représente le nombre de degrés de liberté d'un système physique et les vecteurs de \mathbb{R}^ℓ sont notés en gras, \mathbf{q} . Enfin, la conjugaison complexe est indiquée par une étoile : si $z = a + ib$ alors $z^* = a - ib$.

L'année 2015 marque le centenaire de la relativité générale. La fin de la mise au point de cette théorie a été le théâtre de nombreuses discussions notamment à Gottingen dans « l'école » de Hilbert. Ces discussions ont également été le cadre et l'époque de la genèse du théorème qui nous intéresse. On trouvera dans l'excellent article de Nina Byers [1] toutes les références des éléments qui suivent.

Emmy Noether est appelée à trente-trois ans par David Hilbert et Félix Klein en tant que privatdozent (maître de conférence) à l'université de Gottingen. Son arrivée précède de quelques semaines une série de six séminaires qu'Albert Einstein donnera dans ce haut-lieu des mathématiques mondiales de l'époque entre juin et juillet 1915. Ces séminaires montrent l'intérêt que portait Hilbert et ses collègues pour le développement de la physique théorique et notamment la théorie de la relativité. Einstein lui-même reconnut « A ma plus grande joie, j'ai rallié à ma cause Hilbert et Klein ».

Imaginée dès 1905, en cette première partie de l'année 1916 la relativité générale n'était pas complètement terminée. C'est d'ailleurs Hilbert qui le 20 novembre publiera la première version de l'équation fondamentale de cette théorie, qui sera également publiée de manière complètement indépendante 5 jours plus tard par Einstein. La version d'Hilbert est basée sur un formalisme variationnel qui va devenir celui de la théorie des champs, qui consiste à déterminer l'extremum d'une action. Cette action dite d'Einstein-Hilbert avait été déduite par le mathématicien allemand sur la base des séminaires d'Einstein : alors que la physique lui semblait mystérieuse, le calcul variationnel n'avait pas de secret pour Hilbert... L'étude précise de la correspondance de l'époque permet même de comprendre qu'Emmy Noether a sûrement travaillé aux côtés d'Hilbert sur ce sujet : dans une lettre de cette dernière à son collègue Ernst Sigismund Fischer datée de novembre 1915 on peut lire « Hilbert a prévu de nous présenter la semaine prochaine ses idées sur les invariants différentiels d'Einstein, nous ferions bien d'être prêts »[2]. La démonstration des fameux théorèmes¹ a sans aucun doute été effectuée lors de ces semaines de travail sur son sujet fétiche de la théorie des invariants aux côtés de son directeur et de Félix Klein. On trouve effectivement dans la correspondance de Klein à Hilbert, une note de 1916 indiquant qu'Emmy Noether avait obtenu à la fin de l'année précédente deux théorèmes sur les invariants d'une grande portée.

La publication n'interviendra que trois ans plus tard sous la forme initiale d'une communication orale de Félix Klein devant la Société Royale des Sciences Allemande, dont Emmy Noether ne pouvait pas faire partie car la première femme n'entra dans ce genre de société qu'en 1945 à Londres... À sa lecture, Einstein transmit à Hilbert « Hier j'ai reçu de Mademoiselle Noether un article très intéressant sur des formes invariantes. Je suis impressionné que l'on puisse aborder ces questions d'un point de vue aussi général ». L'analyse d'Einstein est parfaite. Bien que dénué de tout exemple et assez technique, le papier laisse entrevoir à qui sait le lire une très large portée. Nous allons dans cet article tenter d'en donner quelques illustrations.

Nous présenterons dans les deux premières parties le contexte simple et classique du théorème de Noether et ses applications usuelles. Nous élargirons ensuite sa portée à la mécanique quantique dans l'objectif de dévoiler la nouvelle façon de faire et d'écrire la physique que propose le formalisme variationnel et le théorème de Noether. Nous terminerons finalement par une escapade géométrique assez peu connue « en pays Newtonien » afin de nous rendre compte jusqu'où peut se cacher ce lien étroit qu'il existe dans la nature entre invariance et symétrie.

1. Dans la publication originale le théorème de Noether est décomposé en deux énoncés : l'implication et sa réciproque.

1 De Lagrange à Noether

En physique classique (non relativiste) l'action d'un système s'écrit

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

où L est le lagrangien du système. Dans ce contexte le lagrangien est une fonction des coordonnées généralisées q_j , $j = 1, \dots, \ell$ et des vitesses généralisées \dot{q}_j , $j = 1, \dots, \ell$ où ℓ représente le nombre de degrés de liberté du système et le point la dérivée par rapport au temps, soit $L = (q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$. Les coordonnées et les vitesses généralisées sont supposées indépendantes ainsi,

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \text{ et } \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, \ell.$$

On remarque que dans un référentiel quelconque la position d'un point du système est repérée par un vecteur $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_\ell)$ ne dépendant que des coordonnées généralisées alors que sa vitesse $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{v}(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$ peut dépendre de la totalité des variables lagagiennes.

L'équation caractérisant l'évolution du système est obtenue en écrivant que son action est extrémale (en général minimale) lors de cette évolution. Ce principe, dit de moindre action, se traduit par la condition de premier ordre $\delta S = 0$ où la variation δ correspond à la variation des q_j entre deux extrémités fixées aux instants t_1 et t_2 : on connaît les coordonnées généralisées aux instants t_1 et t_2 , entre ces deux extrémités les q_j suivent le mouvement qui minimise l'action. La condition d'extrémalité du premier ordre² est donc complétée par la contrainte

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, \ell. \quad (1)$$

L'écriture du principe de moindre action conduit aux équations de Lagrange. En effet,

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right)$$

ainsi, en écrivant que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j)$, on peut procéder à une intégration par parties sur le dernier terme de cette somme, il vient

$$0 = \left[\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j \quad (2)$$

Le terme de bord est nul compte-tenu de la contrainte imposée sur les coordonnées généralisées aux instants t_1 et t_2 , cf. relations (1). Les variations δq_j étant supposées indépendantes, la relation (2) s'écrit donc

$$\forall j = 1, \dots, \ell \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

ce qui constitue les ℓ équations de Lagrange du système.

Il existe deux grands types de transformations laissant invariantes les équations d'évolution :

- Les transformations de jauge sont telles que $L \rightarrow L' = L + \frac{d\phi}{dt}$ où la fonction $\phi = \phi(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$ est appelée jauge. Dans une telle transformation l'action est modifiée par l'ajout d'une constante

$$S \rightarrow S' = S + \phi|_{t=t_2} - \phi|_{t=t_1} = S + cste$$

ainsi les équations d'évolution ne sont pas modifiées car S et S' sont extrémales pour la même trajectoire.

- Les symétries du systèmes sont les transformations

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell & \rightarrow \\ (q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell) = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mapsto g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(g^1(\mathbf{q}), \dots, g^\ell(\mathbf{q}), \frac{dg^1(\mathbf{q})}{dt}, \dots, \frac{dg^\ell(\mathbf{q})}{dt} \right) \end{cases}$$

². L'ordre deux permet de préciser la nature de l'extremum, la minimalité est assurée en physique classique par le fait que la masse des corps est une quantité positive

telles que $L(g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Pour $j = 1, \dots, \ell$, les fonctions $g^j(\mathbf{q})$ de $\mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ définissent explicitement la symétrie. Le lagrangien étant invariant par la transformation, les équations d'évolution le sont aussi. Si la fonction g dépend continûment d'un paramètre σ réel et que l'on a les lois de groupe $g_{\sigma=0} = id$ et $g_{\sigma_1} \circ g_{\sigma_2} = g_{\sigma_1+\sigma_2}$, on parle alors de groupe de symétrie pour le système décrit par le lagrangien L .

Le contexte des groupes de symétrie est celui du théorème de Noether.

Supposons l'existence d'un groupe de symétrie $\mathbb{G} = \{g_\sigma, \sigma \in \mathbb{R}\}$ pour un système décrit par le lagrangien L . On a donc explicitement $L(g_\sigma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ et ainsi

$$\frac{dL(g_\sigma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{d\sigma} = \frac{dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{d\sigma} = 0.$$

En explicitant la transformation à travers les fonctions $g_\sigma^j(\mathbf{q})$ il vient donc

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dg_\sigma^j(\mathbf{q})}{dt} \right) = 0 \quad (3)$$

en utilisant les équations de Lagrange on en déduit que

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dg_\sigma^j(\mathbf{q})}{dt} \right) = 0.$$

On écrit alors le théorème de Schwarz pour la seconde partie de la somme

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dg^j(\bar{q})}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \right)$$

et l'on obtient

$$0 = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

La quantité

$$I = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (4)$$

est donc une constante du mouvement, elle est naturellement associée au groupe de symétrie \mathbb{G} . Afin que la quantité I soit indépendante de σ , on la prend nulle et le théorème de Noether s'énonce ainsi

Théorème 1 *Un système possédant ℓ degrés de liberté et possédant un groupe de symétrie engendré par ℓ fonctions g_σ^j , $j = 1, \dots, \ell$ est tel que la quantité $I = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial g_\sigma^j(\mathbf{q})}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0}$ soit conservée.*

2 Noether et les systèmes conservatifs

2.1 Introduction

Le cas des systèmes conservatifs de la mécanique classique est le plus élémentaire de tous. L'ensemble des points constituant un tel système est soumis à une force qui dérive globalement d'une énergie potentielle U et son lagrangien est la différence entre son énergie cinétique T et cette énergie potentielle. Il s'agit du cas historique étudié par Lagrange dès les années 1760, on pourra consulter [3] pour cette génèse de la mécanique analytique à partir de la méthode de variation des constantes et [4] pour une approche plus générale de la théorie des champs classiques. Si le système est constitué de N particules de masses m_k repérées par des positions \vec{r}_k pour $k = 1, \dots, N$ on a

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k^2 \text{ et } U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

Sans nuire à la généralité du problème nous pouvons nous placer dans un système de coordonnées cartésiennes notées ξ rattachées à une base fixe $\mathcal{C} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$. Elles seront alors au nombre de $\ell = 3N$ et dans le détail nous aurons

$$\xi_1 = \vec{r}_1 \cdot \hat{u}_x, \xi_2 = \vec{r}_1 \cdot \hat{u}_y, \xi_3 = \vec{r}_1 \cdot \hat{u}_z, \xi_4 = \vec{r}_2 \cdot \hat{u}_x, \dots, \xi_{3N} = \vec{r}_N \cdot \hat{u}_z$$

et pour les énergies :

$$T = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{\xi}_j^2 \text{ et } U = U(\xi_1, \dots, \xi_{3N}).$$

Avec cette notation les masses sont redéfinies de manière à ce que $m_{3k+1} = m_{3k+2} = m_{3k+3}, \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Le lagrangien du système s'écrit $L = T - U$ et les équations de Lagrange

$$\forall j = 1, \dots, 3N \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} = 0.$$

Envisageons diverses symétries du système : invariance par translation dans l'espace, par rotation dans l'espace autour d'un axe puis par translation dans le temps.

2.2 Invariance par translation dans l'espace

Pour $k = 1, \dots, N$ et dans la base \mathcal{C} , nous introduisons les vecteurs $\vec{t}_k = (n_{3k-2}, n_{3k-1}, n_{3k})$. Le groupe de symétrie des translations de vecteurs \vec{t}_k , $k = 1, \dots, N$ est le suivant

$$\mathbb{T} = \{\sigma \in \mathbb{R}, g_\sigma\} \quad \text{avec } g_\sigma^i(\xi_1, \dots, \xi_{3N}) = \xi_i + \sigma n_i$$

L'exemple élémentaire est celui d'un système de particules libres, il y en a bien d'autres. La grandeur conservée associée à cette symétrie s'obtient directement en appliquant la relation (4) qui s'écrit dans ce contexte

$$cste = P = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial g_\sigma^j}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} = \sum_{j=1}^{3N} n_j m_j \dot{\xi}_j$$

On reconnaît la projection de la quantité de mouvement de chacune des particules suivant les directions de N vecteurs \vec{t}_k définissant la translation spatiale :

$$P = \sum_{k=1}^N \vec{t}_k \cdot m_k \vec{v}_k = cste$$

L'invariance par translation spatiale d'un système conservatif est donc associée à la conservation de la projection correspondante de la quantité de mouvement de ce système. De très nombreux « principes » sont associé à cet aspect du théorème de Noether, citons par exemple le principe d'inertie ou celui de Curie.

2.3 Invariance par rotation dans l'espace

Afin de ne pas alourdir les notations, ramenons le système à une simple particule dans l'espace à 3 dimensions repérée par $\vec{r} = \xi_1 \hat{u}_x + \xi_2 \hat{u}_y + \xi_3 \hat{u}_z$ et soumise à un potentiel $U(\vec{r})$ présentant une symétrie de rotation par rapport à l'axe (O, \hat{u}_z) , le groupe de symétrie est alors

$$\mathbb{Z} = \{\sigma \in \mathbb{R}, g_\sigma\} \quad \text{avec } \bar{g}_\sigma(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma & 0 \\ -\sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

En adaptant la relation (4), la grandeur conservée associée s'écrit maintenant :

$$J = \left. \frac{\partial \bar{g}_\sigma}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} \cdot \text{grad}_{\vec{r}}(L) = (\xi_2 \hat{u}_z - \xi_1 \hat{u}_y) \cdot m \dot{\vec{r}}.$$

On peut alors remarquer que $\xi_2 \hat{u}_z - \xi_1 \hat{u}_y = \vec{r} \wedge \hat{u}_z$ et qu'alors

$$J = (\vec{r} \wedge \hat{u}_z) \cdot m \dot{\vec{r}} = -(\vec{r} \wedge m \dot{\vec{r}}) \cdot \hat{u}_z = -\vec{\Lambda} \cdot \hat{u}_z$$

C'est donc la composante du moment cinétique $\vec{\Lambda}$ selon l'axe \hat{u}_z qui est la grandeur conservée associée au groupe de symétrie \mathbb{Z} . La généralisation est immédiate et l'on montre que la grandeur conservée associée à la symétrie de rotation autour d'un axe (O, \hat{i}) est la projection de $\vec{\Lambda}$ sur cet axe. Un système globalement invariant par rotation (symétrie SO_3) voit donc les 3 composantes de son moment cinétique conservées, le vecteur $\vec{\Lambda}$ lui-même est donc invariant.

Remarquons que pour posséder cette dernière symétrie l'énergie potentielle $U(\vec{r})$ de ce système ne peut dépendre que du module de \vec{r} , et donc que la force $\vec{F} = -\text{grad } U(\vec{r})$ est radiale. On retrouve un résultat bien connu de la mécanique mais sans réellement utiliser le « principe fondamental » de la mécanique, seul le théorème de Noether ayant été invoqué.

2.4 Invariance par translation dans le temps

Afin de pouvoir étudier une symétrie par translation temporelle, nous devons faire apparaître le temps comme l'une des coordonnées du lagrangien. C'est une technique assez habituelle de traitement des systèmes non autonomes pour lesquels le temps apparaît explicitement dans l'équation d'évolution du système en plus d'être la variable par rapport à laquelle on dérive. Notons $\xi_0 = t$ et considérons un paramètre d'évolution $\lambda = \lambda(t)$ qui n'est pas forcément le temps³. En notant toujours par un · la dérivée par rapport au temps et par un ' la dérivée par rapport à λ , même si le lagrangien dépend du temps on peut toujours écrire en coordonnées cartésiennes

$$L(t, \xi_1, \dots, \xi_\ell, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_\ell) = L\left(\xi_0, \dots, \xi_\ell, \frac{\xi'_1}{\xi'_0}, \dots, \frac{\xi'_\ell}{\xi'_0}\right) \quad \text{avec } \ell = 3N.$$

L'action pourra alors s'écrire

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L^{(e)} d\lambda \quad \text{avec } L^{(e)}(\xi_0, \dots, \xi_\ell, \xi'_0, \dots, \xi'_\ell) = \xi'_0 L\left(\xi_0, \dots, \xi_\ell, \frac{\xi'_1}{\xi'_0}, \dots, \frac{\xi'_\ell}{\xi'_0}\right).$$

Les équations de Lagrange pour ce lagrangien étendu seront

$$\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \xi_\mu} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \xi'_\mu} = 0 \quad \forall \mu = 0, \dots, \ell.$$

Lors de l'évolution du système à travers le paramètre λ , un groupe de symétrie $\mathbb{H} = \{\sigma \in \mathbb{R}, g_\sigma\}$ du système sera associée à la conservation de la quantité

$$H = \sum_{\mu=0}^{\ell} \frac{\partial g_\sigma^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \xi'_\mu} = \text{cste}.$$

Considérons un système dont le lagrangien est invariant par toute translation temporelle, soit plus explicitement

$$g_\sigma^0(\xi_0, \dots, \xi_\ell) = \xi_0 + \sigma \text{ et } g_\sigma^i = id \text{ pour tout } i = 1, \dots, \ell.$$

Le cas particulier conservatif qui nous intéresse est le cas où le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Le théorème de Noether indique alors que

$$H = \sum_{\mu=0}^{\ell} \frac{\partial g_\sigma^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \xi'_\mu} = \frac{\partial g_\sigma^0}{\partial \sigma} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \xi'_0} = \text{cste}.$$

La translation temporelle est telle que $\frac{\partial g_\sigma^0}{\partial \sigma} = 1$, en utilisant l'expression du lagrangien étendu il vient

$$H = \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \xi'_0} = L + \xi'_0 \frac{\partial L}{\partial \xi'_0}$$

si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps $L = L\left(\xi_1, \dots, \xi_\ell, \frac{\xi'_1}{\xi'_0}, \dots, \frac{\xi'_\ell}{\xi'_0}\right)$ et donc

$$\frac{\partial L}{\partial \xi'_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi'_0} \left(\frac{\xi'_i}{\xi'_0} \right) = - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\xi'_i}{\xi'^2_0} \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$$

3. Pour avoir l'esprit tranquille nous supposerons que la correspondance entre λ et t est assurée par un C^1 difféomorphisme global.

soit

$$H = L - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\xi'_i}{\xi'_0} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}'_i}.$$

Attendu que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps et que la somme démarre de l'indice $i = 1$, on peut à loisir prendre $\lambda = t$ et la constante de Noether se simplifie en

$$H = L - \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\xi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}.$$

L'expression $L = T - U$ du lagrangien d'un système conservatif permet de déterminer la nature de cette constante

$$H = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{2} m_j \dot{\xi}_j^2 - U - \sum_{i=1}^{\ell} m_i \dot{\xi}_i^2 = - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{2} m_j \dot{\xi}_j^2 - U = -T - U$$

qui s'avère donc être l'opposé de l'énergie mécanique totale du système. Nous en concluons qu'un système conservatif, qui est donc invariant sous l'action du groupe de symétrie \mathbb{H} , voit son énergie mécanique totale conservée.

Nous sommes maintenant en mesure de faire un premier bilan : L'application directe du théorème de Noether à trois grandes classes de symétries de problèmes de la mécanique classique a permis d'en déduire les trois grandeurs physiques conservées qui leurs sont associées. Force est de constater qu'un tel lien, s'il s'avère compréhensible, n'était pas aussi explicite d'une manière aussi générale avant ce théorème.

3 Noether et la mécanique quantique

3.1 Le lagrangien quantique

La théorie du champ de Shrödinger a été mise sur pied par Richard Feynman au milieu du XX^e siècle. Elle illustre la puissance de la théorie des champs tout en lui conférant un aspect magique. Cette aspect mystérieux réside dans l'écriture du lagrangien qui ne répond qu'à peu de règles outre celle de fournir le bon résultat. Les symétries que doit posséder ce lagrangien sont alors un guide essentiel dans sa construction.

La mécanique quantique non relativiste n'est quant à elle pas aussi magique que certains auteurs veulent bien le laisser croire. Dans sa quantification canonique, Dirac en 1927 explique comment on peut construire l'équation de Schrödinger à partir de la mécanique classique de façon complètement logique en changeant simplement d'algèbre. Dans cette quantification canonique, les crochets de Poisson classiques deviennent les commutateurs quantiques. Les grandes nouveautés quantiques sont en fait les axiomes d'état et de mesure, l'évolution de ces états n'a quant à elle rien de nouveau, puisqu'elle se trouve dans le droit fil des équations de la physique. Il n'est donc pas étonnant que l'on puisse étendre naturellement le formalisme de moindre action classique à la mécanique quantique.

En suivant Feynman⁴, et sans autre forme de procès, le lagrangien quantique s'écrit

$$L(\psi, \dot{\psi}) = \int dx \left[\frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V \psi \psi^* \right] \quad (5)$$

Les variables canoniques indépendantes sont la fonction $\psi(x, t)$ et sa dérivée temporelle $\dot{\psi}(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)$. Ces fonctions sont à valeurs complexes, x est un vecteur qui décrit la position de « quelque chose » à l'instant t . La fonction $V(x)$ décrit le potentiel présent dans la région où se trouve ce quelque chose.

La forme (5) est complètement symétrique, on peut en signaler une forme qui l'est moins en écrivant

$$\begin{aligned} L(\psi, \dot{\psi}) &= \int dx \left[\frac{i\hbar}{2} \left(2\psi^* \dot{\psi} - \frac{d}{dt} (\psi^* \psi) \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V \psi \psi^* \right] \\ &= \int dx \left[i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V \psi \psi^* \right] + \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

4. Pour trouver les éléments de la construction de ce lagrangien nous préférons renvoyer le lecteur vers la source originale [5] où le livre de synthèse [6]. Ce type de construction relève en fait du réel travail du physicien...

où nous avons posé $\phi(\psi) = \frac{i\hbar}{2} \int dx \psi^* \psi$. Sans préjuger de sa valeur, il est clair que $\phi(\psi)$ une jauge au sens définit plus haut (cf. équation1). On peut donc tout aussi bien considérer le lagrangien

$$L'(\psi, \dot{\psi}) = \int dx \left[i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V \psi \psi^* \right] \quad (6)$$

pour décrire l'évolution d'un système quantique, c'est ce que nous ferons dans la seconde partie de cette section. Dans la première partie nous utiliserons par contre l'expression (5) complètement symétrique.

L'action de Schrödinger est définie naturellement comme

$$S(t_1, t_2) = \int dt L(\psi, \dot{\psi}) = \int dx dt \left[\frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - V \psi \psi^* \right] \quad (7)$$

Comme nous l'avons déjà précisé, tout le génie du physicien consiste à trouver le bon lagrangien, même s'il ne dispose pour cela que de peu de règles plus ou moins formelles (principe de covariance, de simplicité, symétries, etc.). En cas de succès, comme le faisait remarquer Feynman lui-même, il est souvent récompensé par le prix Nobel !

Une fois le lagrangien écrit la procédure est toujours la même : variation de l'action avec contraintes aux bords, intégration par parties avec annulation des termes tout intégrés grâce aux contraintes, factorisation de l'élément variationnel et identification de l'équation d'évolution. C'est parti !

On cherche les fonctions $\psi(x, t)$ qui minimisent l'action (7) et qui sont complètement déterminées en t_1 et t_2 , ce que l'on peut écrire $\delta\psi|_{t_1} = \delta\psi|_{t_2} = 0$. Il vient

$$\begin{aligned} \delta S = \int dx dt & \left[\frac{i\hbar}{2} (\delta\psi^* \dot{\psi} + \psi^* \delta\dot{\psi} - \delta\dot{\psi}^* \psi - \dot{\psi}^* \delta\psi) \right. \\ & \left. - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \delta\psi \cdot \nabla \psi^* + \nabla \psi \cdot \nabla \delta\psi^*) - V (\delta\psi \psi^* + \psi \delta\psi^*) \right] \end{aligned}$$

Une intégration par parties temporelle sur les deux termes centraux de la première partie de cette variation permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \delta S = \int dx dt & \left[i\hbar (\dot{\psi} \delta\psi^* - \dot{\psi}^* \delta\psi) \right. \\ & \left. - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \delta\psi \cdot \nabla \psi^* + \nabla \psi \cdot \nabla \delta\psi^*) - V (\delta\psi \psi^* + \psi \delta\psi^*) \right] \end{aligned}$$

Le terme de bord est nul grâce aux conditions imposées à la variation.

Une intégration par parties spatiale (formule de Green) sur les deux produits scalaires de gradient donne alors

$$\delta S = \int dx dt \left[i\hbar (\dot{\psi} \delta\psi^* - \dot{\psi}^* \delta\psi) + \frac{\hbar^2}{2m} (\delta\psi \Delta\psi^* + \delta\psi^* \Delta\psi) - V (\delta\psi \psi^* + \psi \delta\psi^*) \right]$$

Le terme de bord est nul car on fait l'hypothèse que ψ , ψ^* et leurs gradients sont nuls sur le bord du domaine spatial⁵. On peut à présent factoriser $\delta\psi$ d'une part et $\delta\psi^*$ d'autre part pour obtenir

$$\delta S = \int dx dt \left[\delta\psi^* \left(i\hbar \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi - V \psi \right) + \left(-i\hbar \dot{\psi}^* + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi^* - V \psi^* \right) \delta\psi \right]$$

Si l'on veut avoir $\delta S = 0$ pour des variations $\delta\psi$ arbitraires il convient donc d'écrire

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V \psi$$

Ce qui constitue l'équation de Schrödinger, sa conjuguée permettant d'annuler le second morceau.

5. A ce stade c'est bien une hypothèse car nous n'avons pas précisé plus avant les propriétés de la fonction $\psi(x, t)$ dans cette version lagrangienne de la mécanique quantique.

3.2 La symétrie du lagrangien quantique

Il est clair que la transformation

$$\psi \rightarrow g_\sigma(\psi) = e^{i\sigma}\psi \quad (8)$$

laisse invariant les lagrangiens quantiques (5) et (6). Cette transformation est continue et l'ensemble $\mathbb{G} = \{g_\sigma, \sigma \in \mathbb{R}\}$ forme évidemment un groupe de symétrie du système défini par ces lagrangiens. Nous pouvons donc utiliser le théorème de Noether afin de déterminer la grandeur conservée associée à cette symétrie. Utilisons pour simplifier les calculs la version non symétrique (6) sans pour autant continuer à indiquer le ' superfétatoire. Ce n'est pas bien compliqué ; il suffit simplement de bien traiter la forme intégrale du lagrangien quantique. Celle-ci fait en effet apparaître une densité de lagrangien $\mathcal{L}(\psi, \dot{\psi})$ telle que

$$L(\psi, \dot{\psi}) = \int \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}) dx \text{ avec } \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}) = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi \cdot \nabla\psi^* - V\psi\psi^*$$

La symétrie g_σ porte en fait sur la densité de lagrangien, on a donc

$$\int \mathcal{L}[\psi, \dot{\psi}] dx = \int \mathcal{L}\left[g_\sigma(\psi), \frac{dg_\sigma(\psi)}{dt}\right] dx$$

L'équivalent de la relation (3) s'écrit maintenant

$$0 = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{\partial g_\sigma(\psi)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dg_\sigma(\psi)}{dt} \right) \right] dx$$

Les équations de Lagrange portent également sur la densité de lagrangien et s'écrivent $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right)$, on a donc

$$0 = \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \frac{\partial g_\sigma(\psi)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{dg_\sigma(\psi)}{dt} \right) \right] dx = \frac{d}{dt} \left[\int \frac{\partial g_\sigma(\psi)}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} dx \right]$$

La quantité conservée du théorème de Noether dans le contexte d'un lagrangien continu s'écrit donc

$$I = \int \frac{\partial g_\sigma(\psi)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} dx = cste$$

Dans le cas particuliers du groupe de symétrie engendré par la transformation (8), on a donc

$$I = \int dx \left. \frac{\partial g_\sigma(\psi)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \int dx (i\psi)(i\hbar\psi^*)$$

soit

$$\int |\psi(x, t)|^2 dx = cste \text{ et } \frac{d}{dt} \left(\int |\psi(x, t)|^2 dx \right) = 0$$

En choisissant la constante de manière à doter $\psi(x, t)$ d'une norme euclidienne unité, on retrouve l'interprétation probabiliste de cette fonction et l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique. Si l'on sait construire le lagrangien (5) à partir de considérations générales, le principe de moindre action et le théorème de Noether font une partie du reste...

Le moment est venu pour établir un second bilan intermédiaire de nos investigation. Nous avons vu ici comment l'écriture d'un lagrangien quantique suffisait dans un premier temps pour fournir l'équation de Schrödinger et dans un second permettait grâce au théorème de Noether de comprendre la nature de sa solution $\psi(x, t)$ et de la relier en profondeur aux symétries du système. Ce type de méthode a été généralisé depuis plusieurs dizaines d'années comme le principal outil d'investigation en physique théorique.

4 Noether et le vecteur excentricité du problème à 2 corps

Revenons sur des terres plus classiques mais pas forcément plus connues.

Soit deux corps A et B de masses $m_A = M$ et $m_B = m$ seuls dans l'univers et en interaction gravitationnelle. Dans un référentiel galiléen d'origine O les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} m_A \frac{d^2 \overrightarrow{OA}}{dt^2} = -Gm_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|^3} \\ m_B \frac{d^2 \overrightarrow{OB}}{dt^2} = -Gm_A m_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3} \end{cases}$$

La différence de ces deux équations permet d'écrire le mouvement de B dans le référentiel non galiléen centré sur A , il vient

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \mu = G(M+m) \quad (9)$$

Ce problème est invariant par rotation autour de n'importe quel axe passant par A , par application du théorème de Noether les 3 composantes du moment cinétique sont donc conservées. On peut aussi retrouver ce résultat de façon plus classique en dérivant $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ par rapport au temps, il vient

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{0} - \frac{\mu m}{r^3} \vec{r} \wedge \vec{r} = \vec{0}$$

Une deuxième constante du mouvement, associée à l'invariance du système par translation dans le temps, est l'énergie totale E . On retrouve cette constante en multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\vec{r}}$ et en intégrant. Il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{|\vec{r}|^3} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{\vec{r}})^2 \right] - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \text{grad} \left(\frac{\mu}{|\vec{r}|} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{\vec{r}})^2 - \frac{\mu}{|\vec{r}|} \right] = \frac{1}{m} \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

Il s'agit bien de l'énergie mécanique totale contenue dans ce système car le point A n'a pas de vitesse dans son référentiel.

Une dernière intégrale première du mouvement est le vecteur

$$\vec{R} = m \left(\dot{\vec{r}} \wedge L - \mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$$

dont l'expression permet de vérifier tout d'abord que $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$ mais aussi que $\vec{R} \cdot \vec{L} = 0$ ce qui prouve que ce vecteur est dans le plan du mouvement. La conservation de ce vecteur a été découverte par Jacob Hermann dans la première moitié du XVIII^e siècle. Il est donc improprement appelé vecteur de Laplace ou vecteur de Runge-Lenz. Dans une appellation plus moderne il est souvent nommé vecteur excentricité. Il est resté longtemps mystérieux et ce ne sont que les symétries de Noether qu'il recèle qui l'ont démasqué. L'étude complète de cet aspect du problème nécessite une longue et périlleuse mise en place. Nous proposons donc ici de n'apporter que quelques éléments géométriques illustrant la symétrie cachée du problème à deux corps sans entrer dans trop de détails.

Le mouvement de B autour de A s'effectue dans le plan orthogonal à \vec{L} , l'équation polaire du mouvement est la conique

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \text{ avec } r = |\overrightarrow{AB}|, p = \frac{L^2}{\mu m^2} \text{ et } e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu^2 m^3}}$$

Dans le cas d'une énergie négative, la trajectoire est une ellipse de demi-grand axe

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{p}{1 - e^2},$$

représentée sur la figure 1. Il est notable de remarquer que l'énergie mécanique totale ne dépend que a , M , m et G à travers la relation

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 - \frac{m\mu}{r} = -\frac{m\mu}{2a}.$$

Cette relation permet également d'obtenir le module de la vitesse de m selon l'expression

$$v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (10)$$

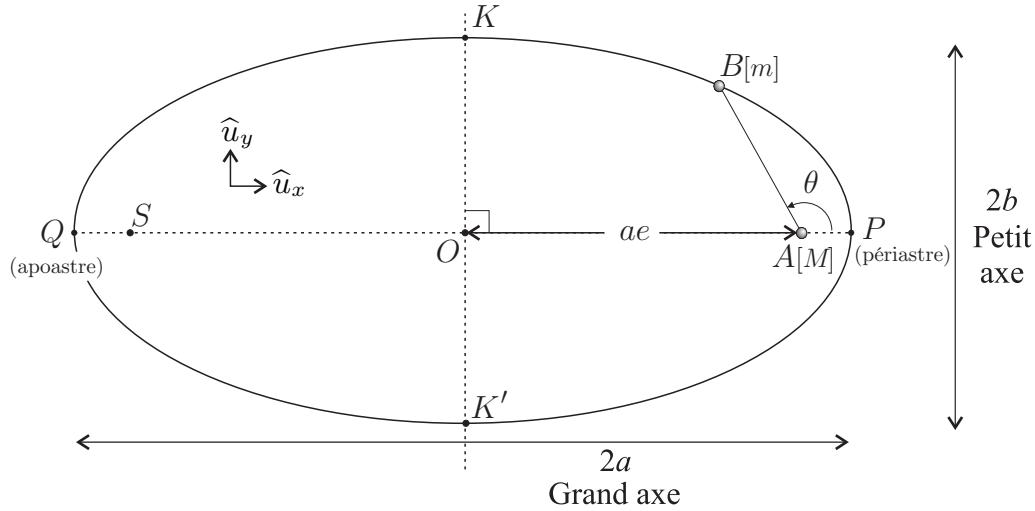


FIGURE 1 – Si $E < 0$, la trajectoire de B de masse m autour de A de masse M est une ellipse de foyer attracteur A et d'excentricité e .

qui est donc maximale au périastre et minimale à l'apoastre.

Intéressons-nous à présent à l'hodographe, ou lieu des vitesses de m . C'est un simple calcul qui donne

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\theta} \frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

En coordonnées polaires dans le plan du mouvement $L = |\vec{L}| = mr^2\dot{\theta}$ et $\vec{r} = r(\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y)$ ainsi

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} [r(\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y)] \\ &= \frac{L}{mr^2} \left[\frac{dr}{d\theta} (\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y) + r(-\sin\theta \hat{u}_x + \cos\theta \hat{u}_y) \right] \end{aligned}$$

l'expression polaire de l'ellipse permet de voir que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ep \sin\theta}{(1 + e \cos\theta)^2} = \frac{er^2 \sin\theta}{p}$$

et donc

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{L}{pm} [e \sin\theta (\cos\theta \hat{u}_x + \sin\theta \hat{u}_y) + (1 + e \cos\theta)(-\sin\theta \hat{u}_x + \cos\theta \hat{u}_y)] \\ &= \frac{L}{pm} [e \hat{u}_y - \sin\theta \hat{u}_x + \cos\theta \hat{u}_y] \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $p = \frac{L^2}{\mu m^2}$ puis que $a = \frac{p}{1-e^2}$ on obtient finalement

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2m\mu}{2a(1-e^2)m}} (e \hat{u}_y - \sin\theta \hat{u}_x + \cos\theta \hat{u}_y) = \sqrt{\frac{2(-E)}{m(1-e^2)}} (e \hat{u}_y - \sin\theta \hat{u}_x + \cos\theta \hat{u}_y)$$

L'hodographe est donc un cercle de centre C tel que $\overrightarrow{OC} = \sqrt{\frac{2e^2(-E)}{m(1-e^2)}} \hat{u}_y$ et de rayon $\rho = \sqrt{\frac{2(-E)}{m(1-e^2)}}$.

La vitesse en K , notée $\vec{v}(K)$, est selon \hat{u}_x et de sens opposé, on a donc $\cos(\theta(K)) = -e$ d'où l'on déduit $\sin(\theta(K)) = \sqrt{1 - e^2}$. Le théorème de Pythagore permet de voir que $r(K) = KM = a$, on peut donc calculer $|\vec{v}(K)|$ en appliquant la relation (10) il vient $|\vec{v}(K)| = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{-2E}{m}}$ et donc finalement

$$\vec{v}(K) = -\sqrt{-\frac{2E}{m}} \hat{u}_x.$$

Lorsqu'il est en K , on applique au point B de masse m une rotation d'un angle φ dans le plan du mouvement autour du point A de masse M . Il est ainsi transporté en un point K_φ d'où on le lâche en conservant sa vitesse $\vec{v}(K_\varphi) = \vec{v}(K)$. Il est remarquable de constater que la trajectoire de m restera une ellipse de même demi-grand axe, de même foyer attracteur A et caractérisée par la même énergie E .

Cette propriété est en fait évidente : sans changement des masses, l'énergie, qui ne dépend que de a , demeure inchangée lors de la rotation. La nouvelle orbite est donc bien d'énergie négative donc elliptique. De plus, le seul point de cette orbite pour lequel la vitesse de m est portée uniquement par l'opposé de \hat{u}_x est K_φ , il est donc tel que $K_\varphi A = a$. On comprend donc que dans cette rotation, seuls sont changés le petit-axis b_φ , l'excentricité e_φ et la position S_φ du foyer non attracteur de la nouvelle ellipse représentée avec l'initiale sur la figure 2.

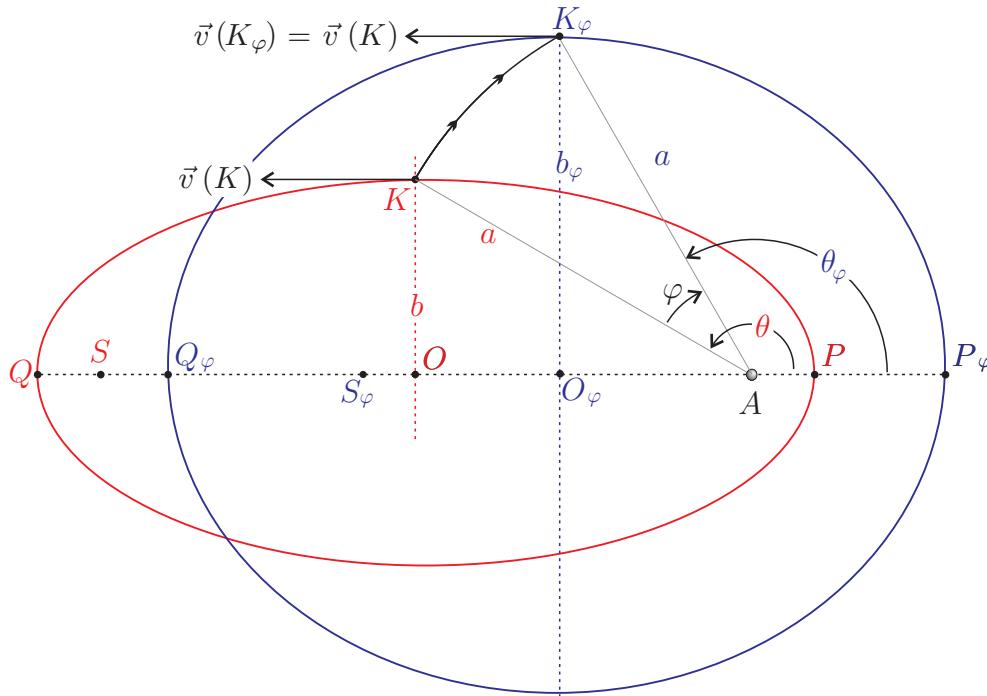


FIGURE 2 – L'ellipse initiale en rouge et la nouvelle (en bleu) correspondant à la trajectoire de la masse m autour de M après sa rotation d'angle φ au passage en K .

Notons que l'on peut calculer explicitement b_φ et e_φ : avec un angle φ compté dans le sens contraire de θ (pour simplifier le schéma...) on a $e_\varphi = -\cos(\theta(K_\varphi)) = -\cos(\theta(K) - \varphi) = -\cos \varphi \cos \theta(K) - \sin \varphi \sin \theta(K)$ et comme l'on a déjà calculé les expressions de $\cos \theta(K)$ et $\sin \theta(K)$ il vient

$$e_\varphi = e \cos \varphi - \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi$$

sans doute pas valable pour toutes les valeurs de e ... On en déduit alors l'expression de $b_\varphi = a \sqrt{1 - e_\varphi^2}$.

Les paramètres de l'hodographe déterminés pour l'ellipse initiale peuvent être transposés à la nouvelle trajectoire dont le lieu des vitesses sera le cercle de centre C_φ tel que $\overrightarrow{OC_\varphi} = \sqrt{-\frac{2E}{m}} \sqrt{\frac{e_\varphi^2}{1-e_\varphi^2}} \hat{u}_y$ et de rayon

$\rho_\varphi = \sqrt{-\frac{2E}{m}} \frac{1}{\sqrt{1-e_\varphi^2}}$. Il est important de remarquer que ce nouveau cercle aura deux points communs avec l'ancien : ceux correspondants aux points K et K' tous deux séparés de a du foyer attracteur et dont les vitesses restent selon \hat{u}_x et de norme inchangée dans la rotation d'angle φ . Ces deux cercles sont représentés sur la partie gauche de la figure 3. La généralisation est immédiate : en faisant varier continûment φ dans $[0, 2\pi]$, on obtient une famille \mathcal{F}_E de cercles passant par deux points fixes et possédant un axe de symétrie en commun. Cette famille est représentée sur la partie droite de la figure 3.

Faire varier l'angle φ fait également varier le module du moment cinétique du point B de masse m , on a en effet

$$p = \frac{L^2}{\mu m^2} \text{ et } a = \frac{p}{1 - e^2} \text{ soit } L^2 = a \mu m^2 (1 - e^2) \implies L_\varphi^2 = a \mu m^2 (1 - e_\varphi^2)$$

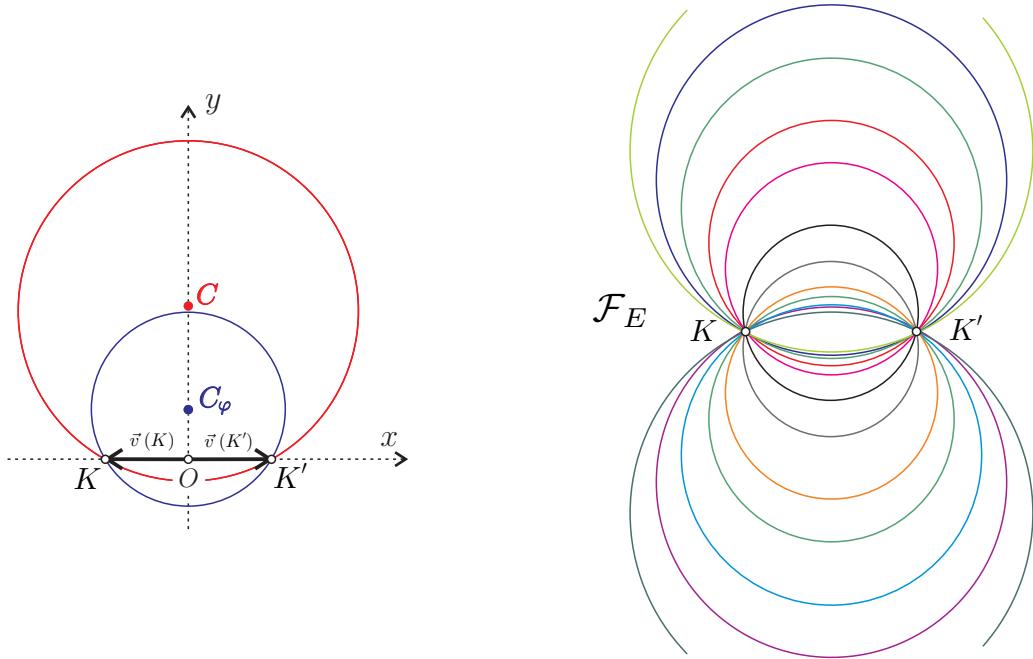


FIGURE 3 – Partie gauche : Hodographe des deux trajectoires étudiées – Ensemble des hodographes pour une valeur fixée de l'énergie E .

L'énergie est définie par la relation

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 - \frac{m\mu}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{m\mu}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{m\mu}{r}$$

d'où l'on déduit

$$L^2 = 2mr^2 \left(E + \frac{m\mu}{r} \right) - m^2 r^2 \dot{r}^2 = 2m^2 r \mu - m^2 r^2 \left(\frac{\mu}{r} - \dot{r}^2 \right)$$

Pour une valeur de $E < 0$ fixée, le moment cinétique varie entre $L^2 = 0$ pour une orbite purement radiale et $L^2 = a\mu m^2$ pour une orbite circulaire ($r = a$ et $\dot{r} = 0$). Cet intervalle de variation est aussi celui des valeurs possibles de L_φ^2 correspondant à une orbite fermée d'énergie négative ($e_\varphi \in [0, 1]$). On en déduit que pour une valeur de E fixée toutes les orbites possibles de m sont atteintes en appliquant le processus de rotation d'angle φ au passage au point de vitesse horizontale décrit plus haut. Ainsi l'ensemble des hodographes pour une valeur fixée de l'énergie est-il la famille de cercles \mathcal{F}_E .

La famille \mathcal{F}_E est aussi la projection stéréographique des cercles méridiens passant par les points k et k' de la sphère S_2 sur le plan tangent à son pôle sud⁶. Pour ceux qui auraient lâché l'affaire, la figure 4 les aidera sans doute...

Il est clair qu'une rotation de la sphère S_2 autour de l'axe kk' laissera la famille \mathcal{F}_E globalement invariante. C'est donc ainsi qu'apparaît $SO(3)$ dans cette histoire !

Nous n'avons considéré, pour le moment, que les variations du module du moment cinétique \vec{L} à énergie constante. Pour être exhaustif, il faut également faire varier la direction de \vec{L} et envisager toutes les valeurs négatives possibles de E .

On trouvera dans diverses références (voir [7] et les références citées) – dont le niveau est largement plus avancé que l'approche descriptive de ce texte initiatique – la preuve que l'hodographe des vitesses de toutes les orbites képlériennes ($E < 0$) du problème à deux corps est la projection stéréographique de la sphère S_3 sur le plan tangent à son pôle sud. Pour entrevoir sans autre forme de procès ce résultat, on se convaincra que chaque hodographe circulaire correspondant à une valeur de E et de L^2 devient une sphère dans la généralisation. Cette sphère S_2 est elle-même la projection stéréographique d'un grand cercle de S_3 ...

Dans son article fondateur Jurgen Moser [7] montre que le groupe de symétrie de S_3 , c'est-à-dire $SO(4)$, est le groupe de Noether associé à la conservation du vecteur de Lenz, qui l'eut cru !

6. On rappelle que la sphère S_{n-1} est la surface de la boule unité de \mathbb{R}^n .

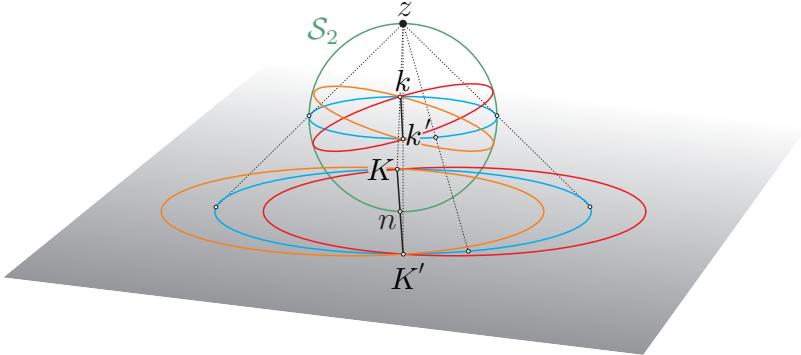


FIGURE 4 – Projection stéréographique de cercles méridiens de la sphère S_2 sur le plan tangent à son pôle sud. Le pôle nord est noté z pour zénith et le pôle sud n pour nadir.

Je ne résistais pas au plaisir de faire partager cette découverte qui aurait sans doute ravi Emmy Noether.

5 Conclusion

Lors de cette balade en symétrie, nous avons rencontré le principe de moindre action éclairé par son phare que représente le théorème de Noether. À la manœuvre, le principe de moindre action engendre les équations de la physique et le théorème de Noether permet d'en tirer les éléments nécessaires à leurs résolutions (intégrales premières). Nous avons illustré leur application en mécanique classique conservative, en mécanique quantique ou dans le détail du vieux problème des deux corps. De nombreux autres domaines de la physique se laissent également éclairer comme les relativités restreintes et générales, la théorie quantique des champs et une large classe de théories de « nouvelle physique ». Certains pensent même qu'il s'agit là du véritable moteur de la « philosophie naturelle ». S'ils ont raison, quel bonheur de constater que le fondement de la physique serait écrit de si jolies mathématiques.

Références

- [1] Nina Byers, *Emmy Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws*. in Proceedings of a Symposium on the Heritage of Emmy Noether, held on 2–4 December 1996, at the Bar-Ilan University, Israel, Appendix B. (1998)
- [2] Auguste Dick, *Emmy Noether (1882 -1935)*, Birkhauser (1981); English translation by H.I. Blocher.
- [3] Jérôme Perez, *Gravitation classique* – seconde édition, Les Presses de l'Ensta. 243 Pages, (2011)
- [4] Jérôme Perez, *Théorie des champs classiques*, Les Presses de l'Ensta. 200 Pages, (2008)
- [5] Richard P. Feynmann, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics 20 (1948), 367—387
- [6] Laurie M Brown Editor, *Feynman's Thesis — A New Approach to Quantum Theory*, World Scientific, (2005)
- [7] Jurgen Moser, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Commun. pure appl. math. 23 (1970), 609–636