

De la physique statistique à la mécanique des fluides

Jérôme Perez – Mars 2017

1 Théorème H (Second principe)

Dans l'hypothèse de Boltzmann tous les états microscopiques sont équiprobables. Si l'on note Ω le nombre de ces états microscopiques et si chacun conduit à un état macroscopique différent, l'entropie S du système sera donnée par $S = k_B \ln \Omega$. La probabilité d'être dans un état macroscopique donné sera uniforme $F_B = \Omega^{-1}$. Si Ω est constant, l'entropie sera constante et sa moyenne $\langle S \rangle = k_B \langle \ln \Omega \rangle = -k_B \langle \ln F_B \rangle$. Ce cas particulier qui peut paraître simpliste correspond en fait à de nombreuses situations appelées microcanoniques.

Si l'on considère maintenant les N particules constituant le système aux positions $\mathbf{r}_{i=1, \dots, N}$ et avec les impulsions $\mathbf{p}_{i=1, \dots, N}$, on peut définir l'état \mathbf{w}_i qui à l'instant t correspond au fait que la particule i possède l'impulsion \mathbf{p}_i à $d\mathbf{p}_i$ près et se trouve à la position \mathbf{r}_i à $d\mathbf{r}_i$ près. Dans une approche heuristique la quantité

$$P(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) = F(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) \prod_{i=1}^N d\mathbf{w}_i$$

correspond à la probabilité pour que la particule $i = 1, \dots, N$ se trouve dans l'état \mathbf{w}_i à l'instant t et $F(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$ correspond à la densité de probabilité associée. La position et l'impulsion de chaque particule deviennent des variables aléatoires décrites par une densité de probabilité à $6N + 1$ variables. Cette dernière quantité généralise la quantité F_B introduite par Boltzmann dans le cas particulier microcanonique. La définition de l'entropie moyenne devient dans ce contexte probabiliste

$$S = -k_B \int F \ln F d\mathbf{W} \quad \text{avec } d\mathbf{W} = \prod_{i=1}^N d\mathbf{w}_i$$

qui s'interprète naturellement comme une espérance mathématique. Tout est maintenant prêt pour calculer la variation temporelle de l'entropie $\frac{\partial S}{\partial t}$, en dérivant sous le signe somme il vient

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -k_B \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} \ln F + \frac{\partial F}{\partial t} \right) d\mathbf{W} \quad (1)$$

Détaillons le calcul de $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$ qui s'écrit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}_i} F + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_i} F \quad (2)$$

Si le système est hamiltonien¹, les équations de Hamilton nous indiquent alors que

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = + \text{grad}_{\mathbf{p}_i} H \\ \dot{\mathbf{p}}_i = - \text{grad}_{\mathbf{r}_i} H \end{cases}$$

où H est le hamiltonien de ce système. Dans l'hypothèse conservative, l'équation (2) peut donc s'écrire

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^N + \text{grad}_{\mathbf{p}_i} H \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_i} F - \text{grad}_{\mathbf{r}_i} H \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}_i} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \quad (3)$$

Nous voyons réapparaître, non sans bonheur, le crochet de Poisson dans cette équation qui n'est autre qu'un cas particulier de l'équation fondamentale de la mécanique classique bien connue des amateurs de mécanique analytique.

L'hypothèse hamiltonienne ou conservative permet de montrer que la quantité $d\mathbf{W} = \prod_{i=1}^N d\mathbf{w}_i$ ne dépend pas du temps, c'est le fameux théorème de Liouville : le volume occupé par le système dans l'espace des phases se déforme mais reste constant.

¹Ce qui est vrai par exemple pour un système conservatif dans lequel toutes les forces appliquées aux particules constituant le système dérivent d'un potentiel $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$.

La fonction F étant mesurable et sa mesure ne dépendant pas du temps on a donc $\frac{dF}{dt} = 0$. Pour un système conservatif nous aurons donc

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial t} = -\{F, H\} \quad (4)$$

Cette équation est appelée équation de Liouville, bien que déduite par Gibbs à la toute fin du XIX^e siècle. Nous pouvons maintenant revenir au calcul de la dérivée temporelle de S en revenant à l'équation (1).

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_B \int \ln F \{F, H\} d\mathbf{W} - k_B \int \frac{\partial F}{\partial t} d\mathbf{W}$$

Un exercice simple d'intégration par partie sur les crochets de Poisson permet de voir que

$$k_B \int \ln F \{F, H\} d\mathbf{W} = -k_B \int F \{\ln F, H\} d\mathbf{W}$$

Le terme tout intégré est nul car en tant que densité de probabilité F s'annule sur le bord du système. On utilise à présent la relation (4) pour $\ln F$ plutôt que F et l'on obtient

$$\{\ln F, H\} = -\frac{\partial \ln F}{\partial t} = -\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t}$$

Pour la variation temporelle de l'entropie on trouve finalement

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_B \int \frac{\partial F}{\partial t} d\mathbf{W} - k_B \int \frac{\partial F}{\partial t} d\mathbf{W} = 0$$

L'entropie se conserve dans un système conservatif ! Mais attention de ne pas confondre ces deux conservations : l'une décrit celle de l'entropie, l'autre le fait que les forces appliquées aux particules dérivent d'une énergie potentielle et donc que l'énergie se conserve.

Si le système n'est plus hamiltonien, parce qu'il dissipe de l'énergie par exemple, on montre que son entropie n'est plus conservée... En écrivant une forme très générale pour $\frac{dF}{dt} \neq 0$, Boltzmann pu montrer que $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ c'est son fameux théorème H .

2 Equations de la mécanique des fluides

La fonction $F(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t)$ permet une description certes probabiliste mais complète du système. Un certain nombre d'hypothèses permettent de réduire le nombre de variables. Introduisons par exemple

$$f(\mathbf{w}, t) = \int \cdots \int F(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N, t) d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

la première loi marginale dont nous avons noté la variable \mathbf{w} afin de simplifier les notations. Supposons les particules indiscernables, dotées de marginales identiques et non corrélées, la fonction $f(\mathbf{w}, t)$ décrit alors une particule moyenne du système, appelée souvent particule test, évoluant sous l'influence moyenne de toutes les autres. Cette influence moyenne est décrite par une partie conservative dérivant d'une énergie potentielle de champ moyen $U(\mathbf{r})$ et d'une partie dissipative $C(f)$, souvent appelée collisionnelle. Cette fonction est alors solution de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) - \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) = C(f)$$

Cette équation comporte un premier membre quasiment identique à l'équation de Liouville mais s'applique à f plutôt que F ; le second membre décrit quant à lui une dissipation macroscopique. Simplifions encore la situation et supposons le système conservatif : $C(f) = 0$, et pour plus de lisibilité, posons $\vec{p} = \mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$ et $\vec{r} = \mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]^T$. L'équation de Boltzmann devient celle de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) - \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) = 0 \quad (5)$$

On calcule les moments d'une quantité scalaire x sur l'espace des impulsions pour cette équation, c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_n(x) = \int x^n \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) - \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) \right] d\mathbf{p} = 0$$

La fonction $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ est la fonction de distribution de probabilité de présence du système dans l'espace des phases à chaque instant. Elle est donc mesurable pour chacune de ses variables indépendantes \mathbf{r} et \mathbf{p} et en particulier

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0$$

Les lois marginales

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \text{ et } \omega(\mathbf{p}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}$$

sont des fonctions régulières et mesurables, à chaque instant t , elles correspondent aux densité volumiques respectives dans l'espace des positions pour $\nu(\mathbf{r}, t)$ et dans l'espace des impulsions pour $\omega(\mathbf{p}, t)$. La fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ n'est pas nécessairement normalisée à l'unité mais plutôt au nombre de particules constituant le système. Ces particules toutes identiques et de masse m sont alors réparties selon une densité volumique de masse

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m\nu(\mathbf{r}, t) = m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}$$

2.1 Moment d'ordre 0 : Equation de continuité

La linéarité de l'intégrale permet d'écrire

$$\mathcal{M}_0(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{p} + \frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} - \int \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = 0$$

Etudions séparément chacun des termes :

- La dérivée partielle par rapport au temps n'est pas affectée par l'intégration sur l'espace des impulsions, on a donc

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\mathbf{p} = \frac{\partial \nu}{\partial t}$$

- Les variables \mathbf{p} et \mathbf{r} sont indépendantes : $\text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \text{div}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0$. Plus explicitement on a $\text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}f) = f \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) = \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f)$. On peut donc sans problème sortir le gradient sur les positions de l'intégration sur les impulsions dans le second terme

$$\frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \int \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}f) d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \text{div}_{\mathbf{r}} \left(\int \mathbf{p} f d\mathbf{p} \right)$$

Dans cette dernière intégrale on voit apparaître le moment d'ordre 1 des impulsions

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{\int \mathbf{p} f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}} = \frac{\int \mathbf{p} f d\mathbf{p}}{\nu}$$

que l'on appelle en physique le champ des impulsions, c'est un champ de vecteurs qui dépend de \mathbf{r} et de t et qui donne l'impulsion moyenne du système au point de l'espace et à l'instant considéré. La présence de la densité au dénominateur prend en compte le fait que la fonction de distribution n'est pas nécessairement normée à l'unité. Finalement on aura

$$\frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \text{div}_{\mathbf{r}}[\nu \langle \mathbf{p} \rangle]$$

en faisant apparaître le champ moyen des vitesses dans le système

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}$$

il vient

$$\frac{1}{m} \int \mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} = \text{div}_{\mathbf{r}}[\nu \langle \mathbf{v} \rangle]$$

- Afin de pouvoir éliminer les termes de dissipation et écrire l'équation de Vlasov, le système est supposé conservatif. L'énergie potentielle U ne dépend ainsi que de la position et son gradient donne l'ensemble des champs de forces qui s'appliquent au système. La fonction $\nabla_{\mathbf{r}} U$ n'est donc pas affectée par l'intégration sur les impulsions, elle peut sortir de l'intégrale et l'on a

$$-\int \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = -\text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \int \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p}$$

Les propriétés de la fonction de distribution sur le bord du système, fut-il renvoyé à l'infini, permettent donc d'annuler ce terme :

$$\int \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = \vec{0} \implies -\int \text{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = 0$$

Le moment d'ordre 0 de l'équation de Vlasov s'écrit donc

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{p}) = \frac{\partial \nu}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} [\nu \langle \mathbf{v} \rangle] = 0$$

En introduisant le champ de masse volumique dans le système $\rho(\mathbf{r}, t) = m\nu(\mathbf{r}, t)$ où m est une masse caractéristique (moyenne) des constituants du système cette équation s'écrit finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = 0$$

(6)

Cette équation est appelée équation de continuité, elle décrit la conservation du nombre de particules et donc de la masse totale ou locale.

2.2 Moment d'ordre 1 : Équation d'Euler

La linéarité de l'intégrale permet toujours d'écrire

$$\mathcal{M}_1(p_i) = \int \frac{\partial f}{\partial t} p_i d\mathbf{p} + \frac{1}{m} \int p_i \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(f) d\mathbf{p} - \int p_i \operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(U) \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{p}}(f) d\mathbf{p} = 0$$

En explicitant les produits scalaires il vient

$$\mathcal{M}_1(p_i) = \int \frac{\partial f}{\partial t} p_i d\mathbf{p} + \sum_{j=1}^3 \int \frac{p_i p_j}{m} \frac{\partial f}{\partial r_j} d\mathbf{p} - \sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p} = 0$$

- Les équations de Hamilton s'écrivent en utilisant les crochets de Poisson sous la forme $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \{\mathbf{p}, H\}$, cette équation implique que $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \vec{0}$, on peut donc comme pour le moment d'ordre 0, sortir la dérivée partielle par rapport au temps de l'intégrale dans le premier terme qui devient

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} p_i d\mathbf{p} = \int \frac{\partial (p_i f)}{\partial t} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int p_i f d\mathbf{p} \right) = \frac{\partial [\nu \langle p_i \rangle]}{\partial t}$$

- Le fait que les impulsions et les positions soient des variables indépendantes s'écrit $\frac{\partial p_i}{\partial r_j} = 0$ pour tous les choix possibles de i et j . Le terme central s'écrit donc

$$\sum_{j=1}^3 \int \frac{p_i p_j}{m} \frac{\partial f}{\partial r_j} d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \int \frac{\partial (p_i p_j f)}{\partial r_j} d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_j} \int p_i p_j f d\mathbf{p}$$

Dans cette dernière équation on voit maintenant apparaître un moment de produits d'impulsions

$$\langle p_i p_j \rangle = \frac{\int p_i p_j f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}} = \frac{\int p_i p_j f d\mathbf{p}}{\nu}$$

ainsi

$$\sum_{j=1}^3 \int \frac{p_i p_j}{m} \frac{\partial f}{\partial r_j} d\mathbf{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\nu \langle p_i p_j \rangle]}{\partial r_j}$$

- Enfin, dans le dernier terme le facteur $\frac{\partial U}{\partial r_j}$ ne dépend pas des impulsions il est donc constant lors de l'intégration sur celles-ci et peut sortir de l'intégrale qui devient

$$-\sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p} = -\frac{\partial U}{\partial r_j} \sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p}$$

qu'une intégration par partie transforme en

$$-\sum_{j=1}^3 \int p_i \frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} d\mathbf{p} = 0 + \frac{\partial U}{\partial r_j} \sum_{j=1}^3 \int f \frac{\partial p_i}{\partial p_j} d\mathbf{p} = \frac{\partial U}{\partial r_i} \int f d\mathbf{p} = \nu \frac{\partial U}{\partial r_i}$$

Finalement, la somme des trois termes donne

$$\mathcal{M}_1(p_i) = \frac{\partial [\nu \langle p_i \rangle]}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\nu \langle p_i p_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_j} = 0$$

soit

$$\frac{\partial [\rho \langle v_i \rangle]}{\partial t} + m \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i v_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$$

ou encore

$$\langle v_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + m \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i v_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$$

En retirant à cette dernière forme, l'équation de continuité multipliée par $\langle v_i \rangle$ il vient

$$\langle v_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + m \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i v_j \rangle]}{\partial r_j} + \nu \frac{\partial U}{\partial r_i} - \langle v_i \rangle \operatorname{div}_{\mathbf{r}} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = 0$$

en explicitant la divergence on obtient

$$\langle v_i \rangle \operatorname{div}_{\mathbf{r}} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = \langle v_i \rangle \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_j \rangle]}{\partial r_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle]}{\partial r_j} - \sum_{j=1}^3 \rho \langle v_j \rangle \frac{\partial [\langle v_i \rangle]}{\partial r_j}$$

et donc finalement

$$\rho \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \langle v_j \rangle \frac{\partial [\langle v_i \rangle]}{\partial r_j} \right) = -m \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial [\rho \sigma_{ij}^2]}{\partial r_j} \right) - \nu \frac{\partial U}{\partial r_i}$$

Où l'on a introduit la covariance du champ de vitesse

$$\sigma_{ij}^2 = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$$

Il ne reste plus qu'à introduire le champ de pression $P(\mathbf{r}, t)$ dans le fluide tel que (par définition)

$$\frac{\partial P}{\partial r_i} = m \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial [\rho \sigma_{ij}^2]}{\partial r_j} \right)$$

et le potentiel $\psi(\mathbf{r}, t)$ des forces au sein du fluide tel que $U = m\psi$ pour avoir

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + [\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{r}}] \langle \mathbf{v} \rangle \right) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} (P) - \rho \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} (\psi)$$

qui est l'équation d'Euler que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\rho \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} (P) - \rho \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} (\psi)$$

2.3 Conclusion

L'équation de continuité et l'équation d'Euler forment le système de base pour l'étude des fluides non dissipatifs. Elle s'écrivent comme un système d'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho \langle \mathbf{v} \rangle] = 0 \\ \rho \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} (P) - \rho \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} (\psi) \end{cases} \quad (7)$$

L'inconnue de ce système d'équations aux dérivées partielles est bien souvent le champ moyen $\langle \mathbf{v} \rangle$ des vitesses dans le fluide. Ce champ de vecteur est une fonction de la position \mathbf{r} et du temps t . Une hypothèse courante est de supposer l'existence d'une équation d'état du fluide, i.e. une relation entre le champ de pression P dans le fluide et le champ de densité volumique de masse ρ . Pour un fluide parfait nous avons vu dans le cours de physique statistique que cette équation d'état pouvait être barotropique, c'est-à-dire de la forme

$$P = \omega \rho$$

où la constante ω dépend de la nature du fluide. Les deux inconnues du problème sont alors les fonctions $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$ et $\rho(\mathbf{r}, t)$ que l'on peut tenter d'obtenir en résolvant le système (7). Dans le cas général cette résolution est souvent numérique et nécessite d'une part la donnée du champ moyen de potentiel $\psi(\mathbf{r}, t)$ au sein du fluide et d'autre part la précision d'un nombre suffisant de conditions en temps et en espace. Ces conditions, ou contraintes, généralisent pour les équations aux dérivées partielles les conditions initiales que l'on doit fournir pour obtenir la solution d'un problème décrit par une équation différentielle.

Si le système n'est plus conservatif tout s'écroule dans le modèle précédent !

Les sources de dissipation sont si variées qu'il n'est plus possible de faire une théorie générale. Si l'on repart de l'équation de Boltzmann, on peut tenter de fabriquer un terme $C(f)$ afin de prendre en compte un certain type de dissipation. On pourra généraliser le théorème H pour une large classe de systèmes dissipatifs. On montrera qu'un certain type de dissipation peut être résumé un coefficient μ appelé viscosité dynamique, dans les cas simples l'équation de continuité demeure valide et l'équation d'Euler devient celle de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = - \operatorname{grad} P - \rho \operatorname{grad} \psi - \mu \Delta \langle \mathbf{v} \rangle$$

Toutes les formes de dissipation ne peuvent pas être prises en compte par cette équation. Pour les fluides peu denses, et dans le cadre d'une théorie du proche équilibre, on peut exprimer le coefficient de viscosité en fonction de caractéristiques microscopiques du fluide. Dans le cas plus général, cette équation est purement macroscopique et s'interprète à partir d'un bilan d'impulsion.