

Recueil des examens du cours de Gravitation du M2 d'Astronomie & Astrophysique d'Île de France

Jérôme Perez

10 avril 2018

Table des matières

1	Les points de Lagrange	2
2	Le métro gravitationnel	6
3	Orbium Caelestium	9
4	Les galaxies polytropiques	11
5	Masses complexes, distances imaginaires	14
6	Une affaire de dimension	17
7	Gravitation newtonienne, matière noire, gravitation modifiée	20
8	Mouvement d'une particule de masse variable dans un potentiel gravitationnel	23
9	Équations planétaires, mouvements classiques du périastre, application à Mercure	24
10	Harcèlement entre polytropes	26
11	Un modèle de sphère isotherme en boîte	29
12	Le trou noir des sphères isothermes	32
13	La loi de Titius-Bode	35
14	Le gravidyne	40
15	Autour des potentiels logarithmiques	42
16	Noether et le vecteur excentricité	44
17	Le théorème de Bertrand	48
18	Construction d'une orbite keplerienne à la règle et au compas	52

1 Les points de Lagrange

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique en Janvier 2001

Nous considérons dans tout ce problème deux corps A et B sphériques, homogènes et de masses respectives m_A et m_B . Le corps B est supposé en orbite circulaire de rayon R autour du corps A . Seule l'interaction gravitationnelle entre ces deux corps sera prise en compte.

A - Orbite circulaire

1. Le référentiel (\mathcal{F}) centré sur A est-il galiléen ?
2. Pourquoi le mouvement de B s'effectue dans un plan P ? Dans quelles conditions l'interaction gravitationnelle entre deux corps sphériques conduit-elle à une orbite quasi-circulaire ?
3. Soit \vec{e}_z un vecteur unitaire orthogonal à P (voir figure 1).

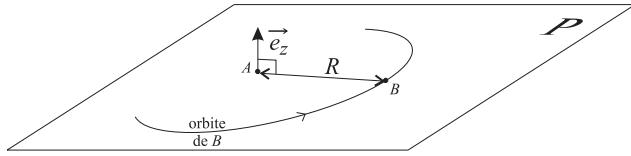


FIGURE 1 – Plan orbital

Montrer que la vitesse angulaire de B dans (\mathcal{F}) est $\vec{\Omega} = n \vec{e}_z$ avec

$$n = \frac{\sqrt{G(m_A + m_B)}}{R^{3/2}}$$

B - Trajectoire d'une particule test

On se place dorénavant dans un référentiel (\mathcal{T}) toujours centré sur A mais tournant avec B . Dans (\mathcal{T}) ces deux corps sont donc **fixes**. On considère alors le mouvement d'une particule de masse m très petite devant celles de A et B . Nous faisons l'hypothèse que cette particule se déplace uniquement dans P . On repère la particule dans (\mathcal{T}) par sa position $\vec{r} = (x, y, 0)$ et sa vitesse $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ (voir figure (2)).

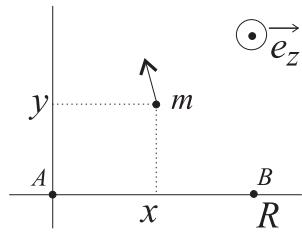


FIGURE 2 – Référentiel tournant

1. Montrer que le lagrangien du système dans (\mathcal{T}) s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 - U$$

avec

$$U = -\frac{Gmm_A}{r_1} - \frac{Gmm_B}{r_2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x - R)^2 + y^2} \end{cases}$$

2. En déduire que les équations du mouvement de la particule dans (\mathcal{T}) s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = -\frac{\partial\psi_{eff}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = -\frac{\partial\psi_{eff}}{\partial y} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \psi_{eff} = \frac{U}{m} - \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2)$$

C - Équilibres

Les points dont les coordonnées vérifient les équations $\frac{\partial\psi_{eff}}{\partial x} = \frac{\partial\psi_{eff}}{\partial y} = 0$ correspondent à des points d'équilibre dans le plan $x0y$. De fait, si la particule est abandonnée sans vitesse initiale sur l'un de ces points, elle y restera indéfiniment compte tenu des équations du mouvement. Un raisonnement géométrique (effectué initialement par Monsieur Lagrange) permet de montrer que les points d'équilibre ne peuvent exister que sur la droite $y = 0$ ou bien sur la droite telle que $r_1 = r_2$. Ces points sont connus sous le nom de points de Lagrange. On pose

$$\alpha = \frac{m_B}{m_A}.$$

1. Équilibres sur la droite $y = 0$.

On pose $E_1 =]-\infty, 0[$, $E_2 =]0, R[$ et $E_3 =]R, +\infty[$.

(a) Montrer qu'il existe un unique point d'équilibre L_1 sur E_1 et calculer son abscisse dans la limite $\alpha \ll 1$.

(b) Montrer qu'il existe un unique point d'équilibre dans chacun des intervalles E_2 et E_3 , que l'on appellera L_2 et L_3 , *il ne sera pas nécessaire de calculer les abscisses de ces points*.

2. Équilibres sur la droite $r_1 = r_2$.

Calculer dans la limite $\alpha \ll 1$ les coordonnées des deux points d'équilibre L_4 et L_5 situés sur la droite $r_1 = r_2$. On appellera L_4 le point d'ordonnée positive.

D - Stabilité des points de Lagrange

On se propose d'étudier la stabilité dynamique des points L_k pour $k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dans toute cette question on entend par stabilité de L_k le fait qu'un voisinage \mathcal{V}_k de L_k reste stable lors de l'évolution dynamique.

Pour chaque point de Lagrange $L_k (x_k, y_k, 0)$, on introduit les quantités

$$\gamma_k(t) := x(t) - x_k \quad \delta_k(t) := y(t) - y_k$$

$$a_k = \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x^2} \right|_{L_k} \quad b_k = \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x \partial y} \right|_{L_k} \quad c_k = \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial y^2} \right|_{L_k}$$

afin d'éviter certains calculs on admettra que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x^2} &= -\frac{Gm_A(2x^2 - y^2)}{r_1^5} - \frac{Gm_B(2(x-R)^2 - y^2)}{r_2^5} - \frac{G(m_A + m_B)}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x \partial y} &= -\frac{3Gm_Axy}{r_1^5} - \frac{3Gm_A(x-R)y}{r_2^5} \\ \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial y^2} &= -\frac{Gm_A(2y^2 - x^2)}{r_1^5} - \frac{Gm_B(2y^2 - (x-R)^2)}{r_2^5} - \frac{G(m_A + m_B)}{R^3}\end{aligned}$$

1. En approximant ψ_{eff} par son développement de Taylor au second ordre, écrire les équations vérifiées par γ_k et δ_k dans \mathcal{V}_k .
2. On fait l'hypothèse que dans \mathcal{V}_k on a

$$\gamma_k = X_k e^{\lambda_k t} \text{ et } \delta_k = Y_k e^{\lambda_k t} \text{ avec } (X_k, Y_k) \neq (0, 0) \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Montrer que L_k est stable si et seulement si

$$a_k c_k - b_k^2 > 0 \quad \text{et} \quad a_k + c_k + 4n^2 > 2\sqrt{a_k c_k - b_k^2}$$

N.B. On pourra éventuellement utiliser sans démonstration le théorème suivant : *le polynôme à coefficients réels $x^2 + sx + p$ admet deux racines réelles négatives si et seulement si $p > 0$ et $s > 2\sqrt{p}$.*

3. Etudier la stabilité de L_1, L_4 et L_5 dans le cas $\alpha \ll 1$.
4. On montre que si $\alpha \ll 1$, les abscisses de L_2 et L_3 sont respectivement $R - \varepsilon$ et $R + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll R$, en déduire que L_2 et L_3 sont instables.

E - Les mondes de Saturne

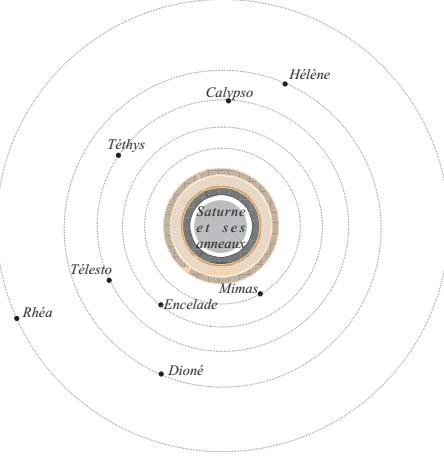


FIGURE 3 – Saturne et ses satellites les plus internes, le 7 Janvier 2001.

Grâce à un logiciel d'éphémérides astronomiques, nous avons représenté sur la figure 3 la configuration des satellites internes de Saturne pour une date fixée. Le point de vue est situé à quelques centaines de milliers de kilomètres à la verticale du pôle nord Saturnien. Les échelles de distance sont respectées sauf pour la taille des points représentant les satellites. Les caractéristiques physiques et orbitales de ces satellites sont les suivantes : la masse de Saturne est de $5.68 \cdot 10^{26} kg$.

	a ($\times 10^{-3}$ km)	R (km)	M (kg)	T (Jours)	e	i (deg)
Calypso	295	13	$0.50 \cdot 10^{15}$	1.888	0.00	1.1
Dioné	377	560	$1.05 \cdot 10^{21}$	2.737	0.02	0.0
Encelade	238	260	$8.40 \cdot 10^{19}$	1.370	0.004	0.0
Hélène	377	16	$1.10 \cdot 10^{15}$	2.737	0.005	0.2
Mimas	186	196	$3.80 \cdot 10^{19}$	0.942	0.02	1.5
Rhéa	527	765	$2.49 \cdot 10^{21}$	4.518	0.001	0.4
Téthys	295	530	$7.55 \cdot 10^{20}$	1.888	0.00	1.1
Télesto	295	15	$0.90 \cdot 10^{15}$	1.888	0.00	1.1

Commenter la figure 3 et les données ci-dessus...

2 Le métro gravitationnel

Examen du cours de gravitation classique de l'ENSTA de Juin 2005

Dans tout le problème la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon R_{\oplus} et de densité ρ_{\oplus} .

À la fin du XXI^e siècle après des épisodes climatiques catastrophiques la population mondiale est rassemblée sur une bande s'étendant sur 10 degrés de latitude de part et d'autre de l'équateur. La prise de conscience à l'échelle planétaire des problèmes écologiques conduit le gouvernement mondial à mettre en place un moyen de transport simple et très efficace : le métro gravitationnel.

A - Préliminaire

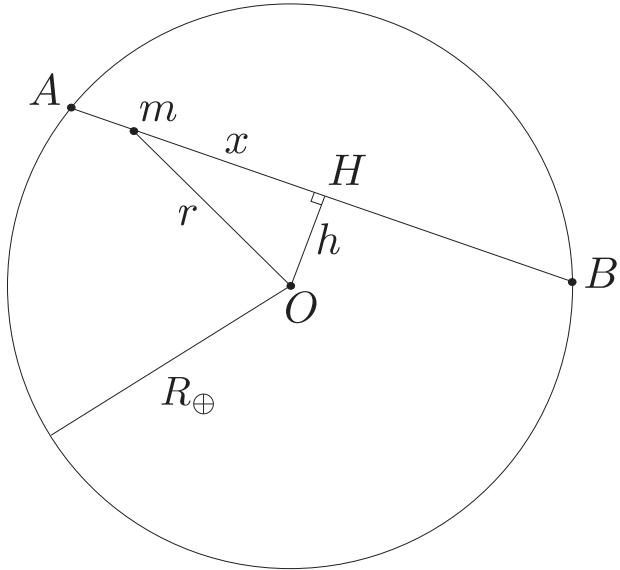
Calculer le champ gravitationnel ψ à l'intérieur et à l'extérieur d'un corps sphérique homogène de rayon R_{\oplus} et de densité ρ_{\oplus} . On pourra faire l'hypothèse que ce champ est radial, on rappelle les conditions aux limites :

- ψ et $d\psi/dr$ sont continues en $r = R_{\oplus}$.
- $\lim_{r \rightarrow 0} \psi'(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi(r) = 0$

Il sera apprécié un petit commentaire sur ces conditions aux limites...

B - Faisabilité

On relie deux points A et B de l'équateur terrestre par un tunnel traversant la Terre selon le schéma ci-dessous.

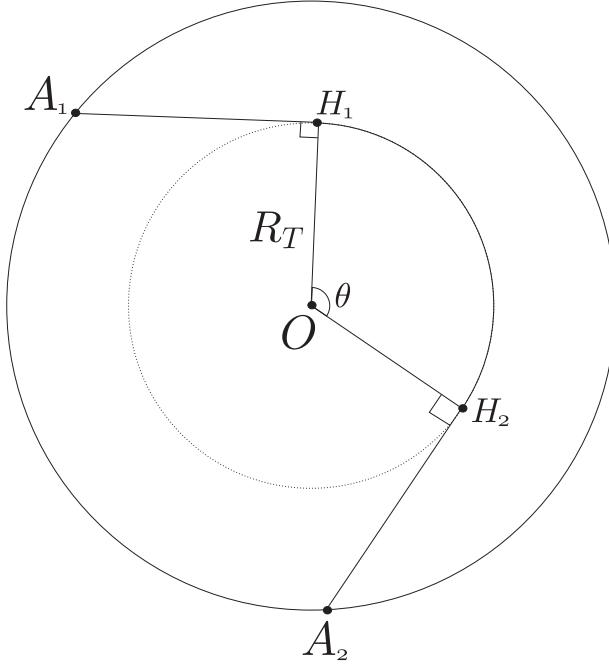


On repère la position d'un mobile de masse m se déplaçant dans le tunnel sous l'effet du champ gravitationnel terrestre par son abscisse $x = Hm$ le long du tunnel.

1. Ecrire le lagrangien du mobile (supposé ponctuel) de masse m en utilisant x comme coordonnée généralisée, on considère bien sûr que le mobile ne subit aucun frottement.
2. Ecrire les équations de Lagrange pour x .
3. Déterminer le mouvement du mobile m abandonné au point A sans vitesse initiale à $t = 0$.
4. Le mobile atteint-il l'extrémité B du tunnel, si oui en combien de temps ?
5. Déterminer la vitesse du mobile en fonction de $\rho_{\oplus}, R_{\oplus}, G$ et du temps t .

C - Le projet de métro

Pour desservir plusieurs points sur l'équateur, on considère un système de tunnel comme indiqué sur le graphique ci-dessous



Un tunnel circulaire est percé à une distance R_T du centre de la Terre. Dans l'enceinte de ce tunnel, on dispose des parois supraconductrices permettant à une rame équipée de sabots magnétiques de léviter sans frottement. On creuse des tunnels de descente (ou de remontée) A_1H_1 , A_2H_2 , etc. Les points H_1 , H_2 , ... sont équipés d'un système d'aiguillage permettant un transfert sans perte de vitesse entre le tunnel de descente et/ou de remontée et le tunnel circulaire.

1. On laisse tomber une rame de masse m sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ du point A_1 .
 - (a) Quelle est sa vitesse en H_1 ?
 - (b) Combien de temps dure le trajet A_1H_1 ?
2. Ecrire le lagrangien de la rame lors de son parcours dans le tunnel circulaire. En déduire son mouvement (on assimilera la rame à un point, on suppose aussi que ce point reste au centre du tunnel grâce au système de confinement).
3. On néglige le temps de transfert entre les tunnels, mais surtout on considère que la vitesse est conservée lors du transfert. Combien dure le trajet H_1H_2 sur le rail circulaire ?
4. Au point H_2 la rame change de tunnel en étant aiguillée dans le tunnel (de remontée) H_2A_2 . La rame atteint-elle le point A_2 ? Si oui en combien de temps ?
5. Calculer la durée totale du voyage en fonction de ρ_{\oplus} , R_{\oplus} , R_T , G et θ .
6. Pour un tunnel circulaire de rayon $R_{\oplus}/2$, calculer la durée d'un voyage pour lequel $\theta = \pi/2$, quelle est dans ce cas la distance au sol entre les deux points ?
On donne $\rho_{\oplus} \simeq 5,5 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $R_{\oplus} \simeq 6378 \text{ km}$, $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

En disposant plusieurs stations équipées de tunnel d'accès au tunnel circulaire le tour est joué...

D - Réalisation

Pensez-vous que ce projet soit réalisable un jour ? (On appréciera des réponses motivées et étayées par des raisonnements physiques, économiques, poétiques...)

3 Orbium Caelestium

Examen du cours de gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France, Janvier 2002

Tout au long de ce problème, on considère une particule test de masse m , repérée par un point P , évoluant dans un système autogravitant de masse M , de centre O et à l'équilibre. A chaque instant la particule subit une force \vec{F} dérivant en totalité du potentiel gravitationnel ψ créé par le système. On suppose que $m \ll M$ et on négligera donc la force exercée par la particule sur le système. Le point sur une quantité désigne sa dérivée totale par rapport au temps $\dot{r} = dr/dt$.

On rappelle que pour tout $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ et pour toute fonction g acceptable (i.e. de classe C^2) ne dépendant que du module $r = \|\vec{r}\|$, le laplacien s'écrit

$$\Delta g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right)$$

A - Potentiel central

1. Montrer que si le potentiel gravitationnel $\psi(r)$ ne dépend que de la distance $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ (potentiel central), le mouvement de la particule s'effectue dans un plan que l'on caractérisera en fonction des coordonnées \vec{r}_o et des impulsions \vec{p}_o initiales.
2. Montrer que le lagrangien de la particule peut s'écrire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - m\psi(r)$$

où r et ϕ sont les coordonnées polaires dans le plan contenant le mouvement, et $\psi(r)$ le potentiel gravitationnel créé par le système de masse M .

3. En utilisant les équations de Lagrange, montrer que les grandeurs $l = L/m = r^2 \dot{\phi}$ et $\varepsilon = E/m = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + \psi(r)$ sont des intégrales premières du mouvement.
4. Montrer que dans le cas d'un potentiel central, le système est à symétrie sphérique. A quelle condition sur ψ le système est-il de masse finie M_s ?
5. Montrer graphiquement que si $E < 0$ et si ψ est monotone, l'équation $\dot{r} = 0$ admet 0, 1 ou 2 racines $r_1 < r_2$.
6. Dans le cas d'une orbite avec 2 valeurs distinctes $r_1 < r_2$, on appelle période radiale τ_r le temps mis par la particule pour aller de r_1 à r_2 et revenir en r_1 . Soit

$$\tau_r = 2 \int_{t_1}^{t_2} dt = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr} dr$$

Montrer que d'une manière générale τ_r est une fonction de ε et de l^2 .

7. Que vaut τ_r pour un problème à 2 corps tel que $\varepsilon < 0$?
8. Donner la relation permettant de calculer la variation $\Delta\phi$ de l'angle polaire dans le plan orbital pendant le transfert de r_1 à r_2 .

B - L'amas homogène

On considère un système sphérique de rayon a de masse M_h et de densité constante ρ_o . Un tel système est dit homogène.

1. Calculer en tout point de l'espace et en fonction de M_h, G, a et r le potentiel gravitationnel ψ_h créé par ce système. On rappelle que ψ_h et sa dérivée sont des fonctions continues et dérивables, et que de plus

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\psi_h}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_h = 0$$

2. Ecrire, en coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan orbital, le lagrangien d'une particule test de masse m évoluant dans la région $r < a$ (on fera l'hypothèse a priori que la particule reste dans cette région, ce qui revient à imposer $\varepsilon < 0$). En résolvant les équations de Lagrange en variables (x, y) , montrer que $r(t)$ est périodique et que sa période τ_{rh} est indépendante des conditions initiales dans le plan orbital.
3. On suppose que $\varepsilon < 0$. Calculer l'énergie potentielle totale contenue dans le système en fonction de G, M et a (on pourra calculer la trace du tenseur potentiel).
4. En utilisant le théorème du viriel, montrer alors que τ_{rh} ne dépend que de ε, M, m, a mais pas de l .

C - L'amas isochrone

On considère un système sphérique de masse totale M_i créant un potentiel ψ_i tel que

$$s := -\frac{GM_i}{b\psi_i} = 1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}} \quad \text{avec } b > 0$$

un tel système est dit isochrone.

1. Montrer que si $r \ll b$, on peut trouver b en fonction de a , puis M_i en fonction de M_h pour que le potentiel ψ_i soit équivalent à celui qui règne à l'intérieur de l'amas homogène de masse M_h et de rayon a .
2. Montrer que si $r \gg b$, le potentiel de l'amas isochrone est équivalent à celui qui règne à l'extérieur d'un amas homogène de même masse.
3. On considère à présent une particule test en orbite dans un amas isochrone.
 - (a) Montrer que $r^2 = b^2 s (s - 2)$.
 - (b) Montrer qu'en variable s , l'équation $\dot{r} = 0$ admet en général deux racines s_1 et s_2 . Exprimer la somme et le produit de ces deux racines. (On ne demande pas d'expliciter s_1 et s_2)
 - (c) Montrer que la période radiale τ_r ne dépend que de ε .

Suggestion : quelques manipulations permettent de voir que sous réserves d'existence

$$\int_a^b \frac{(x-1)}{(x-a)^{1/2} (b-x)^{1/2}} dx = \pi \left[1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right]$$

N.B. - Michel Hénon en 1959, démontre que le potentiel isochrone était le potentiel le plus général dans lequel τ_r ne dépend que de ε .

4 Les galaxies polytropiques

Examen du cours de Gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique Ile-de-France, Janvier 2003

A - Etude préliminaire du cas général

Un gaz est dit polytropique s'il est défini par une équation d'état d'équilibre de la forme

$$P = K \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (1)$$

où P et ρ sont respectivement la pression et la densité du gaz considéré, K est une constante arbitraire positive et n un réel positif appelé indice polytropique. On se propose d'étudier dans ce problème les diverses propriétés d'une galaxie polytropique. On considère donc une sphère de gaz autogravitant en équilibre hydrostatique, isotrope et possédant une équation d'état de la forme (1).

- Montrer que si l'on pose $\rho = \rho_o y^n$ et $r = a_n x$ avec $\rho_o = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r)$ et pour un choix judicieux de a_n , alors $y(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

On pourra remarquer qu'à l'équilibre hydrostatique sphérique la deuxième équation de Jeans s'écrit

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = - \frac{d\psi}{dr}$$

- Sachant que deux fonctions vérifiant la même équation différentielle avec les mêmes conditions aux limites sont égales, montrer que pour une galaxie polytropique on a la relation

$$\rho(r) = b_n [\psi(r)]^n$$

où b_n est un coefficient que l'on précisera.

- Fonction de distribution

- Rappeler pourquoi, dans le cas sphérique isotrope, la densité du système est donnée par la relation

$$\rho(\phi) = \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \int_0^\phi f(\mathcal{E}) \sqrt{\phi - \mathcal{E}} d\mathcal{E}$$

où f est la fonction de distribution du système par unité de masse dans l'espace des phases, et l'on a posé $\phi = -\psi$ et $\mathcal{E} = -E$ de telle sorte que $E = \phi - p^2/2$

- En déduire que pour une galaxie polytropique d'indice n , on a la relation

$$f(\mathcal{E}) = c_n \mathcal{E}^{n-\frac{3}{2}}$$

où c_n est une constante que l'on déterminera (cf. formulaire 1,2,3)

B - Étude du cas $n = 1$

1. En posant $y(x) = u(x)/x$, résoudre l'équation (2) dans le cas $n = 1$.
2. Montrer qu'une galaxie d'indice polytropique $n = 1$ possède une taille finie r_1 que l'on déterminera (on se souviendra que la densité est toujours positive).
3. Déterminer le potentiel gravitationnel du système en fonction de r et préciser notamment

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r)$$

C - $n = 5$ – Le modèle de Plummer

1. En posant

$$x = e^{-t} \quad \text{et} \quad y(x) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{2}} u(t)$$

de telle sorte que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0$$

résoudre l'équation (2) dans le cas $n = 5$.

On rappelle que l'intégration d'une équation différentielle de la forme $f'' = g(f)$ s'effectue en multipliant par f' , on utilisera par ailleurs le résultat 4 du formulaire.

2. En déduire qu'une galaxie d'indice polytropique $n = 5$ s'étend a priori dans tout l'espace.
3. Montrer qu'une galaxie d'indice polytropique $n = 5$ possède une masse finie que l'on déterminera.
4. Montrer que la dispersion de vitesse à la distance r

$$\sigma^2(r) = \frac{1}{\rho} \int v^2 f(\mathcal{E}) d^3v$$

dans une galaxie d'indice polytropique $n = 5$ est simplement proportionnelle au potentiel gravitationnel $\psi(r)$ à cette même distance.

Formulaire

1. A toutes fins utiles nous rappelons les résultats suivants :
2. Formule d'inversion d'Abel

$$\text{Si } f(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

$$\text{Alors } g(t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right]$$

3. Fonction eulérienne de première espèce

Pour tout couple de réels (p, q) , on a

$$\beta(p, q) := \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ainsi pour des valeurs convenables de n , on a donc

$$\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{\sqrt{1-u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1/2)}$$

4. Fonction eulérienne de deuxième espèce

Pour tout réel p , on a

$$\Gamma(p+1) := \int_0^\infty u^p e^{-u} du$$

on trouve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$, $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$, si n est entier non nul on a

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

enfin si a est non entier, on trouve

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

5. On donne la primitive suivante

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1-\frac{u^4}{3}}} = \frac{1}{4} \ln \left(\lambda \left[\frac{1-\sqrt{1-\frac{u^4}{3}}}{1+\sqrt{1-\frac{u^4}{3}}} \right] \right)$$

5 Masses complexes, distances imaginaires

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique en Janvier 2004

A - Préambule - Intégrabilité

On considère un système possédant 2 degrés de liberté, dont le hamiltonien s'écrit

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

1. A quel système physique correspond ce hamiltonien ?
2. On dit que la transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ est canonique si son jacobien est l'unité. Montrer que l'on peut choisir deux réels (a, b) pour que la transformation $(q, p) \rightarrow (q = a \sin(x)\sqrt{y}, p = b \cos(x)\sqrt{y})$ soit canonique.
3. Intégrer les équations de Hamilton en variables (x, y) lorsque $(q, p) \rightarrow (x, y)$ est canonique.

Conseil : on acceptera (la démonstration est facile) le résultat suivant : si (q, p) et (Q, P) sont deux systèmes de coordonnées conjuguées en relation via une transformation canonique alors pour toutes fonctions f et g des variables (q, p) ou (Q, P) on a :

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

On dit que les crochets de Poisson sont invariants par transformation canonique.

Ce système est le prototype des systèmes dits «intégrables» pour lesquels un changement de variable amène toutes les équations du mouvement à une équation de la forme

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x)$$

où F est une fonction analytique et τ une fonction en bijection avec le temps.

B - Rappel - Problème du satellite

On considère un satellite de masse m en orbite dans le champ gravitationnel ψ_{\oplus} créé par la Terre. On néglige le champ créé par la masse du satellite.

1. Sous quelles hypothèses, ce champ est-il de la forme

$$\psi_{\oplus}(r, \varphi) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_e}{r}\right)^n \alpha_n P_n(\sin \varphi) \quad ? \quad (3)$$

où $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante de gravitation, $r_e = 6\,378\,140 \text{ m}$ est le rayon équatorial terrestre, r et φ sont respectivement la distance entre les barycentres de la Terre et du satellite et la latitude du satellite, α_n une constante et P_n le polynôme de Legendre d'ordre n (voir cours de gravitation classique)

2. Sous ces hypothèses que valent $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 ?
3. Rappeler brièvement la nature de l'orbite du satellite si l'on commet l'approximation

$$\psi_{\oplus}(r, \varphi) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^2 \left(\frac{r_e}{r}\right)^n \alpha_n P_n(\sin \varphi) \quad (4)$$

Cette approximation est-elle raisonnable ?

4. Le problème du mouvement de m dans le champ $\psi_{\oplus}(r, \varphi)$ de la relation (3) est-il intégrable ?

C - Particule test dans le champ de 2 masses fixes, problème dit de l'haltère

On considère à présent le mouvement d'une particule test de masse m dans le champ gravitationnel créé par deux masses m_1 et m_2 fixes, ponctuelles ou assimilables comme telles (haltère). Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R} = (OXYZ)$ de la figure 11.4 ces deux masses sont placées sur l'axe Oz à des distances respectives c_1 et c_2 de l'origine. La particule test occupe quant à elle la position (x, y, z) à l'instant t .

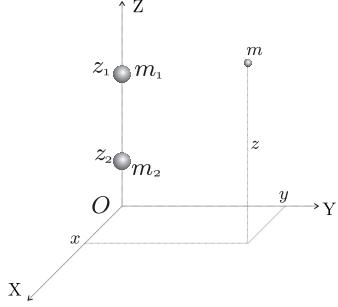


FIGURE 4 – Position des masses

- Montrer que le champ gravitationnel en \vec{r} de coordonnées $[x, y, z]^T$ dans \mathcal{R} est donné par la relation

$$\psi(\vec{r}) = -G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$$

où $r_{k=1,2} := \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_k)^2}$ désigne la distance entre la masse m_k et la particule test.

- Montrer que l'on peut écrire ce champ sous la forme

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{r^n} P_n(\sin \varphi)$$

Où l'on a posé $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On explicitera β_n en fonction de n , m_1 , c_1 , m_2 et c_2 .

On rappelle que sous réserve de convergence de la série

$$[1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n P_n(\sin \varphi)$$

- On décide d'approximer le problème du satellite par le problème de l'haltère : on cherche l'haltère dont le champ se rapproche le plus de celui de la Terre décrite sous les hypothèses de la question A-1, cette haltère sera dite optimale. Le problème de l'haltère ne possède que 4 paramètres : m_k et c_k pour $k = 1, 2$. On ne peut donc imposer au maximum que 4 équations pour définir les caractéristiques de l'haltère soit

$$\beta_n = r_e^n \alpha_n \text{ pour } n = 0, 1, 2, 3$$

- En imposant les deux premières contraintes ($n = 0, 1$), exprimer les masses $m_{k=1,2}$ de l'haltère optimale en fonction de m_\oplus et $c_{k=1,2}$.

- (b) En reportant le résultat précédent dans les contraintes ($n = 2, 3$), déterminer les caractéristiques de l'haltère optimale.

Conseil : mais non, vous ne vous êtes pas trompés dans les calculs...

- (c) Calculez β_n . Qu'en concluez-vous ?
(d) Que pensez-vous de la qualité de l'approximation du problème du satellite par celui de l'haltère décrite précédemment ?

D - Problème intégrable ?

En plaçant l'origine du référentiel au centre géométrique des deux masses ($|c_1| = |c_2| = c$), en passant en coordonnées elliptiques (λ, μ, ω)

$$\begin{cases} x &= c\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \cos \omega \\ y &= c\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \sin \omega \\ z &= c\lambda\mu \end{cases}$$

et au prix d'un aménagement du temps conduisant à poser

$$dt = c^2 (\lambda^2 + \mu^2) d\tau$$

les équations du mouvement de m dans le champ de l'haltère deviennent

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \sqrt{L(\lambda)} \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= \sqrt{M(\mu)} \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= k \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \end{cases}$$

où k est une constante et $L(x)$ et $M(x)$ sont deux polynômes du 4^{ème} degré de la seule variable x qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ici.

1. Le problème de l'haltère est-il intégrable ?
2. Finalement, comment qualifiez-vous l'intégrabilité du problème du satellite sous les hypothèses de la question A-1 ?

6 Une affaire de dimension

Examen du cours de gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France, Janvier 2005

A - Quelques précisions

1. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\vec{x}|^2} d\vec{x} \quad (5)$$

Calculer I_2 en passant en coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^2 .

2. Montrer que $I_n = (I_1)^n$ et en déduire la valeur de I_n .
3. En passant en coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ x_3 &= r \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\ &\dots \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_{n-1} \cos \theta_{n-2} \\ x_n &= r \cos \theta_{n-1} \end{aligned}$$

avec

$$r = |\vec{x}| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

et $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ les angles d'Euler de \mathbb{R}^n , on montre facilement que

$$I_n = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \quad (7)$$

où $|S_{n-1}|$ représente la surface de l'hypersphère de dimension n .

En utilisant le résultat de la question précédente calculer $|S_{n-1}|$. On rappelle à toutes fins utiles les propriétés de la fonction Γ d'Euler, $\forall z \in \mathbb{R}_*^+$

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{z-1} ds, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \text{ et } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

4. On se limitera à présent au cas $n > 1$, et on considère l'opérateur laplacien en dimension n

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (8)$$

montrer que pour toute fonction radiale de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto & f(|\vec{x}|) := f(r) \end{array} \quad (9)$$

on a

$$\Delta_n f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{df}{dr} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} r^{n-1} \right) \quad (11)$$

5. On appellera fonction de Green du laplacien radial, une fonction g_n radiale, telle que pour toute fonction radiale φ infiniment dérivable et à support compact

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} g_n(r) &= 0 && \text{si } n > 2 \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g_n}{r} &\leq 1 && \text{si } n = 2 \end{aligned} \quad \text{et } \int_{\mathbb{R}^n} g_n \Delta_n(\varphi(\vec{x})) d\vec{x} = \varphi(0) \quad (12)$$

Il en résulte que g_n vérifie $\Delta_n g_n = \delta$.

Déterminer g_n (on ne pose pas la question de l'unicité).

Indications : on se souviendra du passage de (5) à (7) valable pour toute fonction radiale, on pourra utiliser (12) et la forme (11) de Δ_n , puis remarquer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr = -\varphi(0)$$

B - Un joli théorème

On considère un volume fini Ω de \mathbb{R}^n , dans lequel une masse est répartie selon la densité $\rho(\vec{x})$. On pourra faire l'hypothèse que cette densité est créée par N masses $(m_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ ponctuelles repérées par les vecteurs $(\vec{x}_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$.

Si l'espace est isotrope, le potentiel gravitationnel créé par cette assemblée de charge est donné par la relation

$$\psi(\vec{x}) = k_n G (\rho \star g_n)(\vec{x}) = k_n G \int \rho(\vec{y}) g_n(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \quad (13)$$

où G désigne la constante de Newton de la gravitation, g_n est la fonction de Green du laplacien radial de \mathbb{R}^n , $k_2 = 2\pi$ et $k_n = (n-2)|S_{n-1}|$ si $n > 2$.

On considère pour ce système, l'énergie cinétique totale

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{d\vec{x}_\alpha}{dt} \right)^2 \quad (14)$$

et l'énergie potentielle totale

$$U = \sum_{\beta=1}^N m_\beta \psi(\vec{x}_\beta) \quad (15)$$

1. Pourquoi, en dimension n la gravité est-elle représentée par le potentiel (13) ? On interprétera chacun des termes de (13).
2. On définit la valeur moyenne temporelle \bar{f} d'une fonction $f(\vec{x}, t)$ par la relation

$$\bar{f}(\vec{x}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\vec{x}, t) dt$$

Montrer que pour $n > 2$, il existe toujours une constante α_n que l'on déterminera, telle que $2\bar{T} + \alpha_n \bar{U} = 0$

3. Comment s'appelle le résultat précédent en dimension 3 ?
4. Que se passe-t-il en dimension 2 ?

C - Physique statistique autogravitante en dimension 2

Pour décrire un système autogravitant en dimension 2, on introduit sa fonction de distribution dans l'espace des phases $f(\vec{x}, \vec{p}) = f(\vec{w})$. On définit alors le nombre de particules

$$N[f] = \int f(\vec{w}) d\vec{w} \quad (16)$$

l'énergie moyenne

$$E[f] = \frac{1}{2m} \int \vec{p}^2 f(\vec{w}) d\vec{w} + \frac{1}{2} \int f(\vec{w}) \psi(\vec{x}) d\vec{w} \quad (17)$$

et l'entropie du système

$$S[f] = - \int f(\vec{w}) \ln(f(\vec{w})) d\vec{w} \quad (18)$$

On montre alors qu'il existe un unique état d'équilibre correspondant au maximum de l'entropie sous les contraintes $N = cste$ et $E = cste$. Cet état est décrit par une fonction de distribution f^+ de la forme

$$f^+ = K \cdot \exp \left[-\beta \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \psi^+(\vec{x}) \right) \right] \quad (19)$$

où $\psi^+(\vec{x})$ est le potentiel gravitationnel créé par cette distribution d'équilibre, K et β sont deux constantes.

1. À quoi correspondent les constantes K et β ?
2. On cherche à expliciter $\psi^+(\vec{x})$.
 - (a) Montrer que ψ^+ vérifie l'équation différentielle

$$\Delta_2 \psi^+ = \chi e^{-\beta \psi^+} \quad (20)$$

où χ est une constante que l'on déterminera.

Ce résultat permet entre autres d'affirmer que ψ^+ radiale (on l'acceptera)

- (b) En posant $\beta \psi^+ = 2 \ln(u)$ résoudre l'équation (20).
3. Déduire du résultat précédent que la masse du système est finie (on ne demande pas d'expliquer cette masse).

Remarque : pour toute dimension supérieure à 2, la masse du système décrit par la fonction de distribution qui maximise l'entropie est infinie, ce qui contredit l'hypothèse $N[f^+] = cste$ et invalide l'approche « classique » de la thermodynamique statistique pour ce problème.

D - Question subsidiaire

On dispose d'un petit télescope équipé d'une caméra CCD et d'un spectromètre. Comment vérifier que les sections spatiales de notre espace-temps¹ sont de dimension 3 sur des échelles d'au moins quelques années-lumière ?

1. Comme cela est précisé dans l'ouvrage [?], cette notion mérite bien qu'on lui dédie un nom, même si les académiciens ne sont pas d'accord !

7 Gravitation newtonienne, matière noire, gravitation modifiée

Examen du cours de Gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique Ile-de-France, Janvier 2006

A - Gravitation newtonienne

On considère un système à répartition sphérique de masse, la densité de masse de ce système est donc telle que $\rho = \rho(|\mathbf{r}|)$ où \mathbf{r} est le vecteur position d'une particule test. On appelle $\psi(\mathbf{r})$ le potentiel gravitationnel associé à cette densité.

1. Montrer que le mouvement d'une particule test de masse m dans un tel système est plan.
2. On appelle vitesse circulaire \mathbf{v}_c , la vitesse qu'aurait une particule test en orbite circulaire de rayon r . Montrer que

$$\mathbf{v}_c^2 = r |\text{grad } \psi|$$

3. Les observations de la Voie Lactée montrent un bulbe, un disque et des amas globulaires pour la plupart en orbite dans un halo stellaire. Les caractéristiques physiques de ces composants

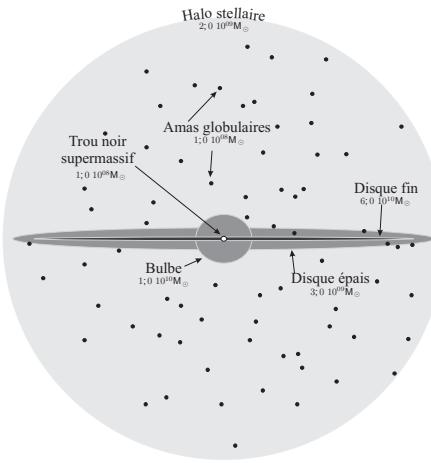


FIGURE 5 – Représentation schématique de la Voie Lactée

sont estimées par diverses méthodes. Selon diverses analyses on recense :

	Masse (M_{\odot})	Taille caractéristique (kpc)	Epaisseur (kpc)
Bulbe	10^{10}	2	-
Disque fin	6×10^{10}	30	3×10^{-1}
Disque épais	3×10^9	30	1.4
Trou noir central	3×10^6	3×10^{-8}	-
1 amas globulaire	5×10^7	10^{-3}	-
Halo stellaire	2×10^9	30	-

La répartition des vitesses circulaires présente la même allure dans toutes les galaxies spirales. Pour notre galaxie, elle est donnée par la figure ci-dessous. La plus grande partie du gaz et des étoiles de notre galaxie est contenue dans le disque fin. Une première approximation a priori

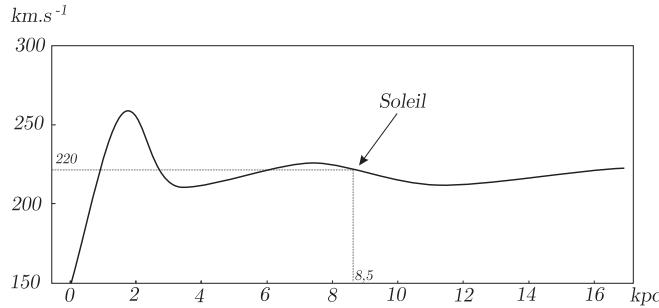


FIGURE 6 – Distribution des vitesses dans la galaxie

raisonnable consiste à supposer que chaque étoile de ce disque fin est en orbite képlérienne autour du bulbe galactique.

Pourquoi cette hypothèse est-elle incompatible avec la courbe de rotation ci-dessus ?

4. Montrer que l'introduction d'un halo sphérique de matière invisible (noire) de densité

$$\rho(r) = \frac{C_o}{r_o^2 + r^2}$$

permet de rendre compte de la courbe de vitesse observée. On fixera la valeur de C_o pour une bonne adéquation avec la valeur de la vitesse observée et on interprétera la constante r_o .

5. Estimer la masse minimale de ce halo de matière noire. Qu'en pensez-vous ?

B - Gravitation modifiée

Depuis 1983, M. Milgrom propose de modifier l'interaction gravitationnelle dans le régime des faibles accélérations pour, entre autres, rendre compte de la courbe observée des vitesses circulaires dans les galaxies spirales.

1. Montrer qu'un extremum de l'action

$$S(\psi_n) = - \int d\mathbf{r} \left\{ \rho\psi_n + \frac{1}{8\pi G} (\text{grad } \psi_n)^2 \right\}$$

est atteint pour l'équation de Poisson en gravitation newtonienne.

2. Pour généraliser la gravitation, Milgrom considère l'action suivante

$$S(\psi) = - \int d\mathbf{r} \left\{ \rho\psi + \frac{a_o^2}{8\pi G} F \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right] \right\}$$

où F est une fonction arbitraire de la variable réelle, continue et dérivable. Ecrire l'équation de Poisson correspondante à cette nouvelle gravité.

3. Montrer qu'il existe un vecteur \mathbf{h} tel que

$$F' \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right] \text{grad } \psi = \text{grad } \psi_n + \text{rot } \mathbf{h}$$

4. On fait l'hypothèse que $\text{rot } \mathbf{h}$ est toujours négligeable devant le gradient du potentiel non modifié (newtonien) ψ_n . Montrer qu'en symétrie sphérique, et en choisissant une fonction F telle que

$$F' \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right] \simeq \frac{|\text{grad } \psi|}{a_o} \quad \text{quand } |\text{grad } \psi| \ll a_o ,$$

on peut expliquer la courbe de rotation plate des galaxies.

5. Quelle doit être la forme de la fonction $F' \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right]$ quand $|\text{grad } \psi| \gg a_o$?
6. Trouver la valeur de a_o qui correspond à la valeur de la vitesse observée pour notre galaxie.
7. La sonde Pioneer 10, lancée le 3 mars 1972, a franchi l'héliopause ($\simeq 70$ UA du Soleil) en 1987. Lors de ce franchissement, le signal émis par la sonde a montré qu'elle se déplaçait moins vite que prévu. Cette constatation a été confirmée un peu plus tard par la sonde Pioneer 11. Cette anomalie peut-elle s'expliquer par la modification de la gravité introduite dans les questions précédentes ?

C - Formulaire

- Quelques valeurs numériques utiles aux sages...

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ M_{\odot} &= 1,97 \times 10^{30} \text{ kg} \\ 1 \text{ UA} &= 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \\ 1 \text{ pc} &= 3,09 \times 10^{16} \text{ m} \end{aligned}$$

- A toutes fin utiles on rappelle l'une des formules de Green (Intégration par parties généralisée)
Soit un domaine Ω de bord $\partial\Omega$, pour toute fonction scalaire f de classe C^1 sur Ω et pour tout vecteur \mathbf{w} de classe C^1 sur Ω , on a

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{grad} f \, d\tau = - \int_{\Omega} f \, \text{div} \mathbf{w} \, d\tau + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, f \, d\sigma$$

où $d\tau$ et $d\sigma$ sont respectivement un élément de volume de Ω et de surface de $\partial\Omega$ et \mathbf{n} le vecteur normal à $\partial\Omega$.

8 Mouvement d'une particule de masse variable dans un potentiel gravitationnel

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique en Janvier 2007

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen d'origine O . Une particule test de masse m , repérée par le vecteur $\overrightarrow{Om} = \vec{r}$, évolue sous l'influence gravitationnelle d'une répartition massive \mathcal{S} de masse totale finie M , à symétrie sphérique et de densité ρ . On suppose a priori que m est une fonction du temps t et de la distance $r = |\vec{r}|$, soit $m = m(r, t)$.

1. Ecrire l'équation du mouvement vérifiée par le vecteur \vec{r} .

Indication : On supposera d'une part, que la particule test ne modifie pas la répartition massive \mathcal{S} et d'autre part, que la force qui lui est imposée dérive en totalité de l'énergie potentielle $U = m\psi$ où ψ est le potentiel gravitationnel associé à ρ .

2. Dans quelles conditions sur la fonction $m(r, t)$, le lagrangien de la particule est-il donné par la relation

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - m\psi \quad ?$$

3. Vérifier que, dans le cas képlérien où $\rho_k = M \delta(\vec{r})$, on retrouve bien l'équation de Newton

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

4. Quelles sont les grandeurs conservées au cours du mouvement dans les cas $m = m(r, t)$, $m = m(r)$, $m = m(t)$ et $m = cste$?

5. On suppose maintenant que $m = m_o e^{-t/\tau}$ où m_o et τ sont deux réels strictement positifs. On suppose de plus qu'à $t = 0$, la particule se trouve à l'intérieur de la répartition \mathcal{S} que l'on suppose homogène, c'est-à-dire telle que $\rho = cste = 3\omega^2 (4\pi G)^{-1}$ où ω est une constante réelle et G la constante de Newton.

(a) Montrer que la répartition de masse à densité constante est forcément limitée à un certain rayon r_h que l'on déterminera.

(b) Déterminer le potentiel gravitationnel qui règne à l'intérieur de cette région.

(c) Montrer que, quelles que soient les valeurs de τ, m_o, ω et de la vitesse initiale, il existe un temps fini t_m pour lequel la particule quitte la région à densité constante.

Indication : on pourra étudier le comportement des solutions en coordonnées cartésiennes dans un plan judicieux - On ne demande pas la valeur explicite de t_m .

(d) Interpréter physiquement ce résultat.

Formulaire

Pour une fonction radiale telle que $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$ avec $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, on rappelle les identités bien connues

$$\text{grad}(\varphi(r)) = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{et} \quad \text{div}(\text{grad}(\varphi(r))) = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

9 Équations planétaires, mouvements classiques du périastre, application à Mercure

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France en Janvier 2008

Une particule de masse m repérée dans un référentiel galiléen par le vecteur $\vec{r} = r\vec{e}_r$ évolue dans une région $E = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3, |\vec{r}| > |\varepsilon|\}$ dans laquelle règne le potentiel

$$\psi(r) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{\varepsilon}{k+1} \left(\frac{r_o}{r} \right)^k \right] \quad (21)$$

où G est la constante de gravitation, M et r_o sont homogènes respectivement à une masse et à une distance, k et ε sont des nombres réels.

A - Préliminaires

1. Calculer la force subie par la particule en chaque point de E .
2. Calculer la densité de masse ρ associée au potentiel ψ . En déduire le signe de ε . On rappelle que pour toute fonction radiale ϕ de R^3 dans R ,

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$

3. Dans quel intervalle doit varier k pour que la source du potentiel ψ ait une masse totale finie ?

B - Orbite osculatrice

On souhaite étudier l'orbite de la particule de masse m dans le potentiel ψ à l'aide de la théorie planétaire de Lagrange. On considère les éléments osculateurs elliptiques $\{a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), \tau(t)\}$.

1. A quelle condition la théorie planétaire de Lagrange est-elle a priori applicable à ce problème ?
2. Montrer que le potentiel perturbateur s'écrit

$$R = \mu \frac{\varepsilon}{r(k+1)} \left(\frac{r_o}{r} \right)^k \quad \text{avec } \mu = GM \quad (22)$$

3. Montrer que i et Ω sont constants au cours du mouvement.
4. Montrer que le paramètre focal $p = a(1-e^2)$ de l'ellipse osculatrice est lui aussi constant.

On s'intéresse à présent à la partie séculaire des perturbations en considérant le potentiel perturbateur séculaire

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \int_0^T R dt \quad (23)$$

où T est la période osculatrice.

5. Montrer que l'on peut écrire

$$\bar{R} = \frac{\mu p n \varepsilon}{2\pi C(k+1)} \left(\frac{r_o}{p} \right)^k f_k(e) \quad (24)$$

où l'on a introduit $n = 2\pi T^{-1} = \sqrt{\mu}a^{-3/2}$, $C = \sqrt{p\mu}$ et $f_k(e)$ une fonction que l'on déterminera.

6. Calculer explicitement $f_k(e)$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4 , et donner un développement limité à l'ordre 2 de $f_k(e)$ pour e proche de 0 .
7. On approxime dorénavant $f_k(e)$ par son développement limité à l'ordre 1 pour e proche de 0 . Montrer que le périastre du mouvement séculaire osculateur évolue à vitesse constante n_ω et déterminer l'avance du périastre par période

$$\Delta\omega = n_\omega T = 2\pi n_\omega \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \quad (25)$$

C - Avance du périhélie de Mercure

On a constaté depuis longtemps que le mouvement de la planète Mercure présentait une avance de son périhélie d'environ 43 secondes d'arc par siècle. Nous allons tenter de voir si cette avance est imputable à l'aplatissement du Soleil.

1. On considère que le Soleil est un sphéroïde de révolution aplati aux pôles avec

$$\frac{r_e - r_p}{r_e} = 5 \times 10^{-7} \quad (26)$$

où r_e et r_p représentent respectivement le rayon équatorial et polaire du Soleil. Calculer le J_2 du Soleil.

Indication : si $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$ alors

$$\iiint_V (y^2 + z^2) = \frac{1}{5} (b^2 + c^2) \quad (27)$$

2. On considère que la planète Mercure évolue dans le plan équatorial du Soleil. Montrer que l'on peut choisir M, k, ε et r_o pour que le potentiel de l'équation (21) soit celui créé par un Soleil aplati aux pôles.
3. Calculer l'avance du périhélie de Mercure causée par l'aplatissement du Soleil. Qu'en déduisez-vous ?

Applications numériques :

Orbite de Mercure : $a = 0,387$ ua, $e = 0,206$, $1\text{ua} = 149\,597\,871$ km

Soleil : $r_e = 1,39 \times 10^6$ km, $M_\odot = 1,9 \times 10^{30}$ kg

Constante de la gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$

10 Harcèlement entre polytropes

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France en Janvier 2009

Une équation d'état relie les fonctions d'état d'un système thermodynamique. Parmi l'ensemble des possibles, un cas très intéressant est celui des polytropes pour lesquels la pression P et la densité volumique de masse ρ sont reliées par l'équation

$$P = k \rho^\gamma. \quad (28)$$

La constante k est spécifique au système considéré et la constante γ positive est souvent notée $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ pour faire apparaître l'indice polytropique n .

1– On considère un système sphérique pour lequel P et ρ ne dépendent que de la coordonnée radiale r . On note ψ le potentiel gravitationnel du système, et on pose $\phi = \psi_\infty - \psi$ où ψ_∞ est une constante. Montrer qu'à l'équilibre hydrostatique, on a la relation

$$\rho = K \phi^n \quad (29)$$

On exprimera K en fonction de k et n . Que représente la constante ψ_∞ ?

2– En introduisant un paramètre caractéristique adapté, noté a , et la variable $x = r/a$, montrer que le potentiel gravitationnel d'un système polytropique à l'équilibre est solution de l'équation de Lane-Emden

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\phi}{dx} + \phi^n = 0 \quad (30)$$

On rappelle, à toutes fins utiles, l'expression de la partie radiale du laplacien en dimension 3 d'une fonction radiale $u(r)$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{du}{dr} \right]$$

3– Montrer qu'il existe une valeur du réel α pour laquelle l'équation de Lane-Emden est invariante par l'homothétie

$$(\phi, x) \rightarrow (\lambda\phi, \lambda^\alpha x) \quad (31)$$

Cette symétrie permet d'introduire le changement de variable $t = \ln x$ et de fonction $y x^{\frac{1}{\alpha}} = \phi$ grâce auquel l'équation de Lane-Emden devient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{5-n}{1-n} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{6-2n}{(1-n)^2} y + y^n = 0 \quad (32)$$

Pour quelle valeur particulière de n différente de 0 ou 1, cette équation possède-t-elle une solution explicite ? Indiquer *brièvement et sans l'utiliser*, la méthode que vous mettriez en œuvre pour déterminer cette solution. La solution correspondante s'appelle le modèle de Plummer, le potentiel gravitationnel associé est

$$\psi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}}. \quad (33)$$

On ne demande pas de démontrer cette formule même si un calcul bien mené permet de le faire à partir de l'équation (32). Ce modèle comporte deux paramètres que sont sa masse totale M et sa taille caractéristique a . Il constitue un bon modèle théorique pour les amas globulaires et certaines galaxies.

4– Montrer sans trop de calculs que la masse d'un modèle de Plummer est finie alors que son extension spatiale est a priori infinie.

5– Déterminer la masse $\mu(r)$ contenue dans une sphère de rayon r ayant le même centre qu'un modèle de Plummer de paramètres a et M . On considère le rayon r_θ tel que $\mu(r_\theta) = \frac{M}{\theta^3}$ avec $\theta \geq 1$. Exprimer r_θ en fonction de a et de θ . On pourra utiliser l'identité

$$(1 - B^3) x^3 + 3Ax^2 + 3A^2x + A^3 = [A - x(B - 1)] \\ [(1 + B + B^2)x^2 + A(2 + B)x + A^2]$$

Déterminer en fonction de a la valeur des rayons R_c et R_t des sphères contenant respectivement 35% et 85% de la masse totale d'un modèle de Plummer.

On considère à présent un amas globulaire évoluant dans le champ gravitationnel d'une galaxie. Ces deux objets seront représentés par des modèles de Plummer de paramètres adaptés :

$$\psi_g(r) = -\frac{GM_g}{\sqrt{r^2 + a_g^2}} \text{ pour la galaxie et, } \psi_c(\rho) = -\frac{GM_c}{\sqrt{\rho^2 + a_c^2}} \text{ pour l'amas.}$$

La variable r désigne la distance au centre de la galaxie et la variable ρ la distance au centre de l'amas. On souhaite étudier les effets de marée subis par l'amas et causés par le champ gravitationnel de la galaxie. Pour simplifier les calculs, on supposera que l'amas est en orbite circulaire de rayon a_g dans le champ gravitationnel de la galaxie. À chaque instant la configuration est donc celle indiquée sur la figure 7

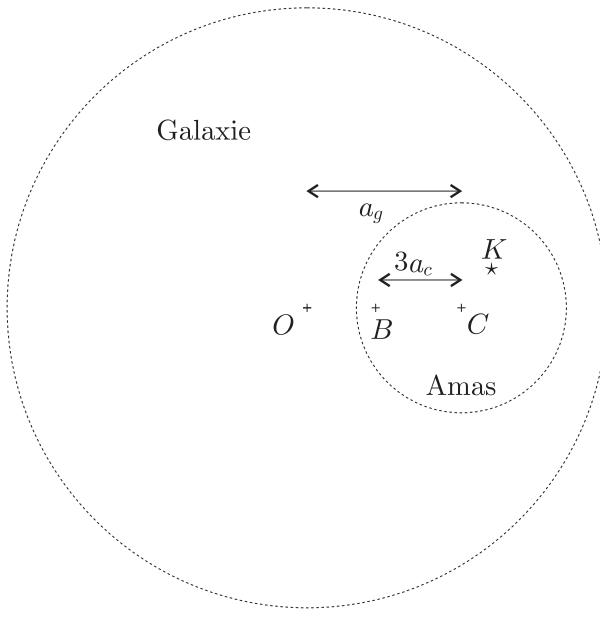


FIGURE 7 – Configuration de l'amas globulaire de centre C et de la galaxie de centre O . Ce schéma n'est pas du tout à l'échelle. Les pointillés indiquent une taille caractéristique car le modèle de Plummer est d'extension infinie.

6– Considérons une étoile test de l'amas, notée \star sur la figure 7, de masse M_\star . Donner l'expression des forces $\vec{F}_{g,C}$ et $\vec{F}_{g,B}$ exercées par la galaxie sur l'étoile \star lorsque celle-ci se trouve respectivement en C ou en B , ce dernier point étant sur le segment $[OC]$ à une distance $3a_c$ du centre de l'amas. Pourquoi peut-on considérer que la force $\vec{F}_m = \vec{F}_{g,B} - \vec{F}_{g,C}$ est une force de marée ? Pourquoi peut-on considérer que $a_c \ll a_g$? Simplifier sous cette hypothèse l'expression de \vec{F}_m . Quels peuvent être les effets de marée de la galaxie sur l'amas ?

7– La force de cohésion $\overrightarrow{F_{i,K}}$ d'une étoile de l'amas située au point K est simplement la force reçue par cette étoile de la part de toutes les étoiles de l'amas. En considérant toujours que $a_c \ll a_g$, déterminer le rapport

$$\beta = \frac{\left\| \overrightarrow{F_m} \right\|}{\left\| \overrightarrow{F_{i,B}} \right\|}.$$

En prenant des valeurs numériques typiques correspondant à une galaxie et un amas globulaire, étudier la résistance d'un amas au harcèlement de la galaxie qui l'abrite.

11 Un modèle de sphère isotherme en boîte

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France en Janvier 2010

Dans tout ce problème, tous les systèmes considérés possèdent la symétrie sphérique. On notera r la distance radiale, ρ la densité volumique de masse, ψ le potentiel gravitationnel et P la pression.

QUESTION 1

- a) Une équation d'état polytropique d'indice 1, est une relation de la forme

$$P(r) = \lambda \rho(r) \quad \text{avec } \lambda = \text{cste}$$

Déterminer la relation différentielle existant à l'équilibre entre $\rho(r)$ et $\psi(r)$ pour un tel système.

- b) Une sphère isotherme est définie par la relation

$$\rho(r) = A e^{-m\beta\psi(r)} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}_+^*$$

Montrer qu'une sphère isotherme vérifie une équation d'état polytropique d'indice 1. On exprimera λ en fonction de β et m .

On souhaite dans ce problème étudier une sphère isotherme de masse totale M et définie dans une boule de rayon R . On modélise la densité de la sphère isotherme par la relation

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_o & \text{Si } r \leq r_o \\ \rho_o \frac{1}{x^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 & \text{Si } r_o \leq r \leq R \end{cases} \quad \text{avec } x = \frac{R}{r_o} \geq 1 \quad (34)$$

On supposera que ce modèle vérifie une équation d'état polytropique d'indice 1.

QUESTION 2

- a) Expliquer pourquoi le modèle défini par la relation (34) est une approximation de la sphère isotherme.

- b) Montrer que

$$\rho_o = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{x^3}{(3x - 2)}$$

QUESTION 3

Sur chacun des intervalles $[0, r_o]$ et $[r_o, R]$ déterminer la masse $\mu(r)$ contenue dans la sphère de rayon r . On exprimera μ uniquement en fonction de M , R , x et r .

QUESTION 4

a) Démontrer que l'énergie potentielle totale contenue dans un système sphérique de rayon R est donnée par la relation

$$W = -4\pi G \int_0^R s \rho(s) \mu(s) ds$$

b) Calculer l'énergie potentielle totale W_i contenue dans une sphère isotherme contenue dans une boîte de rayon R en utilisant le modèle (34). On mettra le résultat final sous la forme

$$W_i = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \varphi(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction que l'on déterminera. Commenter la limite de φ lorsque $x \rightarrow 1^+$.

QUESTION 5

L'énergie cinétique totale K_i contenue dans une sphère isotherme de masse M , de température $\theta = (k\beta)^{-1}$ constituée de N particules de masse m est donnée par la relation

$$K_i = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} = \frac{3}{2} \frac{M}{m\beta}$$

Pour un système défini sur une boule de rayon R à l'équilibre, le théorème du viriel s'écrit

$$2K + W = 4\pi R^3 P(R) \quad (35)$$

a) Démontrer, ou à défaut commenter, la relation (35).

b) En utilisant la relation (35) dans le cas du modèle (34) de la sphère isotherme dans une boule, démontrer que

$$\tau := \frac{\beta m GM}{R} = \frac{10(x-1)(3x-2)}{x(15x-14-10\ln(x))}$$

QUESTION 6

On note E_i l'énergie mécanique totale contenue dans le modèle (34) de la sphère isotherme de rayon R . Déterminer le paramètre

$$\varepsilon := \frac{E_i R}{GM^2}$$

en fonction de la seule variable x .

QUESTION 7

Pour chaque valeur de $x \in \mathbb{D} =]1, +\infty[$ on considère le point ζ de coordonnées $(\varepsilon(x), \tau(x))$ dans le plan (ε, τ) . On peut démontrer que sur \mathbb{D}

- la fonction $\frac{d\tau}{dx}$ ne s'annule qu'une fois en $x = x_c \approx 3,41$ et qu'elle change de signe en x_c ;
- la fonction $\frac{d\varepsilon}{dx}$ est strictement négative.

a) Déterminer les positions limites

$$\zeta_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta \quad \text{et} \quad \zeta_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta$$

b) Tracer le lieu des points ζ pour $x \in \mathbb{D}$ dans le plan (ε, τ) .

QUESTION 8

Le modèle (34) de la sphère isotherme dans une boule permet-il de retrouver les résultats de stabilité que l'on peut obtenir à partir du modèle complet ?

12 Le trou noir des sphères isothermes

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France en Janvier 2011

Un amas globulaire est un système d'étoiles dont la configuration, souvent sphérique, est bien représentée par une sphère isotherme de densité volumique de masse centrale finie ρ_0 . La fonction de distribution d'équilibre d'un tel système s'écrit

$$f(E) = \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta E}$$

où $E = p^2/2m + m\psi(\vec{r})$ est l'énergie d'une particule test de masse m d'impulsion \vec{p} à la position \vec{r} , $\psi(\vec{r})$ est le potentiel gravitationnel du système en \vec{r} . Les deux paramètres α et β ont les dimensions respectives d'une longueur et d'une énergie, ils caractérisent le système. Un certain nombre d'intégrales sont fournies en fin d'énoncé. Si r est la coordonnée radiale et t le temps, on utilisera la notation f' pour désigner df/dr et \dot{f} pour désigner df/dt .

1. La sphère isotherme

- (a) Calculer la densité volumique de masse ρ en chaque point du système. En déduire que le système est bien sphérique. Déterminer ρ_0 en fonction de m, α, β et de la valeur ψ_0 du potentiel gravitationnel en $\vec{r} = \vec{0}$.
- (b) Pourquoi un tel système est-il qualifié d'isotherme ? On rappelle que la valeur moyenne dans l'espace des impulsions $\langle \varphi \rangle_{\vec{p}}(\vec{r})$ d'une grandeur $\varphi(\vec{p}, \vec{r})$ est ici donnée par la relation

$$\langle \varphi \rangle_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{\int \varphi(\vec{p}, \vec{r}) f(E) d\vec{p}}{\int f(E) d\vec{p}}$$

- (c) Montrer que si l'on néglige l'influence des collisions, le mouvement d'une particule test dans une sphère isotherme s'effectue dans un plan. Ce résultat est-il spécifique aux sphères isothermes ?
- (d) Montrer que le potentiel gravitationnel régnant dans la région centrale d'une sphère homogène s'écrit sous la forme harmonique suivante

$$\psi_h(r) = \psi_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + o(r^2)$$

On pourra effectuer un développement limité à l'ordre 2 du potentiel gravitationnel, et l'on exprimera ω^2 en fonction de G et ρ_0 .

2. Près du centre...

On considère le mouvement d'une étoile confinée dans la région centrale d'un amas globulaire. On considère donc que le potentiel gravitationnel auquel elle est soumise est celui de la question précédente.

- (a) Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes de l'étoile dans le plan orbital. En écrivant et en résolvant les équations de Lagrange du mouvement en coordonnées cartésiennes dans le plan orbital, montrer que

$$x(t) = u \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \text{et} \quad y(t) = v \cos(\omega t + \varphi_y)$$

où le vecteur $\vec{C} = [u, v, \varphi_x, \varphi_y]^\top$ est constant et fixé par les conditions initiales. Quelle est la nature du mouvement ?

On souhaite à présent étudier l'influence sur cette orbite de la présence d'un hypothétique trou noir de masse M_\bullet situé en $\vec{r} = \vec{0}$. De manière formelle, on écrira la densité de cet objet

$$\rho_\bullet(r) = M_\bullet \delta(\vec{r})$$

où $\delta(r)$ est la distribution de Dirac centrée sur 0.

- (b) Montrer que le potentiel gravitationnel créé par le trou noir s'écrit

$$\psi_\bullet(x, y) = -\frac{GM_\bullet}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nous allons à présent appliquer la théorie de la variation des constantes de Lagrange au problème du mouvement de l'étoile confinée dans la région centrale d'un amas globulaire perturbé par un hypothétique trou noir de M_\bullet .

- (c) Montrer que les équations du mouvement du problème perturbé s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{\partial R}{\partial x} \\ \ddot{y} = -\omega^2 y + \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

où $R(x, y)$ est une fonction perturbatrice dépendant des paramètres G et M_\bullet . Sous quelles hypothèses $R(x, y)$ est-elle une perturbation du terme principal harmonique ?

On fait l'hypothèse que la perturbation introduite par le trou noir va faire varier les constantes du problème non perturbé en des termes osculateurs : la solution du système non perturbé

$$\begin{cases} x(t) = x(\vec{C}, t) \\ y(t) = y(\vec{C}, t) \end{cases}, \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = cste$$

devient avec la perturbation

$$\begin{cases} x(t) = x(\vec{C}(t), t) \\ y(t) = y(\vec{C}(t), t) \end{cases}, \quad \vec{C}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \varphi_x(t) \\ \varphi_y(t) \end{bmatrix}$$

On se place en jauge de Lagrange, c'est-à-dire que l'on impose

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial x}{\partial C_i} \dot{C}_i = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial y}{\partial C_i} \dot{C}_i = 0$$

- (d) En appliquant la théorie planétaire de Lagrange, montrer que les équations du mouvement perturbé s'écrivent sous la forme

$$A \frac{d\vec{C}}{dt} = \nabla_{\vec{C}}(R) \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{bmatrix}$$

où K est une matrice carrée d'ordre 2 diagonale ne dépendant que de ω, u et v .

- (e) On se place dans le cas de la perturbation d'une orbite circulaire pour laquelle on suppose que l'on peut écrire à chaque instant

$$u(t) = v(t), \quad \varphi_x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_y(t) = \frac{\pi}{2}$$

Déterminer puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

- (f) Comment peut-on détecter la présence d'un trou noir au centre d'un amas globulaire ?

À toutes fins utiles on rappelle que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

13 La loi de Titius-Bode

Examen du cours de gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France, Janvier 2012

Dès l'antiquité les astronomes ont cherché de l'ordre dans le mouvement des planètes, astres errants qui semblaient se mouvoir à leur guise dans le système solaire. L'idée d'un ordonancement géométrique est apparue chez les élèves de Platon et fut renforcée par la physique d'Aristote. Mais le premier modèle complètement géométrique est l'œuvre de Kepler avec ses emboitements de sphères inscrites et circonscrites aux polyèdres réguliers. En souvenir de cet illustre astronome nous allons commencer par étudier la nature de son résultat.

Un polyèdre est dit régulier s'il est constitué de faces toutes identiques et régulières, et que tous ses sommets sont identiques, toutes ses arêtes ont donc la même longueur a . Il n'en existe que 5 qui soient convexes : le tétraèdre dont les faces sont 4 triangles équilatéraux, le cube (6 carrés), l'octaèdre (8 triangles), le dodécaèdre (12 pentagones) et l'icosaèdre (20 triangles). Chacun de ces solides possède une unique sphère inscrite et circonscrite dont on peut montrer que les rayons r_i et r_c sont des multiples de a . Alors qu'il donnait un cours à l'Université de Graz sur le rapport des distances de Saturne et Jupiter au soleil, il fut frappé de reconnaître dans son calcul le rapport des rayons des cercles circonscrit et inscrits dans le cube, soit $\sqrt{3}$. Il stoppa son cours, calcula les mêmes rapports pour les cinq polyèdres et chercha les meilleures estimations de distance au soleil des planètes connues. Moins d'un an plus tard il publiait sa première œuvre majeure, le *mystérium cosmographicum*.

1. En remplissant un tableau judicieux, retrouver l'ordre dans lequel Kepler emboîta les polyèdres réguliers pour que les sphères inscrites et circonscrites portent les 6 planètes connues à son époque. Le tableau ci-dessous donne les rayons de ces sphères (en unité d'arête) pour les 5 polyèdres réguliers,

Polyèdre	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
$\frac{r_i}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{\varphi^5}{\sqrt{5}}}$	$\frac{\varphi^2}{\sqrt{3}}$
$\frac{r_c}{a}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\varphi\sqrt{3}$	$\sqrt{\varphi\sqrt{5}}$

où $\varphi = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$ est le nombre d'or. Les valeurs utilisées par Kepler pour les calculs de rapports de distance peuvent être consultées page 77 de l'édition originale du *Mysterium cosmographicum*

Saturne	Jupiter	Mars	Terre	Vénus	Mercure
9163	5261	1440	1000	762	429

On remarquera d'ailleurs à la consultation que Kepler s'est permis quelques libertés avec les valeurs proposées par Copernic...

Un siècle plus tard, entre 1766 et 1772 Titius, Bode puis Wurm firent successivement remarquer que les planètes connues à l'époque suivaient une progression géométrique

$$r_n = 0,4 + 0,3 \times 2^n$$

où r_n est le demi-grand axe moyen de la n -ième planète considérée exprimé en unité astronomiques. La séquence commence avec $n \rightarrow -\infty$ pour Mercure ($r_{me} = 0,39$ ua), $n = 0$ pour Vénus ($r_{ve} = 0,72$ ua), $n = 1$ pour la Terre, etc...

Cette loi connut deux succès considérables. Le premier lorsqu'en 1781 Herschell découvrit Uranus et que deux ans plus tard Laplace détermina sa période $T_{ur} = 30\,688$ jours sidéraux (Système du monde, Ch. 9, p.80). Le second alors que la loi prévoyait une planète manquante entre Mars ($r_{ma} = 1,52$ ua) et Jupiter ($r_{ju} = 5,20$ ua), et que l'on découvrit au tout début du XIX^e siècle la ceinture d'astéroïdes située à une distance moyenne $r_{as} = 2,8$ ua du Soleil.

Les perturbations de l'orbite d'Uranus furent attribuées tout naturellement à une nouvelle planète. Adams puis Leverrier proposèrent des paramètres orbitaux en accord avec la loi de Titius-Bode. Le premier proposa en 1841 un demi-grand axe $r_{ne,a} = 36,154$ ua et une excentricité de 0,107 tandis que le second avait utilisé en un demi grand axe de $r_{ne,l} = 37,25$ ua. Les deux calculs étaient faux, bien que tous deux aient annoncé la position de la planète non loin de sa position réelle où Galle l'observa le 23 septembre 1846. Il y a environ 6 mois, le 12 juillet 2011, Neptune est retournée au point où Galle l'avait observée pour la première fois, confirmant que la Loi de Titius-Bode avait des limites.

L'objectif de ce problème est de comprendre l'origine physique de cette loi.

2. On rappelle que le demi-grand axe de Saturne est $r_{sa} = 9,54$ ua, dresser un tableau des données observationnelles, des prédictions de la loi de Titius-Bode et de l'erreur relative correspondante pour le système solaire.

Les explications de la loi de Titius-Bode peuvent être rangées en deux catégories :

- Les explications dynamiques considèrent que cette loi est le résultat du processus de formation des planètes, elles reposent sur des analyses de stabilité du disque proto-planétaire ;
- Les explications cinématiques attribuent la loi à des interactions orbitales une fois le système planétaire formé.

Des analyses globales récentes montrent que cette loi est sans doute une propriété universelle qui apparaît dans tout système dynamique possédant des propriétés d'auto-similarité. Nous allons voir dans la suite de ce problème que la dynamique d'un système planétaire jouit de cette propriété d'autosimilarité puis que les propriétés de stabilité d'un tel système autogravitant permettent de voir émerger naturellement la loi de Titius-Bode.

On modélise un système planétaire par des équations fluides auto-gravitantes et non visqueuses. Dans un référentiel galiléen de centre O , les planètes et le gaz sont modélisées par un champ de densité volumique de masse $\rho(\vec{r}, t)$ et de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Ce champ de vitesse est à l'origine d'un champ de pression $P(\vec{r}, t)$ et le champ de densité génère un champ gravitationnel $\psi(\vec{r}, t)$. Un objet central de masse M_\odot crée aussi une force globale à l'échelle du système. Les équations régissant l'évolution du système sont les équations de Jeans

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \text{(Continuité)} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \psi - \frac{GM_\odot}{r^2} \hat{e}_r & \text{(Euler)} \\ \Delta \psi = 4\pi G \rho & \text{(Poisson)} \end{array} \right.$$

La quantité r représente le module du vecteur \vec{r} , et \hat{e}_r est un vecteur unitaire tel que $\hat{e}_r = \vec{r}/r$. On rappelle aussi que l'on peut écrire $\vec{\nabla} = \frac{d}{dr}\vec{r}$.

3. Montrer que ce système d'équation est auto-similaire. C'est-à-dire qu'il existe au moins une famille de nombres entiers (a, b, c, d, e, f) telle que la transformation

$$\begin{array}{l|l} \vec{r} \rightarrow \lambda^a \vec{r} & \vec{v} \rightarrow \lambda^d \vec{v} \\ t \rightarrow \lambda^b t & P \rightarrow \lambda^e P \\ \rho \rightarrow \lambda^c \rho & \psi \rightarrow \lambda^f \psi \end{array}$$

laisse le système inchangé.

4. On souhaite représenter le gaz autogravitant considéré par une équation d'état polytropique de la forme

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (36)$$

où P_0 et ρ_0 ont des valeurs constantes. Montrer que la seule valeur de γ compatible avec l'hypothèse d'auto-similarité du système est $\gamma = 4/3$.

5. Montrer que dans les conditions de la question précédente et à l'équilibre la relation, la densité ρ et le potentiel gravitationnel ψ est de la forme

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^n$$

où ρ_0 et ψ_0 ont des valeurs constantes et n est un nombre entier qui ne dépend que de γ que l'on déterminera. On exprimera aussi ψ_0 en fonction de P_0 et ρ_0 .

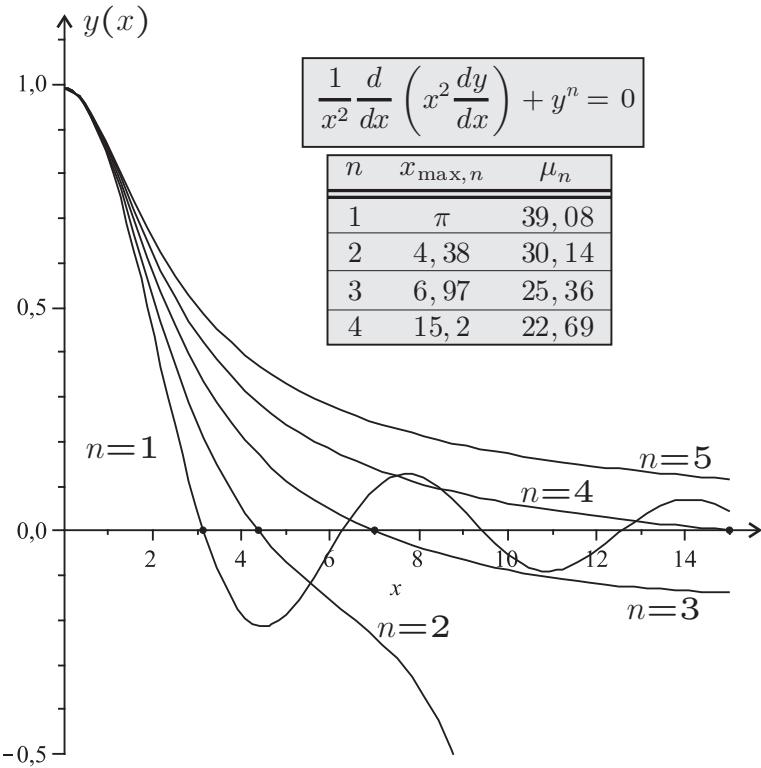
6. Quelle est, à une constante multiplicative près, la fonction de distribution d'équilibre isotrope dans l'espace des impulsions qui permettrait d'avoir une telle relation entre potentiel et densité ? Quelles sont les propriétés de cet équilibre ?
7. On suppose que le système est sphérique. Montrer que la fonction y telle que $\rho = \rho_0 y^n$, d'une variable $x = r/r_0$ où r_0 est un paramètre que l'on déterminera en fonction P_0 , G et ρ vérifie l'équation de Lane-Emden

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0$$

quelles sont les valeurs de y et $\frac{dy}{dx}$ en $x = 0$.

On donne pour différentes valeurs de n la représentation graphique de la fonction $y(x)$ solution de l'équation de Lane-Emden, la valeur $x_{\max,n}$ de son premier zéro ainsi que le résultat du calcul de l'intégrale

$$\mu_n = \int_0^{x_{\max,n}} 4\pi x^2 y^n dx$$



La densité totale ρ_t du système s'écrit comme la somme de $\rho_c = M_\odot \delta(r)$ représentant l'objet central et de la densité polytropique ρ étudiée dans les questions précédentes. On suppose que la masse totale M' du système polytropique est une fraction de la masse de l'objet central, soit $M' = kM_\odot$ avec comme dans le système solaire $k = 10^{-3}$. On prendra

$$\psi_0 = -\frac{GM'}{5R} \quad \text{avec } R = 50 \text{ ua}$$

8. Exprimer ρ_0 en fonction de k , μ_n , M_\odot et R . Calculer sa valeur numérique commenter le résultat.
On donne $1 \text{ ua} = 1,49 \cdot 10^9 \text{ m}$, $1M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
9. On fait l'hypothèse que chaque particule de masse m du fluide polytropique repérée par le vecteur $\vec{r} = r\hat{e}_r$ n'est soumise qu'à la force créée par l'objet central de masse M_\odot . Montrer que son mouvement s'effectue dans un plan dont la base polaire sera notée $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$. Montrer que dans ce plan les mouvements circulaires de rayon r se font avec une vitesse $\vec{v} = \Omega(r)\hat{e}_\theta$ où l'on exprimera la fonction $\Omega(r)$ en fonction de G , M_\odot et r .

Un processus non décrit ici conduit à l'alignement de tous les plans et à la circularisation des orbites, on assiste donc à la formation d'un disque de fluide autogravitant dans lequel le champ de vitesse à l'équilibre est de la forme $\vec{v} = \Omega(r)\hat{e}_\theta$. Les équations de la dynamique de ce fluide sont les équations de Jeans décrites plus haut. On suppose toujours que l'équation d'état est polytropique d'indice $\gamma = 4/3$. On rappelle que la vitesse du son dans un fluide est définie par la relation $\vec{\nabla}P = c_s^2 \vec{\nabla}\rho$. Cette vitesse permet d'éliminer la pression dans les équations de Jeans.

10. Montrer que la vitesse du son dans le fluide est une fonction de r . On explicitera la relation entre c_s , P_0 , ρ_0 et la solution y de l'équation de Lane-Emden correspondante.

En introduisant la vitesse du son les seules inconnues du problème restent $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t)$ et $\psi(\vec{r}, t)$. On se propose à présent d'étudier la stabilité linéaire des équations de Jeans d'un équilibre polytropique en rotation circulaire soumis à une perturbation radiale. A cette fin, on introduit la

décomposition suivante

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r}, t) = \Omega(r) \hat{e}_\theta + \varepsilon \vec{v}_1(r, t) \\ \rho(\vec{r}, t) = \tilde{\rho}(r) + \varepsilon \rho_1(r, t) \\ \psi(\vec{r}, t) = \tilde{\psi}(r) + \varepsilon \psi_1(r, t) \end{cases} \quad \text{où } \varepsilon \text{ est un petit paramètre.}$$

11. Détalier les diverses "hypothèses" qui permettent d'obtenir à l'ordre ε les relations

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \tilde{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \tilde{\rho} = 0 \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 - \tilde{\rho} \vec{\nabla} \psi_1 \\ \Delta \psi_1 = 4\pi G \rho_1 \end{cases}$$

On rappelle que $\vec{\nabla} \cdot f(r) \hat{e}_\theta = 0$. En supposant que $\vec{\nabla} \rho_1 \cdot \vec{\nabla} c_s^2 + \vec{\nabla} \tilde{\rho} \cdot \vec{\nabla} \psi_1 = o(\varepsilon)$, déduire que

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + \sigma^2 \rho_1$$

où σ^2 est une fonction de r que l'on exprimera en fonction de G et $\tilde{\rho}(r)$.

12. On décompose la perturbation de densité sur des modes de Fourier, de telle manière que

$$\rho_1(r, t) = e^{i\omega t} f(r) \quad \text{avec } \omega \in \mathbb{C}$$

et l'on cherche des fonctions $f(r)$ de la forme

$$f(r) = e^{ia\xi(r)} \quad \text{avec } a \text{ réel tel que } a \gg 1$$

Montrer que l'on peut dans ces conditions obtenir l'inégalité

$$\left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 > 0 \quad \text{si } \omega^2 > 0$$

qui assure un comportement oscillant pour la perturbation de densité. Les maxima de ces oscillations correspondent aux zones de formation des planètes.

13. On peut obtenir un excellent ajustement à 3 paramètres de la fonction $\xi(r)$ sous la forme

$$\xi(r) = \frac{2\pi}{\beta} \ln \left(\frac{r - r_a}{\alpha} \right)$$

Montrer comment un choix astucieux des paramètres réels et positifs α, β et r_a permet de retrouver la loi de Titius-Bode.

14 Le gravidyne

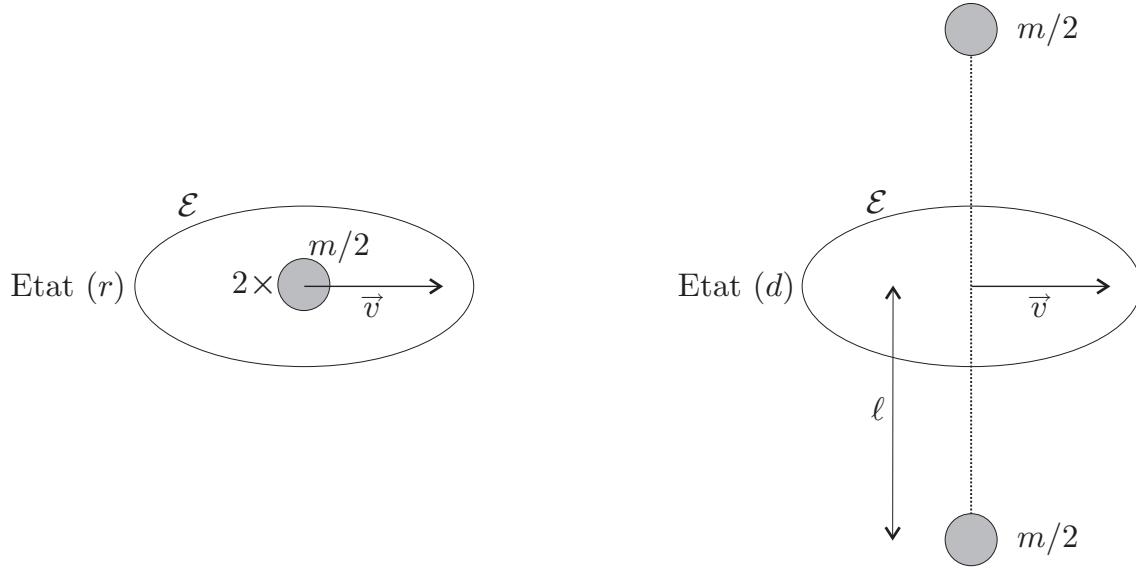
Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France en Janvier 2013

Le gravidyne est un vaisseau spatial gravitationnel extraordinaire fruit en 1964, de l'imagination du non moins extraordinaire **Vladimir V. Beletski**. À l'occasion du premier anniversaire de sa disparition nous avons tenu à lui rendre hommage à travers ce modeste sujet...

Le gravidyne est un vaisseau spatial \mathcal{E} pouvant déployer symétriquement à la distance ℓ et le long d'un axe orthogonal à sa vitesse instantanée, deux boules de masses $m/2$. Ces boules sont maintenues grâce à des cables dont la masse est négligée. La masse du vaisseau est négligeable devant m . Le déploiement ou le repliement des boules même s'il coûte une énergie au vaisseau se fait en un temps que l'on négligera dans ce problème. Comme nous allons le voir et l'étudier, la propulsion du gravidyne est assurée par le seul déploiement ou repliement des boules.

Pour simplifier l'étude on considère que le vaisseau ne peut se trouver que dans l'un des deux états suivants :

- dans l'état replié (r) les deux masses n'en font qu'une et le vaisseau \mathcal{E} est assimilé à un point de masse m ;
- dans l'état déployé (d) les deux masses forment une haltère dont le centre est occupé par le vaisseau. L'axe de cette haltère reste en permanence orthogonal au vecteur vitesse de \mathcal{E} .



On satellise le gravidyne dans l'état (r) sur une orbite dans le champ de gravitation d'un astre représenté par un point de masse M très supérieure à m . On se place dans le référentiel centré sur M , à l'instant initial le vaisseau possède une vitesse \vec{v} une énergie mécanique totale $E_0 = mh_0 < 0$ et se trouve à une distance r de la masse M . On posera $\mu = GM$. Les deux boules sont supposées ponctuelles.

1. Dans quelles conditions le référentiel d'étude est-il galiléen ?
2. Montrer que le mouvement de E s'effectue dans un plan Π que l'on précisera.
3. Montrer que dans Π le mouvement de E dans l'état (r) est une ellipse dont on précisera le paramètre focal p , l'excentricité e . Montrer que $r \in [r_0, R_0]$, on exprimera les bornes de cet intervalle en fonction de p et e . Comment s'appellent les points P et A de la trajectoire correspondants aux distances r_0 et R_0 .

4. La position de E est repérée dans Π par sa distance r à M et par l'angle $f = \widehat{PM\mathcal{E}}$. Démontrer que le module v de la vitesse de E sur son orbite est donné par la relation

$$v^2 = \frac{\mu}{p} [1 + e^2 + 2e \cos f]$$

En déduire une expression de h_0 en fonction de μ , p et e puis celle donnant h_0 en fonction de μ et de la somme $a = r_0 + R_0$.

5. Montrer que dans l'état (d) le gravidyne possède une énergie potentielle

$$E_p(r) = -\frac{\mu m}{r\sqrt{1+\alpha^2}}$$

où l'on exprimera α en fonction de ℓ et r .

6. Le système est initialement dans l'état (r) arrivé en r_0 le vaisseau déploie ses masses et passe dans l'état (d) . Ce déploiement est supposé infiniment bref et ne modifie pas la vitesse instantanée du vaisseau. Montrer que l'énergie massique du vaisseau passe alors de la valeur h_0 à la valeur $h_1 = h_0 + \Delta h_1$. En utilisant un développement limité adéquat, on exprimera Δh_1 en fonction de μ , ℓ et r_0 .
7. La variation d'énergie étant petite on suppose que les éléments de l'orbite dans l'état (d) deviennent des éléments osculateurs des éléments de l'orbite dans l'état (r) , notamment la relation entre h , r_{\min} et r_{\max} reste valable entre les éléments osculateurs. Déterminer l'expression de la nouvelle distance maximale R_1 atteinte dans l'état (d) . Toujours grâce à un développement limité adéquat, on exprimera R_1 en fonction de R_0 , r_0 et ℓ .
8. Une fois arrivé en R_1 le vaisseau replie ses masses et repasse dans l'état (r) , ce repliement s'effectue avec les mêmes caractéristiques que le déploiement. Déterminer la valeur de la nouvelle distance minimale r_1 qu'il est alors capable d'atteindre dans cet état.
9. Résumer le cycle déploiement-repliement sur un diagramme représentant les potentiels effectifs dans les états (r) et (d) en précisant les différents apoastres et périastres. Expliquer comment le gravidyne peut s'extraire du champ de gravitation de l'objet de masse M .
10. Estimer le temps nécessaire pour l'extraction du gravidyne depuis une orbite circulaire de rayon r_c . On calculera la variation d'énergie globale sur le premier cycle à partir de laquelle on concluera.
11. Dans quel(s) cas un gravidyne équipé de boules déployables à 100 km est-il efficace ? On pourra procéder à quelques applications numériques avec la terre ($r_{\oplus} = 6,5 \cdot 10^6$ m et $m_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24}$ kg), le soleil ($r_{\odot} = 7 \cdot 10^8$ m et $m_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg) ou même Sirius B ($r_{s_B} = 1 \cdot 10^7$ m et $m_{s_B} = 2 \cdot 10^{30}$ kg) et on rappelle que $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ m³.kg⁻¹.s⁻².

15 Autour des potentiels logarithmiques

Examen donné au Master 2 d'Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France en Janvier 2014

Les 3 parties de cet examen sont indépendantes.

Première partie : Propriétés générales

On souhaite étudier les propriétés physiques d'un système autogravitant tridimensionnel dont le potentiel de champ moyen est donné par la relation $\tilde{\psi}(r) = \psi_0 + \psi_1 \ln \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$ où $\psi_0 < 0$ et $\psi_1 > 0$ sont des constantes homogènes à des potentiels gravitationnels, et $r_0 > 0$ homogène à une longueur. La coordonnée r est la distance au centre du système.

1. Déterminer l'expression de la densité volumique de masse $\rho(r)$ de ce système. Représenter l'allure de la densité dans le plan $(\ln r, \ln \rho)$. Commenter cette courbe.
2. Déterminer l'expression du profil de masse radiale $M(r)$, c'est-à-dire la masse contenue dans ce système à l'intérieur d'une sphère de rayon r . Commentez ce profil.
3. Déterminer l'expression du profil de vitesse circulaire $v_c(r)$, c'est-à-dire le module de la vitesse qu'aurait une particule de masse m évoluant dans ce système sur une orbite circulaire de rayon r . Commentez ce profil, on pourra rapprocher le modèle avec certaines observations.

Seconde partie : Potentiel logarithmique tournant

On se place dans le référentiel cartésien $R = (O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ et on considère un système en rotation autour de l'axe fixe (O, \hat{e}_z) à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ où Ω est une constante positive. Un point M de masse m de ce système est repéré dans la base cartésienne par le vecteur $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$. On suppose que le potentiel gravitationnel de champ moyen ψ au point M est tel que $\psi = \psi(x, y)$. A l'instant $t = 0$, origine des temps, les vecteurs position \vec{r} et vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ de M sont dans le plan $\Pi_{xy} = (O, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$. On admet que le lagrangien de M s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 - m\psi \quad (37)$$

4. Montrer que le mouvement de M s'effectue dans Π_{xy} et déterminer les équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$. On fera apparaître en fin de calcul un potentiel effectif de la forme $\psi_e(x, y) = \psi(x, y) - \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$.

Pour modéliser les barres que l'on observe dans certaines galaxies spirales on utilise souvent un potentiel de la forme

$$\psi(x, y) = \Omega^2 a^2 \ln \left[1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]$$

où a et b sont deux constantes positives homogènes à des longueurs telles que $a > b$.

5. En utilisant l'une des loi découverte empiriquement par un astronome allemand dans la première partie du XVII^e siècle, justifier l'homogénéité de la dimension du facteur $\Omega^2 a^2$.
6. Déterminer les coordonnées des 5 positions d'équilibres possibles pour M . Les deux points tels que $x \neq 0$ seront notés E_1 et E_2 , les deux points tels que $y \neq 0$ seront notés E_4 et E_5 et le dernier sera noté E_3 . Comment appelle-t-on ces points ?

Pour étudier la stabilité locale de ces points, on remplace dans les équations de la dynamique, le potentiel effectif par son développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de chacun de ces points.

7. Montrer que le terme de dérivées croisées $\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x \partial y}$ est nul en chacun des points d'équilibre.
8. Pour chaque équilibre $E_k(x_k, y_k)$ on pose $\xi_k = x - x_k$ et $\mu_k = y - y_k$, $\alpha = \left. \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x^2} \right|_{x_k, y_k}$ et $\beta = \left. \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial y^2} \right|_{x_k, y_k}$ et l'on cherche des solutions des équations du mouvement de la forme $\xi_k = X_k e^{\lambda t}$ et $\mu_k = Y_k e^{\lambda t}$. Montrer que l'existence de solutions non triviales conduit à la résolution d'une équation bicarée de la forme $\lambda^4 + A\lambda^2 + B = 0$ où l'on exprimera la constante A en fonction de Ω , α , et β et la constante B en fonction de α , et β .

Afin d'éviter des calculs inutiles on donne la solution de l'équation bicarée de la question précédente pour chacun des points d'équilibre

Équilibre	Solution
E_1 et E_2	$\lambda_{\pm}^2 = \frac{\Omega^2}{2b^2} (-a^2 - 2b^2 \pm a\sqrt{8b^2 + a^2})$
E_3	$\lambda_{\pm}^2 = \frac{\Omega^2}{b^2} (-a^2 - 2b^2 \pm \sqrt{5b^4 + 2a^2b^2 + a^4})$
E_4 et E_5	$\lambda_{\pm}^2 = \frac{\Omega^2}{2a^2} (-a^2 - 2b^2 \pm a\sqrt{16b^2 - 7a^2})$

9. On se place dans le cas d'un potentiel faiblement axisymétrique pour lequel on a $b = a\sqrt{1 - e^2}$ avec $e \ll 1$. Etudier la stabilité de chacun des points d'équilibre. Comment peut s'interpréter ce résultat si l'on admet que ce potentiel peut modéliser une certaine région d'un certain type de galaxie spirales.

Troisième partie : Résonances dans un potentiel logarithmique tournant

10. On considère une particule test décrite par le lagrangien (37) évoluant dans un potentiel de la forme $\psi = \psi(r, \theta)$. Les coordonnées $r(t)$ et $\theta(t)$ sont les coordonnées polaires dans le plan orbital de cette particule. Montrer qu'elles vérifient les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \ddot{r} - r \left(\dot{\theta} + \Omega \right)^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \left[r^2 \left(\dot{\theta} + \Omega \right) \right] = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (38)$$

11. On fait les hypothèses suivantes : $\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \varepsilon \psi_1(r, \theta)$, $r(t) = r_0 + \varepsilon r_1(t)$ et $\theta(t) = \theta_0(t) + \varepsilon \theta_1(t)$ avec $\varepsilon \ll 1$. En déduire les 4 équations issues de la linéarisation du système (38). En utilisant l'une de ces 4 équations, on montrera que la quantité $J_0 = r_0^2 (\dot{\theta}_0 + \Omega)$ est constante ; on posera par la suite $\Omega_0 = \frac{J_0}{r_0^2}$.

12. On suppose que $\theta_0(0) = \theta_i = 0$. On se place dans le cas d'un potentiel perturbé à variables séparées de la forme $\psi_1(r, \theta) = \psi_b(r) \cos(n\theta)$. On rappelle qu'à l'ordre 1, un développement de Taylor donne $\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0}$. Déterminer l'expression de $r_0^2 \dot{\theta}_1$ en fonction du temps et des autres paramètres du problème. En déduire une analyse permettant de statuer sur les propriétés de la fonction $r_1(t)$ et donc de la stabilité de l'orbite.

16 Noether et le vecteur excentricité

Examen du cours de gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France, Janvier 2015

A - Une constante du mouvement très particulière.

On considère une particule ponctuelle de masse m repérée par un vecteur position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ et soumise à une force de la forme $\vec{F} = -\text{grad } V(r)$ avec $r = \|\vec{r}\|$.

- [1] Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{r}}{dt}$ de la particule est conservé et en déduire que le mouvement est plan.
- [2] Ecrire le lagrangien. En déduire les équations du mouvement de la particule.
- [3] Montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = - \frac{\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}{r^\alpha}$$

où l'on déterminera l'entier positif α .

- [4] On introduit l'impulsion de la particule $\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{r}}{dt}}$ qui vaut ici $\vec{\pi} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$, montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\pi} \wedge \vec{L} \right) = mr^2 \frac{dV}{dr} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

- [5] On se place dans tout le reste du problème dans le cas du potentiel de Kepler attractif $V(r) = -\frac{k}{r}$ avec $k > 0$, montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{\pi} \wedge \vec{L} - km \frac{\vec{r}}{r}$ est une intégrale première du mouvement. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{L}$, que peut-on en conclure sur le vecteur \vec{A} .

Le découvreur de ce vecteur est bien évidemment Joseph-Louis Lagrange, mais les auteurs de contributions à son sujet sont Laplace, Lenz, Runge et plus récemment Hermann.

Formulaire pour la partie A

- $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$

B - La symétrie de Noether associée.

On considère un corps M de masse m en orbite képlérienne dans le champ gravitationnel crée par un corps de masse m_F situé en un point F . On suppose que l'énergie de M est négative, sa trajectoire est donc l'ellipse représentée sur la figure 8.

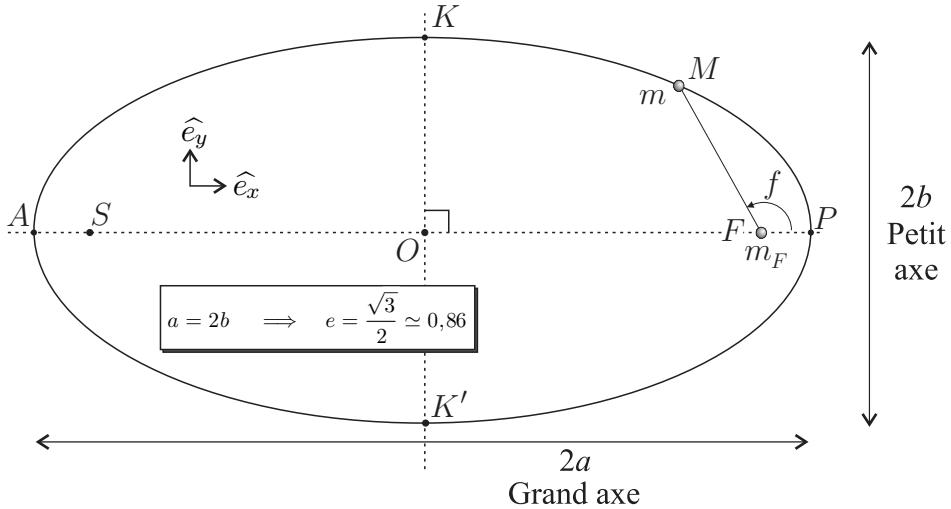


FIGURE 8 – Caractérisation de la trajectoire

- [6] On rappelle qu'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MS}\| = \Upsilon = \text{cte}$ avec $\|\overrightarrow{FS}\| = 2ae$. Déterminer la constante Υ en se plaçant en un point particulier de la trajectoire. Montrer que $\|\overrightarrow{KF}\| = a$. Déterminer, en fonction de l'excentricité e , les expressions de $\cos f$ et $\sin f$ lorsque M est en K . En déduire la valeur de f en ce point pour l'ellipse de la figure 8.
- [7] On rappelle que $\vec{r} = r(\cos f \hat{e}_x + \sin f \hat{e}_y)$ avec $r = p(1 + e \cos f)^{-1}$. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt} \frac{d\vec{r}}{df}$ se met sous la forme
$$\vec{v}(M) = \lambda(e \hat{e}_y - \sin f \hat{e}_x + \cos f \hat{e}_y)$$
où λ est une constante que l'on exprimera en fonction de $L = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\|$, m et p . On pourra exprimer $\frac{dr}{df}$ en fonction de e , r , p et $\sin f$. En déduire que le vecteur vitesse parcourt un cercle que l'on déterminera. Ce cercle est appelé cercle des vitesses ou hodographie de cette orbite.
- [8] En écrivant l'expression de l'énergie $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{m\mu}{r}$ au périhélie et à l'apogée, déduire l'expression de la constante $\mu = GM_F$ en fonction de L , m et p . En déduire une expression de L en fonction de m , p , E et e .
- [9] En utilisant les résultats des questions précédentes montrer que la vitesse en K et en K' n'est portée que par le vecteur \hat{e}_x et que son module ne dépend que de E et m .

Lorsqu'il est en K et en conservant son vecteur vitesse, on transfère instantanément le point M en un point K_φ obtenu en lui appliquant une rotation d'angle φ autour du point F dans le plan orbital (voir figure 9).

[10] Montrer que la nouvelle trajectoire est toujours une ellipse.

[11] Déterminer le petit axe, le grand axe et l'excentricité de cette nouvelle ellipse. Calculer leurs nouvelles valeurs sur l'exemple de la figure 9 et tracer cette nouvelle orbite.

On considère la famille \mathcal{F}_E des cercles des vitesses que l'on obtient en faisant varier l'angle φ . On démontre que \mathcal{F}_E correspond à toutes les orbites possédant l'énergie E , cette famille est appelée l'hodographe des orbites d'énergie E .

[12] Déterminer les caractéristiques du cercle des vitesses de la nouvelle orbite.

En généralisant, tracer \mathcal{F}_E .

On appelle projection stéréographique d'une sphère (dans \mathbb{R}^3 , notée S_2) sur un plan, l'application illustrée sur la figure 10 telle que, par exemple, l'image de z_1 est z'_1 . Il s'agit d'une transformation conforme, l'image d'un cercle est donc un cercle.

[13] De quels cercles sur la sphère S_2 , la famille \mathcal{F}_E est-elle l'image dans le plan par projection stéréographique. Quelle transformation de la sphère laisse globalement invariante \mathcal{F}_E ?

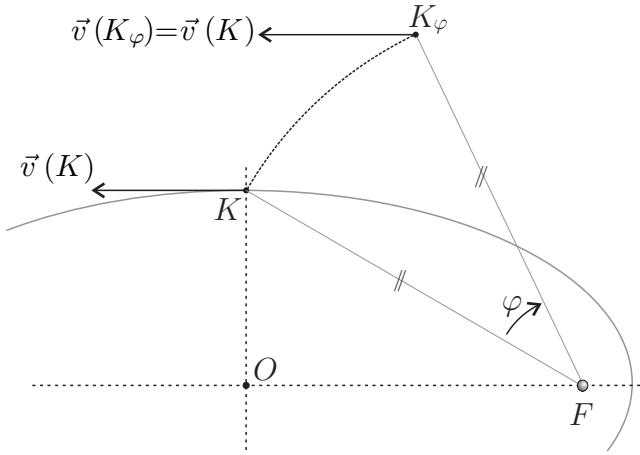


FIGURE 9 – Transport du point en conservant sa vitesse, sur la figure $\varphi = \pi/6$ dans le sens horaire.

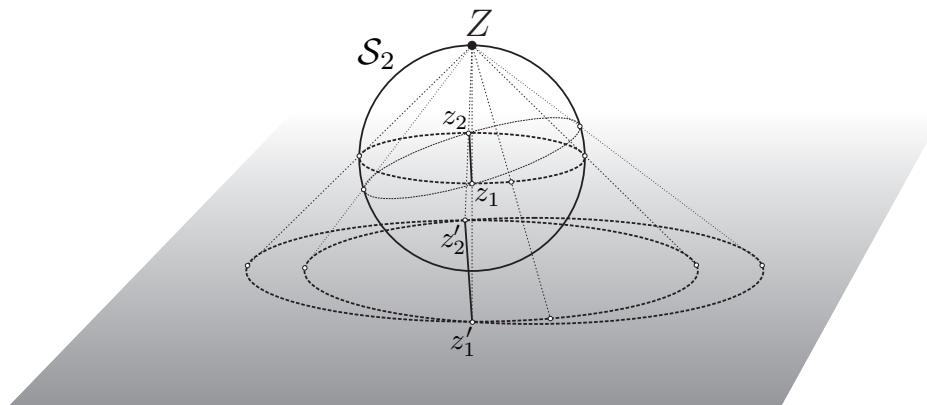


FIGURE 10 – Projection stéréographique.

En généralisant à toutes les valeurs possibles de l'énergie et en prenant en compte tous les plans orbitaux possibles associés aux différentes valeurs possibles du moment cinétique, l'hodographe devient une collection de sphères.

[14] De quelle projection stéréographique généralisant celle de la question précédente, cet hodographe est-il l'image. Quelle est la symétrie correspondante ?

On montre que cette symétrie est la symétrie de Noether associée à la conservation du vecteur de Lagrange-Lenz-Runge-Laplace-Hermann !

17 Le théorème de Bertrand

Examen du cours de gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France, Janvier 2016

Joseph Louis François Bertrand, né le 11 mars 1822 à Paris et mort le 3 avril 1900 toujours à Paris, est un mathématicien, économiste et historien des sciences français. En mathématiques, son nom est attaché à celui de séries dont il étudia la convergence. En physique théorique et plus particulièrement en théorie du potentiel, son travail est concentré sur l'étude du mouvement d'une particule soumise à une force centrale, il s'agit du cas typique de la force de gravitation de champ moyen exercée sur une étoile dans un système à symétrie sphérique comme par exemple un amas globulaire.

On démontre assez facilement que dans cette situation l'étoile de masse m est en mouvement dans un plan déterminé par le moment cinétique \vec{L} de la particule. Si son énergie mécanique E est négative la distance radiale r au centre du système est comprise entre deux valeurs positives r_p et r_a telles que $r_p \leq r_a$, et la fonction $r(t)$ est périodique. La période de $r(t)$ est appelée période radiale, elle est notée $T = \pi\tau$ avec

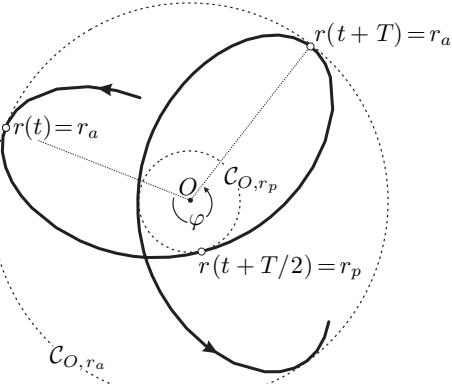


FIGURE 12 – Un morceau d'orbite

est également une caractéristique constante pour une orbite donnée, tout comme τ , le paramètre Φ est aussi une fonction de ξ et Λ . Pour un potentiel donné, la prise en compte de toutes les conditions initiales telles que $\Lambda \in I_\Lambda = [0, \Lambda_{\max}]$ et $\xi \in I_\xi = [\xi_{\min}, 0[$ conduit pour chaque orbite correspondante à un ensemble de valeurs pour $\tau(\Lambda, \xi)$ et $\Phi(\Lambda, \xi)$. Lorsque l'ensemble des valeurs possibles pour $\Phi(\Lambda, \xi)$ est uniquement composé de nombres rationnels on conçoit que l'orbite se referme en temps fini. Dans une communication devant l'académie des sciences de Paris lue le 20 octobre 1873 par son auteur, Joseph Bertrand démontre qu'il n'existe que deux familles de potentiels ayant la propriété de conférer une orbite fermée à tous les points massifs qui leurs sont soumises.

Cette démonstration bien que correcte est peu claire, au tournant des années 1970 elle fut précisée par certains compléments de Vladimir Arnold dans son merveilleux livre sur les équations différentielles. Nous proposons dans ce sujet d'en donner un éclairage original centré sur un travail essentiel de Michel Hénon de 1959, l'amas isochrone.

Un formulaire est gracieusement fourni par les organisateurs en fin d'énoncé.



FIGURE 11 – Joseph Bertrand

$$\tau = \frac{2}{\pi} \times \int_{r_p}^{r_a} dt$$

il s'agit d'une fonction des deux variables $\xi = \frac{1}{m}E$ et $\Lambda = \frac{1}{m}\|\vec{L}\|$. Dans le plan orbital, la variation de l'angle polaire θ pendant la durée τ , notée $\varphi = \pi\Phi$ avec

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \times \int_{r_p}^{r_a} d\theta$$

Dans tout l'examen on supposera que le potentiel de gravitation ψ est une fonction radiale et croissante.

Généralités

- On considère une particule de masse m repérée par le vecteur \vec{r} et soumise à une force radiale $\vec{F} = -\text{grad}_{\vec{r}}(U)$ avec $U = m\psi(r)$ et $r = \|\vec{r}\|$, montrer que le moment cinétique $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ est conservé en déduire que le mouvement s'effectue dans un plan \mathcal{P} .
- Dans \mathcal{P} , on repère le vecteur position \vec{r} par ses coordonées polaires (r, θ) . Montrer que $\Lambda = \frac{\|\vec{L}\|}{m} = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$. On note $\xi = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \psi$ l'énergie massique de la particule. Exprimer ξ en fonction de r, \dot{r}, Λ et ψ .
- Pour un potentiel donné on définit l'action radiale de la particule par la relation

$$J_r(\xi, \Lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{r_p}^{r_a} dr \sqrt{f(\xi, \Lambda, r)} \quad \text{avec } f(\xi, \Lambda, r) = 2(\xi - \psi) - \frac{\Lambda^2}{r^2}.$$

Montrer que $f(\xi, \Lambda, r_a) = f(\xi, \Lambda, r_p) = 0$. En utilisant la relation (39) du formulaire, en déduire que

$$\tau = \frac{\partial J_r}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \Phi = -\frac{\partial J_r}{\partial \Lambda}$$

Potentiel képlerien

Dans le cas képlerien, le potentiel s'écrit $\psi(r) = -\frac{\mu}{r}$. On suppose $\xi < 0$, on admettra qu'alors le mouvement est une ellipse de paramètre focal $p = \frac{\Lambda^2}{\mu}$, de demi-grand axe a et d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{2\Lambda^2\xi}{\mu^2}}$

- Montrer que $\xi = -\frac{\mu}{2a}$ puis déterminer, en fonction de a et e , l'expression des racines r_p et $r_a \geq r_p$ de l'équation $\dot{r}^2 = 0$ de deux manières différentes. Comment s'appellent ces racines ? En déduire l'expression de r_p et r_a en fonction de μ, ξ et Λ .

Conseil important pour toute la suite de l'examen : On ne cherchera plus à calculer explicitement r_p et r_a , seuls leur somme et leur produit seront déterminés et utilisés.

- Déterminer l'expression de $J_r(\xi, \Lambda)$ en fonction de ξ, Λ et μ dans le cas keplerien. On pourra utiliser le résultat \mathcal{I}_2 du formulaire.
- Calculer τ et Φ pour le potentiel keplerien. Rapprocher ces résultats de propriétés connues du problème des deux corps.

Potentiel homogène

Une boule de masse M de rayon R et dont la densité volumique de masse ρ_0 est constante, est caractérisée par le potentiel homogène

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \psi_0 & \text{si } r < R \\ -\frac{GM}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

7. Exprimer ω^2 et ψ_0 en fonction de G , M et R .
8. Montrer que la période radiale τ est la même pour toutes les orbites situées dans une boule homogène.
9. Calculer Φ pour une orbite d'une particule confinée dans une boule homogène. On pourra utiliser le résultat \mathcal{I}_1 du formulaire. Que peut-on déduire du résultat obtenu pour Φ ?

Potentiel isochrone

Le potentiel isochrone $\psi(r)$ est défini par la relation

$$s \equiv -\frac{GM}{b\psi(r)} = 1 + \sqrt{\frac{r^2}{b^2} + 1}$$

Il a été défini et déterminé par Michel Hénon en 1959 pour être le potentiel le plus général pour lequel la période radiale ne dépend que de ξ et pas de Λ .

10. Déterminer la nature physique du paramètre M (*on attend une démonstration et pas des affirmations*).
11. On considère une particule telle que $\xi < 0$ évoluant dans un potentiel isochrone. Déterminer l'expression de son action radiale J_r . On pourra utiliser le résultat \mathcal{I}_3 du formulaire. Que remarquez-vous ?
12. En déduire τ et Φ pour cette particule dans un amas isochrone. Conclure.
13. En prenant en compte le résultat obtenu pour τ , proposez une généralisation de la 3^e loi de Kepler.

Le Théorème de Bertrand

On cherche tous les potentiels $\psi(r)$ tels que Φ possède une valeur fractionnaire (dans \mathbb{Q}) pour toutes les orbites et donc pour toutes les valeurs de $\Lambda \in I_\Lambda = [0, \Lambda_{\max}]$ et $\xi \in I_\xi = [\xi_{\min}, 0[$ possibles. Toutes ces orbites seront alors fermées. La fonction Φ est une fonction des deux variables réelles que sont Λ et ξ . Pour les potentiels cherchés on a donc $\Phi : I_\xi \times I_\Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$.

14. En admettant que la fonction $\Phi(\xi, \Lambda)$ est continue, montrer qu'elle est forcément constante si $\psi(r)$ est un potentiel vérifiant les conditions de Bertrand. On pourra raisonner par l'absurde.
15. En admettant que l'on peut appliquer le théorème de Schwarz, montrer que si $\psi(r)$ est un potentiel vérifiant les conditions de Bertrand, il est forcément isochrone.
16. En déduire qu'un potentiel vérifiant les conditions de Bertrand est soit keplerien soit homogène.

Formulaire

— On rappelle que si $f(x, y) = \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} g(x, y, t) dt$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, t) dt + \frac{\partial b}{\partial x}g(x, y, b(x, y)) - \frac{\partial a}{\partial x}g(x, y, a(x, y)) \quad (39)$$

— Afin d'éviter certains calculs et compte tenu du fait que le jeu d'intégrales n'est plus à la mode, on rappelle que pour tout $0 < \alpha < \beta$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}} = \pi \quad , \quad \mathcal{I}_2 = \int_a^b du \frac{\sqrt{(u-a)(b-u)}}{u} = \frac{\pi}{2} (a+b - 2\sqrt{ab})$$

et pour tout $2 < \alpha < \beta$

$$\mathcal{I}_3 = \int_{\alpha}^{\beta} du \frac{u-1}{u(u-2)} \sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)} = \frac{\pi}{2} [\alpha + \beta - \sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{4 + \alpha\beta - 2(\alpha + \beta)} - 2]$$

18 Construction d'une orbite keplerienne à la règle et au compas

Examen du cours de gravitation du Master 2 Astronomie & Astrophysique d'Ile-de-France, Janvier 2017

On considère une masse m dans le champ de gravitation d'un masse M . On note $\vec{r} = \overrightarrow{Mm}$ le vecteur position reliant ces deux masses à chaque instant, selon la loi de la gravitation universelle de Newton on aura

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu m}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{avec à chaque instant } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \text{ et } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Mise en place

1. Dans quelle(s) condition(s) peut-on prendre $\mu = GM$? On se placera dans ce cas pour la suite de l'examen.
2. Montrer que le vecteur \vec{r} reste dans un plan que l'on caractérisera. On note (r, θ) les coordonnées polaires dans ce plan et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base orthonormée polaire locale mobile.
3. Exprimer \vec{e}_r en fonction de $\dot{\vec{e}}_\theta$, puis r^2 en fonction du module L du moment cinétique de m par rapport à M , afin d'obtenir une relation de la forme

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{0}$$

dans laquelle on constatera que \vec{u} est proportionnel à l'un des deux vecteurs de la base polaire locale, on notera k le coefficient constant de cette proportionalité et on l'exprimera en fonction de G, M, m et L .

4. Le vecteur $\vec{h} = \vec{v} - \vec{u}$ est connu sous le nom de vecteur de Hamilton. Caractériser géométriquement l'hodographe des vitesses (lieu des extrémités du vecteur vitesse \vec{v}) en fonction de \vec{h} et \vec{u} .
5. En calculant $\vec{u} \cdot \vec{h}$, démontrer que la trajectoire est une conique dont on précisera les paramètres.
6. Le vecteur de Lagrange est défini par la relation $\vec{A} = \vec{h} \wedge \vec{L}$. Montrer que \vec{A} est le vecteur directeur d'une droite qui est un axe de symétrie de la trajectoire.
7. Déterminer l'énergie massique de m en fonction de \vec{h} et \vec{u} .

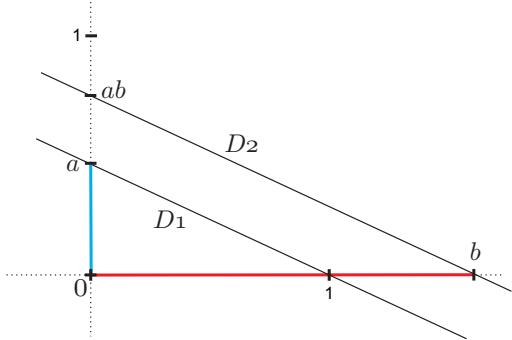
Dans de nombreux cas en astronomie, on ne mesure en fait que la position et la vitesse d'un corps à un instant de son orbite. Nous allons voir à présent comment obtenir géométriquement le reste de cette orbite en faisant uniquement l'hypothèse d'une force newtonienne. Nous n'utiliserons qu'une règle et un compas, seuls instruments graphiques à la disposition des astronomes pendant des siècles !

Construction de l'orbite à la règle et au compas

Pour toutes les réponses de cette partie on utilisera la feuille fournie et à remettre avec sa copie et l'on expliquera par écrit pour chaque construction les différentes étapes des constructions.

La figure 1 représente à un instant $t = 0$, les vecteurs position et vitesse d'une particule de masse m dans le champ de gravitation d'une masse M . Le système d'unité choisi est tel que $m = 1$ et $GM = 1$. Cette longueur unité a été représentée sur le graphique ainsi qu'une base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Pour cette représentation on a choisi l'origine des vitesses en M mais le vecteur \vec{v}_0 représente bien la vitesse de la particule de masse m .

8. Construire à la règle et au compas sur la figure 1, la longueur L du moment cinétique de cette particule. On effectuera cette construction sur la figure 1 et on vérifiera que la valeur de cette longueur est particulièrement simple. A toutes fins utiles on rappelle ci-dessous la construction à la règle et au compas d'un produit de deux nombres a et b si l'on connaît la longueur unité.

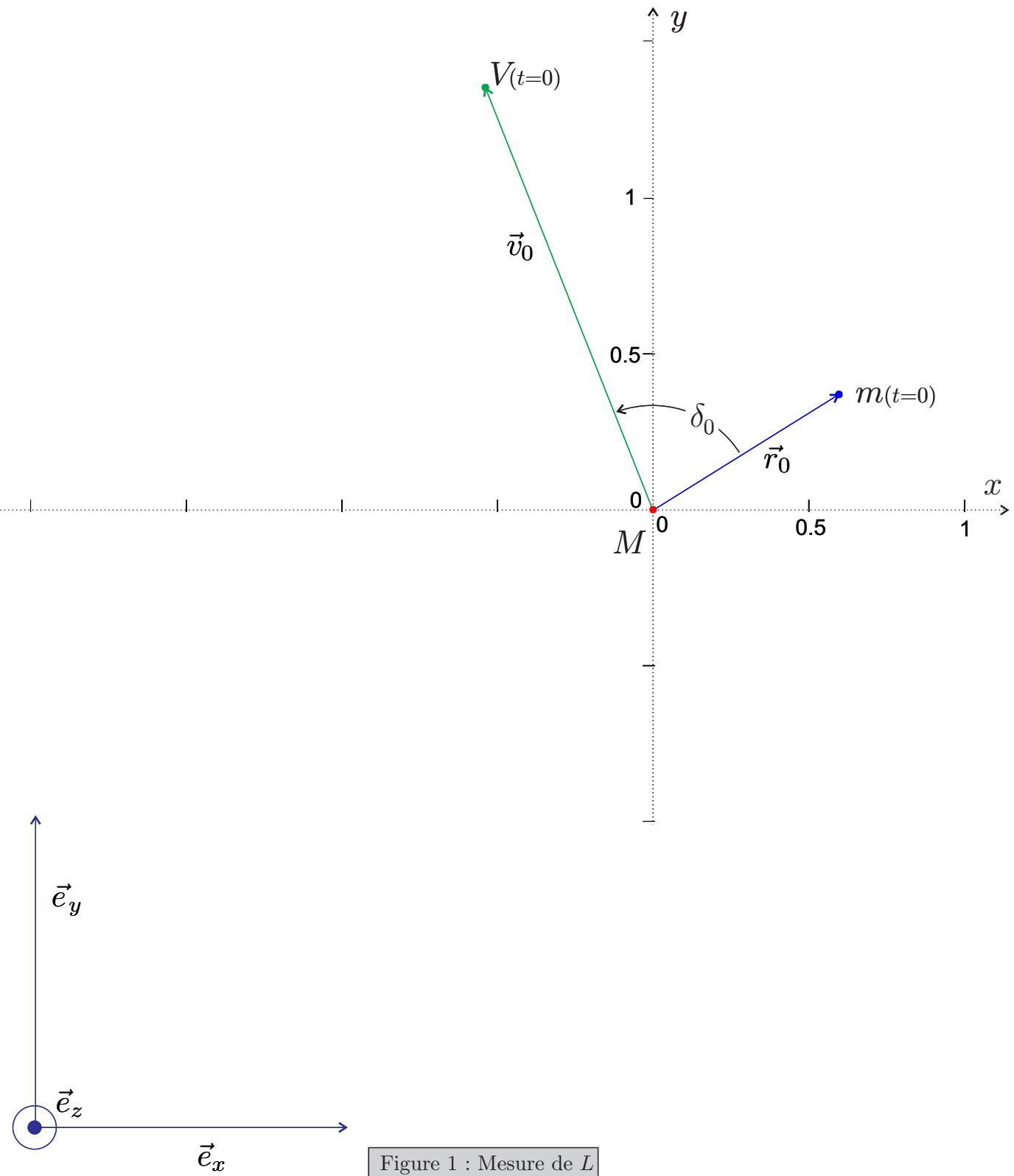


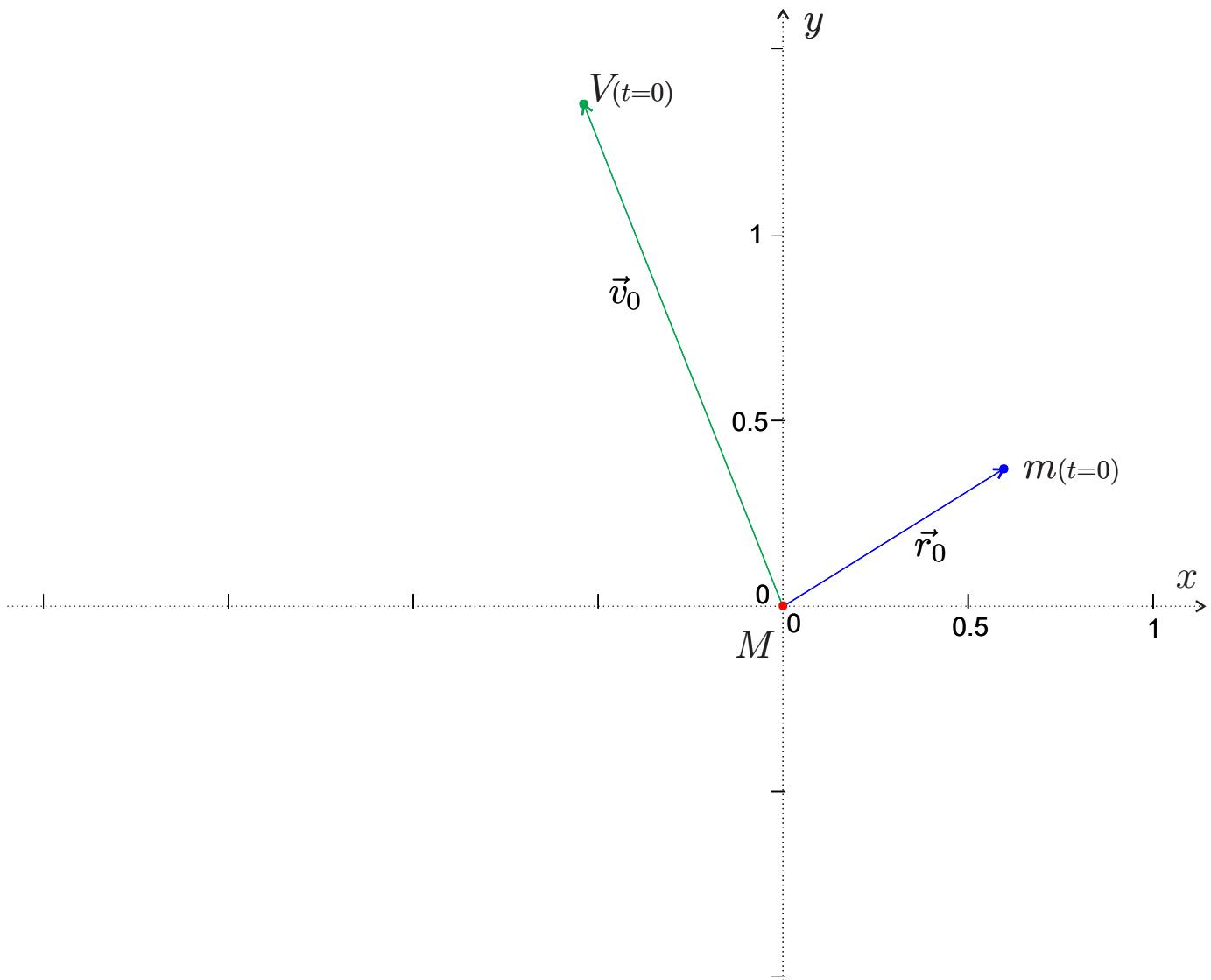
Le repère (O,x,y) est orthonormé.

- 1) On construit la longueur b sur l'axe Ox .
- 2) On construit la longueur a sur l'axe Oy .
- 3) On construit la droite D_1 reliant a à l'unité sur Ox .
- 4) On construit la droite D_2 parallèle à D_1 passant par b .

D_2 coupe l'axe Oy en un point ab , dont la distance à l'origine est le produit de a par b .

9. Construire le vecteur de Hamilton \vec{h} sur le graphique de la figure 2. En déduire la construction sur cette même figure de l'hodographe des vitesses (lieu des extrémités du vecteur vitesse).
10. Construire le vecteur de Lagrange sur la figure 2.
11. Construire sur la figure 3, un autre point $m(t)$ de la trajectoire à partir de sa vitesse \vec{v}_t que l'on choisira arbitrairement sur l'hodographe puis en appliquant des constructions semblables au précédentes mais dans le sens inverse.
12. Tracer sur la figure 4, l'orbite complète du point m à partir de points caractéristique de celle-ci.



Figure 2 : Construction de \vec{h} et de l'hodographe

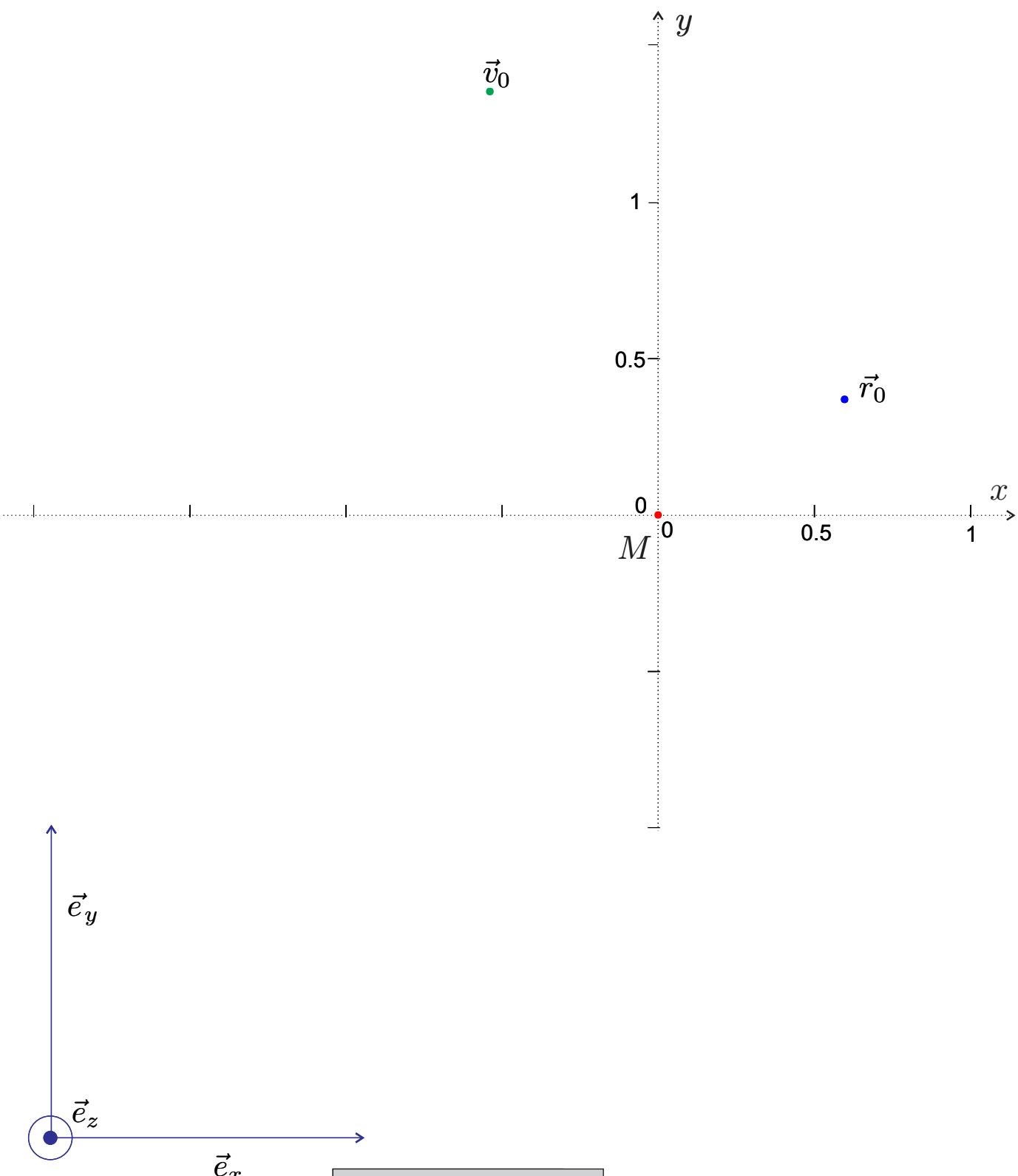


Figure 3 : Construction
d'un autre point de l'orbite

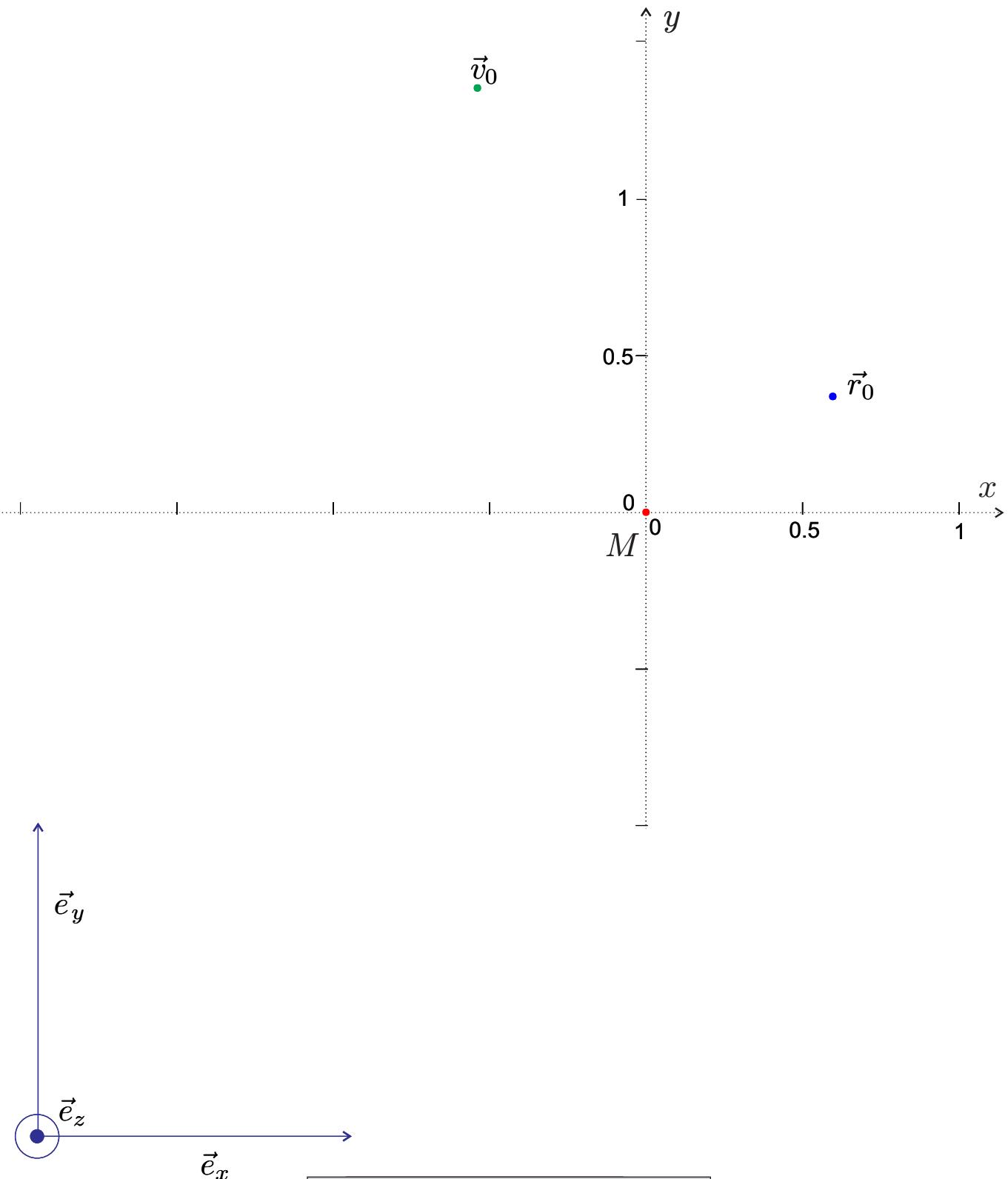


Figure 4 : Construction de l'orbite