

Master 2 Astronomie & Astrophysique Ile de France  
 Examen de Gravitation FL1 - 2011-2012  
 durée 3H00

*Les notes de cours et les livres du cours sont autorisés*

**La loi de Titius-Bode**

Dès l'antiquité les astronomes ont cherché de l'ordre dans le mouvement des planètes, astres errants qui semblaient se mouvoir à leur guise dans le système solaire. L'idée d'un ordonnancement géométrique est apparue chez les élèves de Platon et fut renforcée par la physique d'Aristote. Mais le premier modèle complètement géométrique est l'œuvre de Kepler, en souvenir de cet illustre astronome nous allons commencer par étudier la nature de son résultat.

Un polyèdre est dit régulier s'il est constitué de faces toutes identiques et régulières, et que tous ses sommets sont identiques, toutes ses arêtes ont donc la même longueur  $a$ . Il n'en existe que 5 qui soient convexes : le tétraèdre dont les faces sont 4 triangles équilatéraux, le cube (6 carrés), l'octaèdre (8 triangles), le dodécaèdre (12 pentagones) et l'icosaèdre (20 triangles). Chacun de ces solides possède une unique sphère inscrite et circonscrite dont on peut montrer que les rayons  $r_i$  et  $r_c$  sont des multiples de  $a$ . Le 19 juillet 1595, alors qu'il donnait un cours à l'Université de Graz sur le rapport des distances de Saturne et Jupiter au soleil, Kepler fût frappé de reconnaître dans son calcul le rapport des rayons des cercles circonscrit et inscrit dans le cube, soit  $\sqrt{3}$ . Il arrêta son cours, calcula les mêmes rapports pour les cinq polyèdres et chercha les meilleures estimations de distance au soleil des planètes connues. Moins d'un an plus tard il publiait sa première oeuvre majeure, le *mysterium cosmographicum*, dans lequel il pensait avoir découvert le secret du monde : les 5 polyèdres s'intercalent dans les sphères portant les 6 planètes, le cercle inscrit du précédent étant le cercle circonscrit du suivant...

- En remplissant un tableau judicieux, indiquer les possibilités d'emboîtage des polyèdres qui ont fait croire à Kepler qu'il avait découvert le secret du monde. Le tableau ci-dessous donne les rayons de ces sphères (en unité d'arête) pour les 5 polyèdres réguliers,

Polyèdre	Tétraèdre 	Cube 	Octaèdre 	Dodécaèdre 	Icosaèdre 
$\frac{r_i}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{\varphi^5}{\sqrt{5}}}$	$\frac{\varphi^2}{\sqrt{3}}$
$\frac{r_c}{a}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\varphi\sqrt{3}$	$\sqrt{\varphi\sqrt{5}}$

où  $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  est le nombre d'or. Les valeurs utilisées par Kepler pour les calculs de rapports de distance peuvent être consultées, en latin, page 77 de l'édition originale du *Mysterium cosmographicum*

Saturne	Jupiter	Mars	Terre	Vénus	Mercure
9163	5261	1440	1000	762	429

On remarquera d'ailleurs à la consultation que Kepler s'est permis quelques libertés avec les valeurs proposées par Copernic...

Un siècle plus tard, entre 1766 et 1772 Titius, Bode puis Wurm firent successivement remarquer que les planètes connues à l'époque suivaient une progression géométrique

$$r_n = 0,4 + 0,3 \times 2^n$$

où  $r_n$  est le demi-grand axe moyen de la  $n$ -ième planète considérée exprimé en unité astronomiques. La séquence commence avec  $n \rightarrow -\infty$  pour Mercure ( $r_{me} = 0,39$  ua),  $n = 0$  pour Vénus ( $r_{ve} = 0,72$  ua),  $n = 1$  pour la Terre, etc...

Cette loi connut deux succès considérables. Le premier lorsqu'en 1781 Herschell découvrit Uranus et que deux ans plus tard Laplace détermina sa période  $T_{ur} = 30\ 688$  jours sidéraux (Système du monde, Ch. 9, p.80). Le second alors que la loi prévoyait une planète manquante entre Mars ( $r_{ma} = 1,52$  ua) et Jupiter ( $r_{ju} = 5,20$  ua), et que l'on découvrit au tout début du XIX<sup>e</sup> siècle la ceinture d'astéroïdes située à une distance moyenne  $r_{as} = 2,8$  ua du Soleil.

Les perturbations de l'orbite d'Uranus furent attribuées tout naturellement à une nouvelle planète. Adams puis Leverrier proposèrent des paramètres orbitaux en accord avec la loi de Titius-Bode. Le premier proposa en 1841 un demi-grand axe  $r_{ne,a} = 36,154$  ua et une excentricité de 0,107 tandis que le second avait utilisé un demi grand axe  $r_{ne,l} = 37,25$  ua. Les deux calculs étaient faux, bien que tous deux aient annoncé la position de la planète non loin de sa position réelle ou Galle l'observa le 23 septembre 1846. Il y a environ 6 mois, le 12 juillet 2011, Neptune est retournée au point où Galle l'avait observée pour la première fois, confirmant que la Loi de Titius-Bode avait des limites...

L'objectif de ce problème est de comprendre l'origine physique possible de cette loi.

2. On rappelle que le demi-grand axe de Saturne est  $r_{sa} = 9,54$  ua, dresser un tableau des données observationnelles, des prédictions de la loi de Titius-Bode et de l'erreur relative correspondante pour le système solaire.

Les explications de la loi de Titius-Bode peuvent être rangées en deux catégories :

- Les explications dynamiques considèrent que cette loi est le résultat du processus de formation des planètes, elles reposent sur des analyses de stabilité du disque proto-planétaire;
- Les explications cinématiques attribuent la loi à des interactions orbitales une fois le système planétaire formé.

Des analyses globales récentes montrent que cette loi est sans doute une propriété universelle qui apparaît dans tout système dynamique possédant des propriétés d'auto-similarité. Nous allons voir dans la suite de ce problème que la dynamique d'un système planétaire jouit de cette propriété d'autosimilarité puis que les propriétés de stabilité d'un tel système autogravitant permettent de voir émerger naturellement la loi de Titius-Bode.

On modélise un système planétaire par des équations fluides auto-gravitantes et non visqueuses. Dans un référentiel galiléen de centre  $O$ , les planètes et le gaz sont modélisées par un champ de densité volumique de masse  $\rho(\vec{r}, t)$  et de vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Ce champ de vitesse est à l'origine d'un champ de pression  $P(\vec{r}, t)$  et le champ de densité génère un champ gravitationnel  $\psi(\vec{r}, t)$ . Un objet central de masse  $M_\odot$  crée aussi une force globale à l'échelle du système. Les équations régissant l'évolution du système sont les équations de Jeans

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \text{(Continuité)} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \psi - \frac{GM_\odot}{r^2} \hat{e}_r & \text{(Euler)} \\ \Delta \psi = 4\pi G \rho & \text{(Poisson)} \end{array} \right.$$

La quantité  $r$  représente le module du vecteur  $\vec{r}$ , et  $\hat{e}_r$  est un vecteur unitaire tel que  $\hat{e}_r = \vec{r}/r$ . On rappelle aussi que l'on peut écrire  $\vec{\nabla} = \frac{d}{dr}$ .

3. Montrer que ce système d'équation est auto-similaire. C'est-à-dire qu'il existe au moins une famille de nombres entiers non tous nuls ( $a, b, c, d, e, f$ ) telle que la transformation

$$\begin{array}{l|l} \vec{r} \rightarrow \lambda^a \vec{r} & \vec{v} \rightarrow \lambda^d \vec{v} \\ t \rightarrow \lambda^b t & P \rightarrow \lambda^e P \\ \rho \rightarrow \lambda^c \rho & \psi \rightarrow \lambda^f \psi \end{array}$$

laisse le système inchangé.

4. On souhaite représenter le gaz autogravitant considéré par une équation d'état polytropique de la forme

$$P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1)$$

où  $P_0$  et  $\rho_0$  ont des valeurs constantes. Montrer que la seule valeur de  $\gamma$  compatible avec l'hypothèse d'auto-similarité du système est  $\gamma = 4/3$ .

5. Montrer que dans les conditions de la question précédente et à l'équilibre, la relation entre la densité  $\rho$  et le potentiel gravitationnel  $\psi$  est de la forme

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^n$$

où  $\rho_0$  et  $\psi_0$  ont des valeurs constantes et  $n$  est un nombre entier qui ne dépend que de  $\gamma$  et que l'on déterminera. On exprimera aussi  $\psi_0$  en fonction de  $P_0$  et  $\rho_0$ .

6. A une constante multiplicative près, déterminer la fonction de distribution d'équilibre, isotrope dans l'espace des impulsions, qui permettrait d'avoir une telle relation entre potentiel et densité? Quelles sont les propriétés de cet équilibre ?

7. On suppose que le système est sphérique. Montrer que la fonction  $y$  telle que  $\rho = \rho_0 y^n$ , d'une variable  $x = r/r_0$  où  $r_0$  est un paramètre que l'on déterminera en fonction  $P_0$ ,  $G$  et  $\rho_0$  vérifie l'équation de Lane-Emden

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0$$

quelles sont les valeurs de  $y$  et  $\frac{dy}{dx}$  en  $x = 0$ .

La figure 1 donne, pour différentes valeurs de  $n$ , la représentation graphique de la fonction  $y(x)$  solution de l'équation de Lane-Emden, la valeur  $x_{\max,n}$  de son premier zéro ainsi que le résultat du calcul de l'intégrale

$$\mu_n = \int_0^{x_{\max,n}} 4\pi x^2 y^n dx$$

La densité totale  $\rho_t$  du système s'écrit comme la somme de  $\rho_c = M_\odot \delta(r)$  représentant l'objet central et de la densité polytropique  $\rho$  étudiée dans les questions précédentes. On suppose que la masse totale  $M'$  du système polytropique est une fraction de la masse de l'objet central, soit  $M' = kM_\odot$  avec comme dans le système solaire  $k = 10^{-3}$ . On prendra

$$\psi_0 = -\frac{GM'}{5R} \quad \text{avec } R = 50 \text{ ua}$$

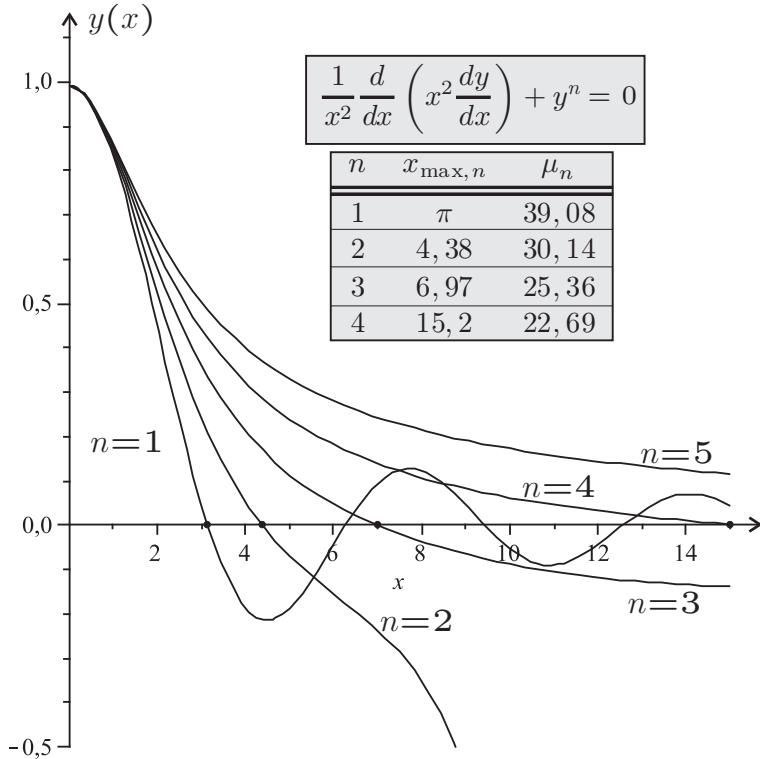


Figure 1: Solution numérique de l'équation de Lane-Emden pour différentes valeurs de  $n$

8. Exprimer  $\rho_0$  en fonction de  $k$ ,  $\mu_n$ ,  $M_\odot$  et  $R$ . Calculer sa valeur numérique et commenter le résultat. On donne  $1 \text{ ua} = 1,49 \cdot 10^9 \text{ m}$ ,  $1 M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .
9. On fait l'hypothèse que chaque particule de masse  $m$  du fluide polytropique repérée par le vecteur  $\vec{r} = r\hat{e}_r$  n'est soumise qu'à la force créée par l'objet central de masse  $M_\odot$ . Montrer que son mouvement s'effectue dans un plan dont la base polaire sera notée  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ . Montrer que dans ce plan les mouvements circulaires de rayon  $r$  se font avec une vitesse  $\vec{v} = \Omega(r)\hat{e}_\theta$  où l'on exprimera la fonction  $\Omega(r)$  en fonction de  $G$ ,  $M_\odot$  et  $r$ .

Un processus non décrit ici conduit à l'alignement de tous les plans et à la circularisation des orbites, on assiste donc à la formation d'un disque de fluide autogravitant dans lequel le champ de vitesse à l'équilibre est de la forme  $\vec{v} = \Omega(r)\hat{e}_\theta$ . Les équations de la dynamique de ce fluide sont les équations de Jeans décrites plus haut. On suppose toujours que l'équation d'état est polytropique d'indice  $\gamma = 4/3$ . On rappelle que la vitesse du son dans un fluide est définie par la relation  $\vec{\nabla}P = c_s^2 \vec{\nabla}\rho$ . Cette vitesse permet d'éliminer la pression dans les équations de Jeans.

10. Montrer que la vitesse du son dans le fluide est une fonction de  $r$ . On explicitera la relation entre  $c_s$ ,  $P_0$ ,  $\rho_0$  et la solution  $y$  de l'équation de Lane-Emden correspondante.

En introduisant la vitesse du son, les seules inconnues du problème restent  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ,  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\psi(\vec{r}, t)$ . On se propose à présent d'étudier la stabilité linéaire des équations de Jeans d'un équilibre polytropique, en rotation circulaire et soumis à une perturbation radiale. A cette fin, on introduit la décomposition suivante :

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r}, t) = \Omega(r)\hat{e}_\theta + \varepsilon \vec{v}_1(r, t) \\ \rho(\vec{r}, t) = \tilde{\rho}(r) + \varepsilon \rho_1(r, t) \\ \psi(\vec{r}, t) = \tilde{\psi}(r) + \varepsilon \psi_1(r, t) \end{cases} \quad \text{où } \varepsilon \text{ est un petit paramètre.}$$

11. Détaillez les diverses «hypothèses» qui permettent d'obtenir, à l'ordre  $\varepsilon$ , les relations

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \tilde{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \tilde{\rho} = 0 \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 - \tilde{\rho} \vec{\nabla} \psi_1 \\ \Delta \psi_1 = 4\pi G \rho_1 \end{cases}$$

On rappelle que  $\vec{\nabla} \cdot f(r) \hat{e}_\theta = 0$ . En supposant que  $\vec{\nabla} \rho_1 \cdot \vec{\nabla} c_s^2 + \vec{\nabla} \tilde{\rho} \cdot \vec{\nabla} \psi_1 = o(\varepsilon)$ , déduire que

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + \sigma^2 \rho_1$$

où  $\sigma^2$  est une fonction de  $r$  que l'on exprimera en fonction de  $G$  et  $\tilde{\rho}(r)$ .

12. On décompose la perturbation de densité sur des modes de Fourier, de telle manière que

$$\rho_1(r, t) = e^{i\omega t} f(r) \quad \text{avec } \omega \in \mathbb{C}$$

et l'on cherche des fonctions  $f(r)$  de la forme

$$f(r) = e^{ia\xi(r)} \quad \text{avec } a \text{ réel tel que } a \gg 1$$

Montrer que l'on peut dans ces conditions obtenir l'inégalité

$$\left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 > 0 \quad \text{si } \omega^2 > 0$$

qui assure un comportement oscillant pour la perturbation de densité. Les maxima de ces oscillations correspondent aux zones de formation des planètes.

13. On peut obtenir un excellent ajustement à 3 paramètres de la fonction  $\xi(r)$  sous la forme

$$\xi(r) = \frac{2\pi}{\beta} \ln \left( \frac{r - r_a}{\alpha} \right)$$

Montrer comment un choix astucieux des paramètres réels et positifs  $a, \alpha, \beta$  et  $r_a$  permet de retrouver la loi de Titius-Bode.