

Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2000

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Les points
de
Lagrange

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Nous considérons dans tout ce problème deux corps A et B sphériques, homogènes et de masses respectives m_A et m_B . Le corps B est supposé en orbite circulaire de rayon R autour du corps A . Seule l'interaction gravitationnelle entre ces deux corps sera prise en compte.

A - Orbite circulaire

1. Le référentiel (\mathcal{F}) centré sur A est-il galiléen ?
2. Pourquoi le mouvement de B s'effectue dans un plan P ? Dans quelles conditions l'interaction gravitationnelle entre deux corps sphériques conduit-elle à une orbite quasi-circulaire ?
3. Soit \vec{e}_z un vecteur unitaire orthogonal à P (voir figure 1).

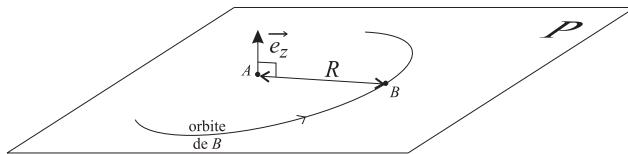


FIGURE 1 – Plan orbital

Montrer que la vitesse angulaire de B dans (\mathcal{F}) est $\vec{\Omega} = n\vec{e}_z$ avec

$$n = \frac{\sqrt{G(m_A + m_B)}}{R^{3/2}}$$

B - Trajectoire d'une particule test

On se place dorénavant dans un référentiel (\mathcal{T}) toujours centré sur A mais tournant avec B . Dans (\mathcal{T}) ces deux corps sont donc **fixes**. On considère alors le mouvement d'une particule de masse m très petite devant celles de A et B . Nous faisons l'hypothèse que cette particule se déplace uniquement dans P . On repère la particule dans (\mathcal{T}) par sa position $\vec{r} = (x, y, 0)$ et sa vitesse $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ (voir figure (2)).

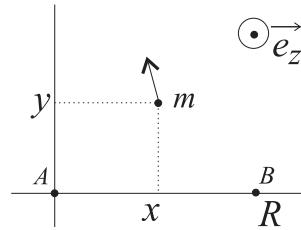


FIGURE 2 – Référentiel tournant

1. Montrer que le lagrangien du système dans (\mathcal{T}) s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 - U$$

avec

$$U = -\frac{Gmm_A}{r_1} - \frac{Gmm_B}{r_2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x - R)^2 + y^2} \end{cases}$$

2. En déduire que les équations du mouvement de la particule dans (\mathcal{T}) s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = -\frac{\partial \psi_{eff}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = -\frac{\partial \psi_{eff}}{\partial y} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \psi_{eff} = \frac{U}{m} - \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2)$$

C - Équilibres

Les points dont les coordonnées vérifient les équations $\frac{\partial \psi_{eff}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{eff}}{\partial y} = 0$ correspondent à des points d'équilibre dans le plan $x0y$. De fait, si la particule est abandonnée sans vitesse initiale sur l'un de ces points, elle y restera indéfiniment compte tenu des équations du mouvement. Un raisonnement géométrique (effectué initialement par Monsieur Lagrange) permet de montrer que les points d'équilibre ne peuvent exister que sur la droite $y = 0$ ou bien sur la droite telle que $r_1 = r_2$. Ces points sont connus sous le nom de points de Lagrange. On pose

$$\alpha = \frac{m_B}{m_A}.$$

1. Équilibres sur la droite $y = 0$.

On pose $E_1 =]-\infty, 0[$, $E_2 =]0, R[$ et $E_3 =]R, +\infty[$.

- (a) Montrer qu'il existe un unique point d'équilibre L_1 sur E_1 et calculer son abscisse dans la limite $\alpha \ll 1$.
- (b) Montrer qu'il existe un unique point d'équilibre dans chacun des intervalles E_2 et E_3 , que l'on appellera L_2 et L_3 , *il ne sera pas nécessaire de calculer les abscisses de ces points*.

2. Équilibres sur la droite $r_1 = r_2$.

Calculer dans la limite $\alpha \ll 1$ les coordonnées des deux points d'équilibre L_4 et L_5 situés sur la droite $r_1 = r_2$. On appellera L_4 le point d'ordonnée positive.

D - Stabilité des points de Lagrange

On se propose d'étudier la stabilité dynamique des points L_k pour $k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dans toute cette question on entend par stabilité de L_k le fait qu'un voisinage \mathcal{V}_k de L_k reste stable lors de l'évolution dynamique.

Pour chaque point de Lagrange $L_k (x_k, y_k, 0)$, on introduit les quantités

$$\gamma_k(t) := x(t) - x_k \quad \delta_k(t) := y(t) - y_k$$

$$a_k = \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x^2} \right|_{L_k} \quad b_k = \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x \partial y} \right|_{L_k} \quad c_k = \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial y^2} \right|_{L_k}$$

afin d'éviter certains calculs on admettra que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x^2} &= -\frac{Gm_A(2x^2 - y^2)}{r_1^5} - \frac{Gm_B(2(x-R)^2 - y^2)}{r_2^5} - \frac{G(m_A + m_B)}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial x \partial y} &= -\frac{3Gm_A xy}{r_1^5} - \frac{3Gm_A (x-R) y}{r_2^5} \\ \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial y^2} &= -\frac{Gm_A(2y^2 - x^2)}{r_1^5} - \frac{Gm_B(2y^2 - (x-R)^2)}{r_2^5} - \frac{G(m_A + m_B)}{R^3}\end{aligned}$$

1. En approximant ψ_{eff} par son développement de Taylor au second ordre, écrire les équations vérifiées par γ_k et δ_k dans \mathcal{V}_k .
2. On fait l'hypothèse que dans \mathcal{V}_k on a

$$\gamma_k = X_k e^{\lambda_k t} \text{ et } \delta_k = Y_k e^{\lambda_k t} \text{ avec } (X_k, Y_k) \neq (0, 0) \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Montrer que L_k est stable si et seulement si

$$a_k c_k - b_k^2 > 0 \quad \text{et} \quad a_k + c_k + 4n^2 > 2\sqrt{a_k c_k - b_k^2}$$

N.B. On pourra éventuellement utiliser sans démonstration le théorème suivant : *le polynôme à coefficients réels $x^2 + sx + p$ admet deux racines réelles négatives si et seulement si $p > 0$ et $s > 2\sqrt{p}$.*

3. Etudier la stabilité de L_1, L_4 et L_5 dans le cas $\alpha \ll 1$.
4. On montre que si $\alpha \ll 1$, les abscisses de L_2 et L_3 sont respectivement $R - \varepsilon$ et $R + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll R$, en déduire que L_2 et L_3 sont instables.

E - Les mondes de Saturne

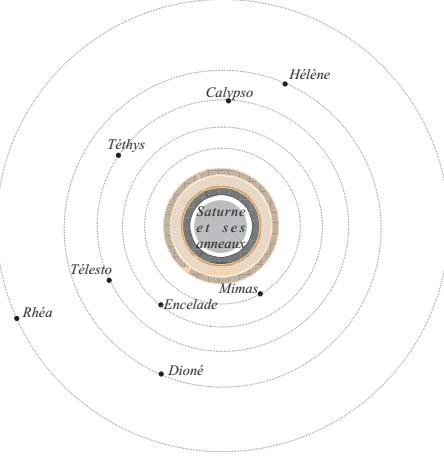


FIGURE 3 – Saturne et ses satellites les plus internes, le 7 Janvier 2001.

Grâce à un logiciel d'éphémérides astronomiques, nous avons représenté sur la figure 3 la configuration des satellites internes de Saturne pour une date fixée. Le point de vue est situé à quelques centaines de milliers de kilomètres à la verticale du pôle nord Saturnien. Les échelles de distance sont respectées sauf pour la taille des points représentant les satellites. Les caractéristiques physiques et orbitales de ces satellites sont les suivantes : la masse de Saturne est de $5.68 \cdot 10^{26} kg$.

	a ($\times 10^{-3}$ km)	R (km)	M (kg)	T (Jours)	e	i (deg)
Calypso	295	13	$0.50 \cdot 10^{15}$	1.888	0.00	1.1
Dioné	377	560	$1.05 \cdot 10^{21}$	2.737	0.02	0.0
Encelade	238	260	$8.40 \cdot 10^{19}$	1.370	0.004	0.0
Hélène	377	16	$1.10 \cdot 10^{15}$	2.737	0.005	0.2
Mimas	186	196	$3.80 \cdot 10^{19}$	0.942	0.02	1.5
Rhéa	527	765	$2.49 \cdot 10^{21}$	4.518	0.001	0.4
Téthys	295	530	$7.55 \cdot 10^{20}$	1.888	0.00	1.1
Télesto	295	15	$0.90 \cdot 10^{15}$	1.888	0.00	1.1

Commenter la figure 3 et les données ci-dessus...