

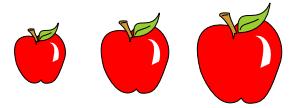
Le phénomène de résonance

Aspects théoriques

Séminaire CCT Mécanique Orbitale
CNES Toulouse — Jeudi 17 Janvier 2008

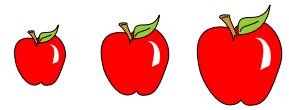
Jérôme Perez

www.ensta.fr/~perez



Résonance ?

Une des fréquences *naturelles* d'un système est égale à l'une des fréquences *de forçage* imposée à ce système ...



Type 1 ?

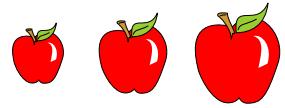
4:3 Titan - Hypérion

Orbite synchrone de la Lune

3:2 Mercure

Orbite rétrograde de Vénus

**SPIN
ORBITE**



Type 2 ?

3:2 Neptune-Pluton

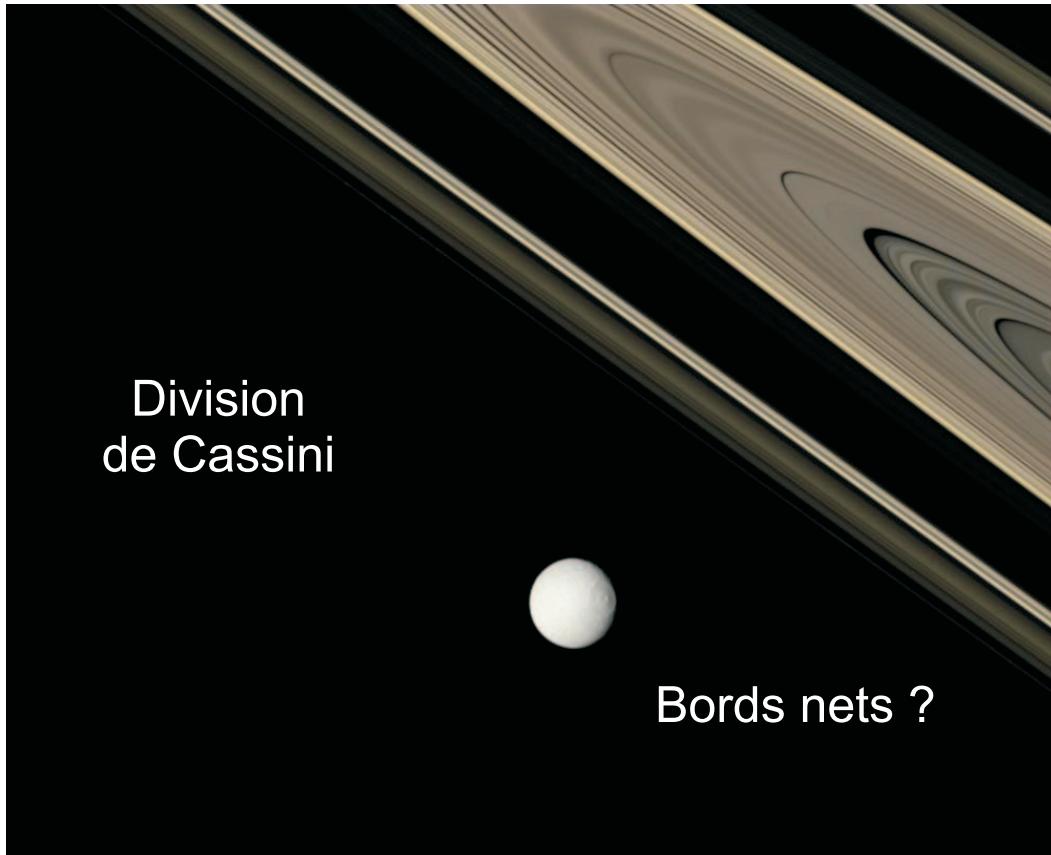
Galiléens de Jupiter

Etoiles
doubles

Division
de Cassini

Structure
spirale des
galaxies

Bords nets ?

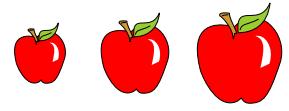


Lacunes de Kirkwood

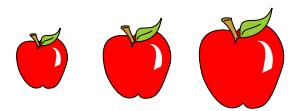
Confinement de
poussières zodiacales

Exoplanètes

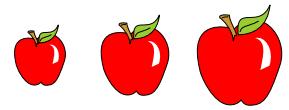
ORBITE
ORBITE



Comment expliquer tout cela ?



Sommaire



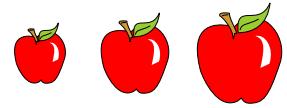
Sommaire

1. Le cas trivial ... : EDO Linéaire autonome

 Le cas général

 La résonance

 Un exemple : Problème gravitationnel 3 corps restreint en rotation



Sommaire

1. Le cas trivial ... : EDO Linéaire autonome

Le cas général

La résonance

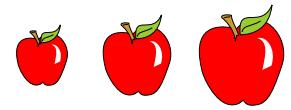
Un exemple : Problème gravitationnel 3 corps restreint en rotation

2. Un peu moins simple ... : EDO Linéaire non autonome (Coef. périodique)

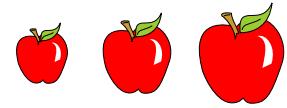
Contexte théorique

La résonance paramétrique

Un exemple : équation de Mathieu-Hill

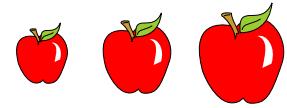


Écriture du problème



Écriture du problème

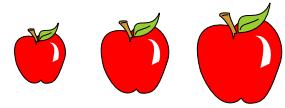
$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} X = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n : \text{état} \\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ U = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m : \text{commande} \end{bmatrix}$$



Écriture du problème

$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n : \text{état} \\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ U = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m : \text{commande} \end{cases}$$

Résolvante explicite : $R(t, s) = \exp [A(t - s)]$



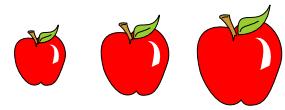
Écriture du problème

$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n : \text{état} \\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ U = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m : \text{commande} \end{cases}$$

Résolvante explicite : $R(t, s) = \exp [A(t - s)]$

Rappel $R_A(t, s)$ Résolvante de $\dot{X} = AX$

$$R_A(t, s) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \begin{cases} \frac{dR_A(t, s)}{dt} = AR_A(t, s) \\ R(t, t) = I \end{cases} \quad \text{alors } X(t) = R_A(t, s)X(s)$$



Écriture du problème

$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n : \text{état} \\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ U = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m : \text{commande} \end{cases}$$

Résolvante explicite : $R(t, s) = \exp [A(t - s)]$

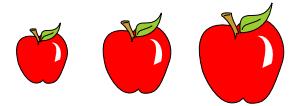
Rappel $R_A(t, s)$ Résolvante de $\dot{X} = AX$

$$R_A(t, s) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \begin{cases} \frac{dR_A(t, s)}{dt} = AR_A(t, s) \\ R(t, t) = I \end{cases} \quad \text{alors } X(t) = R_A(t, s)X(s)$$

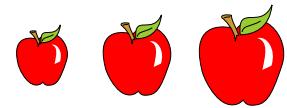
Propriétés de $R_A(t, s)$

$$R_A^{-1}(t, s) = R_A(s, t), \quad R_A(u, s) = R_A(u, t) \cdot R_A(t, s)$$

$$\det(R_A(t, s)) = \exp \left(\int_s^t \text{tr}[A(s)] ds \right)$$



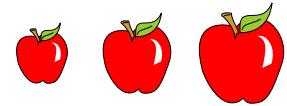
Comportement pour $t \rightarrow +\infty$



Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

Sans commande : $U \equiv 0$

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] \ X(t_o) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) < \infty?$$

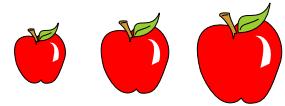


Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

Sans commande : $U \equiv 0$

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) < \infty?$$

$$\mathbb{E}_s = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0) \quad \mathbb{E}_i = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0) \quad \mathbb{E}_o = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0)$$



Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

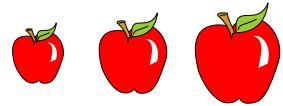
Sans commande : $U \equiv 0$

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) < \infty?$$

$$\mathbb{E}_s = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0) \quad \mathbb{E}_i = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0) \quad \mathbb{E}_o = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0)$$

Apple Indépendamment des conditions initiales ...

- Yellow Lemon Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}_s$: $\|X(t)\| \rightarrow 0$
- Yellow Lemon Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}_s \oplus \mathbb{E}_o$:
 - Pineapple Si $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ on a $\mu(\lambda_i) = d(\lambda_i)$ alors $X(t)$ borné
 - Pineapple Si $\exists i, \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ et $\mu(\lambda_i) > d(\lambda_i)$ alors $X(t)$ non borné



Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

Sans commande : $U \equiv 0$

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) < \infty?$$

$$\mathbb{E}_s = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0) \quad \mathbb{E}_i = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0) \quad \mathbb{E}_o = \bigoplus_{i=1}^n E(\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0)$$

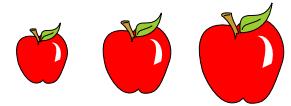
Apple Indépendamment des conditions initiales ...

- Yellow Lemon Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}_s$: $\|X(t)\| \rightarrow 0$
- Yellow Lemon Si $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}_s \oplus \mathbb{E}_o$:
 - Pineapple Si $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ on a $\mu(\lambda_i) = d(\lambda_i)$ alors $X(t)$ borné
 - Pineapple Si $\exists i, \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ et $\mu(\lambda_i) > d(\lambda_i)$ alors $X(t)$ non borné

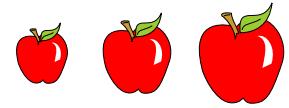
Apple En choisissant les conditions initiales ...

- Yellow Lemon Si $X(t_o) \in \mathbb{E}_s$: $\|X(t)\| \rightarrow 0$
- Yellow Lemon Si $X(t_o) \in E(\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0)$: $k_i = \mu(\lambda_i) - d(\lambda_i)$

$X(t) = \text{oscillations périodiques} \times P(t)$ avec $\deg(P(t)) = k_i$



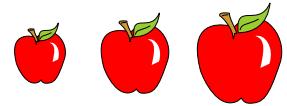
Comportement pour $t \rightarrow +\infty$



Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

Avec commande

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A(t - s)] BU(s) \, ds$$

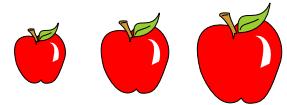


Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

Avec commande

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A(t - s)] B U(s) \, ds$$

🍓 Si $U(t) = \text{cste}$ retour au cas précédent modulo une translation.

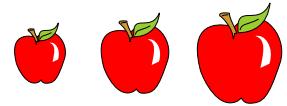


Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

Avec commande

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A(t - s)] B U(s) \, ds$$

- 🍓 Si $U(t) = \text{cste}$ retour au cas précédent modulo une translation.
- 🍓 Si $U(t)$ non borné, ... $X(t)$ généralement non borné ...



Comportement pour $t \rightarrow +\infty$

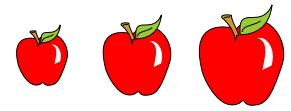
Avec commande

$$X(t) = \exp [A(t - t_o)] X(t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A(t - s)] B U(s) \, ds$$

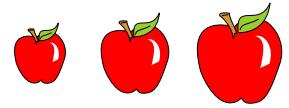
🍓 Si $U(t) = \text{cste}$ retour au cas précédent modulo une translation.

🍓 Si $U(t)$ non borné, ... $X(t)$ généralement non borné ...

🍓 Le cas intéressant : influence de $U(t)$ borné ... Résonance !



Résonance linéaire autonome



Résonance linéaire autonome

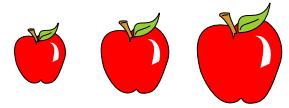
Hypothèses

⚠ Système sans commande borné : A diagonalisable et $\text{Re} [\text{Sp} (A)] \leq 0$

⚠ $U (t)$ borné \rightarrow Périodique, on peut le décomposer en série de Fourier ...

On étudie indépendamment chaque mode : $U (t) = \sin (\omega t) \epsilon_k$ avec

$\epsilon_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$ et $\omega \in \mathbb{R}$



Résonance linéaire autonome

Hypothèses

⚠ Système sans commande borné : A diagonalisable et $\text{Re} [\text{Sp} (A)] \leq 0$

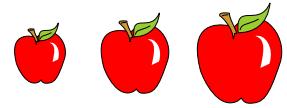
⚠ $U (t)$ borné \rightarrow Périodique, on peut le décomposer en série de Fourier ...

On étudie indépendamment chaque mode : $U (t) = \sin (\omega t) \epsilon_k$ avec

$\epsilon_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$ et $\omega \in \mathbb{R}$

Solution

$$X (t) = \exp [A (t - t_o)] X (t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A (t - s)] B U (s) \, ds$$



Résonance linéaire autonome

Hypothèses

⚠ Système sans commande borné : A diagonalisable et $\text{Re} [\text{Sp} (A)] \leq 0$

⚠ $U (t)$ borné \rightarrow Périodique, on peut le décomposer en série de Fourier ...

On étudie indépendamment chaque mode : $U (t) = \sin (\omega t) \epsilon_k$ avec

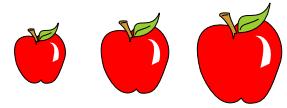
$\epsilon_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$ et $\omega \in \mathbb{R}$

Solution

$$X (t) = \exp [A (t - t_o)] X (t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A (t - s)] B U (s) \, ds$$

$$X (t) = \boxed{\exp [A (t - t_o)] X (t_o)} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} \int_{t_o}^t \exp [(A - i\omega I) s] B \epsilon_k \, ds \right)$$

borné



Résonance linéaire autonome

Hypothèses

Système sans commande borné : A diagonalisable et $\text{Re} [\text{Sp} (A)] \leq 0$

$U (t)$ borné \rightarrow Périodique, on peut le décomposer en série de Fourier ...

On étudie indépendamment chaque mode : $U (t) = \sin (\omega t) \epsilon_k$ avec

$$\epsilon_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m \text{ et } \omega \in \mathbb{R}$$

Solution

$$X (t) = \exp [A (t - t_o)] X (t_o) + \int_{t_o}^t \exp [A (t - s)] B U (s) \, ds$$

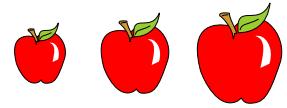
$$X (t) = \boxed{\exp [A (t - t_o)] X (t_o)} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} \int_{t_o}^t \exp [(A - i\omega I) s] B \epsilon_k \, ds \right)$$

borné



Cas 1 : $A - i\omega I$ est inversible ...

$$X (t) = \text{borné} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} (A - i\omega I)^{-1} (\exp [(A - i\omega I) t] - I) B \epsilon_k \right)$$
$$\longrightarrow X (t) \text{ borné}$$



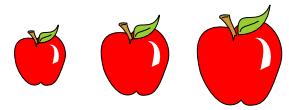
Résonance linéaire autonome



Cas 2 : $A - i\omega I$ non inversible ...

A est diagonalisable donc $A = P\Delta P^{-1}$ et $A - i\omega I = P(\Delta - i\omega I)P^{-1}$.

On note que $i\omega$ est dans le spectre de A ...



Résonance linéaire autonome

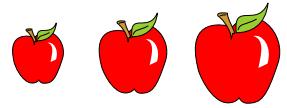


Cas 2 : $A - i\omega I$ non inversible ...

A est diagonalisable donc $A = P\Delta P^{-1}$ et $A - i\omega I = P(\Delta - i\omega I)P^{-1}$.

On note que $i\omega$ est dans le spectre de A ...

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \text{ ainsi } A - i\omega I = P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} P^{-1}$$



Résonance linéaire autonome



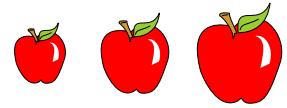
Cas 2 : $A - i\omega I$ non inversible ...

A est diagonalisable donc $A = P\Delta P^{-1}$ et $A - i\omega I = P(\Delta - i\omega I)P^{-1}$.

On note que $i\omega$ est dans le spectre de A ...

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \text{ ainsi } A - i\omega I = P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} P^{-1}$$

On se rappelle que $X(t) = \text{borné} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} \int_{t_0}^t \exp[(A - i\omega I)s] B \epsilon_k \right) ds$



Résonance linéaire autonome



Cas 2 : $A - i\omega I$ non inversible ...

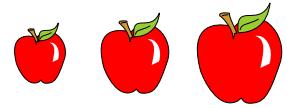
A est diagonalisable donc $A = P\Delta P^{-1}$ et $A - i\omega I = P(\Delta - i\omega I)P^{-1}$.

On note que $i\omega$ est dans le spectre de A ...

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \text{ ainsi } A - i\omega I = P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} P^{-1}$$

On se rappelle que $X(t) = \text{borné} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} \int_{t_0}^t \exp[(A - i\omega I)s] B \epsilon_k \right) ds$

$$X(t) = \text{borné} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1 - e^{2i\omega t}}{2i\omega} \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} P^{-1} B \epsilon_k \right)$$



Résonance linéaire autonome



Cas 2 : $A - i\omega I$ non inversible ...

A est diagonalisable donc $A = P\Delta P^{-1}$ et $A - i\omega I = P(\Delta - i\omega I)P^{-1}$.

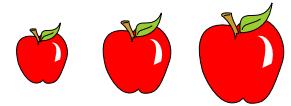
On note que $i\omega$ est dans le spectre de A ...

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \text{ ainsi } A - i\omega I = P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2i\omega \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} P^{-1}$$

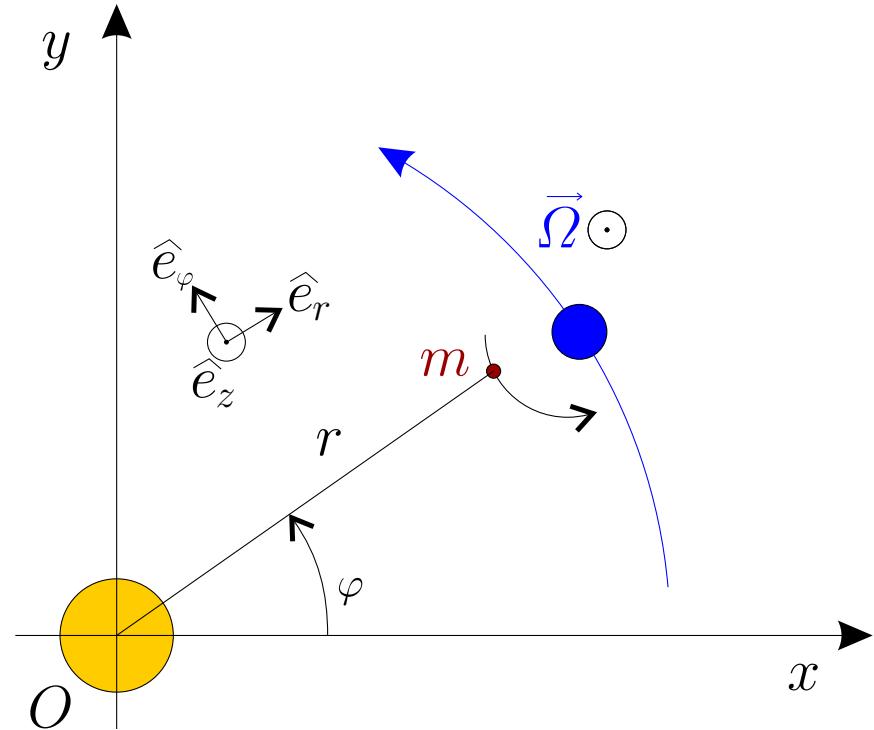
On se rappelle que $X(t) = \text{borné} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} \int_{t_0}^t \exp[(A - i\omega I)s] B \epsilon_k \right) ds$

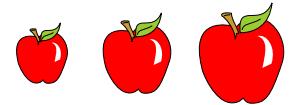
$$X(t) = \text{borné} + \text{Im} \left(e^{i\omega t} P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1 - e^{2i\omega t}}{2i\omega} \end{bmatrix} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} P^{-1} B \epsilon_k \right)$$

C'est la résonance !



Orbite dans un potentiel tournant 2D



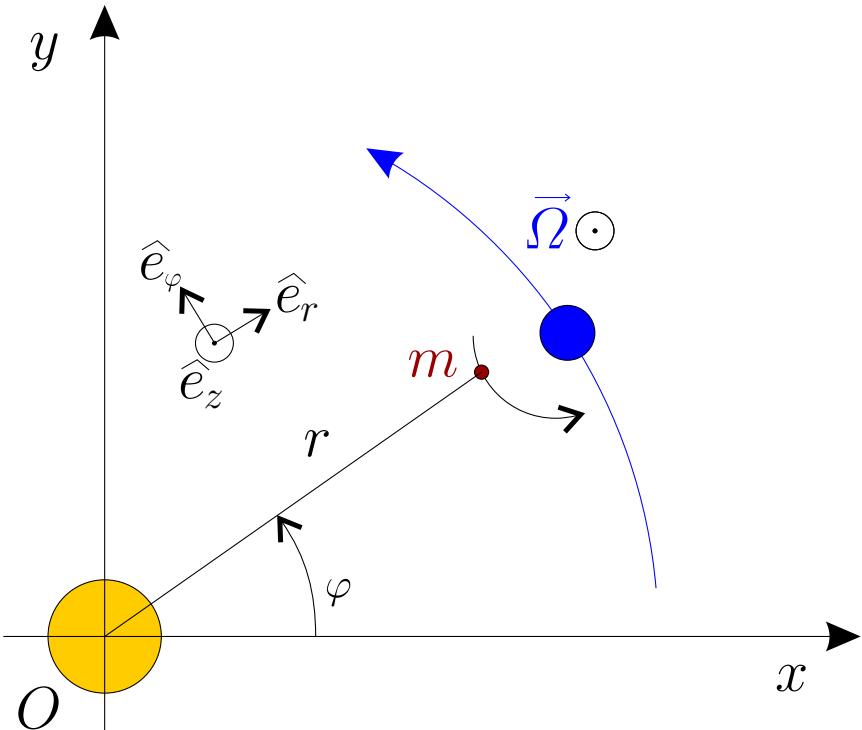


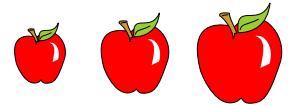
Orbite dans un potentiel tournant 2D

Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\vec{r}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 - U$$

avec $U = m\psi$





Orbite dans un potentiel tournant 2D

Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\vec{\dot{r}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 - U$$

avec $U = m\psi$

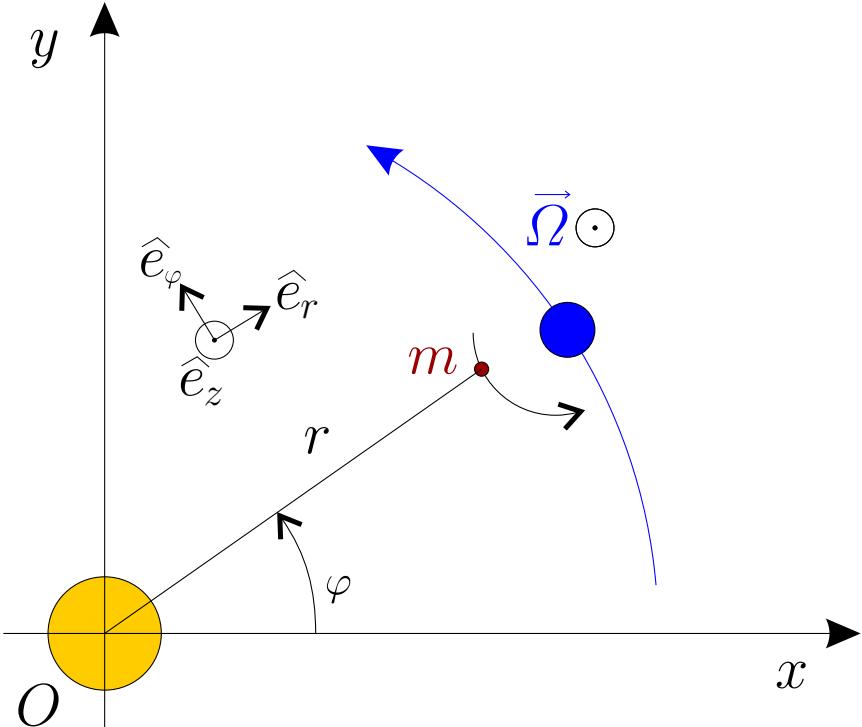
Équations du mouvement

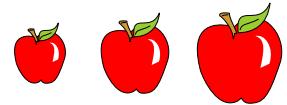
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\dot{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$$

soit

$$\vec{\ddot{r}} = -\vec{\Omega} \wedge \vec{\dot{r}} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{r} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) - \frac{d\psi}{d\vec{r}}$$

Inertie
de rotation Coriolis Centrifuge Gravité





Orbite dans un potentiel tournant 2D

Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\vec{\dot{r}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 - U$$

avec $U = m\psi$

Équations du mouvement

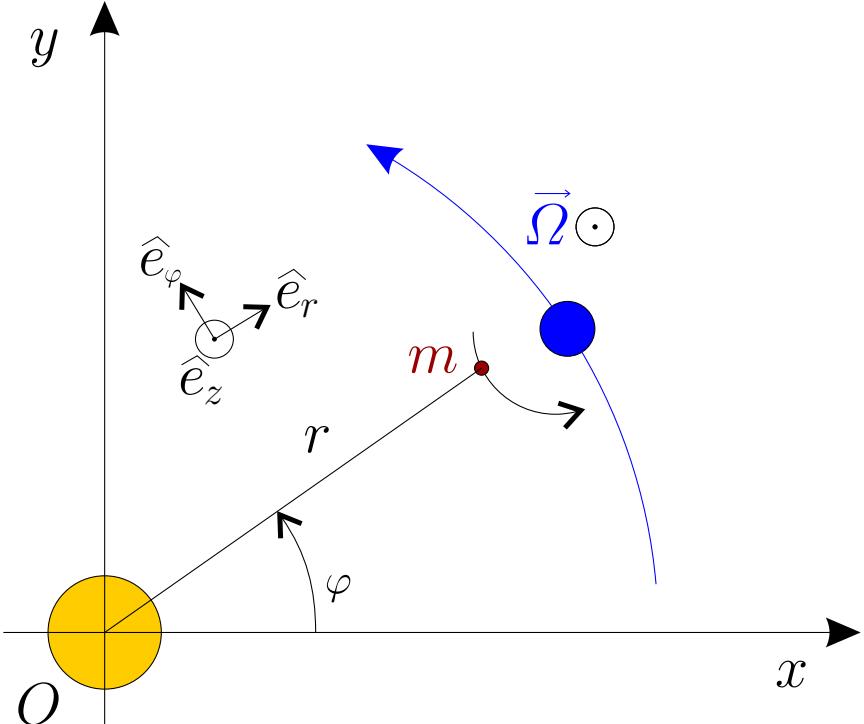
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\dot{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$$

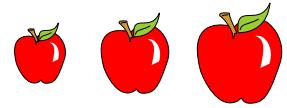
soit

$$\vec{\ddot{r}} = -\vec{\Omega} \wedge \vec{\dot{r}} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{r} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) - \frac{d\psi}{d\vec{r}}$$

Inertie
de rotation Coriolis Centrifuge Gravité

Le plus simple $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ avec $\Omega > 0$ cst : Equilibres = Pts de Lagrange ...

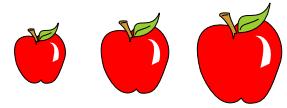




Les barres peu prononcées !

Hypothèses de symétrie : Mouvement plan : $\vec{r} = r \hat{e}_r$ et $\psi = \psi(r, \varphi)$
Les équations du mouvement s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2\Omega r\dot{\varphi} - \Omega^2 r & = & -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (E_r) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + 2\Omega\dot{r} & = & -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad (E_\varphi) \end{array} \right.$$



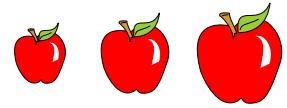
Les barres peu prononcées !

Hypothèses de symétrie : Mouvement plan : $\vec{r} = r \hat{e}_r$ et $\psi = \psi(r, \varphi)$
Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2\Omega r\dot{\varphi} - \Omega^2 r &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (E_r) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + 2\Omega\dot{r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad (E_\varphi) \end{cases}$$

H₁ - Hypothèse de faible barre : $\psi = \psi_o(r) + \varepsilon\psi_1(r, \varphi)$

H₂ - Hypothèses d'orbite circulaire perturbée : $\begin{cases} r(t) = r_o + \varepsilon r_1(t) \\ \varphi(t) = \varphi_o(t) + \varepsilon \varphi_1(t) \end{cases}$



Les barres peu prononcées !

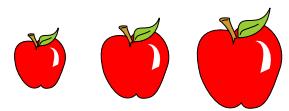
Hypothèses de symétrie : Mouvement plan : $\vec{r} = r \hat{e}_r$ et $\psi = \psi(r, \varphi)$
Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2\Omega r\dot{\varphi} - \Omega^2 r &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (E_r) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + 2\Omega\dot{r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad (E_\varphi) \end{cases}$$

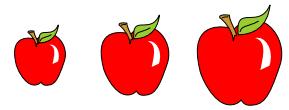
H₁ - Hypothèse de faible barre : $\psi = \psi_o(r) + \varepsilon\psi_1(r, \varphi)$

H₂ - Hypothèses d'orbite circulaire perturbée : $\begin{cases} r(t) = r_o + \varepsilon r_1(t) \\ \varphi(t) = \varphi_o(t) + \varepsilon\varphi_1(t) \end{cases}$

Un peu de calcul ...



Etape 1 : $\boxed{H_1} + \boxed{H_2} \rightarrow (E_r)$ donne $[A] + \varepsilon [B] = 0$ vraie $\forall \varepsilon \dots$



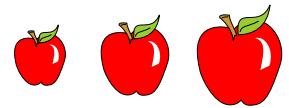
Etape 1 : $\boxed{H_1} + \boxed{H_2} \rightarrow (E_r)$ donne $[A] + \varepsilon [B] = 0$ vraie $\forall \varepsilon \dots$

 $[A] = 0$ s'écrit

$$\left. \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right|_{r=r_o} = r_o (\dot{\varphi}_o + \Omega)^2$$

en posant $\omega(r) = \sqrt{r \frac{\partial \psi_o}{\partial r}}$ et $\omega_o = \omega(r_o)$ il vient

$$\dot{\varphi}_o = \omega_o - \Omega \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi_o = (\omega_o - \Omega) t} \quad \text{on prend } \varphi_o(0) = 0$$



Etape 1 : $\boxed{H_1} + \boxed{H_2} \rightarrow (E_r)$ donne $[A] + \varepsilon [B] = 0$ vraie $\forall \varepsilon \dots$

⚠ $[A] = 0$ s'écrit

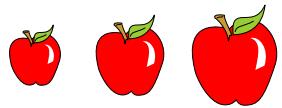
$$\frac{\partial \psi_o}{\partial r} \Big|_{r=r_o} = r_o (\dot{\varphi}_o + \Omega)^2$$

en posant $\omega(r) = \sqrt{r \frac{\partial \psi_o}{\partial r}}$ et $\omega_o = \omega(r_o)$ il vient

$$\dot{\varphi}_o = \omega_o - \Omega \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi_o = (\omega_o - \Omega) t} \quad \text{on prend } \varphi_o(0) = 0$$

⚠ $([A] = 0) \rightarrow [B] = 0$ donne

$$\ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_o}$$



Etape 1 : $\boxed{H_1} + \boxed{H_2} \rightarrow (E_r)$ donne $[A] + \varepsilon [B] = 0$ vraie $\forall \varepsilon \dots$

♪ $[A] = 0$ s'écrit

$$\left. \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right|_{r=r_o} = r_o (\dot{\varphi}_o + \Omega)^2$$

en posant $\omega(r) = \sqrt{r \frac{\partial \psi_o}{\partial r}}$ et $\omega_o = \omega(r_o)$ il vient

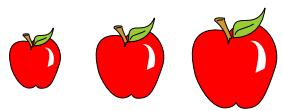
$$\dot{\varphi}_o = \omega_o - \Omega \rightarrow \boxed{\varphi_o = (\omega_o - \Omega) t} \quad \text{on prend } \varphi_o(0) = 0$$

♪ $([A] = 0) \rightarrow [B] = 0$ donne

$$\ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o = \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right|_{r=r_o}$$

Etape 2 : On fait pareil avec (E_φ) et on trouve

$$\ddot{\varphi}_1 + 2 \frac{\dot{r}_1}{r_o} \omega_o = - \frac{1}{r_o^2} \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right|_{r=r_o}$$



Etape 1 : $\boxed{H_1} + \boxed{H_2} \rightarrow (E_r)$ donne $[A] + \varepsilon [B] = 0$ vraie $\forall \varepsilon \dots$

♪ $[A] = 0$ s'écrit

$$\left. \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right|_{r=r_o} = r_o (\dot{\varphi}_o + \Omega)^2$$

en posant $\omega(r) = \sqrt{r \frac{\partial \psi_o}{\partial r}}$ et $\omega_o = \omega(r_o)$ il vient

$$\dot{\varphi}_o = \omega_o - \Omega \rightarrow \boxed{\varphi_o = (\omega_o - \Omega) t} \quad \text{on prend } \varphi_o(0) = 0$$

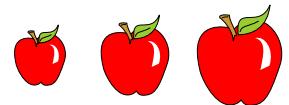
♪ $([A] = 0) \rightarrow [B] = 0$ donne

$$\ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o = \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right|_{r=r_o}$$

Etape 2 : On fait pareil avec (E_φ) et on trouve

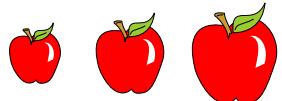
$$\ddot{\varphi}_1 + 2 \frac{\dot{r}_1}{r_o} \omega_o = - \frac{1}{r_o^2} \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right|_{r=r_o}$$

Il faut préciser ψ_1 pour pouvoir continuer ...



H₃ - Variables séparées et séparation des modes :

$$\begin{cases} \psi_1(r, \varphi) = \psi_b(r) \cos(n\varphi) \\ \varphi(t) = \varphi_o(t) + \varepsilon\varphi_1(t) \approx (\omega_o - \Omega)t \end{cases}$$

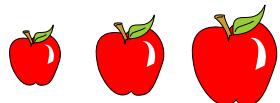


H₃ - Variables séparées et séparation des modes :

$$\begin{cases} \psi_1(r, \varphi) = \psi_b(r) \cos(n\varphi) \\ \varphi(t) = \varphi_o(t) + \varepsilon \varphi_1(t) \approx (\omega_o - \Omega)t \end{cases}$$

Les équations du mouvement perturbé s'écrivent finalement

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o &= -\psi'_b(r_o) \cos[n(\omega_o - \Omega)t] \quad (E_r) \\ \ddot{\varphi}_1 + 2\frac{\dot{r}_1}{r_o} \omega_o &= \frac{n \psi_b(r_o)}{r_o^2} \sin[n(\omega_o - \Omega)t] \quad (E_\varphi) \end{cases}$$



H₃ - Variables séparées et séparation des modes :

$$\begin{cases} \psi_1(r, \varphi) = \psi_b(r) \cos(n\varphi) \\ \varphi(t) = \varphi_o(t) + \varepsilon \varphi_1(t) \approx (\omega_o - \Omega)t \end{cases}$$

Les équations du mouvement perturbé s'écrivent finalement

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o &= -\psi'_b(r_o) \cos[n(\omega_o - \Omega)t] \quad (E_r) \\ \ddot{\varphi}_1 + 2\frac{\dot{r}_1}{r_o} \omega_o &= \frac{n \psi_b(r_o)}{r_o^2} \sin[n(\omega_o - \Omega)t] \quad (E_\varphi) \end{cases}$$

en intégrant (E_φ) sur le temps, on trouve

$$\dot{\varphi}_1 + 2\frac{r_1}{r_o} \omega_o = -\frac{\psi_b(r_o) \cos[n(\omega_o - \Omega)t]}{r_o^2(\omega_o - \Omega)} + \text{cste}$$



H₃ - Variables séparées et séparation des modes :

$$\begin{cases} \psi_1 (r, \varphi) = \psi_b (r) \cos (n\varphi) \\ \varphi (t) = \varphi_o (t) + \varepsilon \varphi_1 (t) \approx (\omega_o - \Omega) t \end{cases}$$

Les équations du mouvement perturbé s'écrivent finalement

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o &= -\psi'_b (r_o) \cos [n (\omega_o - \Omega) t] \quad (E_r) \\ \ddot{\varphi}_1 + 2\frac{\dot{r}_1}{r_o} \omega_o &= \frac{n \psi_b (r_o)}{r_o^2} \sin [n (\omega_o - \Omega) t] \quad (E_\varphi) \end{cases}$$

en intégrant (E_φ) sur le temps, on trouve

$$\dot{\varphi}_1 + 2\frac{r_1}{r_o} \omega_o = -\frac{\psi_b (r_o) \cos [n (\omega_o - \Omega) t]}{r_o^2 (\omega_o - \Omega)} + \text{cste}$$

... $\dot{\varphi}_1 \rightarrow (E_r)$ donne finalement

$$\ddot{r}_1 + k^2 r_1 = u (t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k^2 = 2\Omega^2 + \omega_o^2 \\ \text{et} \\ u (t) = -\cos [n (\omega_o - \Omega) t] \left(\frac{\psi_b (r_o)}{r_o (\omega_o - \Omega)} + \psi'_b (r_o) \right) \end{cases}$$



H₃ - Variables séparées et séparation des modes :

$$\begin{cases} \psi_1(r, \varphi) = \psi_b(r) \cos(n\varphi) \\ \varphi(t) = \varphi_o(t) + \varepsilon \varphi_1(t) \approx (\omega_o - \Omega)t \end{cases}$$

Les équations du mouvement perturbé s'écrivent finalement

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 + r_1 (2\Omega^2 - \omega_o^2) - 2\dot{\varphi}_1 \omega_o r_o &= -\psi'_b(r_o) \cos[n(\omega_o - \Omega)t] \quad (E_r) \\ \ddot{\varphi}_1 + 2\frac{\dot{r}_1}{r_o} \omega_o &= \frac{n \psi_b(r_o)}{r_o^2} \sin[n(\omega_o - \Omega)t] \quad (E_\varphi) \end{cases}$$

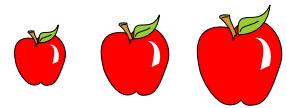
en intégrant (E_φ) sur le temps, on trouve

$$\dot{\varphi}_1 + 2\frac{r_1}{r_o} \omega_o = -\frac{\psi_b(r_o) \cos[n(\omega_o - \Omega)t]}{r_o^2(\omega_o - \Omega)} + \text{cste}$$

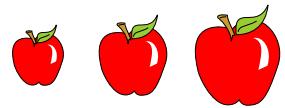
... $\dot{\varphi}_1 \rightarrow (E_r)$ donne finalement

$$\ddot{r}_1 + k^2 r_1 = u(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k^2 = 2\Omega^2 + \omega_o^2 \\ \text{et} \\ u(t) = -\cos[n(\omega_o - \Omega)t] \left(\frac{\psi_b(r_o)}{r_o(\omega_o - \Omega)} + \psi'_b(r_o) \right) \end{cases}$$

On est exactement dans le cas de la résonance ...



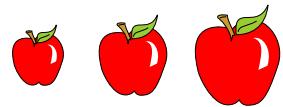
$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$



$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Système sans commande ($u = 0$) borné

$$A^2 = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 A, \quad \dots \rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(kt) & \sin(kt)/k \\ -\sin(kt)/k & \cos(kt) \end{bmatrix}$$

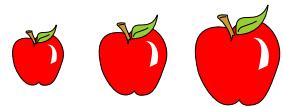


$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Système sans commande ($u = 0$) borné

$$A^2 = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 A, \quad \dots \rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(kt) & \sin(kt)/k \\ -\sin(kt)/k & \cos(kt) \end{bmatrix}$$

$$\text{Commande : } u(t) = -\cos[n(\omega_o - \Omega)t] \left(\frac{\psi_b(r_o)}{r_o(\omega_o - \Omega)} + \psi'_b(r_o) \right)$$



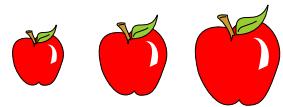
$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Système sans commande ($u = 0$) borné

$$A^2 = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 A, \quad \dots \rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(kt) & \sin(kt)/k \\ -\sin(kt)/k & \cos(kt) \end{bmatrix}$$

$$\text{Commande : } u(t) = -\cos[n(\omega_o - \Omega)t] \left(\frac{\psi_b(r_o)}{r_o(\omega_o - \Omega)} + \psi'_b(r_o) \right)$$

une fausse et une vraie résonance ...



$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

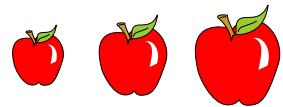
Système sans commande ($u = 0$) borné

$$A^2 = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 A, \quad \dots \rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(kt) & \sin(kt)/k \\ -\sin(kt)/k & \cos(kt) \end{bmatrix}$$

$$\text{Commande : } u(t) = -\cos[n(\omega_o - \Omega)t] \left(\frac{\psi_b(r_o)}{r_o(\omega_o - \Omega)} + \psi'_b(r_o) \right)$$

une fausse et une vraie résonance ...

 Résonance de corotation : $\omega_o \rightleftharpoons \Omega$



$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Système sans commande ($u = 0$) borné

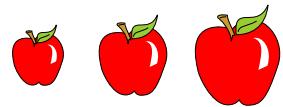
$$A^2 = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 A, \quad \dots \rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(kt) & \sin(kt)/k \\ -\sin(kt)/k & \cos(kt) \end{bmatrix}$$

$$\text{Commande : } u(t) = -\cos[n(\omega_o - \Omega)t] \left(\frac{\psi_b(r_o)}{r_o(\omega_o - \Omega)} + \psi'_b(r_o) \right)$$

une fausse et une vraie résonance ...

🍑 Résonance de corotation : $\omega_o \rightleftharpoons \Omega$

🍑 Résonance de Lindblad : $n(\omega_o - \Omega) \rightleftharpoons \pm k = \pm \sqrt{2\Omega^2 + \omega_o^2}$



$$\dot{X} = AX + Bu \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(t) = [r_1(t), \dot{r}_1(t)]^T \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Système sans commande ($u = 0$) borné

$$A^2 = -k^2 I, \quad A^3 = -k^2 A, \quad \dots \rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(kt) & \sin(kt)/k \\ -\sin(kt)/k & \cos(kt) \end{bmatrix}$$

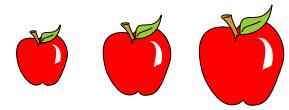
$$\text{Commande : } u(t) = -\cos[n(\omega_o - \Omega)t] \left(\frac{\psi_b(r_o)}{r_o(\omega_o - \Omega)} + \psi'_b(r_o) \right)$$

une fausse et une vraie résonance ...

🍑 Résonance de corotation : $\omega_o \rightleftharpoons \Omega$

🍑 Résonance de Lindblad : $n(\omega_o - \Omega) \rightleftharpoons \pm k = \pm \sqrt{2\Omega^2 + \omega_o^2}$

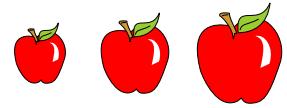
De multiples exemples en astrophysique ...



Équation à coefficients périodiques

Équations de la forme (Hill, Mathieu, Floquet, Bloch, ...)

$$\ddot{x} + f(t)x = 0 \quad \text{avec } f(t + \tau) = f(t) \quad (E)$$



Équation à coefficients périodiques

Équations de la forme (Hill, Mathieu, Floquet, Bloch, ...)

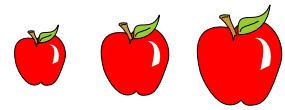
$$\ddot{x} + f(t)x = 0 \quad \text{avec } f(t + \tau) = f(t) \quad (E)$$

les équations avec terme dissipatif périodique

$$\ddot{y} + g(t)\dot{y} + h(t)y = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g(t + \tau) = g(t) \\ h(t + \tau) = h(t) \end{cases}$$

se ramènent au cas générique (E) en posant

$$y(t) = x(t) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \right) \text{ et } f = h - \frac{1}{4} (\dot{g}^2 + 2\ddot{g})$$



Équation à coefficients périodiques

Équations de la forme (Hill, Mathieu, Floquet, Bloch, ...)

$$\ddot{x} + f(t)x = 0 \quad \text{avec } f(t + \tau) = f(t) \quad (E)$$

les équations avec terme dissipatif périodique

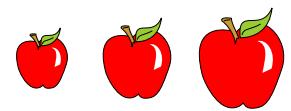
$$\ddot{y} + g(t)\dot{y} + h(t)y = 0 \quad \text{avec } \begin{cases} g(t + \tau) = g(t) \\ h(t + \tau) = h(t) \end{cases}$$

se ramènent au cas générique (E) en posant

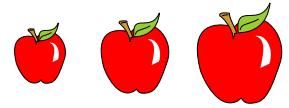
$$y(t) = x(t) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \right) \text{ et } f = h - \frac{1}{4} (\dot{g}^2 + 2\ddot{g})$$

Ecriture matricielle

$$(E) \Leftrightarrow \dot{X} = A(t)X \quad \text{avec } \begin{cases} X = [x, \dot{x}]^T \\ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{bmatrix} = A(t + \tau) \end{cases}$$



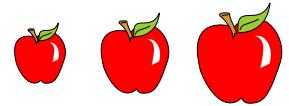
Technique générale



Technique générale

Résolvante (et donc solution) : généralement non explicite mais ...

$$A \text{ - } \tau\text{-périodique} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad R_A(s + n\tau, t + n\tau) = R_A(s, t) \\ R_A(t + \tau, t) = R_A(t, 0) \cdot R_A(\tau, 0) \cdot R_A(t, 0)^{-1} \end{cases}$$



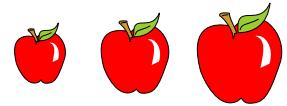
Technique générale

Résolvante (et donc solution) : généralement non explicite mais ...

$$A \text{ - } \tau\text{-périodique} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad R_A(s + n\tau, t + n\tau) = R_A(s, t) \\ R_A(t + \tau, t) = R_A(t, 0) \cdot R_A(\tau, 0) \cdot R_A(t, 0)^{-1} \end{cases}$$

Dans le cas particulier de (E)

$$\forall (t, s) \quad \det(R_A(t, s)) = \exp\left(\int_s^t \text{tr}[A(s)] ds\right) = 1$$



Technique générale

Résolvante (et donc solution) : généralement non explicite mais ...

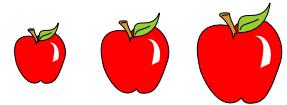
$$A \text{ - } \tau\text{-périodique} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad R_A(s + n\tau, t + n\tau) = R_A(s, t) \\ R_A(t + \tau, t) = R_A(t, 0) \cdot R_A(\tau, 0) \cdot R_A(t, 0)^{-1} \end{cases}$$

Dans le cas particulier de (E)

$$\forall (t, s) \quad \det(R_A(t, s)) = \exp\left(\int_s^t \text{tr}[A(s)] ds\right) = 1$$

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} X(t) &= R_A(t, 0) X(0) \\ &= R_A(t, n\tau) \cdot R_A(n\tau, (n-1)\tau) \cdot \cdots \cdot R_A(\tau, 0) X(0) \\ &= R_A(t, n\tau) [R_A(\tau, 0)]^n X(0) \end{aligned}$$



Technique générale

Résolvante (et donc solution) : généralement non explicite mais ...

$$A \text{ - } \tau\text{-périodique} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad R_A(s + n\tau, t + n\tau) = R_A(s, t) \\ R_A(t + \tau, t) = R_A(t, 0) \cdot R_A(\tau, 0) \cdot R_A(t, 0)^{-1} \end{cases}$$

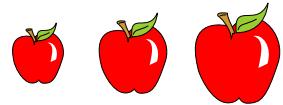
Dans le cas particulier de (E)

$$\forall (t, s) \quad \det(R_A(t, s)) = \exp\left(\int_s^t \text{tr}[A(s)] ds\right) = 1$$

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} X(t) &= R_A(t, 0) X(0) \\ &= R_A(t, n\tau) \cdot R_A(n\tau, (n-1)\tau) \cdot \cdots \cdot R_A(\tau, 0) X(0) \\ &= R_A(t, n\tau) [R_A(\tau, 0)]^n X(0) \end{aligned}$$





Technique générale

Résolvante (et donc solution) : généralement non explicite mais ...

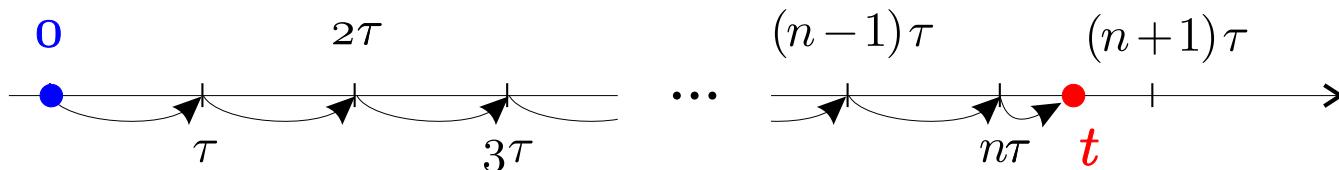
$$A \text{ - } \tau\text{-périodique} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad R_A(s + n\tau, t + n\tau) = R_A(s, t) \\ R_A(t + \tau, t) = R_A(t, 0) \cdot R_A(\tau, 0) \cdot R_A(t, 0)^{-1} \end{cases}$$

Dans le cas particulier de (E)

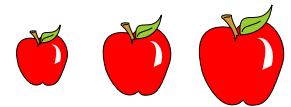
$$\forall (t, s) \quad \det(R_A(t, s)) = \exp\left(\int_s^t \text{tr}[A(s)] ds\right) = 1$$

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} X(t) &= R_A(t, 0) X(0) \\ &= R_A(t, n\tau) \cdot R_A(n\tau, (n-1)\tau) \cdot \cdots \cdot R_A(\tau, 0) X(0) \\ &= R_A(t, n\tau) [R_A(\tau, 0)]^n X(0) \end{aligned}$$

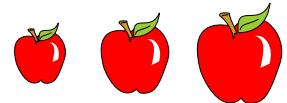


les deux limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} [R_A(\tau, 0)]^n$ sont de même nature.



$$R_A(\tau, 0) \in SL(2, \mathbb{R}) \dots$$

trois cas sont possibles :

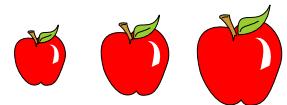


$$R_A(\tau, 0) \in SL(2, \mathbb{R}) \dots$$

trois cas sont possibles :

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| < 2.$

Toutes les solutions de (E) sont bornées non convergentes.



$$R_A(\tau, 0) \in SL(2, \mathbb{R}) \dots$$

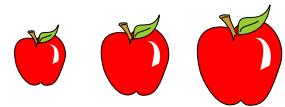
trois cas sont possibles :

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| < 2.$

Toutes les solutions de (E) sont bornées non convergentes.

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \pm 1 & \alpha \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| = 2.$

Il existe des solutions bornées non convergentes (τ -périodiques) en choisissant bien les conditions initiales (car 1 est valeur propre de $R_A(\tau, 0) \dots$). La solution générale est non bornée (explosion linéaire à cause de α)



$$R_A(\tau, 0) \in SL(2, \mathbb{R}) \dots$$

trois cas sont possibles :

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| < 2.$

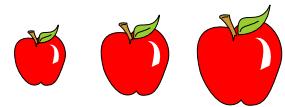
Toutes les solutions de (E) sont bornées non convergentes.

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \pm 1 & \alpha \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| = 2.$

Il existe des solutions bornées non convergentes (τ -périodiques) en choisissant bien les conditions initiales (car 1 est valeur propre de $R_A(\tau, 0) \dots$). La solution générale est non bornée (explosion linéaire à cause de α)

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| > 2.$

Il existe des solutions convergentes en choisissant bien les conditions initiales. La solution générale est non bornée (explosion exponentielle à cause de λ)



$$R_A(\tau, 0) \in SL(2, \mathbb{R}) \dots$$

trois cas sont possibles :

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| < 2.$

Toutes les solutions de (E) sont bornées non convergentes.

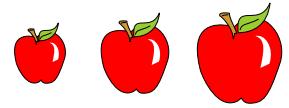
 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \pm 1 & \alpha \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| = 2.$

Il existe des solutions bornées non convergentes (τ -périodiques) en choisissant bien les conditions initiales (car 1 est valeur propre de $R_A(\tau, 0) \dots$). La solution générale est non bornée (explosion linéaire à cause de α)

 $R_A(\tau, 0) \propto \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} : |\text{Tr}(R_A(\tau, 0))| > 2.$

Il existe des solutions convergentes en choisissant bien les conditions initiales. La solution générale est non bornée (explosion exponentielle à cause de λ)

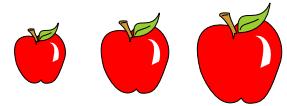
Conclusion générale : Stabilité \implies étude de $|\text{Tr}(R_A(\tau, 0))|$



Quelques résultats simples

Résultats très nombreux, de très général à très particulier, on retiendra

- Yellow lemon icon: Si $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) < 0$ alors (E) est instable
- Yellow lemon icon: Si $O \leq \int_0^\tau f(t) dt$ et $\int_0^\tau |f(t)| dt \leq 4/\tau$ alors (E) est stable et toutes les solutions sont bornées



Quelques résultats simples

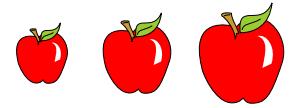
Résultats très nombreux, de très général à très particulier, on retiendra

- Yellow circle: Si $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) < 0$ alors (E) est instable
- Yellow circle: Si $O \leq \int_0^\tau f(t) dt$ et $\int_0^\tau |f(t)| dt \leq 4/\tau$ alors (E) est stable et toutes les solutions sont bornées

Une théorie pas très difficile avec de nombreuses applications

La résonance paramétrique

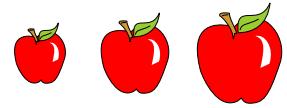
A étudier en détail . . .



Résonance paramétrique

Le problème général ...

$$X' = A_\varepsilon(t) X \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x, \dot{x}]^T & |\varepsilon| \ll 1 \\ A_\varepsilon(t) = A_o + \varepsilon P(t) & \text{et} \quad P(t) = P(t + \tau) \end{cases}$$



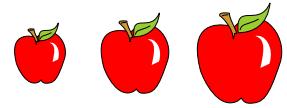
Résonance paramétrique

Le problème général ...

$$X' = A_\varepsilon(t) X \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x, \dot{x}]^T & |\varepsilon| \ll 1 \\ A_\varepsilon(t) = A_o + \varepsilon P(t) & \text{et} \quad P(t) = P(t + \tau) \end{cases}$$

On montre alors facilement que $X(t) = R_\varepsilon(t, 0) X(0)$ où

$$R_\varepsilon(t, 0) = R_0(t, 0) + \varepsilon R_1(t, 0) + \varepsilon^2 R_2(t, 0) + \cdots + \varepsilon^n R_n(t, 0) + o(\varepsilon^n)$$



Résonance paramétrique

Le problème général ...

$$X' = A_\varepsilon(t) X \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x, \dot{x}]^T & |\varepsilon| \ll 1 \\ A_\varepsilon(t) = A_o + \varepsilon P(t) & \text{et} \quad P(t) = P(t + \tau) \end{cases}$$

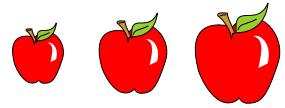
On montre alors facilement que $X(t) = R_\varepsilon(t, 0) X(0)$ où

$$R_\varepsilon(t, 0) = R_0(t, 0) + \varepsilon R_1(t, 0) + \varepsilon^2 R_2(t, 0) + \cdots + \varepsilon^n R_n(t, 0) + o(\varepsilon^n)$$

on peut calculer

$$R_0(t, 0) = \exp[tA_o], \quad R_1(t, 0) = \int_0^t \exp[(t-s)A_o] P(s) \exp[sA_o] ds$$

$$\forall n > 1 \quad R_n(t, 0) = \int_0^t \exp[(t-s)A_o] P(s) R_{n-1}(s, 0) ds$$



Résonance paramétrique

Le problème général ...

$$X' = A_\varepsilon(t) X \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x, \dot{x}]^T & |\varepsilon| \ll 1 \\ A_\varepsilon(t) = A_o + \varepsilon P(t) & \text{et} \quad P(t) = P(t + \tau) \end{cases}$$

On montre alors facilement que $X(t) = R_\varepsilon(t, 0) X(0)$ où

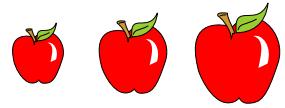
$$R_\varepsilon(t, 0) = R_0(t, 0) + \varepsilon R_1(t, 0) + \varepsilon^2 R_2(t, 0) + \cdots + \varepsilon^n R_n(t, 0) + o(\varepsilon^n)$$

on peut calculer

$$R_0(t, 0) = \exp[tA_o], \quad R_1(t, 0) = \int_0^t \exp[(t-s)A_o] P(s) \exp[sA_o] ds$$

$$\forall n > 1 \quad R_n(t, 0) = \int_0^t \exp[(t-s)A_o] P(s) R_{n-1}(s, 0) ds$$

La stabilité du système est obtenue par l'étude de $|\text{Tr}(R_\varepsilon(\tau, 0))| \dots$



Résonance paramétrique

Le problème général ...

$$X' = A_\varepsilon(t) X \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = [x, \dot{x}]^T & |\varepsilon| \ll 1 \\ A_\varepsilon(t) = A_o + \varepsilon P(t) & \text{et} \quad P(t) = P(t + \tau) \end{cases}$$

On montre alors facilement que $X(t) = R_\varepsilon(t, 0) X(0)$ où

$$R_\varepsilon(t, 0) = R_0(t, 0) + \varepsilon R_1(t, 0) + \varepsilon^2 R_2(t, 0) + \cdots + \varepsilon^n R_n(t, 0) + o(\varepsilon^n)$$

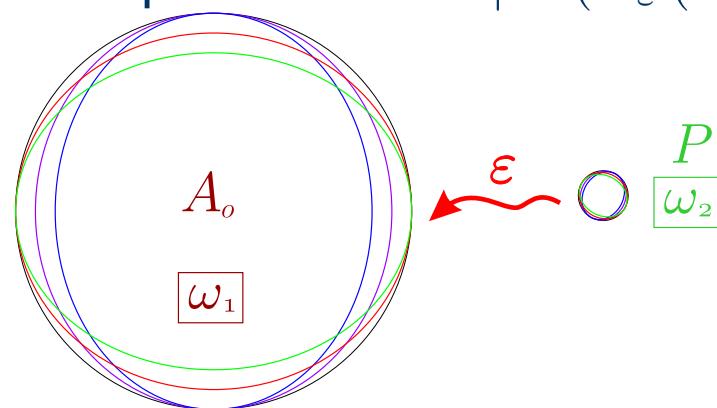
on peut calculer

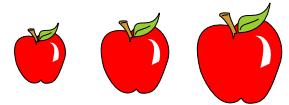
$$R_0(t, 0) = \exp[tA_o], \quad R_1(t, 0) = \int_0^t \exp[(t-s)A_o] P(s) \exp[sA_o] ds$$

$$\forall n > 1 \quad R_n(t, 0) = \int_0^t \exp[(t-s)A_o] P(s) R_{n-1}(s, 0) ds$$

La stabilité du système est obtenue par l'étude de $|\text{Tr}(R_\varepsilon(\tau, 0))| \dots$

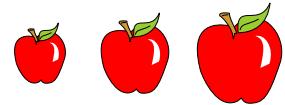
Le cas intéressant
Système non perturbé borné





Un exemple général(isable ...)

Problème très général : $\frac{d^2x}{dt^2} + [\omega^2 + \varepsilon \cos(t)] x = 0$ avec $\omega^2 \in \mathbb{R}$

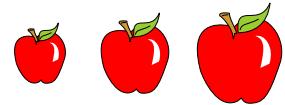


Un exemple général(isable ...)

Problème très général : $\frac{d^2x}{dt^2} + [\omega^2 + \varepsilon \cos(t)] x = 0$ avec $\omega^2 \in \mathbb{R}$

Écriture matricielle

$$\dot{X} = AX + \varepsilon P(t) \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\cos(t) & 0 \end{bmatrix} = P(t + 2\pi)$$



Un exemple général(isable ...)

Problème très général : $\frac{d^2x}{dt^2} + [\omega^2 + \varepsilon \cos(t)] x = 0$ avec $\omega^2 \in \mathbb{R}$

Écriture matricielle

$$\dot{X} = AX + \varepsilon P(t) \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\cos(t) & 0 \end{bmatrix} = P(t + 2\pi)$$

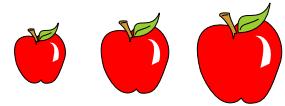
solution générale bornée $\Leftarrow |\text{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))| < 2$

$$R_\varepsilon(t, 0) = \exp[tA] + \varepsilon \phi_1(t) + \varepsilon^2 \phi_2(t) + o(\varepsilon^2)$$

avec $\phi_1(t) = \int_0^t \exp[(t-s)A] P(s) \exp[sA] ds$

puis $\phi_2(t) = \int_0^t \exp[(t-s)A] P(s) \left(\int_0^s \exp[(s-u)A] P(u) \exp[uA] du \right) ds$

puis ...



Un exemple général(isable ...)

Problème très général : $\frac{d^2x}{dt^2} + [\omega^2 + \varepsilon \cos(t)] x = 0$ avec $\omega^2 \in \mathbb{R}$

Écriture matricielle

$$\dot{X} = AX + \varepsilon P(t) \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\cos(t) & 0 \end{bmatrix} = P(t + 2\pi)$$

solution générale bornée $\Leftarrow |\text{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))| < 2$

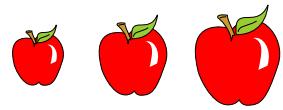
$$R_\varepsilon(t, 0) = \exp[tA] + \varepsilon \phi_1(t) + \varepsilon^2 \phi_2(t) + o(\varepsilon^2)$$

avec $\phi_1(t) = \int_0^t \exp[(t-s)A] P(s) \exp[sA] ds$

puis $\phi_2(t) = \int_0^t \exp[(t-s)A] P(s) \left(\int_0^s \exp[(s-u)A] P(u) \exp[uA] du \right) ds$

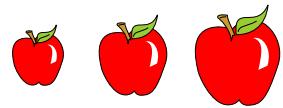
puis ...

Il ne reste plus qu'à faire quelques calculs simples ...



Le terme d'ordre 0 est immédiat

$$\exp [tA] = \begin{bmatrix} \cos (\omega t) & \sin (\omega t) / \omega \\ -\sin (\omega t) / \omega & \cos (\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr} (\exp [2\pi A]) = 2 \cos (2\pi \omega)$$

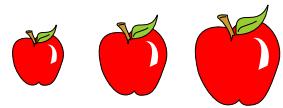


Le terme d'ordre 0 est immédiat

$$\exp [tA] = \begin{bmatrix} \cos (\omega t) & \sin (\omega t) / \omega \\ -\sin (\omega t) / \omega & \cos (\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr} (\exp [2\pi A]) = 2 \cos (2\pi\omega)$$

Le terme d'ordre 1 est nul ...

$$\phi_1 (t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} & -\frac{\sin(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^2} \\ \frac{\cos(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^0} & -\frac{\cos(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{Tr} (\phi_1 (2\pi)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin (2\pi\omega) \cos (s) ds = 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$



Le terme d'ordre 0 est immédiat

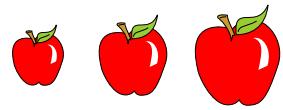
$$\exp [tA] = \begin{bmatrix} \cos (\omega t) & \sin (\omega t) / \omega \\ -\sin (\omega t) / \omega & \cos (\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr} (\exp [2\pi A]) = 2 \cos (2\pi\omega)$$

Le terme d'ordre 1 est nul ...

$$\phi_1 (t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} & -\frac{\sin(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^2} \\ \frac{\cos(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^0} & -\frac{\cos(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{Tr} (\phi_1 (2\pi)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin (2\pi\omega) \cos (s) ds = 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

Le terme d'ordre 2 est embêtant mais c'est tout ...

$$\text{Tr} (\phi_2 (2\pi)) = \frac{\pi \sin (2\pi\omega)}{\omega (4\omega^2 - 1)}$$



Le terme d'ordre 0 est immédiat

$$\exp [tA] = \begin{bmatrix} \cos (\omega t) & \sin (\omega t) / \omega \\ -\sin (\omega t) / \omega & \cos (\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr} (\exp [2\pi A]) = 2 \cos (2\pi\omega)$$

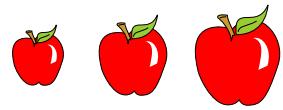
Le terme d'ordre 1 est nul ...

$$\phi_1 (t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} & -\frac{\sin(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^2} \\ \frac{\cos(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^0} & -\frac{\cos(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{Tr} (\phi_1 (2\pi)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin (2\pi\omega) \cos (s) ds = 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

Le terme d'ordre 2 est embêtant mais c'est tout ...

$$\text{Tr} (\phi_2 (2\pi)) = \frac{\pi \sin (2\pi\omega)}{\omega (4\omega^2 - 1)}$$

$$\text{finalement on trouve } \text{Tr} (R_\varepsilon (2\pi, 0)) = 2 \cos (2\pi\omega) + \frac{\varepsilon^2 \pi \sin (2\pi\omega)}{\omega (4\omega^2 - 1)} + o (\varepsilon^2)$$



Le terme d'ordre 0 est immédiat

$$\exp [tA] = \begin{bmatrix} \cos (\omega t) & \sin (\omega t) / \omega \\ -\sin (\omega t) / \omega & \cos (\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr} (\exp [2\pi A]) = 2 \cos (2\pi\omega)$$

Le terme d'ordre 1 est nul ...

$$\phi_1 (t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} & -\frac{\sin(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^2} \\ \frac{\cos(\omega(t-s)) \cos(\omega s) \cos(s)}{\omega^0} & -\frac{\cos(\omega(t-s)) \sin(\omega s) \cos(s)}{\omega^1} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{Tr} (\phi_1 (2\pi)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin (2\pi\omega) \cos (s) ds = 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

Le terme d'ordre 2 est embêtant mais c'est tout ...

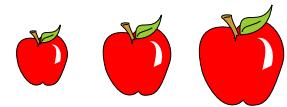
$$\text{Tr} (\phi_2 (2\pi)) = \frac{\pi \sin (2\pi\omega)}{\omega (4\omega^2 - 1)}$$

$$\text{finalement on trouve } \text{Tr} (R_\varepsilon (2\pi, 0)) = 2 \cos (2\pi\omega) + \frac{\varepsilon^2 \pi \sin (2\pi\omega)}{\omega (4\omega^2 - 1)} + o (\varepsilon^2)$$

On peut donc étudier la stabilité, ou les résonances, dans le plan (ω, ε)

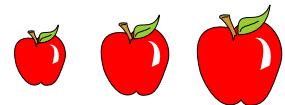


$$\mathrm{Tr}\left(R_{\varepsilon}\left(2\pi,0\right)\right)=2\cos\left(2\pi\omega\right)+\frac{\varepsilon^2\pi\sin\left(2\pi\omega\right)}{\omega\left(4\omega^2-1\right)}+o\left(\varepsilon^2\right)$$



$$\mathrm{Tr} (R_\varepsilon (2\pi, 0)) = 2 \cos (2\pi\omega) + \frac{\varepsilon^2 \pi \sin (2\pi\omega)}{\omega (4\omega^2 - 1)} + o (\varepsilon^2)$$

Points remarquables (à l'ordre 2 en ε) : $\omega = 0, 1/2$ et $1, \Rightarrow \mathrm{DL}$



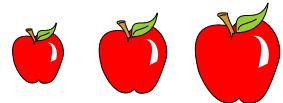
$$\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) = 2 \cos(2\pi\omega) + \frac{\varepsilon^2 \pi \sin(2\pi\omega)}{\omega(4\omega^2 - 1)} + o(\varepsilon^2)$$

Points remarquables (à l'ordre 2 en ε) : $\omega = 0, 1/2$ et 1 , \Rightarrow DL

 Pour $\omega \approx 0$ on obtient

$$\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) = 2 - 2\pi^2(\varepsilon^2 + \omega^2) + o \Rightarrow |\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx 0}| < 2$$

pour $(ia)^2 = \omega^2 < 0$: $|\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx 0}| < 2$ si $a < \varepsilon^2/2$



$$\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) = 2 \cos(2\pi\omega) + \frac{\varepsilon^2 \pi \sin(2\pi\omega)}{\omega(4\omega^2 - 1)} + o(\varepsilon^2)$$

Points remarquables (à l'ordre 2 en ε) : $\omega = 0, 1/2$ et 1 , \Rightarrow DL

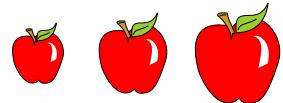
 Pour $\omega \approx 0$ on obtient

$$\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) = 2 - 2\pi^2(\varepsilon^2 + \omega^2) + o \Rightarrow |\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx 0}| < 2$$

pour $(ia)^2 = \omega^2 < 0$: $|\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx 0}| < 2$ si $a < \varepsilon^2/2$

 Pour $\omega \approx 1/2 + \alpha$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) &= -2 + 4\pi^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^2 - \alpha^2 \right) + o \\ &\Rightarrow |\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx \frac{1}{2}}| < 2 \text{ si } \omega > \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$



$$\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) = 2 \cos(2\pi\omega) + \frac{\varepsilon^2 \pi \sin(2\pi\omega)}{\omega(4\omega^2 - 1)} + o(\varepsilon^2)$$

Points remarquables (à l'ordre 2 en ε) : $\omega = 0, 1/2$ et 1 , \Rightarrow DL

 Pour $\omega \approx 0$ on obtient

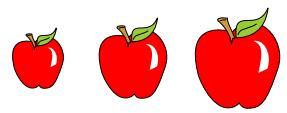
$$\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) = 2 - 2\pi^2(\varepsilon^2 + \omega^2) + o \Rightarrow |\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx 0}| < 2$$

pour $(ia)^2 = \omega^2 < 0$: $|\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx 0}| < 2$ si $a < \varepsilon^2/2$

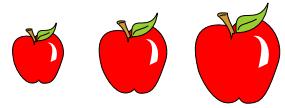
 Pour $\omega \approx 1/2 + \alpha$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0)) &= -2 + 4\pi^2 \left(\frac{1}{4}\varepsilon^2 - \alpha^2 \right) + o \\ &\Rightarrow |\mathrm{Tr}(R_\varepsilon(2\pi, 0))_{\omega \approx \frac{1}{2}}| < 2 \text{ si } \omega > \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

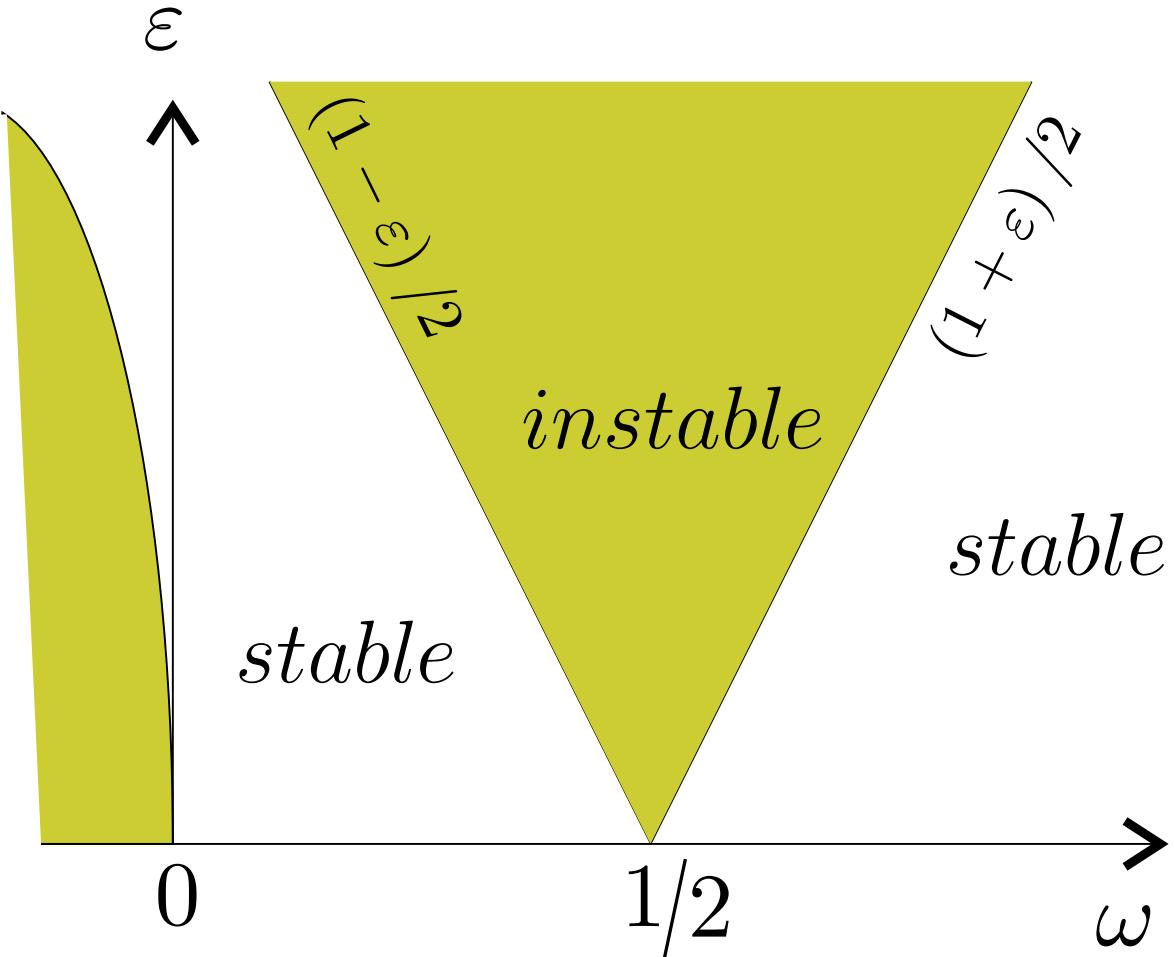
 Pour $\omega \approx 1 + \beta$, il faut le terme en ε^4 ...



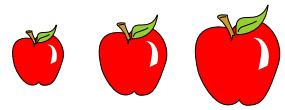
Graphiquement,



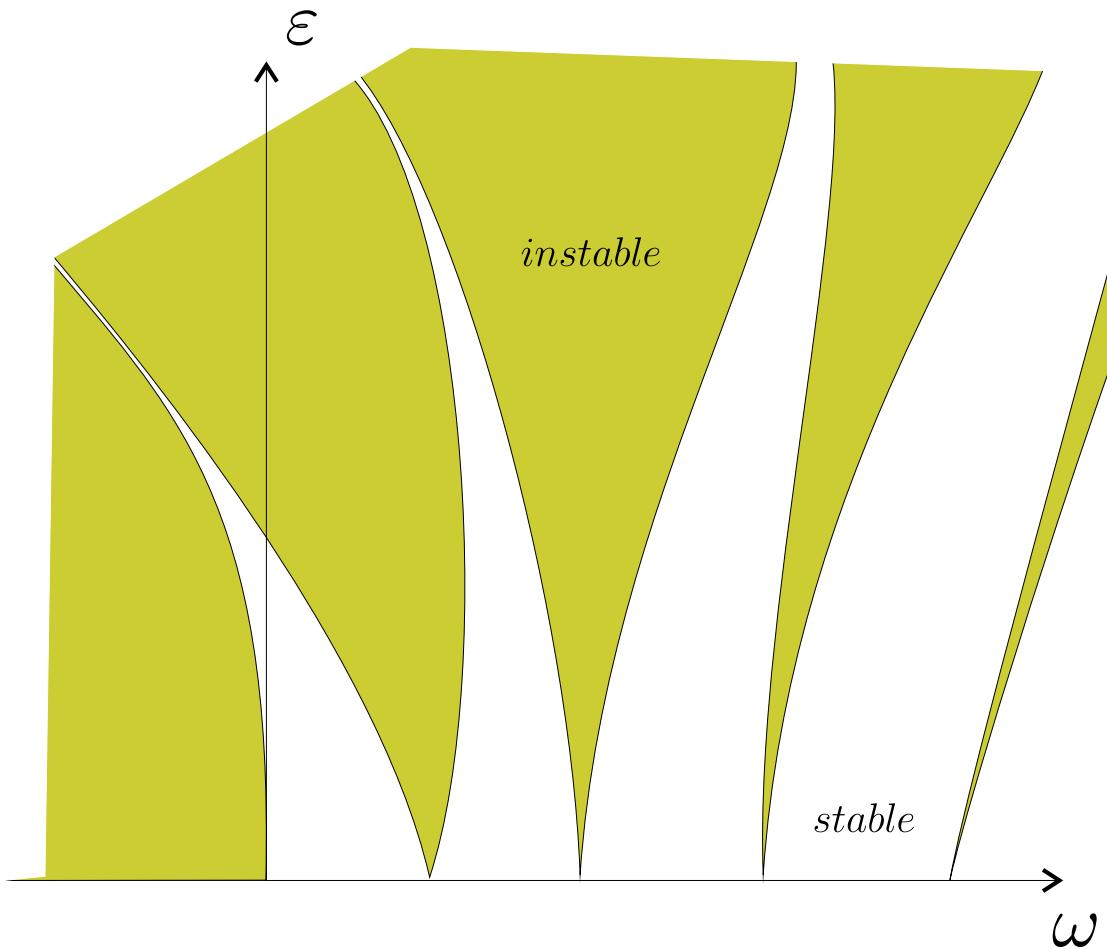
Graphiquement, à l'ordre 2 en ε , on obtient



On reconnaît la fameuse résonance $1/2 \dots$



Graphiquement,
en poursuivant le développement , on trouve



On voit apparaître les autres résonances ... de type $(n : p)$ avec $n/p \in \mathbb{Q}$
provenant des intégrations successives !