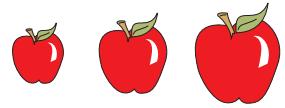


Un point sur la dynamique

Journées ENSTA-TIPE-UPS 2011

Jérôme Perez



Sommaire



La mécanique antique



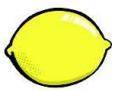
L'impact newtonien



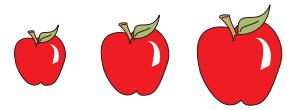
La révolution lagrangienne



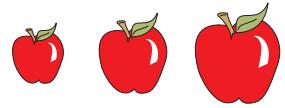
La dynamique moderne



Deux systèmes dynamiques cosmologiques.



Un peu d'histoire



La dynamique antique

Cosmologie de Platon (Timée) : Dichotomie des mondes



Le monde sublunaire

Composé des 4 éléments pythagoriciens (Terre, eau, air, feu empilés). Monde humain corruptible.



Le cosmos

Englobe le monde sublunaire à partir de la lune. Monde des idées formé de quintescence. Il contient tous les astres (planètes et étoiles). De caractère divin, immuable et parfait. Le seul mouvement possible dans ce monde est le mouvement parfait : circulaire uniforme.



La dynamique antique

La cosmologie de Platon^[−428, −346] est le cadre de la physique d'Aristote^[−384, −322].



Platon avait fondé l'académie^[~388], Aristote fonde le lycée^[~335] ...



La dynamique antique

Principe fondamental de la dynamique d'Aristote : le mouvement est causé, en l'absence de cause il s'éteind.

Aristote postule donc l'existence d'un lieu de repos naturel pour chacun des 5 éléments. La terre est au centre de l'univers, l'eau est au dessus de la terre, l'air englobe la terre et l'eau, le feu surmonte l'air, enfin la quintescence est au delà de la lune.

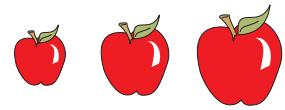
La cinématique est décomposée en trois type de mouvements :

- le mouvement naturel mène un objet, selon sa composition, vers son lieu naturel de repos ;
- le mouvement forcé (ou violent) éloigne un objet de son lieu naturel de repos ;
- le mouvement divin qui est circulaire, uniforme et éternel.

La dynamique est une conséquence logique de cette cinématique.

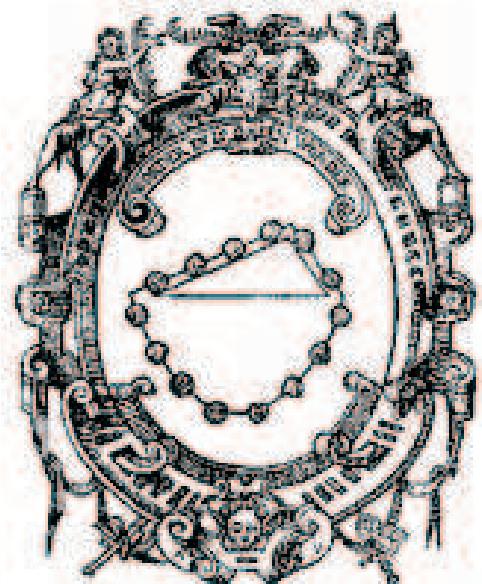
L'existence d'un lieu naturel de repos conduit les objets à vouloir y rester. Pour qu'un objet soit en mouvement il faut l'y contraindre. Le mouvement est proportionnel à la contrainte .

Interprétation moderne : $k v = F$



La dynamique pre-newtonienne.

D E
B E G H I N S E L E N
D E R W E E G H C O N S T
B E S C H R E V E N D V E R
S I M O N S T E V I N
van Brugghe.

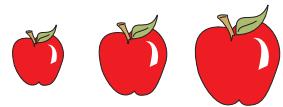


T O T L E Y D E N,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
c 15. 10. lxxxvi.

La statique ou l'art de peser, 1568

Statique, équilibre,
notion de force et composition
Simon Stevin^[1548,1620]

Inexistence du mouvement perpétuel



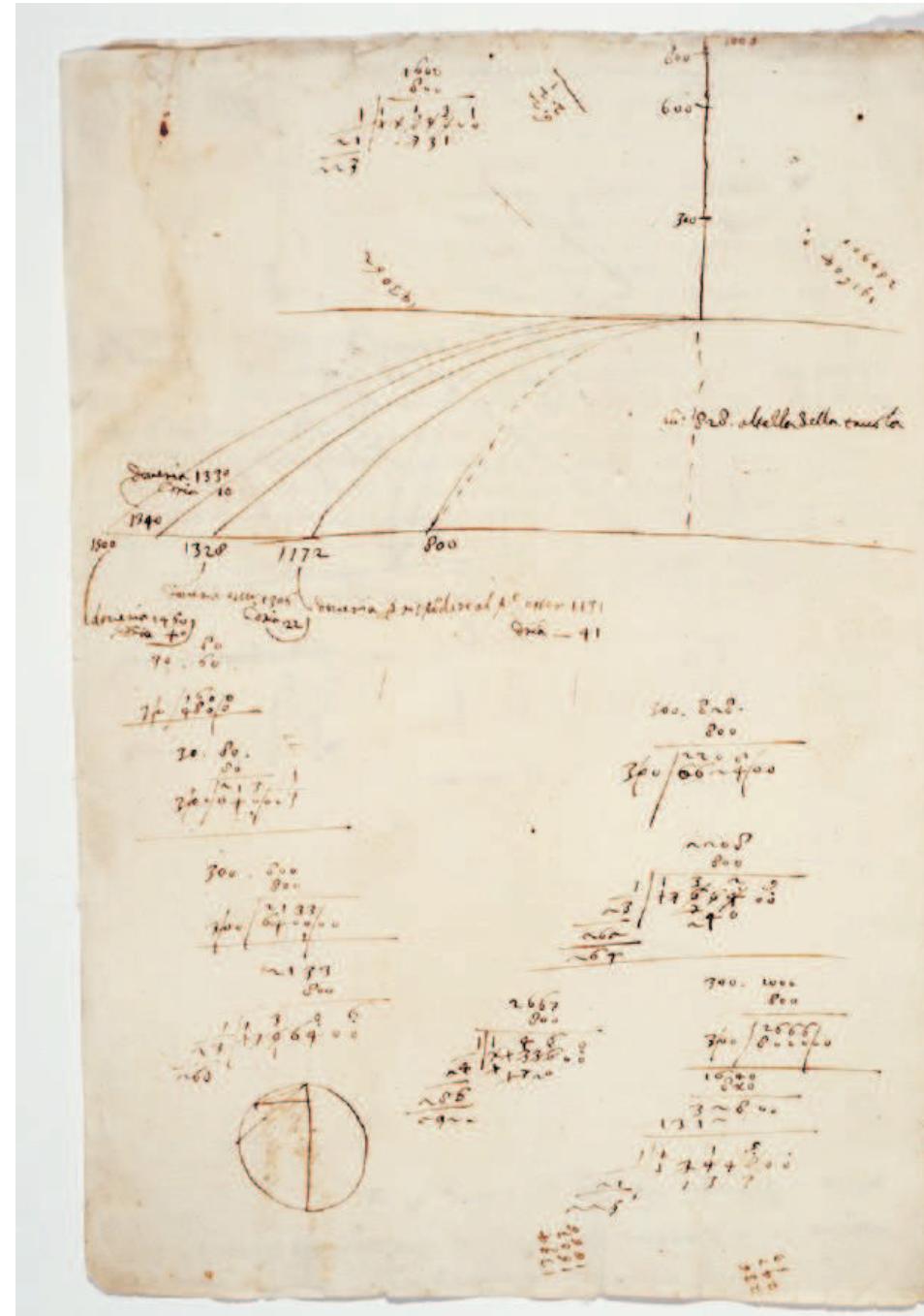
La dynamique pre-newtonienne.

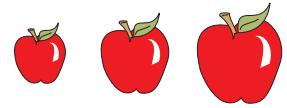
Approche expérimentale, principes Galilée [1564, 1642]

Mouvement parabolique

Principe d'inertie, mouvement non causé

Principe d'équivalence



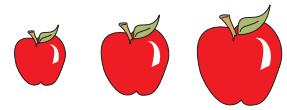


La dynamique newtonienne.

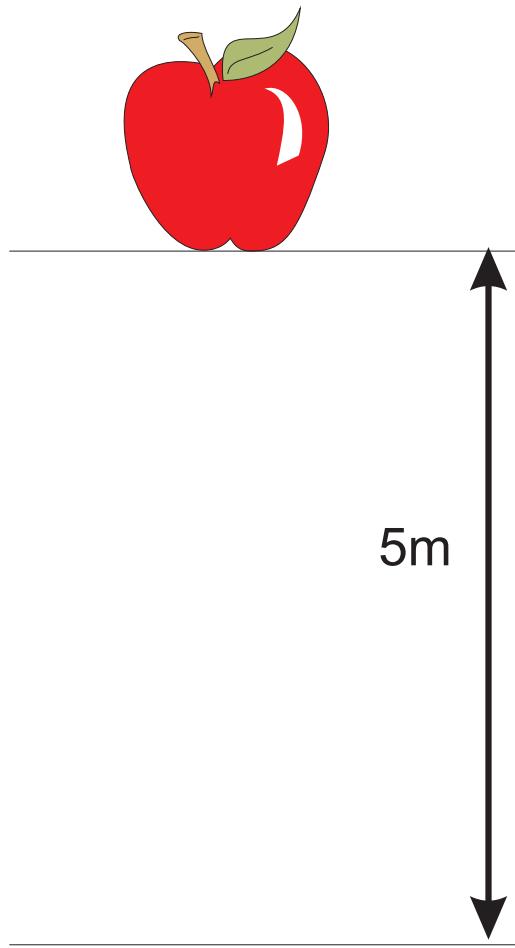
La force est la quantité physique qui mesure
la variation de la vitesse par unité de masse.

La vitesse est vectorielle, il en est donc de même de la force.

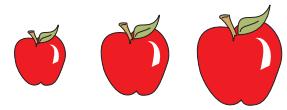
Comment en déduit-on la gravitation ?



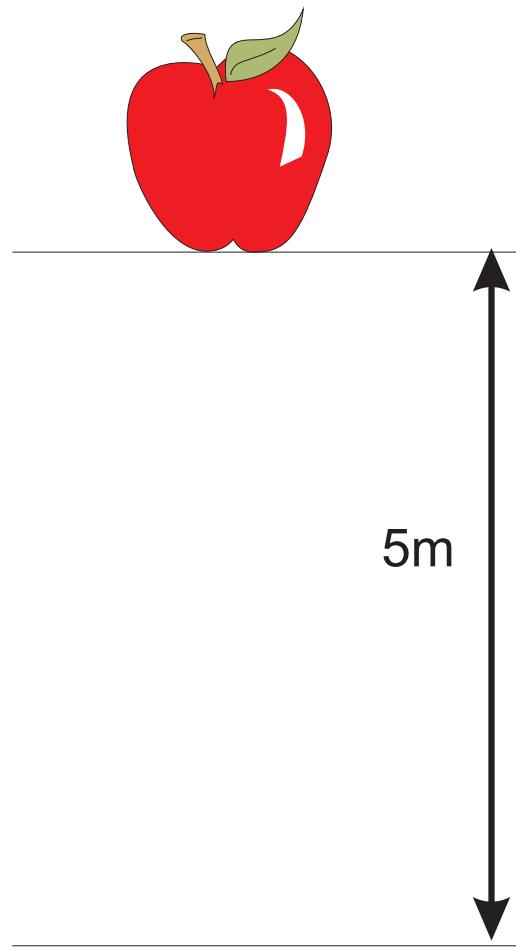
Chute d'une pomme



Temps de chute ?



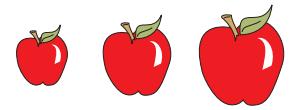
Chute d'une pomme



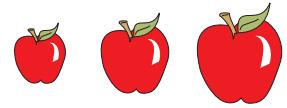
Temps de chute ?

1 seconde

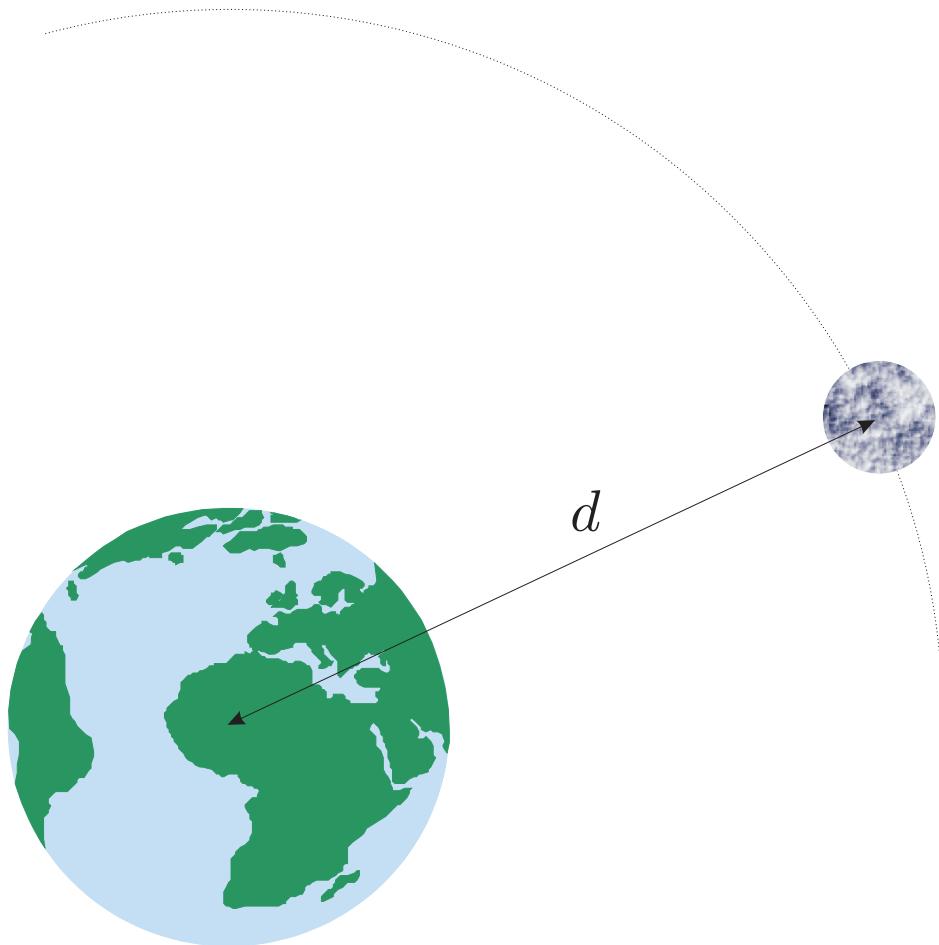
Faites l'expérience vous-même !



Chute de la Lune



Chute de la Lune

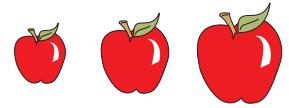


$$T \approx 27,371 \text{ jours}$$
$$C \approx 2\pi \times 384 \ 000 \text{ km}$$

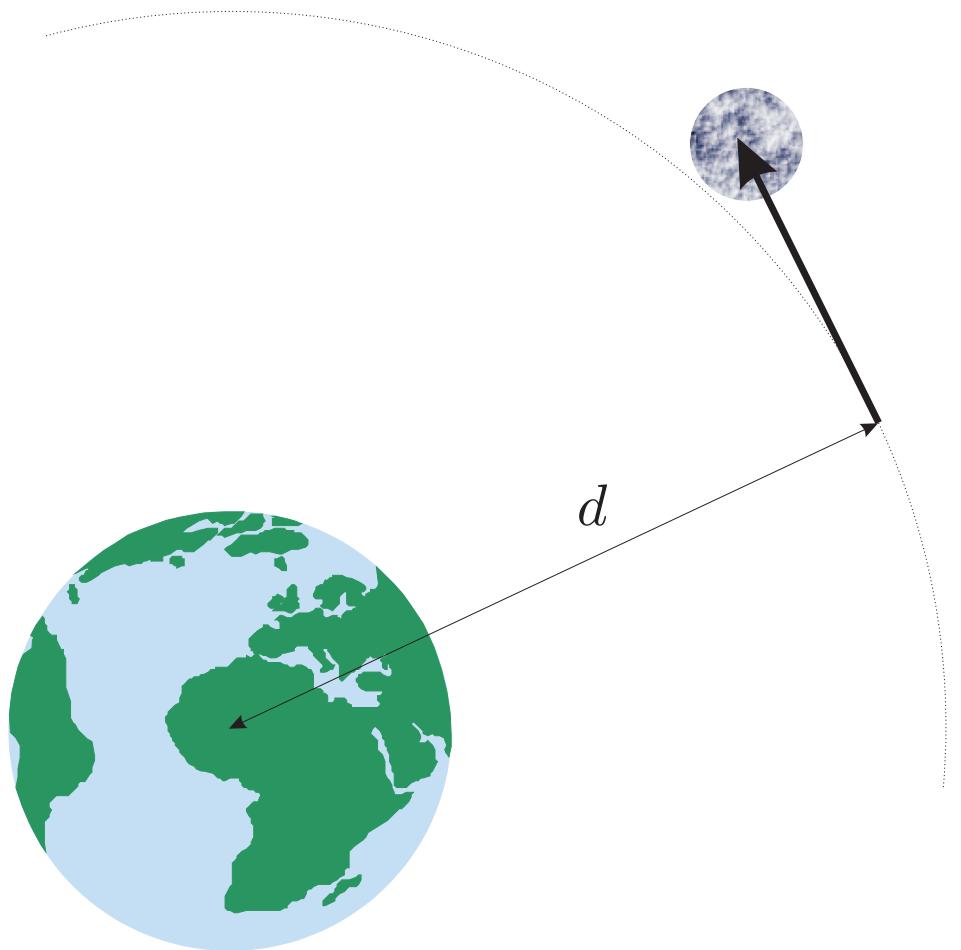
Soit

$$T \approx 2 \ 364 \ 854 \text{ s}$$
$$C \approx 2 \ 412 \ 672 \text{ km}$$

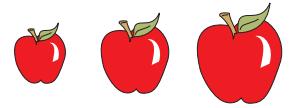
Vitesse $\approx 1 \text{ km/s}$



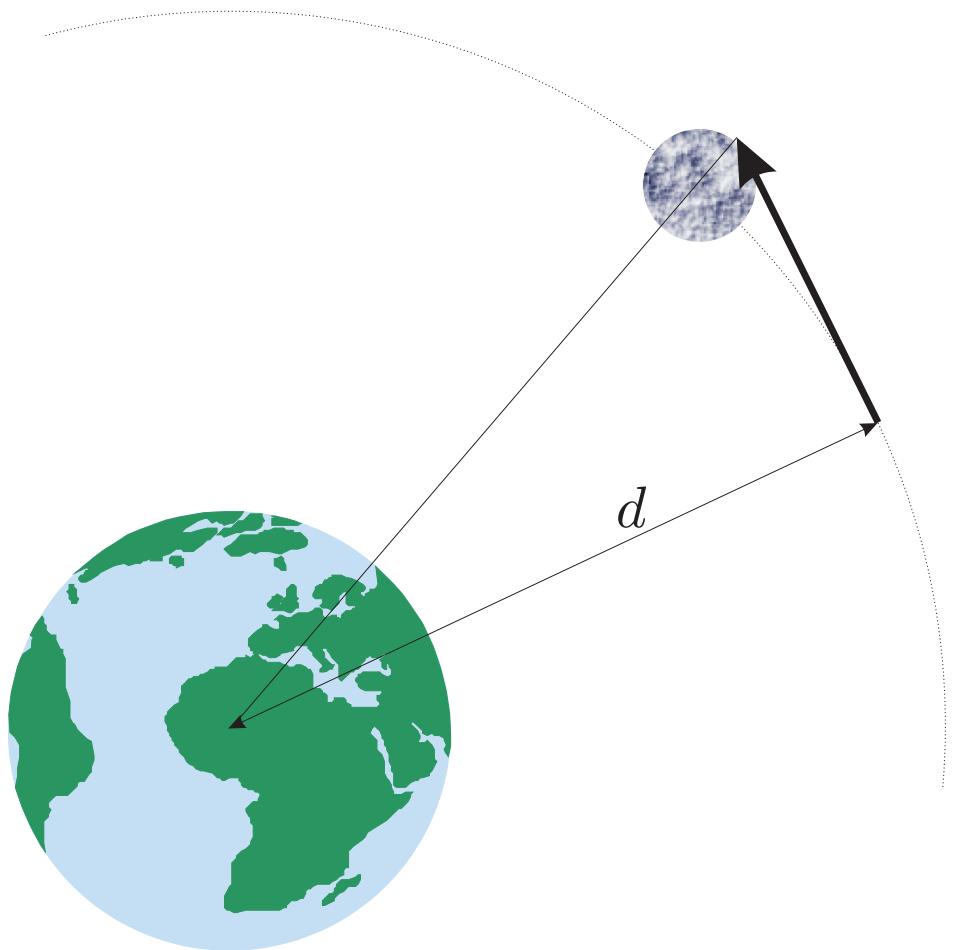
Chute de la Lune



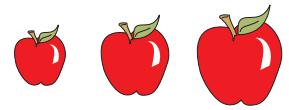
Si la Lune n'était pas attirée par la Terre elle irait tout droit !



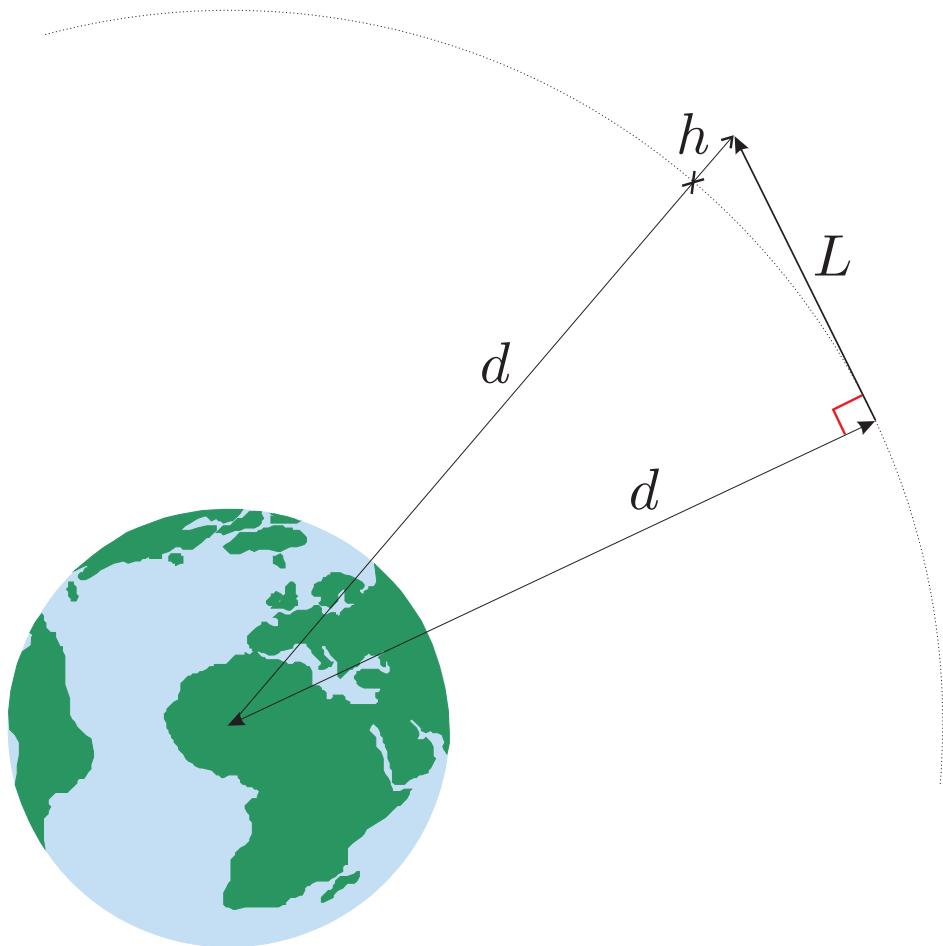
Chute de la Lune



En fait elle tombe un peu ...



Chute de la Lune

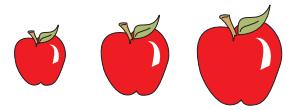


Théorème de Pythagore

$$d^2 + L^2 = (d + h)^2$$

$$\text{Soit } h \approx L^2/2d$$

pour 1 seconde, $L = 1\text{ km}$
 $\Rightarrow h = 1,35\text{ mm}$

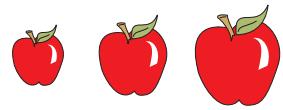


En une seconde ...



En une seconde ...

- 🍏 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- 🍓 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...



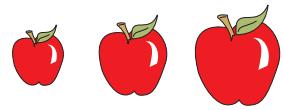
En une seconde ...

- 🍐 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- 🍓 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$



En une seconde ...

- 🍎 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- 🍓 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

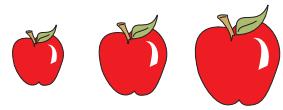
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



En une seconde ...

La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

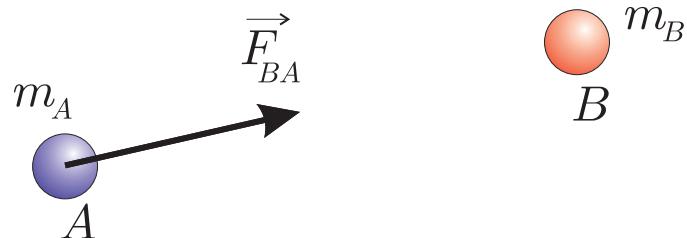
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

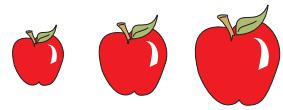
et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance





En une seconde ...

- 🍐 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- 🍓 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

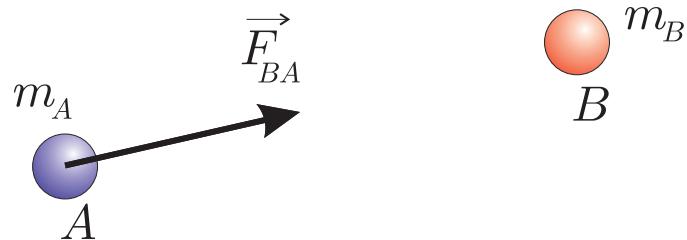
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

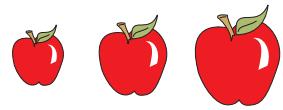
La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : attractive

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\| \overrightarrow{BA} \right\|^3}$$



En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

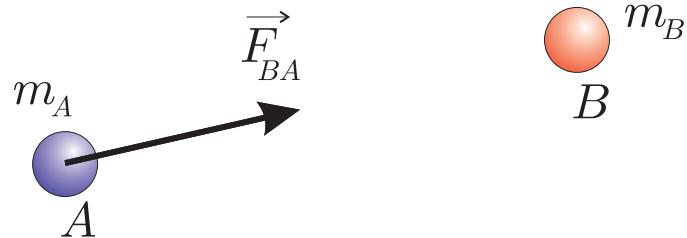
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

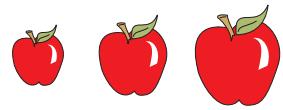
La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : dépend de m_A et m_B

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|^3}$$



En une seconde ...

La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

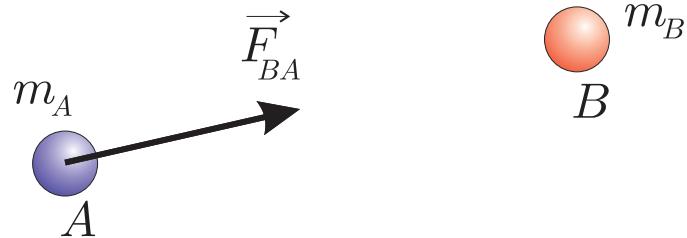
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

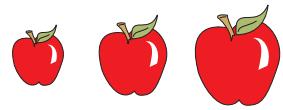
La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : est une force !

$$\left. \frac{\overrightarrow{F}_{BA}}{[\text{M}] \cdot [\text{L}] \cdot [\text{T}]^{-2}} \right\} \propto \left\{ \begin{array}{l} -m_A m_B \overrightarrow{BA} / \|\overrightarrow{BA}\|^3 \\ [\text{M}]^2 \cdot [\text{L}]^{-2} \end{array} \right.$$



En une seconde ...

- 🍏 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- 🍓 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

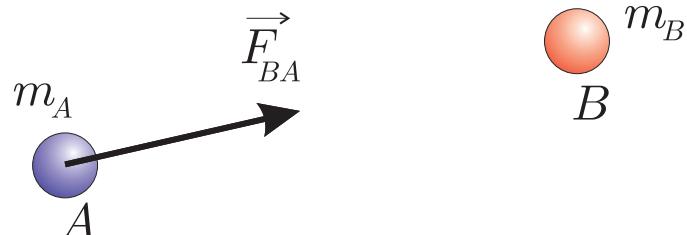
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

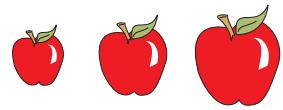
La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Constante de Newton

$$G = 6,64 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$



En une seconde ...

- 🍏 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- 🍓 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

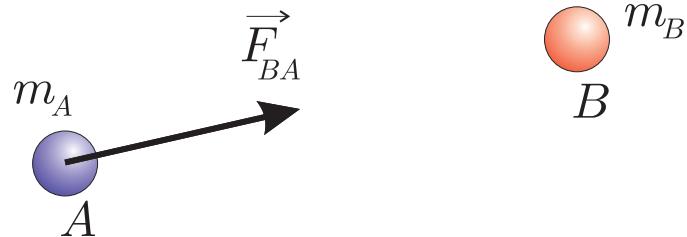
$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60$$

et

$$\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

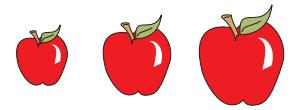
La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance

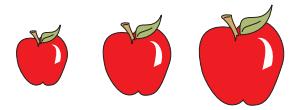


Force de gravitation

$$\overrightarrow{F_{BA}} = -Gm_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|^3}$$



Les principia, 1687 !

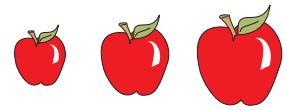


Les principia, 1687 !

🍍 Livre 1 : Mouvements sans frottements

🍑 Problème à 2 corps

🍎 Théorème de Gauss gravitationnel



Les principia, 1687 !

🍍 Livre 1 : Mouvements sans frottements

- 🍑 Problème à 2 corps

- 🍎 Théorème de Gauss gravitationnel

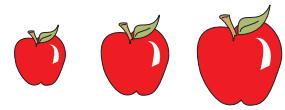
🍍 Livre 2 : Mouvements dans un milieu résistant

- 🍑 Forces proportionnelles à la vitesse

- 🍎 Forces proportionnelles au carré de la vitesse

- 🍓 Hydrostatique, fluides incompressibles

- 🍋 Effet de la résistance de l'air sur un pendule



Les *principia*, 1687 !

🍍 Livre 1 : Mouvements sans frottements

- 🍑 Problème à 2 corps

- 🍎 Théorème de Gauss gravitationnel

🍍 Livre 2 : Mouvements dans un milieu résistant

- 🍑 Forces proportionnelles à la vitesse

- 🍎 Forces proportionnelles au carré de la vitesse

- 🍓 Hydrostatique, fluides incompressibles

- 🍋 Effet de la résistance de l'air sur un pendule

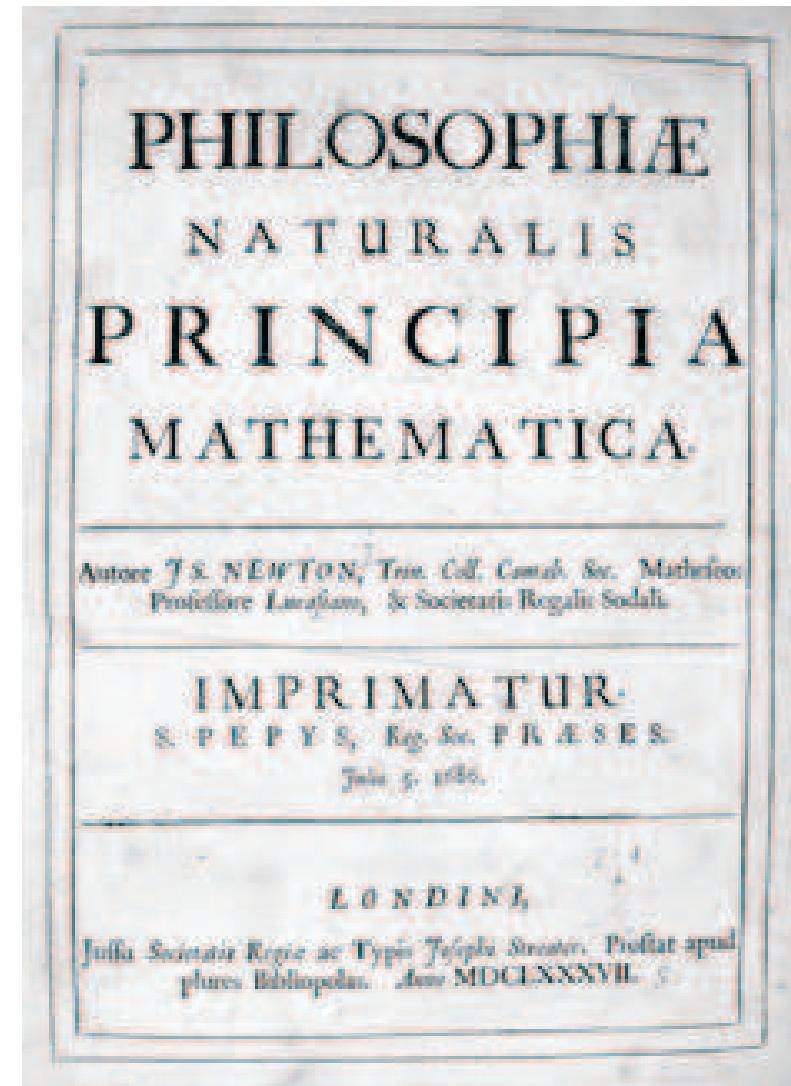
🍍 Livre 3 : Système du monde

- 🍑 Lune, satellites, comètes

- 🍎 Théorie des marées

- 🍓 Oscillateur harmonique

- 🍋 Précession des équinoxes





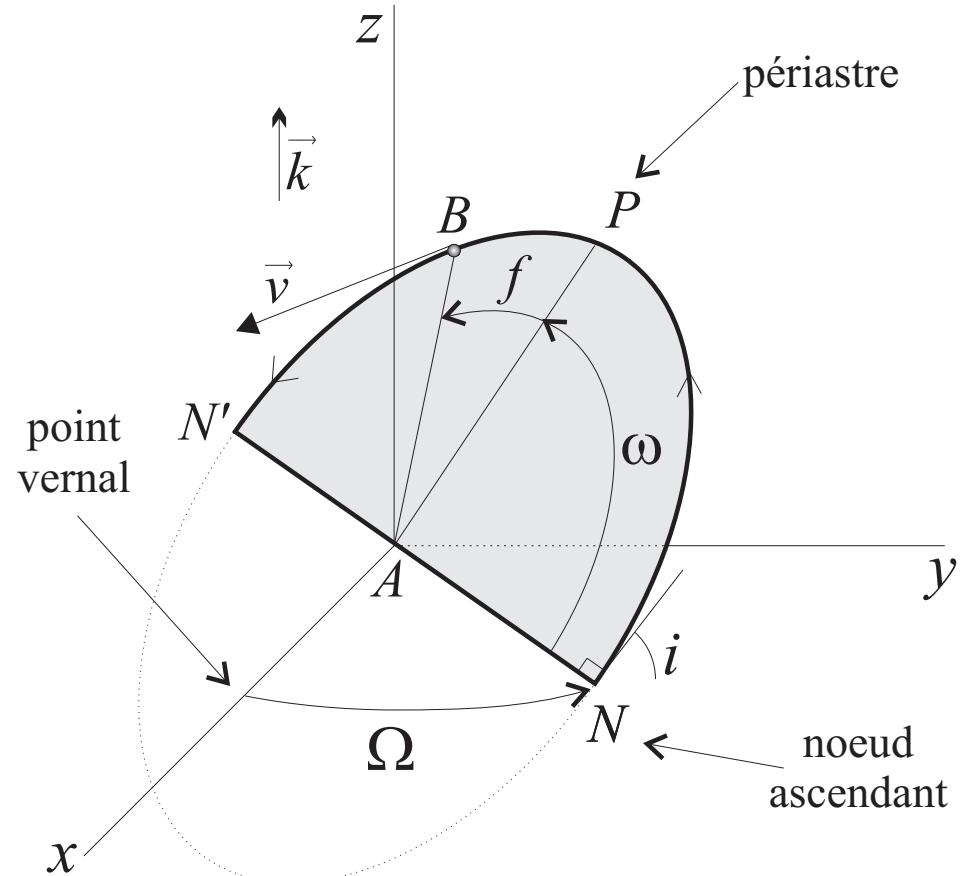
2 corps : A et B

$$C = \left| \overrightarrow{AB} \right|^2 \frac{df}{dt} = \text{cste}$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

$$p = \sqrt{CG(m_A + m_B)} = \frac{a}{1 - e^2}$$

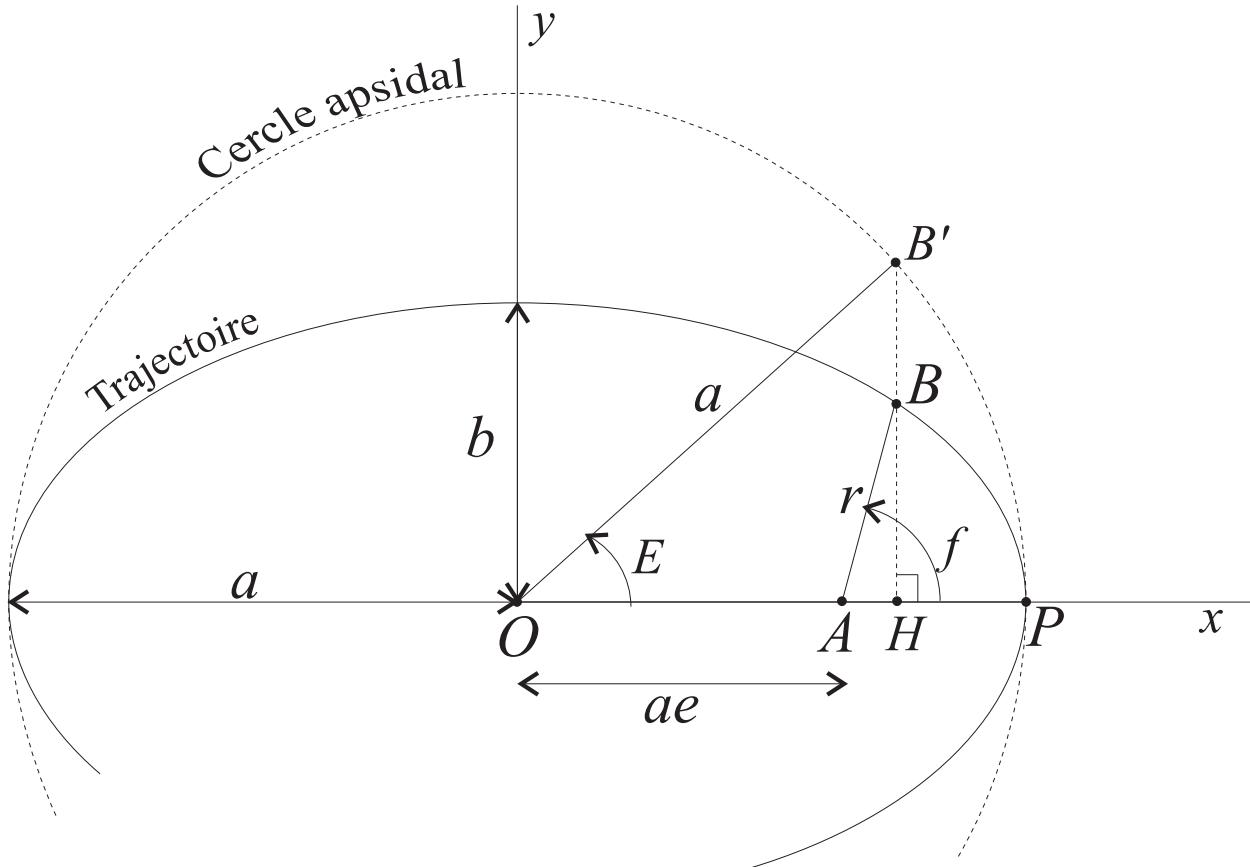
$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2\xi}{G^2(m_A + m_B)^2}}$$



- apple Inclinaison du plan orbital : i : comptée de 0 à 180° . Si $0^\circ < i \leq 90^\circ$: mouvement direct, si $90^\circ < i \leq 180^\circ$: mouvement rétrograde.
- apple Longitude du noeud ascendant : Ω : angle (Ax, AN) entre les directions du point vernal et du noeud ascendant mesuré dans le plan A_{xy}
- apple Argument du périastre : ω : angle (AN, AP) entre la ligne des noeuds et la direction du périastre mesuré dans le plan de l'orbite



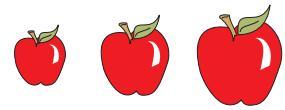
L'équation de Kepler



$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = a(1 - e \cos E)$$

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - \tau)$$



L'art de perturber

Le problème non perturbé : $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ fait apparaître 6 constantes
 $\vec{k} = [a, e, i, \Omega, \omega, \tau]^\top$, $\vec{r} = \vec{r}(\vec{k})$

Si le problème perturbé s'écrit $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \nabla_{\vec{r}} R$,

Lagrange montre que $\vec{k} \rightarrow \vec{k}(t)$ avec

$$A \frac{d \vec{k}}{dt} = \nabla_{\vec{k}} R \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A^\top = -A & \det(A) \neq 0 \\ A_{ij} = \langle k_i, k_j \rangle & \langle , \rangle : \text{Algèbre de Lie} \\ \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

→ Équations planétaires de Lagrange ...



Équations planétaires

$$\frac{da}{dt} = - \left(\frac{2}{n^2 a} \right) \frac{\partial R}{\partial \tau}$$

$$\frac{de}{dt} = - \left(\frac{1 - e^2}{n^2 a^2 e} \right) \frac{\partial R}{\partial \tau} - \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{n^2 a e} \right) \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{2}{n^2 a} \right) \frac{\partial R}{\partial a} + \left(\frac{1 - e^2}{n^2 a^2 e} \right) \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \right) \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \right) \frac{\partial R}{\partial e} - \left(\frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \right) \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{di}{dt} = \left(\frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \right) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \left(\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \right) \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$



$$\vec{A} = \vec{k} = \vec{\text{grad}}_{\vec{k}}(R)$$

$$1 = n^2 a / 2$$

$$3 = -\sqrt{1 - e^2} n a / 2$$

$$5 = na^2 e / \sqrt{1 - e^2}$$

$$6 = na^2 \sin i \sqrt{1 - e^2}$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & & 4 & 5 & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline 2 & 4 & & & 6 \\ \hline 3 & 5 & & & \\ \hline & & 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \vec{k} = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline e \\ \hline \tau \\ \hline \Omega \\ \hline \omega \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

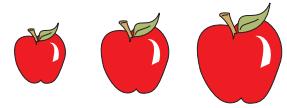
$$\det(A) = 1^2 \ 5^2 \ 6^2 = n^8 a^{10} \sin^2 i \ e^2$$

$$A^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \blacksquare \\ \hline & & & \blacksquare & \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & & & \blacksquare \\ \hline & & \blacksquare & & \blacksquare \\ \hline & & & \blacksquare & \\ \hline & & & & \blacksquare \\ \hline \end{array} \quad \text{nul !}$$



Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \nabla_{\vec{r}} U$ on pose
 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

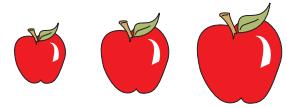


Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \nabla_{\vec{r}} U$ on pose
 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

Formalisme du second ordre

$$\forall i = 1, \dots, \ell \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2 - U$$



Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \nabla_{\vec{r}} U$ on pose $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

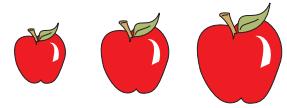
Formalisme du second ordre

$$\forall i = 1, \dots, \ell \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2 - U$$

Formalisme du premier ordre

On introduit $p_{i=1, \dots, \ell} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ et $\vec{k} = [\vec{q}, \vec{p}]^\top \in \mathbb{R}^{2\ell}$ et l'on obtient

$$\frac{d \vec{k}}{dt} = J \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} J = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix} = -J^\top \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\dot{q}} - \mathcal{L} \end{cases}$$



Généralisation (Lagrange aussi !)

Problème de mécanique possédant ℓ degrés de liberté $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \nabla_{\vec{r}} U$ on pose $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}(t))$ avec $\vec{q} \in \mathbb{R}^\ell$

Formalisme du second ordre

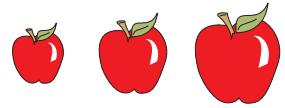
$$\forall i = 1, \dots, \ell \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec } \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2 - U$$

Formalisme du premier ordre

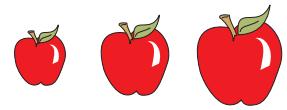
On introduit $p_{i=1, \dots, \ell} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ et $\vec{k} = [\vec{q}, \vec{p}]^\top \in \mathbb{R}^{2\ell}$ et l'on obtient

$$\frac{d \vec{k}}{dt} = J \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} J = \begin{bmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{bmatrix} = -J^\top \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\dot{q}} - \mathcal{L} \end{cases}$$

Dynamique → analytique, géométrique, algébrique, canonique, symplectique, ...



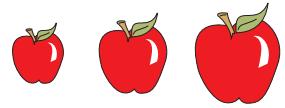
Quelques ouvertures dynamiques « modernes »



Systèmes intégrables

Le mouvement s'interprète comme la trajectoire qui minimise l'action dans l'espace des phases (Euler-Lagrange).

$$\forall i = 1, \dots, \ell \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(\vec{q}, \vec{\dot{q}} \right) dt \\ \text{ou} \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{p} \cdot \vec{\dot{q}} - \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}) \right] dt \end{cases} \quad \text{minimum}$$



Systèmes intégrables

Le mouvement s'interprète comme la trajectoire qui minimise l'action dans l'espace des phases (Euler-Lagrange).

$$\forall i = 1, \dots, \ell \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(\vec{q}, \vec{\dot{q}} \right) dt \\ \text{ou} \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{p} \cdot \vec{\dot{q}} - \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}) \right] dt \end{cases} \quad \text{minimum}$$

Le jeu de coordonnées $\vec{k} = [\vec{q}, \vec{p}]^\top$ n'est pas imposé.

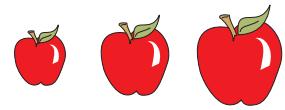


Quelles sont les transformations les plus générales

$$\vec{k} = [\vec{q}, \vec{p}]^\top \rightarrow \vec{K} = [\vec{Q}, \vec{P}]^\top$$

telles que \vec{K} soit solution des mêmes équations du mouvement avec un nouvel hamiltonien \mathcal{M}

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{K}} \mathcal{M}$$



Systèmes intégrables

Les transformations canoniques associées à des fonctions génératrices F

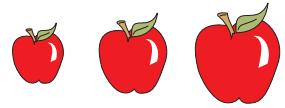
$$F_1 \left(\vec{q}, \vec{Q}, t \right) \left\{ \begin{array}{l} p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}, P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} \\ \\ \mathcal{M} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$F_2 \left(\vec{q}, \vec{P}, t \right) \left\{ \begin{array}{l} p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}, Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} \\ \\ \mathcal{M} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$F_3 \left(\vec{p}, \vec{Q}, t \right) \left\{ \begin{array}{l} q_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha}, P_\alpha = \frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha} \\ \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$F_4 \left(\vec{p}, \vec{P}, t \right) \left\{ \begin{array}{l} q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha}, Q_\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha} \\ \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\alpha = 1, \dots, \ell$$



Systèmes intégrables

Si on montre l'existence d'une transformation canonique telle que

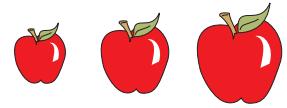
$$\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow \mathcal{M}(\vec{Q}, \vec{R}) \text{ ou } \mathcal{M}(\vec{Q}, \vec{P})$$

la dynamique correspondante s'écrit par exemple

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = J \nabla_{\vec{K}} \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{Q}}{dt} = \nabla_{\vec{P}} [\mathcal{M}(\vec{Q})] = 0 \\ \frac{d\vec{P}}{dt} = -\nabla_{\vec{Q}} [\mathcal{M}(\vec{Q})] = \vec{P}_1 = \text{cste} \end{cases}$$

En variable K le mouvement est trivial

$$\begin{cases} \vec{Q}(t) = \vec{Q}_0 = \text{cste} \\ \vec{P}(t) = t \vec{P}_1 + \vec{P}_0 \quad \text{avec } \vec{P}_0 = \vec{P}(0) = \text{cste} \end{cases}$$



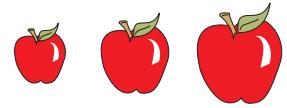
Systèmes intégrables

Le fameux exemple : Oscillateur harmonique $\ell = 1$: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2$

$F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$ induit $\mathcal{H}(q, p) \rightarrow \mathcal{M}(Q, P) = \omega P$ ainsi

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial P} = \omega_0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \\ P(t) = \rho_0 \end{cases}$$

L'espace des phases de ce système peut se représenter par $\ell = 1$ tore.



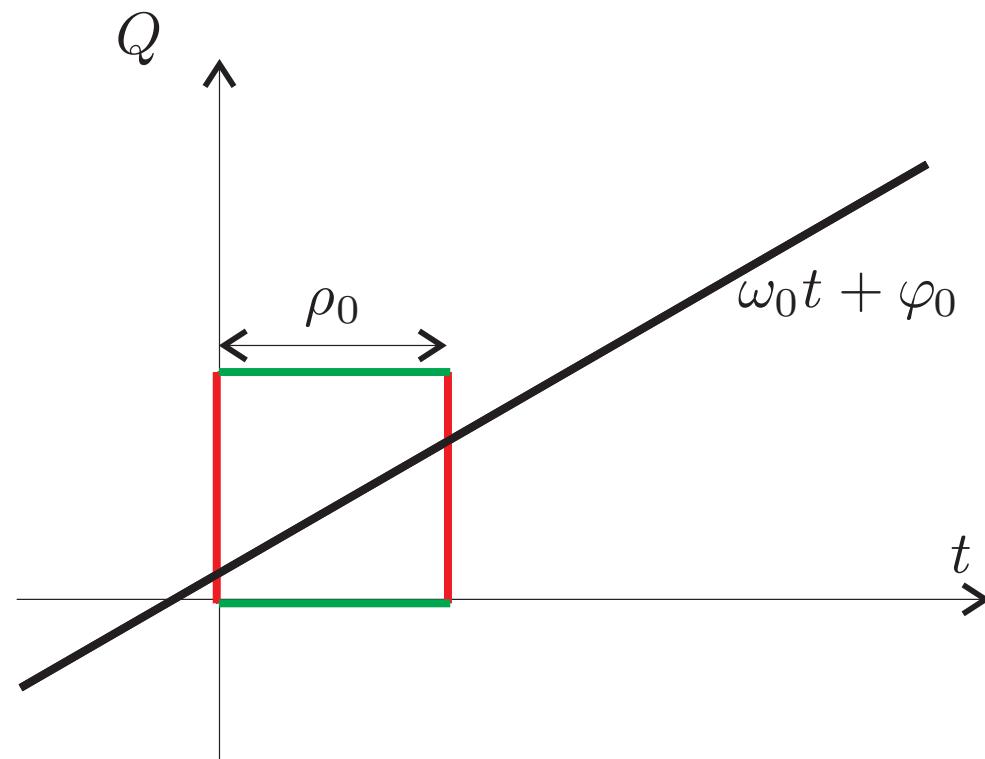
Systèmes intégrables

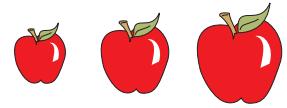
Le fameux exemple : Oscillateur harmonique $\ell = 1$: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2$

$F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$ induit $\mathcal{H}(q, p) \rightarrow \mathcal{M}(Q, P) = \omega P$ ainsi

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial P} = \omega_0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \\ P(t) = \rho_0 \end{cases}$$

L'espace des phases de ce système peut se représenter par $\ell = 1$ tore.





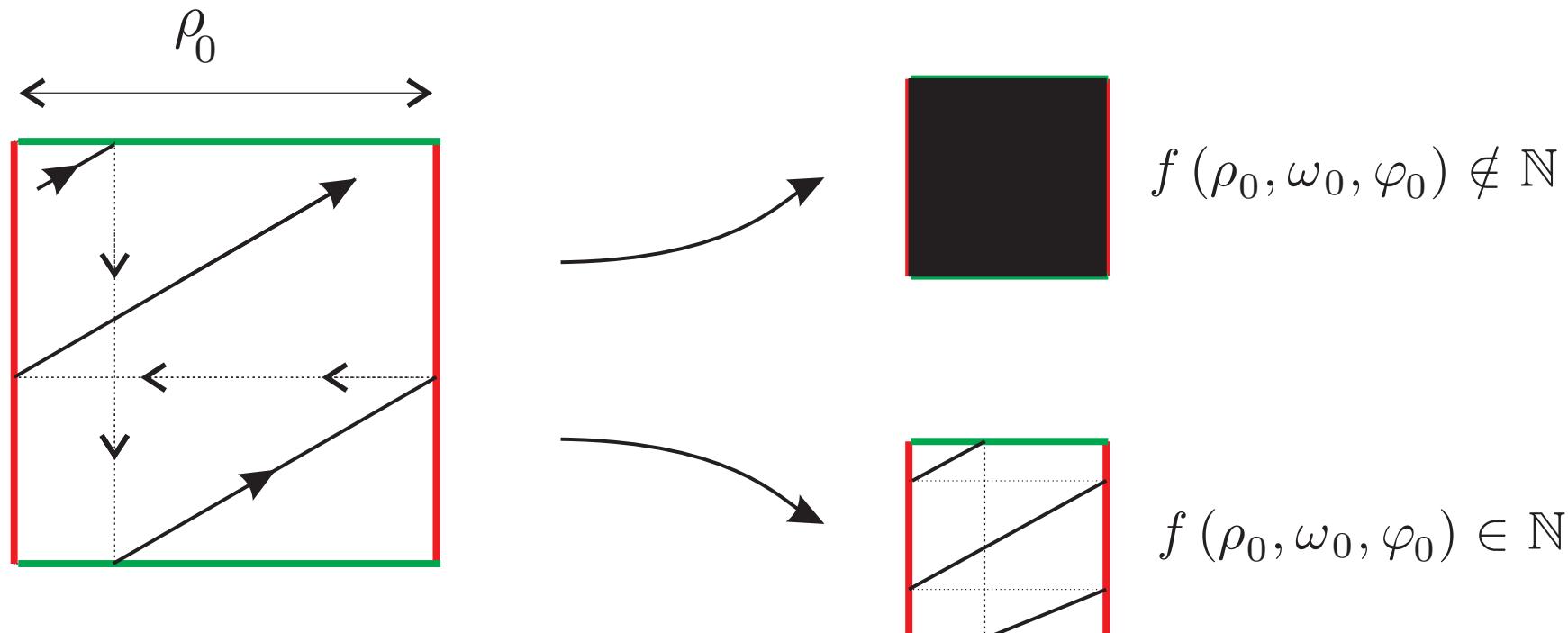
Systèmes intégrables

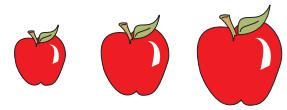
Le fameux exemple : Oscillateur harmonique $\ell = 1$: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2$

$F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$ induit $\mathcal{H}(q, p) \rightarrow \mathcal{M}(Q, P) = \omega P$ ainsi

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial P} = \omega_0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \\ P(t) = \rho_0 \end{cases}$$

L'espace des phases de ce système peut se représenter par $\ell = 1$ tore.





Système intégrable

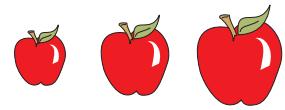


Au sens de Liouville

Le système possède ℓ degrés de liberté et son hamiltonien ne dépend que de ℓ variables indépendantes.

Ces variables sont des intégrales premières du mouvement qui isolent l'espace des phases en ℓ tores indépendants.

Le théorème KAM^[1954–63] indique que si $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0(P) + \varepsilon \mathcal{M}_1(Q, P)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$ la plupart des tores de \mathcal{M}_0 persistent, mais sont déformés.



Système intégrable



Au sens de Liouville

Le système possède ℓ degrés de liberté et son hamiltonien ne dépend que de ℓ variables indépendantes.

Ces variables sont des intégrales premières du mouvement qui isolent l'espace des phases en ℓ tores indépendants.

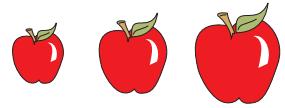
Le théorème KAM^[1954–63] indique que si $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0(P) + \varepsilon \mathcal{M}_1(Q, P)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$ la plupart des tores de \mathcal{M}_0 persistent, mais sont déformés.



Au sens de Painlevé

Les solutions des équations du mouvement sont des fonctions méromorphes.

C'est-à-dire que ces solutions sont analytiques sauf sur un ensemble de points isolés : elles sont indéfiniment dérивables et sont égales au voisinage de tout point à la somme de leur série de Taylor.



Système intégrable



Au sens de Liouville

Le système possède ℓ degrés de liberté et son hamiltonien ne dépend que de ℓ variables indépendantes.

Ces variables sont des intégrales premières du mouvement qui isolent l'espace des phases en ℓ tores indépendants.

Le théorème KAM^[1954–63] indique que si $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0(P) + \varepsilon \mathcal{M}_1(Q, P)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$ la plupart des tores de \mathcal{M}_0 persistent, mais sont déformés.

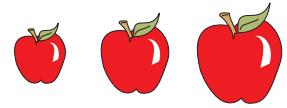


Au sens de Painlevé

Les solutions des équations du mouvement sont des fonctions méromorphes.

C'est-à-dire que ces solutions sont analytiques sauf sur un ensemble de points isolés : elles sont indéfiniment dérивables et sont égales au voisinage de tout point à la somme de leur série de Taylor.

Physiquement, un système intégrable n'est pas chaotique ?



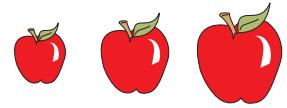
Théorème de Noether

Application sur l'espace de configuration et sur l'espace des phases

$$\vec{q} \quad \mapsto \quad g_\sigma(\vec{q}) = [g_\sigma^1(\vec{q}), \dots, g_\sigma^\ell(\vec{q})]^\top$$

$$[\vec{q}, \vec{\dot{q}}]^\top \quad \mapsto \quad g_\sigma^*(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = \left[g_\sigma(\vec{q}), \frac{dg_\sigma(\vec{q})}{dt} \right]^\top$$

Propriété de groupe $g_{\sigma=0} = Id$ et $g_{\sigma_1} \circ g_{\sigma_2} = g_{\sigma_1 + \sigma_2}$



Théorème de Noether

Application sur l'espace de configuration et sur l'espace des phases

$$\vec{q} \mapsto g_\sigma(\vec{q}) = [g_\sigma^1(\vec{q}), \dots, g_\sigma^\ell(\vec{q})]^\top$$

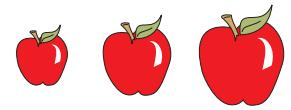
$$[\vec{q}, \vec{\dot{q}}]^\top \mapsto g_\sigma^*(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = \left[g_\sigma(\vec{q}), \frac{dg_\sigma(\vec{q})}{dt} \right]^\top$$

Propriété de groupe $g_{\sigma=0} = Id$ et $g_{\sigma_1} \circ g_{\sigma_2} = g_{\sigma_1+\sigma_2}$

Si un système possède un groupe de symétrie $g_\sigma : \mathcal{L}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = \mathcal{L}(g_\sigma^*(\vec{q}, \vec{\dot{q}}))$ alors la quantité

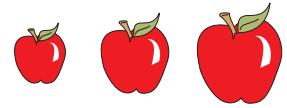
$$I(\vec{q}; \vec{\dot{q}}) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{dg_\sigma^i(\vec{q})}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0}$$

est une constante du mouvement.



Théorème de Noether

Exemples classiques

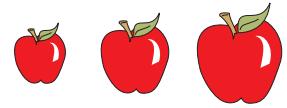


Théorème de Noether

Exemples classiques

 Invariance par translation spatiale : $g_\sigma : (q_1, \dots, q_s) \mapsto (q_1 + \sigma n_1, \dots, q_s + \sigma n_s)$

$$\sum_{i=1}^s m_i \dot{q}_i n_i = \text{cste}$$



Théorème de Noether

Exemples classiques

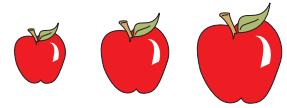
Invariance par translation spatiale : $g_\sigma : (q_1, \dots, q_s) \mapsto (q_1 + \sigma n_1, \dots, q_s + \sigma n_s)$

$$\sum_{i=1}^s m_i \dot{q}_i n_i = \text{cste}$$

Invariance par rotation (autour de Oz par exemple)

$$g_\sigma : (x^p, y^p, z^p) \rightarrow (x'^p, y'^p, z'^p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x'^p = x^p \cos \sigma + y^p \sin \sigma \\ y'^p = -x^p \sin \sigma + y^p \cos \sigma \\ z'^p = z^p \end{cases}$$

$$\sum_{p=1}^N m_p \vec{\dot{r}}_p \cdot (\vec{r}_p \wedge \vec{e}_z) = \sum_{p=1}^N \vec{e}_z \cdot (m_p \vec{\dot{r}}_p \wedge \vec{r}_p) = -L_z = \text{cste}$$



Théorème de Noether

Exemples classiques

Invariance par translation spatiale : $g_\sigma : (q_1, \dots, q_s) \mapsto (q_1 + \sigma n_1, \dots, q_s + \sigma n_s)$

$$\sum_{i=1}^s m_i \dot{q}_i n_i = \text{cste}$$

Invariance par rotation (autour de Oz par exemple)

$$g_\sigma : (x^p, y^p, z^p) \rightarrow (x'^p, y'^p, z'^p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x'^p = x^p \cos \sigma + y^p \sin \sigma \\ y'^p = -x^p \sin \sigma + y^p \cos \sigma \\ z'^p = z^p \end{cases}$$

$$\sum_{p=1}^N m_p \vec{\dot{r}}_p \cdot (\vec{r}_p \wedge \vec{e}_z) = \sum_{p=1}^N \vec{e}_z \cdot (m_p \vec{\dot{r}}_p \wedge \vec{r}_p) = -L_z = \text{cste}$$

Invariance par translation temporelle ($q_0 = t$) : $g_\sigma : (q_0, \vec{q}) \mapsto (q_0 + \sigma, \vec{q})$

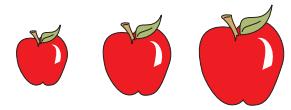
$$-\sum_{i=1}^s \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U := -H = \text{cste}$$



Théorème de Noether

Exemples moins classiques

- Invariance de jauge dans Maxwell \longleftrightarrow Conservation de la charge
- Invariance $\psi \mapsto g_\sigma(\psi) = \psi e^{i\sigma}$ en MQ \longleftrightarrow Conservation du courant de probabilité
- etc...



Dynamique non dissipative compacte

Mécanique classique



Dynamique non dissipative compacte

Mécanique classique

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H}$$



Dynamique non dissipative compacte

Mécanique classique

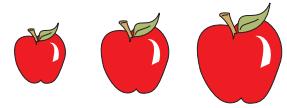
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$



Dynamique non dissipative compacte

Mécanique classique

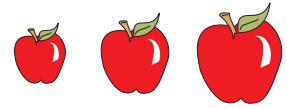
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} \\ \dot{p}_\alpha = -\sum_\beta \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$



Dynamique non dissipative compacte

Mécanique classique

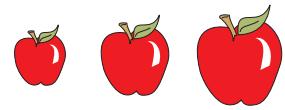
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} \\ \dot{p}_\alpha = -\sum_\beta \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\beta} \right) \\ \dot{p}_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \right) \end{cases}$$



Dynamique non dissipative compacte

Mécanique classique

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} \\ \dot{p}_\alpha = -\sum_\beta \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\beta} \right) \\ \dot{p}_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \right) \end{cases} \stackrel{:=}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, \mathcal{H}\} \\ \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, \mathcal{H}\} \end{cases}$$



Dynamique non dissipative compacte

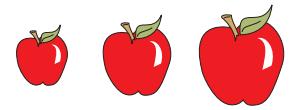
Mécanique classique

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J \cdot \nabla_{\vec{k}} \mathcal{H} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} \\ \dot{p}_\alpha = -\sum_\beta \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\beta} \right) \\ \dot{p}_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \right) \end{cases} \stackrel{:=}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, \mathcal{H}\} \\ \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, \mathcal{H}\} \end{cases}$$

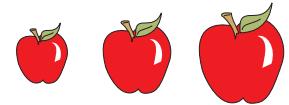
plus généralement pour toute fonction $\varphi(\vec{q}, \vec{p}, t)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\} \quad \text{avec } \{a, b\} = \nabla_{\vec{q}} a \cdot \nabla_{\vec{p}} b - \nabla_{\vec{p}} a \cdot \nabla_{\vec{q}} b$$

Équation fondamentale de la mécanique classique



Dynamique non dissipative compacte

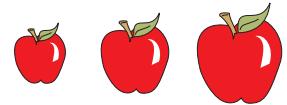


Dynamique non dissipative compacte



Mécanique classique

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\} \quad \text{avec } \{a, b\} = \nabla_{\vec{q}} a \cdot \nabla_{\vec{p}} b - \nabla_{\vec{p}} a \cdot \nabla_{\vec{q}} b$$



Dynamique non dissipative compacte



Mécanique classique

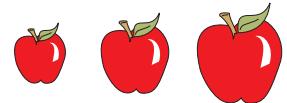
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\} \quad \text{avec } \{a, b\} = \nabla_{\vec{q}} a \cdot \nabla_{\vec{p}} b - \nabla_{\vec{p}} a \cdot \nabla_{\vec{q}} b$$



Mécanique quantique

Pour toute observable A et en moyenne

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}] \quad \text{avec } [\hat{A}, \hat{B}] = -\frac{i}{\hbar} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$



Dynamique non dissipative compacte



Mécanique classique

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\} \quad \text{avec } \{a, b\} = \nabla_{\vec{q}} a \cdot \nabla_{\vec{p}} b - \nabla_{\vec{p}} a \cdot \nabla_{\vec{q}} b$$



Mécanique quantique

Pour toute observable A et en moyenne

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}] \quad \text{avec } [\hat{A}, \hat{B}] = -\frac{i}{\hbar} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$

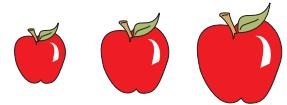


Théories de champ moyen (φ statistique, milieux continus, · · ·)

Fonction de distribution $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$: densité de probabilité de présence

Pour toute fonctionnelle $F[f]$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) \quad \text{avec } (F, G) = \int f \left\{ \frac{dF}{df}, \frac{dG}{df} \right\} d\vec{p} d\vec{q}$$



Dynamique non dissipative compacte



Mécanique classique

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\} \quad \text{avec } \{a, b\} = \nabla_{\vec{q}} a \cdot \nabla_{\vec{p}} b - \nabla_{\vec{p}} a \cdot \nabla_{\vec{q}} b$$



Mécanique quantique

Pour toute observable A et en moyenne

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}] \quad \text{avec } [\hat{A}, \hat{B}] = -\frac{i}{\hbar} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$



Théories de champ moyen (φ statistique, milieux continus, · · ·)

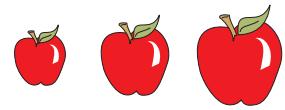
Fonction de distribution $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$: densité de probabilité de présence

Pour toute fonctionnelle $F[f]$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) \quad \text{avec } (F, G) = \int f \left\{ \frac{dF}{df}, \frac{dG}{df} \right\} d\vec{p} d\vec{q}$$

Dans tous les cas $\{\cdot, \cdot\}$, $[\cdot, \cdot]$ ou (\cdot, \cdot) ont les mêmes propriétés (Algèbre de Lie) : toutes les dynamiques se ressemblent et utilisent les mêmes outils !

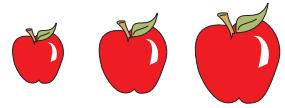
Traitement uniifié des problèmes



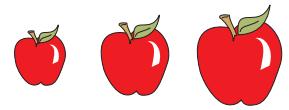
Idée générale

On se sait généralement pas résoudre explicitement un problème de dynamique.

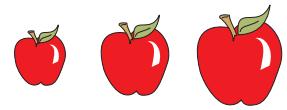
Les méthodes modernes permettent de décrire les propriétés de la dynamique d'un système sans l'expliciter.



La dynamique de l'Univers



Le cadre général

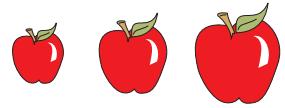


Le cadre général

L'univers est un système physique !

Ses propriétés dynamiques et géométriques dépendent de son contenu énergie-impulsion (Relativité générale).

L'univers que l'on observe est homogène et isotrope depuis très longtemps.



Le cadre général

L'univers est un système physique !

Ses propriétés dynamiques et géométriques dépendent de son contenu énergie-impulsion (Relativité générale).

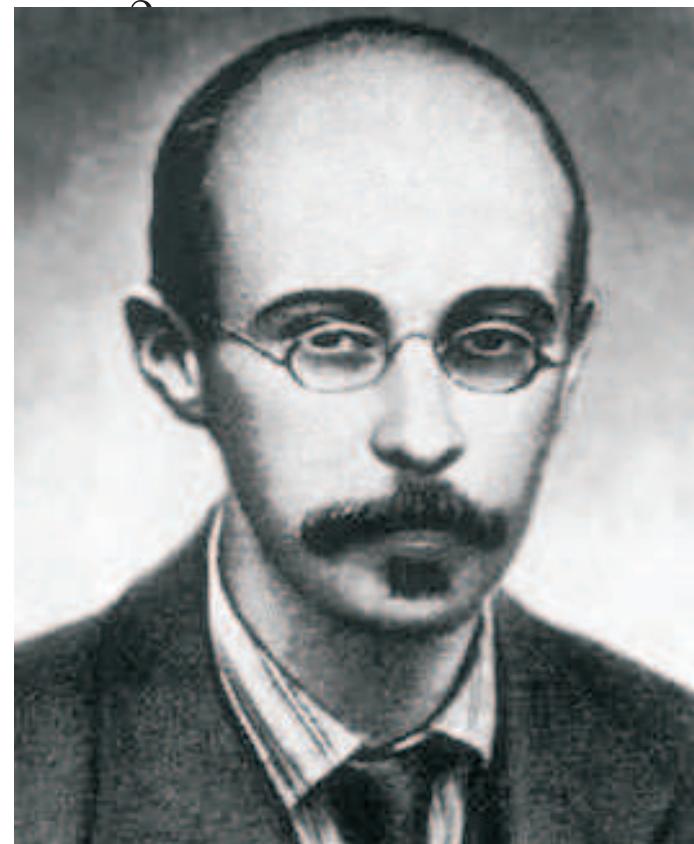
L'univers que l'on observe est homogène et isotrope depuis très longtemps.

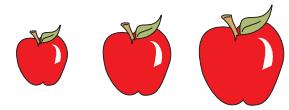
Questions

- 🍓 Peut-on prévoir le destin d'un univers homogène et isotrope ($t \rightarrow +\infty$) ?
- 🍐 Quelles sont les caractéristiques de la singularité ($t \rightarrow 0$) dans un univers simplement homogène ?

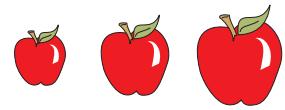


L'Univers homogène et isotrope





Solution de Friedmann-Lemaître



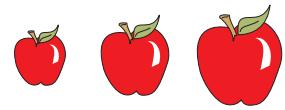
Solution de Friedmann-Lemaître

Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$a(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure



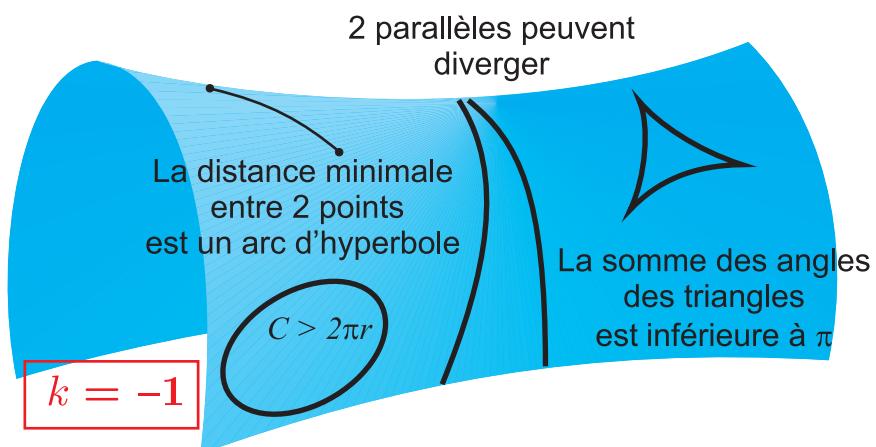
Solution de Friedmann-Lemaître

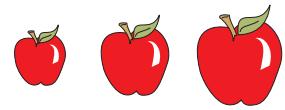
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$a(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





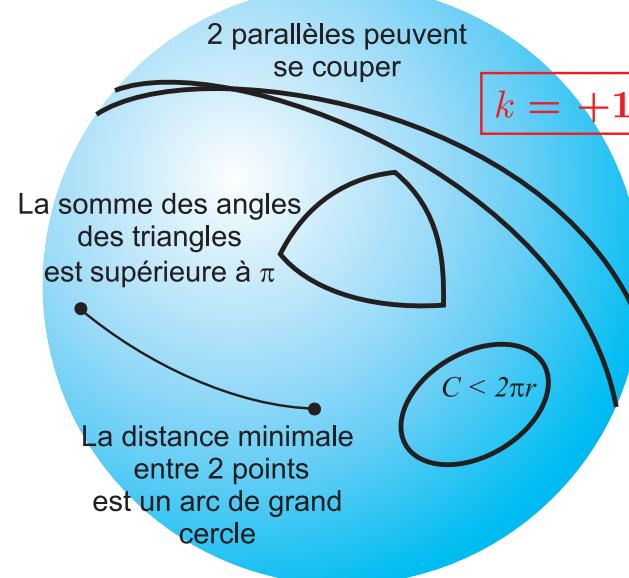
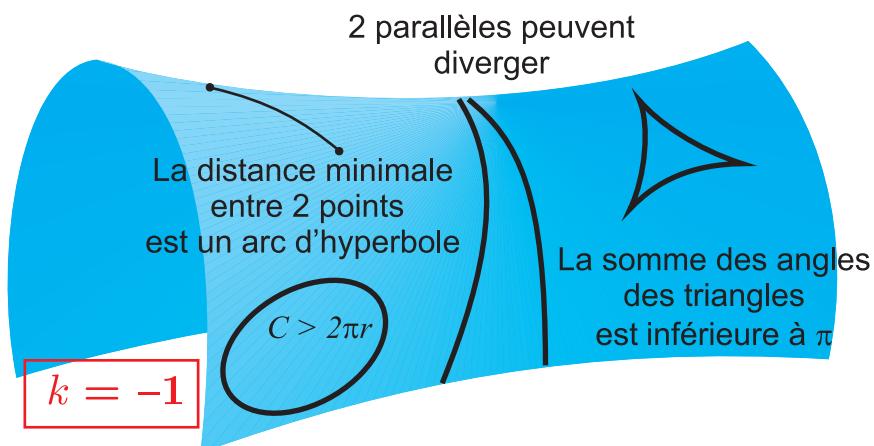
Solution de Friedmann-Lemaître

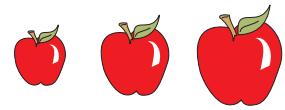
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$a(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





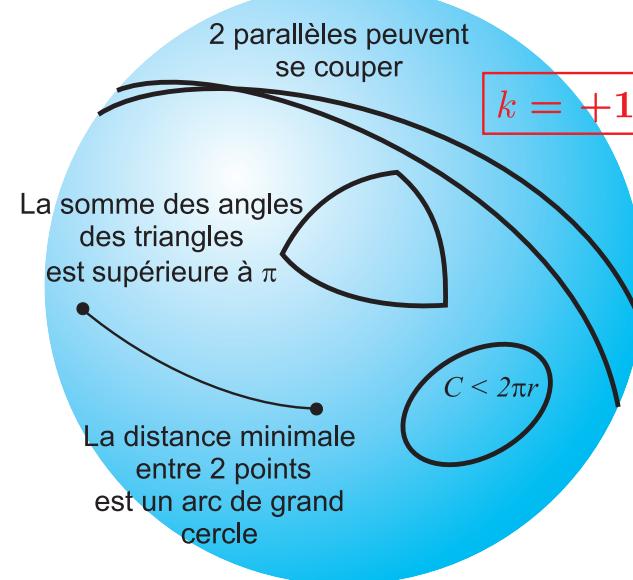
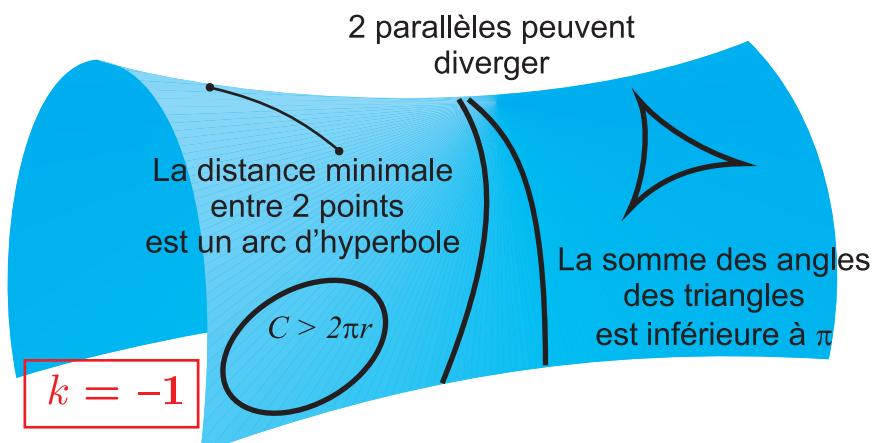
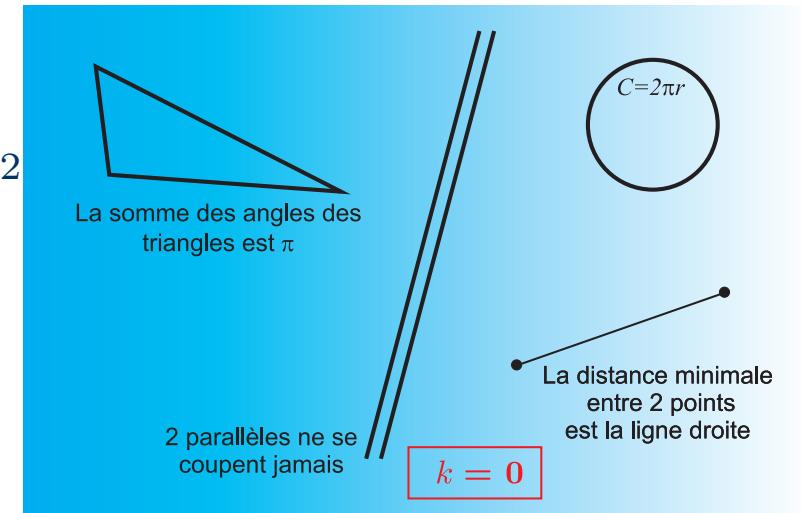
Solution de Friedmann-Lemaître

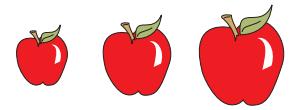
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

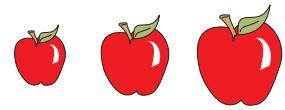
$a(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





Équations de Friedmann



Équations de Friedmann

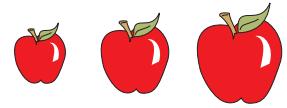
Equations d'Einstein →

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_2)$$

$$a^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d[(\epsilon + P) a^3]}{dt} \quad (F3)$$

conservation de l'énergie impulsion



Équations de Friedmann

Equations d'Einstein →

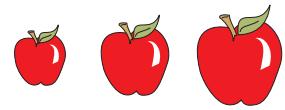
$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_2)$$

$$a^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d[(\epsilon + P) a^3]}{dt} \quad (F3)$$

conservation de l'énergie impulsion

🍓 $(F_2) + (\Lambda = 0)$: $\left(a > 0, \frac{da}{dt} > 0, \frac{d^2a}{dt^2} < 0 \right) \Rightarrow a$ concave \Rightarrow Big-Bang



Équations de Friedmann

Equations d'Einstein →

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_2)$$

$$a^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d[(\epsilon + P) a^3]}{dt} \quad (F3)$$

conservation de l'énergie impulsion

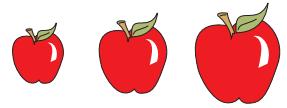
🍓 $(F_2) + (\Lambda = 0)$: $\left(a > 0, \frac{da}{dt} > 0, \frac{d^2a}{dt^2} < 0 \right) \Rightarrow a$ concave \Rightarrow Big-Bang

🍋 $(F_1) + (\Lambda = 0)$: Constante de Hubble : $H = \dot{a}/a$

Densité critique : $\epsilon_o = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1,1 \times 10^{-29} \left[\frac{cH}{75 \text{ km/s/Mpc}} \right]^2 \text{ g/cm}^3$

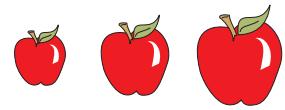
Mesurer k ?

$$3k = 8\pi G a^2 (\epsilon - \epsilon_o)$$



Mise en forme

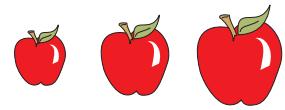
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{\frac{a}{a}} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\epsilon} = -3H(P + \epsilon) \end{array} \right.$$



Mise en forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\epsilon} = -3H(P + \epsilon) \end{array} \right. , \quad \text{on pose}$$

$$\left[\begin{array}{l} H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d(\ln a)}{dt} \\ q(t) = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \\ \Omega_m(t) = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2}, \quad \Omega_k(t) = -\frac{k}{a^2 H^2} \\ \text{et} \quad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H^2} \end{array} \right]$$



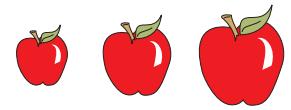
Mise en forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\epsilon} = -3H(P + \epsilon) \end{array} \right. , \quad \text{on pose}$$

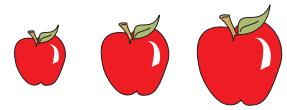
$$\left[\begin{array}{l} H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d(\ln a)}{dt} \\ q(t) = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \\ \Omega_m(t) = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2}, \quad \Omega_k(t) = -\frac{k}{a^2 H^2} \\ \text{et} \quad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H^2} \end{array} \right]$$

et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (F1.1) \\ \frac{4\pi G}{3H^2} (\epsilon + 3P) = q + \Omega_\Lambda \quad (F2.1) \\ \dot{\epsilon} = -3H(P + \epsilon) \quad (F3.1) \end{array} \right.$$

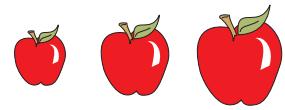


Equation d'état



Equation d'état

Barotropique : $P = \omega\epsilon = (\Gamma - 1)\epsilon = \frac{(w - 1)}{3}\epsilon$

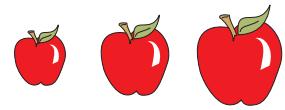


Equation d'état

$$\text{Barotropique : } P = \omega\epsilon = (\Gamma - 1)\epsilon = \frac{(w - 1)}{3}\epsilon$$

ω	-1	0	1/3	2/3	1
Etat	Vide quantique	gaz de poussières incohérentes	gaz parfait de photons	gaz parfait monoatomique	matière raide

$$\omega \in [-1, 1] , \quad \Gamma \in [0, 2] , \quad w \in [-2, 4]$$



Equation d'état

$$\text{Barotropique : } P = \omega\epsilon = (\Gamma - 1)\epsilon = \frac{(w - 1)}{3}\epsilon$$

ω	-1	0	1/3	2/3	1
Etat	Vide quantique	gaz de poussières incohérentes	gaz parfait de photons	gaz parfait monoatomique	matière raide

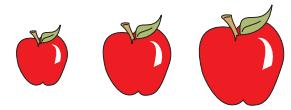
$$\omega \in [-1, 1] , \quad \Gamma \in [0, 2] , \quad w \in [-2, 4]$$

Équations de Friedmann barotropiques :

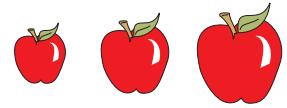
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ q = \frac{\Omega_m (1 + 3\omega)}{2} - \Omega_\Lambda \\ (\ln \epsilon)' = -3(1 + \omega) \end{array} \right.$$



$$' = \frac{d}{d \ln a}$$

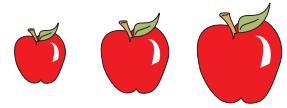


Le système dynamique



Le système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ \\ \Omega'_m = \Omega_m [(1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda] \\ \\ \Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda [\Omega_m (1 + 3\omega) + 2 (1 - \Omega_\Lambda)] \end{array} \right.$$



Le système dynamique

$$\begin{cases} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ \Omega'_m = \Omega_m [(1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda] \\ \Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda [\Omega_m (1 + 3\omega) + 2 (1 - \Omega_\Lambda)] \end{cases}$$

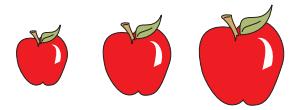
en posant $w = 1 + 3\omega$ variant dans l'intervalle $[-2, 4]$

$$X' = F_w (X) \text{ avec } X = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top \text{ et } F_w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (f_1 (x, y), f_2 (x, y)) \end{array}$$

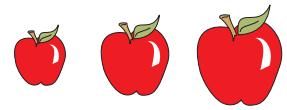
où l'on a posé pour plus de concision dans l'écriture

$$\begin{cases} f_1 (x, y) = x [w (x - 1) - 2y] \\ f_2 (x, y) = y [wx + 2 (1 - y)] \end{cases}$$

Équation de type Lotka-Volterra non périodique



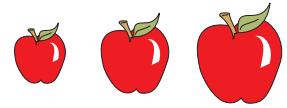
Les équilibres



Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

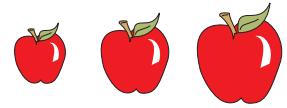


Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :



Les équilibres

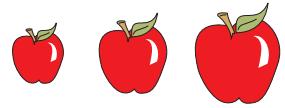
Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

🍎 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$



Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x[w(x-1) - 2y] = 0 \\ y[wx + 2(1-y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

🍎 Si $x = 0$, alors $2y(1-y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

🍍 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x-1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x-1)(w-2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$



Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x[w(x-1) - 2y] = 0 \\ y[wx + 2(1-y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

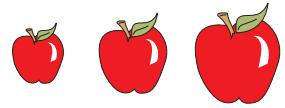
🍎 Si $x = 0$, alors $2y(1-y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

🍍 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x-1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x-1)(w-2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :



Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x[w(x-1) - 2y] = 0 \\ y[wx + 2(1-y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

Si $x = 0$, alors $2y(1-y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

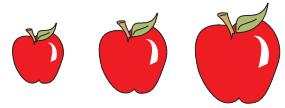
$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x-1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x-1)(w-2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :

L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$ et $\Omega_k = 0$,



Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x[w(x-1) - 2y] = 0 \\ y[wx + 2(1-y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

Si $x = 0$, alors $2y(1-y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

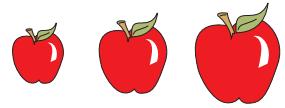
Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x-1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x-1)(w-2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :

L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$ et $\Omega_k = 0$,

L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^\top$ et $\Omega_k = 0$,



Les équilibres

Équilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x[w(x-1) - 2y] = 0 \\ y[wx + 2(1-y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

🍎 Si $x = 0$, alors $2y(1-y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

🍍 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x-1)$ et

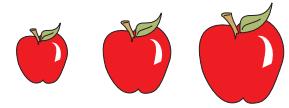
$$\frac{1}{2}w(x-1)(w-2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :

🍋 L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$ et $\Omega_k = 0$,

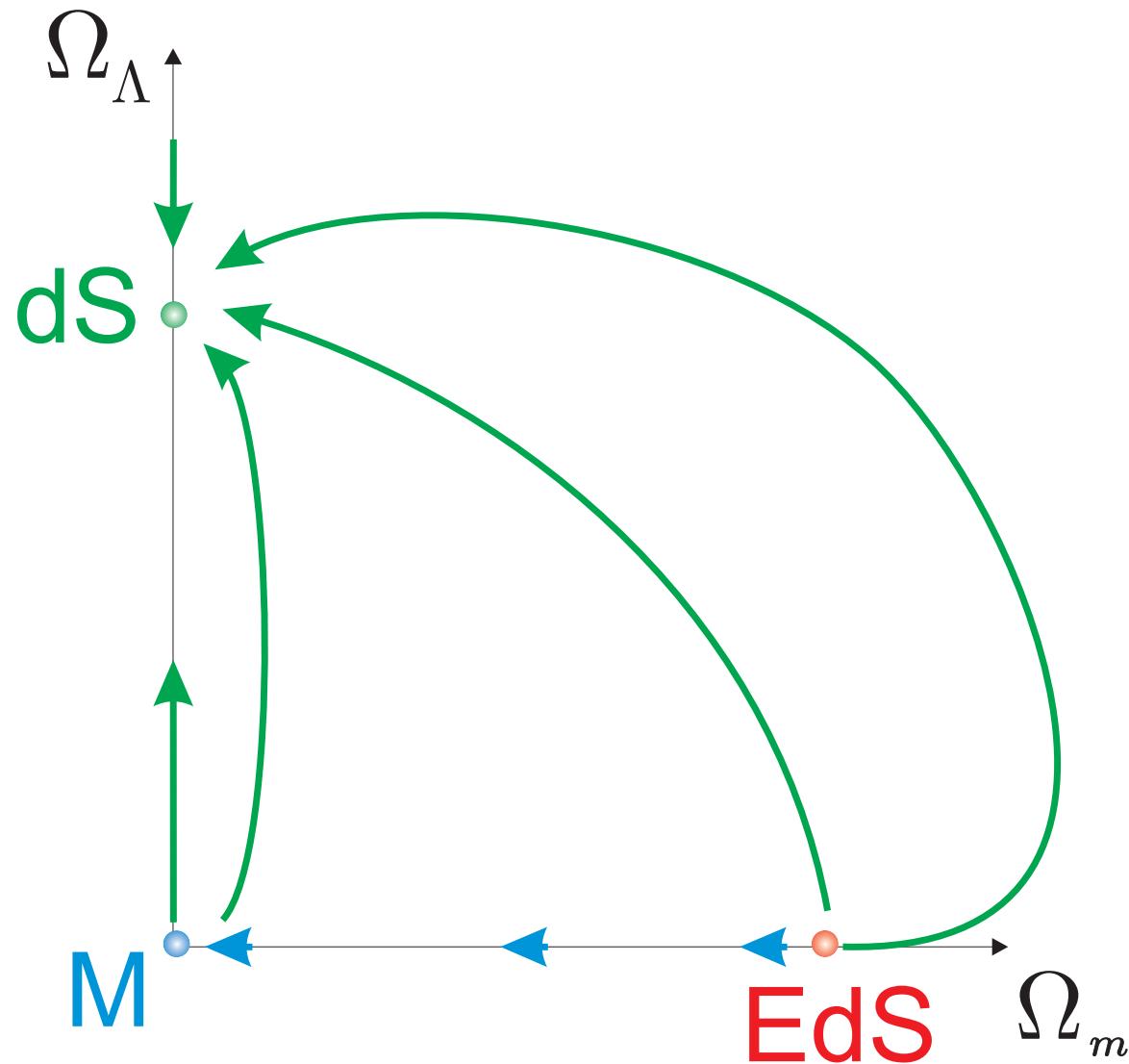
🍓 L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^\top$ et $\Omega_k = 0$,

🍑 L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^\top$ et $\Omega_k = 1$.



Le destin des univers de Friedmann

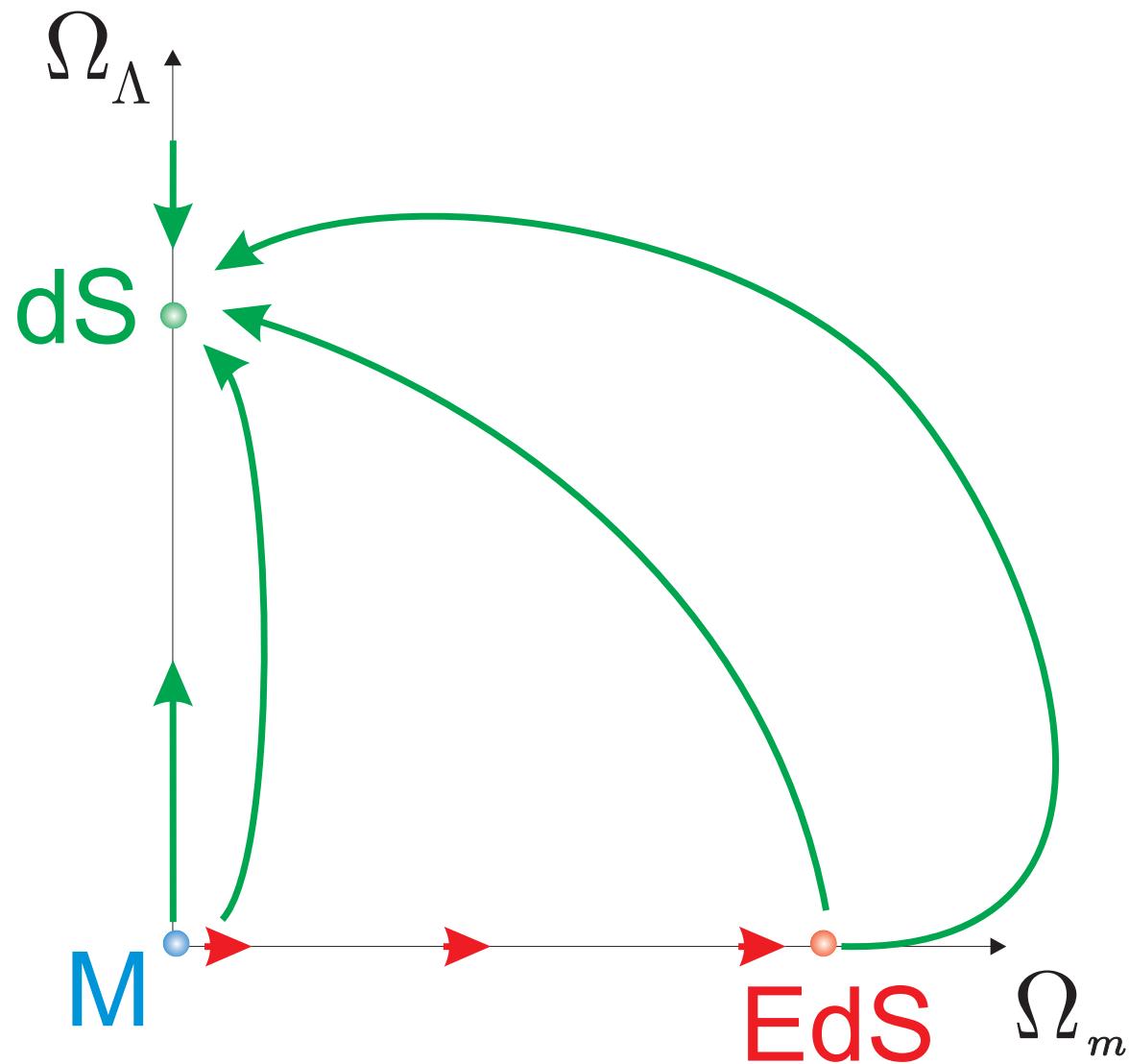
avec de la matière exotique : $\omega \in] -1, -1/3[$

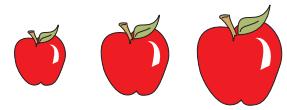




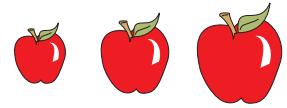
Le destin des univers de Friedmann

avec de la matière ordinaire : $\omega \in] -1/3, 1[$



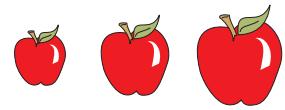


L'univers de de Sitter : $X_1^ = [0, 1]^\top$*



L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 \text{ : Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \text{ : Univers plat} \end{array} \right.$$

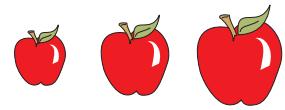


L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \Rightarrow \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} = 0 \Rightarrow k = 0 : \text{Univers plat} \end{array} \right]$$

Équations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{a} = -\frac{4\pi G w}{3}\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \implies \frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{a}}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$$



L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$

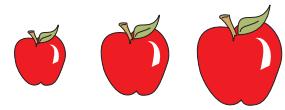
$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \Rightarrow \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} = 0 \Rightarrow k = 0 : \text{Univers plat} \end{array} \right]$$

Équations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{a} = -\frac{4\pi G w}{3}\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \implies \frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{a}}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$$

soit

$$\begin{aligned} \ln \dot{a} &= \ln (\alpha a) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\dot{a}(0)}{a(0)} \in \mathbb{R}_+ \\ \Rightarrow \dot{a} &= \alpha a \quad \text{et} \quad a(t) = a(0) e^{\alpha t} \end{aligned}$$



L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \Rightarrow \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} = 0 \Rightarrow k = 0 : \text{Univers plat} \end{array} \right]$$

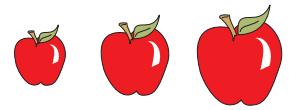
Équations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{a} = -\frac{4\pi G w}{3}\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \implies \frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{a}}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$$

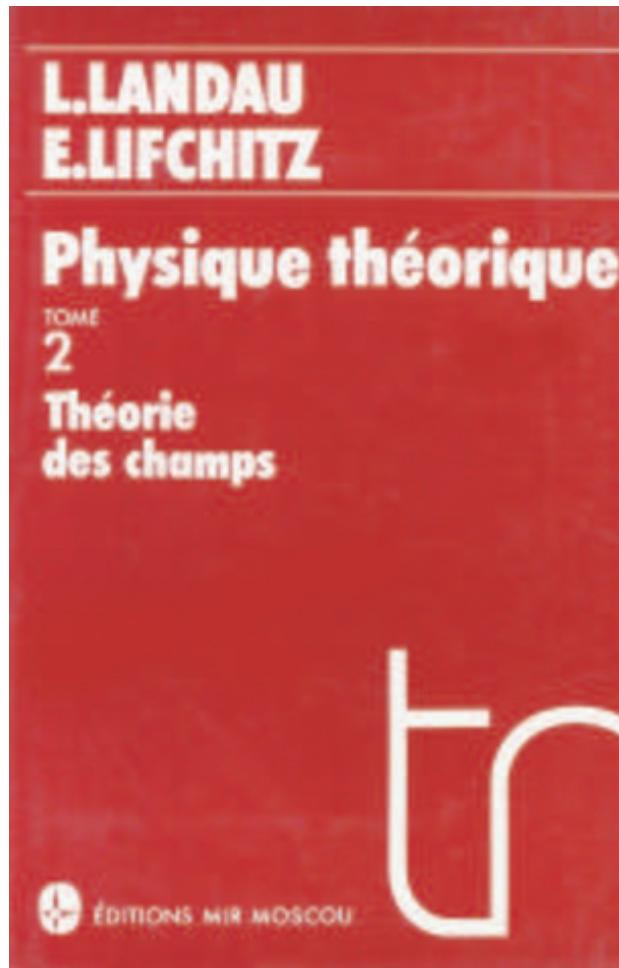
soit

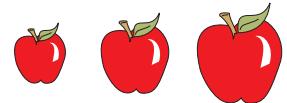
$$\begin{aligned} \ln \dot{a} &= \ln (\alpha a) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\dot{a}(0)}{a(0)} \in \mathbb{R}_+ \\ \Rightarrow \dot{a} &= \alpha a \quad \text{et} \quad a(t) = a(0) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

univers incrémenté en perpétuelle inflation exponentielle !



L'Univers homogène et anisotrope



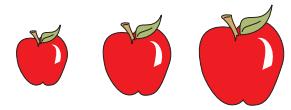


Formalisme BKL

e.g. [Belinski, Khalatnikov et Lifchitz, 69]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & E_c + E_p + E_m = H \\ \chi (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} & = & A_1'' + (n_1 e^{A_1})^2 - (n_2 e^{A_2} - n_3 e^{A_3})^2 \\ \chi (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} & = & A_2'' + (n_2 e^{A_2})^2 - (n_3 e^{A_3} - n_1 e^{A_1})^2 \\ \chi (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} & = & A_3'' + (n_3 e^{A_3})^2 - (n_1 e^{A_1} - n_2 e^{A_2})^2 \end{array} \right.$$
$$V^2 = e^{A_1 + A_2 + A_3}, \quad dt = V d\tau$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^3 A'_i A'_j \quad E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i}$$
$$E_m = -4\chi\epsilon V^2 \quad \nu = \frac{d}{d\tau}$$

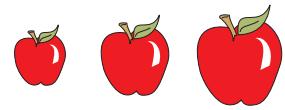


Formalisme hamiltonien

e.g. [Misner '70]



Diagonaliser $E_c \dots$



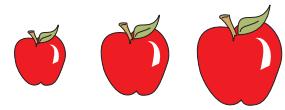
Formalisme hamiltonien

e.g. [Misner '70]



Diagonaliser $E_c \dots$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} := [q_1 \ q_2 \ q_3]^T = M \ [A_1 \ A_2 \ A_3]^T$$
$$\mathbf{p} := [p_1 \ p_2 \ p_3]^T = M \ [A'_1 \ A'_2 \ A'_3]^T$$



Formalisme hamiltonien

e.g. [Misner '70]



Diagonaliser E_c ...

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} := [q_1 \ q_2 \ q_3]^T = M \ [A_1 \ A_2 \ A_3]^T$$

$$\mathbf{p} := [p_1 \ p_2 \ p_3]^T = M \ [A'_1 \ A'_2 \ A'_3]^T$$

Les équations d'Einstein deviennent

$q'_{1,2} = -\nabla_{p_{1,2}} H$	$p'_{1,2} = -\nabla_{q_{1,2}} H$
$q'_3 = \nabla_{q_3} H$	$p'_3 = -\nabla_{p_3} H$

$$(x, y) := +x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

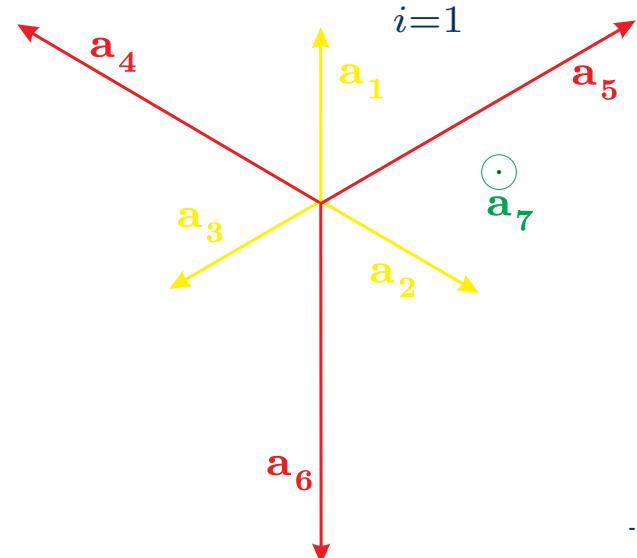
$$\langle x, y \rangle := -x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$$

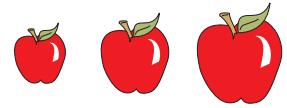
$$k_1 := 2n_1 n_2 \quad k_2 := 2n_1 n_3 \quad k_3 := 2n_2 n_3$$

$$k_4 := -n_1^2 \quad k_5 := -n_2^2 \quad k_6 := -n_3^2$$

$$k_7 = -4\varepsilon_o \chi$$

avec $H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \sum_{i=1}^7 k_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})}$



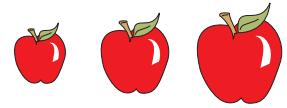


Intégrabilité

Système différentiel intégrable : Solutions régulières (Réciproque ?)

Deux méthodes utilisées :

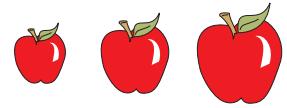
-  Montrer que la solution est analytique (série entière)
Théorie de Kovalewski-Poincaré
-  Montrer que le système admet suffisamment de quantités conservées
Théorie de Lax



Théorie de Kovalewski-Poincaré

Si $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ admet une solution autosimilaire (SAS)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[c_1 (t - t_o)^{-g_1}, \dots, c_n (t - t_o)^{-g_n} \right]^T \quad \mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$



Théorie de Kovalewski-Poincaré

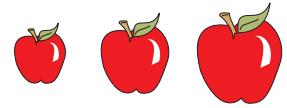
Si $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ admet une solution autosimilaire (SAS)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[c_1 (t - t_o)^{-g_1}, \dots, c_n (t - t_o)^{-g_n} \right]^T \quad \mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

alors le linéarisé au voisinage de $\tilde{\mathbf{x}}$ aussi

$$\mathbf{z} = \left[k_1 (t - t_o)^{\rho_1 - g_1}, \dots, k_n (t - t_o)^{\rho_n - g_n} \right]^T \quad \rho \in \mathbb{C}^n$$

Exposants de Kovalewski : $\{\rho\} = \text{Sp} [D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g})]$



Théorie de Kovalewski-Poincaré

Si $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ admet une solution autosimilaire (SAS)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[c_1 (t - t_o)^{-g_1}, \dots, c_n (t - t_o)^{-g_n} \right]^T \quad \mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

alors le linéarisé au voisinage de $\tilde{\mathbf{x}}$ aussi

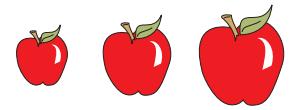
$$\mathbf{z} = \left[k_1 (t - t_o)^{\rho_1 - g_1}, \dots, k_n (t - t_o)^{\rho_n - g_n} \right]^T \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^n$$

Exposants de Kovalewski : $\{\rho\} = \text{Sp}[D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g})]$

Poincaré montre alors que

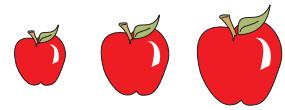
$$x_i(t) \propto (t - t_o)^{-g_i} S[(t - t_o)^{\rho_1}, \dots, (t - t_o)^{\rho_n}]$$

$\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{Q}^n$, suffit pour l'analyticité de $\mathbf{x}(t)$



Kovalewski & Bianchi

e.g. [Gavrilov et al.,94] ,[Pavlov,96], et [Szydłowski & Besiada,02]

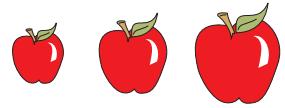


Kovalewski & Bianchi

e.g. [Gavrilov et al.,94] , [Pavlov,96], et [Szydłowski & Besiada,02]

Un nouveau changement de variables

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} \mapsto \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^7, u_{i=1,\dots,7} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^7, v_{i=1,\dots,7} := \exp(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}) \end{cases}$$



Kovalewski & Bianchi

e.g. [Gavrilov et al.,94] , [Pavlov,96], et [Szydłowski & Besiada,02]

Un nouveau changement de variables

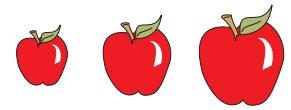
$$\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} \mapsto \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^7, u_{i=1,\dots,7} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^7, v_{i=1,\dots,7} := \exp(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}) \end{cases}$$

La dynamique devient

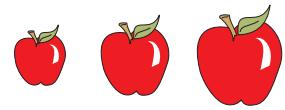
$$\forall i = 1, \dots, 7 \quad \begin{cases} v'_i = u_i v_i \\ u'_i = \sum_{j=1}^7 W_{ij} v_j \end{cases} \quad \text{avec } W_{ij} := -k_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$$

et admet une SAS $\tilde{\mathbf{x}} = [\lambda t^{-1}, \mu t^{-2}]^T$ pour chaque $[\lambda, \mu] \in \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7$ solution du système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^7 W_{ij} \mu_j = -\lambda_i \\ \lambda_i \mu_i = -2\mu_i \end{cases}$$



Un passage délicat !



Un passage délicat !

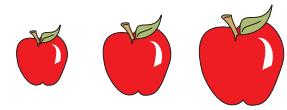
La matrice $W = [-k_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle]$ est simple ... ($\gamma = 2 - \Gamma$)

$$W := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1n_3 & -2n_3n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -2n_1n_2 & 0 & -2n_3n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ 0 & 0 & 4n_3n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ 0 & 4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -4n_1n_2 & 0 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -\gamma n_1n_2 & -\gamma n_1n_3 & -\gamma n_2n_3 & \frac{1}{2}\gamma n_1^2 & \frac{1}{2}\gamma n_2^2 & \frac{1}{2}\gamma n_3^2 & \frac{3\varepsilon_o\chi}{2}\gamma^2 \end{bmatrix}$$

et de rang 3, mais le système

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_{j=1}^7 W_{ij} \mu_j = -\lambda_i \\ \lambda_i \mu_i = -2\mu_i \end{cases}$$

admet 45 solutions non triviales ... !

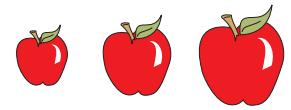


Un passage délicat !

Pour chaque solution, on construit la matrice de Kovalewski

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & W_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & W_{71} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & Id_7 & \ddots & \vdots & \vdots & & W & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & W_{17} & \cdots & \cdots & \cdots & W_{77} \\ \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 + 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_7 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_7 + 2 \end{bmatrix}$$

dont il ne reste plus qu'à trouver le spectre ...



Integrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

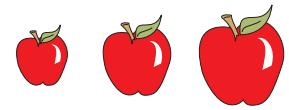


Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : B_{III} , $B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}

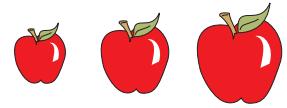


Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : B_{III} , $B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}



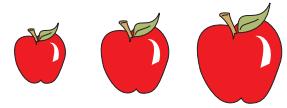
Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : B_{III} , $B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}

🍎 Vide et pour tout $\Gamma \in \mathbb{Q}$: $K_I \subset \mathbb{Q}$: |



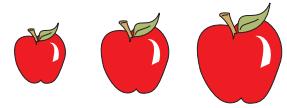
Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : B_{III} , $B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}

- 🍎 Vide et pour tout $\Gamma \in \mathbb{Q}$: $K_I \subset \mathbb{Q}$: |
- 🍋 Vide et matière raide : $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q}$: |



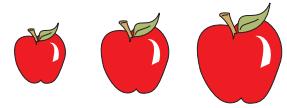
Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : B_{III} , $B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}

- 🍎 Vide et pour tout $\Gamma \in \mathbb{Q}$: $K_I \subset \mathbb{Q}$: |
- 🍐 Vide et matière raide : $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q}$: |
- 🍑 Matière $\Gamma \in \mathbb{Q} \cap [0, \Gamma_o]$: $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q}$: |



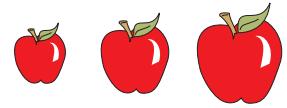
Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : $B_{III}, B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}

- Vide et pour tout $\Gamma \in \mathbb{Q}$: $K_I \subset \mathbb{Q}$: |
- Vide et matière raide : $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q}$: |
- Matière $\Gamma \in \mathbb{Q} \cap [0, \Gamma_o]$: $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q}$: |
- Matière $\Gamma \in [\Gamma_o, 2[$: $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{C}$: NI



Intégrabilité des Bianchi

[JP & Larena,07]

Univers de Bianchi : 4 classes d'équivalence pour Kovalewski

Classe I : B_I	Classe II : B_{II} et B_{IV}
Classe III : $B_{III}, B_{VI_{o,a}}$ et $B_{VII_{o,a}}$	Classe IV : B_{VIII} et B_{IX}

- 🍎 Vide et pour tout $\Gamma \in \mathbb{Q} : K_I \subset \mathbb{Q} : \text{ | }$
 - 🍐 Vide et matière raide : $K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q} : \text{ | }$
 - 🍑 Matière $\Gamma \in \mathbb{Q} \cap [0, \Gamma_o] : K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{Q} : \text{ | }$
 - 🍋 Matière $\Gamma \in [\Gamma_o, 2[: K_{II} \cup K_{III} \subset \mathbb{C} : \text{ NI}$
 - 🍎 Vide et pour tout $\Gamma \in [0, 2[: K_{IV} \subset \mathbb{C} : \text{ NI}$
- $$\Gamma_o := \frac{11 + \sqrt{73}}{3} \approx 0,82$$

$\Gamma = 0$: Champ scalaire

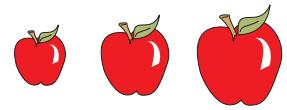
$\Gamma = 1$: Poussière

$\Gamma = 4/3$: GP Quant. ($\mu = 0$)

$\Gamma = 5/3$: GP Classique

$\Gamma = 2$: Matière raide

La singularité pourrait être chaotique...



En conclusion...

L'univers est peut-être né dans le chaos,
et va sans doute se terminer par une fuite en avant !