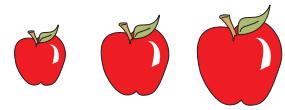


Relativité Générale



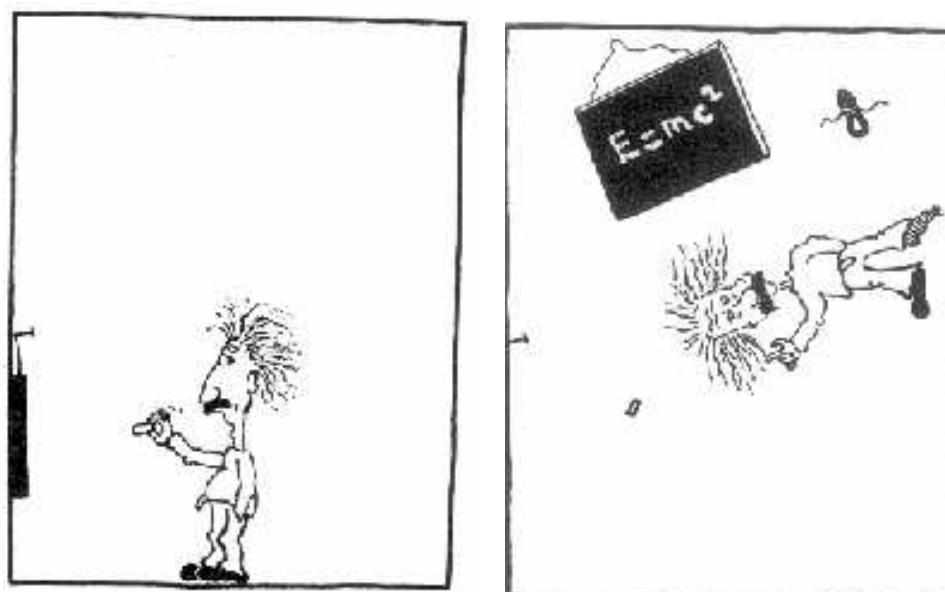
Relativité générale

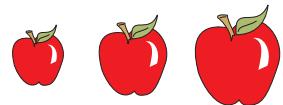
Principe d'équivalence

Dans un champ de gravitation uniforme \vec{g} (celui régnant dans tous les laboratoires de physique "normaux"), un corps ponctuel de masse m constante, voit son accélération \vec{a} vérifier l'équation

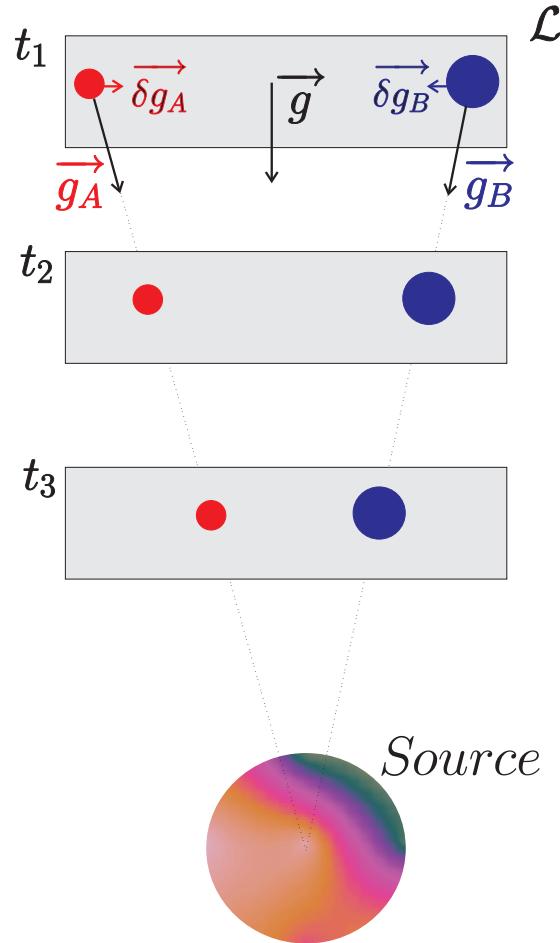
$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g} \quad (1)$$

$m_i = m_g \implies \vec{a} = \vec{g}$ il y a équivalence entre un champ de gravitation homogène et une accélération absolue : C'est la fameuse expérience de l'ascenseur d'Einstein.





Tout ceci n'est que local ...



"Un champ de gravitation peut être localement compensé par une accélération absolue" ou bien

"D'un point de vue local, il n'y a pas de différence entre un champ de gravitation et une accélération absolue"

Principe d'équivalence faible.



Conséquences du principe d'équivalence

\mathcal{R} en chute libre dans un champ de gravitation strictement uniforme : \mathcal{R} galiléen.

Par essence, un champ de gravitation ne peut être partout constant : Il faudrait qu'il soit nul partout ou bien associé à une masse infinie.

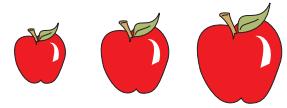
⇒ il n'existe pas un référentiel galiléen (on dit aussi inertiel) global couvrant tout l'univers !

Principe de relativité généralisé :

"Les équations de la physique s'écrivent de la même façon dans tous les référentiels"

Conséquences :

1. Transformation de Lorentz ⇒ n'importe quel type de transformation de système de coordonnées (en particuliers non linéaire ...)
2. Espace-temps de Minkowski (plat) à 4 dimensions ⇒ Variété de Riemann (courbe) de dimension 4 : A chaque point est associé un espace-temps plat de Minkowski à 4 dimensions ...



Application du principe d'équivalence

Mouvement géodésique

Particule libre de toute force autre que la gravitation ...

Principe d'équivalence : " il existe un référentiel inertiel local associé à des coordonnées ξ^α dans lequel les équations du mouvement sont celles d'une ligne droite dans l'espace temps ", c'est-à-dire

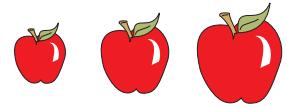
$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2)$$

$d\tau$ = élément de temps propre : $ds^2 = c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$.

Coordonnées inertielles locales $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu) \mapsto$ Coordonnées quelconques : x^μ , (2) devient

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$: Symbole de connexion affine.



Connexion affine et tenseur métrique

Coordonnées inertielles : $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$

Coordonnées quelconques : $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

en dérivant $g_{\mu\nu}$ par rapport à x^λ il vient ($\eta_{\alpha\beta} = \text{cste}$)

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \right) \quad (4)$$

qui s'écrit encore en utilisant la **définition du tenseur métrique**

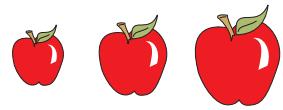
$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (5)$$

en se livrant à un petit jeu de permutation d'indices on obtient directement

$$\partial_\mu g_{\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} \quad \text{et} \quad \partial_\nu g_{\mu\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} \quad (6)$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ a ses deux indices du bas qui commuttent , ainsi

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} \\ &\quad - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} \\ &= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (7)$$

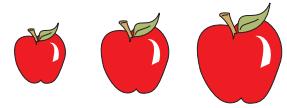


multipliant cette expression par la métrique inverse il vient

$$\begin{aligned} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) g^{\nu\sigma} &= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} g^{\nu\sigma} \\ &= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho \delta_\rho^\sigma \end{aligned} \tag{8}$$

nous avons donc explicité le symbole de connexion affine en fonction de la métrique et de ses dérivées premières, en notation à virgule, on a

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) g^{\nu\sigma} \tag{9}$$



La connexion affine n'est pas un tenseur !

connexion affine \longmapsto indices \longmapsto tenseur ?

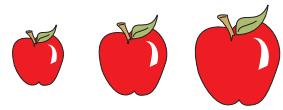
Test du changement de repère.

Dans le référentiel inertiel local ξ^α (x^μ) et $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$, passant de x^μ à x'^μ nous avons

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \right)\end{aligned}\tag{10}$$

en faisant apparaître la connexion dans le second membre, il vient

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\sigma\tau}^\rho \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}\tag{11}$$



Les objets $\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}$ ou bien $\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}$ sont tensoriels : généralisation non linéaire des transformations de Lorentz

$$\mathcal{A}^\alpha{}_\beta := \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\alpha{}^\beta := \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \quad (12)$$

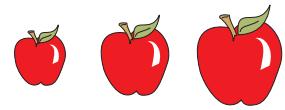
Sommation \Leftrightarrow indices rapprochés

La relation (11) s'écrit simplement

$$\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu} = \mathcal{A}_\mu{}^\tau \mathcal{A}_\nu{}^\sigma \mathcal{A}^\lambda{}_\rho \Gamma^\rho{}_{\sigma\tau} + \mathcal{A}^\lambda{}_\sigma \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \quad (13)$$

le **premier terme** de cette relation est donc manifestement covariant, la présence du **second terme** (inhomogène), ne permet donc pas au symbole de connexion affine d'accéder au statut tant recherché de tenseur.





Dérivée covariante

Nécessité d'une nouvelle dérivée

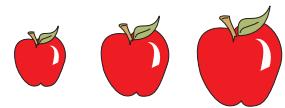
Dérivée d'un vecteur $\partial_\mu A^\nu =$ Objet tensoriel ?

Test : $V'^\mu = \mathcal{A}^\mu{}_\nu V^\nu$ et $\mathcal{A}^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$, ainsi en dérivant V'^μ par rapport à x'^λ il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial V^\nu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} + V^\nu \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x'^\lambda} \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + V^\nu \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x'^\lambda} \\ &= \mathcal{A}^\mu{}_\nu \mathcal{A}_\lambda{}^\rho \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + V^\nu \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x'^\lambda}\end{aligned}\tag{14}$$

... premier terme : manifestement covariant, mais le **second** ne l'est pas !





dérivée ... $\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \mathcal{A}^\mu{}_\nu \mathcal{A}_\lambda{}^\rho \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + V^\nu \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x'^\lambda}$ (15)

connexion ... $\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu} = \mathcal{A}_\mu{}^\tau \mathcal{A}_\nu{}^\sigma \mathcal{A}^\lambda{}_\rho \Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \mathcal{A}^\lambda{}_\sigma \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}$ (16)

un "petit" calcul fournit

$$\Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu} V'^\nu = \mathcal{A}_\mu{}^\tau \mathcal{A}^\lambda{}_\rho V^\sigma \Gamma^\rho_{\sigma\tau} - \mathcal{A}_\mu{}^\sigma V^\rho \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$$
 (17)

un peu d'astuce permet alors de voir que l'on a

$$\frac{\partial V'^\lambda}{\partial x'^\mu} + \Gamma'^\lambda{}_{\mu\nu} V'^\nu = \mathcal{A}^\lambda{}_\rho \mathcal{A}_\mu{}^\sigma \left(\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} V^\alpha \right)$$
 (18)

Il s'agit donc d'un objet tensoriel ... la dérivée covariante





En généralisant les notations $\partial_\alpha V^\beta = V^\beta_{,\alpha}$, on

$$\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho V^\alpha = \begin{cases} \partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho V^\alpha & := D_\sigma V^\rho \\ V^\rho_{,\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho V^\alpha & := V^\rho_{;\sigma} \end{cases} \quad (19)$$

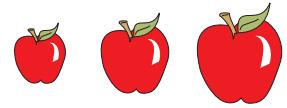
Propriétés

- 🍎 Linéarité : $(a A^\mu{}_\nu + b B^\mu{}_\nu)_{;\sigma} = a A^\mu{}_{\nu;\sigma} + b B^\mu{}_{\nu;\sigma}$
- 🍎 Identité de Liebniz du produit $(A^\mu{}_\nu B^\rho)_{;\sigma} = A^\mu{}_{\nu;\sigma} B^\rho + A^\mu{}_\nu B^\rho_{;\sigma}$
- 🍎 La dérivée covariante du tenseur métrique est nulle : $g_{\mu\nu} \in \ker(D_\lambda)$
- 🍎 La dérivée d'un scalaire est un objet tensoriel. Pour tout scalaire f on doit donc avoir $f_{,\sigma} = f_{;\sigma}$.
Tout scalaire s'écrit comme un produit scalaire : $f = V_\rho V^\rho$, on en déduit

$$D_\sigma V_\rho := V_{\rho;\sigma} = \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha V_\alpha \quad (20)$$

généralisation ...

$$D_\rho T^{\mu\nu}{}_\sigma := T^{\mu\nu}{}_{\sigma;\rho} = T^{\mu\nu}{}_{\sigma,\rho} + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu T^{\alpha\nu}{}_\sigma + \Gamma_{\alpha\rho}^\nu T^{\mu\alpha}{}_\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha T^{\mu\nu}{}_\alpha \quad (21)$$



Dérivée covariante le long d'une courbe

Tenseurs définis uniquement sur une courbe paramétrée , ... $Z^\mu := Z(x^\mu(\tau))$.
... changement de repère ...

$$Z'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} Z^\nu = \mathcal{A}^\mu{}_\nu Z^\nu \quad (22)$$

... dérivée par rapport au paramètre non covariante ...

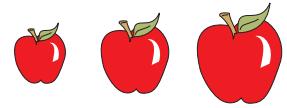
$$\frac{dZ'^\mu}{d\tau} = \mathcal{A}^\mu{}_\nu \frac{dZ^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} Z^\nu \quad (23)$$

⇒ Dérivée covariante le long d'une courbe paramétrée par τ ,

$$\frac{DZ^\mu}{D\tau} := \frac{dZ^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} Z^\nu \quad (24)$$

qui vérifie bien

$$\frac{DZ'^\mu}{D\tau} = \mathcal{A}^\mu{}_\nu \frac{DZ^\nu}{D\tau} \quad (25)$$



Mouvement géodésique

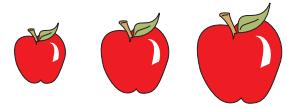
Mécanique classique : Particule libre $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ Mécanique relativiste : équation des géodésiques $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$. Remarque : dérivée covariante de la 4-vitesse par rapport au temps propre

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (26)$$

Ainsi l'équation des géodésiques ne dit pas autre chose que $\frac{Du^\mu}{D\tau} = 0$
Le mouvement **géodésique** est comme rien !

Principe de correspondance

<i>Relativité</i>	<i>Relativité</i>
<i>Restreinte</i>	<i>Générale</i>
→	
$\eta_{\mu\nu}$	$g_{\mu\nu}$
∂_μ	D_μ



Déviation géodésique : Courbure

2 géodésiques voisines (même abscisse curviligne ...) G (resp. $G + \delta G$) : ensemble des points M (resp. $M + \delta M$) de coordonnées $x^\mu(\tau)$ (resp. $y^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$) qui vérifient l'équation

$$\frac{D}{D\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad \text{resp. } y^\mu(\tau)$$

Le calcul montre que

$$\frac{D}{D\tau} \frac{d(x^\mu - y^\mu)}{d\tau} = \frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} + (\partial_\rho \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \delta x^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2\Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} = \mathcal{O}(\delta x^\mu) \quad (27)$$

au premier ordre, une réécriture permet d'avoir

$$\frac{D^2 (\delta x^\lambda)}{D\tau^2} = (\partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\eta\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\eta - \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\eta) \delta x^\mu \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (28)$$



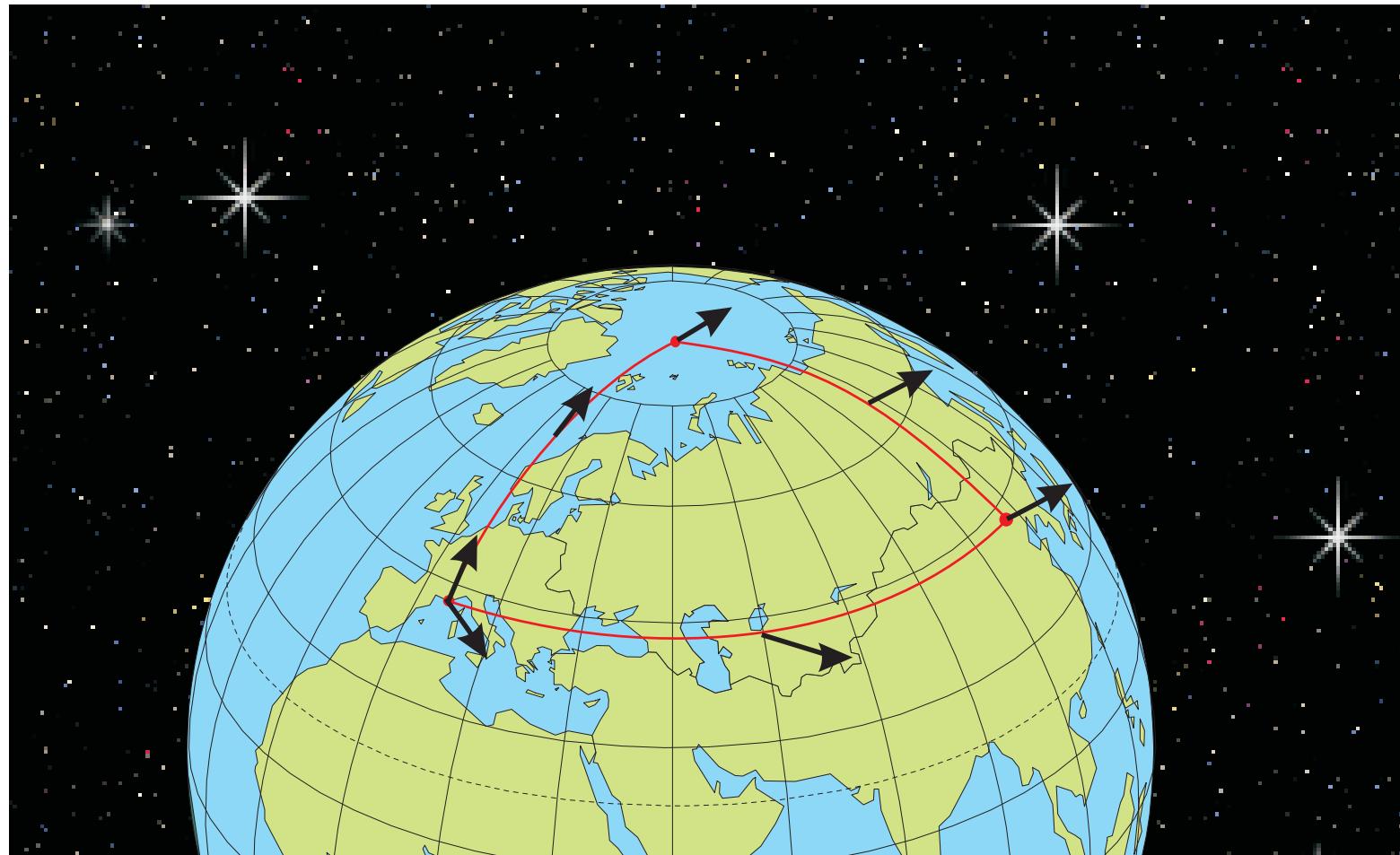
il suffit de poser

$$R^\lambda_{\nu\mu\kappa} := \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\eta\kappa} \Gamma^\eta_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\eta} \Gamma^\eta_{\mu\kappa} . \quad (29)$$

dont chacun peut vérifier qu'elle vérifie

$$\begin{aligned} [D_\alpha, D_\beta] A_\mu &:= D_\alpha D_\beta A_\mu - D_\beta D_\alpha A_\mu := A_{\mu;\alpha;\beta} - A_{\mu;\beta;\alpha} \\ &= R^\lambda_{\mu\alpha\beta} A_\lambda \end{aligned} \quad (30)$$

Le transport parallèle le long d'une courbe fermée ne laisse pas invariant un vecteur si la courbe n'est pas plane !





L'équation de déviation géodésique devient

$$\frac{D^2 (\delta x^\lambda)}{D\tau^2} = R^\lambda_{\nu\mu\kappa} \delta x^\mu \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (31)$$

le **tenseur de courbure de Riemann-Christoffel** \equiv force qui viendrait "rappeler" la particule sur la géodésique G lorsqu'elle s'écarte de la trajectoire "naturelle" de "chute libre".

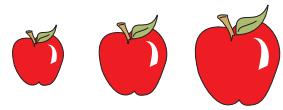
Propriétés de la courbure de Riemann-Christoffel

🍎 Antisymétrie 1 : $R^\lambda_{\nu\mu\kappa} = -R^\lambda_{\nu\kappa\mu}$

🍎 Courbure complètement covariante : $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\sigma\mu} R^\sigma_{\nu\alpha\beta}$
ou plus "explicitement"

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} [g_{\nu\lambda,\mu,\kappa} + g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\nu,\mu} + g_{\mu\kappa,\nu,\lambda}] \\ + g_{\eta\sigma} [\Gamma^\eta_{\lambda\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\lambda\kappa} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}] \quad (32)$$

🍎 Symétrie par paire d'indices : $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$



🍎 Antisymétrie 2 : $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$

🍎 Cyclicité : $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

🍎 Homogénéité : $R_{\lambda\lambda\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\mu\mu} = 0$

🍎 Identité de Bianchi : $R_{\mu\nu\alpha\beta;\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\lambda;\alpha} = 0$

🍎 Une contraction : Tenseur de Ricci

$$R_{\nu\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (33)$$

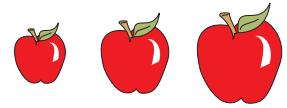
ou bien

$$R_{\nu\beta} = \Gamma_{\nu\lambda,\beta}^\lambda + \Gamma_{\nu\beta,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma \quad (34)$$

🍎 Deux contractions : courbure scalaire

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R^\beta_{\mu\beta\nu} \quad (35)$$

Exercice !!! Montrer que la courbure scalaire d'une sphère de rayon r est une constante $R = -2/r^2$. Indication $ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$



Une remarque remarquable

Identité de Bianchi : $R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0$

Comme $g_{\mu\nu} \in \ker(D_\lambda)$, en contractant chacun des termes de l'identité de Bianchi par $g^{\lambda\nu}$ il vient

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^\nu{}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (36)$$

Si l'on contracte à présent par $g^{\mu\kappa}$ il ne reste plus que

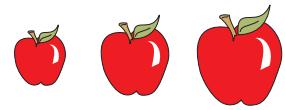
$$R_{;\eta} - 2R^\kappa{}_{\eta;\kappa} = 0 \quad (37)$$

quelques manipulations fournissent

$$\begin{aligned} R_{;\eta} - 2R^\kappa{}_{\eta;\kappa} = 0 &\Leftrightarrow \delta_\eta^\kappa R_{;\kappa} - 2R^\kappa{}_{\eta;\kappa} = 0 \\ \Leftrightarrow \left(R^\kappa{}_\eta - \frac{1}{2}\delta_\eta^\kappa R\right)_{;\kappa} = 0 &\Leftrightarrow g^{\eta\nu} \left(R^\kappa{}_\eta - \frac{1}{2}\delta_\eta^\kappa R\right)_{;\kappa} = 0 \\ \Leftrightarrow \left[g^{\eta\nu} \left(R^\kappa{}_\eta - \frac{1}{2}\delta_\eta^\kappa R\right)\right]_{;\kappa} = 0 &\Leftrightarrow \left[R^{\kappa\nu} - \frac{1}{2}g^{\kappa\nu} R\right]_{;\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

en introduisant le tenseur de rang 2 symétrique $G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R$ appelé tenseur d'Einstein, notre double contraction de l'identité de Bianchi montre donc que $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, c'est-à-dire :

$$G^{\mu\nu} \in \ker(D_\mu) \quad (39)$$



Equations d'Einstein

Remarques préliminaires

R1 Forme de l'action

Relativité restreinte \Rightarrow Equations de la physique : $S = \int \mathcal{L} d^4x$

\mathcal{L} : scalaire $\Rightarrow S$ covariant. En relativité générale ce n'est plus vrai ...!

Lors d'une transformation $x \rightarrow x'$

$$g'_{\mu\nu} = A_\mu{}^\rho A_\nu{}^\sigma g_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \quad (40)$$

en prenant le déterminant il vient $\frac{g'}{g} = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right|^2$ avec $g = \det g_{\mu\nu}$, $g' = \det g'_{\mu\nu}$ et
 $\left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right|$ le jacobien de la transformation.

ainsi

$$\sqrt{-g} d^4x = \sqrt{-g} \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| d^4x' = \sqrt{-g} \sqrt{\frac{-g'}{-g}} d^4x' = \sqrt{-g'} d^4x' \quad (41)$$

est un élément de volume covariant.

En relativité générale, les actions s'écrivent donc

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \quad \text{avec } \mathcal{L} \text{ scalaire} \quad (42)$$



R2 Nature de l'action

Relativité restreinte (Electromagnétisme)

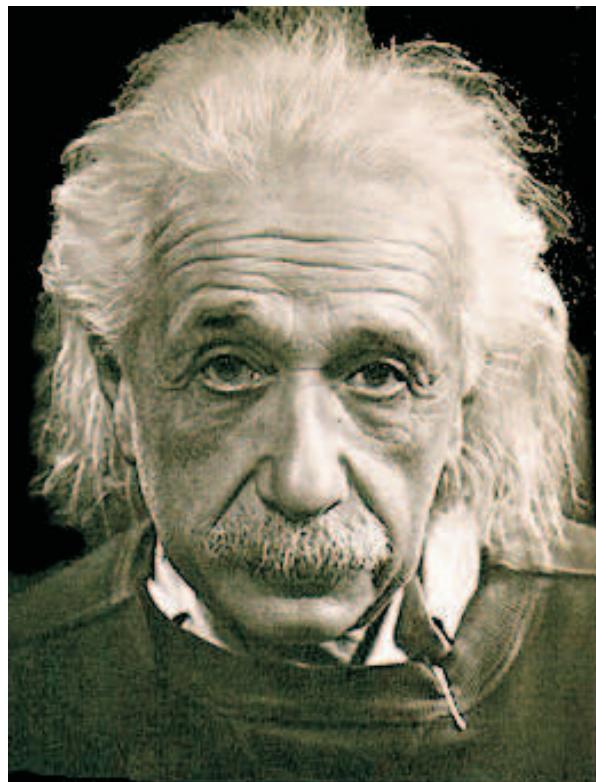
$$S = S_{pl} + S_i + S_{cl} = S_{matière}$$

Relativité générale (principe d'équivalence)

Gravitation \Rightarrow Courbure $\Rightarrow S_{courbure}$

$$S_{total} = S_{matière} + S_{courbure}$$

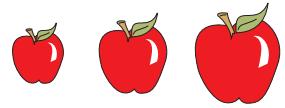
R3 Deux déductions possibles



à la Einstein



à la Hilbert



Déduction "à la Hilbert"

L'action de courbure et sa variation



$$\mathcal{L}_c = R \quad (\text{Hilbert, Ricci, Cartan, Weyl, ...})$$

ainsi $S_c = -\frac{1}{2\chi} \int R \sqrt{-g} d^4x = -\frac{1}{2\chi} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (43)$

χ : Constante à déterminer ...

$$\delta S_c = -\frac{1}{2\chi} \int \left[R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (44)$$

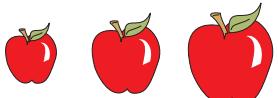
■ La variation $\delta(\sqrt{-g})$ est la variation d'une application composée :

$$\delta(\sqrt{-g}) = \delta \left([-\det g_{\mu\nu}]^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta[-\det g_{\mu\nu}]}{\sqrt{-g}} \quad (45)$$

Différentielle du déterminant $\delta[-\det A] = -D(\det A)(\delta A) = \text{tr}(-\tilde{A}^T \delta A)$ si

A est inversible, $\tilde{A}^T = \det A A^{-1}$ et $\delta[-\det A] = \text{tr}(-\det A A^{-1} \delta A)$.

... $A = g_{\mu\nu}$, $A^{-1} = g^{\mu\nu}$...



On obtient

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu} - \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (46)$$

- $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ nécessite plus d'attention ...
En fait ...

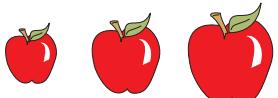
$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \frac{\partial(\sqrt{-g}a^\nu)}{\partial x^\nu} d^4x + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}b^\lambda)}{\partial x^\lambda} d^4x$$

avec $a^\lambda := g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, $b^\nu := g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$

et $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho} \right]$

sur le bord du domaine d'intégration (i.e. loin de la source de gravitation), l'espace est plat : $[g^{\mu\nu}]_{Bord} = [\eta^{\mu\nu}] \Rightarrow [\delta g^{\mu\nu}]_{Bord} = [\delta \eta^{\mu\nu}] = 0$.

L'affreux terme s'en va !



Finalement, en rassemblant les 2 résultats

$$\delta S_c = -\frac{1}{2\chi} \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (47)$$

On reconnaît le fameux tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$...

L'action de matière et sa variation

Elle est de la forme

$$S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x \quad (48)$$

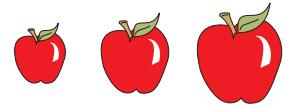
\mathcal{L}_m : Décrit le contenu matériel (impulsion+énergie) de l'espacetemps ...

On peut faire varier cette action générale ...

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \mathcal{L}_m \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int 2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \quad (49)$$

en introduisant le **tenseur énergie-implusion** , elle s'écrit

$$\delta S_m = \int \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (50)$$



Equations du champ gravitationnel

On annule la variation d'action totale : $\delta S_t = \delta S_c + \delta S_m = 0$

$$-\frac{1}{2\chi} \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (51)$$

C'est-à-dire $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$

Remarque $G_{\mu\nu} \in \ker D^\mu$ $T_{\mu\nu} \in \ker D^\mu$

Identité de Bianchi

Conservation de l'énergie-impulsion

Equation d'Einstein

\Leftrightarrow

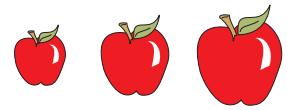
Les éléments de $\ker D^\mu$ sont proportionnels ...

Mais nous savons que $g_{\mu\nu} \in \ker D^\mu$, donc

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Λ : Constante cosmologique





Déduction "à la Einstein"

Electromagnétisme

$$\Delta\phi = \frac{1}{\epsilon_o}\rho$$

électrostatique

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow A^\mu \\ \rho &\rightarrow J^\mu\end{aligned}$$

↓

$$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_o J^\mu$$

électrodynamique

Gravitation

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho$$

gravitostatique

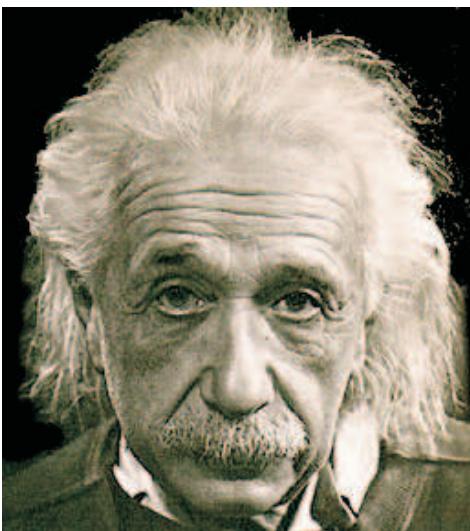
$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow g^{\mu\nu} \\ \rho &\rightarrow T^{\mu\nu}\end{aligned}$$

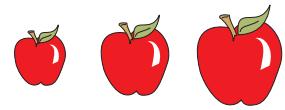
↓

$$\mathcal{O} g^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}$$

gravitodynamique

\mathcal{O} : opérateur différentiel du second ordre ...
Ricci travaille pour Einstein : $\mathcal{O} g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}$!!!





Qui est χ

Limite des champs faibles de la RG : Mécanique classique

🍎 Les vitesses sont faibles devant c

$$\left| \frac{dx^k}{dt} \right| \ll c \quad \text{et comme } x^0 = ct \quad \left| \frac{dx^k}{ds} \right| \ll \left| \frac{dx^0}{ds} \right| \quad (52)$$

🍎 La métrique est quasi-minkowskienne

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad \text{et} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll |\eta_{\alpha\beta}| \quad (53)$$

🍎 Champ stationnaire

$$\partial_0 h_{\alpha\beta} = 0 \quad (54)$$

à l'ordre le plus bas, l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad \text{devient} \quad \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \simeq 0 \quad (55)$$

$$\text{or } \Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\rho g_{00} = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\rho} + h^{\mu\rho}) \partial_\rho (\eta_{00} + h_{00}) \simeq -\frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} \partial_\rho h_{00}$$



L'équation des géodésiques s'écrit donc en champ statique faible

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\partial_\rho h_{00} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \quad (56)$$

Composante temporelle – Rappel $\eta = (+, -, -, -)$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = \frac{1}{2}\eta^{0\rho}\partial_\rho h_{00} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0 \quad \text{car } h \text{ est statique} \quad (57)$$

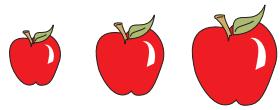
ainsi $\frac{dx^0}{ds} = \text{cste}$. Nous aurions pu nous en douter car $dx^0 = cdt$ et $ds = cdt \left(1 + v^2/c^2\right)^{1/2}$, et donc sous nos hypothèses $\frac{dx^0}{ds} \simeq 1$

Composante spatiale

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}h_{00} \cdot \overrightarrow{e_k} \quad \underset{ds^2 \approx c^2 dt^2}{\longmapsto} \quad \frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\overrightarrow{\nabla}h_{00} \cdot \overrightarrow{e_k}$$

PFD+Forces gravitationnelles : $\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\overrightarrow{\nabla}\psi \cdot \overrightarrow{e_k}$
par identification nous avons donc

$$h_{00} = \text{cste} + \frac{2\psi}{c^2} \quad \text{soit} \quad g_{00} = \eta_{00} + \frac{2\psi}{c^2} + \text{cste} . \quad (58)$$



Loin de la faible source de gravitation, $\psi = 0$ et l'espace est plat : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, donc $g_{00} = \eta_{00} = 1$. Ainsi

$$g_{00} = 1 + \frac{2\psi}{c^2}$$

Pour les autres composantes $g_{ik} = \eta_{ik}$, $g_{0i} = g_{i0} = 0$.



$$g_{\mu\nu} \rightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \rightarrow R$$



$$R^{00} - \frac{1}{2}g^{00}R = +\frac{2}{c^2}\Delta\psi$$

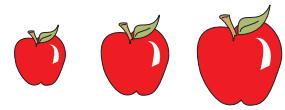
lorsque $\psi \ll c^2$ (limite newtonienne), si l'Univers est rempli d'un gaz parfait de densité massique ρ , on a $T^{00} \simeq \rho c^2$

La composante purement temporelle des équations d'Einstein s'écrit alors

$$R^{00} - \frac{1}{2}Rg^{00} = \chi T^{00} \Leftrightarrow \frac{2}{c^2}\Delta\psi = \chi\rho c^2$$

Equation classique correspondante : Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$, il convient donc de choisir

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$



Bibliographie

- **H. Weyl**, *Espace, temps, matière*, *Ed. A. Blanchard*, 1958 ❤
- **S. Weinberg**, *Gravitation and Cosmology*, *John Wiley& Sons*, 1972, ❤❤❤
- **R. Hakim**, *Gravitation relativiste*, *Collection savoirs actuels, Interéditions CNRS*, 1994, ❤
- **C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler**, *Gravitation*, *Freeman and co. Ed.*, 1973, ❤❤
- **L. Landau et E. Lifchitz**, *Cours de physique théorique, tome 2 : Théorie des champs*,
Editions MIR Moscou, 1989, ❤❤
- **M. Carmeli**, *Classical Fields : General relativity and gauge theory*, *John Wiley & Sons*,
1982, ❤❤
- **E. Elbaz**, *Relativité générale et gravitation*, *Editions Ellipses*, 1986, ❤❤