

# Festival d'astronomie de Fleurance 2004

Support pédagogique "Dymanique des galaxies"

Août 2004, Jérôme Perez

## Part I

### Le théorème du viriel

#### 1 Principe fondamental de la dynamique et énergies

C'est en 1666 qu'Isaac Newton compris que la variation de vitesse d'un mobile de masse  $m$  était due en totalité aux forces auxquelles il est soumis. Cela se traduit par le célèbre principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \sum \vec{F} \quad (1)$$

où  $\vec{v}$  désigne la vitesse du mobile, c'est-à-dire la dérivée de la position  $\vec{r}$  par rapport au temps

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} \quad (2)$$

$m$  sa masse,  $\sum \vec{F}$  représente la somme des forces appliquées au mobile, et  $d/dt$  désigne la dérivée par rapport au temps.

Ce principe est directement issu du principe de relativité de Galilée pour lequel "*le mouvement rectiligne uniforme est comme rien*", qui prétend de façon imagée qu'un corps libre (soumis à aucune force) adopte un mouvement rectiligne à vitesse constante, ou de façon encore plus imagée

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

Par un simple jeu d'écritures nous avons

$$m \vec{v} = \frac{d}{d \vec{v}} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) := \frac{dK}{d \vec{v}} \quad (4)$$

où l'on voit apparaître l'énergie cinétique

$$K := \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \quad (5)$$

Puisque nous évoquons les énergies, il est temps d'en venir à l'autre forme d'énergie mécanique qui fut introduite par Lagrange à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle : L'énergie potentielle. On peut la construire par des arguments dimensionnels.

Comme on le voit sur le principe fondamental de la dynamique une force est une masse multipliée par une longueur divisée par un temps au carré,  $MLT^{-2}$  comme on dit ... alors qu'une énergie est en  $ML^2T^{-2}$ , celà se voit simplement sur l'énergie cinétique. On peut donc "obtenir" une force en divisant une énergie par une longueur, on réalise habituellement ce genre d'exploit en faisant appel à de l'énergie potentielle  $U$  définie de telle manière que sa dérivée par rapport à une longueur corresponde à une force

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}} \quad (6)$$

le signe moins est conventionnel, il permet aux minima de l'énergie potentielle de correspondre à des équilibres dynamiques.

Energies cinétiques et potentielles sont tout à fait complémentaires : Dans les cas simples, l'énergie cinétique mesure la quantité d'énergie à fournir pour stopper un mobile. L'énergie potentielle ne dépend quant à elle que de la position et mesure la quantité d'énergie transmise par la force au mobile. Ces deux quantités s'associent en l'énergie mécanique  $E$  somme des deux précédentes

$$E = K + U \quad (7)$$

Cette association a de profondes origines physiques, au XVII<sup>ème</sup> siècle déjà Huygeens remarquait que l'énergie mécanique de certains systèmes était conservée. Lagrange, puis Emmy Noether montrèrent que c'était là une caractéristique de tous les systèmes isolés. On comprend mieux ces diverses énergies en observant le mouvement d'un pendule

Lors de son mouvement le mobile suspendu (pendule) converti constamment son énergie cinétique en énergie potentielle (et réciproquement), alors que son énergie mécanique reste constante.

Nantis de toutes ces connaissances nous pouvons écrire le principe fondamental de la dynamique sous sa forme énergétique (on regroupe les équations (6),(4) et (1))

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dK}{d\vec{v}} \right) = -\frac{dU}{d\vec{r}} \quad (8)$$

le terme de gauche de cette équation décrit le changement de la vitesse induit par la force qui est-elle même décrite par le terme de droite.

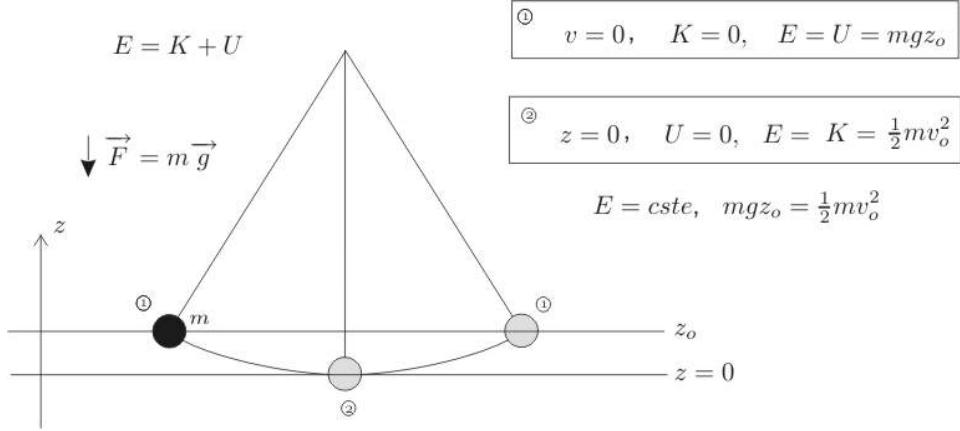


Figure 1: Mouvement et énergies du pendule linéaire

## 2 Fonctions homogènes

Un peu de mathématiques à présent ....

Il s'agit là d'un travail de Léonard Euler, qui date du milieu du XVIII<sup>ème</sup> siècle, et qui me semble donc accessible au commun des mortels. Considérons une fonction  $f$  d'une variable réelle  $x$ , continue et dérivable et qui vérifie la relation

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad (9)$$

où  $\alpha$  est un réel fixé. On dit alors que la fonction  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ .

En définissant la fonction  $g(x) = \lambda x$ , il est relativement simple de montrer que

$$\frac{d f(\lambda x)}{d\lambda} = \frac{d(f \circ g)(x)}{d\lambda} = \frac{dg(x)}{d\lambda} \left( \frac{df}{dx} \circ g \right)(x) = x \frac{df(\lambda x)}{dx} \quad (10)$$

en utilisant la propriété (9) on obtient d'autre part

$$\frac{df(\lambda x)}{d\lambda} = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x) \quad (11)$$

en identifiant les résultats (10) et (11) on obtient la relation

$$\alpha \lambda^{\alpha-1} f(x) = x \frac{df(\lambda x)}{dx} \quad (12)$$

qui est valable pour toutes les valeurs de  $\lambda$ , et donc en particuliers pour  $\lambda = 1$ , on a

$$\alpha f(x) = x f'(x) \quad (13)$$

ou  $f'$  représente la dérivée de la fonction  $f$ . Ce résultat constitue le théorème d'Euler. Il s'applique à toutes les fonctions homogènes, même celles de variables plus compliquées, il suffit d'adapter la notion de dérivée. Par exemple pour une fonction  $f$  de  $n$  variables  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , la dérivée devient le gradient

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{d\vec{x}} = \left( \frac{d}{dx_1}, \dots, \frac{d}{dx_n} \right), \quad (14)$$

mais le résultat demeure

$$\text{Si } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda^\alpha f(\vec{x}) \quad \text{alors} \quad \alpha f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) \quad (15)$$

où le  $\cdot$  désigne le produit scalaire connu de tous ...

### 3 Le théorème du viriel

Il est clair que l'énergie cinétique est une fonction homogène de degré 2. En effet,

$$K = K(\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \quad \text{ainsi} \quad K(\lambda \vec{v}) = \frac{1}{2}m\lambda^2\vec{v}^2 = \lambda^2 K(\vec{v}) \quad (16)$$

le théorème d'Euler donne alors

$$\vec{v} \cdot \frac{dK}{d\vec{v}} = 2K \quad (17)$$

En multipliant le principe fondamental de la dynamique par le vecteur position (produit scalaire), il vient

$$\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{dK}{d\vec{v}} \right) = -\vec{r} \cdot \frac{dU}{d\vec{r}} \quad (18)$$

on écrit alors la dérivée par rapport au temps du terme de gauche en deux termes (en utilisant la relation  $(fg)' = f'g + g'f$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{r} \cdot \frac{dK}{d\vec{v}} \right) - \frac{dK}{d\vec{v}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{r} \cdot \frac{dU}{d\vec{r}} \quad (19)$$

en faisant apparaître la vitesse (cf. équation (2)), et en explicitant une des dérivées de l'énergie cinétique (cf. équation (4)), cette relation devient

$$\frac{d}{dt} (m\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot \frac{dK}{d\vec{v}} = -\vec{r} \cdot \frac{dU}{d\vec{r}} \quad (20)$$

un simple calcul permet de vérifier que

$$\frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left( m \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} \right) \quad (21)$$

en injectant ce dernier remaniement dans (20) et en utilisant le théorème d'Euler appliqué à l'énergie cinétique (cf. équation (17)), cette relation devient

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} \right) = 2K - \vec{r} \cdot \frac{dU}{d\vec{r}} \quad (22)$$

Si l'énergie potentielle est une fonction homogène de degré  $\alpha$  de la position  $\vec{r}$  alors le théorème d'Euler stipule que

$$\vec{r} \cdot \frac{dU}{d\vec{r}} = \alpha U \quad (23)$$

sous cette hypothèse, nous obtenons le théorème du viriel

$$2K - \alpha U = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} \right) \quad (24)$$

Le terme dérivé deux fois par rapport au temps apparaissant à droite dans cette équation est appelé moment d'inertie du mobile de masse  $m$ , il devient dans le cas plus complexe d'un système composé de  $N$  particules la matrice d'inertie du système. Une chose est sûre, si le système est à l'équilibre, ce terme est nul<sup>1</sup>. Nous obtenons alors le théorème du viriel déduit par Jacobi au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle :

Pour tout système en *équilibre* soumis uniquement à des forces dérivant d'une énergie *potentielle homogène* de degré  $\alpha$ , on a la relation

$$2K = \alpha U \quad (26)$$

## 4 Une utilisation en astrophysique ...

En astrophysique nombreux sont les systèmes dont les propriétés globales sont le fruit quasi-exclusif de leur auto-gravitation : Depuis Newton, il est en

---

<sup>1</sup>Pour ceux qui auraient des problèmes avec la notion d'équilibre, on peut pour simplifier définir un état d'équilibre par cette propriété

$$\frac{d^2 I}{dt^2} := \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} \right) = \frac{d}{dt} (m \vec{v} \cdot \vec{r}) = 0 \quad (25)$$

effet bien connu que deux corps de masse  $m_1$  et  $m_2$  repérés par deux vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  s'attirent mutuellement sous l'effet de la force de gravitation

$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \quad (27)$$

ou  $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$  est la constante de gravitation de Newton, et  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  représente le module du vecteur  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , c'est-à-dire la distance entre les masses  $m_1$  et  $m_2$ .

Les amas ouverts, amas globulaires ou les galaxies de tous types sont des systèmes qui peuvent en première approximation<sup>2</sup> être assimilés à des ensembles isolés de  $N$  étoiles soumises à leur seule interaction gravitationnelle, la seule différence entre ces systèmes étant alors le nombre d'étoiles qui les composent. L'étoile numérotée  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) de chacun de ces systèmes subit une force totale de la part de toutes les autres qui peut s'écrire

$$\overrightarrow{F_{j \rightarrow i}} = -Gm_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad (28)$$

il n'est pas anodin de remarquer que, pour chaque étoile, on peut écrire

$$\overrightarrow{F_{j \rightarrow i}} = -\frac{dU}{d\vec{r}_i} \quad (29)$$

pour peu que l'on définit l'énergie potentielle gravitationnelle par la relation

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -\frac{G}{2} \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (30)$$

amusez vous à le vérifier un jour où vous vous ennuyez à la plage ...

Il est alors facile de voir que pour toute constante  $\lambda$  réelle, on a

$$\begin{aligned} U(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N) &= -\frac{G}{2} \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{|\lambda \vec{r}_i - \lambda \vec{r}_j|} = -\frac{G}{2\lambda} \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \lambda^{-1} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \end{aligned}$$

et que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un amas ouvert, globulaire ou d'une galaxie est une fonction homogène de degré  $-1$ . Comme quoi, tout vient à qui sait attendre ....!!!

---

<sup>2</sup>Nous ne discuterons pas ici de la validité de cette approximation qui fonctionne le mieux pour les amas globulaires et les galaxies elliptiques. Mais ceci est une autre histoire ...

Si l'on peut faire l'hypothèse que ces objets sont dans un état d'équilibre, ils se verront appliquer un théorème du viriel de la forme

$$2K = -U \quad (31)$$

Pour tirer tout le bénéfice de cette relation il ne reste plus qu'un petit travail de mise en forme.

Si nous supposons que toutes les étoiles du système que nous considérons ont à peu près la même vitesse  $V$  et à peu près la même masse  $m$  alors l'énergie cinétique totale se calcule aisément

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \approx \frac{1}{2} N m V^2 = \frac{M V^2}{2} \quad (32)$$

où  $M$  représente la masse totale du système considéré et  $N \gg 1$ . Pour l'énergie potentielle, c'est à peine plus compliqué

$$U = -\frac{G}{2} \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \approx -\frac{G m^2}{2} \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (33)$$

$$\approx -\frac{G m^2 N(N-1)}{2R} \approx -\frac{GM^2}{2R} \quad (34)$$

si  $R$  est la taille caractéristique du système considéré. Ainsi en regroupant les équations (31), (32) et (33), nous obtenons une relation qui s'avèrera incontournable dans l'étude des galaxies ou des amas

$$M V^2 = \frac{GM^2}{2R} \iff V^2 = \frac{GM}{2R} \quad (35)$$

Un objet auto-gravitant se caractérise globalement par la donnée de trois grandeurs : sa masse  $M$  exprimée en masse solaire ( $1M_\odot = 1,98 \times 10^{30} kg$ ), sa taille exprimée en années lumière ( $1Al = 9,46 \times 10^{15} m$ ) et la vitesse caractéristique de ses composants. Le théorème du viriel nous indique donc la relation entre ces trois grandeurs caractéristiques

$$V [km.s^{-1}] = 8,36 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{M [M_\odot]}{R [Al]}} \quad (36)$$

la vitesse dont nous parlons ici est la vitesse caractéristique des objets à l'intérieur du système considéré. La plupart des objets astrophysiques possèdent en outre un mouvement d'ensemble. Par exemple la galaxie

d'Andromède se dirige globalement vers la voie lactée, les amas globulaires tels que  $M13$  ou  $M15$  orbitent dans notre galaxie, etc...

Malgré toutes les approximations effectuées, ce théorème du viriel et la relation (36) qui en découle fournissent d'excellents ordres de grandeurs comme nous allons le voir.

#### 4.1 Amas ouverts

Dans la constellation du Taureau se trouve un amas d'étoiles connu depuis que l'homme observe le ciel tellement il est facile à repérer : L'amas des Pléïades, quarante cinquième composant du catalogue Messier, offre à l'oeil nu plus d'une dizaine d'étoiles. Une analyse plus poussée en dénombrement fait plusieurs centaines pour une masse totale de  $300 M_{\odot}$ , et une taille caractéristique de 11,41 années-lumières. La notion d'équilibre est discutable pour les amas ouverts, il s'agit en effet d'objets généralement jeunes et en pleine évolution. Ce type d'amas ne possède pas une masse suffisante pour créer un champ gravitationnel suffisamment intense pour pouvoir retenir les étoiles qui le composent. Comme tous les amas ouverts, les Pléïades sont donc vouées à disparaître de notre ciel futur. Une analyse directe de la trajectoire des étoiles montre clairement que dans quelques dizaines de millions d'années, les étoiles qui composent actuellement les pléïades ne seront plus liées. On peut tout de même faire l'hypothèse que se processus de lente dissolution est très progressif. Il se fait donc en passant par une succession continue d'états d'équilibres, dans chacun desquels il est possible d'appliquer le théorème du viriel.



L'amas des pléïades dans la constellation du Taureau.

$$\begin{aligned} M &= 300 M_{\odot} \\ R &= 11,41 Al \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 8,36 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{300}{11,41}} \\ &= 0,428 km.s^{-1} \end{aligned}$$

(37)

Le théorème du viriel donne une vitesse caractéristique des étoiles de  $0,428 \text{ km.s}^{-1}$ , alors que les observations par des méthodes spectroscopiques donnent une vitesse moyenne de  $0,430 \text{ km.s}^{-1}$ , quel accord miraculeux ...!

## 4.2 Amas globulaires

Notre galaxie, comme la plupart ses semblables, contient plus d'une centaine d'amas globulaires. Pour la plupart invisibles à l'oeil nu depuis la Terre, ces objets révèlent un spectacle inoubliable même dans de petits télescopes.

Depuis notre hémisphère nord, le plus célèbre est sans conteste l'amas d'Hercule. Distant d'environ 25 000 années lumière, ce dernier contient la bagatelle d'un demi million d'étoiles dans une taille caractéristique de quelques dizaines d'années lumière. Le champ gravitationnel ainsi créé assure une bonne cohésion aux étoiles et permet aux amas globulaires de résister pendant très longtemps aux divers harcèlements qu'ils reçoivent lors de leurs pérégrinations à l'intérieur de leur galaxie hôte. C'est ainsi que les amas globulaires font partie des objets les plus anciens de l'Univers. Leurs caractéristiques physiques (distribution de lumière, spectre, morphologie, ...) calmes et semblables, sont autant d'indicateurs de l'apparent état d'équilibre dans lequel on imagine que les amas globulaires se trouvent. L'absence de gaz, ou d'autres composantes que les seules étoiles font des amas globulaires d'excellents candidats d'application pour le théorème du viriel.



M13, amas globulaire de la constellation d'Hercule

$$\begin{aligned} M &= 1,995 \times 10^6 M_{\odot} \\ R &= 60 Al \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 8,36 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{1,995 \times 10^6}{60}} \\ &= 15,22 \text{ km.s}^{-1} \end{aligned}$$

(38)

Tout le problème dans cette relation est d'estimer la taille caractéristique de l'objet. Le calcul présenté ci-dessus est fait avec  $R = 6 \times R_{50} = 60 Al$ , où  $R_{50}$  représente le rayon contenant 50% de la masse de l'objet. Cette façon de procéder est issue d'un raisonnement statistique. D'autres calculs utilisent

directement  $R_{50}$  ou à l'inverse, le rayon de marée<sup>3</sup>  $R_T$  qui correspond à une limite plus physique mais souvent très exagérée. Pour  $R_{50}$  le calcul donne  $V = 8,28 \text{ km.s}^{-1}$ , pour  $R_T$  on trouve  $V = 37 \text{ km.s}^{-1}$ . La valeur moyenne observationnelle de  $12 \text{ km.s}^{-1}$  est en parfait accord avec l'ensemble de ces fourchettes.

### 4.3 Galaxies elliptiques

Le prototype des galaxies elliptiques connues du grand public est *M87* de la constellation de la Vierge dans l'amas de galaxies du même nom. Distante de nous d'environ 50 millions d'années lumière, cette galaxie est cependant relativement singulière par certains de ses aspects. Sa forme quasiment sphérique, qui la classe dans la catégorie *E0* (voir classification des galaxies), n'est pas extravagante. Cependant, le nombre colossal de ses amas globulaires (environ 4000) est quant à lui tout à fait atypique. Sa masse "visible" est de l'ordre de  $2,7 \times 10^{12} M_\odot$  et sa taille caractéristique de l'ordre de 60 000 *Al*. Ces observations montrent que plusieurs milliers de milliards d'étoiles composent cette galaxie qui contient en outre beaucoup de gaz chaud ( $10^{10} M_\odot$  à  $10^7 \text{ }^\circ\text{K}$ ). Des observations à grande longueur d'onde ont révélé que cette galaxie recèle un puissant "jet" lumineux qui s'étend du centre jusqu'à  $30^\circ$  vers le nord ouest. Ce jet est de plus collimaté sur une distance de l'ordre de 6000 *Al*. Ce jet pourrait trahir la présence au centre de *M87* d'un trou noir de plusieurs milliards de masses solaires !

De nombreuses caractéristiques de *M87*, comme la distribution des vitesses, les orbites des amas globulaires, la dynamique de la galaxie dans l'amas de la Vierge, mais surtout un désaccord notoire avec le théorème du viriel, laissent penser que la taille et la masse visibles ne correspondent pas à la masse

---

<sup>3</sup>Rayon au delà duquel les effets de marée due à l'objet deviennent négligeables.

et la taille réelles de cette galaxie.



M87, Galaxie elliptique de l'amas de la Vierge

$$\begin{aligned}
 M &= 2,7 \times 10^{12} M_{\odot} \\
 R &= 60\,000 \text{ Al} \\
 V &= 8,36 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{2,7 \times 10^{12}}{60\,000}} \\
 &= 560 \text{ km.s}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Ce résultat est peu en accord avec les observations qui fournissent une vitesse caractéristique moyenne de l'ordre de  $V = 333 \text{ km.s}^{-1}$ . Certains modèles prévoient que 99% de la masse de ce type de galaxies serait actuellement invisible (matière noire), galaxies qui verrait aussi leurs limites repoussées au delà des bords décellables sur les clichés actuels. Ces modèles qui attribuent une masse de  $3 \times 10^{13} M_{\odot}$ , donnent une taille virialisée de l'ordre du million d'année lumière ... Les galaxies elliptiques, plus précisément certaines d'entre elles, sont les plus grosses galaxies que nous connaissons.

#### 4.4 Galaxies spirales

Lorsque l'on cherche une galaxie spirale, point n'est besoin d'aller chercher bien loin ! La voie lactée qui nous abrite, est en effet une galaxie de ce genre. Nous y consacrerons un paragraphe entier tant elle nous permet d'apprendre de choses. Pour notre application du théorème du viriel, nous choisirons cependant sa voisine, la galaxie d'Andromède. L'obtention de ses caractéristiques globales est effectivement plus simple. Cette galaxie, 31<sup>ème</sup> specimen du catalogue Messier, est dans notre faubourg à seulement 2,5 millions d'années lumière du centre de la voie lactée. Les deux galaxies se rapprochent avec une vitesse relative de  $119 \text{ km.s}^{-1}$ , la collision des coeurs est pour dans un bon milliard d'années, patience ...! Le diamètre du disque de M31 est de l'ordre de 250 000 Al pour une masse visible de  $4 \times 10^{11} M_{\odot}$ , une paille face aux excès de M87 ! Le théorème du viriel donne avec ces

chiffres le résultat suivant :



M31, la galaxie spirale d'Andromède

$$\begin{aligned} M &= 4 \times 10^{11} M_{\odot} \\ R &= 125\,000 Al \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 8,36 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{4 \times 10^{11}}{125\,000}} \\ &= 149 \text{ km.s}^{-1} \end{aligned}$$

(40)

Ce résultat est en accord avec les observations qui donnent une vitesse moyenne dans le bulbe de  $M31$  de  $155 \text{ km.s}^{-1}$  (la courbe observationnelle est une exponentielle qui décroît de  $250 \text{ km.s}^{-1}$  au centre jusqu'à la valeur de  $70 \text{ km.s}^{-1}$  au bord du bulbe à 40 années lumières du centre). Il faut toutefois se méfier de cet accord apparent : l'analyse de la courbe de rotation des étoiles au sein des galaxies spirales met en évidence la présence incontournable d'un halo de matière noire dont la forme et la composition font actuellement l'objet d'âpres débats.

## Part II

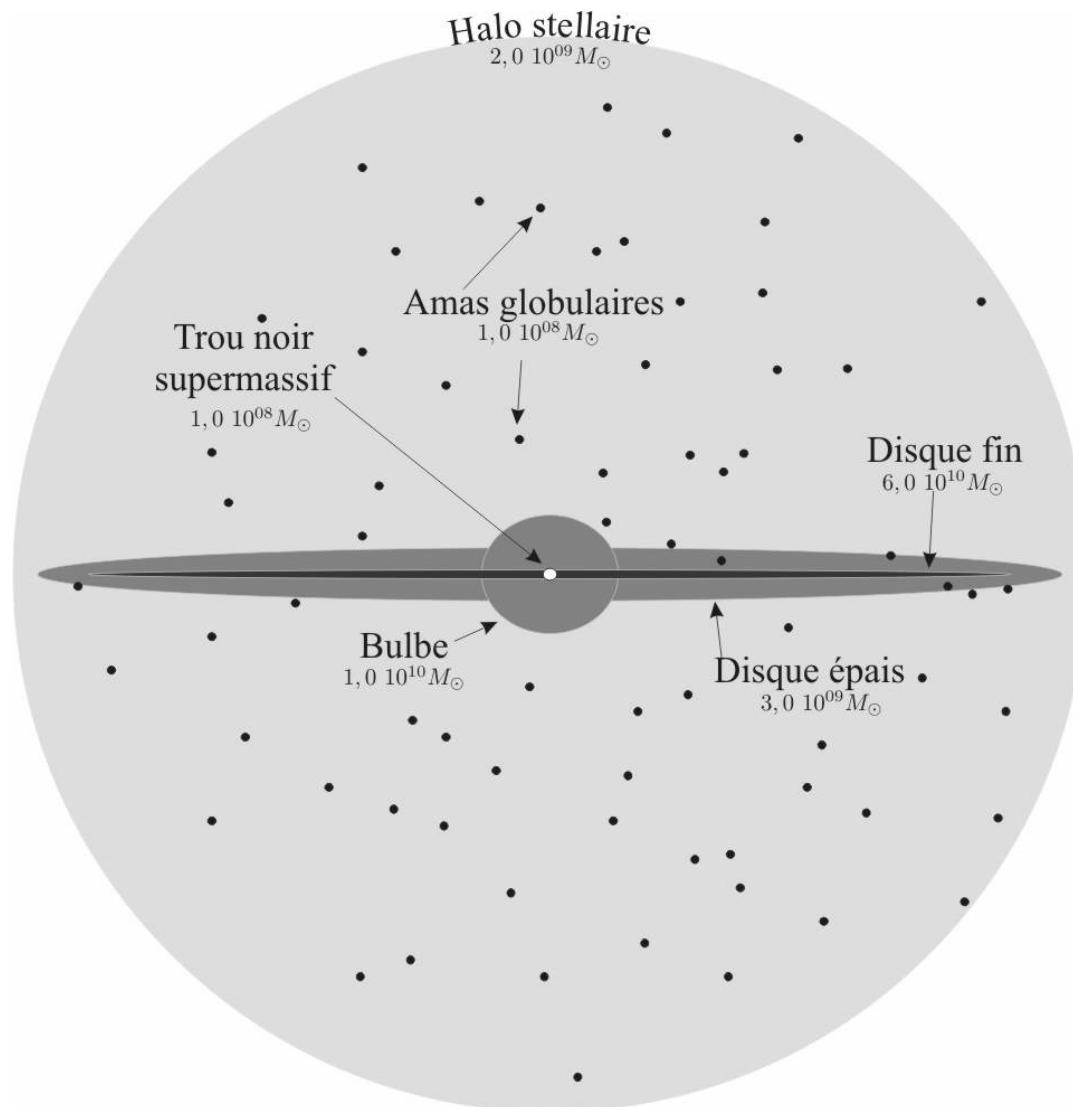
# La Voie Lactée

Si nous étions en dehors de notre galaxie, à quelques millions d'années lumière de celle-ci, nous pourrions certainement admirer, en regardant dans sa direction, un spectacle semblable à celui offert par la galaxie d'Andromède. Mais voilà, la Terre tourne autour du soleil et ce dernier tourne autour du centre de la Voie Lactée<sup>4</sup>. Nous observons donc la Voie Lactée de l'intérieur,

---

<sup>4</sup> Les périodes de rotation sont toutefois sensiblement différentes : Alors que la Terre fait sa révolution en un an, le Soleil met plusieurs dizaines de millions d'années pour boucler son orbite (qui ne se referme d'ailleurs pas ...)

et que voit-on : Si nous regardons dans la direction du disque nous observons une bande d'étoiles, dont la largeur dépend de l'épaisseur de celui-ci. Si nous regardons dans une autre direction, nous observons une répartition à peu près homogène d'étoiles correspondant au halo stellaire et aux étoiles du disque situées dans le voisinage solaire. Toutes les étoiles du ciel nocturne observables à l'oeil nu appartiennent à notre galaxie.



Comme toutes les galaxies spirales, la Voie Lactée (sa contrepartie visible en tout cas ...) se décompose en trois structures :

- Le bulbe central est une sorte de boule d'environ 2 kiloparsec de diamètre ( $kpc$ ,  $1pc = 3,26 Al$ ) contenant du gaz neutre et des étoiles le tout réparti de façon assez homogène. Le centre de ce bulbe est vraisemblablement occupé par un trou noir super massif d'environ  $3 \times 10^6 M_\odot$ . La masse totale du bulbe est d'environ  $10^{10} M_\odot$ .
- Le disque est la pièce maîtresse de la structure galactique. Il se décompose en deux parties imbriquées : le disque fin d'une centaine de parsecs d'épaisseur (325 pour être précis ...), et le disque épais dont la largeur moyenne est de l'ordre de 1,4  $kpc$ . Le disque fin est beaucoup plus dense que le disque épais, il contient de plus les étoiles les plus jeunes et la plus grande partie du gaz ( $0,5 \times 10^{10} M_\odot$  d'hydrogène essentiellement) contenu dans la galaxie : C'est la région principale de formation d'étoiles. Ces deux disques ont à peu près le même rayon, ils s'étendent jusqu'à 50  $kpc$  au delà du bulbe. La densité d'étoiles à l'intérieur du disque suit une loi exponentielle symétrique de part et d'autre du plan galactique

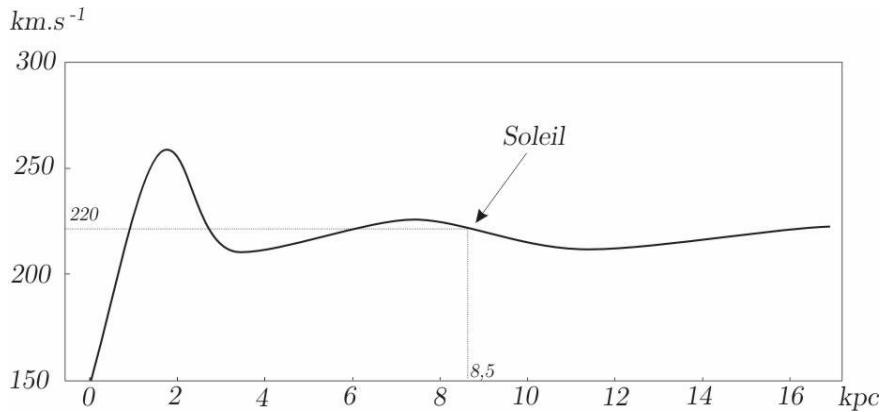
$$n(z) = n_o \left( e^{-z/0,325} + 0,02e^{-z/1,4} \right)$$

où  $z$  est l'altitude exprimée en  $kpc$ , et la densité dans le plan galactique  $n_o$  vaut environ 0,02 étoiles par parsec au cube. La masse totale du disque fin est de  $6 \times 10^{10} M_\odot$  alors que le disque épais est beaucoup moins lourd avec ses  $0,3 \times 10^{10} M_\odot$ . Le soleil se trouve dans le disque fin à 8,5  $kpc$  du centre et à une altitude de 30  $pc$ .

- L'ensemble bulbe-disques est entouré d'un halo d'étoiles à peu près sphérique, d'un rayon d'environ 60  $kpc$ , mais surtout beaucoup moins dense en moyenne car sa masse totale ne s'élève qu'à  $0,1 \times 10^{10} M_\odot$ . Ce halo stellaire contient essentiellement des étoiles très vieilles et la majorité des 150 amas globulaires abrités par notre galaxie. La densité d'étoiles dans le halo stellaire varie comme  $r^{-3,5}$ . Le halo stellaire s'estompe donc très vite avec la distance au centre.

Les trois structures listées ci-dessus sont observables par tous les moyens à la disposition des astronomes. La masse totale de ces trois structures est de  $9 \times 10^{10} M_\odot$ . La caractérisation de la vitesse des étoiles dans le disque montre cependant qu'il existe dans les galaxies spirales une autre composante dite de

matière noire. Si seule était présente la matière observable, les étoiles qui sont essentiellement concentrées dans le disque devraient être en orbite képleriene autour du bulbe. Leurs vitesses de rotation devraient donc décroître avec la distance au centre, comme celle des planètes dans le système solaire par exemple. En fait il n'en est rien et l'on observe dans notre galaxie la courbe de vitesse de rotation suivante



Ce type de courbe est d'ailleurs caractéristique de toutes les galaxies spirales.

Comment expliquer une telle courbe ?

L'explication la plus vraisemblable imaginée par les astrophysiciens est la présence d'un halo de matière invisible (matière noire), sphérique, qui engloberait toute la galaxie et dont la densité de masse suivrait la relation

$$\rho_{mn}(r) = \frac{C_o}{a^2 + r^2} \quad (41)$$

Cette répartition de matière noire fournit en effet une masse de la forme

$$M(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho_{mn}(x) dx = 4\pi C_o (r - \arctan(r/a)) \quad (42)$$

qui est donc directement proportionnelle au rayon  $r$  pour peu que celui-ci soit suffisamment grand devant  $a$ . L'équation de Poisson de la gravitation montre que la force de gravité produite par une répartition concentrique de masse est de la forme<sup>5</sup>

$$F(r) \propto -\frac{M(r)}{r^2}$$

---

<sup>5</sup> Parenthèse lyrique pour les aficionados : L'équation de Poisson relie le potentiel gravitationnel  $\psi$  et la densité de masse  $\rho$  via le laplacien :  $\Delta\psi = 4\pi G\rho$ . Si la répartition de masse est sphérique, ces deux fonctions sont radiales et le laplacien radial en trois

Ainsi pour une densité de matière noire de la forme (41) la force appliquée, en plus de l'attraction képleriene du bulbe, sur chaque étoile du disque est pour  $r \gg a$ , de la forme

$$F \propto -\frac{1}{r}$$

Il est bien connu en dynamique qu'une telle force produit un mouvement de rotation circulaire uniforme à vitesse constante, et donc une courbe des vitesses "plate".

Il donc suffit de "régler" les paramètres  $C_o$  et  $a$  pour que la force due à la matière noire l'emporte sur celle produite par le bulbe, et obtenir la courbe des vitesses observées... Dans la pratique, et pour la Voie Lactée, ces valeurs sont  $C_o = 4,6 \times 10^8 M_\odot/kpc^3$  et  $a = 2,5 kpc$ , ces valeurs produisent un halo de matière noire dont la masse atteint la valeur de  $1,3 \times 10^{12} M_\odot$  si ce dernier s'étend jusqu'à  $230 kpc$  du centre de la galaxie comme certaines études semblent le montrer ... Ainsi la masse visible de notre galaxie ne représenterait que quelques pourcents de sa masse dynamique réelle !

En plus d'expliquer la courbe des vitesses observées, ces mouvements de rotations circulaires uniformes lorsqu'ils sont perturbés, peuvent, dans certaines conditions compatibles avec les observations, produirent des ondes de densité que l'on soupçonnent d'être à l'origine des motifs en spirale qui caractérisent ce type de galaxies.

La nature est donc bien faite mais il reste cependant à comprendre la nature de cette fameuse matière noire. Mais ceci est une autre histoire ...

dimensions s'écrit

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right)$$

Comme la masse "sous les pieds" est l'intégrale de 0 à  $r$  de la densité, en intégrant l'équation de Poisson il vient

$$\int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) \times 4\pi r^2 dr = 4\pi G \int_0^r \rho(x) 4\pi x^2 dx$$

soit

$$\int_0^r \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) dr = GM(r) ,$$

en réalisant l'intégration à gauche il vient

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = GM(r)$$

et comme la dérivée du potentiel est proportionnelle à l'opposé de la force ....CQFD