

Les univers Jungle : et si l'univers n'était pas destiné à mourir de froid !

Jérôme Perez

29 août 2015

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | La découverte de l'expansion de l'univers par Hubble en 1929 | 1 |
| 2 | Le modèle standard de la cosmologie | 4 |
| 2.1 | Les équations de Friedmann | 4 |
| 2.2 | Différents type de fluides | 5 |
| 2.3 | Quelques solutions et problèmes du modèle standard | 6 |
| 3 | Vers de nouvelles dynamiques pour l'univers | 7 |
| 3.1 | La dynamique de Lotka-Voltera | 7 |
| 3.2 | L'univers comme un système de Lotka-Voltera généralisé. | 8 |
| 3.3 | Les univers jungle | 9 |

1 La découverte de l'expansion de l'univers par Hubble en 1929

Les galaxies sont apparues en tant qu'objet d'étude physique dans le premier quart du 20^e siècle. Les raisons d'un tel retard sont multiples. Il fallait tout d'abord une théorie qui puisse embrasser l'univers qui les abrite, et cette théorie est la relativité générale proposée par Einstein en 1915. Il fallait ensuite des données observationnelles précises qui n'arrivèrent qu'avec les grands instruments astronomiques comme celui du mont Wilson en Californie inauguré en 1904 doté d'un télescope de 1,5m de diamètre en 1908 et d'un de 2,5m en 1917. Ce dernier fut équipé de l'un des tous premiers interféromètres astronomiques en 1919.

Si la relativité générale est la théorie principale pour servir de cadre à la dynamique de l'Univers, il ne faut pas oublier pour autant la mécanique quantique qui permet notamment de comprendre la spectroscopie, outil fondamental dans la description des propriétés des galaxies.

Les galaxies sont constituées de centaines de milliards d'étoiles liées par le champ de gravitation qu'elles créent elles-mêmes. Le principal constituant des étoiles et donc des galaxies est l'hydrogène.

L'atome d'hydrogène est le plus simple, il est constitué d'un électron évoluant dans le champ électrostatique d'un proton. L'un des grands succès initiaux de la mécanique quantique fut de décrire complètement l'atome d'hydrogène : l'énergie de l'électron ne peut posséder que certaines valeurs bien précises limitées par une valeur inférieure, le niveau fondamental, et une valeur supérieure, l'énergie

de libération. Cet électron peut dans des conditions assez courantes passer d'un niveau à un autre en émettant ou en absorbant de la lumière ; la différence d'énergie donnant la longueur d'onde ou la fréquence de la lumière émise ou absorbée.

Comme il n'existe que certaines valeurs possibles de l'énergie, il n'existe que certaines valeurs possibles de longueurs d'onde pour la lumière émise ou absorbée par chaque atome d'hydrogène. Cette propriété se généralise pour tous les atomes et même pour les molécules.

L'ensemble de ces longueurs d'onde constitue le spectre de chaque atome, c'est une sorte de code génétique de l'atome qui permet de l'identifier. Pour l'atome d'hydrogène, ce spectre était bien connu dès la seconde moitié du 19^e siècle, mais c'est la mécanique quantique qui a permis de l'expliquer et de le comprendre.

Lorsque l'on compare le spectre de l'hydrogène que l'on peut obtenir dans un laboratoire sur terre à celui que l'on peut observer dans un télescope en provenance d'une galaxie on constate un décalage systématique et global. C'est Vesto Slipher qui fit cette remarque en 1925 grâce aux données de l'interféromètre installé au mont Wilson.

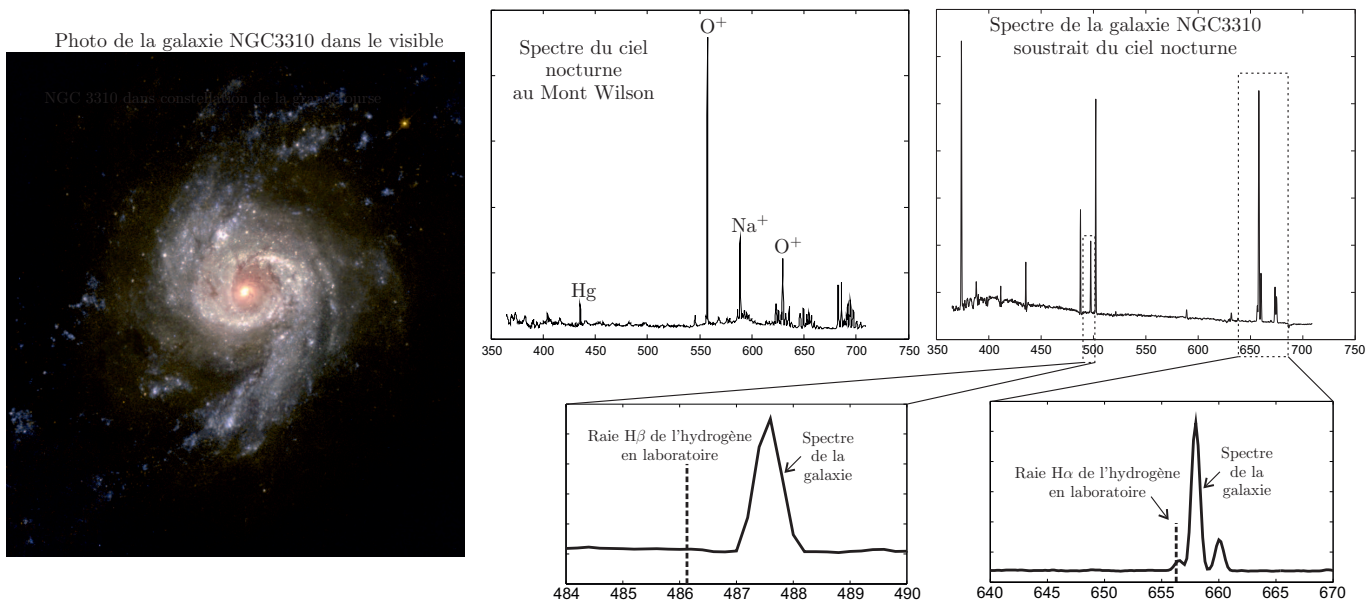


FIGURE 1 – Spectre de la galaxie NGC3310 - Les longueurs d'ondes en abscisse sont exprimées en nm.

Ce travail est délicat pour plusieurs raisons :

- Il est très difficile d'obtenir un spectre avec une bonne résolution pour un objet très peu lumineux comme l'est une galaxie.
- Le ciel nocturne est pollué par de nombreuses lumières parasites naturelles ou non.
- Le spectre de l'hydrogène est concentré dans l'ultraviolet pour lequel l'atmosphère joue le rôle d'un filtre (et c'est heureux pour l'espèce humaine...). Nous devons nous contenter des quelques raies présentes dans la région dite du visible (de 400 à 700 nanomètres de longueur d'onde).

Il existe une autre situation expérimentale dans laquelle une onde voit sa fréquence décalée, il s'agit de celle de l'effet Doppler. L'onde sonore émise par une ambulance nous apparaît plus aiguë (sa longueur d'onde est raccourcie) lorsqu'elle se rapproche de nous et plus grave (sa longueur d'onde est augmentée) lorsqu'elle s'éloigne. C'est la vitesse de la source de l'onde par rapport à nous qui est à l'origine de cet effet, plus elle est importante plus le décalage est grand. Hubble interpréta donc le décalage des raies de l'hydrogène des galaxies comme une vitesse caractérisant l'objet émetteur, et

donc la galaxie.

Pour connaître la distance des galaxies c'est un peu plus compliqué, en fait cela dépend des hypothèses que l'on fait ou des connaissances dont on dispose! En mettant en avant un certain nombre de considérations physiques, on peut connaître a priori la taille d'une galaxie. On peut également mesurer sa taille angulaire, c'est-à-dire l'angle sous lequel on l'observe. On peut ainsi en déduire sa distance. Par exemple si l'on connaît la taille de la tour Eiffel (301 m) et qu'on la voit sous un angle de 5° entre nos deux doigts, nous pouvons en déduire qu'elle se trouve environ à une distance de 3,5 km.

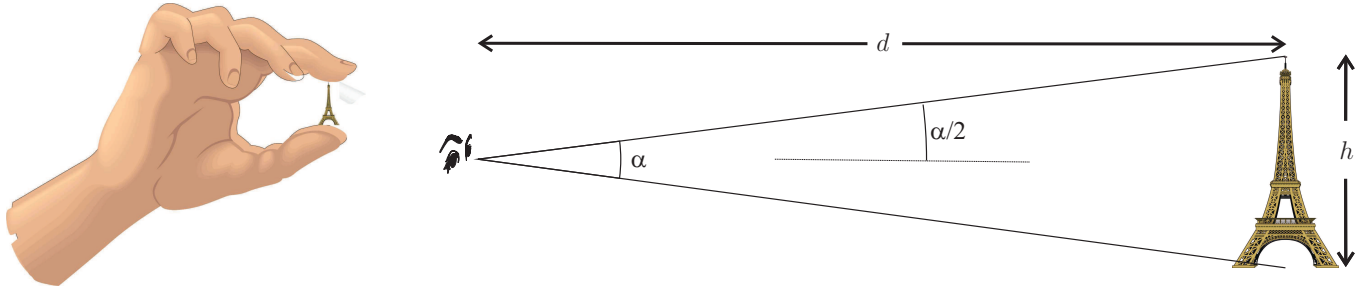


FIGURE 2 – Obtention de la distance connaissant la taille réelle d'un objet et sa taille angulaire

On peut aussi utiliser le fait que les galaxies sont des sources de lumière. Si on suppose que les galaxies d'un même type ont la même luminosité et qu'elles émettent leur lumière de la même façon dans toutes les directions de l'espace. L'intensité de cette lumière va décroître comme le carré de leur distance, cette luminosité se dépose en effet sur une surface au fil de sa progression à la vitesse de la lumière. Bien sûr si la source est continue, l'éclat le sera lui aussi, une fois qu'il nous sera parvenu.

Certaines étoiles pulsent (les céphéides), la période de cette pulsation est proportionnelle à leur luminosité. En observant leurs pulsations, on peut donc en déduire leurs distances. Ces étoiles sont très brillantes et on peut les voir dans certaines galaxies : on en déduit la distance de ces galaxies. Certaines étoiles explosent d'une manière très particulière, en émettant leur lumière de façon caractéristique. On les voit alors briller autant que toute la galaxie qui les abrite. Il s'agit des supernovæ de type 1A. Comme on connaît le mécanisme qui est à l'origine de cette explosion, on sait prévoir la quantité de lumière qui va être émise par cette explosion. La quantité de lumière que nous recevons sera divisée par le carré de la distance qui nous sépare de l'étoile et donc dans une bonne approximation de la galaxie.

Pour un ensemble de galaxies on trace, la vitesse (mesurée par le décalage de la longueur d'onde) et la distance (mesurée par ces diverses méthodes), et l'on trouve un diagramme dit de Hubble.

On remarque que plus les galaxies sont éloignées, plus elles s'éloignent de nous à grande vitesse!

L'interprétation de ce phénomène par Edwin Hubble fut de dire que l'univers est en expansion.

Pour bien comprendre ce qui se passe prenons un exemple unidimensionnel.

On attache les extrémités d'un élastique d'un côté à un mur et de l'autre côté au tambour d'une manivelle que l'on tourne par exemple à accélération constante. Les points de l'élastique s'écartent tous d'un facteur constant par unité de temps. Par exemple, toutes les distances sont multipliées par un facteur 2 chaque seconde. On représente 3 points sur cet élastique et on les voit s'éloigner les uns des autres.

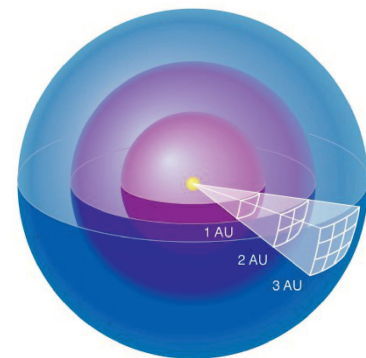
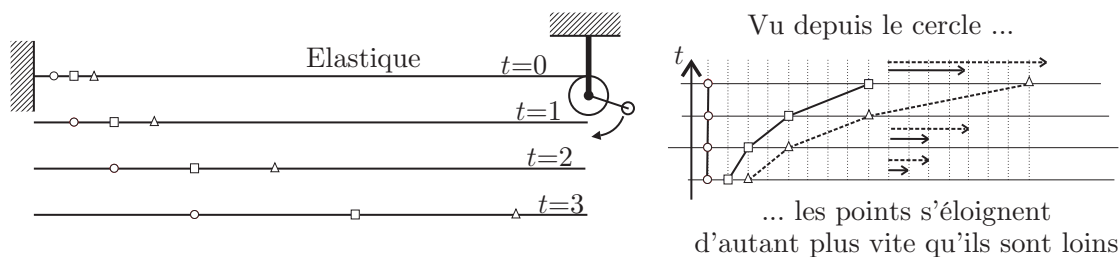


FIGURE 3 – Luminosité/Distance



On fait 4 photos de leurs positions à $t = 0, 1, 2$ et 3 secondes. Sur les photos, on aligne les 4 positions de l'un des points qui devient l'endroit d'où l'on observe. On peut alors mesurer la vitesse d'éloignement des autres points, par exemple, en dessinant des flèches entre deux positions successives. En comparant la longueur de ces flèches, on constate qu'un point s'éloigne d'autant plus vite qu'il est plus loin !

On explique qu'en fait les points sont immobiles mais que c'est l'élastique qui est en expansion.

Le facteur de multiplication des distances est le **facteur d'échelle**, dans le cas général il peut dépendre du temps, et il y en a un par dimension d'espace. Les galaxies sont donc « immobiles » comme les points sur l'élastique, mais le fait que l'univers soit en expansion nous fait observer une vitesse qui est pour chacune d'autant plus grande que la galaxie est éloignée. On peut même comprendre que la longueur d'onde (qui est effectivement la longueur entre deux ventres de l'onde considérée) est elle aussi étirée lors de cette expansion. On comprend donc que ce n'est pas l'effet Doppler habituel qui fait se décaler les longueurs d'onde vers la droite, mais bel et bien l'expansion de l'univers. Il faut dire que ces interprétations de ces expériences étaient en parfait accord avec les modèles produits par Alexandre Friedmann entre 1922 et 1924, ou bien par Georges Lemaître en 1927. Mais ils n'avaient jusque lors pas reçu l'approbation d'Albert Einstein qui préférerait un univers statique depuis 1917 et son premier modèle d'univers. Ce dernier reconnut les résultats observationnels et les modèles théoriques à partir de 1929. L'univers était bel et bien en expansion !

2 Le modèle standard de la cosmologie

2.1 Les équations de Friedmann

Le modèle cosmologique standard consiste en une description de l'univers par un fluide cosmologique de pression p et de densité volumique d'énergie ρ , ces deux grandeurs sont supposées ne pouvoir dépendre que du temps t . Les propriétés géométriques de l'univers et de ce fluide sont couplées par la relativité générale. Dans le cadre du modèle standard l'univers est homogène et isotrope. Il est possiblement en expansion isotrope et les distances radiales entre tous les points sont contrôlées par un facteur d'échelle $a(t)$. La géométrie de l'ensemble des points constituant l'univers à chaque instant (sa section spatiale) est déterminée par sa courbure spatiale k , elle est la même en chaque point. Si $k = 0$, les sections spatiales de l'univers sont planes. Deux autres cas sont également envisageables. Si $k > 0$ les sections spatiales de l'univers sont sphériques : par exemple, l'ensemble des points situés à une distance R d'un point donné à un instant t (un cercle de rayon R ...) est de longueur inférieure à $2\pi R$. Si par contre $k < 0$ les sections spatiales de l'univers sont hyperboliques : par exemple, à un instant t la somme des angles entre 3 points non alignés (un triangle...) est inférieure à π . La valeur de la courbure k des sections spatiales de l'univers est accessible aux observations cosmologiques, il semblerait qu'elle soit nulle.

Un volume V de l'univers contient une énergie $U = \rho V$. L'hypothèse d'homogénéité impose que la température de ce fluide peut dépendre du temps mais pas de la position considérée. Comme il n'y a ni gradient de température, ni transfert thermique net entre le fluide situé à l'extérieur de ce

volume et le fluide situé à l'intérieur, l'évolution de ce dernier est donc adiabatique. La première loi de la thermodynamique s'écrit alors

$$dU = -pdV \implies \frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0 \quad (1)$$

Comme le taux d'expansion des longueurs est $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$, celui des volumes est $3H$, plus explicitement on peut écrire

$$\frac{dV}{dt} = 3HV \quad (2)$$

Cette équation admet pour solution $V(t) a_0^3 = V_0 a^3(t)$ où a_0 et V_0 représentent respectivement le facteur d'échelle et le volume du fluide considéré à un instant particuliers, par exemple aujourd'hui. En combinant les relations (1) et (2) on obtient facilement

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (3)$$

qui constitue la seule équation du modèle standard de la cosmologie qui puisse être obtenue à partir de considérations semi-classiques.

Cette équation est en fait une conséquence des équations d'Einstein écrites dans le cadre d'un univers homogène et isotrope, appelées équations de Friedmann de la cosmologie. En notant par un point la dérivée temporelle, on admettra qu'elles s'écrivent

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{c^2}{3}\Lambda \quad (4a)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{c^2}{3}k + \frac{c^2}{3}\Lambda \quad (4b)$$

La constante k est la courbure de l'Univers, Λ est la constante cosmologique, ces deux grandeurs sont homogènes à l'inverse d'une longueur au carré. Les inconnues du problème de la dynamique de l'univers sont le facteur d'échelle $a(t)$ qui caractérise avec la constante de courbure k , les propriétés géométrique ; la densité volumique d'énergie $\rho(t)$ et la pression $p(t)$ du fluide contenu dans l'univers ; la constante cosmologique Λ est un des problèmes de la cosmologie moderne, nous allons voir que l'on peut l'incorporer dans un type de fluide aux propriétés assez particulières.

2.2 Différents type de fluides

Pour un type de fluide donné, on peut généralement relier la pression et la densité volumique d'énergie. L'exemple du gaz parfait est à ce titre très instructif. Un volume V contenant $N = n\mathcal{N}_A$ particules d'un gaz parfait de masse molaire M à la température T et à la pression P est décrit par la relation $p = \mu \frac{\mathcal{N}_A k_B T}{M}$ où $\mu = \frac{m}{V}$ est la densité volumique de masse de ce gaz. Par ailleurs, le théorème d'équipartition de l'énergie s'écrit pour ce gaz monoatomique $U = \frac{3}{2}Nk_B T$, on peut donc facilement trouver que $p = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{3}\rho$.

En considérant les propriétés microscopiques des particules qui constituent les fluides, les gaz ou même les solides, on peut généraliser l'équation d'état du gaz parfait à diverses situations toujours décrites par la relation $p = \omega\rho$ où la constante ω caractérise le fluide décrit.

Pour un gaz de pression nulle et n'interagissant que via la gravitation, appelé matière noire en cosmologie, nous aurons $\omega_d = 0$. Pour de la radiation, que l'on peut modéliser par un gaz parfait de photons, plusieurs approches sont possibles mais que ce soit les équations de Maxwell ou la statistique de Bose-Einstein, on trouve $p = \frac{1}{3}\rho$ et donc $\omega_r = \frac{1}{3}$.

La physique impose une limite supérieure à la valeur de ω . En effet, l'équation d'état $p = \omega\rho$ permet entre autres de calculer la vitesse de la propagation du son dans le fluide considéré, la valeur $\omega = 1$ correspond à une vitesse du son c_s égale à la vitesse de la lumière c ; ainsi, une valeur de $\omega > 1$ conduirait à $c_s > c$. Un fluide décrit par équation d'état de la forme $p = \rho$ est appelé matière hyper-rigide ou raide (stiff matter en anglais).

La première équation de Friedmann (4a) permet de voir qu'il existe potentiellement un type de fluide assez particulier. Si $p = \omega_e \rho$ avec $\omega_e < -\frac{1}{3}$, attendu que le facteur d'échelle $a(t)$ est positif, il est possible en fonction de la valeur de la constante cosmologique Λ d'avoir des situations dans lesquelles $\ddot{a} > 0$. Cette situation qui correspond à une expansion accélérée de l'univers est envisagée depuis une vingtaine d'année et l'observation systématique des supernovæ de naine blanches (type 1A). Cette matière à pression négative appelée énergie noire n'est pas si extravagante que cela. En physique quantique on montre que l'équation d'état d'un champ scalaire ne contenant aucune particules (vide quantique) est de la forme $p = -\rho$. Les conséquences expérimentales de ce type d'équation d'état se manifestent sous la forme de l'effet Casimir prévu théoriquement en 1948 et observé expérimentalement en laboratoire depuis la fin des années 1970. La constante cosmologique peut être associée à la présence d'un fluide possédant l'équation d'état du vide quantique. On appelle donc énergie noire un fluide dont l'équation d'état est $p = \omega_e \rho$ avec $-1 < \omega_e < -\frac{1}{3}$.

Dans le cadre d'une physique conservant un certain lien avec la réalité il est en revanche difficile d'envisager des fluides tels que $\omega < -1$.

2.3 Quelques solutions et problèmes du modèle standard

Dans le modèle standard de la cosmologie, le fluide contenu dans l'univers est décomposé en trois ensembles sans interactions qui occupent chacun tout le volume disponible : la matière noire d'équation d'état $p_d = \omega_d \rho_d$ avec $\omega_d = 0$, la radiation d'équation d'état $p_r = \omega_r \rho_r$ avec $\omega_r = \frac{1}{3}$ et l'énergie noire telle que $p_e = \omega_e \rho_e$ avec $-1 < \omega_e < -\frac{1}{3}$. Chacun de ces ensembles peut contenir plusieurs types de particules ou de fluides régis par la même équation d'état. Par exemple, le fond diffus cosmologique observé depuis plus de 40 ans par divers satellites (Cobe, Wmap, Planck) est un corps noir cosmologique prévu par le modèle standard et constitué par des photons reliques d'un ancien découplage entre le rayonnement et la matière; ce type de radiation sous forme de photons est sans doute complété par un autre rayonnement fossile, de neutrinos cette fois-ci, possédant la même équation d'état.

Une inspection minutieuse des équations de Friedmann¹ permet de se convaincre qu'il existe toujours un instant t_0 dans le passé tel que $a(t_0) = 0$, c'est le fameux Big-Bang.

En séparant dynamiquement chacune des contributions des différents fluides, l'équation de conservation de l'énergie (3) permet de voir que la densité de matière noire est telle que $\rho_d(t) a^3(t) = \text{cste}$. La densité d'énergie de ce type de matière baisse donc au cours de l'expansion de l'univers mais la quantité de matière reste constante, il s'agit d'un effet de dilution.

Lorsque la radiation est la composante dominante dans la densité d'énergie, on trouve alors que $\rho_r(t) a^4(t) = \text{cste}$. La radiation se dilue donc plus vite que la matière noire dans l'univers en expansion.

La capacité du fluide d'énergie noire à accélérer l'expansion de l'univers lui confère également une propriété qui peut paraître extravagante : il ne se dilue pas dans l'expansion de l'univers. Si l'on pense au vide (quantique), cette faculté à ne pas se diluer semble cependant normale, il faut toutefois se méfier de son intuition dans ce contexte.

1. Cette analyse est possible mais délicate si l'on conserve la constante cosmologique. Si l'on oublie ses effets dans un régime asymptotique, la conclusion est claire sachant que a et \dot{a} sont positifs et que dans ce régime $\ddot{a} < 0$.

Au final, ces facultés permettent d'appréhender l'histoire thermique de l'univers dans le modèle standard de la cosmologie. Dans les phases initiales de son évolution, l'univers est très chaud et la dynamique du fluide universel est dominée par la radiation. Étant donné que celle-ci se dilue plus vite que les autres type de fluides, cette domination va s'estomper au profit de la matière noire : il s'agit du découplage rayonnement matière qui conduit à l'émission d'un rayonnement de corps noir « libre » de toute interaction et que nous observons très clairement, le fond diffus cosmologique. Après ce découplage, qui s'est produit quelques centaines de milliers d'années après le Big-Bang, la domination de la matière noire a conduit à la formation des grandes structures cosmologiques jusqu'aux galaxies et aux étoiles. La dilution de cette matière noire dans l'expansion à plus récemment permis à l'énergie noire, réduite à l'inefficience jusque là par sa faible densité, d'opérer pour accélérer l'expansion de l'univers conformément aux observations. Son avenir dans ce contexte n'est alors pas joyeux, tout se finissant dans un grand dérapage glacé (appel Big Freeze ou Big Rip selon les cas) prévu dans un temps heureusement inimaginable...

Si ce scénario est à la fois simple et conforme à de nombreuses observations, il soulève cependant un certain nombre de questions. La première concerne la nature des composantes noires de l'univers. Un quart seulement de la densité de matière noire peut actuellement être imaginé sous forme de particules standard (dites baryoniques) le reste demeure observé mais hypothétique. Que dire par ailleurs de l'énergie noire dont les effets sont bien réels mais la nature complètement inconnue et spéculative ? Une seconde question se pose sur les propriétés physiques de ces différentes composantes du fluide cosmologique. Comment pourraient-elle coexister sans interagir, ce qui est l'une des hypothèses de base du modèle standard ?

Les univers jungles proposés en 2014 par une équipe de chercheurs franco-belges sont des modèles prenant en compte l'interaction des composantes du fluide cosmologique sans autre modification de leurs paramètres et compatibles avec les observations. Ils proposent une interprétation ludique des scénarios cosmologiques et de nouvelles possibilités pour le devenir de l'univers.

3 Vers de nouvelles dynamiques pour l'univers

3.1 La dynamique de Lotka-Volterra

Le système de Lotka-Volterra est constitué de deux équations différentielles couplées de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (+r_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 (-r_2 + a_{21}x_1) \end{cases}$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux fonctions de la variable t ; r_1, r_2, a_{12} et a_{21} sont quatre paramètres *positifs*. Il s'agit de l'un des modèles les plus simples pour décrire l'évolution dynamique d'une population de proies, dont le nombre est représenté par x_1 , en contact avec des prédateurs, dont le nombre est représenté par x_2 . Les paramètres de ce modèle ont une interprétation intuitive :

- r_1 (resp. r_2) est le taux avec lequel le nombre de proies (resp. prédateurs) augmente (resp. diminue) lorsqu'il n'y a pas de prédateur (resp. proies) ;
- a_{12} et a_{21} sont les paramètres de l'interaction entre les deux populations. Dans les systèmes écologiques ils sont reliés à la mobilité des proies et des prédateurs, la capacité d'esquive des proies ou l'agressivité des prédateurs, ou encore d'autres caractéristiques des populations concernées.

Les propriétés d'un tel système d'équations sont bien connues. Si les conditions initiales $x_1(t_0)$ et $x_2(t_0)$ sont positives, alors les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont périodiques. Les orbites du système

dans l'espace des configurations² sont confinées le long de courbes fermées concentriques et centrées sur le point d'équilibre $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \left(\frac{r_1}{a_{12}}, \frac{r_2}{a_{21}}\right)$. Ces courbes correspondent aux isovalues de la fonction de Ljapunov de ce système $V(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{12}x_2 - (r_2 \ln x_1 + r_1 \ln x_2)$. Comme il est facile de le vérifier, cette fonction est à la fois strictement concave et telle que $\frac{dV}{dt} = 0$, ce sont ces propriétés qui permettent de comprendre la dynamique de ce système.

Lorsque r_1 , r_2 , a_{12} et a_{21} ont des signes différents de la situation évoquée ci-dessus, le système décrit toujours des systèmes écologiques mais il s'agit alors de populations en compétition, symbiose, etc.

Les systèmes de Lotka-Volterra peuvent être rendus plus réalistes en introduisant des limitations à la croissance ou à la décroissance des populations. Le système plus réaliste décrivant l'interaction entre deux populations s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (+r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 (-r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \end{cases}$$

On parle de système de Lotka-Volterra généralisé. Les signes des deux nouveaux paramètres a_{11} et a_{22} sont toujours directement reliés aux propriétés du modèle physique décrit par le système. Lorsque toutes les constantes sont positives, le système admet un traitement général et les courbes fermées du système de Lotka-Volterra deviennent des spirales qui convergent vers le point d'équilibre ($\tilde{x}_1 \neq 0, \tilde{x}_2 \neq 0$) solution du système linéaire

$$\begin{cases} r_1 = +a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ r_2 = -a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

Si la matrice $A = (a_{ij})$ n'est pas inversible (on dit qu'elle est singulière) la situation est qualifiée de dégénérée et les équilibres se trouvent sur les axes $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Le vecteur $r = (r_1, r_2)$ est appelé « vecteur capacité ». On montre que si la matrice est singulière, l'équilibre se trouve sur l'axe correspondant à la composante la plus grande du vecteur capacité.

Le système de Lotka-Volterra ou sa version généralisée peuvent être étendu à un cas n -dimensionnel décrivant la dynamique de la cohabitation entre n espèces. S'il s'agit d'un véritable système de Lotka-Volterra n -dimensionnel (avec les bons signes), de nouvelles fonctions de Ljapunov peuvent être construites et la dynamique comprise. Dans le cas général, les seules situations simples sont celles des cas dégénérés pour lesquels le résultat bidimensionnel se généralise et le système converge presque sûrement vers un état d'équilibre situé sur l'axe indiqué par la composante la plus grande du vecteur capacité lorsqu'elle est unique.

3.2 L'univers comme un système de Lotka-Volterra généralisé.

La densité totale d'énergie présente dans le fluide remplissant l'univers est $\rho_{\text{tot}} = \frac{3c^2}{8\pi G} H^2$. On peut ainsi procéder à un changement de variable faisant apparaître l'abondance relative de chacun des types de fluides présents dans l'univers, i. e. $\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho_{\text{tot}}} = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \rho_x$ où l'indice x représente, selon le cas, la matière noire ($x = d$), l'énergie noire ($x = e$), la radiation ($x = r$) ou tout autre fluide faisant partie de ce mélange. En élargissant cette notation à la densité de courbure en posant $\Omega_k = -\frac{k}{3a^2 H^2}$ et en utilisant une nouvelle variable $\lambda = \ln(a(t))$ en lieu et place du temps t dans les équations de

2. L'espace des configurations d'un système physique est l'ensemble des positions accessibles pour tout temps t par ce système. Par extension, l'espace des configurations du système de Lotka-Volterra est l'ensemble $\Gamma = \{x_1(t), x_2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. L'espace de configuration est une partie de l'espace des phases qui s'étend aux vitesses.

Friedmann, celles-ci se récrivent :

$$1 = \Omega_k + \sum_{x=b,d,e,\dots} \Omega_x \quad (5a)$$

$$\text{Pour tous les types de fluides présents } x = b, d, e, \dots \quad \Omega'_x = \Omega_x \left[-1 - 3\omega_x + \sum_{y=b,d,e,\dots} (1 + 3\omega_y) \Omega_y \right] \quad (5b)$$

La première de ces équations (5a) indique la conservation globale de l'énergie, comme elle n'est pas dynamique on peut la voir comme une contrainte imposée à chaque instant aux équations 5b. L'ensemble des équations (5b) dans lesquelles ' indique la dérivée par rapport à la nouvelle variable λ constitue ainsi un système de Lotka-Volterra généralisé à n dimensions. Le nombre de dimensions correspond aux nombres de composantes du fluide cosmologique ; pour tout entier p compris entre 1 et n , la p -ième composante du vecteur capacité est $-1 - 3\omega_p$; la matrice $(n \times n)$ de ce système possède toutes ses lignes identiques, elle n'est donc jamais inversible.

Le système de Lotka-Volterra généralisé (5b) ne fait pas intervenir la variable Ω_k , cette propriété permet d'interpréter la dynamique comme une compétition entre les divers fluides contenus dans l'univers qui se disputent sa courbure.

Dans le contexte du système de Lotka-Volterra on peut facilement retrouver le résultat final présenté dans la section 2.3 : la matrice A de ce système n'étant pas inversible, la physique imposant la relation d'ordre $-1 < \omega < 1$ et les observations imposant une constante cosmologique telle que $\omega_\Lambda = -1$, on en déduit que le destin de l'univers est de se retrouver asymptotiquement dans un état où le fluide est dominé par cette constante cosmologique et donc en accélération accélérée.

L'hypothèse consistant à supposer que les différents fluides composant l'univers l'emplissent sans interagir semble bien académique. Dans le formalisme standard de la cosmologie, l'intégration de couplages entre les fluides n'est pas chose aisée. Dans sa version « Lotka-Volterra » c'est beaucoup plus simple et les solutions correspondantes deviennent alors bien plus variées d'un point de vue dynamique. La compétition pour se partager la courbure possède des issues bien plus diverses, les modèles correspondants ont été nommés univers jungle par leurs découvreurs [J. Perez et al., Gen. Rel. & Grav., 46, 1753, 2014] en référence à la loi du même nom...

3.3 Les univers jungle

Même si le couplage entre les fluides emplissant l'univers semble inévitable, l'équation de conservation de l'énergie impose une contrainte dans leur forme : un couplage entre le fluide de type i et le fluide de type j peut être modélisé par l'introduction d'un coefficient ε_{ij} dans l'équation décrivant le comportement de Ω'_i ; mais il faudra alors qu'un coefficient $-\varepsilon_{ij}$ apparaisse dans celle décrivant le comportement de Ω'_j . Si l'univers homogène et isotrope contient n fluides en interaction³ chacun décrit par une équation d'état de la forme $p = \omega_i \rho$, les équations d'Einstein de sa dynamique s'écrivent alors

$$\begin{cases} \Omega'_1 = \Omega_1 (r_1 + a_{11}\Omega_1 + \dots + a_{1n}\Omega_n) \\ \Omega'_2 = \Omega_2 (r_2 + a_{21}\Omega_1 + \dots + a_{2n}\Omega_n) \\ \vdots \\ \Omega'_n = \Omega_n (r_n + a_{n1}\Omega_1 + \dots + a_{nn}\Omega_n) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{r} = [-1 - 3\omega_1, \dots, -1 - 3\omega_n]^\top \\ a_{ij} = 1 + 3\omega_j + \varepsilon_{ij} \end{cases}$$

L'équation de conservation étant assurée par la propriété $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$.

3. La nature précise de cette interaction n'est pas décrite ici. Elle n'est pas la plus générale que l'on puisse considérer mais elle répond à de nombreuses exigences tant observationnelles que théoriques.

Étudions plus en détail un cas particuliers tout à fait intéressant dans lequel l'univers voit ses composantes sombres (énergie noire et matière noire) couplées. Cette possibilité est envisageable voire préconisée par de nombreux modèles théoriques de ces formes de fluides. En laissant de coté la dynamique des autres composantes présentes dans le fluide cosmologique (il suffit pour cela de se placer dans une certaine limite) la dynamique du système s'écrit

$$\begin{cases} \Omega'_d &= \Omega_d [-1 + \Omega_d + (1 + 3\omega_e + \varepsilon)\Omega_e] \\ \Omega'_e &= \Omega_e [-1 - 3\omega_e + (1 - \varepsilon)\Omega_d + (1 + 3\omega_e)\Omega_e] \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon \geq 0 \\ \omega_e \in [-1, -\frac{1}{3}] \end{cases}$$

Ce système n'est pas le plus canonique des systèmes de Lotka-Volterra généralisé mais il est possible de l'étudier complètement. Si $\varepsilon > 0$, le système n'est pas dégénéré et il possède un équilibre dont les composantes ne sont pas nulles :

$$(\tilde{\Omega}_d, \tilde{\Omega}_e) = \left(-\frac{3\omega_e + 1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Si le couplage est suffisant, i.e. $\varepsilon > |3\omega_e|$, cet équilibre n'est pas instable et l'on peut former une fonction de Ljapunov

$$V_{\varepsilon, \omega_e}(\Omega_d, \Omega_e) = \left[\Omega_d^{-\frac{1+3\omega_e}{\varepsilon+3\omega_e}} \Omega_e^{\frac{1}{\varepsilon+3\omega_e}} (\Omega_d + \Omega_e - 1) \right] - 1 \text{ qui est}$$

bien concave et telle que $V'_{\varepsilon, \omega_e} = 0$ pour toute la dynamique. Les variables Ω_d et Ω_e évoluent donc sur les lignes de niveaux de la fonction $V_{\varepsilon, \omega_e}(\Omega_d, \Omega_e)$. Celles-ci sont représentées sur la figure 4.

Lorsque l'on prend en compte d'autres composantes non couplées du fluide cosmologique comme par exemple un gaz parfait de baryons (Ω_b) et de la radiation (Ω_r) on peut montrer que la dynamique ne s'en trouve que très peu affectée. Après une phase transitoire au cours de laquelle les densités de ces composantes non couplées s'estompent, dans son espace des configurations, le système se rapproche d'un plan « sombre » dans lequel seules les variables Ω_d et Ω_e évoluent selon les résultats de l'analyse bi-dimensionnelle présentée ci-dessus. Cette dynamique est illustrée par les solutions numériques présentées sur la figure 5.

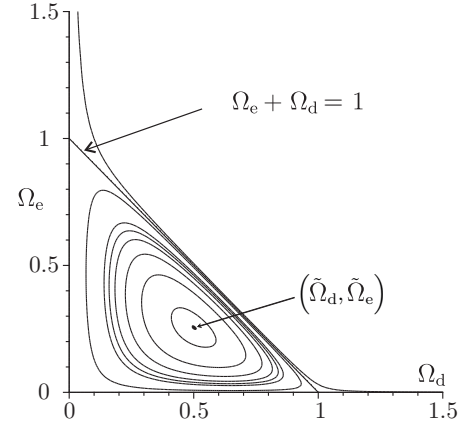


FIGURE 4 – Isovaleurs de $V_{\varepsilon, \omega_e}(\Omega_d, \Omega_e)$

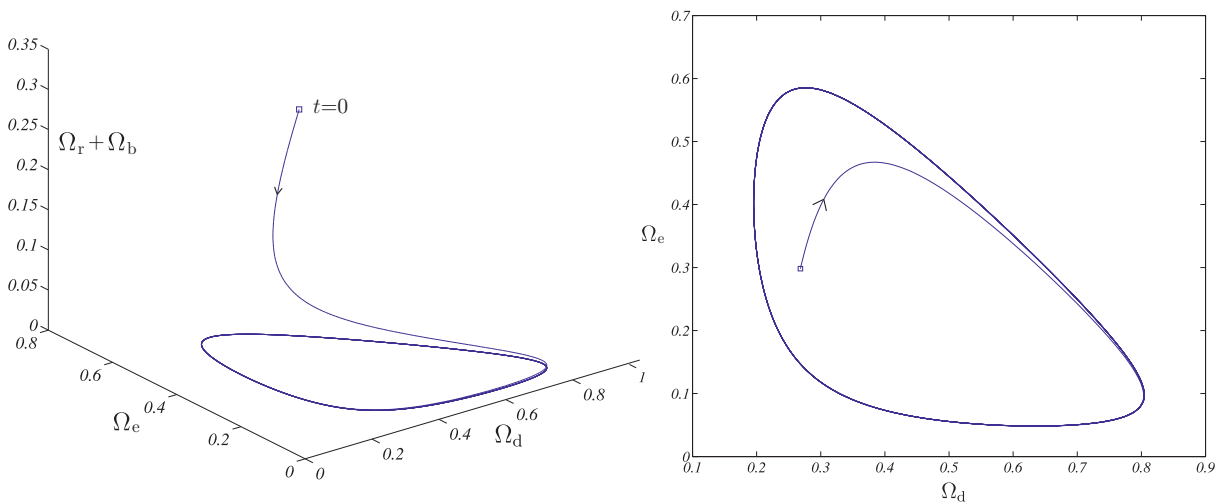


FIGURE 5 – Dynamique d'un univers jungle dont les deux composantes sombres sont couplées

Dans une telle jungle, le destin de l'Univers n'est plus aussi froid et expansif que dans le modèle standard, mais il converge vers un cycle limite. Le triste Big Freeze est alors remplacé par un joyeux et éternel Big Boogie !