Exercícios Revisão para P1

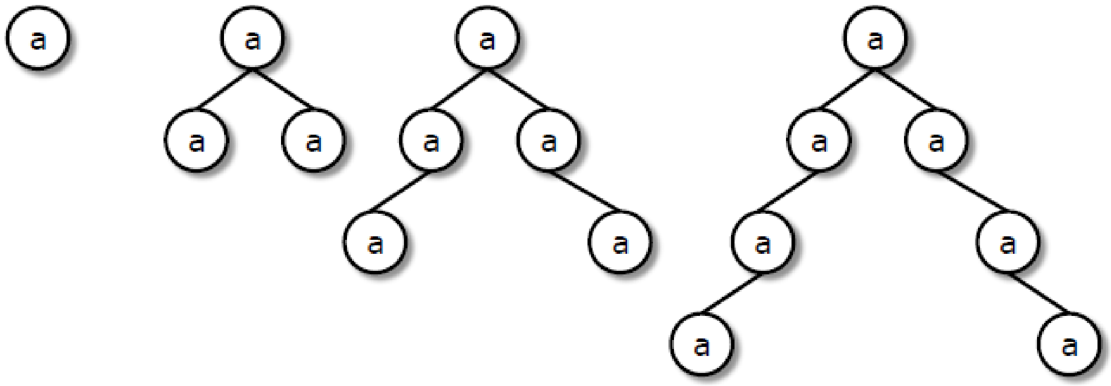
1) Encontre uma definição indutiva para o conjunto S={3,4,5,8,9,12,16,17,20,24,33,...}. Dica: pense em como quebrar o conjunto S em conjuntos menores antes.

2) Assuma as árvores binárias definidas indutivamente como trabalhado em sala de aula.

$$\frac{}{\langle\ \ \rangle \in ArvBin(\tau)}\,vazia$$

$$\frac{L \in ArvBin(\tau) \quad R \in ArvBin(\tau), x \in \tau}{\langle L, x, R\rangle \in ArvBin(\tau)}\,cons$$

Encontre uma definição indutiva para um conjunto de árvores binárias "Natalinas" cujos primeiros elementos são apresentados a seguir:



3) Apresente uma definição equacional recursiva para a função $max: List(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$, que recebe uma lista de número Naturais e retorna o maior elemento dessa lista. Especifique formalmente as pré e pós-condições. Se for necessário, apenas apresente a declaração de funções auxiliares e qual o propósito, sem a necessidade de implementá-las. Utilize obrigatoriamente a definição indutiva de listas trabalhadas em sala de aula.

$$\frac{}{[\ \ ] \in List(\tau)}\,empty$$

$$\frac{L \in List(\tau), h \in \tau}{h : L \in List(\tau)}\,cons$$

4) Considere a seguinte definição de uma função por equações recursivas:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\quad requer: True$

$\quad garante: f(n) = (n+1)^2$

$f(0) = 1 \qquad\qquad (f1)$

$f(n) = f(n-1) + 2 \times n + 1 \qquad se\ n > 0 \qquad (f2)$

Deseja-se provar por indução matemática que $\forall n \in \mathbb{N}. f(n) = (n+1)^2$.

a) Defina a propriedade geral a ser provada.
b) Defina a propriedade para o caso base e apresente sua prova.
c) Defina a propriedade para o passo da indução, a hipótese da indução e apresente sua prova.

5) Seja a seguinte definição equacional recursiva para a soma de dois números naturais:

$soma: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\quad requer: True$

$\quad garante: soma(m, n) = m + n$

$soma(0, n) = n \qquad\qquad (s1)$

$soma(m+1, n) = soma(m, n) + 1 \qquad (s2)$

a) Apresente uma definição equacional recursiva para a seguinte função:

   $dobro: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

b) Prove que $\forall m \in \mathbb{N}. dobro(m) = soma(m, m)$.

6) Aplique o cálculo da pré-condição mais fraca da Lógica de Hoare e apresente as implicações que necessitam ser provadas em uma prova de correção parcial para as seguintes triplas:

a) $[\![x > 2 \land y > 3]\!]\ x := x + 1; y := y + x\ [\![y > 6]\!]$

b) $[\![x < 7]\!]\ if\ (x \geq 5) then\ x := 1\ [\![x < 5]\!]$

7) Considere o seguinte método iterativo em Java para computar o quadrado de um inteiro positivo maior ou igual a 1:

```
public static int sqr(int x) {
```

```
        int i = 1;
        int j = 1;
        while (i<x) {
            j = j + 2*i + 1;
            i = i + 1;
        }
        return j;
    }
```

Responda as seguintes questões:

a) Defina uma estrutura adequada de representação de estado para a computação deste método e mostre pelo menos duas sequências finitas de computação.
b) Defina formalmente as pré-condições e pós-condições do método.
c) Defina formalmente a invariante e a variante do laço de repetição.
d) Defina uma função recursiva na cauda *tail_sqr* e explique como usar *tail_sqr* para computar *sqr*.