Mecânica Quântica II

Lista de Problemas 5

1. Considere uma perturbação $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ que atua no sistema a partir de $t = 0$. Usando teoria de perturbação dependente do tempo:

   (a) Calcule (em primeira ordem) a probabilidade de transição $P_{i \to f}$ para auto-estados de H_0 no instante t. Mostre que para $\omega = 0$:

   $$P_{i \to f} = 4 \frac{|\langle \phi_f^0 | V_0 | \phi_i^0 \rangle|^2}{(E_i^0 - E_f^0)^2} \sin^2 \left[(E_f^0 - E_i^0) t/2 \right]$$

   (b) Se $\omega = 0$, a perturbação é constante e portanto a probabilidade acima pode ser obtida usando teoria de perturbação *independente do tempo*. Lembre que a probabilidade de transição é definida como $P_{i \to f}(t) = |\langle \phi_f^0 || \psi(t) \rangle|^2$, onde $|\phi_n^0\rangle$ são os auto-estados de H_0 e $|\psi(0)\rangle = |\phi_i^0\rangle$. Calcule esta probabilidade em primeira ordem em V_0. Dica: use o resultado de teoria de perturbação independente do tempo (em primeira ordem) para determinar a evolução temporal de $|\psi(t)\rangle$.

2. Um elétron de carga e e massa m_e está sujeito a um campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{k}$ e se encontra no estado $|+\rangle$. No instante $t = 0$ um segundo campo magnético $\vec{B}_1 = B_1 \left(\cos(\omega t) \hat{\imath} + \sin(\omega t) \hat{\jmath} \right)$ é ligado. Ignore os graus de liberdade espaciais do elétron de tal forma que a hamiltoniana (efetiva) do sistema é:

   $$\hat{H} = \frac{e}{2m_e} \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1 \right) . \vec{S}$$

   onde $B_1 \ll B_0$.

   (a) Usando teoria de perturbação dependente do tempo, determine a probabilidade de encontrar o elétron no estado $|-\rangle$ em $t > 0$, em primeira ordem em B_1.

   (b) Para qual valor de ω esta probabilidade é máxima (ressonância)? Mostre que neste caso o resultado obtido só é válido para pequenos valores de t.

   (c) Este problema pode ser resolvido exatamente (ver a resposta do problema 5 da Lista 1 ou Cohen complemento F.IV). Compare a solução exata com o obtido acima para o caso de uma ressonância. O resultado obtido via teoria de perturbação concorda com o exato para pequenos valores de t?

3. Considere um sistema descrito pela hamiltoniana:

   $$H = H_0 + V(t)$$

   onde $V(t) = V_0 \theta(t)$ e H_0 possui um espectro discreto: $H_0 |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle$ e um contínuo: $H_0 |\phi_\alpha\rangle = E |\phi_{E,\beta}\rangle$, onde β enumera as degenerescências dos estados contínuos. Além disso, assuma que V_0 é tal que:

   $$\langle \phi_n | V_0 | \phi_m \rangle = 0 \text{ e } \langle \phi_{E,\beta} | V_0 | \phi_{E',\beta'} \rangle = 0, \text{ mas } \langle \phi_{E,\beta} | V_0 | \phi_n \rangle \neq 0$$

   Usando a Regra de Ouro de Fermi, mostre (em primeira ordem em V_0) que, para t suficientemente longo, a probabilidade do sistema continuar no estado inicial $|\phi_i^0\rangle$ é da forma $P_{i \to i} = 1 - \Gamma t$. Determine uma expressão para Γ. Este resultado pode ser válido para qualquer valor de t? *Pode-se mostrar que para qualquer valor de t esta probabilidade é dada por $P_{i \to i} = e^{-\Gamma t}$. Portanto este é um sistema instável e $\tau = 1/\Gamma$ determina o tempo de vida do sistema.*

4. Considere o átomo de hidrogênio no estado fundalmental em $t = 0$. Este átomo é então sujeito a um campo magnético:

   $$\vec{B} = B_0 e^{-t/\tau} \hat{x} \quad (t > 0).$$

   Assuma que o próton está em repouso e ignore o spin do próton.

   (a) Escreva o hamiltoniano total para o elétron (incluindo o grau de liberdade de spin).

(b) Calcule, *em primeira ordem em* B_0, a probabilidade do elétron sofrer uma transição do estado $(n, l, m, m_s) = (1, 0, 0, +1/2)$ para o estado $(n, l, m, m_s) = (1, 0, 0, -1/2)$ em $t > 0$, onde m_s é o número quântico associado a componente z do spin do elétron.

(c) Determine a probabilidade do elétron sofrer uma transição do estado $(1, 0, 0, +1/2)$ para o estado $(n, l, m, +1/2)$ em primeira ordem em B_0. Como este resultado seria modificado se considerarmos correções de ordem B_0^2?