NHT-3072-Mecânica Quântica I - Noturno - 2018.3

Lista 2

1. (EUF 2009.2-q8) Responda as questões abaixo o mais detalhadamente possível. Não deixe nada indicado. Conclua. Considere um operador hermitiano H e mostre que:
   (a) os autovalores de H são necessariamente reais;
   (b) os autovetores de H correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais;
   Um operador A, que corresponde ao observável **a**, tem dois autoestados normalizados $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$, com autovalores a_1 e a_2, respectivamente, e $a_1 \neq a_2$. Um outro operador B, que corresponde ao observavel **b**, tem dois auto estados normalizados, $|\chi_1\rangle$ e $|\chi_2\rangle$, com autovalores b_1 e b_2, respectivamente, e $b_1 \neq b_2$. Os dois conjuntos de autoestados (bases) estão relacionados por:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|\chi_1\rangle + 3\,|\chi_2\rangle)$$
$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\,|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle)$$

   (c) encontre a relação inversa entre as bases, ou seja, os $|\chi\rangle$s em termos dos $|\phi\rangle$s.

   Sobre esse sistema, podem ser feitas medidas em sequência. Calcule as probabilidades pedidas nos casos abaixo:

   (d) Primeiramente, **a** é medido e é encontrado o valor a_1. Imediatamente após, **b** é medido e é encontrado o valor b_1. Em seguida, **a** é medido novamente. Qual a probabilidade de se obter novamente o autovalor a_1 nessa última medida?

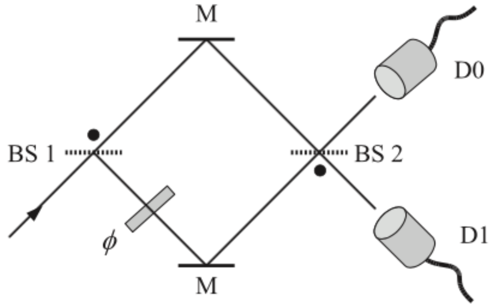
   (e) Primeiramente, **a** é medido e é encontrado o autovalor de a_1. Após essa medida de **a**, mede-se **b** e, por fim, **a** novamente, nessa ordem. Qual é a probabilidade de se obter nessa sequência de medidas os autovalres b_1 (na medida de b) e a_1 (na medida de a)?

2. Duas caixas produzem um fluxo contínuo de fótons em certos estados de polarização. A caixa A produz os fótons no estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x\rangle + |y\rangle\right]$ enquanto a caixa B produz aleatoriamente os estados $|x\rangle$ e $|y\rangle$ cada um com probabilidade 1/2. Nós temos uma das caixas mas ela não está marcada e, assim, não sabemos que estado ela produz. Descreva um experimento que podemos fazer de tal modo a sabermos com certeza qual das caixas possuímos.

3. Considere o interferômetro de Mach-Zehnder da figura abaixo. Ele contém o que chamamos de um "phase-shifter"$P_d(\phi)$ ao longo do caminho 1, (caminho inferior) i.e., ele adiciona uma fase ϕ ao estado $|1\rangle$. O operador $P_d(\phi)$ tem a forma $P_d(\phi) = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 1|$.
   (a) Calcule a probabilidade do fóton ser detectado no detetor $D0$ como função de ϕ.
   (b) Tome $\phi = 0$ e suponha que coloquemos um detetor D ao longo do caminho 1 logo após

o espelho M, de modo a bloquear a passagem do fóton e medir se ele passou ou não por esse caminho. Quais as probabilidades do fóton ser detectado em $D0$, $D1$ e D?

Observação: Veja E. Avshalom C. e L. Vaidman, Foundations of Physics **23**, 987 (1993), que pode ser baixado de nosso site Moodle.Neste artigo é discutido que os resultados do item (b) podem ser utilizados para construir um “testador de bombas", como foi comentado em aula.



4. Considere uma partícula com spin-1/2 e calcule os autovalores e autovetores do operador spin na direção $\vec{n} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$, $S_n \equiv \vec{S}\cdot\vec{n}$, onde $\vec{S} \equiv (\hbar/2)\vec{\sigma}$.

5. Suponha que certo aspecto da dinâmica de um elétron é descrito pela Hamiltoniana $H = E_0 I + \alpha\sigma_y$, onde $\sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$, onde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é uma base ortonormal.
(a) Quais os valores possíveis de serem obtidos ao medirmos H?
(b) Se $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, qual o estado $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$?
(c) se medirmos o observável σ_z, onde $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$, qual será a probabilidade, como função do tempo, de obter seus possíveis resultados?
(d) Calcule $\langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle$, $\Delta_\psi\sigma_x$ e $\Delta_\psi\sigma_y$ e verifique que o princípio da incerteza é satisfeito (onde $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$.)

6. (EUF 2012.1-q9) Uma partícula de spin 1/2 tem um momento de dipolo magnético $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$, onde γ é uma constante real e $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ é o operador de spin, sendo:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

as matrizes de Pauli. Se a partícula está imersa num campo magnético uniforme $\vec{B}$, o hamiltoniano que governa a dinâmica do spin é $H = -\vec{\mu}.\vec{B}$. No que segue, suponha que o campo magético esteja na direção do eixo Oz.
(a) Dê a forma explícita do operador hamiltoniano como uma matriz 2x2, em termos de $\gamma, \hbar$ e B.
(b) Escreva as expressões para os estados estacionários como vetores-coluna normalizados e indique suas respectivas energias.

(c) No instante inicial, $t = 0$, a partícula é preparada no estado de spin

$$\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

com α real.Qual será o estado de spin $\chi(t)$, em um instante t posterior.

(d) Nesse instante posterior é feita uma medida de S_x, a componente do spin segundo o eixo Ox. Qual a probabilidade $P_+(t)$ de se obter o valor $+\hbar/2$?

7. As reações nucleares que ocorrem no interior do Sol produzem uma abundância de neutrinos de elétrons ν_{e}; 95% destes são produzidos na reação $p + p \to {}^2H + e^+ + \nu_{\mathrm{e}}$. A Terra recebe $6,5 \times 10^{14}$ neutrinos por segundo e por metro quadrado do Sol. Durante cerca de trinta anos, vários experimentos buscaram detectar esses neutrinos, mas todos concluíram que o fluxo de neutrino medido é apenas cerca de metade do fluxo calculado usando o modelo solar padrão. Os resultados combinados de três experimentos mostraram que não há dúvida de que esse déficit de neutrinos se deve à transformação de neutrinos do elétron em outros tipos de neutrinos (do múon e do tau) durante a passagem do Sol para a Terra. Essas experiências mostram que o fluxo total de neutrinos previsto pelo modelo solar está correto, mas que o fluxo de neutrino de elétrons medido é muito pequeno. Vamos construir uma teoria simplificada que dê a física essencial de tal fenômeno. No que segue assumimos que só existem dois tipos de neutrinos–neutrinos no elétron ν_{e} e neutrinos do múon ν_μ– e que todo o fenômeno ocorre no vácuo durante a propagação dos neutrinos do sol até a terra. Assumindo que os neutrinos têm massa, podemos ir para o seu referencial de repouso e escrever a sua Hamiltoniana na base ortonormal $\{|\nu_{\mathrm{e}}\rangle, |\nu_\mu\rangle\}$ como

$$H = c^2 \begin{pmatrix} m_{\mathrm{e}} & m \\ m & m_\nu \end{pmatrix},$$

onde m_{e} e m_μ são as massas dos neutrinos do elétron e múon, respectivamente, c é a velocidade da luz e m é o que permite as transições entre os dois tipos de neutrinos.

(a) Ache as auto-energias E_1 e E_2 e os seus respectivos auto-estados (chamados de auto-estados de massa) $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_2\rangle$.

(b) Supondo que o neutrino é criado no sol em t=0 no estado $|\psi(t = 0)\rangle = |\nu_{\mathrm{e}}\rangle$, calcule $|\psi(t)\rangle$ e mostre que a probabilidade de encontrarmos um neutrino do elétron em um instante t é $p_{\mathrm{e}}(t) = 1 - \sin^2\theta \sin^2(\Delta E t/\hbar)$, onde $\tan\theta = 2m/(m_{\mathrm{e}} - m_\mu)$. Esse é o fenômeno de *oscilação de neutrinos.*

8. (EUF 2013.2-q9) Os operadores de spin de uma partícula de spin-1 (um tripleto) podem ser representados no espaço complexo C^3 pelas matrizes

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que as relações de comutação $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$, e permutações cíclicas em x, y, z, são satisfeitas.
(b) Se uma medida da componente z do spin é feita, quais são os possíveis resultados? Encontre os respectivos autovetores.
(c) Se o estado da partícula é dado pelo vetor

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$$

quais são as probabilidade de se obter cada um dos resultados possíveis das medias do spin ao longo do eixo z?
(d) A partir do resultado do item (c), qual a probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer um desses estados?

9. O positrônio é um estado ligado de um par elétron-pósitron. No que segue, estaremos interessados apenas nos graus de liberdade de spin do seu estado fundamental, que é o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, formado pelo produto dos espaços bidimensionais $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ que descrevem os estados de spin-1/2 do elétron e do pósitron, respectivamente.
(a) Determine a ação do operador $\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B$ nos estados $|\epsilon, \epsilon'\rangle_{AB}$, $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$.
(b) Mostre que os vetores $|I\rangle_{AB} = |+,+\rangle_{AB}, |II\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle_{AB} + |-,+\rangle_{AB}\right), |III\rangle_{AB} = |-,-\rangle_{AB}, |IV\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle_{AB} - |-,+\rangle_{AB}\right)$ são auto-estados de $\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B$ com auto-valores 1 ou -3.
(c) Ache os projetores P_1 e P_{-3} escrevendo-os na forma $\lambda I + \mu\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B$. Mostre que o operador $P_{12} = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B)$ satisfaz $P_{12}|\epsilon, \epsilon'\rangle_{AB} = |\epsilon', \epsilon\rangle_{AB}$.
(d) A Hamiltoniana da parte de spin do positrônio é dada por $H_0 = E_0 I + J\vec{\sigma}^A \cdot \vec{\sigma}^B$, $J > 0$. Ache seus auto-valores e auto-vetores.

10. (EUF 2010.1-q9) Duas partículas com spin 1/2 se aproximam e interagem segundo o hamiltoniano

$$H = \frac{4a(t)}{\hbar}\vec{S}_1.\vec{S}_2,$$

sendo $a(t) = a_0$, constante (real), para $0 < t < \tau$ e $a(t) = 0$ para $t < 0$ e $t > \tau$. Em $t = -\infty$, o estado do sistema é $|+,-\rangle$, sendo $|\pm\rangle$ autovetores do operador $S_{i,z}$ com autovalores $\pm\hbar/2$.
(a) Escreva a matriz H na base dos autovetores de $S_{1,z}$ e $S_{2,z}$.
(b) Determine os autovetores e autovales de H.
(c) Qual é o estado $|\Psi(t)\rangle$ do estado para $0 < t < \tau$?
(d) Qual é o estado $|\Psi(t)\rangle$ do estado para $t > \tau$ qualquer?
(e) Qual a probabilidade de uma medida de $S_{1,z}$ fornecer o valor $\hbar/2$ para $t > \tau$?
(f) Após Δt segundos dessa medida, qual a probabilidade de uma medida de $S_{2,z}$ dar o valor $-\hbar/2$.

11. Considere dois fótons, movendo-se em sentidos opostos ao longo da direção $\vec{e}_z$, emaranhados

em polarização no estado $|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x,x\rangle_{AB} + |y,y\rangle_{AB}\right]$.
(a) Qual a probabilidade de medirmos os fótons A e B com polarização xx?
(b) Qual a probabilidade de medirmos os fótons A e B com probabilidade yy?
(c) Qual a probabilidade de medirmos os fótons A e B com probabilidade xy?
(d) Qual a probabilidade de medirmos os fótons A e B com probabilidade yx?
(e) Se $\sigma_3^\alpha = |x\rangle_{\alpha\,\alpha}\langle x| - |y\rangle_{\alpha\,\alpha}\langle y|$, $\alpha = A, B$, mostre que $|\Phi^+\rangle_{AB}$ é auto-estado de $\sigma_3^A \otimes \sigma_3^B$ e calcule seu auto-valor.

12. O estado de spin de um elétron é descrito pela matriz densidade $\rho = p|+\rangle\langle+| + (1-p)|-\rangle\langle-|$, $0 \leq p \leq 1$, onde $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.
(a) Se uma medição de S_x for feita, qual será a probabilidade de obtermos $\hbar/2$ e $-\hbar/2$?
(b) Calcule o valor esperado de S_x no estado ρ.

13. Considere um sistema de dois spins interagentes. A Hamiltoniana que descreve o sistema é $H_{AB} = \epsilon\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B$. Se $|\psi(0)\rangle = |x,+\rangle_A \otimes |x,+\rangle_B$ e $T = \hbar\pi/4\epsilon$,
(a) calcule $|\psi(T)\rangle$ e $|\psi(2T)\rangle$.
(b) Qual dos estados do item (a) é emaranhado?

14. Considere três experimentalistas Alice, Bob e Charlie, cada um com uma partícula de spin-1/2 cujo estado de spin total é o chamado estado GHZ:

$$|GHZ\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,+,+\rangle_{ABC} - |-,-,-\rangle_{ABC}\right).$$

(a) Suponha que Alice meça $\sigma_z^A \otimes I^{BC}$ no seu spin. Mostre que, qualquer que seja o resultado da medição, o estado de spin de Bob e Charlie terminará sendo um estado produto.
(b) Suponha agora que Alice faça uma medição de $\sigma_x^A \otimes I^{BC}$ no seu spin. Mostre que, qualquer que seja o resultado da medição, o estado de spin de Bob e Charlie terminará sendo um estado emaranhado.
(c) Calcule a matriz densidade reduzida dos spins de Alice e Bob.
(d) Calcule a matriz densidade reduzida de Charlie.