NHT-3072-Mecânica Quântica I - Noturno - 2018.3

PROVA 2

Primeira Parte - Presencial- data 14/12

1. (2 pontos) Considere uma partícula de massa m movendo-se *livremente* dentro de uma "região" unidimensional de comprimento L com condições periódicas de contorno [ou seja, os auto-estados de posição satisfazem $|x+L\rangle = |x\rangle$ ou, equivalentemente, as funções de onda satisfazem $\psi(x+L) = \psi(x)$. Logo, você pode considerar as funções de onda definidas em $0 \leq x \leq L$ com $\psi(0) = \psi(L)$].
(a) Determine os auto-estados de energia (bem como suas funções de onda) normalizados e as respectivas energias.
(b) Qual a degenerescência de cada nível de energia?

2. (2 pontos) Considere o oscilador harmônico isotrópico:
$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(X^2+Y^2+Z^2),$$
onde m é a massa da partícula sujeita ao potencial harmônico e a frequência clássica ω_0 é a mesma para todas as direções.
(a) Escreva os auto-estados $|n_x, n_y, n_z\rangle$ da Hamiltoniana total H em termos dos auto-estados de osciladores harmônicos unidimensionais $|n_i\rangle$ $(i = x, y, z)$ bem como as auto-energias de H. Qual é a degenerescência de auto-estados para uma auto-energia de $\frac{7}{2}\hbar$?
(b) Mostre que o operador L_z em termos dos operadores criação e aniquilação $a_x^\dagger, a_x$, $a_y^\dagger, a_y$ e $a_z^\dagger, a_z$ pode ser escrito como $L_z = i\hbar(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_x)$.

3. (2 pontos) No instante $t = 0$, um elétron em um átomo de hidrogênio está no estado
$$|\psi\rangle = \frac{1}{6}\left[3i|1,0,0\rangle - 4|2,1,1\rangle - i|2,1,0\rangle + \sqrt{10}|2,1,-1\rangle\right],$$
onde $|n,l,m\rangle$ são os estados ligados (normalizados) do átomo de hidrogênio discutidos em aula (como o próton é muito mais massivo que o elétron, você pode pensar no próton "parado"com o elétron "orbitando").
(a) Qual o valor esperado de H no estado $|\psi\rangle$ em função de E_1 (energia do estado fundamental)?
(b) Qual o valor esperado de $\vec{L}^2$, e L_z no estado $|\psi\rangle$?
(c) Qual a probabilidade de, ao fazermos uma medição de $\vec{L}^2$, obtermos $l = 1$?
(d) Encontre o estado $|\psi(t)\rangle$ em um instante t como função de E_1 .

Formulário

(1) Relação entre X, P e $a, a^\dagger$:

$$X \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[a^\dagger + a\right], \quad P \equiv i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left[a^\dagger - a\right], \quad [a, a^\dagger] = I$$

(2) Ação de a e $a^\dagger$ nos auto-estados do operador número $N \equiv a^\dagger a$:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(3) Operadores de momento angular orbital $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$ e suas relações

$$L_x = YP_z - ZP_y; \quad L_y = XP_z - ZP_x; \quad L_z = XP_y - YP_x; \quad [L_i, Lj] = i\hbar\Sigma_k\epsilon_{ijk}L_k$$

$$\vec{L}^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle; \quad L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y; \quad L_\pm|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l, m\pm 1\rangle$$

(4) Energias dos estados ligados do átomo de Hidrogênio: $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$, $n = 1, 2, 3...$ e $E_I = \frac{1}{2}\mu c^2\alpha^2 \approx 13,6eV$, com μ sendo a massa reduzida do sistema (que para o caso do átomo de Hidrogênio $\mu \approx m_e$, com m_e sendo a massa do elétron) e α a constante de estrutura fina.

(5) Ação de X e P em funções de onda $\psi(x)$: $(X\psi)(x) = x\psi(x)$ e $(P\psi)(x) = -i\hbar\partial\psi/\partial x$.

(6) Evolução temporal: $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$ e $U(t, t_0) = exp\big(-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\big)$

NHT-3072-Mecânica Quântica I - Noturno - 2018.3

PROVA 2

Segunda Parte - Para entregar- dia 17/12- 19:00 hs

4. (2 pontos) Uma partícula está sujeita a um potencial harmônico $V(X) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2$. Assim, a Hamiltoniana da partícula é dada por:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2.$$

Suponha que no instante $t = 0$ a partícula é preparada no estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + i|1\rangle\right]$, onde $|n\rangle$ são os auto-estados do operador número $N \equiv a^\dagger a$, $n = 0, 1, 2, ...$, com a e $a^\dagger$ sendo os operadores aniquilação e criação, respectivamente.

(a) Calcule $|\psi(t)\rangle$, para $t > 0$ em termos da frequencia ω_0.

(b) Encontre o valor esperado $\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle$ como função do tempo t.

(c) Encontre o valor esperado $\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle$ como função do tempo t.

(d) Mostre que densidade de probabilidade de encontrar a partícula em um ponto x retorna à sua forma original após o período (clássico): $T = 2\pi/\omega_0$. Você deve provar isso para um estado inicial (que será evoluído no tempo) arbitrário do oscilador harmônico, incluindo estados não estacionários. [*Sugestão*: Faça a expansão do estado na base de estados estacionários. Você não precisa da forma explícita das funções de onda dos estados estacionários, você pode deixa-las indicadas como $\varphi_n(x)$.]

5. (2 pontos) O hamiltoniano

$$H = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_x^2 - L_y^2)$$

oferece uma boa aproximação para descrever os estados quânticos de um sistema com momento angular $l = 1$ colocado num gradiente de campo elétrico. Na experessão do Hamiltoniano, L_x e L_y são as componentes x e y do operador momento angular orbital $\vec{L}^2$ e ω_0 é uma constante real. Uma base para descrever este sistema são os auto-estados de L_z: $|-1\rangle$, $|0\rangle$ e $|+1\rangle$ de L_z com autovalores $-\hbar$, 0 e $+\hbar$, respectivamente $[L_z|m\rangle = \hbar m|m\rangle]$.

a) Escreva a matriz que representa H na base de L_z citada acima.

b) Encontre os autovalores de H e os correspondentes autovetores na base de L_z citada acima.

c) Suponha que, no intante $t = 0$, o sistema se encontre no estado

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle)$$

Obtenha o estado $\psi(t)$ para um instante de tempo $t > 0$ qualquer.

d) Considerando o estado inicial do item (c), qual é a probabilidade de se encontar o valor $+\hbar$ em uma medida de L_z em um instante de tempo posterior de t?

1) $\Psi(0) = \Psi(L)$

a) $H\Psi(x) = E\Psi(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = -K^2\Psi(x) \quad K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad K \geq 0$$

soluções são do tipo $\Psi(x) = Ae^{iKx}$

$$\Psi(0) = A = \Psi(L) = Ae^{iKL}$$

$$e^{iKL} = 1 \Rightarrow KL = 2n\pi$$

$$K_n = \frac{2\pi n}{L} \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$E_n = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}n\right)^2 = \boxed{\frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}n^2}$$

$$1 = \int_0^L |e^{iKx}|^2 |A|^2 dx = |A|^2 \int_0^L dx = |A|^2 L \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

Logo $\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$E_n = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}n^2$$

b) Para $n=0$, temos $E=0$ e $\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $0 \leq x \leq L$

Para outros valores, temos 2 estados $\Psi_n(x)$, $\Psi_{-n}(x)$ com $E_{-n} = E_{+n}$ //

2- $H = \dfrac{\vec{P}^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m\omega_0^2 \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)$

Podemos escrever H como

$$H = \underbrace{\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2}_{H_x} + \underbrace{\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2}_{H_y} + \underbrace{\frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0 z^2}_{H_z}$$

$H = H_x + H_y + H_z$ com $H_i = \hbar\omega_0\left(N_i + \frac{1}{2}\right)$ e $N_i = a_i^\dagger a_i$

$$H|n_x, n_y, n_z\rangle = \left\{\hbar\omega_0\left(n_x + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_0\left(n_y + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_0\left(n_z + \tfrac{1}{2}\right)\right\}|n_x, n_y, n_z\rangle$$

Assim:

$$H|n_x, n_y, n_z\rangle = \hbar\omega_0\left(n_x + n_y + n_z + \tfrac{3}{2}\right)|n_x, n_y, n_z\rangle$$

Para $E_n = \dfrac{7}{2}\hbar\omega_0 = (n_x + n_y + n_z)\hbar\omega_0 + \dfrac{3}{2}\hbar\omega_0 \Rightarrow n_x + n_y + n_z = 2$

Possiveis configurações são:

n_x	n_y	n_z	$\sum_i n_i$
1	1	0	2
1	0	1	2
0	1	1	2
2	0	0	2
0	2	0	2
0	0	2	2

6 estados.

Temos $\underline{6}$ estados degenerados

b) $L_z = XP_y - YP_x$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(a_x^\dagger + a_x\right) i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\left(a_y^\dagger - a_y\right) - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(a_y^\dagger + a_y\right) i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\left(a_x^\dagger - a_x\right)$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar^2 \cancel{m\omega_0}}{4\cancel{m\omega_0}}}\left\{\left(a_x^\dagger + a_x\right)\left(a_y^\dagger - a_y\right) - \left(a_y^\dagger + a_y\right)\left(a_x^\dagger - a_x\right)\right\}$$

$$= i\hbar\left\{\cancel{a_x^\dagger a_y^\dagger} + a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y - \cancel{a_x a_y} - \cancel{a_y^\dagger a_x^\dagger} - a_y a_x^\dagger + a_y^\dagger a_x + \cancel{a_y a_x}\right\} = i\hbar\left(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y\right).$$

3) $|\Psi\rangle = \frac{1}{6}\left[3i|1,0,0\rangle - 4|2,1,1\rangle - i|2,1,0\rangle + \sqrt{10}\,|2,1,-1\rangle\right.$ (3)

a) $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$, onde $H|n,l,m\rangle = E_n|n,l,m\rangle$

$$H|\Psi\rangle = \frac{1}{6}\left\{3i E_1|1,0,0\rangle - 4E_2|2,1,1\rangle - iE_2|2,1,0\rangle + \sqrt{10}\,E_2|2,1,-1\rangle\right\}$$

com $E_2 = \frac{E_1}{4}$

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \frac{1}{36}\left\{9E_1 + 16\frac{E_1}{4} + \frac{E_1}{4} + 10\frac{E_1}{4}\right\} = \frac{E_1}{36}\left\{9 + \frac{(16+1+10)}{4}\right\}$$

$$= \frac{E_1}{36}\left\{\frac{36+27}{4}\right\} = \frac{E_1}{36}\frac{63}{4} = \boxed{\frac{7}{16}E_1}$$

b) $\vec{L}^2|n,l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|n,l,m\rangle$

$$\vec{L}^2|\Psi\rangle = \frac{1}{6}\left\{\cancel{3i\hbar^2 0.(0+1)|1,0,0\rangle} - 4\hbar^2 1.2|2,1,1\rangle - i\hbar^2 1.2|2,1,0\rangle + \sqrt{10}\hbar^2 1.2|2,1,-1\rangle\right\}$$

$$= \frac{\hbar^2}{3}\left[-4|2,1,1\rangle - i|2,1,0\rangle + \sqrt{10}|2,1,-1\rangle\right]$$

$$\langle\Psi|\vec{L}^2|\Psi\rangle = \frac{\hbar^2}{18}[16+1+10] = \frac{27}{18}\hbar^2 = \boxed{\frac{3}{2}\hbar^2}$$

$L_z|n,l,m\rangle = \hbar m|n,l,m\rangle$

$$L_z|\Psi\rangle = \frac{1}{6}\left\{\cancel{3i\hbar.0|1,0,0\rangle} - 4\hbar.1|2,1,1\rangle \cancel{-i.\hbar.0|2,1,0\rangle} + \sqrt{10}.\hbar(-1)|2,1,-1\rangle\right\}$$

$$L_z|\Psi\rangle = \frac{1}{6}\left[4\hbar|2,1,1\rangle - \hbar\sqrt{10}|2,1,-1\rangle\right.$$

$$\langle\Psi|L_z|\Psi\rangle = \frac{\hbar}{36}[16-10] = \boxed{\frac{\hbar}{6}}$$

c) Para medir $l=1$, temos o projetor $P_{l=1} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-1}^{1} |n,1,m\rangle\langle n,1,m|$ (4)

Assim:

$$\text{Prob}(l=1) = \langle\psi|P_{l=1}|\psi\rangle$$

$$P_{l=1}|\psi\rangle = \frac{1}{6}\left\{-4|2,1,1\rangle - i|2,1,0\rangle + \sqrt{10}\,|2,1,-1\rangle\right\}$$

$$\text{Prob}(l=1) = \frac{1}{36}\left\{16+1+10\right\} = \frac{27}{36} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

d) $U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$ $\quad U(t)|n,l,m\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n,l,m\rangle$.

Logo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{6}\left\{3i\,e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1,0,0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\left(-4|2,1,1\rangle - i|2,1,0\rangle + \sqrt{10}\,|2,1,-1\rangle\right)\right\}$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{6}\left\{3i\,e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1,0,0\rangle + e^{-\frac{i}{4\hbar}E_1 t}\left(-4|2,1,1\rangle - i|2,1,0\rangle + \sqrt{10}\,|2,1,-1\rangle\right)\right\}$$

Gabarito P2 - Entrega - MQ I

4) $$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 X^2 = \hbar\omega_0\left(N + \frac{I}{2}\right) \quad ; \; N = a^\dagger a$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + i|1\rangle\right]$$

(a) $$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \; ; \; U(t)|n\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{\frac{iE_0 t}{\hbar}}|0\rangle + i e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}}|1\rangle\right\} = \frac{e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}}}{\sqrt{2}}\boxed{\left\{|0\rangle + i e^{-i\omega_0 t}|1\rangle\right\}}$$

(b) $$\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left\{\left(\langle 0| - i e^{+i\omega_0 t}\langle 1|\right)\left(a + a^\dagger\right)\left(|0\rangle + i e^{-i\omega_0 t}|1\rangle\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left\{\overset{0}{\cancel{\langle 0|a|0\rangle}} + i e^{-i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 0|a^\dagger|1\rangle}} + i e^{-i\omega_0 t}\langle 0|\overset{|0\rangle}{\overbrace{a|1\rangle}}\right.$$

$$+ \overset{0}{\cancel{\langle 0|a^\dagger|0\rangle}} - i e^{i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 1|a|0\rangle}} - i e^{i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 1|a|1\rangle}}$$

$$\left. + (-i e^{i\omega_0 t})\langle 1|\underbrace{a^\dagger|0\rangle} - i e^{i\omega_0 t}\left(i e^{-i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 1|a^\dagger|1\rangle}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\underbrace{e^{i\omega_0 t} - \overset{1}{e^{-i\omega_0 t}}}_{2i\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t}\right) = \boxed{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t}$$

(c) $$\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\, i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\left\{\left(\langle 0| - i e^{-i\omega_0 t}\langle 1|\right)\left(a^\dagger - a\right)\left(|0\rangle + i e^{-i\omega_0 t}|1\rangle\right)\right\}$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\left\{\langle 0|a^\dagger\overset{0}{\cancel{|0\rangle}} + i e^{-i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 0|a^\dagger|1\rangle}} - \overset{0}{\cancel{\langle 0|a|0\rangle}} - i e^{-i\omega_0 t}\langle 0|a|1\rangle - i e^{i\omega_0 t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right.$$

$$\left. + \cancel{(-i e^{i\omega_0 t}\, i e^{-i\omega_0 t})}\overset{0}{\cancel{\langle 1|a^\dagger|1\rangle}} + i e^{i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 1|a|0\rangle}} + i e^{i\omega_0 t}\overset{0}{\cancel{\langle 1|a|1\rangle}}(i e^{-i\omega_0 t})\right\}$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(-i)\left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\right) = \sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\cos\omega_0 t.$$

d) Seja um estado arbitrário $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega_0 t(n+1/2)} |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 t} |n\rangle$$

Logo a função de onda é:

$$\Psi(x,t) = \langle x|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-in\omega_0 t} \Psi_n(x) \quad ; \quad \Psi_n(x) = \langle x|n\rangle$$

Densidade de probabilidade: $|\Psi(x,t)|^2$.

Note que

$$\Psi\left(x, \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{e^{-in2\pi}}_{1 \text{ (pois } n=0,1,2\dots)} \Psi_n(x) = -1\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x)\right) = -\Psi(x,0)$$

Logo $\boxed{\left|\Psi\left(x, \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right|^2 = |\Psi(x,0)|^2}$ $\blacksquare$

5- $H = \frac{w_0}{\hbar}(L_x^2 - L_y^2)$

$L_\pm = L_x \pm i L_y \Rightarrow L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$, $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$

Para $l=1$

$L_+|1,m\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - m(m+1)}\,|1,m+1\rangle$

$L_-|1,m\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - m(m-1)}\,|1,m-1\rangle$

$\langle 1,m'|L_+|1,m\rangle = \hbar\sqrt{2 - m(m+1)}\,\delta_{m',m+1}$

$\langle 1,m'|L_-|1,m\rangle = \hbar\sqrt{2 - m(m-1)}\,\delta_{m',m-1}$

Portanto $|1,1\rangle$ $|1,0\rangle$ $|1,-1\rangle$

$L_+ = \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $L_- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$

$$H = \frac{w_0}{\hbar}\frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{H = \hbar w_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

b) $\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \hbar w \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \hbar w & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$$\hbar\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim.

$$\lambda_+ = +\hbar\omega \Rightarrow |\lambda_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |-1\rangle\right)$$

$$\lambda_- = -\hbar\omega \Rightarrow |\lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(|1\rangle - |-1\rangle\right)$$

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow |\lambda_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

c) Note que $|\psi(0)\rangle = |\lambda_-\rangle$, que é autoestado de H

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\omega_0 t}|\lambda_-\rangle = \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right)$$

d) Logo, a prob. de encontrar $\hbar$, significa:

$$P_{+\hbar}(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\langle 1| \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|e^{i\omega_0 t}\langle 1|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Ou seja, temos **50%** de prob de medir **$+\hbar$**