# NHT-3072-Mecânica Quântica I - Noturno - 2018.3

PROVA BONUS

## Para entregar- dia 19/12 - 19:00 hs

1. (2,5 pontos) Uma caixa está dividida em dois compartimentos: esquerda (L) e direita (R). A caixa contém uma partícula. Quando a partícula está (com certeza absoluta) na esquerda, seu estado é $|L\rangle$ e quanto a partícula está (com certeza absoluta) na direita, seu estado é $|R\rangle$. Os dois estados estão normalizados e são ortogonais. Assumindo que a caixa é simétrica, podemos escrever a Hamiltoniana da partícula como

$$H = \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\right),$$

onde $\Delta$ é uma constante real com dimensão de energia.
(a) Ache os estados estacionários e suas respectivas energias.
(b) Se em $t = 0$ a partícula começa no estado $|R\rangle$, qual é o estado da partícula em um instante $t > 0$?
(c) Qual a probabilidade, como função do tempo, de encontrarmos a partícula em $|R\rangle$?
Suponha agora que colocamos a caixa em contato com um banho térmico com temperatura $T$. No equilíbrio, o estado da partícula é descrito pela matriz densidade $\rho = e^{-\beta H}/Z$, onde $\beta \equiv 1/(k_B T)$, com $k_B$ sendo a constante de Boltzmann, e $Z$ é a chamada função de partição.
(d) Calcule $e^{-\beta H}$ na base de auto-estados de energia e determine qual deve ser o valor de $Z$ para que $\rho$ defina uma matriz densidade.
(e) Calcule a probabilidade de encontrarmos a partícula em $|R\rangle$ nesse caso.

2. (2,5 pontos) Seja um sistema composto por um par A e B de spins 1/2 descrito pelo estado

$$|\psi\rangle_{AB} = \alpha\left(|+,+\rangle_{AB} + |-,-\rangle_{AB}\right),$$

onde $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.
(a) Qual deve ser o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle_{AB}$ esteja normalizado?
(b) Qual é a probabilidade de se medir na direção z: $-\hbar/2$ para o spin A e $+\hbar/2$ para o spin B?
(c) Qual é a probabilidade de se medir na direção x: $+\hbar/2$ para o spin A e $-\hbar/2$ para o spin B?
(d) Qual é a probabilidade de se medir na direção z: $-\hbar/2$ para o spin A e na direção x: $+\hbar/2$ para o spin B?
(e) Qual a probabilidade de medir na direção z: $+\hbar/2$ para o spin A independentemente do que é medido para o spin B.

3. (2,5 pontos) Um oscilador harmônico quântico é perturbado por uma força constante $\vec{F} = F\vec{e}_x$, $F > 0$. Assim, sua Hamiltoniana é dada por:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X^2 - FX.$$

(a) Encontre a energia $E_{EF}$ do estado fundamental $|\psi_{EF}\rangle$ de $H$ bem como a sua respectiva função de onda normalizada, $\psi_{EF}(x) = \langle x|\psi_{EF}\rangle$.
(b) Encontre $\langle\psi_{EF}|X|\psi_{EF}\rangle$.
(c) Mostre que podemos escrever $|\psi_{EF}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}x_0 P}|0\rangle$, onde $x_0 = \frac{F}{m\omega_0^2}$. [*Sugestão:* Mostre que essa relação é válida para as funções de onda, $\psi_{EF}(x)$ e $\varphi_0(x) = \langle x|0\rangle$. Para tanto, escreva $\psi_{EF}$ em termos de $\varphi_0$.]

4. (**2,5 pontos**) Considere o chamado rotor quântico rígido, i.e., um corpo esfericamente simétrico em rotação com momentos de inércia $I_x = I_y = I_z = I$. Sua Hamiltoniana é portanto

$$H = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_y^2}{2I_y} + \frac{L_z^2}{2I_z} = \frac{\vec{L}^2}{2I}.$$

(a) Quais são os auto-estados de energia e seus respectivos auto-valores?
(b) Qual a degenerescência de cada nível de energia? Suponha agora que deformamos um pouco o corpo de tal modo que $I_z = (1+\epsilon)I$, com $I_x = I_y = I$.
(c) Escreva a Hamiltoniana

$$H = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_y^2}{2I_y} + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

em termos de $\vec{L}^2, L_z$, $I$ e $\epsilon$.
(d) Quais são os auto-estados de energia e as novas energias nesse caso?
(e) As degenerescências de cada nível mudaram? Elas aumentaram ou diminuíram?