NHT-3072-Mecânica Quântica I - Noturno - 2018.3

Lista 4

1. (EUF-2011.2-q9) Seja o seguinte hamiltoniano representativo de um sistema físico:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$$

Os autoestados deste hamiltoniano são denominados $|n\rangle$, são não-degenerados e satisfazem $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, onde n é um número inteiro e $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ (operador número).

(a) Assuma que os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem à relação de comutação $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de $\hat{N}$, usando as relações de comutação. Determine os autovalores correspondentes a estes estados, n' e n'', respectivamente.

(b)Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $|n'\rangle$ encontrados no item (a).*Dica: Lembre que todos os estados são normalizados.* Assuma que o valor esperado do hamiltoniano em qualquer de seus estados seja positivo, $\langle\hat{H}\rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$. O que se pode concluir sobre o número de estados $|n\rangle$: ele é finito ou infinito?

(c) Assuma agora que os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem a relação de anticomutação $\hat{a}, \hat{a}^\dagger = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ e $\hat{a}|n\rangle$ são autoestados de $\hat{N}$, usando a relação de anticomutação, e determine os autovalores n' e n'' correspondentes a estes estados. Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e esses estados $|n'\rangle$.*Dica: lembre que todos os estados são normalizados.*

(d) Assumindo, como no item (c), que os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem à relação de anticomutação, que o valor esperado do hamiltoniano em qualquer de seus estados seja positivo, $\langle\hat{H}\rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$, isto impica que o número de estados $|n\rangle$ é finito. Quais são estes únicos estados $|n\rangle$ não nulos neste caso?

2. Nesta questão, vamos discutir algumas aplicações associadas a estados coerentes. O operador deslocamento é definido como $D(\alpha) \equiv e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$, mostre que:

(a) O operador $D(\alpha)$ é unitário;

(b) Mostre que o estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser escrito como $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$;

(c) Calcule as incertezas $\Delta_\alpha X$ e $\Delta_\alpha P$ e mostre que $|\alpha\rangle$ é um estado de incerteza mínima. Note que o resultado é uma circunferência no espaço de fase XP.;

Outro operador importante construído a partir de a e $a^\dagger$ é o operador de compressão (*squeezing*, com aplicações importantes em ótica quântica, informação quântica,etc. O operador de compressão é definido como $S(\alpha) \equiv e^{\frac{1}{2}(\alpha^* a^2 - \alpha a^{\dagger 2})}$, mostre que:

(d) O operador $S(\alpha)$ é unitário;

(e) Mostre que $S^\dagger(\alpha) a S(\alpha) = cosh(ra) - e^{i\theta} senh(ra^\dagger)$ e determine os valores de r e θ;

(f) Determine, para $\alpha \in \mathbb{R}$, as incertezas $\Delta_\alpha X$ e $\Delta_\alpha P$, bem como o seu produto, para o estado $S(\alpha)|0\rangle$. Note que o resultado é uma elipse no espaço de fase XP. Você consegue explicar a razão do nome deste operador? (Dica: utilize o resultado do item (e) e pense qual o signifcado "físico"do fator r).

3. (a) Usando as relações de comutação para as componentes do momento angular $\vec{J}$, determine as relações de incerteza entre: **(1)** J_x, J_y, **(2)** J_y, J_z e **(1)** J_z, J_x quando o estado da partícula é $|\psi\rangle$. Considere agora o estado da partícula como sendo um dos auto-estados (normalizados) de J^2 e J_z, i.e., $|j,m\rangle$.
(b) Mostre que $\langle J_x\rangle = \langle J_y\rangle = 0$.
(c) Mostre que $\langle J_x^2\rangle = \langle J_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - m^2\right)$.

4. Considere uma partícula de massa m sujeita ao "potencial quadrado"esférico:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Determine o as funções de onda dos estados estacionários para $l = 0$ bem como as suas energias (via o método gráfico). Sempre existirão estados ligados?

5. Considere uma partícula de Spin $s = 1$. Encontre os elementos de matriz dos operadores S_x, S_y e S_z na base de auto-estados de S^2 e S_z.

6. Considere o oscilador harmônico isotrópico:

$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

onde m é a massa da partícula sujeita ao potencial harmônico e a frequência clássica ω_0 é a mesma para todas as direções.
(a) Escreva os auto-estados $|n_x, n_y, n_z\rangle$ da Hamiltoniana total H em termos dos auto-estados de osciladores harmônicos unidimensionais $|n_i\rangle$ $(i = x, y, z)$ bem como as auto-energias de H.
(b) Uma das auto-energias do sistema é $\frac{7}{2}\hbar\omega_0$. Qual é a sua degenerescência?
(c) O observável H é medido quando o sistema se encontra no estado (considere os auto-estados $|n_x, n_y, n_z\rangle$ normalizados):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0,1\rangle + \frac{1}{2}|0,1,0\rangle + \frac{1}{2}|0,1,1\rangle.$$

Que resultados podem ser obtidos para a energia e com que probabilidades?
(d) Suponha que a medida do item (c) resultou no valor $\frac{5}{2}\hbar\omega_0$. Considere $t = 0$ o instante imediatamente posterior a essa medida. Determine o estado do sistema $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$.
(e) Escreva os operadores L_x, L_y, L_z em termos dos operadores criação e aniquilação $a_x^\dagger, a_x$, $a_y^\dagger, a_y$ e $a_z^\dagger, a_z$.

7. Considere o momento angular orbital $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$, onde as componentes X_j e P_j, $i, j = x, y, z$, satisfazem $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}I$. Usando a representação de função de onda para os estados quânticos do sistema [onde $(X_i\psi)(\vec{x}) = x_i\psi(\vec{x})$ e $(P_j\psi)(\vec{x}) = -i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial x^j}$],
(a) Encontre L_x, L_y e L_z em coordenadas esféricas.
(b) Encontre $\vec{L}^2$ em coordenadas esféricas.

8. Considere os estados estacionários, $|n, l, m\rangle$ do átomo de hidrogênio. Suponha que em $t = 0$ o estado é dado por $|\psi\rangle = C\left[|1,0,0\rangle + 4i|2,1,0\rangle - 2\sqrt{2}|2,1,-1\rangle\right]$.
   (a) Determine a constante de normalização C.
   (b) Qual o valor esperado de H no estado $|\psi\rangle$?
   (c) Qual o valor esperado de L^2 no estado $|\psi\rangle$?
   (d) Qual o valor esperado de L_z no estado $|\psi\rangle$?
   (e) Encontre o estado $|\psi(t)\rangle$ em um instante t.