NHT-3072-Mecânica Quântica I - Noturno - 2018.3

Lista 1

1. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\|\psi\| \equiv \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$, $|\psi\rangle e|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$. Prove que:
(a) $\||\psi\rangle + |\varphi\rangle\| \leq \|\psi\| + \|\varphi\|$;
(b) $|\|\psi\| - \|\varphi\|| \leq \||\psi\rangle + |\varphi\rangle\|$.

2. Utilize o procedimento de Gram-Schmidt para ortonormalizar o conjunto de vetores abaixo:

$$|e_1\rangle = (1+i)\hat{x} + (1)\hat{y} + (i)\hat{z}$$

$$|e_2\rangle = (i)\hat{x} + (3)\hat{y} + (1)\hat{z}$$

$$|e_3\rangle = (0)\hat{x} + (4)\hat{y} + (1-i)\hat{z}$$

3. Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$:
(a) Mostre que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forma uma base de $\mathcal{H}$.
(b) Escreva $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3i-1 \\ 2i+4 \end{pmatrix}$ como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.
(c) Considerando o produto interno usual, i.e., se $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ e $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ então $\langle\varphi|\psi\rangle \equiv \overline{d}_1 c_1 + \overline{d}_2 c_2$, normalize os elementos de $\mathcal{B}$ e verifique se o conjunto resultante é ortonormal.
(d) Ortonormalize os elementos de $\mathcal{B}$ para construir uma base ortonormal $\mathcal{B}'$.

4. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão N e considere $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como sendo o espaço dos operadores lineares em $\mathcal{H}$. Mostre que $\langle A|B\rangle \equiv \operatorname{tr}\left(A^\dagger B\right)$, para operadores $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, é um produto interno e, assim, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um espaço de Hilbert.

5. Considere $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ e mostre que:
(a) $\{I/\sqrt{2}, \sigma_x/\sqrt{2}, \sigma_y/\sqrt{2}, \sigma_z/\sqrt{2}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Lembre-se que $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(b) Calcule os auto-valores e os auto-vetores (normalizados) das matrizes de Pauli σ_j, $j = x, y, z$.

6. Se A, B são operadores em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, mostre que são verdadeiras as seguintes relações:
(a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
(b) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;
(c) $(A^\dagger)^\dagger = A$;
(d) $(AB)_{mn} = \sum_k A_{mk} B_{kn}$, onde $\mathcal{O}_{mn} \equiv \langle m|\mathcal{O}|n\rangle$ são os elementos de matriz de um operador $\mathcal{O}$ na base ortonormal $\{|n\rangle\}$;

7. Considere os operadores A, B, C que atuam em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão $\mathcal{N}$. Mostre que:
(a) traço do produto dos operadores é invariante sob permutações ciclicas, ou seja: $Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$
(b)$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

8. Considere $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ e mostre que:
(a) $[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$ e $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ é o simbolo de Levi-Cevita.
(b) $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} \equiv \sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta\sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}I$.

9. Considere um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão 3 e um operador A que, em uma base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, possui elementos de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.
(b) Construa uma base ortonormal de auto-vetores desse operador.

10. Considere as matrizes A e B que pertencem ao espaço de Hilbert de 2 dimensões:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}; B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique diretamente que elas são unitárias.
(b) Verifique que o determinante é da forma $exp(i\theta)$ em cada caso. Alguma destas matrizes é hermitiana?

11. Considere $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador projeção no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.
(a) Mostre que os auto-valores de P são 0 e 1.
(b) Mostre que para qualquer vetor normalizado $|\psi\rangle$, o operador $|\psi\rangle\langle\psi|$ é um operador projeção. Em qual sub-espaço ele projeta?

12. (a) Seja $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma família de operadores que satisfaz a equação

$$\frac{dA}{dt} = BA(t).$$

Mostre que a solução para tal equação é $A(t) = e^{tB}A(0)$.

13. (a) Se $f(t) \equiv e^{tA}Be^{-tA}$, mostre que $f'(t) = [A, f(t)]$, $f''(t) = [A, [A, f(t)]]$, etc. e use isso para mostrar que

$$e^{tA}Be^{-tA} = B + \frac{t}{1!}[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + ...$$

(b) Mostre que se os operadores A, B, C satisfazem $[A, B] = iC$ e $[B, C] = iA$ então

$$e^{itB}Ae^{-itB} = A\cos t + Csent.$$

14. (EUF-2012.1) As matrizes de Pauli, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, são extremamente importantes quando se considera uma partícula de spin 1/2.

(a) Utilize explicitamente a representação matricial dos operadores de Pauli e encontre seus autovalores e autovetores, bem como o comutador $[\sigma_y, \sigma_x]$.

(b)Considere um estado arbitrário para uma partícula de spin 1/2 dado por $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, com $|a|^2 + |b|^2 = 1$, sendo $|+\rangle, |-\rangle$ autovetores de σ_z. Mostre como este estado é transformado sob a ação de cada um dos operadores σ_x, σ_y e σ_z, independentemente.

(c) Mostre como o operador $exp(i\alpha\sigma_x)$ atua sobre o estado $|\psi\rangle$.

(d) Quais imposições devem ser condideradas sobre α para que o operador do item (c) seja hermitiano? e para que seja unitário?