

# Einführung in die Kern- und Elementarteilchenphysik

Vorlesung im Wintersemester 2007/2008

H. Kolanoski  
*Humboldt-Universität zu Berlin*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1 Einheiten . . . . .	4
1.2 Relativistische Kinematik . . . . .	5
1.2.1 Masse-Energie-Beziehung . . . . .	5
1.2.2 Kinetische Energie . . . . .	5
1.2.3 Vierervektoren und Lorentz-Invarianten . . . . .	6
1.2.4 Lorentz-Transformationen . . . . .	7
1.2.5 Poincaré-Transformationen . . . . .	8
1.2.6 Anwendungen . . . . .	8
1.3 Quantenmechanische Beschreibung von Teilchen . . . . .	10
1.4 Relativistische Wellengleichungen . . . . .	12
1.4.1 Klein-Gordon-Gleichung ( $s = 0$ ) . . . . .	12
1.4.2 Dirac-Gleichung ( $s = 1/2$ ) . . . . .	15
1.5 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsbreite . . . . .	20
1.5.1 Definition . . . . .	20
1.5.2 Beispiele für Wirkungsquerschnittsberechnungen . . . . .	22
1.5.3 Quantenmechanische Behandlung des Wirkungsquerschnitts .	24
1.5.4 Zerfallsbreite und Lebensdauer . . . . .	27
<b>2 Kurzer geschichtlicher Überblick</b>	<b>29</b>
<b>3 Experimentelle Methoden</b>	<b>37</b>
3.1 Beschleuniger . . . . .	37
3.1.1 Linearbeschleuniger: . . . . .	38
3.1.2 Kreisbeschleuniger . . . . .	38
3.1.3 Speicherringe . . . . .	40
3.2 Wechselwirkungen von Teilchen mit Materie . . . . .	41
3.2.1 Energieverlust aufgrund von Ionisation . . . . .	42
3.2.2 Coulomb-Vielfachstreuung . . . . .	47
3.2.3 Elektron-Bremsstrahlung . . . . .	51
3.2.4 Wechselwirkungen von Photonen mit Materie . . . . .	53
3.3 Detektoren . . . . .	55
3.3.1 Detektoren für geladene Teilchen . . . . .	55
3.3.2 Messung der Energie von Elektronen und Photonen . . . . .	61
3.3.3 Messung der Energie von Hadronen . . . . .	62

3.3.4	Beispiele von Detektoren für Teilchenexperimente . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Erhaltungssätze und Symmetrien</b>	<b>67</b>
4.1	In allen Wechselwirkungen erhaltene Größen . . . . .	67
4.2	Symmetrien, Transformationen und Erhaltungssätze . . . . .	70
4.2.1	Invarianz der Hamilton-Funktion . . . . .	70
4.3	Drehungen . . . . .	73
4.3.1	Ganzzahlige Drehimpulse . . . . .	73
4.3.2	Halbzahlige Drehimpulse . . . . .	73
4.3.3	Kopplung von Drehimpulsen . . . . .	75
4.4	Klassifikation von Symmetrien . . . . .	76
4.5	Die diskreten Symmetrien CPT . . . . .	76
4.5.1	Parität . . . . .	77
4.5.2	Ladungskonjugation . . . . .	78
4.5.3	CP-Invarianz . . . . .	78
4.5.4	Zeitumkehrinvarianz und CPT-Theorem . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Quarkmodell und starke Wechselwirkung</b>	<b>83</b>
5.1	Isospin . . . . .	83
5.1.1	Nukleon-Nukleon-Systeme . . . . .	83
5.1.2	Isospin-Multipletts . . . . .	84
5.2	Pion-Nukleon-Streuung . . . . .	86
5.3	Farbladung und Quantenchromodynamik . . . . .	87
5.4	Strangeness . . . . .	93
5.5	Das SU(3)-Modell der leichten Quarks . . . . .	94
5.5.1	Eigenschaften der Quarks . . . . .	94
5.5.2	Mesonen-Multipletts . . . . .	96
5.5.3	Baryonen-Multipletts . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Die Quark-Lepton-Familien</b>	<b>103</b>
6.1	Charm . . . . .	103
6.1.1	Der Cabibbo-Winkel und der GIM-Mechanismus . . . . .	103
6.1.2	Entdeckung des Charm-Quarks . . . . .	105
6.1.3	Charmonium . . . . .	105
6.1.4	Offener Charm . . . . .	107
6.2	Die dritte Fermionen-Familie . . . . .	110
6.2.1	Die Entdeckung des Tau-Leptons . . . . .	110
6.2.2	Bottom . . . . .	112
6.2.3	Top . . . . .	112
6.2.4	Überblick über die drei Fermionen-Familien . . . . .	115
6.2.5	Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Elektromagnetische Struktur der Hadronen</b>	<b>121</b>
7.1	Elastische Elektron-Nukleon-Streuung . . . . .	121
7.1.1	Kinematik der elastischen Elektron-Proton-Streuung . . . . .	121
7.1.2	Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt und Formfaktoren . . . . .	122
7.1.3	Rosenbluth-Wirkungsquerschnitt . . . . .	124
7.2	Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung . . . . .	128

7.2.1	Kinematik und Wirkungsquerschnitt . . . . .	128
7.2.2	Strukturfunktionen, Partonmodell und Skaleninvarianz . . . . .	130
7.2.3	Verletzung der Skaleninvarianz und QCD . . . . .	135
<b>8</b>	<b>Statische Eigenschaften von Atomkernen</b>	<b>137</b>
8.1	Bindungszustände von Nukleonen . . . . .	137
8.2	Größe und Dichte von Kernen . . . . .	138
8.3	Kernmassen . . . . .	140
8.3.1	Massendefekt und Bindung . . . . .	140
8.3.2	Massenbestimmung . . . . .	142
8.4	Modelle für die A- und Z-Abhängigkeit der Kernmassen . . . . .	142
8.4.1	Der Kern als inkompressible Flüssigkeit . . . . .	142
8.4.2	Schalenstruktur der Kernzustände . . . . .	142
8.4.3	Fermi-Gas-Modell . . . . .	142
8.4.4	Das Tröpfchenmodell und die Weizsäcker-Massenformel . . . . .	144
8.5	Spin, Parität, magnetisches Moment . . . . .	149
8.5.1	Anwendungen der Kernspins . . . . .	149
<b>9</b>	<b>Zerfall instabiler Kerne</b>	<b>153</b>
9.1	Zerfallsgesetz . . . . .	153
9.2	Natürliche Radioaktivität . . . . .	154
9.3	Anwendungen der Radioaktivität . . . . .	154
9.3.1	Datierungsmethoden . . . . .	154
9.3.2	Tracer-Methoden . . . . .	156
9.3.3	Anwendungen in der Technik . . . . .	157
9.3.4	Neutronenaktivierung . . . . .	157
9.3.5	Strahlentherapie . . . . .	159
9.4	Dosimetrie . . . . .	159
9.5	Alpha-Zerfall . . . . .	161
9.6	Kernspaltung . . . . .	164
9.7	Beta-Zerfall . . . . .	165
9.7.1	Zerfallsarten . . . . .	165
9.8	Gamma-Zerfall . . . . .	166
<b>10</b>	<b>Beta-Zerfall und schwache Wechselwirkung</b>	<b>169</b>
10.1	Überblick . . . . .	169
10.2	$\beta$ -Zerfall . . . . .	169
10.2.1	Impulsspektrum beim $\beta$ -Zerfall . . . . .	169
10.2.2	Kernmatrixelemente und Lebensdauern . . . . .	171
10.2.3	Nachweis der Neutrinos . . . . .	173
10.3	Strom-Strom-Wechselwirkung . . . . .	174
10.3.1	Strom-Strom-Kopplung in der QED . . . . .	174
10.3.2	Strom-Strom-Kopplung in der schwachen Wechselwirkung . . . . .	175
10.4	Die Lorentz-Struktur der geladenen Ströme . . . . .	181
10.4.1	Entdeckung der Paritätsverletzung . . . . .	181
10.4.2	Theoretische Beschreibung der Paritätsverletzung . . . . .	181
10.5	Glashow-Salam-Weinberg-Theorie (GSW) . . . . .	187

10.6 Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	188
<b>11 Kernreaktionen</b>	<b>189</b>
11.1 Induzierte Kernspaltung . . . . .	189
11.1.1 Kernspaltungsreaktoren . . . . .	192
11.1.2 Brutreaktionen . . . . .	195
11.1.3 Spaltprodukte und nukleare Entsorgung . . . . .	196
11.2 Kernfusion . . . . .	198
11.2.1 Kinematische Bedingungen für Kernfusion . . . . .	198
11.2.2 Sonnenenergie . . . . .	198
11.2.3 Neutrinos von der Sonne . . . . .	199
11.2.4 Technische Nutzung der Kernfusion . . . . .	203

# Literaturverzeichnis

- [1] E. Segré: Nuclei and Particles, Benjamin, 1977.
- [2] Frauenfelder, Henley: Subatomic Physics, Prentice Hall, 1974.
- [3] W. S. C. Williams: Nuclear and Particle Physics, Clarendon Press, 1991.
- [4] Bopp: Kerne, Hadronen und Elementarteilchen, Teubner 1989.
- [5] Povh, Rith, Scholz, Zetsche: Teilchen und Kerne, Springer 1993.
- [6] W.E. Burcham and M. Jobes: Nuclear and Particle Physics, Prentice Hall, 1995.
- [7] Otter, Honecker: Atome–Moleküle–Kerne (Band II), Teubner Verlag.
- [8] Demtröder: Experimentalphysik Bd. 4, ‘Kern-, Teilchen- und Astrophysik’, Springer Verlag.
- [9] Gerthsen Physik (H. Vogel) Kap. 13; ≥ 18. Auflage.

## Kernphysik:

- [10] Mayer-Kuckuk: Kernphysik, Teubner 1984.
- [11] Marmier: Kernphysik I, II; VMP-Verlag Zürich.

## Teilchenphysik:

- [12] Perkins: Hochenergiephysik, Addison-Wesley 1991.
- [13] Lohrmann: Hochenergiephysik, Teubner 1992.
- [14] Berger: Elementarteilchenphysik, Springer 2002.
- [15] Klapdor-Kleingrothaus, Zuber: Teilchenastrophysik, Teubner Verlag 1997.
- [16] Martin and Shaw: Particle Physics, Wiley 1992.

## Populär:

- [17] Fritzsch: Quarks, Piper 1984
- [18] Höfling, Waloschek: Die Welt der kleinsten Teilchen, Rowohlt 1988.
- [19] Waloschek: Neuere Teilchenphysik – einfach dargestellt, Praxis Schriftenreihe Physik Band 47, Aulis Verlag 1991.
- [20] Spektrum der Wissenschaft (Verständliche Forschung): Teilchen, Felder, Symmetrien.

## Theorie (für Interessierte):

- [21] Close: An Introduction to Quarks and Partons, Academic Press 1979.
- [22] Bjorken, Drell: Relativistische Quantenmechanik, BI 1966.
- [23] Halzen, Martin: Quarks and Leptons, Wiley 1984.
- [24] Okun: Leptons and Quarks, North Holland 1982.
- [25] Nachtmann: Elementarteilchenphysik, Vieweg 1992 .

- [26] Aitchison, Hey: Gauge Theories in Particle Physics, Adam Hilger 1989
- [27] Schmüser: Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker, Springer, 2. Auflage 1995.
- [28] D. Griffiths: Einführung in die Elementarteilchenphysik, Akademie Verlag 1996.
- [29] Cottingham and Greenwood: An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, Cambridge University Press 1998

**Experimentelle Methoden:**

- [30] K. Kleinknecht: Detektoren für Teilchenstrahlung, Teubner Verlag 1992.
- [31] C. Grupen: Teilchendetektoren, BI Verlag 1993.
- [32] W.R. Leo: Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer Verlag, 2. Auflage 1994.
- [33] K. Wille: Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen, Teubner Verlag 1992.
- [34] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group), ‘Review of Particle Physics’, J. Phys. G33, 1 (2006); <http://pdg.lbl.gov>  
Kompakte Zusammenfassung: Particle Data Group: Particle Physics Booklet von CERN zu beziehen, <http://www.cern.ch/library>)

**Sonstige Themen:**

- [35] B. Diekmann und K. Heinloth: Energie, Teubner Verlag 1997.
- [36] S. Weinberg: Die ersten drei Minuten, Pieper Verlag 1977.
- [37] H. Fritzsch: Vom Urknall zum Zerfall, Pieper Verlag.
- [38] P. Coles, F. Lucchin: Cosmology, Wiley Verlag 1995.

# Einführung

Kern- und Teilchenphysik oder auch ‘**Subatomare Physik**’ betrachtet die Struktur der Materie bei kleinsten Abständen. Fragen, die ein Antrieb sein können, die Struktur der Materie und die Kräfte, die sie zusammenhält, zu erforschen:

- Woraus besteht das Universum, wie ist es entstanden und wohin wird es sich entwickeln?
- Was ist Materie, was ist um uns herum, woraus sind wir gemacht?
- Was ist es, was die Welt im Innersten zusammenhält?
- Wie kommt es zu der im Makrokosmos beobachteten Vielfalt der Naturscheinungen: Schöpfung aller Einzelheiten oder **Vielfalt durch Kombination einfacher Elemente?**

**Körnige Struktur der Materie:** Die Erfahrung aus der Beobachtung der Natur zeigt: Die Materie ist aus einfachen Elementen aufgebaut, die zu komplexen Systemen mit Substrukturen führen, zum Beispiel beruht das Periodische System der Elemente auf den Atombausteinen. Typische Größenordnungen sind:

Atom:	$r \approx 10^{-10} m$
Kern:	$r \approx 10^{-14} - 10^{-15} m$
Kernbausteine:	$r \approx 10^{-15} m$ (Proton, Neutron)
Elementarteilchen:	$r < 10^{-18} m$ (Elektronen, Quarks)

Die Kernbausteine Proton und Neutron sind ausgedehnt, haben Struktur. Elektronen und Quarks könnten punktförmig und elementar sein!?

**Warum hohe Energien?** Wie kann man Ausdehnung und Struktur im Mikrokosmos messen? Die Unschärferelation gibt einen Zusammenhang zwischen auflösbarem Abstand und Impuls an:

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Weil ein Teilchenimpuls über  $p = h/\lambda$  mit der Teilchenwellenlänge verknüpft ist, gilt zum Beispiel für Photonenenergien:

$$E = h\nu = h \cdot c/\lambda = p \cdot c$$

Damit lässt sich die Unschärferelation auch schreiben:

$$\Delta r \cdot \Delta E \geq \hbar \cdot c$$

Zum Beispiel folgt für  $\Delta r = 10^{-18}$  m:

$$E \approx \frac{\hbar \cdot c}{\Delta r} \approx 200 \text{ GeV},$$

wobei  $\hbar \cdot c = 197 \text{ MeV} \cdot 10^{-15} \text{ m}$  benutzt wurde. Diese Energie erreicht ein Teilchen mit der Elementarladung  $e$ , wenn es eine Spannung von rund  $200 \cdot 10^9 \text{ V}$  durchläuft ( $\rightarrow$  große Beschleunigeranlagen).

### Energieabschätzungen:

Chemie der Atomhülle:	$\sim \text{eV}$	(H-Ionisation: 13 eV)
Kernphysik:	$\sim \text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$	(Bindungsenergien der Nukleonen)
Kernbausteine:	$\sim \text{GeV} = 10^9 \text{ eV}$	( $E = m \cdot c^2 \approx 1 \text{ GeV}$ für Nukleonen)
heutige Energien:	$\sim \text{TeV} = 10^{12} \text{ eV}$	(Substrukturen?)

**Wechselwirkungen (WW):** Bindungen der Teilchen beruhen auf Wechselwirkungen (=Kräften). Ohne Wechselwirkungen mit einem Detektor könnten wir auch nichts wahrnehmen. Zum Beispiel sehen wir ein Objekt, weil Licht mit dem Objekt und dem Auge wechselwirkt. Die bisher bekannten Wechselwirkungen sind:

- Gravitation
- elektromagnetische WW
- schwache WW
- starke WW

Im Makrokosmos erfahren wir die Gravitation und die elektromagnetische Wechselwirkung, während im Mikrokosmos die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung die wesentliche Rolle spielen.

Die Materie und ihre Wechselwirkungen (mit Ausnahme der Gravitation) werden heute durch ‘Quantenfeldtheorien’ (z.B. die Quantenelektrodynamik) beschrieben, die auf der

### Quantentheorie und Relativitätstheorie

basieren. Die theoretischen Bemühungen in der Elementarteilchenphysik werden wesentlich durch die Suche nach einer **vereinheitlichten Theorie** für alle Wechselwirkungen und Teilchen bestimmt. Ein besonderes Problem stellt dabei die Einbeziehung der Gravitation, beschrieben durch die Allgemeine Relativitätstheorie, dar.

### Ziel der Vorlesung:

- Einführung in die subatomare Struktur der Materie und ihre Wechselwirkungen;
- phänomenologisch orientiert (Experimente, Meßmethoden, Modelle);

- in dem Teilchenphysik-Teil werden neueste Erkenntnisse und Konzepte der Grundlagenforschung behandelt;
- dagegen werden in der Kernphysik eher die Anwendungen in Technik, Medizin, Geologie usw. betont.

Die wichtigen Beiträge der Teilchenphysik zum Verständnis der Entwicklung des Universums können hier nur gestreift werden.

# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Einheiten

Als Energieeinheit wird

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

verwandt. Massen lassen sich dann in  $\text{GeV}/c^2$  und Impulse in  $\text{GeV}/c$  messen (entsprechend den Relationen  $E = m c^2$ ,  $E = p c$ ).

In der Elementarteilchenphysik (weniger in der Kernphysik) benutzt man aus Gründen der Vereinfachung ein Einheitensystem (oft ‘natürliches Einheitensystem’ genannt), in dem die Naturkonstanten **Lichtgeschwindigkeit** [34]

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

und **Plancksche Konstante** [34]

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457168(18) \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6.58211915(56) \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$$

gleich 1 gesetzt werden:

$$\hbar = c = 1$$

Damit wird die Unschärferelation:

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq 1 \quad \text{und} \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq 1 \tag{1.1}$$

Mit  $\hbar = c = 1$  ergibt sich, daß sich Zeiten und Längen in einer einzigen Einheit ausdrücken lassen. Zum Beispiel können Zeit und Länge als reziproke Energien ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 1 \text{ s} &= 1.52 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \\ 1 \text{ m}^2 &= 2.58 \cdot 10^{31} \text{ GeV}^{-2} \end{aligned}$$

Statt GeV kann man auch m oder s als ‘Basiseinheit’ wählen. Man kann immer in SI-Einheiten zurückrechnen, indem man mit eindeutig bestimmten Potenzen  $c^n \hbar^m$  ( $= 1$  !) multipliziert. Beispiel:

$$2.58 \cdot 10^{31} \text{ GeV}^{-2} \cdot \hbar^2 c^2 = 1 \text{ m}^2$$

Nützlich sind in diesem Zusammenhang insbesondere die folgenden Beziehungen:

$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s}, \quad \hbar c = 0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$$

mit der Längeneinheit Femtometer = Fermi = fm =  $10^{-15}$  m ( $\approx$  Protonradius).

## 1.2 Relativistische Kinematik

### 1.2.1 Masse-Energie-Beziehung

Die Forderung, daß in jedem Inertialsystem die Form der Naturgesetze gleich ist und der experimentelle Befund, daß die Lichtgeschwindigkeit in jedem System die gleiche ist, führt zu der Formulierung der **Speziellen Relativitätstheorie**. Bei kleinen Geschwindigkeiten ( $v \ll c$ ) ist die klassische Mechanik eine gute Näherung. ‘Relativistisch’ muß gerechnet werden, wenn

- $v \approx c$ ;
- Energie-Masse-Umwandlungen stattfinden.

Energie-Masse-Umwandlungen finden nach der Einstein-Beziehung statt:

$$E = m_r c^2; \quad m_r = \text{relativistische Masse.}$$

Allgemeiner gilt:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2; \quad m_0 = \text{Ruhemasse.} \quad (1.2)$$

Im folgenden benutzen wir für  $m$  immer die Ruhemasse, die eine vom Bezugssystem unabhängige (invariante) Teilcheneigenschaft ist:

$$m = m_0$$

### 1.2.2 Kinetische Energie

Ausgehend von Gleichung (1.2) kann man für kleine Impulse bzw. Geschwindigkeiten folgende Entwicklung machen:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} = mc^2 + E_{kin}^{NR} \quad \text{für } p \ll mc. \quad (1.3)$$

Allgemein wird definiert:

$$E = mc^2 + T, \quad (1.4)$$

wobei  $mc^2$  die Ruheenergie und  $T$  die kinetische Energie ist. Die typischen Energien in der Kern- und Teilchenphysik sind:

Kernphysik:	$mc^2 \gg T$
‘Mittelenergiephysik’:	$mc^2 \approx T$
Teilchenphysik:	$mc^2 \ll T$

In dem Einheitensystem mit  $c = 1$  ergibt sich aus Gleichung (1.2):

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2 \quad (1.5)$$

Für große Energien,  $E \gg m$  gilt:

$$E \approx |\vec{p}|,$$

d.h.  $E$ ,  $\vec{p}$  haben die gleichen Zahlenwerte, wenn sie entsprechend in MeV und MeV/ $c$  gemessen werden. Ebenso haben für  $\vec{p} = 0$  Energie und Masse, gemessen in MeV/ $c^2$  die gleichen Zahlenwerte. Zum Beispiel ist die Masse des Protons etwa 938 MeV/ $c^2$ .

### 1.2.3 Vierervektoren und Lorentz-Invarianten

‘Lorentz-Invarianten’ sind Größen, die in jedem Inertialsystem gleich bleiben, zum Beispiel ist die Teilcheneigenschaft ‘Masse’ eine Lorentz-Invariante:

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2 = E'^2 - \vec{p}'^2 \quad (1.6)$$

Lorentz-Invarianten können als Skalarprodukt von ‘Vierervektoren’ geschrieben werden. Der ‘Viererimpuls’, zum Beispiel, lässt sich auf folgende Arten schreiben:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ (c)\vec{p} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

und der Raum-Zeit-Vektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c)t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Aus der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt, daß eine sphärische Lichtausbreitung in jedem Inertialsystem gleich gesehen wird:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (1.9)$$

Diese Relation benutzt man zur Definition eines Skalarproduktes:

$$x^2 = x \cdot x = x_0^2 - \vec{x}^2 = x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu \quad (1.10)$$

Für die letzten beiden Terme wurde die ‘Einstein-Konvention’ benutzt: über gleiche Indizes wird summiert:

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu \quad (1.11)$$

Man nennt

$$x_\mu = \begin{cases} x^0 & \mu = 0 \\ -x^\mu & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

den ‘kovarianten’ und  $x^\mu$  den ‘kontravarianten’ Vektor. Beide sind durch den ‘metrischen Tensor’

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) \quad (1.12)$$

über die Beziehungen

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu; \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (1.13)$$

verknüpft.

Die Masse lässt sich so durch das Skalarprodukt des Viererimpulses ausdrücken:

$$m^2 = p^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 = E^2 - \vec{p}^2 \quad (1.14)$$

### 1.2.4 Lorentz-Transformationen

Transformationen zwischen Inertialsystemen nennt man Lorentz-Transformationen:

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \quad \text{oder} \quad p' = \Lambda p \quad (1.15)$$

Eigentliche Lorentz-Transformationen lassen sich als kontinuierliche Aneinanderreihung von infinitesimalen Transformationen (mit  $\det \Lambda = 1$ ) darstellen. Uneigentliche Lorentz-Transformationen sind zum Beispiel Raum- oder Zeitspiegelungen, die in der Teilchenphysik eine wichtige Rolle spielen (Invarianzen der Naturgesetze gegenüber Raumspiegelung und Zeitumkehr). Hier betrachten wir zunächst nur **eigentliche Lorentz-Transformationen**, die entweder räumliche Drehungen oder ‘Boosts’ sein können.

Ähnlich den Orthogonalitäts- oder Unitaritätsbedingungen für orthogonale beziehungsweise unitäre Matrizen ergibt sich aus der Forderung der Invarianz der Skalarprodukte gegenüber Lorentz-Transformationen:

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \quad (1.16)$$

Das folgt aus der Invarianz der Skalarprodukte:

$$x^2 = x^\rho x_\rho = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = x'^2 = x'^\mu x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma \quad (1.17)$$

**a) Räumliche Drehung:** In diesem Fall wirkt die Matrix  $\Lambda$  nur auf die Raumkomponenten, zum Beispiel bei einer Drehung um die z-Achse:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Die Umkehrtransformation  $\Lambda^{-1}$  ergibt sich durch Ersetzen von  $\theta$  durch  $-\theta$ .

**b) Lorentz-Boost:** Ein Lorentz-Boost ist eine Bewegung in eine Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$ . Dazu definiert man:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{|\vec{v}|}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.19)$$

Mit  $c = 1$  ist  $\beta = v$  und es gilt:

$$\beta = \frac{|\vec{p}|}{E} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{E}{m}. \quad (1.20)$$

Ein Lorentz-Boost transformiert immer Raum- und Zeitkomponenten gleichzeitig. Zum Beispiel lautet ein Boost mit der Geschwindigkeit  $\beta$  in z-Richtung:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Man sieht, daß  $\beta = 0$  ( $\Rightarrow \gamma = 1$ ) die Einheitsmatrix ergibt. Auf den Vektor  $p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$  angewandt:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma E - \gamma \beta p_z \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= -\gamma \beta E + \gamma p_z \end{aligned}$$

Die Umkehrtransformation  $\Lambda^{-1}$  ergibt sich durch Ersetzen von  $\beta$  durch  $-\beta$ .

Die Matrix  $\Lambda$  kann sowohl eine aktive (Teilchen wird transformiert) als auch eine passive (KO-System wird transformiert) Transformation darstellen. Den Unterschied kann man sich gut mit dem Fall  $\vec{p} = 0$ , für den sich  $p'_z < 0$  ergibt, klarmachen (Abb. 1.1):  $\Lambda$  ist eine

- passive Transformation: Geschwindigkeit  $+\beta$  in z-Richtung;
- aktive Transformation: Geschwindigkeit  $-\beta$  in z-Richtung.

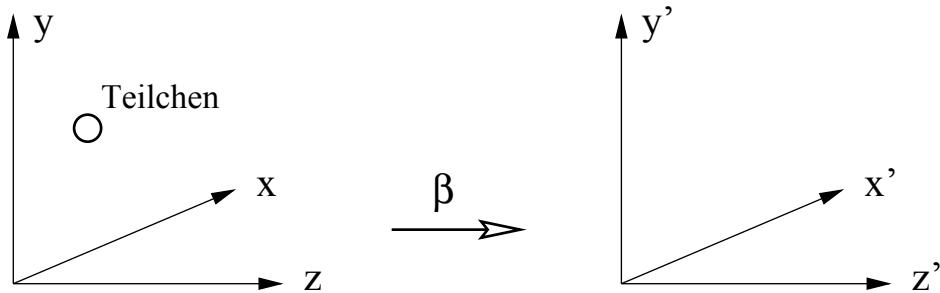


Abbildung 1.1: Der Boost des Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit  $+\beta$  in z-Richtung ist äquivalent einem Boost des Teilchens in die entgegengesetzte Richtung.

Der allgemeine Fall einer eigentlichen Lorentz-Transformation ist eine Kombination aus Drehung und Boost:

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\theta}, \vec{\beta}) \quad (1.22)$$

### 1.2.5 Poincaré-Transformationen

Verbindet man eine eigentliche Lorentz-Transformation  $\Lambda$  mit einer räumlichen und zeitlichen Translation  $a$  ( $a$  ist ein Vierervektor), so erhält man eine Poincaré-Transformation ( $\Lambda, a$ ):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad \text{oder} \quad x' = \Lambda x + a \quad (1.23)$$

Die Poincaré-Transformation spielt eine wichtige Rolle für die Klassifikation von Teilchenzuständen, von denen ein bestimmtes Transformationsverhalten bei Poincaré-Transformationen gefordert wird.

### 1.2.6 Anwendungen

**a) Zerfall eines Teilchens:** Abbildung 1.2 zeigt eine kompakte Darstellung der Impuls- und Energieerhaltung für den Zerfall eines Teilchens.

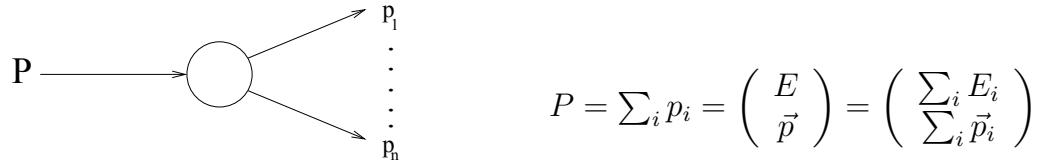


Abbildung 1.2: Energie-Impuls-Erhaltung bei einem Teilchenzerfall

**b) Schwerpunktsenergie:** Wir betrachten zwei Teilchen 1 und 2, die aneinander streuen und in zwei Teilchen 3 und 4 übergehen (Abb. 1.3). Energie-Impuls-Erhaltung fordert:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (1.24)$$

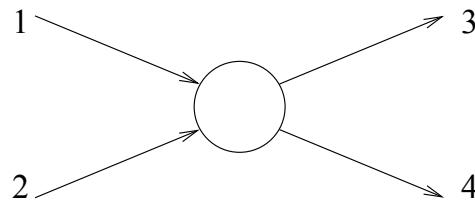


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung eines Streuprozesses

Daraus lassen sich die Invarianten  $s, t, u$  (Mandelstam-Variable) bilden:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (1.25)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (1.26)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad (1.27)$$

Die Invariante  $s$  ist das Quadrat der Schwerpunktsenergie, die Invarianten  $t$  und  $u$  sind Quadrate von Viererimpulsüberträgen. Im Schwerpunktssystem (CMS) gilt:

$$s = \left( \begin{array}{c} E_1 + E_2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{array} \right)^2 = \left( \begin{array}{c} E_1 + E_2 \\ \vec{0} \end{array} \right)^2 = E_{cms}^2 = M^2 \quad (1.28)$$

Dabei bezeichnet man  $M$  als die ‘invariante Masse’ des Systems; aus den Energien von 1 und 2 kann sich ein Zustand der Masse  $M$  bilden, der dann in 3 und 4 zerfällt. Nur zwei der Mandelstam-Variablen sind unabhängig. Es gilt die Beziehung:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (1.29)$$

**c) Transformation zwischen Schwerpunkt- und Laborsystem:**

Theoretische Rechnungen werden in der Regel im Schwerpunktssystem gemacht, gemessen wird im Labor. Bei ‘fixed target’ Experimenten werden Teilchenstrahlen auf ruhende ‘Targets’ geschossen (Abb. 1.4). Die Berechnung wird in den Übungen durchgeführt.

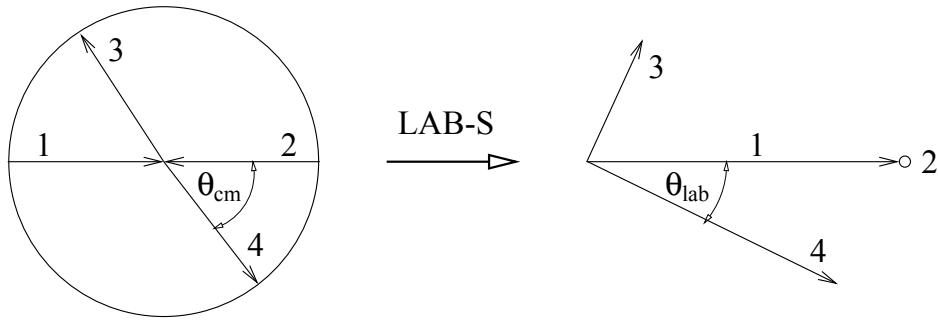


Abbildung 1.4: Transformation von dem Schwerpunktsystem einer Zweikörperreaktion in ein dazu bewegtes System.

### 1.3 Quantenmechanische Beschreibung von Teilchen

Quantenmechanisch wird ein Teilchen als ein Zustand beschrieben, der eindeutig durch einen Satz von Quantenzahlen  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$  festgelegt ist:

$$\psi = |\alpha\rangle \quad (1.30)$$

Zum Beispiel könnte man einen Zustand durch Masse, Impuls und Spin festlegen:

$$\psi = |m, \vec{p}, s\rangle \quad (1.31)$$

Bemerkung für diejenigen, die die Darstellungstheorie kennen: Diese Zustände sind Darstellungen der Poincaré-Gruppe.

Die Quantenzahlen sind Eigenwerte von Operatoren  $\mathbb{A}$ , die auf den Zustand  $\psi$  angewendet werden, zum Beispiel:

$$\mathbb{A}_i|\alpha\rangle = \alpha_i|\alpha\rangle \quad (1.32)$$

Zwei Quantenzahlen  $\alpha_i, \alpha_j$  sind nur dann gleichzeitig meßbar, wenn die entsprechenden Operatoren ‘kommutieren’:

$$[\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j] = \mathbb{A}_i\mathbb{A}_j - \mathbb{A}_j\mathbb{A}_i = 0 \quad (1.33)$$

Zeit- und Ortskoordinaten oder Energie und Impuls können als (kontinuierliche) Quantenzahlen aufgefaßt werden. Zeit und Energie oder Ort und Impuls können nicht gleichzeitig genau gemessen werden, die entsprechenden Operatoren vertauschen nicht. Diese Aussage ist in der Unschärferelation ausgedrückt.

**Wellenfunktionen von Teilchen:** Die Orts- und Zeitabhängigkeit eines Teilchenzustandes  $\psi(\vec{x}, t, \alpha')$  wird durch Wellenfunktionen gegeben, die Lösungen von Differentialgleichungen sind. Zum Beispiel beschreiben die Lösungen der Schrödinger-Gleichung (ohne Potentialterm) ein freies Teilchen mit Spin  $s=0$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad \text{oder } (\hbar = 1) \quad -\frac{1}{2m}\Delta\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad (1.34)$$

Dabei ist der Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^2 \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Lösungen, die ein freies Teilchen mit Impuls  $\vec{p}$  und Energie  $E$  darstellen, sind die ebenen Wellen:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} = \psi_0 e^{-ipx} \quad (1.36)$$

Einsetzen der Lösungen in die Schrödinger-Gleichung ergibt die nicht-relativistische Energie eines freien Teilchens:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (1.37)$$

Die Wellenfunktion ist eine komplexe Funktion, messen kann man aber nur reelle Größen ('Observable'). Das Betragsquadrat der Wellenfunktion  $\psi(\vec{x}, t)$  gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte an, das Teilchen an dem Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  zu finden:

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \quad (1.38)$$

Im allgemeinen sind Observable Erwartungswerte hermitescher Operatoren (hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte):

$$\langle a \rangle = \int dx dy dz \psi^* (\mathbb{A}\psi) = \int dx dy dz \psi (\mathbb{A}\psi)^* \quad (1.39)$$

Falls  $\psi$  ein reiner Zustand ist, ist  $\langle a \rangle$  ein Eigenwert von  $\mathbb{A}$ . Zum Beispiel ist der Erwartungswert des Abstandes  $r$  eines Elektrons vom Kern:

$$\langle r \rangle = \int dx dy dz \psi^* (r\psi). \quad (1.40)$$

Mit den Energie- und Impulsoperatoren

$$\mathbb{E} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\vec{\mathbb{P}} = -i\vec{\nabla} \quad (1.42)$$

lautet die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen (1.34):

$$\frac{\vec{\mathbb{P}}^2}{2m} \psi = \mathbb{E}\psi \quad (1.43)$$

Die Energie- und Impulsoperatoren, angewendet auf Eigenfunktionen zu diesen Operatoren, haben als Eigenwerte  $E$  und  $\vec{p}$ :

$$\mathbb{E}\psi = i \frac{\partial}{\partial t} \psi = E\psi \quad (1.44)$$

$$\vec{\mathbb{P}}\psi = -i\vec{\nabla}\psi = \vec{p}\psi \quad (1.45)$$

Eigenfunktionen zu  $\mathbb{E}$  und  $\vec{\mathbb{P}}$  sind zum Beispiel die ebenen Wellen in (1.36).

**Drehimpuls und Spin:** Analog lässt sich auch der Drehimpulsoperator bilden. Da der Bahndrehimpuls eines Teilchens um den Ursprung  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$  ist, ergibt sich für den Operator:

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{x} \times \vec{\mathbb{P}} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}$$

Ein Zustand kann gleichzeitig Eigenzustand zu  $\vec{\mathbb{L}}^2$  und einer Komponente  $\mathbb{L}_z$  haben. Man sagt ein Zustand hat den Bahndrehimpuls  $l$  ( $l = 0, 1, 2 \dots$ ), wenn die Eigenwerte zu  $\mathbb{L}_z$  die  $2l + 1$  Werte  $m = l, l - 1, \dots, -(l - 1), -l$  annehmen können (die Drehimpulskomponente ist dann jeweils  $m \cdot \hbar$ ). Ein Drehimpulszustand ist durch die Quantenzahlen  $l, m$  gegeben.

Neben dem Bahndrehimpuls kann ein Teilchen auch einen Eigendrehimpuls, einen Spin haben. Im Gegensatz zum Bahndrehimpuls kann die Spinquantenzahl ganz- und halbzahlig sein:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Einen Spin  $s = \frac{1}{2}$  haben zum Beispiel das Elektron und das Proton, das Photon hat einen Spin  $s = 1$ . Teilchen mit halbzahligem Spin heißen **Fermionen**, solche mit ganzzahligem Spin **Bosonen**. Für Fermionen gilt das Pauli-Prinzip: zwei Fermionen können nicht den gleichen Quantenzustand einnehmen, sondern müssen sich wenigstens in einer Quantenzahl unterscheiden (zum Beispiel ergibt sich die Schalenstruktur in der Atomhülle, weil die Elektronen nicht alle im Grundzustand sein können). Bosonen dagegen neigen dazu, sich in dem gleichen Zustand anzuhäufen (das wird zum Beispiel bei den Photonen in einem Laser ausgenutzt).

Drehimpulse (mit der Quantenzahl  $j$ ) können bezüglich einer vorgegebenen Richtung (zum Beispiel die Richtung eines Magnetfeldes)  $2j + 1$  Einstellungen haben, die sich jeweils um eine Einheit unterscheiden.

## 1.4 Relativistische Wellengleichungen

Die Schrödinger-Gleichung ist offensichtlich nicht-relativistisch, das heißt nicht Lorentz-kovariant, weil sie linear in der Energie, aber quadratisch im Impuls ist (man nennt eine Formel kovariant bezüglich einer Transformation, wenn sie unter dieser Transformation ihre Form nicht ändert). Das Raum-Zeit-Verhalten von Teilchenzuständen sollte aber durch Wellenfunktionen beschrieben werden, die relativistisch kovarianten Differentialgleichungen genügen. Für die Betrachtungen des Raum-Zeit-Verhaltens sind die Teilchenzustände durch Masse, Impuls und Spin festgelegt (1.31):

$$\psi = |m, \vec{p}, s\rangle$$

Wir betrachten im folgenden Wellengleichungen für Spin  $s = 0$  und  $s = 1/2$ .

### 1.4.1 Klein-Gordon-Gleichung ( $s = 0$ )

Die Schrödinger-Gleichung (1.43) angewandt auf Eigenfunktionen zu Energie und Impuls ergibt die nicht-relativistische Energie freier Teilchen:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{1.46}$$

Wenn man die Beziehung

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2$$

erfüllen will, kann man formal folgende Operatoren definieren:

$$\mathbb{E}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \vec{\mathbb{P}}^2 = -\vec{\nabla}^2 = -\Delta, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial^\mu \partial_\mu \quad (\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}), \quad (1.47)$$

wobei  $\square$  der d'Alembert-Operator ist. Es sei darauf hingewiesen, daß der kontravariante Vektor ( $\partial^\mu$ ) die Ableitung nach dem kovarianten Vektor ( $x_\mu$ ) ist. Während also gilt

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \text{ und } (p^\mu) = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix},$$

ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$(\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Mit den Operatoren (1.47) erhält man formal eine relativistisch kovariante Schrödinger-Gleichung, die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \quad (1.48)$$

oder:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

Wie bei der freien Schrödinger-Gleichung sind ebene Wellen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-ipx} = \phi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad (1.49)$$

Die Größe  $\phi_0$  ist eine im allgemeinen komplexe Zahl, die die Normierung des Zustandes festlegt. Da  $\phi(x)$  also eine skalare Funktion ist, beschreibt sie ein ‘skalares Teilchen’, also ein Teilchen mit Spin  $s = 0$ . Ein Beispiel für Teilchen mit Spin 0 sind die Pionen, die in drei Ladungszuständen ( $\pi^\pm$ ,  $\pi^0$ ) auftreten und in großer Zahl in hochenergetischen Reaktionen von Kernteilchen erzeugt werden.

Für die ebenen Wellen in (1.49) ergeben sich mit  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$  jeweils zwei Lösungen mit

$$E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad \text{und} \quad E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (1.50)$$

Die Lösungen mit negativer Energie kann man nicht einfach wegdiskutieren, ohne sich Inkonsistenzen einzuhandeln. Sie werden benötigt, um ein vollständiges System von Eigenfunktionen zu erhalten, mit denen sich allgemeine Lösungen superponieren lassen. Für die Schrödinger-Gleichung ergibt sich dieses Problem nicht, weil die Ableitung nach der Zeit linear ist. Insbesondere wird dadurch auch das Vorzeichen des Terms  $iEt$  in der Lösung (1.36) festgelegt.

Ein weiteres Problem ergibt sich dadurch, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung negativ werden kann. Eine kovariante Formulierung der Erhaltung des Wahrscheinlichkeitsstromes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.51)$$

erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  als 0-Komponente des Stromes definiert:

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Mit der kovarianten Formulierung von  $\rho$  und  $\vec{j}$

$$\rho = i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right) \quad (1.53)$$

$$\vec{j} = -i \left( \phi^* \vec{\nabla} \phi - (\vec{\nabla} \phi^*) \phi \right) \quad (1.54)$$

oder kompakt

$$j^\mu = i (\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi) \quad (1.55)$$

liefert die Klein-Gordon-Gleichung die Stromerhaltung:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (1.56)$$

Für die ebenen Wellen mit positiver und negativer Energie ergibt sich der ‘Viererstrom’

$$(j_\pm^\mu) = 2|\phi_0|^2 \begin{pmatrix} \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \\ \pm \vec{p} \end{pmatrix} = \pm 2|\phi_0|^2 (p^\mu) \quad (1.57)$$

Die Lösungen negativer Energie haben also eine negative Wahrscheinlichkeitsdichte. Dieses Ergebnis hatte zunächst dazu geführt, daß die Klein-Gordon-Gleichung als unphysikalisch verworfen wurde. Erst durch die Entwicklung der relativistischen Gleichung für Spin-1/2-Teilchen (Dirac-Gleichung, siehe unten), kam man nachträglich zu einem Verständnis der Lösungen mit negativen Energien: sie entsprechen **Antiteilchen**, deren ‘ladungsartigen’ Quantenzahlen entgegengesetztes Vorzeichen relativ zu den Teilchen haben. Was Teilchen und was Antiteilchen beziehungsweise was Materie und was Antimaterie genannt wird, wird dadurch festgelegt, daß uns fast ausschließlich Materie umgibt.

**Zur Interpretation der Lösungen negativer Energie:** Wir betrachten die ebenen Wellen (1.49)

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})},$$

die sich in Raum und Zeit ausbreitet. Wir können die positiven und negativen Energien wie folgt interpretieren:

$E > 0$  Welle breitet sich vorwärts in der Zeit aus

$E < 0$  Welle breitet sich rückwärts in der Zeit aus

Abbildung 1.5a zeigt als Beispiel ein positiv geladenes Pion,  $\pi^+$ , mit positiver Energie, das an diskreten Raum-Zeit-Punkten an Potentialen  $V, V'$  gestreut wird. Im Diagramm b) ist die Energie des ersten Pions  $E_1 > 0$  und des zweiten Pions  $E_2 < 0$ . Die Interpretation ist:

$V$  absorbiert die Energie  $E_1$  und Ladung +1

$V$  emittiert die Energie  $E_2$  und Ladung +1

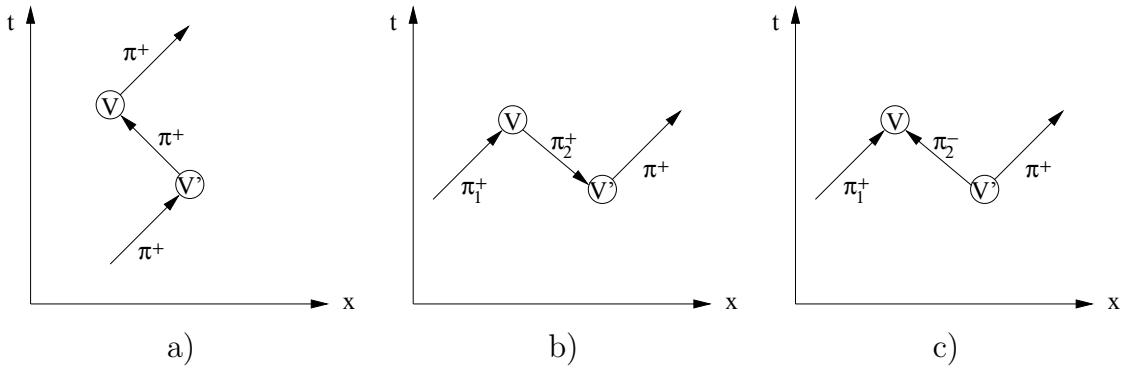


Abbildung 1.5: Absorption (Pfeil zeigt auf  $V, V'$ ) und Emission (Pfeil zeigt von  $V, V'$  weg) von Teilchen und Antiteilchen an Potenzialen  $V, V'$ .

Der Energiegewinn an dem Potential  $V$  ist  $E_1 - E_2 = E_1 + |E_2|$  und die Ladungsbilanz ist  $+1 - (+1) = 0$ . Die Emission des Teilchens  $\pi_2^+$  mit negativer Energie ist äquivalent zur Absorption des Antiteilchens  $\pi_2^-$  mit positiver Energie (Abb. 1.5c).

Der elektromagnetischen Strom ist das Produkt von Ladung und Wahrscheinlichkeitsstrom (1.57):

$$j_{em}(\pi^+(p)) = (+e) 2|\phi_0|^2 (+p) = (-e) 2|\phi_0|^2 (-p) = j_{em}(\pi^-(p)) \quad (1.58)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Absorption eines Teilchens mit } p^\mu &\equiv \text{Emission eines Antiteilchens mit } -p^\mu \\ \text{Emission eines Teilchens mit } p^\mu &\equiv \text{Absorption eines Antiteilchens mit } -p^\mu \end{aligned}$$

### 1.4.2 Dirac-Gleichung ( $s = 1/2$ )

Der Grund für die negativen Energien und Wahrscheinlichkeitsdichten bei den Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung ist die Ableitung 2. Ordnung in der Zeit, der  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ -Term. Deshalb versuchte Dirac einen anderen Ansatz, indem er eine Wellengleichung mit folgenden Eigenschaften forderte:

- nur Ableitungen 1. Ordnung in Zeit und Raum;
- Lorentz-Kovarianz;
- Erfüllung der Relation  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ .

Diese Forderungen führten auf den Ansatz:

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left( -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta \cdot m \right) \psi(x) \quad (1.59)$$

Diese Gleichung kann kovariant geschrieben werden:

$$\left( i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi = 0 \quad (1.60)$$

Mit dem Vierervektor  $\gamma$ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \cdot \vec{\alpha} \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Andere Formen der Dirac-Gleichung sind ( $p'$  wird gesprochen ‘‘p-dagger’’) :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \quad (1.62)$$

$$(\gamma \cdot p - m) \psi = 0 \quad (1.63)$$

$$(p' - m) \psi = 0 \quad (1.64)$$

Die Dirac-Gleichung läßt sich nur erfüllen, wenn

- $\psi$  ein 4-komponentiger Spinor ist:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}; \quad (1.65)$$

- die  $\gamma^\mu$   $4 \times 4$ -Matrizen sind, die den Anti-Kommator-Relationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I \quad (1.66)$$

genügen ( $I = 4 \times 4$ -Einheitsmatrix).

Eine Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen ist:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.67)$$

Dabei sind die Elemente der Matrizen in (1.67)  $2 \times 2$ -Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Die  $\sigma^k$  sind die Pauli-Matrizen, die, mit einem Faktor  $1/2$  multipliziert, die Dreihimpulsoperatoren für den Drehimpuls  $1/2$  sind. Die 4-komponentigen Spinoren beschreiben Teilchen und Antiteilchen jeweils mit den beiden Spinkomponenten ( $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ).

Warnung: es gibt verschiedene Darstellungen der  $\gamma$ -Matrizen. Wir folgen hier der Konvention von Bjorken und Drell [22], die zum Beispiel auch in den empfehlenswerten Darstellungen von Aitchison und Hey [26] und Schmüser [27] benutzt wird. Für praktische Rechnungen sollte man immer sicherstellen, daß man eine bestimmte Konvention benutzt.

Der Lorentz-kovariante Wahrscheinlichkeitsstrom ist:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.69)$$

mit dem ‘adjungierten’ Spinor:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.70)$$

Dabei ist  $\psi^\dagger = \psi^{T*}$  der hermitesch konjugierte Spinor (=Zeilenvektor). Mit Hilfe der Dirac-Gleichung läßt sich zeigen, daß Stromerhaltung gilt:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (1.71)$$

Auch die Dirac-Gleichung hat Lösungen mit positiver und negativer Energie:

$$\psi(x) = u(p, s)e^{-ipx}, \quad E > 0 \quad (1.72)$$

$$\psi(x) = v(p, s)e^{ipx}, \quad E < 0 \quad (1.73)$$

Die Spinoren  $u$  und  $v$  hängen von dem Viererimpuls  $p$  und der Spineinstellung  $s = \pm 1/2$  ( $s$  ist hier die magnetische Quantenzahl) ab:

$$u(p, s) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E+m} \cdot \phi^s \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

$$v(p, s) = \sqrt{|E| + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{|E|+m} \cdot \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

Die  $\phi^s$  und  $\chi^s$  sind 2-komponentige Spinoren:

$$\phi^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi^{-1/2} \quad (1.76)$$

$$\phi^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi^{1/2} \quad (1.77)$$

Zum Beispiel ergibt sich im Ruhesystem des Teilchens und Antiteilchens ( $\vec{p} = 0$ ) für  $s = +1/2$ :

$$u(p, s) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \phi^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

$$v(p, s) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

**Deutung der Lösungen mit negativer Energie:** Entsprechend wie bei den Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung findet man folgende Relationen für Fermionen mit Spin 1/2 :

$$\begin{aligned} \text{Absorption eines Teilchens mit } p^\mu, s &\equiv \text{Emission eines Antiteilchens mit } -p^\mu, -s \\ \text{Emission eines Teilchens mit } p^\mu, s &\equiv \text{Absorption eines Antiteilchens mit } -p^\mu, -s \end{aligned}$$

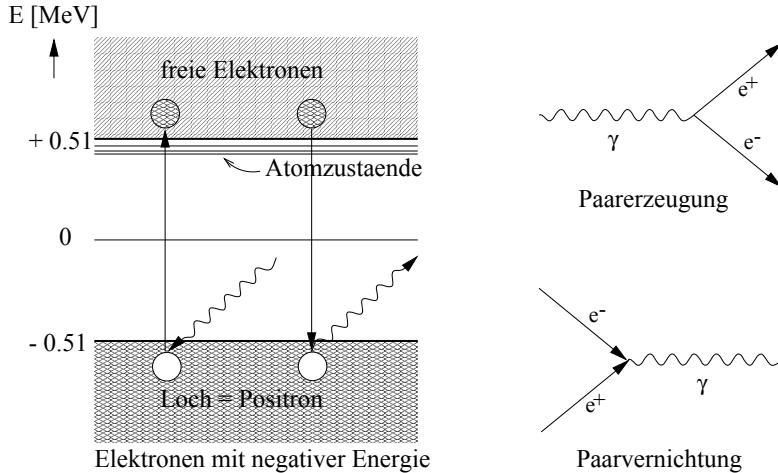


Abbildung 1.6: Dirac'schen Löchertheorie: Übergänge zwischen den Zuständen positiver und negativer Energie sind durch Absorption und Emission von Photonen möglich. Die entsprechenden Graphen auf der rechten Seite werden Feynman-Graphen genannt.

Eine anschauliche (allerdings physikalisch nicht ganz korrekte) Deutung der negativen Energiezustände wird in der Dirac'schen Löchertheorie gegeben: Die Elektronen füllen alle negativen Energiezustände unterhalb  $-m_e$  (Dirac-See der Elektronen). Die Energiezustände für freie Elektronen liegen bei Energien  $E \geq +m_e$ . Ein Photon mit einer Energie, die größer ist als zweimal die Elektronenmasse,  $E_\gamma \geq 2m_e = 1.02$  MeV, kann ein Elektron aus dem See heben und frei beweglich machen. Das zurückbleibende Loch im See entspricht einem Positron: durch Absorption eines Photons wurde ein Elektron-Positron-Paar erzeugt. Fällt ein Elektron zurück in ein Loch, wird die Energie wieder in Form eines Photons frei, das Paar hat sich vernichtet.

Durch die Einbeziehung eines quantisierten elektromagnetischen Feldes (= Photonfeld) ist die Dirac-Theorie zu der Quantenelektrodynamik (QED) erweitert worden. Wichtige Vorhersagen der QED sind zum Beispiel die Lamb-Shift (siehe Atomphysik) und das anomale magnetische Moment des Elektrons, ausgedrückt durch den Landé'schen  $g$ -Faktor, der für das Elektron etwa 2 ist.

**Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld:** Die Wechselwirkung von Fermionen mit der Ladung  $q$  mit einem klassischen elektromagnetischen Feld

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

( $\phi$  ist das Coulomb-Potential und  $\vec{A}$  das Vektorpotential) kann durch die ‘minimale Substitution’ in die Dirac-Theorie einbezogen werden:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (1.81)$$

oder

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu \quad (1.82)$$

Die Dirac-Gleichung lautet mit dieser Substitution:

$$[\gamma_\mu(p^\mu - qA^\mu) - m]\psi = 0 \quad (1.83)$$

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu + iqA^\mu) - m]\psi = 0 \quad (1.84)$$

Diese Gleichung kann als relativistische Form der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron der Ladung  $q = -e$  in einem elektromagnetischen Feld betrachtet werden (das Feld ist hier nicht quantisiert, dieser Schritt wird in den Quantenfeldtheorien, QFT, vollzogen). Die Gleichung läßt sich für den nicht-relativistischen Grenzfall entwickeln (siehe zum Beispiel Bjorken und Drell [22], Kap. 1.4):

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left( \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - e\phi \right)\varphi \quad (1.85)$$

Die Wellenfunktion  $\varphi$  ist ein 2-komponentiger Spinor,  $\vec{\sigma}$  ist ein Operator mit den Pauli-Matrizen als Komponenten. Das entspricht der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron in einem elektromagnetischen Feld mit dem zusätzlichen Term:

$$\Delta E = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = 2\mu_{Bohr}s_zB = g\mu_{Bohr}s_zB \quad (1.86)$$

Das ist die Energie des magnetischen Momentes des Elektrons in einem B-Feld in z-Richtung. Gegenüber einer klassischen Betrachtung ergibt die Dirac-Theorie ein um einen Faktor  $g = 2$  größeres magnetisches Moment des Elektrons. Der  $g$ -Faktor führt dazu, daß der Gesamtdrehimpuls  $\vec{j}$  und das damit verbundene magnetische Moment  $\vec{\mu}_j$  in Elektronensystemen mit Spin-Bahn-Kopplung nicht mehr parallel sind. Die daraus resultierenden ‘Anomalien’ beobachtet man zum Beispiel beim ‘anomalen’ Zeeman-Effekt.

Das ‘anomale magnetische Moment’ des Elektrons ist mit hoher Präzision gemessen worden. Dabei ist eine leichte Abweichung von  $g = 2$  festgestellt worden, die durch Quantenkorrekturen erklärt wird (siehe Abb. 1.7). Die Quantenkorrekturen können in eine Störungsreihe nach Potenzen der Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (1.87)$$

entwickelt werden. Die genaue Messung von  $a = \frac{g-2}{2}$  ist ein Test der Quantenelektrodynamik (QED). Experimentell sind die besten Resultate mit ‘magnetischen Flaschen’, in denen einzelne Elektronen beobachtet werden, erzielt worden (Dehmelt et al., Nobelpreis 1989; siehe ‘Spektrum der Wissenschaft’, Oktober 1980). Der Vergleich mit der Vorhersage der QED zeigt, daß auch die theoretischen Rechnungen eine erstaunliche Präzision erreicht haben:

$$a_{exp} = (11596521869 \pm 41) \cdot 10^{-13} \quad (1.88)$$

$$a_{theo} = (11596521535 \pm 12 \pm 280) \cdot 10^{-13} \quad (1.89)$$

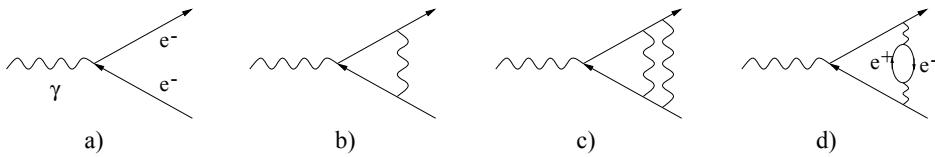


Abbildung 1.7: Beispiele für Quantenkorrekturen (oder ‘Strahlungskorrekturen’) zum magnetischen Moment des Elektrons. In a) ist der einfachste Feynman-Graph für die Ankopplung eines Magnetfeldes (entspricht dem Photon) an das magnetische Moment eines Elektrons gezeigt. Die Graphen b) bis d) sind Beispiele für Korrekturen: b) das Elektron emittiert ein Photon vor der Wechselwirkung und absorbiert es wieder danach (Vertexkorrektur); c) zeigt eine Vertexkorrektur mit zwei ausgetauschten Photonen; in d) fluktuiert ein Photon in ein virtuelles  $e^+e^-$ -Paar (Vakuumpolarisierung). Die Strahlungskorrekturen werden in einer Störungsrechnung nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten  $\alpha$  entwickelt. Die Graphen entsprechen jeweils einer bestimmten Ordnung in  $\alpha$ .

Bei der theoretischen Rechnung wurde hier für die Berechnung der Quantenkorrekturen die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  mit Hilfe des Quanten-Hall-Effektes bestimmt. Der zweite Fehler in (1.89) stammt von der Ungenauigkeit dieser Messung, der erste Fehler ist die geschätzte Ungenauigkeit der Rechenmethode. Die Differenz zwischen Theorie und Experiment ist nicht signifikant:

$$\Delta a = (33 \pm 28) \cdot 10^{-12}. \quad (1.90)$$

## 1.5 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsbreite

### 1.5.1 Definition

Der Wirkungsquerschnitt ist die wichtigste Meßgröße in Streureaktionen. Er ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Streuung, die wiederum von Stärke und Art der Wechselwirkungen zwischen den Streupartnern abhängt. Der Wirkungsquerschnitt lässt sich als effektive Fläche, über die die Teilchen wechselwirken, interpretieren. Wir machen uns die Situation an Hand von Abb. 1.8 klar: Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  sei die Fläche eines Targetteilchens, wie sie ein einfallender Strahl von Teilchen sieht. Die Strahlteilchen nehmen wir zur Vereinfachung als ausdehnungslos an. Der Strahl trifft auf eine Fläche  $F$  des Targets mit einer Rate von  $N_{in}$ . Das Target hat die Länge  $l$ , in dem bestrahlten Volumen  $V = F \cdot l$  befinden sich

$$N_T = \frac{\rho \cdot V}{A} \cdot N_A \quad (1.91)$$

Targetteilchen. Dabei ist  $\rho$  die Targetdichte,  $A$  das Atomgewicht und  $N_A$  die Avogadro-Zahl. Der Strahl sieht also eine Gesamtfläche der Targetteilchen von  $N_T \cdot \sigma$ . Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu treffen, ist also  $N_T \cdot \sigma / F$ . Diese Wahrscheinlichkeit kann auch durch die Streu- oder Reaktionsrate  $N_R$  relativ zu der Rate der einlaufenden Teilchen ausgedrückt werden (für ein ‘dünnen’ Target, d. h. der Strahl

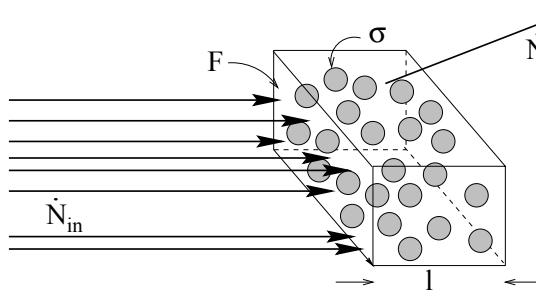


Abbildung 1.8: Zur Definition des Wirkungsquerschnittes



Abbildung 1.9: Kollision von Teilchenstrahlen

wird annähernd nicht geschwächt):

$$w = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in}} = \frac{N_T \cdot \sigma}{F} \quad (1.92)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in}} \cdot \frac{F}{N_T} = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in}} \cdot \frac{A}{\rho \cdot l \cdot N_A} \quad (1.93)$$

Die Reaktionsrate ist in einem Streuexperiment also immer proportional dem Wirkungsquerschnitt. Der Proportionalitätsfaktor ist die Luminosität  $L$ :

$$\dot{N}_R = \sigma \cdot L \quad (1.94)$$

In Speicherringen, durchdringen sich zwei entgegengesetzt laufende Teilchenstrahlen mit Strömen  $I_1$  und  $I_2$  und Strahlquerschritten  $F$  an diskreten Wechselwirkungspunkten (Abb.1.9). Die Luminosität ist diesem Fall:

$$L \sim \frac{I_1 \cdot I_2}{F} \quad (1.95)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche; als Einheit wird das barn benutzt:

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (1.96)$$

Die geometrische Fläche eines Protons ist  $\pi r_p^2 \approx 30 \text{ mb}$ , was die Größenordnung von Wirkungsquerschnitten aufgrund von Kernkräften angibt. Typisch für die Teilchenphysik sind mb,  $\mu\text{b}$ , nb, pb. Dagegen sind atomare Wirkungsquerschnitte viel größer; ihre Größenordnung lässt sich entsprechend durch den Bohrschen Radius  $a_0$  ( $a_0 \approx 0.05 \text{ nm}$ ) abschätzen,  $\sigma_{atom} \approx \pi a_0^2 \approx 10^8 \text{ b}$ .

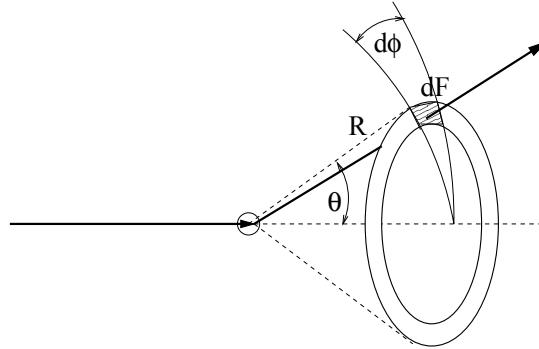


Abbildung 1.10: Raumwinkelelement, in das ein Teilchen gestreut wird.

**Differentieller Wirkungsquerschnitt:** Häufig wird der Wirkungsquerschnitt differentiell in Abhängigkeit von kinematischen Variablen gemessen, zum Beispiel in Abhängigkeit von den Streuwinkeln  $\theta$  und  $\phi$ . Ein Detektor (Abb. 1.10) messe die gestreuten Teilchen in einem Flächenelement  $dF$  im Abstand  $R$  vom Target, entsprechend einem Raumwinkelelement:

$$d\Omega = \frac{dF}{R^2} = d\phi d \cos \theta. \quad (1.97)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist durch die Anzahl der Teilchen, die in das Raumwinkelelement gestreut werden, entsprechend Gleichung (1.93) gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\dot{N}_{in}} \frac{dN_R}{d\Omega dt} \cdot \frac{A}{\rho \cdot l \cdot N_A} \quad (1.98)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich daraus durch Integration über alle Winkel:

$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (1.99)$$

### 1.5.2 Beispiele für Wirkungsquerschnittsberechnungen

a) **Streuung harter Kugeln:** Eine kleine Kugel wird an einer großen Kugel mit Radius  $R$  gestreut. Die kleine Kugel fällt mit dem Stoßparameter  $b$  ein und wird unter dem Winkel  $\theta$  gestreut (siehe Abb. 1.11).

Der Stoßparameter lässt sich als Funktion von  $\theta$  ausdrücken:

$$\frac{b}{R} = \sin \psi = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.100)$$

$$\Rightarrow db = \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.101)$$

Ein Streuelement um den Stoßparameter  $b$  und in einem Ausschnitt des Azimutwinkels  $\phi$  ist dann:

$$d\sigma = d\phi b db = \left( \frac{R}{2} \right)^2 d\phi d \cos \theta \quad (1.102)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{R}{2} \right)^2 \quad (1.103)$$

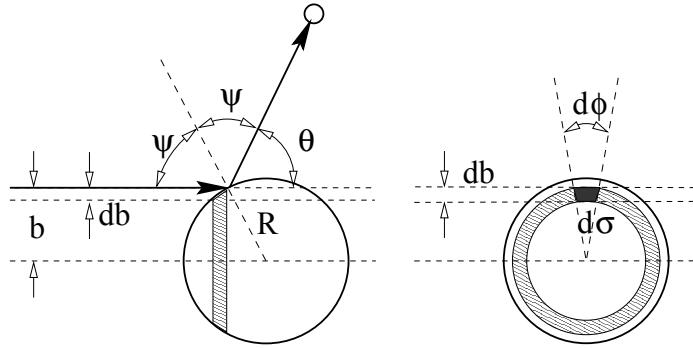


Abbildung 1.11: Streuung an einer harten Kugel.

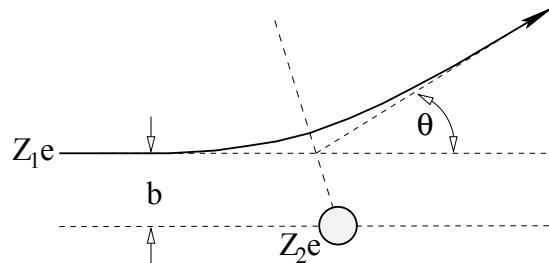


Abbildung 1.12: Rutherford-Streuung

Das heißt der differentielle Wirkungsquerschnitt ist winkelunabhängig, die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen ist also isotrop. Wie erwartet ist der totale Wirkungsquerschnitt der Kugelquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2 \quad (1.104)$$

**b) Rutherford-Streuung (klassisch):** Ein Teilchen mit der Energie  $E$  und der Ladung  $Z_1 e$  streut an einem als ortsfest angenommenen Kern mit der Ladung  $Z_2 e$ , das heißt an dem Streupotential

$$V(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.105)$$

Das Potential entspricht also dem des Kepler-Problems. Die asymptotisch freien Lösungen sind Hyperbel-Bahnen des Streuteilchens (siehe Abb. 1.12). Aus den Hyperbel-Eigenschaften erhält man den Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter  $b$  und dem Streuwinkel  $\theta$ :

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (1.106)$$

Damit ergibt sich analog zu (1.101) und (1.101):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = (\hbar c)^2 \left( \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (1.107)$$

wobei  $\alpha$  wie in (1.87) eingesetzt wurde. Wenn  $\hbar c = 1$  gesetzt wird, wird die Dimension des Wirkungsquerschnitts ( $Energie^{-2}$ , z. B. in  $GeV^{-2}$ ). Zur Rückrechnung benutzt man

$$(\hbar c)^2 = 0.3894 \text{ GeV}^2 \text{ mb}. \quad (1.108)$$

### 1.5.3 Quantenmechanische Behandlung des Wirkungsquerschnitts

Wir behandeln Strahl- und Targetteilchen symmetrisch, für die Reaktionswahrscheinlichkeit kommt es nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden an. Der von den Teilchen gesehene Querschnitt des jeweils anderen Teilchens ändert sich nicht bei einer Transformation entlang der Verbindungsgeraden zwischen beiden Teilchen – weder bei einer nicht-relativistischen, noch bei einer relativistischen Behandlung (der Wirkungsquerschnitt ist also relativistisch invariant). Allerdings ändert sich im relativistischen Fall die Länge  $\Delta l$  der Teilchenpakete (Abb. 1.13) und damit die Teilchendichte. Ehe wir diesen allgemeineren Fall behandeln, betrachten wir zunächst den nicht-relativistischen Fall.

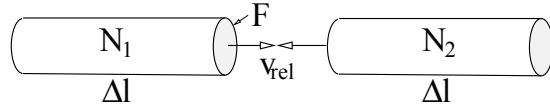


Abbildung 1.13: Kollision von Teilchenpaketen

**Nicht-relativistische Behandlung:** Sei die Rate der Strahlteilchen, die auf die Fläche  $F$  mit  $N_T$  Targetteilchen auftreffen,  $\dot{N}_{in}$ ; die Rate für den Übergang eines Anfangszustandes  $|i\rangle$  in einen Endzustand  $|f\rangle$  sei  $\dot{N}_R = \dot{N}_R(i \rightarrow f)$ . Dann ist der Wirkungsquerschnitt mit Gleichung (1.93):

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in} \cdot \frac{N_T}{F}} = \frac{\frac{\Delta N_R}{\Delta t}}{\frac{\Delta N_{in}}{\Delta t} \cdot \frac{N_T \Delta l}{F \Delta l}} = \frac{\frac{\Delta N_R}{\Delta V \Delta t}}{\frac{\Delta N_{in}}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta N_T}{\Delta V} \cdot v_{rel}} = \frac{W_{fi}}{v_{rel}}. \quad (1.109)$$

Der Wirkungsquerschnitt hängt also von der Relativgeschwindigkeit  $v_{rel} = \Delta l / \Delta t$  und von der Übergangsrate  $W_{fi}$  pro Strahl- und Targetteilchen im Zeitintervall  $\Delta t$  und im Volumen  $\Delta V$  ab:

$$W_{fi} = \frac{\frac{\Delta N_R}{\Delta V \Delta t}}{\frac{\Delta N_{in}}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta N_T}{\Delta V}} \quad (1.110)$$

Nach Fermi's Goldener Regel gilt:

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_f \quad (1.111)$$

Das Übergangsmatrixelement  $M_{fi}$  berechnet sich mit einem nicht-relativistischen Wechselwirkungs-Operator  $H_{WW}$  und den Wellenfunktionen der Anfangs- und Endzustände  $\psi_i, \psi_f$  als Integral über das Wechselwirkungsvolumen:

$$M_{fi} = \int dV \psi_f^* H_{WW} \psi_i \quad (1.112)$$

Im allgemeinen integriert man über ein Volumen, in dem man die Wellenfunktionen normiert:

$$1 = \frac{1}{V} \int dV \psi^* \psi \quad (1.113)$$

Da sich dieses Volumen am Ende herauskürzt, wird es häufig zu  $V = 1$  gesetzt.

Die Größe  $\rho_f = dn/dE_f$  ist die Dichte der Endzustände. Je mehr Zustände zur Verfügung stehen, umso wahrscheinlicher wird die Streuung: Jeder realisierbare Zustand  $|f\rangle$  hat die gleiche ‘a priori’ Wahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeiten addieren sich. Im Impuls-Orts-Raum gibt es einen Quantenzustand pro Elementarzelle der Größe  $h^3$ :

$$\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{p} = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3 \quad (= (2\pi)^3 \text{ für } \hbar = 1). \quad (1.114)$$

Die Anzahl der Endzustände ist das auf  $h^3$  normierte Phasenraumvolumen für die  $k$  erzeugten Teilchen. Unter Beachtung der Energie- und Impulserhaltung ergibt sich:

$$\rho_f = \frac{dn}{dE_f} = \frac{V}{h^3} \int d\vec{p}_1 \cdot \dots \cdot d\vec{p}_k \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \delta(E_i - E_f) \quad (1.115)$$

Der Wirkungsquerschnitt für eine Teilchenreaktion hängt also von drei Faktoren ab: dem Fluß der einlaufenden Teilchen  $\phi$ , einem Übergangsmatrixelement und dem Phasenraum (PS), schematisch:

$$\sigma = \frac{1}{\phi} \cdot |M|^2 \cdot PS. \quad (1.116)$$

Wie im nächsten Paragraph gezeigt wird, kann in einer relativistisch invarianten Formulierung jeder dieser Faktoren separat invariant definiert werden.

**Relativistische Behandlung:** Das Normierungsvolumen, das bei der Berechnung der Teilchendichten und Phasenraumvolumen auftritt, ist nicht Lorentz-invariant. Wir hatten bereits argumentiert, daß wir nur Boosts entlang der Verbindungsgeraden der Teilchen zu betrachten brauchen. Die dazu senkrechte Fläche  $F$  in Abb. 1.13 ist (wie auch der Wirkungsquerschnitt) bei einem solchen Boost invariant. Dagegen kontrahiert die Länge  $\Delta l$  bei einem Boost gegenüber dem Ruhesystem des Teilchens.

Das Teilchen sieht in Ruhe die Länge  $\Delta l = l_2 - l_1$ . Wenn es sich mit der Geschwindigkeit  $-\beta$  bewegt, transformiert sich diese Länge zu:

$$\Delta l' = l'_2 - l'_1 = \gamma \Delta l - \gamma \beta \Delta t \quad (1.117)$$

Welches Zeitintervall  $\Delta t$  müssen wir einsetzen? Da  $l_1$  und  $l_2$  zur gleichen Zeit gemessen werden muß, entsprechend der Definition einer Länge, muß  $\Delta t' = 0$  gelten. Daraus läßt sich das dazugehörige  $\Delta t$  bestimmen:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \Delta t - \gamma \beta \Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \beta \Delta l \quad (1.118)$$

In (1.117) eingesetzt ergibt sich:

$$\Delta l' = -\gamma \beta^2 \Delta l + \gamma \Delta l = \gamma(1 - \beta^2) \Delta l = \frac{1}{\gamma} \Delta l = \frac{m}{E} \Delta l \quad (1.119)$$

Diese Lorentz-Kontraktion, die ein bewegter Beobachter sieht, bewirkt, daß sich auch das Volumen kontrahiert:

$$V' = \frac{1}{\gamma} V = \frac{m}{E} V \quad (1.120)$$

Für die Teilchendichte ergibt sich:

$$n' = \frac{E}{mV} \sim E \quad (1.121)$$

Um zu einer Lorentz-invarianten Definition des Wirkungsquerschnittes zu kommen, läßt man  $V = 1$  (was sich nachwievor herauskürzt) und normiert stattdessen die Teilchenzustände proportional zu  $E$ . Gängig ist zum Beispiel die Normierung auf

$2E$  Teilchen in dem Volumen  $V$ .

Die Normierung der kollidierenden Teilchen 1 und 2 wird mit der Relativgeschwindigkeit zu einem Lorentz-invarianten Flußfaktor zusammengefaßt:

$$v_{rel} \rightarrow \phi = 2E_1 2E_2 |v_{rel}| = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (1.122)$$

Die rechte Seite ist, da sie nur Skalarprodukte von Vierervektoren enthält, offensichtlich Lorentz-invariant. Man kann sich zum Beispiel am Fall, daß ein Teilchen in Ruhe ist, klarmachen, daß die rechte Seite tatsächlich  $4E_1 E_2 |v_{rel}|$  ergibt.

Ebenso wird das Matrixelement Lorentz-invariant definiert, indem die Wellenfunktionen Lorentz-invariant normiert werden, zum Beispiel auf  $2E$ , und Lorentz-Invarianz des Wechselwirkungsoperators verlangt wird.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Endzustandsdichte Lorentz-invariant definiert werden kann. Wir betrachten wieder die elementare Zelle im Phasenraum, die einen Quantenzustand enthält (1.114):

$$\Delta \vec{x} \cdot \Delta \vec{p} = V \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3 \quad (= (2\pi)^3 \text{ für } \hbar = 1). \quad (1.123)$$

Das Volumen wird durch einen Lorentz-invarianten Ausdruck ersetzt:

$$V \rightarrow \frac{V}{2E} \quad (1.124)$$

Die Anzahl der Zustände in einem Impulsintervall  $d^3 \vec{p}_{fj}$  für jedes Teilchen  $j$  im Endzustand  $|f\rangle$  ist:

$$dn_{fj} = \frac{V}{2E_j} \frac{d^3 \vec{p}_{fj}}{h^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{fj}}{2E_j} \quad (\text{mit } V = 1, \hbar = 1) \quad (1.125)$$

Der Ausdruck  $d^3 \vec{p}_{fj}/(2E_j)$  ist ein 'Lorentz-invariantes Maß'. Damit wird der Lorentz-invariante Phasenraum ('Lips') für einen Zustand  $|f\rangle$  mit  $n$  Teilchen und der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  definiert:

$$dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}) = (2\pi)^4 \delta^4(p_{f1} + \dots + p_{fn} - p_{i1} - p_{i2}) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_{fj}}{(2\pi)^3 2E_j} \quad (1.126)$$

Der Wirkungsquerschnitt läßt sich schließlich wie folgt Lorentz-invariant schreiben:

$$d\sigma = \frac{1}{\phi} |M_{fi}|^2 dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}). \quad (1.127)$$

Um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, muß das Matrixelement, das im allgemeinen von den Endzustandsvariablen abhängig ist, über den Phasenraum integriert werden:

$$\sigma_{tot}(i \rightarrow f) = \frac{1}{\phi} \int_{PS} |M_{fi}|^2 dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}). \quad (1.128)$$

Differentielle Wirkungsquerschnitte erhält man, indem über die Variablen, nach denen differenziert wird, nicht integriert wird. Häufig ist dazu eine Variablentransformation notwendig: zum Beispiel würde man auf Kugelkoordinaten transformieren, wenn man Winkelverteilungen berechnen will.

**Statistischer Faktor:** Abhängig davon, wie die Matrixelemente definiert werden, kann ein statistisches Gewicht auftreten, wenn verschiedene Zustände, wie zum Beispiel verschiedene Spineinstellungen, im Anfangs- oder Endzustand nicht unterschieden werden. Allgemein gelten folgende Regeln:

1. Über Anfangszustände  $i$  ist das quadrierte Matrixelement zu mitteln:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} |M_{fi}|^2. \quad (1.129)$$

2. Über die möglichen Endzustände wird summiert, weil jeder mögliche Zustand die Reaktionswahrscheinlichkeit erhöht. Falls zum Beispiel bei zwei Teilchen im Endzustand mit Spins  $s_1$  und  $s_2$  die Dynamik unabhängig vom Spinzustand ist, ergibt sich für die Summation über die Endzustände:

$$\sum_{f=1}^{n_f} |M_{fi}|^2 = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) |M_{fi}|^2. \quad (1.130)$$

Dabei sind die Faktoren  $2s_i + 1$  die Spin-Multiplizitäten.

3. Identische Teilchen im Endzustand: Falls im Endzustand  $n$  identische Teilchen auftreten, kann von den  $n!$  kombinatorisch möglichen Zuständen jeweils nur der (total) anti-symmetrische für Fermionen und der (total) symmetrische Zustand für Bosonen realisiert werden. Das Quadrat des Matrixelementes erhält dann einen statistischen Faktor  $1/n!$ . Man muss allerdings darauf achten, dass dieser Faktor nicht bereits in den Wellenfunktionen enthalten ist.

#### 1.5.4 Zerfallsbreite und Lebensdauer

Eine spezielle Teilchenreaktion ist der Zerfall eines Teilchens. Die Zerfallswahrscheinlichkeit  $\lambda$  ist gleich der inversen Lebensdauer:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \quad (1.131)$$

Der Zerfall eines Teilchens ist ein statistischer Prozess. In jedem Zeitintervall  $dt$  ist die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Teilchens gleich:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n \quad (1.132)$$

Daraus ergibt sich das bekannte Exponentialgesetz für Zerfälle:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda t} = n_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad (1.133)$$

Die Lebensdauer  $\tau$  ist die mittlere Zeit, nach der das Teilchen zerfällt. Mit der zeitlichen Unschärfe  $\tau$  ist eine Energieunschärfe  $\Delta E$  verbunden:

$$\tau \cdot \Delta E \approx \hbar \quad (= 1) \quad (1.134)$$

Deshalb wird eine Zerfallsbreite  $\Delta E = \Gamma$  definiert:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{1}{\tau} = \lambda \quad (1.135)$$

Zerfallsbreite und Zerfallswahrscheinlichkeit sind also äquivalent. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten in alle  $m$  möglichen Endzustände  $|f\rangle$ :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m \quad (1.136)$$

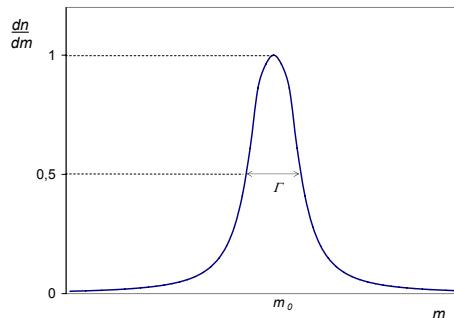
Die  $\Gamma_f$  nennt man partielle Breiten und  $B_f = \Gamma_f / \Gamma$  ist das Verzweigungsverhältnis in den Zustand  $|f\rangle$ .

Relativistisch invariant wird eine partielle Breite entsprechend dem Wirkungsquerschnitt (1.127) hingeschrieben, wobei lediglich der Fluß durch die Normierung der Wellenfunktion des Zerfallsteilchens ( $2m$  im Ruhesystem) ersetzt wird:

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2m} |M_{fi}|^2 dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}). \quad (1.137)$$

Die partielle Breite  $\Gamma(i \rightarrow f)$  und differentielle Breiten erhält man durch die entsprechende Integration des Matrixelementes über den Phasenraum.

Für die starke Wechselwirkung sind Lebensdauern von  $\tau \approx 10^{-23}$  s typisch. Das entspricht Breiten von  $\Gamma \approx 100$  MeV, was vergleichbar mit den Massen der beteiligten Teilchen wird. Die kinematisch aus den Zerfällen rekonstruierten Massen folgen einer Resonanzkurve (Breit-Wigner-Kurve, hier die nicht-relativistische Variante), deren Breite durch  $\Gamma$  gegeben ist:



$$\frac{dn}{dm} \sim \frac{\Gamma}{(m - m_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (1.138)$$

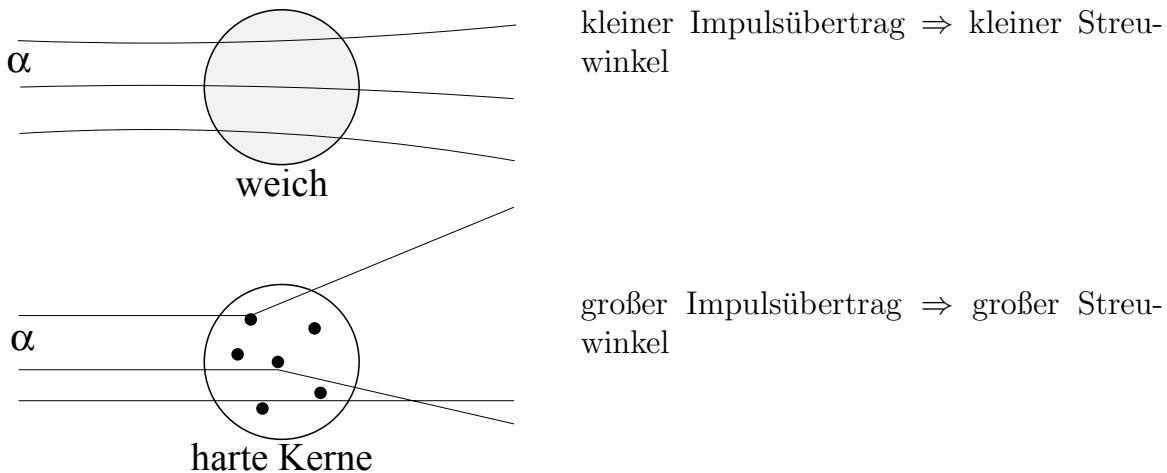
Abbildung 1.14: Resonanzkurve

# Kapitel 2

## Kurzer geschichtlicher Überblick

Im folgenden wird ein kurzer (sehr unvollständiger) Überblick über die Entwicklungen gegeben, die zu unserem heutigen Verständnis der Kern- und Teilchenphysik geführt haben (siehe auch E. Segré: ‘Große Physiker und ihre Entdeckungen’, Piper 1981). Das Gewicht liegt mehr auf den experimentellen Befunden. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Basis für die theoretische Beschreibung der Materie die Quanten- und die spezielle Relativitätstheorie sind.

um 400 v.Ch.	Griechische Philosophen entwickeln Vorstellungen über das Wesen der Materie (spekulativ, nicht empirisch): - Demokrit, Leukipp: kleinste, unteilbare Bausteine, ‘Atome’ - Anaxagoras: ‘ganzheitliche’ Vorstellung (‘Samen im Samen’) - Aristoteles: kontinuierliche Materie - Pythagoras: Atome ↔ Symmetrien
Renaissance:	Einführung kontrollierter Experimente (Wiederholbarkeit)
19.Jahrh.:	Erste empirische Hinweise auf atomare Struktur der Materie (Dalton, Clausius, Maxwell, Boltzmann, Wiener, Avogadro, ...): - kinetische Gastheorie - Gesetz der multiplen Proportionen: $16\text{g O} + 2\text{g H} = 18\text{g H}_2\text{O}$
1897	Identifizierung des Elektrons ( $e/m$ ) durch Thomson
1896	Becquerel: Entdeckung der radioaktiven Strahlung (danach Entdeckung von $\alpha$ -, $\beta$ -, $\gamma$ -Strahlung)
1910	Millikan: Bestimmung der Elementarladung $e$
1911	Rutherford’s Atommodell: das Atom besteht aus einem Kern mit positiver Ladung $Ze$ und einer Hülle mit negativer Ladung $-Ze$ . Versuche mit $\alpha$ Strahlung:



1919 Rutherford:  ${}_7\text{N}^{14} + \alpha \rightarrow {}_8\text{O}^{17} + \text{p}$  (Nachweis des Protons)

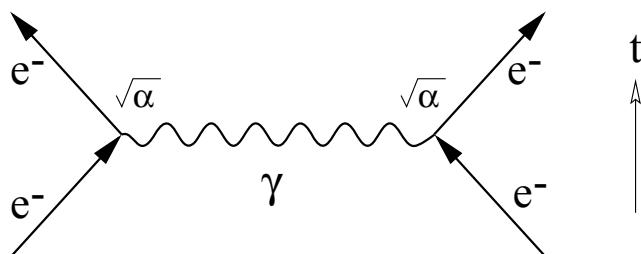
1932 Chadwick: Entdeckung des Neutrons  $\Rightarrow$  Erklärung der Isotope (gleiches Element, unterschiedliche Masse)

### Damit sind die Atombausteine bekannt!

> 1928 Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED) (Bjorken, Drell [22])

Das elektromagnetische Feld wird quantisiert, nicht mehr durch Potential dargestellt wie in der Schrödinger-Gleichung:

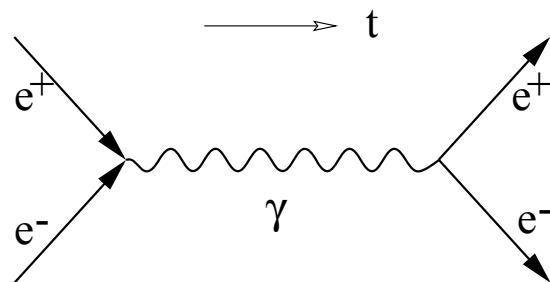
- Feldquant:  $\gamma$  = Photon
- Kraft: durch Teilchenaustausch, zum Beispiel Elektron-Elektron-Streuung ('Feynman-Diagramm'):



- Kopplungsstärke: Feinstrukturkonstante  $\alpha \sim e^2$ :

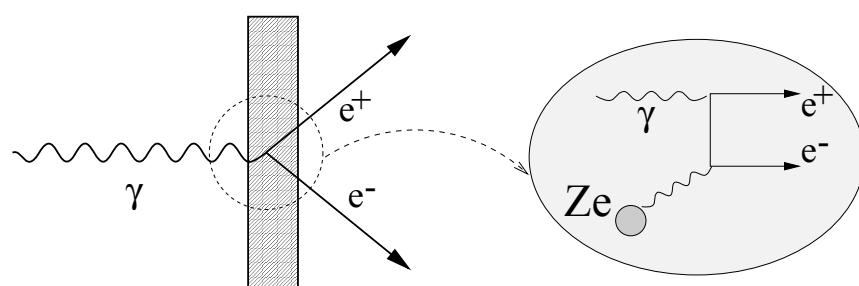
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

Das gleiche Diagramm mit der Zeitrichtung von links nach rechts bedeutet die Vernichtung und Erzeugung von Teilchen ( $e^-$ ) und Antiteilchen ( $e^+$ ):

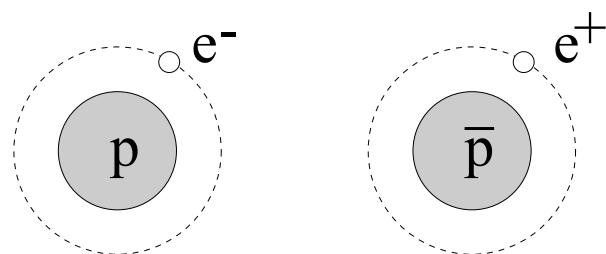


1928

Dirac: Gleichung des freien Elektrons (= relativistische Schrödinger-Gleichung für Spin-1/2-Teilchen), 2 Lösungen  $\Rightarrow$  Teilchen - Antiteilchen,  
z.B. Paarerzeugung in dem Coulomb-Feld eines Kerns:



$\Rightarrow$  Materie - Antimaterie (Umkehrung der Quantenzahlen),  
z. B. H und Anti-H:



Im Kosmos gibt es überwiegend Materie! Warum?

1932

Anderson: Entdeckung des Positrons ( $e^+$ )

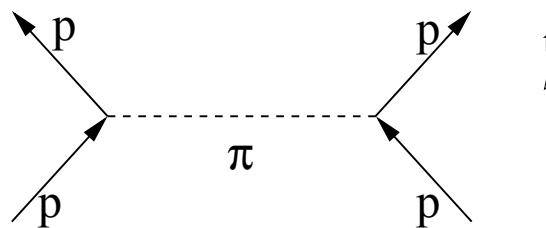
1934

Yukawa: Meson-Theorie der Kernkräfte.

Experimentelle Beobachtungen: Kernkräfte sind

- ladungsunabhängig:  $WW(p-p) = WW(n-p)$
- kurzreichweitig  $\sim 10^{-15}$  m
- stark im Vergleich zur elektromagnetischen WW (p-p nicht abstoßend!)

Betrachte z.B. elastische p-p Streung (oder n-n, p-n, n-p), die analog zur QED durch ein ausgetauschtes Teilchen ( $\pi$ -Meson) vermittelt werden soll:



Elastisch  $\Rightarrow$  Energieübertrag  $E_\pi = 0$ , woraus folgt:

$$m_\pi^2 = E_\pi^2 - \vec{p}_\pi^2 < 0 !!$$

Das ausgetauschte Pion hätte danach ein negatives Massenquadrat!? Man sagt, daß das Austauschteilchen sich nicht ‘auf der Massenschale’ befindet und nennt es ‘virtuell’. Man kann das so interpretieren, daß der Energieübertrag  $\Delta E$  während einer kurzen Zeit  $\Delta t$  eine Unschärfe  $\Delta E \geq m_\pi$  hat (wir lassen hier  $\hbar$  und  $c$  in den Formeln):

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \rightarrow \Delta t \approx \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$$

Die Zeit  $\Delta t$  wird durch die Zeit, die das Pion braucht, um von einem Proton zum anderen zu kommen, abgeschätzt. Die Protonen haben den Abstand  $R$ , die typische Reichweite der Wechselwirkung:

$$R \approx c \cdot \Delta t \approx \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

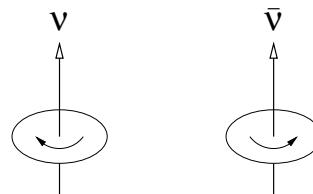
Die Reichweite entspricht also der Compton-Wellenlänge des Austauschteilchens. Da man  $r \approx 10^{-15}$  m = 1 fm gemessen hat, kann man die Masse des  $\pi$ -Mesons abschätzen ( $\hbar c \approx 200$  MeV fm):

$$m_\pi \approx 200 \text{ MeV}/c^2$$

1937

Myon ( $=\mu$ ) entdeckt,  $m_\mu \approx 106 \text{ MeV}/c^2$  (tatsächlich ‘schweres Elektron’ = Lepton)

1947	$\pi$ -Meson entdeckt, $m_\pi \approx 140$ MeV/c <sup>2</sup> Mesonenaustausch ist eine effektive Beschreibung der Kernkräfte; heute durch 'Farbkraft' ('Quantenchromodynamik', QCD) erklärt.
> 1950	Viele neue Teilchen und 'Resonanzen' werden gefunden ("Teilchenzoo"): - K, $\rho$ , $\omega$ , ...: Mesonen ( $\hat{=}$ Pion) - $\Lambda$ , $\Delta$ , $\Sigma$ , ...: Baryonen ( $\hat{=}$ Proton, Neutron)  Teilchen werden in Beschleunigern erzeugt, nicht nur in kosmischer Strahlung.
1955	Entdeckung des Anti-Protons ( $= \bar{p}$ ) durch Segré, Chamberlain, Wiegand, Ypsilantis.
1957	Paritätsverletzung in schwacher WW gefunden $\Rightarrow$ keine Spiegel-Symmetrie der Naturgesetze $\beta$ -Zerfall (Pauli's Neutrino-Hypothese 1931, gefunden von Reines 1957): $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
	Teilchen links-händig — Anti-Teilchen rechts-händig:



	Aber Invarianz bei 'CPT'-Transformation: (Teilchen $\leftrightarrow$ Anti-Teilchen) + (Raum-Spiegelung) + (Zeit-Spiegelung)
1964	Quarkmodell (Gell-Mann und Zweig): Hadronen = Mesonen + Baryonen sind aus u, d, s Quarks aufgebaut: - Baryonen: $qqq$ ( $p =  uud\rangle$ ; $n =  udd\rangle$ ) - Mesonen: $q\bar{q}$ ( $\pi^+ =  u\bar{d}\rangle$ ) Vorhersagekraft: Entdeckung des $\Omega^- =  sss\rangle$
1969	Tiefinelastische Elektron-Proton - Streuung $\Rightarrow$ körnige Struktur der Nukleonen (wie Rutherford - Experiment)

### 'nach 1974' - Ära

1974	4. Quark entdeckt ( c = charm )
1975	3. Lepton (= $\tau$ ) entdeckt ( Leptonen: e, $\mu$ , $\tau$ )

1977	5. Quark entdeckt ( b = bottom )
1979	Gluon entdeckt (bei DESY), Austauschteilchen der starken Wechselwirkung = Quantenchromodynamik (entspricht dem Photon in der QED). Für die Entwicklung der Theorie der Quantenchromodynamik (QCD) erhielten Gross, Politzer und Wilczek 2004 den Nobelpreis.
1983	$W^+$ , $W^-$ , $Z^0$ entdeckt (im CERN, Nobelpreis 1984 Rubbia und van der Meer), Austauschteilchen der elektro-schwachen Wechselwirkung = Quantenflavourdynamik. Damit wird die Glashow-Weinberg-Salam - Theorie (GSW-Theorie, Nobelpreis 1979) der Vereinheitlichung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung experimentell bestätigt. Nobelpreis 1999: t'Hooft und Veltmann: 'Renormierbarkeit nicht-abelscher Eichtheorien'.
1989	Anzahl Neutrinos = 3 (bei LEP) $\Rightarrow$ 3 Fermionen-Generationen; in dieser Zeit ( $\geq 1967$ ) wurde eine kleine, aber nicht-verschwindende, Masse der Neutrinos etabliert (Voraussetzung für Neutrino-Oszillationen (Davis, Koshiba Nobelpreis 2002)
1995	6. Quark entdeckt ( t = top )

Wir kennen jetzt wahrscheinlich alle elementaren (?) Fermionen = Leptonen und Quarks. Zusammen mit den Quantenfeldtheorien für die Wechselwirkungen ergibt sich zur Zeit ein abgerundetes Bild:

### Standard-Modell der Elementarteilchenphysik

Wie in Tabelle 2.1 dargestellt, treten die Quarks und Leptonen in 3 verschiedenen Generationen auf, die sich durch die Massen der Teilchen unterscheiden. In jeder Generation tritt jeweils ein Quark mit der Ladung (in Einheiten der Elementarladung)  $2/3$  und  $-1/3$  und jeweils ein Lepton mit Ladung  $-1$  und  $0$  auf. Jedes Quark wird durch eine 'Flavour'-Quantenzahl (u, d, c, ...) und durch eine 'Colour'-Quantenzahl (r, b, g) charakterisiert. Die 3 Colours sind die Ladungen der starken Wechselwirkung. Zu jedem Fermion gibt es noch das Anti-Fermion, so daß es insgesamt  $(3 \times 6 + 6) \times 2 = 48$  elementare Bausteine gibt.

Durch die Farbkräfte werden die Quarks in Hadronen gebunden. Hadronen sind entweder Baryonen, die aus 3 Quarks (qqq) bestehen, oder Mesonen, die aus Quark und Antiquark (q $\bar{q}$ ) bestehen. Zum Beispiel:

Baryonen (qqq)		Mesonen (q $\bar{q}$ )	
p	uud	$\pi^+$	u $\bar{d}$
n	udd	$\pi^-$	$\bar{u}d$
$\Lambda$	uds	K $^+$	u $\bar{s}$
.	.	K $^0$	d $\bar{s}$
.	.	.	.
.	.	.	.

Tabelle 2.1: Elementare Fermionen: Quarks und Leptonen

	Quarks			Leptonen	
Ladung	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-1$	$0$	
Generation	1. $u_r \ u_b \ u_g$	$d_r \ d_b \ d_g$	$e^-$	$\nu_e$	
	2. $c_r \ c_b \ c_g$	$s_r \ s_b \ s_g$	$\mu^-$	$\nu_\mu$	
	3. $t_r \ t_b \ t_g$	$b_r \ b_b \ b_g$	$\tau^-$	$\nu_\tau$	

Tabelle 2.2: Wechselwirkungen

Wechselwirkung	Austauschteilchen	Masse	Spin-Parität	Reichweite	relat. Kopplungsstärke	Typ. WQ	typ. Lebensdauer
Gravitation	Graviton ?	0	$2^+$	$\infty$	$10^{-40}$	-	-
Elektromagn.	Photon	0	$1^-$	$\infty$	$10^{-2}$	$10 \text{ nb}$	$10^{-20} \text{ s}$
schwache WW	$W^+, W^-, Z^0$	90 GeV	$1^-, 1^+, 1^-$	$10^{-18} \text{ m}$	$10^{-5}$	$10^{-8} \text{ nb}$	$10^{-8} \text{ s}$
starke WW	8 Gluonen	0	$1^-$	$10^{-15} \text{ m}$	$\approx 1$	$10^4 \text{ nb}$	$10^{-23} \text{ s}$

Die Wechselwirkungen sind in Tabelle 2.2 zusammengestellt. Die Wechselwirkungen unterscheiden sich durch ihre Reichweiten, die Kopplungsstärken und die typischen Wirkungsquerschnitte und Lebensdauern. Die letzten drei Größen sind miteinander verknüpft: je stärker die Kopplung umso größer sind die Wirkungsquerschnitte und umso kürzer sind die Lebensdauern.

Die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung sind durch die GSW-Theorie zu einer elektro-schwachen Wechselwirkung vereinheitlicht worden.

Die Wechselwirkungen werden durch Austauschteilchen, die den Spin  $s=1$  bzw. beim Graviton  $s=2$  haben, vermittelt. Insgesamt gibt es davon 13, wovon das Graviton bisher hypothetisch ist. Mit den elementaren Fermionen und einem theoretisch geforderten Teilchen mit Spin  $s=0$  (Higgs-Teilchen) gibt es also 62 elementare Teilchen.

Das Higgs-Teilchen ist das letzte Teilchen des Standardmodells, das bisher nicht nachgewiesen wurde. Die Suche ist bei den bisherigen Beschleunigern, insbesondere auch bei denen mit den bisher höchsten Energien, LEP im CERN und Tevatron im Fermi-Lab (USA), nicht erfolgreich gewesen. Am ‘Large Hadron Collider’ (LHC) im CERN, der 2008 in Betrieb gehen soll, müsste dieses Teilchen gefunden werden oder die Theorie müsste nicht unerheblich modifiziert werden.

**Ausblick:** Obwohl das Standardmodell experimentell mit sehr hoher Präzision bestätigt wurde, beantwortet es nicht alle Fragen (z.B.: Warum haben Elektronen und Protonen bis auf das Vorzeichen exakt die gleiche Ladung?). Aktuelle Experimente suchen unter Anderem nach einer möglichen Substruktur von Quarks und Leptonen oder nach dem Ursprung der Asymmetrie von Materie und Anti-Materie im Universum. Die Theoretiker beschäftigen vor allem die Frage, ob alle Wechselwirkungen, einschließlich der Gravitation, vereinheitlicht werden können. Spätestens hier wird deutlich, dass Probleme der Teilchenphysik und Probleme der Kosmologie zusammenhängen und gemeinsam gelöst werden müssen. In der Kosmologie ist zur Zeit das wichtigste Problem, dass etwa 99% des Energieinhaltes der Universums unbekannten Ursprungs ist (Suche nach ‘Dunkler Materie’ und ‘Dunkler Energie’). Für die ‘Dunkler Materie’ bietet die Teilchenphysik Kandidaten im Rahmen einer ‘Supersymmetrie’ genannten Theorie. Die Hoffnung ist, diese ‘SUSY-Teilchen am LHC zu finden.

# Kapitel 3

## Experimentelle Methoden

Wie aus dem Vorhergehenden bereits deutlich wurde, beruhen die Experimente in der Kern- und Teilchenphysik im wesentlichen auf dem Nachweis von Teilchen, die in Zerfällen oder Streureaktionen entstehen. In diesem Kapitel wird beschrieben, wie Teilchen beschleunigt werden, wie sie mit Materie wechselwirken und über diese Wechselwirkungen in Detektoren nachgewiesen werden können.

**Literatur:** Die angegebenen Bücher über Kern- und Teilchenphysik enthalten in der Regel ein Kapitel über experimentelle Methoden. Eine gute Übersicht findet sich zum Beispiel in dem Buch von Demtröder [8], Kap.4.

Ausführlicher werden Detektoren und Nachweismethoden zum Beispiel in den Büchern von Kleinknecht [30], Grupen [31] und Leo [32], Teilchenbeschleuniger in dem Buch von Wille [33] dargestellt.

Eine kompakte Zusammenfassung des Stoffes und das nötige Zahlenmaterial (auch für die Übungen!) findet man in dem Review of Particle Physics [34].

### 3.1 Beschleuniger

**Statische Beschleuniger:** Geladene Teilchen (Ladung  $q$ ) werden von einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  auf die kinetische Energie  $T$  beschleunigt:

$$T = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = q U, \quad (3.1)$$

wobei  $U$  die Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 ist. Auf diese Weise werden zum Beispiel Elektronen in einem Kathodenstrahlzoszillograph beschleunigt (Abb. 3.1). Statische elektrische Felder sind begrenzt durch das Auftreten von Überschlägen. Mit besonderen Maßnahmen kann man maximal  $T_{max} \approx 20$  MeV erreichen (Van-de-Graaff-Beschleuniger).

**Hochfrequenz-Beschleuniger:** Das Problem der Spannungsdurchbrüche kann man umgehen, indem man hochfrequente elektromagnetische Felder benutzt. Die zu beschleunigenden Teilchen müssen diese Felder so durchlaufen, dass sie in Phase mit den beschleunigenden E-Feldern sind.

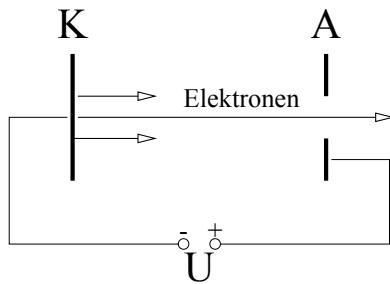


Abbildung 3.1: Beschleunigung von Elektronen in einem elektrischen Feld (Prinzip des Kathodenstrahl-Oszillographen).

### 3.1.1 Linearbeschleuniger:

Das soll am Beispiel eines Linearbeschleunigers für Elektronen erläutert werden. Dieser Beschleuniger ist ein Rohr, das mit Irisblenden (siehe Abb. 3.2) in wohlgewählten Abständen ausgestattet ist. Gibt man auf die Blenden abwechselnd positive und negative Spannungen, wirken sie wie Kondensatoren, zwischen denen sich elektrische Felder ausbilden, die von einer Zelle zur nächsten die Richtung ändern. In einer bestimmten Zelle wechselt das Feld die Richtung mit einer festen Frequenz. Die Elektronen müssen immer gerade dort sein, wo das Feld in die Beschleunigungsrichtung weist, das heißt, sie müssen während einer halben Schwingung gerade einen Blendenabstand zurücklegen.

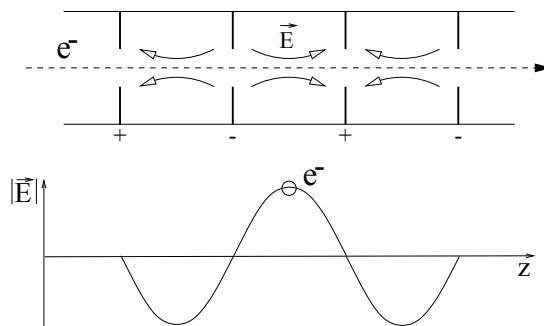


Abbildung 3.2: Prinzip eines Hochfrequenz-Linearbeschleunigers.

Typisch für Hochfrequenz-Beschleuniger sind Energiegewinne von etwa 8 MeV/m. Der Linearbeschleuniger in Stanford (SLAC) erreichte ursprünglich 20 GeV auf 3 km. Die Energie ist dann auf 50 GeV erhöht worden. Ein Zukunftsprojekt ist der ‘International Linear Collider’ (ILC), in dem Elektronen und Positronen in der ersten Phase mit je etwa 250 GeV zur Kollision gebracht werden sollen. DESY entwickelte für dieses Projekt supraleitende Kavitäten, die mindestens 35 MeV/m erreichen; in Prototypen werden mehr als 40 MeV/m erreicht.

### 3.1.2 Kreisbeschleuniger

Hochfrequenzbeschleuniger lassen sich kompakt als Kreisbeschleuniger bauen. Dabei werden die Teilchen durch Magnetfelder auf Kreisbahnen gehalten und durchlaufen

Hochfrequenz-Kavitäten, die auf dem Kreisumfang angeordnet sind.

**Zyklotron:** Ein Zyklotron wird zur Beschleunigung von Protonen oder Ionen benutzt. Die Teilchen werden durch einen Magneten mit konstantem Feld auf Kreisbahnen gezwungen, an zwei Stellen werden sie beschleunigt. In der Mitte befindet sich die Teilchenquelle. Aufgrund der Beschleunigung bewegen sich die Teilchen auf Spiralbahnen nach außen, wo sie dann als Strahl extrahiert werden können (Abb. 3.3).

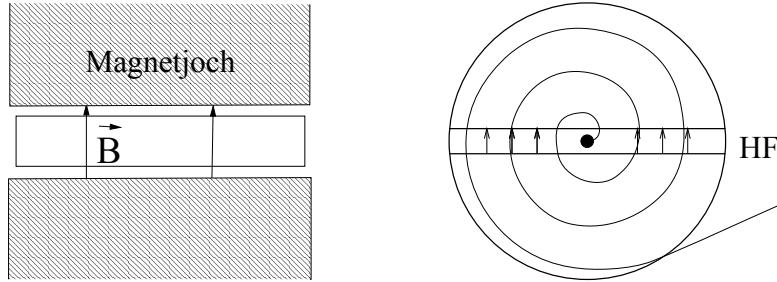


Abbildung 3.3: Prinzip eines Zyklotrons (Seitenansicht und Schnitt durch die Vakuumkammer).

Solange die Geschwindigkeiten der beschleunigten Teilchen klein gegen  $c$  ist, ist die Umlauffrequenz (=Zyklotronfrequenz)

$$\omega = \frac{q}{m} B \quad (3.2)$$

unabhängig von dem Bahnradius bzw. der Energie. Dann kann man alle Teilchen mit der gleichen Hochfrequenz beschleunigen. Bei relativistischen Energien, für Protonen ab etwa 20 MeV, werden die Teilchen relativ langsamer:

$$\omega = \frac{q}{m\gamma} B \quad (3.3)$$

Elektronen sind schon im Bereich von etwa 100 keV relativistisch. Deswegen kann das Zyklotronprinzip für Elektronen nicht benutzt werden. Für relativistische Teilchen sind andere Beschleunigertypen entwickelt worden, zum Beispiel das Synchrotron.

**Synchrotron:** Im Synchrotron werden die Teilchen durch ein variables Magnetfeld während der gesamten Beschleunigung auf einer konstanten Kreisbahn gehalten (siehe Abb. 3.4). Auf dem Kreisumfang sind an einer oder mehreren Stellen Hochfrequenz-Resonatoren für die Beschleunigung eingefügt. Die Teilchen werden von einem Vorbeschleuniger eingeschossen und können nach der Beschleunigung ejiziert und auf ein externes Target gelenkt werden. Man kann auch interne Targets im Vakuumsystem des Synchrotrons einsetzen. Zum Beispiel kann man an einem Elektronensynchrotron durch Einfahren eines Wolframdrahtes in den internen Strahl einen hochenergetischen Photonenstrahl durch Bremsstrahlung (siehe nächster Abschnitt) erzeugen.

Der Radius eines Synchrotrons skaliert proportional zur Energie und umgekehrt proportional zum Magnetfeld:

$$R \sim \frac{E}{B}, \quad (3.4)$$

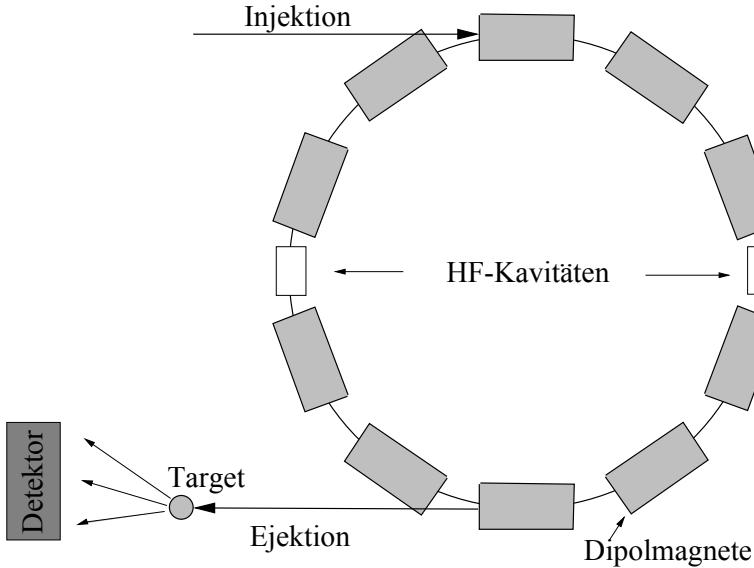


Abbildung 3.4: Prinzip eines Synchrotrons.

so dass die Grenzen durch die Baukosten und die erreichbare Stärke eines Magnetfeldes gegeben sind. In dem Elektron-Proton-Speicherring HERA (DESY, Hamburg, bis Juli 2007 in Betrieb) wurden in einem Ring von etwa 6 km Umfang Protonen auf nahezu 1 TeV Energie gebracht. Die Elektronen konnten in demselben Ring nur auf etwa 30 GeV beschleunigt werden, weil sie wegen ihrer geringen Masse bei Beschleunigung Energie in Form der sogenannten Synchrotronstrahlung abgeben. Hier spielt die Zentripetalbeschleunigung, die die Elektronen auf einem Kreis mit Radius  $R$  hält, die entscheidende Rolle. Die abgestrahlte Leistung wächst sehr schnell mit höherer Energie an:

$$P \sim \frac{E^4}{R^2} \quad (3.5)$$

Wegen  $P \sim 1/R^2$  müsste man zu immer größeren Ringen gehen. Mit der bisher größten Anlage (LEP, ‘Large Electron Positron Collider’, im CERN, Genf) mit einem Umfang von 27 km wurden mehr als 200 GeV erreicht. Das LEP-Programm wurde 2000 beendet. Um mit Elektronen zu höheren Energien zu kommen, geht man jetzt wieder auf Linearbeschleuniger zurück.

### 3.1.3 Speicherringe

Streuexperimente wurden zunächst als ‘fixed target’ Experimente durchgeführt: ein aus dem Beschleuniger extrahierter Strahl wird auf ein im Labor ruhendes Target geschossen (zum Beispiel auf flüssigen Wasserstoff, wenn man Streuung an Protonen untersuchen will). Der Nachteil dieser Methode ist, dass viel Energie in den Rückstoß des Targetteilchens geht und die im Schwerpunkt zur Verfügung stehende Energie nur wie  $E_{cm} \sim \sqrt{E_{Strahl}}$  der Strahlenergie folgt. Wenn man dagegen symmetrisch beide Streupartner beschleunigt, kann man eine optimale Energieumsetzung erreichen:  $E_{cm} \sim E_{Strahl}$ . Das erreicht man in Speicherringen (Abb. 3.5), in denen zwei Teilchenstrahlen in Gegenrichtung beschleunigt werden und in speziellen Wechselwirkungspunkten zur Kollision gebracht werden (‘Collider’). In den letzten etwa 30

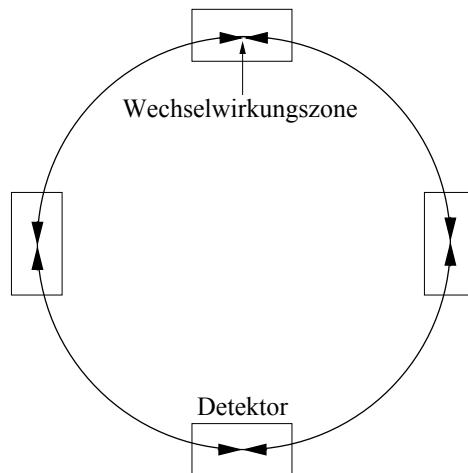


Abbildung 3.5: Prinzip eines Speicherrings.

Jahren sind die meisten wichtigen Entdeckungen der Teilchenphysik an Elektron-Positron-, Proton-Proton-, Proton-Antiproton- und Elektron-Proton-Speicherringen gemacht worden. Die größten Anlagen des jeweiligen Typs sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Tabelle 3.1: Die größten zur Zeit laufenden oder geplanten ‘Collider’.

Name	Ort	Teilchen	$E_{Strahl}$ [GeV]	$E_{cm}$
LEP (beendet)	CERN (Genf)	$e^+ e^-$	100 + 100	200 GeV
SLC (beendet)	Stanford (USA)	$e^+ e^-$	50 + 50	100 GeV
Tevatron	FNAL (Chicago)	$p \bar{p}$	1000 + 1000	2 TeV
HERA (beendet 2007)	DESY (Hamburg)	$e p$	30 + 920	330 GeV
LHC (Start 2008)	CERN (Genf)	$p p$	7000 + 7000	14 TeV
ILC (geplant)	nicht entschieden	$e^+ e^-$	250 + 250	500 GeV

## 3.2 Wechselwirkungen von Teilchen mit Materie

Teilchen können nur über ihre Wechselwirkung mit Materie wahrgenommen werden. Detektoren nutzen für die verschiedenen Teilchen zum Beispiel folgende Wechselwirkungen aus:

- Ionisation: beim Durchgang durch Materie ionisieren alle geladenen Teilchen das Medium entlang ihrer Flugstrecke;
- Bremsstrahlung: Abstrahlung von Photonen vornehmlich von leichten Teilchen wie  $e^-$ ,  $e^+$  in Materie mit hoher Kernladungszahl Z;
- Photonstreuung (Compton) und Photonabsorption;
- Kernreaktionen: Hadronen ( $p$ ,  $n$ ,  $\pi$ ,  $\alpha$ , ... ) mit Kernmaterie;

- schwache Wechselwirkung: einzige Möglichkeit Neutrinos nachzuweisen.

### 3.2.1 Energieverlust aufgrund von Ionisation

Alle geladenen Teilchen verlieren beim Durchgang durch Materie Energie an die Elektronen der Atome (Abb. 3.6). Der mittlere Energieverlust pro Weglänge hängt

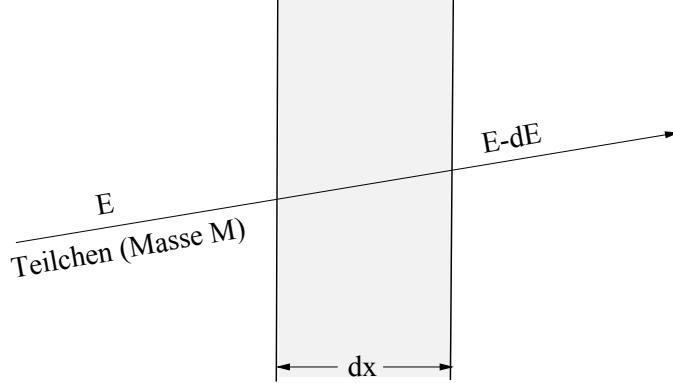


Abbildung 3.6: Energieverlust eines Teilchens bei Durchgang durch Materie.

von den Eigenschaften des Mediums und von der Geschwindigkeit des Teilchens ab (Bethe-Bloch-Formel):

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{D \cdot Z \cdot \rho}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta T_{max}}{I^2} \right) - \beta^2 + \delta_{Korr} \right] \quad (3.6)$$

Dabei ist:

- $D = 4\pi \cdot N_A \cdot r_e^2 \cdot m_e c^2 = 0.307 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$  ( $r_e$  = klassischer Elektronenradius).
- $z, \beta$  sind Ladungszahl und Geschwindigkeit des Teilchens.
- $Z, A, \rho$  sind Kernladungszahl, Massenzahl und die Dichte des Mediums.
- $I$  ist eine effektives Ionisationspotential der Atome des Mediums. Es gilt etwa

$$I \approx 16 \cdot Z^{0.9} \text{ eV.} \quad (3.7)$$

- $\Delta T_{max}$  ist der maximale Energieübertrag auf ein Hüllenelektron, der sich beim zentralen Stoß ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta T_{max} &= \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2 \gamma m_e / M + (m_e / M)^2} \\ &\approx 2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \quad \text{für } \gamma m_e \ll M \\ &= m_e c^2 (\gamma - 1) \quad \text{für } m_e = M \end{aligned}$$

- $\delta_{Korr}$  sind verschiedene Korrekturen zu dieser Formel, die vor allem bei kleinen Energien (Schalenkorrekturen) und bei großen Energien (Dichtekorrekturen) auf. Darauf soll hier nicht im Einzelnen eingegangen werden.

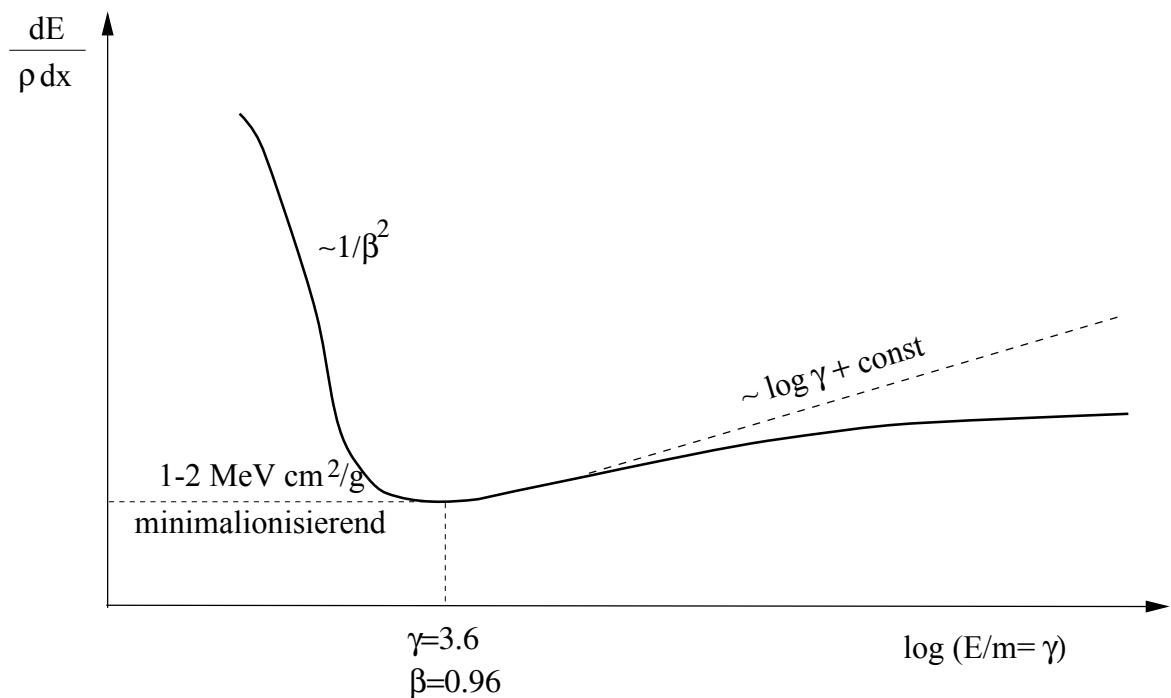


Abbildung 3.7: Die charakteristische Abhängigkeit des mittleren Energieverlustes von  $\beta$  oder  $\gamma$  bei gegebener Masse.

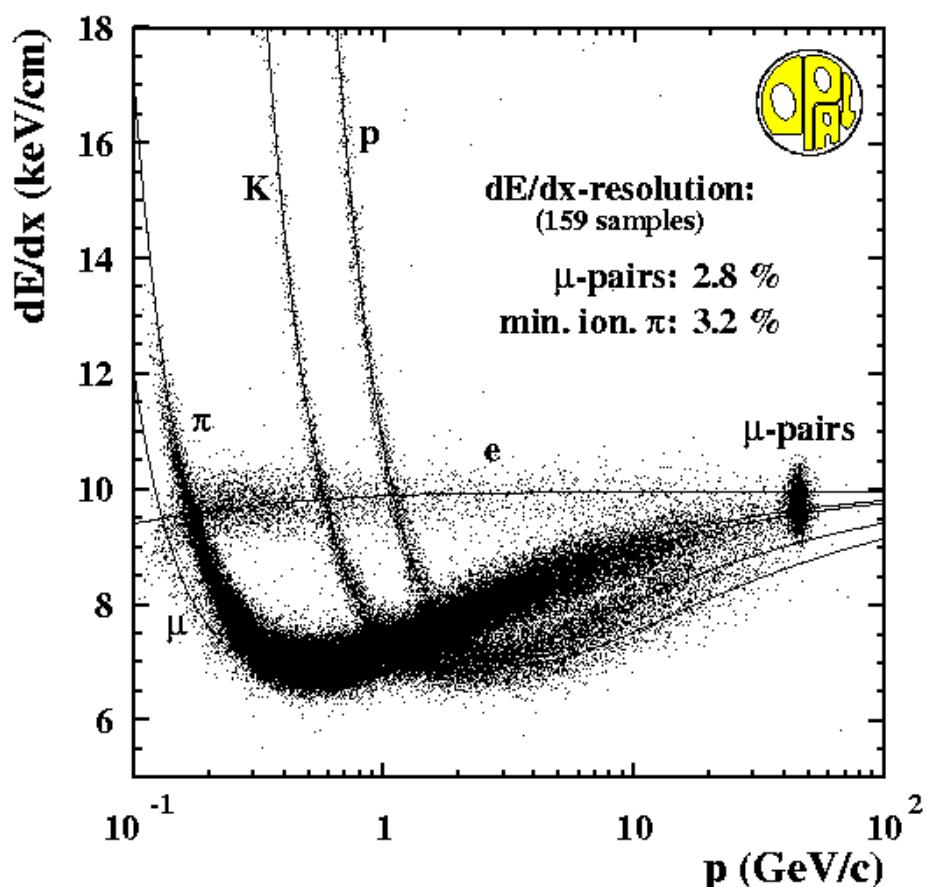


Abbildung 3.8: Messung der Ionisation von Teilchen, die aus dem Zerfall des  $Z^0$ -Bosons entstehen (LEP, OPAL-Detektor).

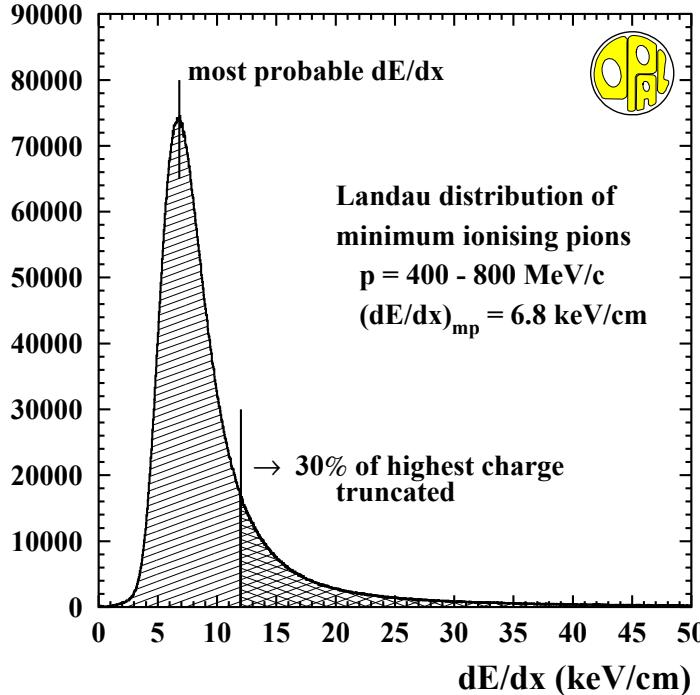


Abbildung 3.9: Landau-Verteilung gemessener  $dE/dx$ -Werte. Zur Teilchenidentifikation entsprechend der Abb. 3.8 bildet man die Mittelwerte vieler Messungen für ein Teilchen (in verschiedenen Lagen eines Detektors). Der Mittelwert wird statistisch stabiler, wenn man einen gewissen Prozentsatz der höchsten Werte wegläßt und dann den Mittelwert bildet ('truncated mean').

Tabelliert findet man im allgemeinen den auf die Dichte normierten Energieverlust:

$$\frac{dE}{\rho dx} \quad \text{in den Einheiten} \quad \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \quad (3.8)$$

In Abb. 3.7 ist die typische Abhängigkeit des Energieverlustes von der Energie wiedergegeben. Bei kleinen Energien dominiert der  $1/\beta^2$ -Term, bei hohen der  $\ln \gamma^2$ -Term. Der Anstieg bei hohen Energien ist ein relativistischer Effekt: die transversale Komponente des elektrischen Feldes wächst mit  $\gamma$ . Die Reichweite des Feldes wird allerdings begrenzt durch die Abschirmwirkung der umgebenden Atome ('Dichte-effekt': Sättigung von  $dE/dx$  bei hohen Energien). Zwischen dem  $1/\beta^2$ -Abfall und dem relativistischen Anstieg liegt ein breites Minimum um  $\gamma = 3.6$  beziehungsweise  $\beta = 0.96$ . Die  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Abhängigkeit wird für die Teilchenidentifikation benutzt: Teilchen mit unterschiedlicher Masse haben aber bei gleichem Impuls unterschiedliches  $\beta$  und  $\gamma$ . Dadurch verschieben sich die  $dE/dx$ -Kurven als Funktion des Impulses für verschiedene Massen. Der Impuls geladener Teilchen kann durch Ablenkung in einem Magnetfeld gemessen werden. In Abb. 3.8 sind  $dE/dx$ -Messungen für verschiedene Teilchensorten gezeigt.

**Statistische Fluktuationen der  $dE/dx$ -Verteilung:** Die Bethe-Bloch-Formel gibt das mittlere  $dE/dx$  an. Die statistischen Fluktuationen werden durch die Landau-Verteilung beschrieben. Die Landau-Verteilung hat einen Gauß-artigen Anteil

Tabelle 3.2: Reichweiten von Elektronen, Protonen und  $\alpha$ -Teilchen in Luft und Wasser.

Teilchen	Energie [MeV]	Reichweite [m]	
		Luft	Wasser
Elektronen	0.1	0.13	$1.4 \cdot 10^{-4}$
	1.0	3.80	$4.3 \cdot 10^{-3}$
	10.	40.0	$4.8 \cdot 10^{-2}$
Protonen	0.1	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
	1.0	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$
	10.	1.20	$1.5 \cdot 10^{-3}$
$\alpha$ -Teilchen	0.1	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
	1.0	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$
	10.	$9.5 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$

(entspricht vielen Ionisationsprozessen mit kleinem Energieverlust) und einen Ausläufer zu großen Energieverlustwerten bis zu  $\Delta T_{max}$  (Abb. 3.9). Die großen Werte entsprechen den selteneren harten Stößen, bei denen viel Energie auf ein einzelnes Elektron übertragen wird. Das sind die  $\delta$ -Elektronen, die in Blasenkammerbildern zum Beispiel als kleine, an die Teilchenspuren angeheftete Spiralen ('Schweineschwänzchen') zu sehen sind.

**Reichweite:** In genügend dickem Material kommen die Teilchen zur Ruhe, wenn sie ihre gesamte kinetische Energie  $T$  verloren haben.:

$$dE = \frac{dE}{dx}(T) \cdot dx \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dE}{dE/dx} \quad \Rightarrow \quad R = \int_{T_0}^0 \frac{dE}{dE/dx} \quad (3.9)$$

Die Reichweite  $R$  eines geladenen Teilchens aufgrund von Energieverlust durch Ionisation hat für eine feste Energie einen bestimmten Wert mit geringer Streuung. Bei Durchgang eines Teilchenstrahls durch Materie bleibt die Teilchenzahl konstant bis zu einem relativ scharfen Abbruch (Abb. 3.10 und 3.11). Absorptionsprozesse (mit  $dN = -\mu dx$ ) führen dagegen zu einem exponentiellen Abfall der Teilchenzahl. Bei stark wechselwirkenden Teilchen (= Hadronen wie Protonen, Neutronen, Pionen und Kerne) kann es am Ende der Reichweite zu einer besonders hohen Dichte der deponierten Energie kommen (Bragg-Peak), was zum Beispiel für die Strahlentherapie von Tumoren genutzt wird (Abb. 3.11). Zum Beispiel haben langsame Neutronen und negative Pionen, die gestoppt werden und in eine atomare Bahn eingefangen werden, einen hohen Wirkungsquerschnitt für die Spallation von Kernen.

In der Kernphysik werden Reichweitemessungen zur Energiebestimmung von Protonen,  $\alpha$ -Teilchen und anderen Kernen benutzt (Abb. 3.12). Für den Strahlenschutz ist es wichtig, wie weit Strahlung in einem Medium kommt (Tabelle 3.2). Schwerere Teilchen kommen weniger weit, haben aber eine höhere Ionisationsdichte. So kann zum Beispiel  $\alpha$ -Strahlung innere Organe nur schädigen, wenn die Strahler inhaliert werden.

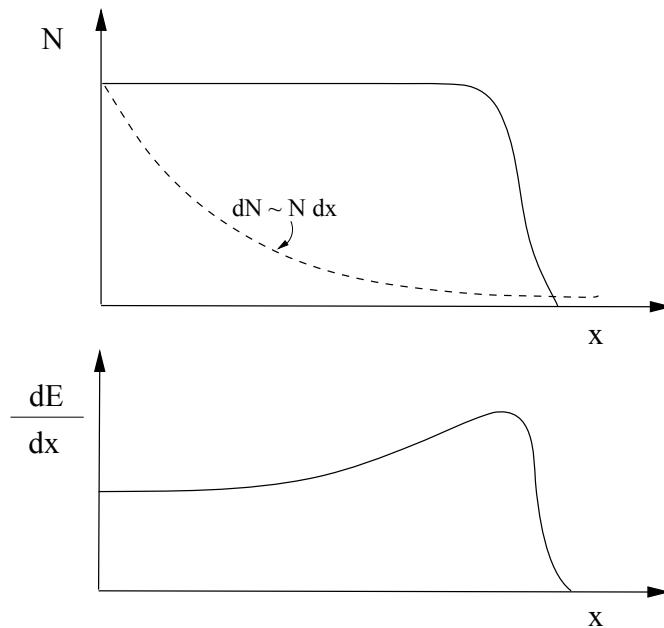


Abbildung 3.10: Die Teilchenzahl und der Energieverlust pro Weglänge als Funktion des Weges, den die Teilchen durch das Medium zurückgelegt haben.

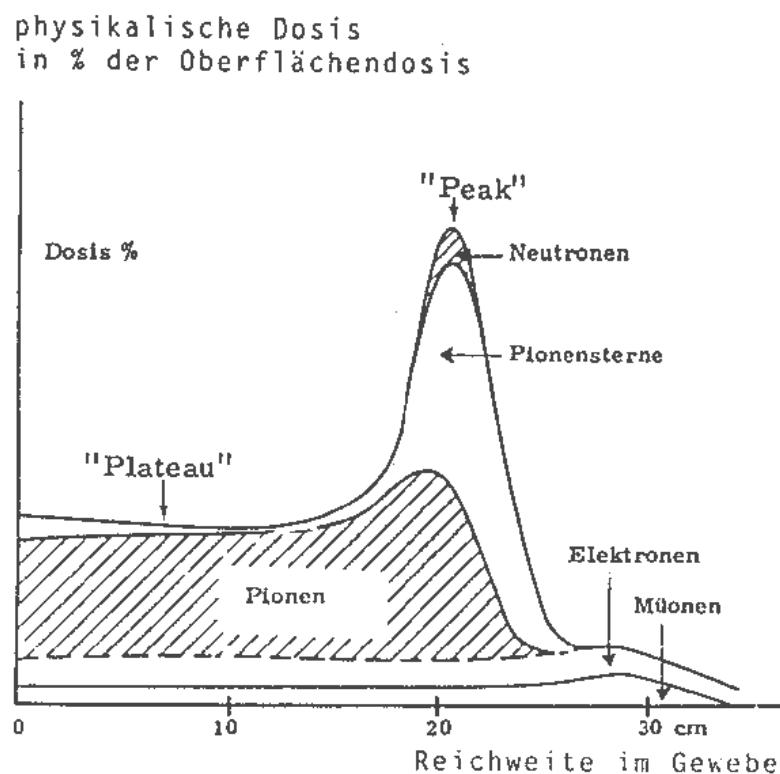


Abbildung 3.11: Energieverlust pro Weglänge in Körpergewebe. Die Überhöhung am Ende der Reichweite wird in der Medizin zur gezielten Bestrahlung tiefliegender Tumore genutzt. Neutronen und negative Pionen machen besonders heftige Wechselwirkungen mit Materie.

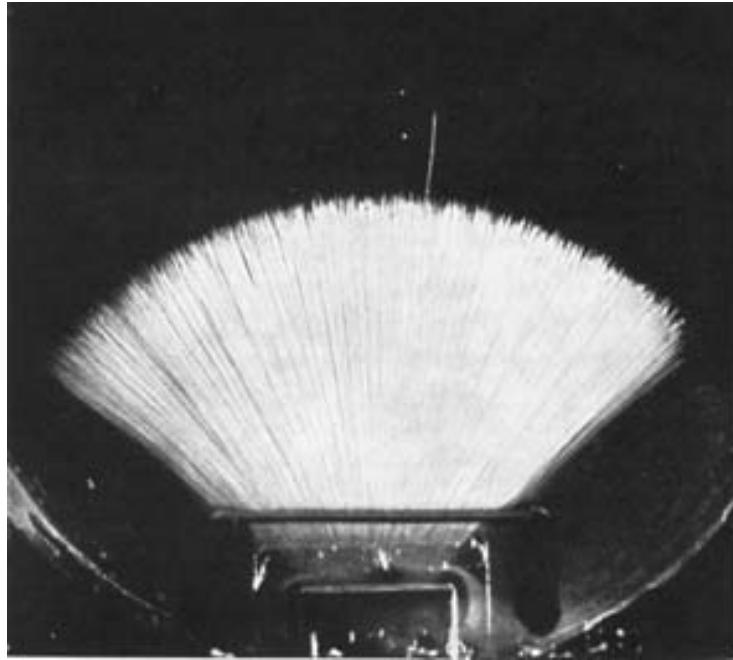


Abbildung 3.12: Spuren von  $\alpha$ -Teilchen aus einem radioaktiven Zerfall in einer Nebelkammer. Die Reichweite ist scharf begrenzt, das heißt die Teilchen haben gleiche Energien. Die einzige längere Spur stammt von einem angeregten Kernzustand.

### 3.2.2 Coulomb-Vielfachstreuung

Geladene Teilchen werden im Coulomb-Feld eines Kerns entsprechend dem Rutherford-Wirkungsquerschnitt gestreut. Gegenüber diesem Effekt ist die Ablenkung durch die Wechselwirkung mit Elektronen der Atomhülle bei höheren Energien vernachlässigbar.

Nach Durchgang eines Teilchens durch Material einer Dicke  $\Delta x$  ist das Teilchen im allgemeinen vielfach gestreut worden, was zu einer statistischen Verteilung des Streuwinkels relativ zur Eintrittsrichtung führt.

Die Coulomb-Streuung an einem einzelnen Kern (der als unendlich schwer angenommen wird) wird durch den Rutherford-Wirkungsquerschnitt beschrieben (Abb. 3.13):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{|Rutherford} = z^2 Z^2 \alpha^2 \hbar^2 \frac{1}{\beta^2 p^2} \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.10)$$

Hier ist  $\theta$  der Streuwinkel,  $ze$  die Ladung des gestreuten Teilchens und  $Ze$  die des Kerns,  $\beta$  und  $p$  sind Geschwindigkeit und Impuls des gestreuten Teilchens<sup>1</sup>. Die Streuung erfolgt kohärent an der gesamten Ladung des Kerns, weshalb hier eine quadratische Abhängigkeit von  $Z$  auftritt (dagegen ist der Energieverlust durch Ionisation proportional zu  $Z$ , weil über die Beiträge der Hüllenelektronen inkohärent zu summieren ist). Wenn das gestreute Teilchen leicht gegenüber dem Kern ist, ergibt sich

---

<sup>1</sup>Diese Formel entspricht der klassisch hergeleiteten Streuformel (1.107), bei der  $E = E_{kin}$  die asymptotische kinetische Energie des ein- und auslaufenden Teilchens ist. Es gilt im nicht-relativistischen Grenzfall:  $\beta^2 p^2 \approx 4E_{kin}^2$ .

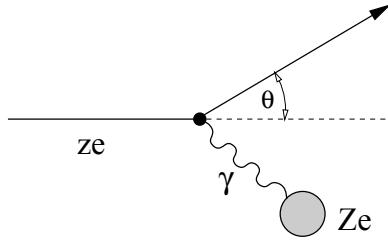


Abbildung 3.13: Streuung eines geladenen Teilchens (Ladung  $ze$ ) im Coulomb-Feld eines Kerns mit Ladung  $Ze$  (Rutherford-Streuung).

- eine Richtungsänderung
- bei geringem Energieübertrag.

Bei einem nicht zu dünnen Streuer, wenn die Anzahl der Streuungen etwa 20 oder mehr ist, spricht man von Vielfach- oder Molière-Streuung. Nach dem ‘zentralen Grenzwertsatz’ der Statistik erwartet man bei unendlich vielen Streuungen eine Gauss-Verteilung für den Streuwinkel. In der Praxis lässt sich die mit der Molière-Theorie bestimmte Verteilung gut durch eine Gauss-Verteilung approximieren, man muss aber beachten, dass die Molière-Verteilung höhere Wahrscheinlichkeiten bei großen Winkeln hat (entsprechend dem Rutherford-Wirkungsquerschnitt).

In der Approximation durch eine Gaussverteilung wird die Streuwinkelverteilung durch einen Parameter, die Standardabweichung  $\theta_0$  des in eine Ebene projizierten Streuwinkels  $\theta_{plane}$ , festgelegt:

$$f(\theta_{plane})d\theta_{plane} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_0} \exp\left(-\frac{\theta_{plane}^2}{2\theta_0^2}\right) d\theta_{plane} \quad (3.11)$$

Der Parameter  $\theta_0$  ist näherungsweise gegeben durch:

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}/c}{p \cdot \beta} z \sqrt{\frac{x}{x_0}} \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{x_0}\right) \quad (3.12)$$

Dabei ist  $x$  die Dicke des Streuers und  $x_0$  die Strahlungslänge des Streuermaterials. Die Strahlungslänge charakterisiert die Prozesse im Coulomb-Feld eines Kerns, wie zum Beispiel die Bremsstrahlung von Elektronen im Kernfeld (Abschnitt 3.2.3). Sie ist als Materialkonstante für verschiedene Materialien tabelliert ([34], Beispiele in Tabelle 3.4). Der räumliche Streuwinkel  $\theta_{space} = \theta$ , das ist der Winkel zwischen der Einfallsrichtung und der Austrittsrichtung des Teilchens aus dem Streuer, hat die Verteilung:

$$f(\theta)d\Omega = \frac{1}{2\pi\theta_0^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right) d\Omega \quad \text{mit } d\Omega = \theta d\theta d\phi \quad (3.13)$$

Man beachte, dass der räumliche Streuwinkel im Gegensatz zu der Projektion des Streuwinkels in eine Ebene nur positive Werte haben kann (Abb.3.14). Die Verteilung (3.13) ist in dem Intervall  $0 \leq \theta < \infty$  normiert. Damit ergibt sich der mittlere Streuwinkel:

$$\sqrt{\overline{\theta^2}} = \sqrt{2}\theta_0 \quad (3.14)$$

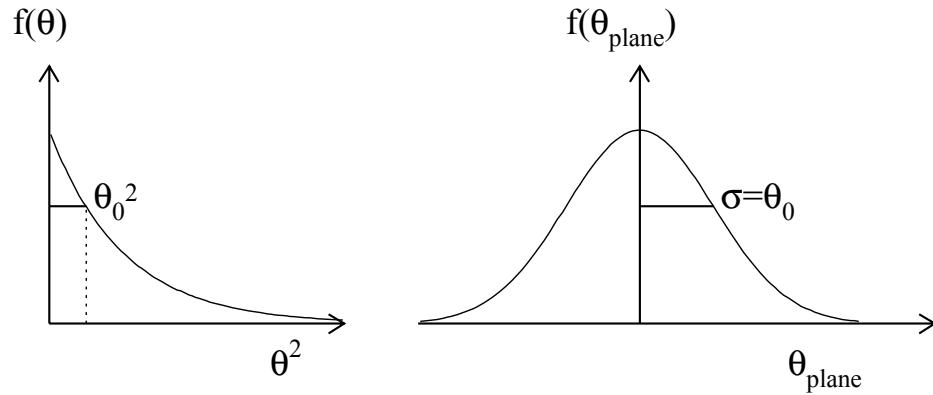


Abbildung 3.14: Verteilung des räumlichen Streuwinkels (links) und des in eine Ebene projizierten Streuwinkels (rechts). Die Verteilung des räumlichen Winkels  $f(\theta)$  ist gegen  $\theta^2$  aufgetragen, weil  $f(\theta) \theta d\theta \sim f(\theta) d\theta^2$  ist (die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $\theta$  verschwindet bei  $\theta = 0$  wegen des verschwindenden Phasenraums).

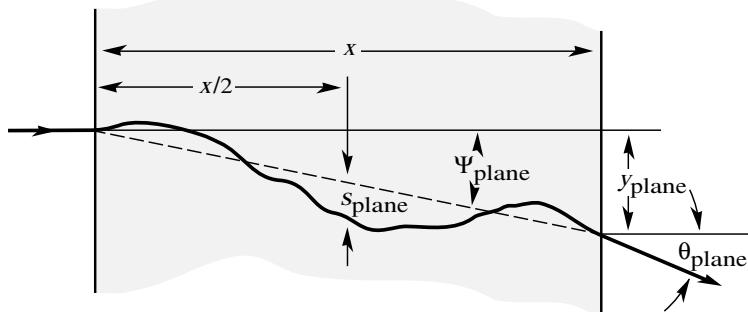


Abbildung 3.15: Die Skizze zeigt die Vielfachstreuung eines geladenen Teilchens in einer Streuerschicht projiziert auf eine Ebene und charakteristische Größen, die zur Beschreibung der Streuung benutzt werden.

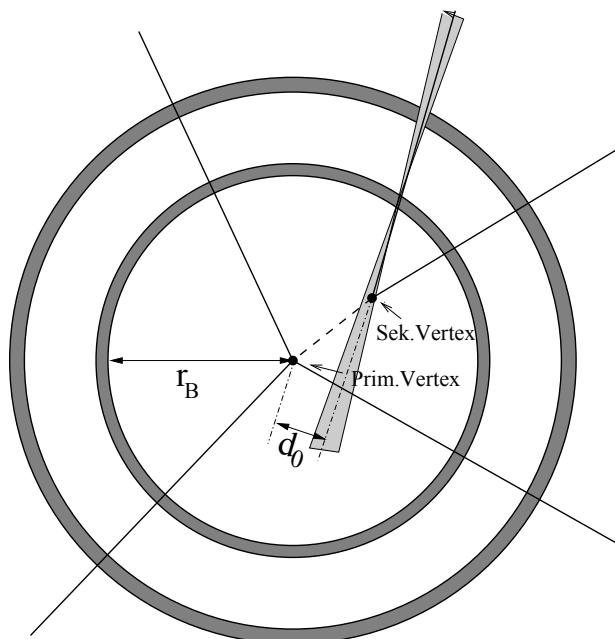


Abbildung 3.16: Einfluss der Streuung auf die Rekonstruktion von Sekundärvertizes. Mit zwei Detektorlagen wird die Richtung einer Spur gemessen. Die Streuung an der ersten Detektorlage führt zu einem Rekonstruktionsfehler bei der Extrapolation einer Spur zum Vertex (angedeutet durch den schattierten Fächer).

Zur Simulation von Teilchen, die einen Detektor durchlaufen, wird die Materie in Streuerschichten aufgeteilt. Dann muss zu jeder Streuerschicht der Streuwinkel und der Versatz des Austrittsortes von dem Ort, an dem das Teilchen ohne Streuung ausgetreten wäre, berechnet werden (Abb. 3.15). Der in eine Ebene projizierte Versatz  $y_{plane}$  ist im Mittel:

$$\overline{y_{plane}} = \frac{1}{\sqrt{3}}x\theta_0 \quad (3.15)$$

Diese Approximation ist innerhalb von 5% genau für Streuerdicken von  $10^{-3} < x/x_0 < 10$ , das ist für Blei von etwa  $5\text{ }\mu\text{m}$  bis  $50\text{ mm}$  und für Luft von etwa  $0.3\text{ mm}$  bis  $3\text{ m}$ .

**Beispiel: Messung von Sekundärvertizes in einem Speicherringexperiment:** Der Nachweis von Zerfällen von Mesonen, die Charm- und Bottom-Quarks enthalten, gelingt sehr gut durch die Bestimmung von Zerfallsvertizes, die aufgrund der langen Lebensdauern solcher Mesonen von den Primärvertizes getrennt sind. Zum Beispiel hat ein  $B$ -Meson eine Lebensdauer von etwa  $\tau = 1.5\text{ ps}$ . Bei einem Impuls von  $10\text{ GeV}$  ist dann die mittlere Zerfallslänge  $\bar{l} = \gamma\beta c\tau \approx 2\text{ mm}$ .

Als Maß für die Rekonstruierbarkeit eines Vertex kann der Stoßparameter  $d_0$  dienen, das ist der nächste Abstand einer extrapolierten Spur zum Primärvertex in der Ebene senkrecht zum Strahl (Abb. 3.16). Der Fehler in der Bestimmung von  $d_0$  legt fest, ob eine Spur noch vom Primärvertex getrennt werden kann.

Nehmen wir an, das Strahlrohr in dem die Kollisionen stattfinden, habe einen Radius von  $r_B = 50\text{ mm}$  und es sei direkt auf dem Strahlrohr ein Detektor, der sehr genau den Durchstoßpunkt eines Teilchens messen kann, und ein weiterer Detektor bei einem etwas größeren Radius. Strahlrohr und Detektor zusammen sollen eine Dicke  $x$  und eine Strahlungslänge  $x_0$  haben, voraus sich ein mittlerer Streuwinkel  $\theta_0$  nach (3.14) berechnet. Der Fehler in der Bestimmung von  $d_0$  ergibt sich dann (wenn man annimmt, dass die Ortsauflösung der Detektoren viel besser als der durch die Streuung verursachte Fehler ist):

$$\Delta d_0 = \theta_0 r_B \quad (3.16)$$

Tabelle 3.3: Fehler bei der Bestimmung des Stoßparameters  $d_0$  eines  $5\text{ GeV}$  Pions für eine Strahlrohr mit  $5\text{ cm}$  Radius und einer Dicke von  $1\text{ mm}$ .

Material	$x_0$ [mm]	$x/x_0$	$\theta_0$ [rad]	$\Delta d_0$ [ $\mu\text{m}$ ]
Al	89	0.011	0.0003	15.0
Be	353	0.003	0.00015	7.5

In Tabelle 3.3 ist für eine Streuerdicke  $x = 1\text{ mm}$  und einen Teilchenimpuls von  $p = 5\text{ GeV}/c$  und  $\beta \approx 1$  (zum Beispiel für ein Pion) der Fehler im Stoßparameter für Aluminium und Beryllium als Streuermaterial angegeben. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Stahlungslänge für Beryllium etwa viermal so groß wie für Aluminium ist und dass damit der Fehler um eine Faktor 2 kleiner wird.

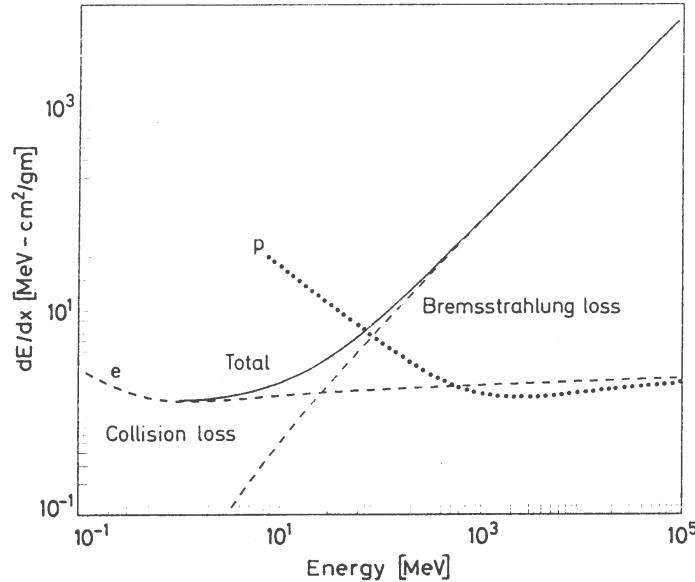


Abbildung 3.17: Energieverlust durch Ionisation und Bremsstrahlung für Elektronen als Funktion der Energie. Die beiden Anteile (gestrichelte Linien) kreuzen sich bei der kritischen Energie. Zum Vergleich ist auch der Energieverlust durch Ionisation für Protonen angegeben.

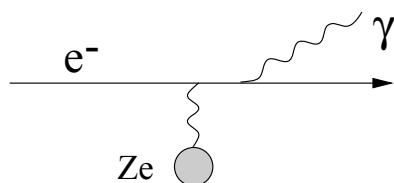
### 3.2.3 Elektron-Bremsstrahlung

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie in Form von elektromagnetischen Quanten = Photonen ab. Das klassische Strahlungsfeld, zum Beispiel eines schwingenden Dipols, hat in der QED als Analogon die Abstrahlung einzelner Photonen. Das Energiespektrum der Photonen ist:

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \sim \frac{1}{E_\gamma}. \quad (3.17)$$

Die Photonen häufen sich also bei sehr kleinen Energien (mit einer Divergenz des Spektrums bei  $E_\gamma = 0$ ). Der Energieverlust pro Weglänge ist aber endlich und proportional  $E/m^2$  ( $E$ ,  $m$  = Energie und Masse des beschleunigten Teilchens). Deshalb ist die Bremsstrahlung vor allem für Elektronen und Positronen wichtig, für schwere Teilchen spielt sie bis in den Bereich von einigen 100 GeV eine sehr geringe Rolle.

Beim Durchgang durch Materie werden geladene Teilchen im Coulomb-Feld eines Kerns beschleunigt. Die Abstrahlung erfolgt entsprechend folgendem Graph:



Der Energieverlust pro Weglänge ist, wie gesagt, proportional der Energie:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dx}{x_0} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{dE}{dx} \right)_{rad} = -\frac{E}{x_0} \quad (3.18)$$

Dabei ist die Strahlungslänge  $x_0$  durch die Eigenschaften des Mediums gegeben (Bezeichnungen wie in der Bethe-Bloch-Formel (3.6)):

$$\frac{1}{x_0} = 4\alpha r_e^2 Z(Z+1) \cdot \frac{N_A \cdot \rho}{A} \cdot \ln \left( \frac{183}{Z^{1/3}} \right) \quad (3.19)$$

Die  $1/m_e^2$ -Abhängigkeit steckt in  $r_e^2$ :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (3.20)$$

Der Strahlungs- und Ionisationsenergieverlust zeigen eine unterschiedliche Abhängigkeit von der Energie und von der Kernladung  $Z$ :

Ionisation:	$\sim Z \cdot \ln E$
Bremsstrahlung:	$\sim Z^2 \cdot E$

Die Energieabhängigkeit bedingt, dass bei niedrigen Energien die Ionisation und bei höheren die Abstrahlung dominiert. ‘Kritische Energie’,  $E_k$ , wird die Energie genannt, an der sich beide Kurven kreuzen (siehe Abb. 3.17):

$$\left( \frac{dE}{dx}(E_k) \right)_{rad} = \left( \frac{dE}{dx}(E_k) \right)_{ion} \quad (3.21)$$

Die kritische Energie variiert mit dem Medium etwa wie

$$E_k \approx \frac{600 \text{ MeV}}{Z} \quad (3.22)$$

Strahlungslängen und kritische Energien sind für einige Medien in Tabelle 3.4 angegeben.

Tabelle 3.4: Strahlungslängen und kritische Energien.

Material	$Z$	$x_0$ [mm]	$E_k$ [MeV]
H <sub>2</sub> O	1, 8	361	92.0
Al	13	89	51.0
Fe	26	17.6	27.4
Pb	82	5.6	9.5

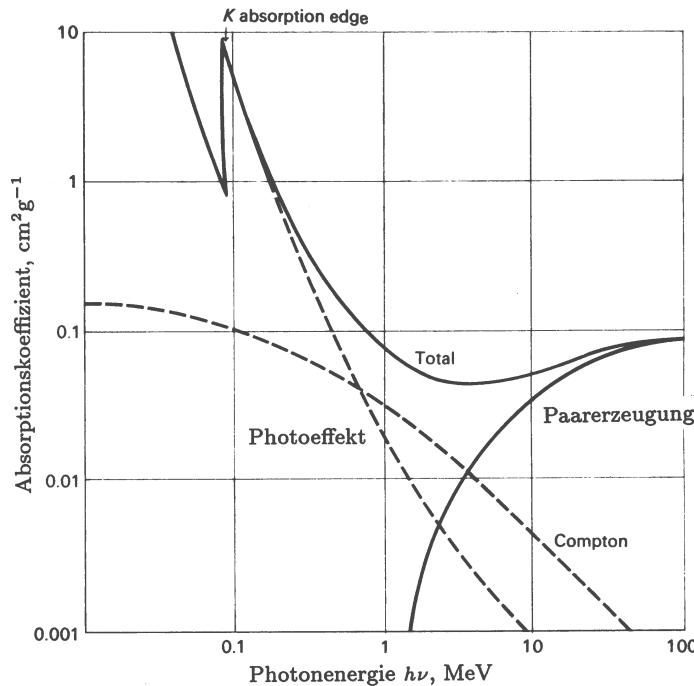


Abbildung 3.18: Absorptionskoeffizient von Photonen in Blei pro Schichtdicke (in  $\text{g}/\text{cm}^2$ ).

### 3.2.4 Wechselwirkungen von Photonen mit Materie

Photonen werden in Teilchendetektoren dadurch nachgewiesen, dass sie Energie auf geladene Teilchen übertragen. Dafür sind folgende Wechselwirkungen von Photonen mit Materie besonders wichtig:

- **Photoeffekt:** Das Photon überträgt seine gesamte Energie auf ein Hüllenelektron. Die kinetische Energie des Elektrons ist die Photonenergie minus die Bindungsenergie in der Atomhülle:

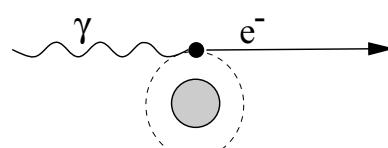
$$E_e = E_\gamma - E_B \quad (3.23)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist für die innerste der Schalen, für die  $E_\gamma > E_B$  gilt, am größten. Dadurch kommt es zur Ausbildung der Absorptionskanten bei  $E_\gamma \approx E_B$  (K-, L-, ... -Kanten; siehe Abb. 3.18).

Bei Vernachlässigung der Kantenstruktur kann der Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt etwa durch folgende Abhängigkeit von  $Z$  und  $E_\gamma$  dargestellt werden:

$$\sigma_{Photo} \sim Z^n / E_\gamma^m \quad (3.24)$$

Oberhalb der K-Kante ist  $n \approx 4 \dots 5$  und  $m \approx 3$  für leichte Elemente abfallend auf etwa 2.5 für schwere Elemente.

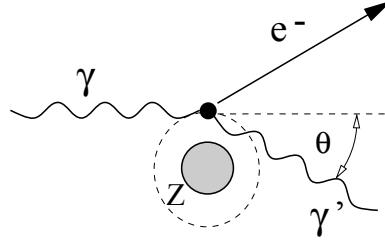


- **Compton-Effekt:** Das Photon streut elastisch an einem Hüllenelektron, überträgt dabei Energie auf das Elektron und verliert selbst Energie:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (3.25)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zur Anzahl der Hüllenelektronen und damit zu  $Z$ :

$$\sigma_{Compton} \sim N(e^-) \sim Z \quad (3.26)$$

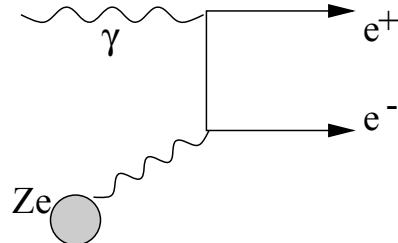


- **Paarbildung:** Das Photon erzeugt im Coulomb-Feld des Kerns ein Elektron-Positron-Paar. Der Wirkungsquerschnitt hat dann die Abhängigkeit von der Kernladung:

$$\sigma_{Pair} \sim Z^2 \quad (3.27)$$

und hat eine Schwelle bei:

$$E_\gamma > 2 m_e \quad (3.28)$$



Photonen werden aufgrund dieser Effekte mit einer Wahrscheinlichkeit proportional der Wegstrecke  $dx$  absorbiert. Man definiert deshalb einen Absorptionskoeffizienten  $\mu$ , der die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Weglänge angibt. Ähnlich wie in (1.93) und (1.92) ergibt sich:

$$-\frac{1}{N} \frac{dN}{dx} = \mu = \frac{dN_T \cdot \sigma}{dx \cdot F} = \rho \frac{N_A}{A} \sigma \quad (3.29)$$

Die Anzahl der Photonen in einem Strahl folgt damit einem Exponentialgesetz:

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x} \quad (3.30)$$

Das ist zu vergleichen mit dem Verhalten geladener Teilchen, die durch Ionisation kontinuierlich Energie verlieren und eine diskrete Reichweite haben (Abb. 3.10).

Die Beiträge zu der Absorption von Photonen ist als Funktion der Photonenergie für Blei in Abb. 3.18 gezeigt. Abgesehen von einem engen Bereich um etwa 1 MeV dominieren Paarbildung und Photoeffekt. Für leichtere Medien wird entsprechend den  $Z$ -Abhängigkeiten der Bereich der Compton-Dominanz breiter.

### 3.3 Detektoren

Detektoren in der Kern- und Teilchenphysik werden je nach Art und Einsatz für folgende Aufgaben verwendet:

- Nachweis von Teilchen;
- Messung der Kinematik (Energie, Impuls, Winkel, Zerfallsvertex, ...);
- Identifikation der Teilchen.

#### 3.3.1 Detektoren für geladene Teilchen

##### Impulsmessung

Ein Magnetfeld lenkt geladene Teilchen auf eine Kreisbahn, der Bahnradius ist proportional dem Impuls. Aus der Lorentz-Kraft

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.31)$$

folgt für die Impulskomponente  $p_{\perp}$  senkrecht zu  $\vec{B}$ :

$$R[m] = \frac{p_{\perp}[\text{GeV}]}{0.3 \cdot B[\text{T}]} \quad (3.32)$$

Das lässt sich auch aus der Zyklotronfrequenz

$$\omega = \frac{q \cdot B}{m \cdot \gamma} \quad (3.33)$$

mit  $v = R \cdot \omega$  und  $p = m\gamma v$  herleiten.

Ein Teilchen mit dem Impuls 300 MeV/c hat demnach in einem Feld von 1 T einen Radius von 1 m.

##### Nachweis und Ortsmessung

Detektoren für geladene Teilchen nutzen zum Nachweis vor allem die Ionisation des Mediums durch die Teilchen aus. Im folgenden ist eine Auswahl der wichtigsten Detektortypen kurz beschrieben. Durchgesetzt haben sich schließlich nur solche Detektoren, die schnelles ‘Triggern’ erlauben. Ein Trigger ist ein elektronisches Signal, das eine logische Kombination von schnellen Detektorsignalen ist. Mit einem solchen Trigger werden interessante Reaktionen selektiert, die dann von der Ausleseelektronik weiterverarbeitet werden.

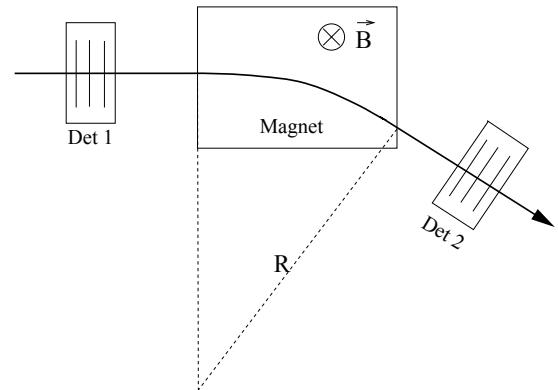


Abbildung 3.19:

1. **Nebel- und Blasenkammern:** Ionen bilden Kondensationskeime in überkritischen Gasen bzw. Flüssigkeiten, die nach adiabatischer Expansion Tröpfchen oder Blasen entlang der Spur bilden (Abb. 3.20). Der Detektor bietet einen gleichmäßigen Nachweis im vollen Raumwinkel (= ‘4π-Detektor’), ist aber schlecht zu ‘triggern’.

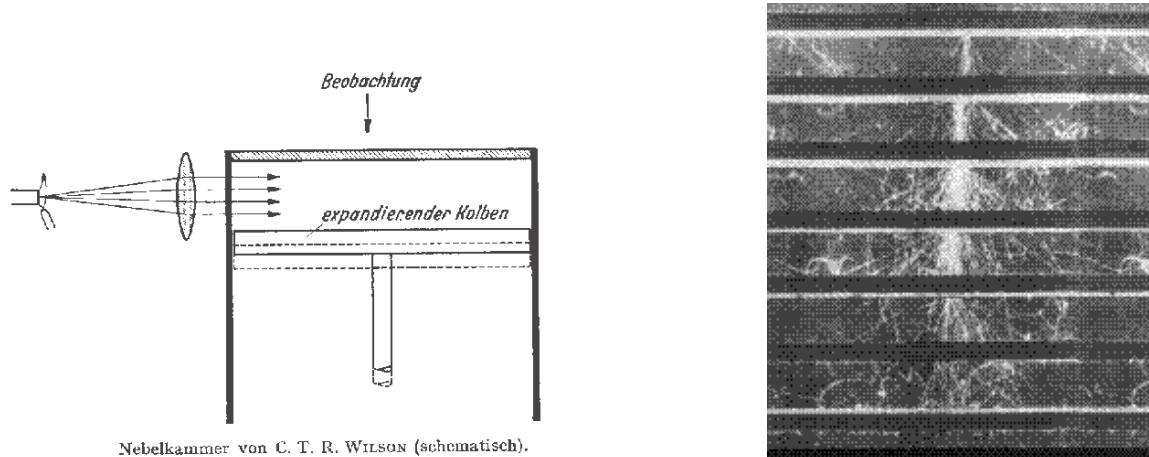


Abbildung 3.20: Prinzip einer Nebelkammer und Nebelkammeraufnahme eines elektromagnetischen Schauers, der von Bleiplatten ausgelöst wird.

Zum Beispiel: BEBC = Big European Bubble Chamber,  $\varnothing$  3.7 m, Wasserstoff bei 26°K,  $p = 5\text{-}20$  bar.

2. **Photoemulsionen:** Ionisierende Spuren hinterlassen in photosensitiven Schichten nach der Entwicklung eine Schwärzung (Abb. 3.28). Häufig werden Stapel von Photoemulsionen benutzt. Die mikroskopische Auswertung erlaubt Auflösungen im  $\mu\text{m}$ -Bereich (sehr geeignet zur Rekonstruktion von Zerfallsvertices kurzlebiger Teilchen).
3. **Ionisationskammern:** Teilchen ionisieren ein Gasvolumen innerhalb eines Kondensators (Abb. 3.21). Die Elektronen und Ionen werden durch das angelegte Feld separiert und als Strom zwischen den Elektroden gemessen. Ionisationskammern sind nicht sensitiv auf einzelne Teilchen (1 nA entspricht etwa  $10^{10}$  Ionisationen pro Sekunde), sondern werden als Strahlendosimeter für hohe Teilchenflüsse benutzt.

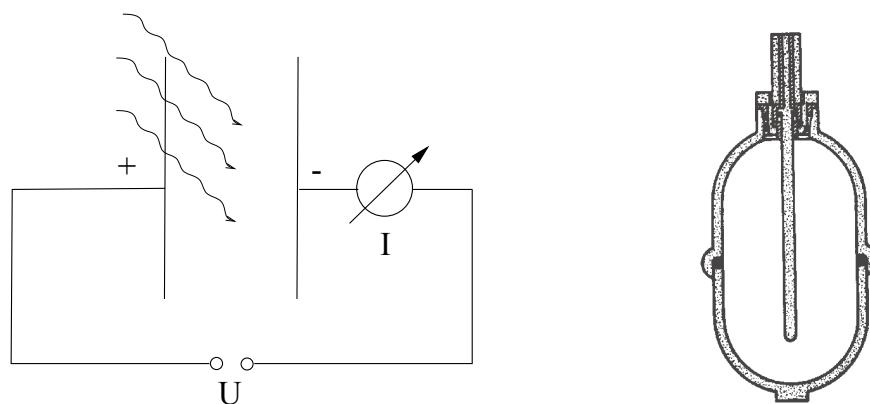


Abbildung 3.21: Prinzip einer Ionisationskammer (links) und eine Ausführung für Dosimetrie im medizinischen Bereich (rechts).

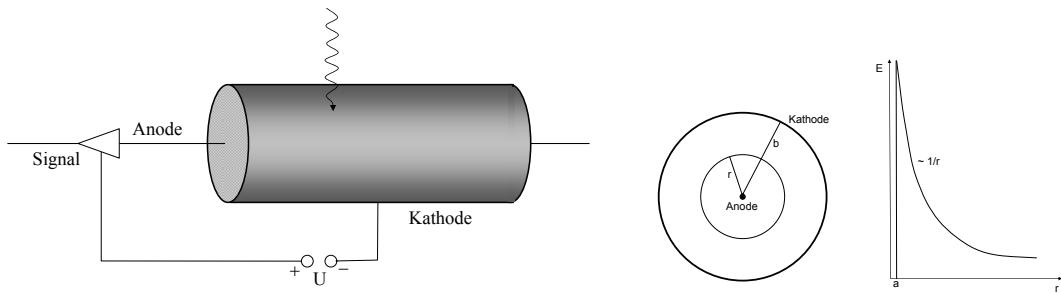


Abbildung 3.22: Prinzip eines Proportionalzählohrs.

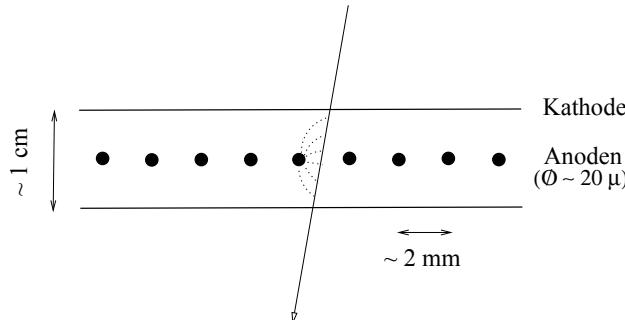


Abbildung 3.23: Prinzip einer Vieldrahtproportionalkammer.

**4. Drahtkammern:** Das Prinzip basiert auf dem **Geiger-Müller-Zählrohr** (Abb. 3.22): In einem Zylinderrohr, das mit einem speziellen Gas gefüllt ist, wird auf der Zylinderachse ein dünner Draht gespannt und zwischen Draht (Anode) und Zylinderwand (Kathode) eine hohe Spannung angelegt. In dem  $1/r$ -Feld dieses Zylinderkondensators werden die Elektronen, die bei Ionisation des Gases durch Teilchen entstehen, in der Nähe des Drahtes so stark beschleunigt, dass sie Sekundärionisation machen. Es kommt zu einer Lawinenausbildung und damit zu einer Verstärkung der Ionisationsladung mit typischen Verstärkungsfaktoren von  $10^4$  bis  $10^6$ . Das ist ein Bereich, in dem die verstärkten Signale etwa proportional der primären Ionisation sind (Proportionalbereich). Höhere Verstärkungen führen erst zu einem Sättigungsverhalten (Geigerbereich) und dann zum Durchbruch.

Eine flächige Anordnung von Zählrohren führt zu der sogenannten **Vieldrahtproportionalkammer (MWPC = Multi-Wire Proportional Chamber)**: Etwa  $20\text{ }\mu\text{m}$  dicke Anodendrähte sind in etwa  $2\text{ mm}$  Abständen zwischen zwei Kathodenflächen gespannt (Abb. 3.23). Das Rastermaß von  $2\text{ mm}$  bestimmt die räumliche Auflösung:

$$\sigma \approx 2\text{ mm}/\sqrt{12} \lesssim 1\text{ mm}. \quad (3.34)$$

Auflösungen von etwa  $100\text{ }\mu\text{m}$  werden mit **Driftkammern**, einer sehr erfolgreichen Variante der MWPC, erreicht. In diesem Kammertyp (Abb. 3.24) wird die Driftzeit der Elektronen von der Entstehung bei der Ionisation bis zur Ankunft am Draht zusätzlich gemessen. Aus der Driftzeit kann der Ort genau bestimmt werden.

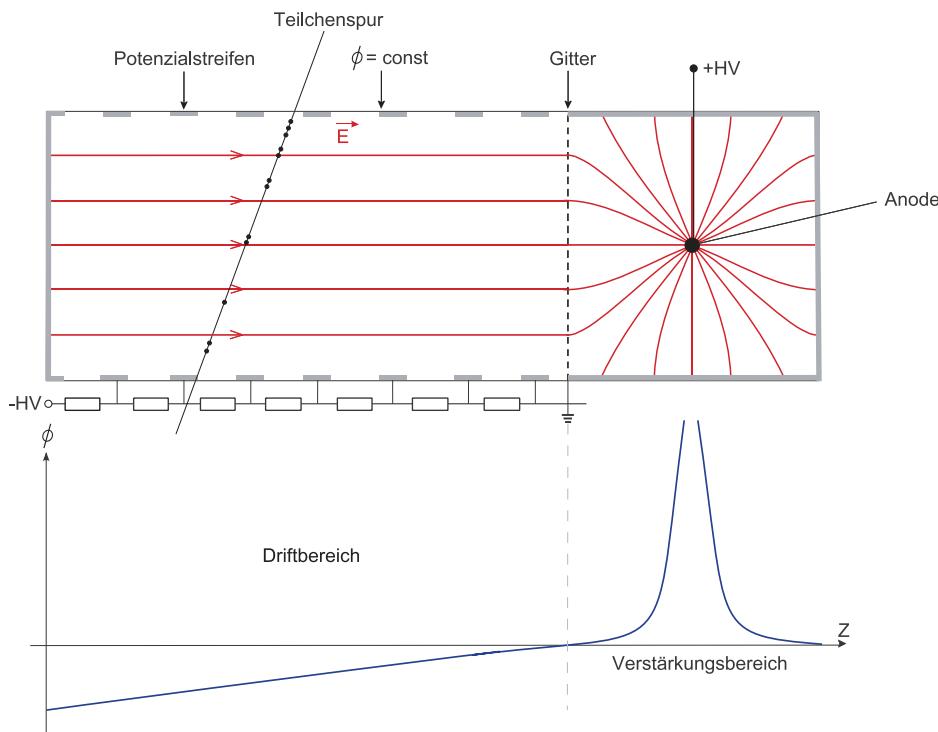


Abbildung 3.24: Prinzip einer Driftkammer: Ein geladenes Teilchen passiert den Driftraum, in dem es das Driftgas ionisiert. Die bei der Ionisation erzeugten Elektronen driften zur Anode, an der die Ankunftszeit (relativ zu einem schnellen “Triggersignal”) gemessen wird. Aus der Driftzeit wird dann der Ort der Spur berechnet. Der hier gezeigte Detektor, der zur Überwachung der Driftgeschwindigkeit entwickelt wurde, entspricht nicht unbedingt einer typischen Driftkammer, veranschaulicht aber gut das Prinzip: der Driftraum mit möglichst konstantem Driftfeld ist getrennt von dem Bereich in dem die Verstärkung stattfindet.

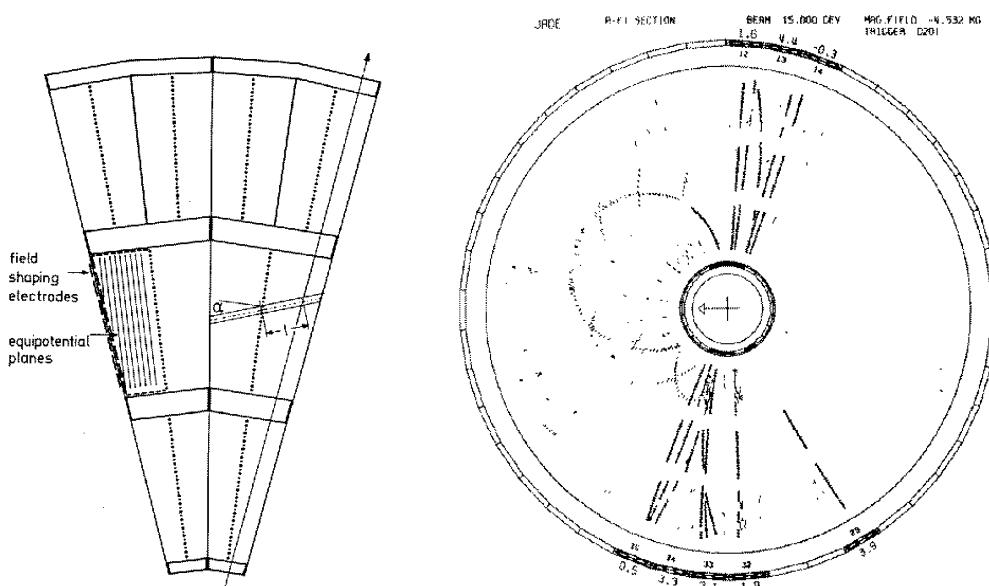


Abbildung 3.25: Links: Struktur eines Sektors der JADE-Driftkammer (‘Jetkammer’). Aus den Sektoren wird eine zylindrische Kammer zusammengesetzt. Rechts: Ein 2-Jet-Ereignis (= Quark-Antiquark-Paar) in der JADE-Driftkammer in einer Projektion senkrecht zu den kollidierenden Elektron-Positron-Strahlen.

Die prinzipielle Anordnung ist in Abb. 3.24 gezeigt: Der Driftraum befindet sich zwischen den Potentialen  $-HV1$  und  $+HV2$ . In Experimenten an Speicherringen umgibt häufig eine zylindrische Driftkammer den Wechselwirkungspunkt (Abb. 3.25).

5. **Halbleiter-Detektoren:** Eine pn-Diode (Abb. 3.26) wird in Sperrrichtung geschaltet, was die Ausbildung einer Verarmung an Ladungsträgern im pn-Übergangsbereich bewirkt. Wenn durch Ionisation Ladungen in dieser Sperrsicht erzeugt werden, führt das zu einem Strompuls. Halbleiter-Zähler werden in

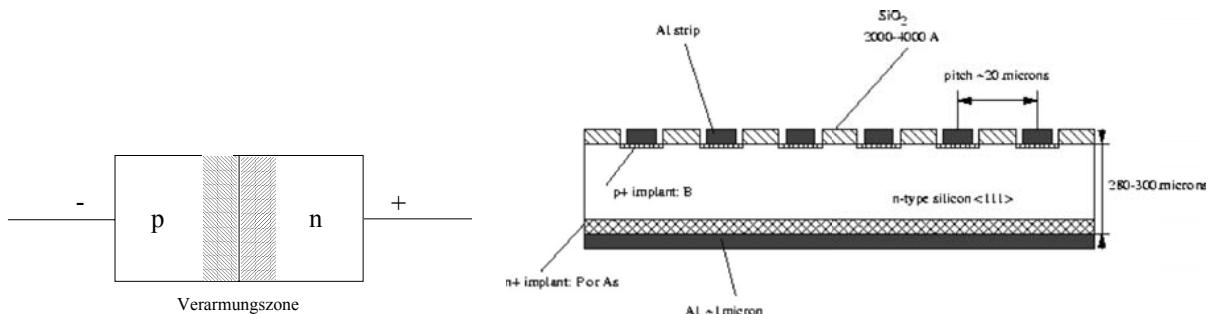


Abbildung 3.26: Links: Halbleiterdiode (in Sperrrichtung betrieben); Rechts: Querschnitt durch einen Silizium-Streifen-Detektor.

der Kernphysik vor allem für Energiemessungen benutzt. In der Teilchenphysik werden Dioden mit Streifensegmentierung zur Ortsauflösung (etwa  $6 \mu\text{m}$ ) eingesetzt (**Silizium-Streifendetektoren**).

6. **Szintillationszähler:** In diesen Detektoren wird die durch die Ionisation erzeugte Ladung in Szintillationslicht umgewandelt. Es gibt zwei wichtige Anwendungsgebiete: a) Anorganische Szintillationskristalle zur präzisen Energiemessung von Elektronen und Photonen (z.B. mit NaJ- und CsJ-Kristallen). b) Organische Szintillatoren mit Zeitauflösungen im Bereich von Nanosekunden werden zur Erzeugung schneller Triggersignale eingesetzt. Diese Zähler sind meistens als Platten von einigen Millimetern Dicke ausgelegt; das Licht wird über einen Lichtleiter auf die Photokathode einer Photovervielfacherröhre geleitet (Abb. 3.27).

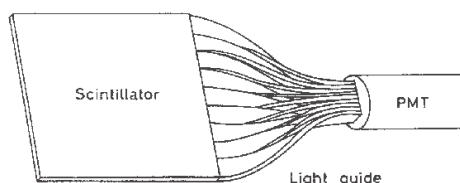


Abbildung 3.27: Typische Anordnung eines Szintillationszählers: Szintillatorplatte, Lichtleiter, Photovervielfacherröhre.

## Teilchenidentifikation

Um Teilchen zu identifizieren, mißt man charakteristische Eigenschaften des Teilchens. Zum Beispiel kann die Masse durch unabhängige Messungen von Impuls und Geschwindigkeit bestimmt werden. Die Impulsmessung erfolgt durch Ablenkung in einem Magnetfeld und Nachweis mit einem ortsauf lösenden Detektor. Für die Bestimmung der Geschwindigkeit geben wir im folgenden drei Methoden an:

1. **Ionisationsmessungen ( $dE/dx$ )** zum Beispiel in Szintillatoren oder Driftkammern ergeben für einen festen Impuls Unterschiede in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (siehe Abbildungen 3.8 und 3.28)

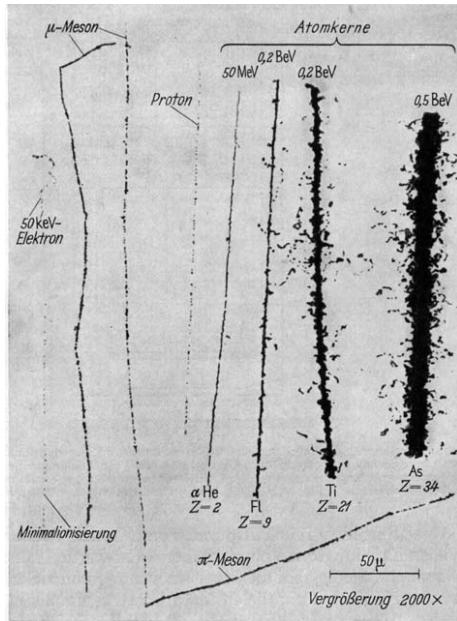


Abbildung 3.28: Energieverlust durch Ionisation: Spuren von Teilchen mit unterschiedlichen Massen und Energien in einer Photoplatte.

2. **Laufzeitmessungen:** Die Flugzeit zwischen zwei Detektoren (TOF = ‘time-of-flight’) ergibt direkt die Geschwindigkeit. Zum Beispiel ist die Flugzeit zwischen zwei Szintillationszählern im Abstand von 2 m für  $\pi$ ,  $K$ ,  $p$  mit jeweils einem Impuls von 500 MeV/c entsprechend 6.2 ns, 8.5 ns, 12.7 ns (das Licht braucht dafür 6 ns). Mit Plastiksintillationszählern lässt sich eine Zeitauflösung von optimal etwa 100 ps erreichen.
3. **Cherenkov-Effekt:** Wenn ein geladenes Teilchen mit der Geschwindigkeit  $\beta$  in einem Medium mit Brechungsindex  $n$  schneller ist als das Licht, das heißt ( $c_0$  ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit)

$$c = c_0/n \leq \beta \cdot c_0, \quad (3.35)$$

dann strahlt das Teilchen unter einem Winkel  $\theta$  sogenannte Cherenkov-Strahlung ab. Der Winkel ist gegeben durch (siehe Abb. 3.29):

$$\cos \theta = \frac{1}{n \beta}. \quad (3.36)$$

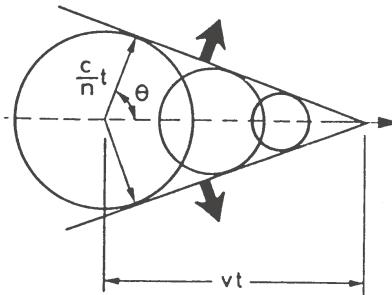


Abbildung 3.29: Ausbildung der Cherenkov-Strahlung.

Aus der Bedingung, dass der Kosinus  $\leq 1$  sein muß, folgt die Schwelle, ab der Cherenkov-Strahlung entsteht:

$$\frac{1}{n} \leq \beta \quad (3.37)$$

Mit Schwellen-Cherenkov-Detektoren diskriminiert man zwischen zwei Teilchensorten (zum Beispiel zwischen Elektronen und Pionen) indem man die Schwelle für den interessanten Impulsbereich zwischen die  $\beta$ 's der beiden Teilchensorten legt. Mit einem Ring Imaging Cherenkov Counter (RICH) mißt man direkt die Winkel  $\theta$  über die Ringöffnungen.

Der Cherenkov-Effekt wird auch nur zum Nachweis von Teilchen eingesetzt, zum Beispiel werden hochenergetische kosmische Strahlen über das Cherenkov-Licht, das sie in Luft, Wasser oder Eis erzeugen, nachgewiesen.

### 3.3.2 Messung der Energie von Elektronen und Photonen

Die Energie der elektromagnetisch wechselwirkenden Teilchen Elektron und Photon wird durch Aufschauern in Absorbermaterial mit hohem  $Z$ , wie Blei, Wolfram oder Uran, bestimmt. Detektoren, die zur Energiemessung die Teilchen total absorbieren, nennt man Kalorimeter.

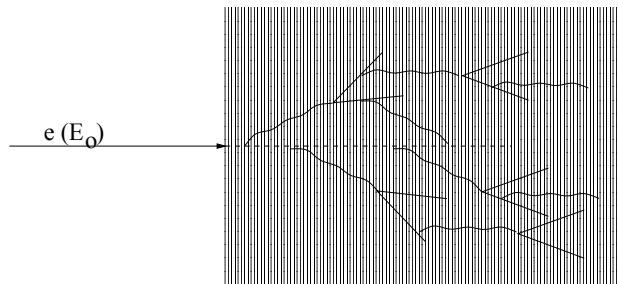


Abbildung 3.30: Entwicklung eines elektromagnetischen Schauers als Abfolge von Bremsstrahlungs- und Paarbildungsprozessen.

Ein hochenergetischer elektromagnetischer Schauer (Abb. 3.20) entwickelt sich als eine Abfolge von Bremsstrahlungs- und Paarbildungsprozessen (beides proportional zu  $Z^2$ ). Ein auf den Absorber auftreffendes Elektron (Abb. 3.30) strahlt ein

Photon ab, das Photon bildet ein Elektron-Positron-Paar, die dann auch wieder abstrahlen usw. Der Prozess geht etwa so lange, bis alle Elektronen die kritische Energie  $E_k$  (siehe Abschnitt 3.2.3) erreicht haben und dann im wesentlichen durch Ionisation die Energie abgeben. Die Ionisation der Schauerteilchen wird schließlich gemessen. Für die Messung der Ionisation gibt es verschiedene Techniken, häufig trennt man das Auslesemedium von dem Absorber, zum Beispiel bei einer Blei-Szintillator-Sandwich-Anordnung. Szintillierende Kristalle (z.B. Na J, Cs J) sind Absorber und Auslesemedium gleichzeitig.

Die Anzahl der Schauerteilchen lässt sich zu

$$N_{max} \approx \frac{E_0}{E_k} \quad (3.38)$$

abschätzen. In einem einfachen Modell nimmt man an, dass sich nach einer Strahlungslänge  $x_0$  die Teilchenanzahl jeweils verdoppelt. Dann hat man am Ende des Schauers nach  $n$  Strahlungslängen  $2^n$  Teilchen mit der Energie  $E_k$ . Daraus lässt sich dann die notwendige Anzahl  $n$  von Strahlungslängen des Detektors berechnen:

$$E_0 = 2^n E_k \Rightarrow n \ln 2 = \ln \frac{E_0}{E_k} \quad (3.39)$$

Wegen des exponentiellen Aufspaltens im Schauer wächst deshalb die Schauertiefe  $t$  (und damit die notwendige Detektorgröße) nur logarithmisch mit der Energie:

$$t_{max} \sim \ln E_0 / E_k \quad (3.40)$$

Die Längeneinheit ist die Strahlungslänge  $x_0$ . Da die Anzahl der Schauerteilchen  $N$  proportional zur Energie ist, der Fehler von  $N$  aber  $\sqrt{N}$  ist, ergibt sich:

$$N \sim E \quad \Rightarrow \quad \sigma_E \sim \sqrt{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_E}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (3.41)$$

Der relative Fehler wird also mit steigender Energie kleiner. Bei magnetischen Messungen des Impulses steigt er dagegen mit der Energie an (weil die Krümmung immer geringer wird). Deshalb sind bei Energien oberhalb von etwa 10 bis 20 GeV auch bei geladenen Teilchen nur noch ‘kalorimetrische’ Messungen möglich.

### 3.3.3 Messung der Energie von Hadronen

Auch die Energien von Hadronen können in Schauerdetektoren (Kalorimetern) gemessen werden. In diesem Fall sind die Reaktionen Kernwechselwirkungen. Die charakteristische Länge ist die nukleare Wechselwirkungslänge  $\lambda$ , die man wie die Strahlungslänge tabelliert findet (Tab. 3.5, [34]). Da hadronische Wirkungsquerschritte die Größenordnung der geometrischen Kernquerschnitte haben, die proportional zu  $A^{2/3}$  skalieren<sup>2</sup>, sind bei gegebener Dichte Schauermaterialien mit leichteren Kernen bevorzugt.

Im Vergleich zu elektromagnetischen Schauern sind hadronische Schauer irregulärer, zeigen größere Fluktuationen und sind auch schwieriger zu simulieren. Zum

---

<sup>2</sup>Wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte ist die Kerndichte konstant und das Kernvolumen proportional zur Massenzahl  $A$  und damit der Radius proportional zu  $A^{1/3}$ .

Tabelle 3.5: Strahlungslängen und nukleare Wechselwirkungslängen.

Material	$Z$	$A$	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$x_0$ [cm]	$\lambda$ [cm]
Al	13	27.0	2.70	8.90	39.41
Fe	26	55.8	7.87	1.76	16.76
Cu	29	63.5	8.96	1.43	15.06
Pb	82	207.2	11.35	0.56	17.09

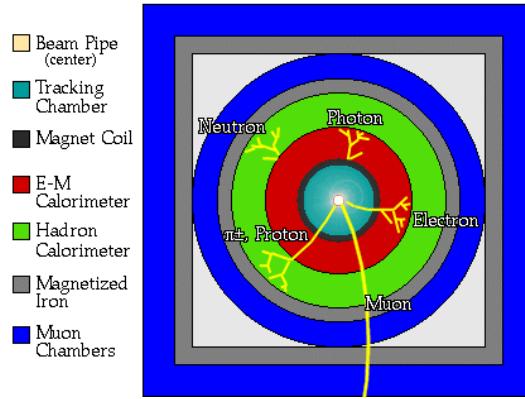


Abbildung 3.31: Schematische Darstellung des Lagenaufbaus eines typischen Detektors in einem Collider-Experiment (links) und einem ‘fixed target’ Experiment (rechts). beginnend mit Lagen geringer Dichte (wenig Streuung und Absorption), über die Energiemessung elektromagnetischer und hadronischer Teilchen in absorbierenden Kalorimetern bis zu den äussersten Detektoren zum Nachweis der durchdringenden Myonen. In dem Querschnitt des Collider-Detektors (links) ist auch noch eine Spule zur Erzeugung eines Solenoid-Feldes (senkrecht zur Bildebene und ein Eisenjoch zur Zurückführung des Magnetflusses, gezeigt.

Beispiel kann der Anteil der Energie, der in Photonen auftritt und dann elektromagnetisch aufschauert, stark schwanken. Man bemüht sich deshalb, die Signale für elektromagnetische und hadronische Schauer möglichst gleich zu machen.

In Hochenergie-Experimenten sind Hadronkalorimeter notwendig zur genauen Vermessung von Quark- und Gluon-Jets.

### 3.3.4 Beispiele von Detektoren für Teilchenexperimente

Abbildung 3.31 zeigt den schematischen Aufbau typischer Collider- und ‘fixed target’ Experimente. Charakteristisch ist die Zwiebelschalenstruktur: von innen nach außen nimmt die Dichte der Materialien zu. Innen möchte man möglichst ungestört Spuren vermessen, weiter außen werden die kalorimetrischen Messungen, bei denen die Teilchen absorbiert werden, gemacht. Die einzigen geladenen Teilchen, die diese Absorber durchdringen können, sind Myonen, die dann auch durch diese Eigenschaft identifiziert werden können.

Als Beispiele für komplette Detektoreninstallationen, in denen verschiedene Nachweismethoden für Teilchen eingesetzt werden, werden zwei typische Experimente an Beschleunigern gezeigt:

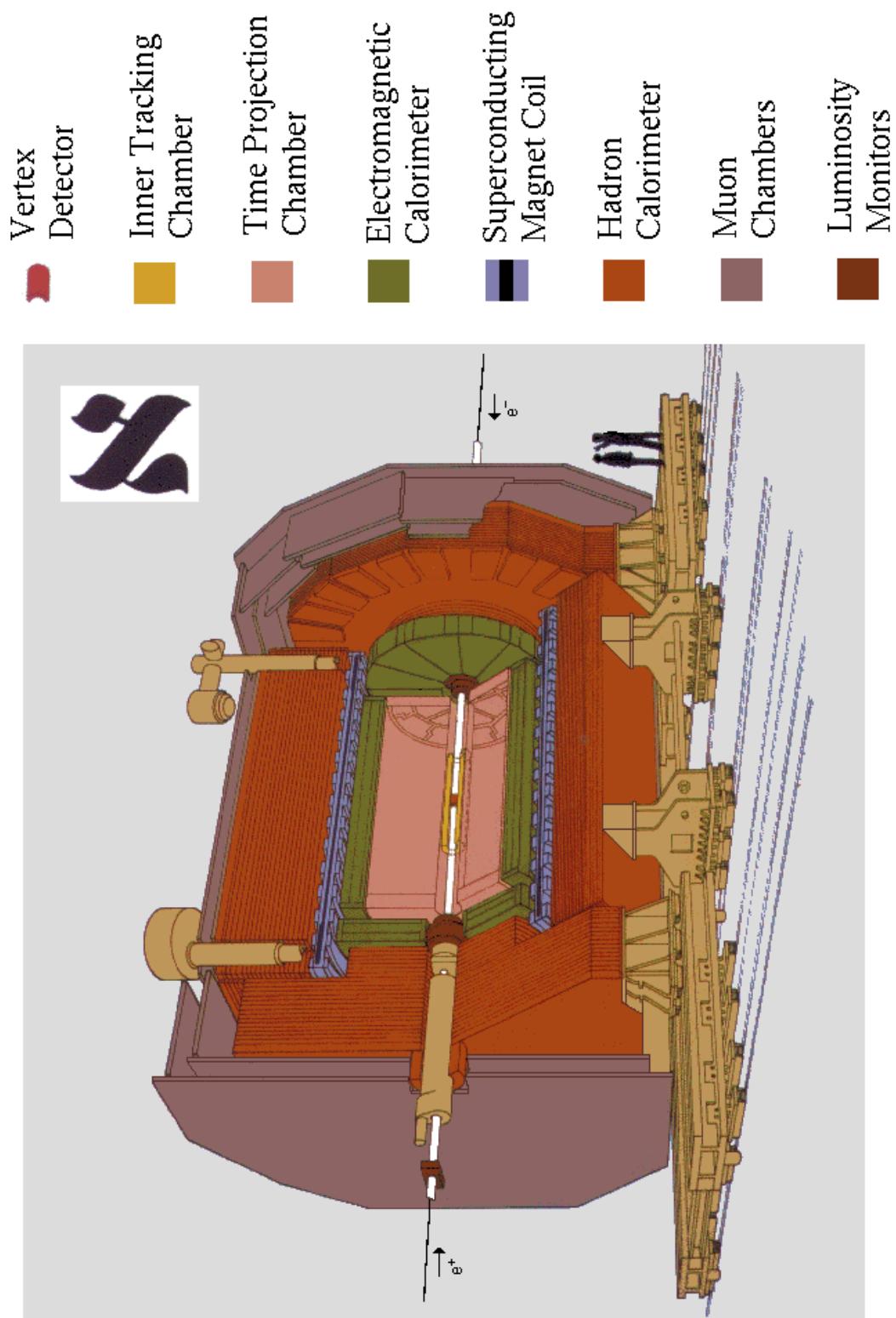
- ein typisches Speicherring-Experiment: ALEPH am Elektron-Positron-Speicherring LEP,
- ein ‘fixed target’ Experiment: HERA-B am Protonenstrahl des HERA-Ringes.

Der **ALEPH-Detektor** (Abb. 3.32) hat, wie die meisten Speicherring-Detektoren, eine näherungsweise zylindrische Anordnung, mit der möglichst der gesamte Raumwinkel abgedeckt wird (‘ $4\pi$ -Detektor’). Sehr nahe am Strahlrohr ist ein Silizium-Streifendetektor zur genauen Messung sekundärer Zerfallsvertices installiert. Es folgen Spurkammern zur Vermessung geladener Teilchen. Supraleitende Stromspulen erzeugen in dem Spurkammervolumen ein solenoidales Magnetfeld (parallel zum Strahl). Nach außen folgen ein elektromagnetisches und ein hadronisches Kalorimeter und schließlich wird alles von einem Muon-Detektor abgeschlossen. Hochenergetische Muonen haben eine hohe Durchdringungsfähigkeit und passieren alle Detektorschichten, weil sie keine starke Wechselwirkung haben und auch nicht wie Elektronen stark abstrahlen.

Der **HERA-B-Detektor** (Abb. 3.33) hat eine vorwärts gerichtete Anordnung. Es ist ein ‘fixed target’ Experiment, bei dem das Target ein dünner Draht ist, der in den Halo des HERA-Protonenstrahls gefahren wird. Die Reaktionsprodukte gehen im wesentlichen in einen Vorwärtskegel mit einem halben Öffnungswinkel von etwa 250 mrad. Die Detektorkomponenten sollen diesen Raumwinkel abdecken. Die Abfolge der Komponenten ist ähnlich dem ALEPH-Detektor: Ein Silizium-Vertexdetektor ist noch in der gleichen Vakuumkammer wie das Target installiert; es folgen Spurenkammern; die Impulsbestimmung erfolgt durch Ablenkung in einem Dipolfeld; der Cherenkov-Detektor (‘RICH’) zur genauen Pion-Kaon-Trennung ist eine Spezialität dieses Experimentes; es folgen ein elektromagnetisches Kalorimeter und am Ende Muon-Kammern.

Sehr wichtig sind in modernen Hochenergie-Experimenten die elektronische Signalverarbeitung (mit bis zu etwa  $10^8$  Auslesekanälen bei LHC-Experimenten) und die Datenerfassung. Die wesentlichen Fortschritte sind in den letzten Jahren auf diesem Gebiet erzielt worden.

**Andere Detektortypen:** Für spezielle Anwendungen gibt es sehr unterschiedliche Detektoren. Beispiele sind Neutrinodetektoren, die wegen der sehr schwachen Wechselwirkung der Neutrinos mit Materie sehr große sensitive Volumina erfordern. Wir werden auf solche Spezialdetektoren bei den entsprechenden Themen zurückkommen.



The ALEPH Detector

Abbildung 3.32: Aufgeschnittene Ansicht des ALEPH-Detektors.

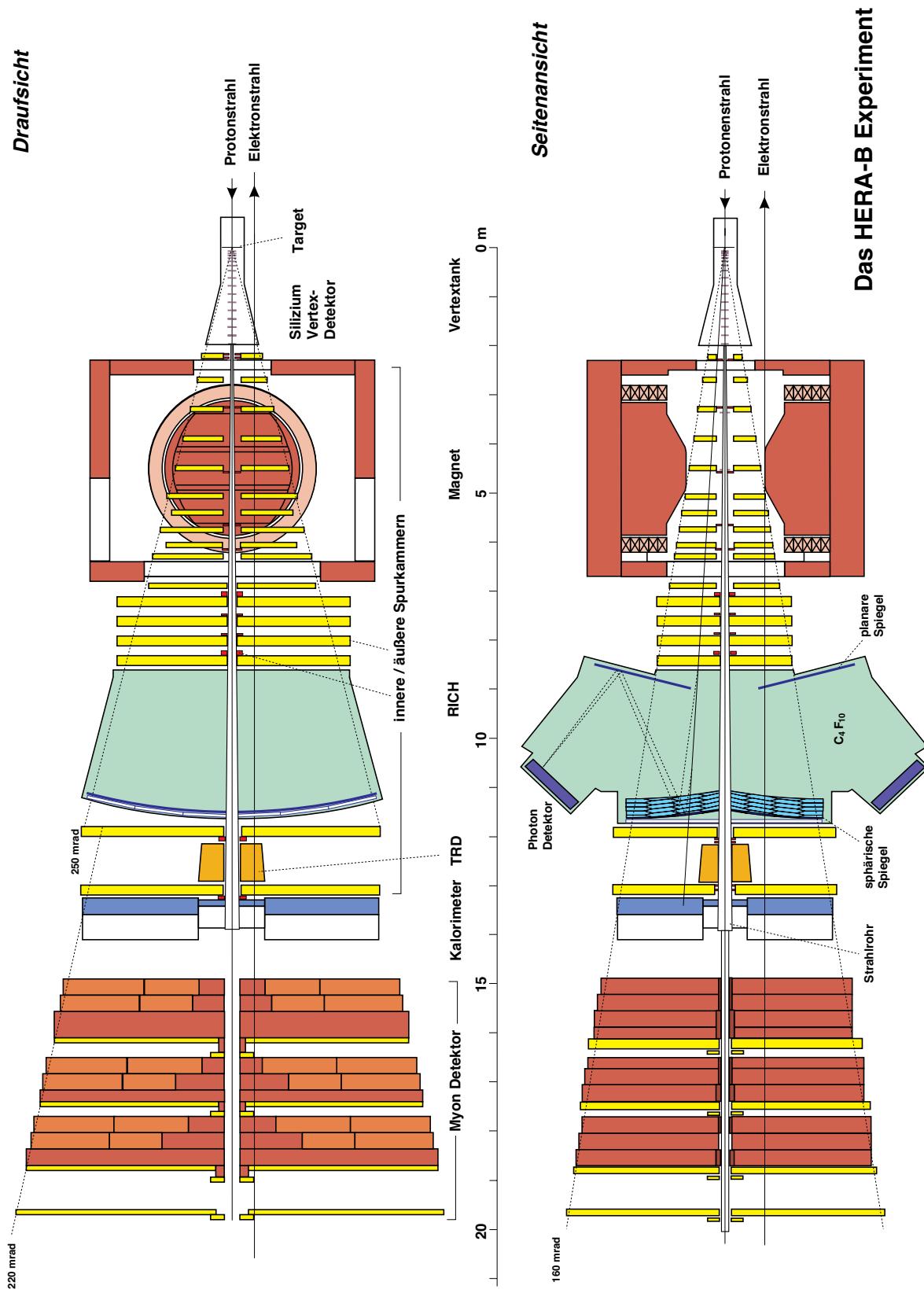


Abbildung 3.33: Schnittbilder des HERA-B-Detektors.

# Kapitel 4

## Erhaltungssätze und Symmetrien

Invarianzen von Naturgesetzen bezüglich Transformationen, auch Symmetrien genannt, spielen in der Physik eine wesentliche Rolle. Wahrscheinlich sind sie sogar der Schlüssel zur Formulierung von Naturgesetzen überhaupt. Beispiele für solche Transformationen, die die Naturgesetze invariant lassen, sind Verschiebungen in Raum und Zeit oder Verschiebungen mit einer konstanten Geschwindigkeit (Lorentz-Transformation). Wir glauben, daß es keine Rolle spielt, wo im Universum, zu welcher Zeit oder in welchem Inertialsystem wir ein Experiment machen. Ob diese Annahme allgemeine Gültigkeit hat, wissen wir nicht exakt, sondern nur mit einer durch die Experimente gegebenen Genauigkeit.

Es zeigt sich, daß mit solchen Invarianzen Erhaltungsgrößen (quantenmechanisch sind es erhaltene Quantenzahlen) verknüpft sind, wie zum Beispiel Energie, Impuls, Drehimpuls, Ladung usw. Es gibt ein Theorem (Noether-Theorem), das besagt, daß es zu jeder Transformation, die ein System invariant läßt, eine in diesem System erhaltene Größe gibt. Dieser Satz hat für die Physik eine fundamentale Bedeutung.

In der Teilchenphysik gibt es Größen, die absolut erhalten sind (bzw. die innerhalb der experimentellen Genauigkeit erhalten sind). Andere Größen sind in einigen Wechselwirkungen erhalten, in anderen nicht. Die meisten Erhaltungsgrößen gibt es in der starken Wechselwirkung, die wenigsten in der schwachen Wechselwirkung.

### 4.1 In allen Wechselwirkungen erhaltene Größen

- a) **Energie, Impuls, Drehimpuls** sind in abgeschlossenen Systemen immer erhalten:

$$\sum_i E_i = \text{const}; \quad \sum_i \vec{p}_i = \text{const}; \quad \sum_i \vec{j}_i = \text{const} \quad (4.1)$$

- b) **Elektrische Ladung ( $Q$ )**: Die Summe der Ladungen ist im Anfangs- und

Endzustand einer Reaktion immer gleich; zum Beispiel:

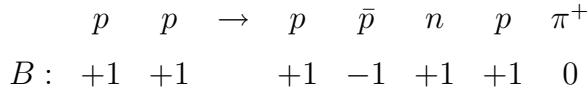
$$\begin{array}{ccccccccc} \pi^- & p & \rightarrow & \pi^- & p \\ Q : & -1 & +1 & & -1 & +1 \\ \\ \pi^- & p & \rightarrow & \pi^0 & n \\ Q : & -1 & +1 & & 0 & 0 \\ \\ \pi^- & p & \rightarrow & \pi^0 & \pi^+ & \pi^- & n \\ Q : & -1 & +1 & & 0 & +1 & -1 & 0 \end{array}$$

Die Ladungsquantenzahl ist additiv, z.B. ist für die aufgeführten Reaktionen die Summe der Ladungen sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite 0.

c) **Baryonenzahl ( $B$ ):**

$B$	$p$	$n$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{n}$	$\bar{q}$
	+1	+1	+1/3	-1	-1	-1/3

Die Kernbausteine  $p, n$  haben  $B = +1$ . Da Baryonen aus drei Quarks aufgebaut sind ( $|qqq\rangle$ ), haben demnach Quarks  $B = 1/3$ . Die Antiteilchen haben jeweils die negative Baryonenzahl (das gilt für jede ‘ladungsartige’ Quantenzahl). Eine mögliche Reaktion ist:



Eine Verletzung der Baryonenzahlerhaltung wird von “Grand Unified Theories (GUT)” vorhergesagt und spielt in kosmologischen Modellen eine wesentliche Rolle. Eine Vorhersage dieser Theorien ist der Protonzerfall, der allerdings bisher (2007) experimentell nicht bestätigt werden konnte. Die untere Grenze für die Lebensdauer des Protons ist etwa  $10^{33}$  Jahre (durch die untersuchten Zerfallsmoden modellabhängig).

d) **Leptonenzahl:** Experimentell ergibt sich, dass Leptonen und Antileptonen immer paarweise, “assoziiert”, produziert werden. Das legt nahe, den Leptonen eine ladungsartige Quantenzahl, die Leptonzahl, und Antileptonen das Negative davon zuzuordnen. Die Gesamtleptonzahl eines Systems, die Summe der Leptonzahlen bleibt erhalten. Bis vor kurzer Zeit hätte man gesagt, dass jede Leptonfamilie ihre eigene, getrennt erhaltene Quantenzahl hat:  $L_e, L_\mu, L_\tau$ .

	$e^-$	$\nu_e$	$\mu^-$	$\nu_\mu$	$\tau^-$	$\nu_\tau$	$e^+$	$\bar{\nu}_e$	$\mu^+$	$\bar{\nu}_\mu$	$\tau^+$	$\bar{\nu}_\tau$
$L_e$	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
$L_\mu$	0	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	0	0
$L_\tau$	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1

Die Beobachtung sogenannter Neutrinooszillationen, das heisst die Umwandlung einer Neutrinoart in eine andere, besagt, dass die Leptonzahlen für die einzelnen Familien (“Leptonflavour-Zahl”) nicht exakt erhalten ist. Der Effekt

ist allerdings so klein, dass eine Verletzung der Leptonflavour-Erhaltung bisher nur bei Neutrinooszillationen beobachtet wurde, insbesondere nicht für Prozesse, die geladene Leptonen enthalten. Das klassische Beispiel ist der  $\beta$ -Zerfall des Neutrons:

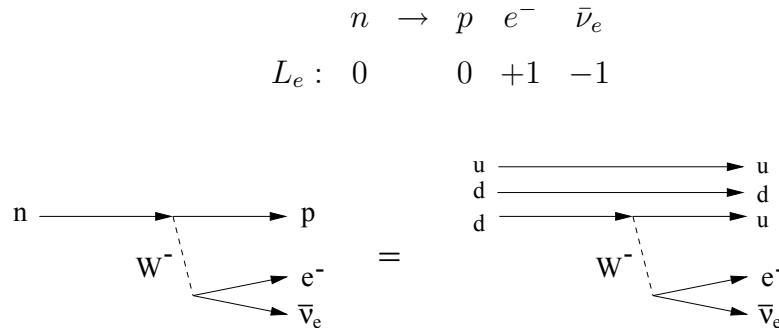


Abbildung 4.1: Diagramm des Neutronzerfalls, rechts als Quarkdiagramm aufgelöst.

Ein anderes Beispiel ist der  $\mu$ -Zerfall, bei dem zwei Leptonfamilien auftreten:

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

$$L_e : 0 \quad +1 \quad -1 \quad 0$$

$$L_\mu : +1 \quad 0 \quad 0 \quad +1$$

Abbildung 4.2: Diagramm des Myonzerfalls.

Der folgende Zerfall ('radiativer  $\mu$ -Zerfall') ist bisher nicht beobachtet worden, obwohl alle anderen Erhaltungssätze erfüllt wären:

$$\mu^- \rightarrow e^- \gamma$$

$$L_e : 0 \quad +1 \quad 0$$

$$L_\mu : +1 \quad 0 \quad 0$$

Man kann sich klarmachen, dass dieser Zerfall grundsätzlich auftreten kann, wenn Elektronneutrinos in Myonneutrinos übergehen können (wie sieht der entsprechende Graph aus?).

Beim  $\mu$ -Zerfall treten nur Leptonen auf, man nennt das einen leptonischen Zerfall. Beim Zerfall des Neutrons treten sowohl Leptonen als auch Hadronen auf, man nennt das – je nach Sichtweise – einen semi-leptonischen oder semi-hadronischen Zerfall.

Die entsprechenden Quantenzahlen für die Quarks, die Flavour-Quantenzahlen, sind in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten: Im  $\beta$ -Zerfall des Neutrons zum Beispiel geht ein  $n = |udd\rangle$  in ein  $p = |uud\rangle$  über, das heißt ein  $d$ -Quark in ein  $u$ -Quark.

- e) **Colour:** es gibt drei Ladungen der starken Wechselwirkung (rot, grün, blau), die absolut erhalten sind (wird im nächsten Kapitel behandelt).

- f) **CPT:** Invarianz der Naturgesetze gegenüber gleichzeitiger Teilchen-Antiteilchen-Vertauschung (C), räumliche (P) und zeitliche (T) Spiegelung. Aus dem sogenannten CPT-Theorem folgt, daß Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen gleich sein müssen (hier ohne Beweis). In der schwachen Wechselwirkung sind die C-, P-, T-Invarianzen einzeln verletzt (siehe Abschnitt 4.5).

## 4.2 Symmetrien, Transformationen und Erhaltungssätze

### 4.2.1 Invarianz der Hamilton-Funktion

a) **Klassisch:** Die Hamilton-Funktion  $H(p_i, q_i)$  für  $n$  Massenpunkte ( $i = 1, \dots, 3n$ ;  $p_i, q_i$  sind die Impuls- und Ortskoordinaten) entspricht der Gesamtenergie des Systems:

$$H = T + V \quad (4.2)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.3)$$

Der erste Term beschreibt die Kräfte, der zweite die Geschwindigkeiten. Am Beispiel eines Massepunktes im Erdfeld ergibt sich:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m \cdot g \cdot z \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_{x,y} = 0, \quad \dot{p}_z = -mg, \quad \dot{q}_i = p_i/m$$

Wir betrachten eine Hamilton-Funktion (der Einfachheit halber im Eindimensionalen), die gegenüber Translationen des Bezugssystems invariant bleibt. Die Translation sei (zur Vereinfachung schreiben wir  $x, y, z$  statt  $q$ ):

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x_i + \delta x_i, & \delta x_i &= \delta x \quad \forall i \\ y_i &\rightarrow y_i + \delta y_i, & \delta y_i &= \delta y \quad \forall i \\ z_i &\rightarrow z_i + \delta z_i, & \delta z_i &= \delta z \quad \forall i \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dabei können die  $\delta x, \delta y, \delta z$  unabhängig gewählt werden. Die Änderung von  $H$  ist:

$$\delta H = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x + \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y + \frac{\partial H}{\partial z_i} \delta z \right) = -\delta x \sum_i \dot{p}_{xi} - \delta y \sum_i \dot{p}_{yi} - \delta z \sum_i \dot{p}_{zi} \quad (4.6)$$

Wenn  $H$  invariant gegenüber dieser Transformation ist, das heißt  $\delta H = 0$ , ergibt sich:

$$\sum_i \dot{p}_{xi} = 0 \Leftrightarrow \sum_i p_{xi} = \text{const.} \quad (4.7)$$

und entsprechend für die  $y, z$  Komponenten. Aus der Invarianz der Hamilton-Funktion gegenüber Translationen des Raumes folgt also die Erhaltung des Gesamtimpulses des Systems.

Entsprechend folgt aus der Invarianz der Hamilton-Funktion gegenüber Translationen der Zeit die Energieerhaltung.

**b) Quantenmechanisch:** In der Quantenmechanik wird die Hamilton-Funktion  $H$  zum Hamilton-Operator  $\mathbb{H}$ , der auf Energie-Eigenzustände  $\psi$  angewandt ergibt:

$$\mathbb{H}\psi = E\psi \quad (4.8)$$

Eine Transformation  $U$  wirkt wie folgt auf das System:

$$U(\mathbb{H}\psi) = U\mathbb{H}U^{-1}U\psi = \mathbb{H}' \cdot \psi' \quad (4.9)$$

Wenn  $\mathbb{H}$  invariant ist:

$$\mathbb{H}' = U\mathbb{H}U^{-1} = \mathbb{H} \quad \Rightarrow \quad U\mathbb{H} = \mathbb{H}U \Rightarrow [U, \mathbb{H}] = 0 \quad (4.10)$$

Das heißt, wenn  $\mathbb{H}$  unter der Transformation  $U$  invariant ist, vertauschen  $U$  und  $\mathbb{H}$  und können deshalb gemeinsame Eigenzustände haben. Allgemein gilt:

Zu jeder Transformation, die  $\mathbb{H}$  invariant lässt, gibt es einen Operator, dessen Eigenwerte erhalten sind.

Um die transformierte Wellenfunktion  $\psi'$  in (4.9) zu erhalten, fordern wir, dass der Wert von  $\psi'$  an der Stelle  $\vec{x}'$  gleich dem von  $\psi$  an der Stelle  $\vec{x}$  sein soll:

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}) \quad (U : \vec{x} \rightarrow \vec{x}'). \quad (4.11)$$

In dem ursprünglichen Koordinatensystem ergibt sich dann die transformierte Wellenfunktion zu

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(U^{-1}\vec{x}), \quad (4.12)$$

wodurch  $\psi'$  definiert wird.

Als Beispiel betrachten wir den Operator für die räumliche Translation. Dieser Operator entspricht dem Impulsoperator, was wir uns folgendermaßen klarmachen: Unter einer infinitesimalen Translation

$$\delta U : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta\vec{x} \quad (4.13)$$

transformiert sich eine Wellenfunktion:

$$\psi(\vec{x}) \rightarrow \psi(U^{-1}\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \delta\vec{x}) = \psi(\vec{x}) - \delta\vec{x} \cdot \nabla\psi(\vec{x}) = (1 - i\delta\vec{x} \cdot \vec{\mathbb{P}})\psi(\vec{x}). \quad (4.14)$$

Dabei wurde  $\nabla = i\vec{\mathbb{P}}$  benutzt. Eine endliche Translation

$$U(\Delta\vec{x}) : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \Delta\vec{x}, \quad \text{mit } \Delta\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n\delta\vec{x}, \quad (4.15)$$

lässt sich aus unendlich vielen infinitesimalen Translationen aufbauen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\vec{\mathbb{P}}\delta\vec{x})^n = \exp(i\vec{\mathbb{P}}\Delta\vec{x}) = U(\Delta\vec{x}) \quad (4.16)$$

Die Operatoren  $\vec{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}_x, \mathbb{P}_y, \mathbb{P}_z)$  nennt man die Generatoren der Translationsgruppe (zum Gruppenbegriff siehe unten). Da  $\mathbb{H}$  mit  $\vec{\mathbb{P}}$  kommutiert,  $[\mathbb{H}, \vec{\mathbb{P}}] = 0$ , gibt es gemeinsame Eigenzustände, die Impulszustände

$$\psi(\vec{x}) = \psi_0 \cdot \exp i(E t - \vec{p}\vec{x}), \quad (4.17)$$

und der Eigenwert, der Impuls, ist erhalten.

**Gruppen:** Mathematisch hat eine Transformation die Struktur einer Gruppe, die folgenden Axiomen genügt:

Eine Gruppe ist eine Menge  $\mathcal{G}$  mit einer Verknüpfung ( $\cdot$  oder  $+$ ) der Gruppenelemente mit folgenden Eigenschaften:

- $a \cdot b \in \mathcal{G} \quad \forall a, b \in \mathcal{G}$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}$
- $\exists e$  (Einselement) :  $a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in \mathcal{G}$
- $\exists a^{-1}$  (Inverses) :  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad \forall a \in \mathcal{G}$

Beispiele sind die ganzen Zahlen mit der Addition oder die rationalen Zahlen mit der Multiplikation. Auch Translationen oder Drehungen mit der Verknüpfung einer Hintereinanderausführung bilden eine Gruppe. Zwei Drehungen nacheinander ausgeführt sind äquivalent einer Gesamtdrehung. Die kontinuierlichen Drehungen entsprechen der Gruppe der orthogonalen Transformationen (im Dreidimensionalen die Gruppe  $O(3)$ ). Eine Gruppe kann aber auch diskrete Elemente haben, zum Beispiel Drehungen, die die 6-fach symmetrische Figur in Abb. 4.3 in sich selbst überführt.

Interessant ist, daß die Reihenfolge von zwei Translationen oder Drehungen in einer Ebene keine Rolle spielt (Abb. 4.4 oben). Man sagt dann, die Gruppe ist kommutativ oder abelsch. Drehungen im Dreidimensionalen dagegen sind nicht-kommutativ oder nicht-abelsch (Abb. 4.4 unten).

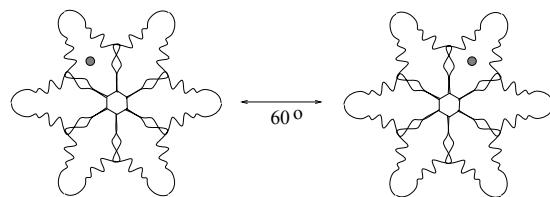
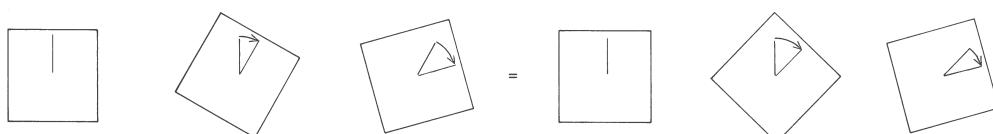


Abbildung 4.3: Diskrete Symmetrie eines Kristalls.

Abelsche Transformation



nicht-Abelsche Transformation

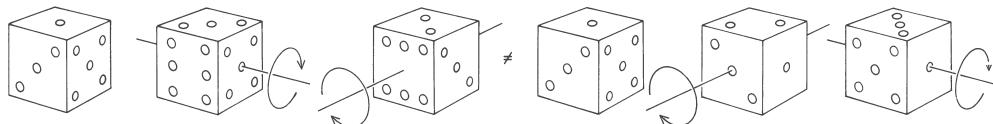


Abbildung 4.4: Die Abbildung zeigt anschaulich, daß Drehungen in der Ebene (oben) unabhängig von der Reihenfolge sind, während das im Dreidimensionalen (unten) allgemein nicht gilt.

## 4.3 Drehungen

### 4.3.1 Ganzzahlige Drehimpulse

Die Generatoren der Drehgruppe sind die Drehimpulsoperatoren  $\vec{\mathbb{L}} = (\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y, \mathbb{L}_z)$ :

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{x} \times \vec{\mathbb{P}} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla} \quad (4.18)$$

Wenn der Hamilton-Operator invariant gegenüber Drehungen ist, gibt es gemeinsame Eigenzustände zu  $\mathbb{H}$ ,  $\vec{\mathbb{L}}^2$  und  $\mathbb{L}_z$ . Die Drehimpulsoperatoren wirken nur auf die Winkelabhängigkeit der Wellenfunktion, ausgedrückt in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ . Die Eigenfunktionen zu ganzzahligem Drehimpuls sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m(\theta, \phi)$  (siehe Review of Particle Physics [34]):

$$\vec{\mathbb{L}}^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m, \quad \mathbb{L}_z Y_l^m = m Y_l^m$$

Die Bedeutung der Drehimpulserhaltung in Teilchenreaktionen wollen wir uns an dem Beispiel des Zerfalls von  $\rho$ -Mesonen, die in 2 Pionen zerfallen, klarmachen: Die

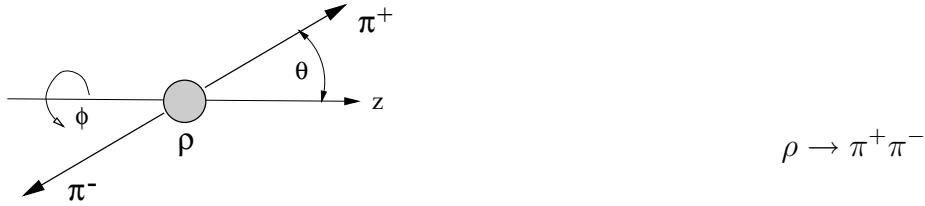


Abbildung 4.5:

Pionen haben Spin 0,  $\rho$ -Mesonen haben Spin  $J = 1$ . Nehmen wir an, die  $\rho$ -Mesonen seien mit  $J_z = +1$  in z-Richtung polarisiert. Dann müssen die  $\rho$ -Mesonen die Rotationseigenschaften von  $Y_1^1(\theta, \phi)$  haben. Drehimpulserhaltung bedeutet, daß auch die zwei Pionen im Endzustand diese Eigenschaft haben müssen. Da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben ist, ergibt sich die Winkelverteilung der Pionen:

$$|Y_1^1(\theta, \phi)|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (4.19)$$

Das heißt, die Pionen fliegen bevorzugt senkrecht zur z-Achse weg und die Verteilung ist unabhängig vom Azimutwinkel  $\phi$ .

Durch Analyse der Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte eines Teilchens kann dessen Spin bestimmt werden.

### 4.3.2 Halbzahligre Drehimpulse

Experimentell hat man festgestellt, daß auch Zustände mit halbzahligem Spin auftreten (Stern-Gerlach-Experiment zur Bestimmung des Spins des Elektrons).

Wir wollen im folgenden den formalen Weg der Einführung halbzahlinger Spins über die Darstellung von Gruppen skizzieren: Die Generatoren der Drehgruppe, die wir jetzt mit  $\vec{\mathbb{J}} = (\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_y, \mathbb{J}_z)$  bezeichnen wollen ( $L$  soll weiterhin Bahndrehimpulse

bezeichnen), bilden eine ‘Lie-Algebra’<sup>1</sup>, die durch folgende Vertauschungsrelationen definiert ist:

$$[\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] = \mathbb{J}_i \mathbb{J}_j - \mathbb{J}_j \mathbb{J}_i = i \epsilon_{ijk} \mathbb{J}_k \quad (4.20)$$

Dieser Ausdruck ist ungleich 0 für  $i \neq j$ , das heißt die Ausführung infinitesimaler Drehungen ist nicht-kommutativ (= nicht-abelsch). Man kann zeigen, daß  $\vec{\mathbb{J}}^2$  mit allen Operatoren der Algebra vertauscht (= ‘Casimir-Operator’), also:

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_i] = 0 \quad \text{für alle } i \quad (4.21)$$

$$[\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] \neq 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (4.22)$$

Damit ist die maximale Anzahl kommutierender Operatoren 2, zum Beispiel  $\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z$ .

Die Eigenzustände zu  $\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z$  bestimmen die ‘irreduziblen Darstellungen’  $|j, j_z\rangle$  der Drehgruppe:

$$\mathbb{J}^2 |j, j_z\rangle = j(j+1) |j, j_z\rangle \quad (4.23)$$

$$\mathbb{J}_z |j, j_z\rangle = j_z |j, j_z\rangle \quad (4.24)$$

Zu jedem  $j$  gehören  $2j+1$  Zustände mit unterschiedlichen  $j_z$ . Diese Zustände transformieren sich bei Drehungen untereinander ( $j$  bleibt fest wegen der Drehimpulserhaltung). Die Darstellung heißt ‘irreduzibel’, weil man auch mindestens die  $2j+1$  Zustände braucht.

Die Drehgruppe  $O(3)$  ist homomorph<sup>2</sup> zu der Gruppe  $SU(2)$ , der speziellen unitären Gruppe in 2 Dimensionen (‘speziell’ heißt hier, daß die Determinanten der Matrizen gleich 1 (und nicht -1) sind).

Die niedrigste Darstellung (Fundamentaldarstellung) der  $SU(2)$  hat  $j = 1/2$  mit  $2j+1 = 2$  Zuständen, die als 2-komponentige Spinoren dargestellt werden können:

$$|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Die beiden Spinoren sind die Basisvektoren der Fundamentaldarstellung. In dieser Darstellung werden die Drehimpulsoperatoren durch die Pauli-Matrizen (1.68) dargestellt:

$$\mathbb{J}_z = \frac{1}{2} \sigma_z \quad (4.27)$$

Die Operatoren  $\mathbb{J}^2$  und  $\mathbb{J}_z$  sind diagonal,  $\mathbb{J}^2$  ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix und  $\mathbb{J}_z$  hat die Eigenwerte  $-j, -(j-1), \dots, j-1, j$  in der Diagonalen, für  $j = 1/2$ :

$$\mathbb{J}_z = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

---

<sup>1</sup>In einer Algebra sind zwei Verknüpfungen definiert, Multiplikation und Addition; der Name ‘Lie’ weist darauf hin, daß die zugrundeliegende Gruppe kontinuierlich ist.

<sup>2</sup>Ein Gruppen-Homomorphismus ist eine Abbildung einer Gruppe auf eine andere, die die Verknüpfungen erhält.

### 4.3.3 Kopplung von Drehimpulsen

In Systemen von Teilchen koppeln die einzelnen Drehimpulse (Eigen- und Bahndrehimpulse) zu einem Gesamtdrehimpuls, der die Rotationseigenschaften des Systems bestimmt. Die Zustände

$$|j_1, m_1\rangle, \quad |j_2, m_2\rangle \quad (4.29)$$

koppeln zu dem neuen Zustand:

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \quad (4.30)$$

Die  $(2j_1+1)(2j_2+1)$ -dimensionalen Darstellungsmatrizen zu diesen Zuständen erhält man durch das direkte Produkt ( $\otimes$ ) der Matrizen zu  $j_1$  und  $j_2$ . Diese können allerdings zerlegt werden in eine direkte Summe ( $\oplus$ ) von irreduziblen Darstellungen, die den möglichen Drehimpulskopplungen  $J$  mit  $J = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$  entsprechen. Symbolisch kann man schreiben:

$$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2 + 1| \oplus \dots \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus j_1 + j_2 \quad (4.31)$$

Zum Beispiel können zwei Spin-1/2-Teilchen zum Gesamtspin 0 oder 1 koppeln:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (4.32)$$

Die Zustände des gekoppelten Systems  $|JM\rangle$  erhält man durch Überlagerung der Zustände  $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$ , für die  $M = m_1 + m_2$  gilt:

$$|JM, j_1 j_2\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 |JM, j_1 j_2\rangle \quad (4.33)$$

Die Kopplung der einzelnen Drehimpulse zu einem neuen Gesamtdrehimpuls wird durch die Clebsch-Gordon-Koeffizienten  $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 |JM, j_1 j_2\rangle$  festgelegt. Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten sind in folgender Form tabelliert zu finden (siehe zum Beispiel Review of Particle Physics [34]):

$j_1 \otimes j_2$	$J$	$M$	.....
$m_1 m_2$			
.			Koeffizienten
.			(ohne $\sqrt{-}$ )
.			
.			

Für unser obiges Beispiel  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$  findet man:

$$\begin{aligned} J = 0, M = 0 : \quad |0 0, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} |\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rangle \\ J = 1, M = \pm 1 : \quad |1 \pm 1, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= |\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle \\ J = 1, M = 0 : \quad |1 0, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} |\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (4.34)$$

Man spricht hier von einer Zerlegung in Multipletts ('(2j + 1)-plets'): zwei Spin-1/2-Teilchen können zu einem Singulett- oder Triplet-Zustand koppeln.

Jede höhere Darstellung kann durch Produkte der Fundamentaldarstellungen erzeugt werden:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \dots \otimes \frac{1}{2} = \dots \oplus \dots \oplus \dots \quad (4.35)$$

Diese Aussage spielt auch für den Aufbau der Hadronen aus Quarks eine Rolle. Es treten Hadronenmultipletts auf, die Darstellungen einer Symmetriegruppe sind.

## 4.4 Klassifikation von Symmetrien

### a) Raum–Zeit–Symmetrien:

Transformation	Erhaltungsgröße	Bemerkung
Translation des Raumes	$\vec{P}$ (abelsch)	kontinuierliche Transformationen
Translation der Zeit	$E$ (abelsch)	$\Rightarrow$ additive Quantenzahlen
Drehung	$\vec{J}$ (nicht-abelsch)	z. B.: $\vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
Raumspiegelung	Parität $P$	diskrete Transformationen
Zeitumkehr	T-Parität	$\Rightarrow$ multiplikative Quantenzahlen z. B.: $P_{tot} = P_1 \cdot P_2$

**b) Innere Symmetrien:** Erhaltungsgrößen, die nicht mit Raum–Zeit–Symmetrien verbunden sind, kann man innere, abstrakte Symmetrien zuordnen. Ein Beispiel ist die Beobachtung der Erhaltung der Quark-Flavours (Up, Down, Strangeness, ...) in der starken Wechselwirkung, die zu dem Quarkmodell geführt hat (mathematisch: SU(3)-Symmetrie).

## 4.5 Die diskreten Symmetrien CPT

$$\begin{aligned} P: \text{ Raumspiegelung} \quad &\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\ T: \text{ Zeitumkehr} \quad &t \rightarrow -t \\ C: \text{ Ladungskonjugation} \quad &\text{Teilchen} \rightarrow \text{Antiteilchen}: Q \rightarrow -Q \text{ usw.} \end{aligned}$$

Diese Symmetrien waren zunächst als allgemein gültig angesehen worden. Die Entdeckung der Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung 1957 hat einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Teilchenphysik gehabt.

### 4.5.1 Parität

Die Raumspiegelung ist eine uneigentliche Lorentz-Transformation ( $\det = -1$ ), die nur das Vorzeichen der Raumkomponente ändert:

$$x = (t, \vec{x}) \rightarrow x' = (t, -\vec{x}) \quad (4.36)$$

Unter einer Raumspiegelung transformieren sich physikalische Größen folgendermaßen:

Skalar S:	$S \rightarrow S$	Temperatur, Druck, ...
Pseudoskalar P:	$P \rightarrow -P$	Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
Vektor V:	$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$	Impuls, Geschwindigkeit, ...
Axialvektor A:	$\vec{a} \rightarrow \vec{a}$	Kreuzprodukt $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Auf eine Wellenfunktion angewendet ergibt die Raumspiegelung oder Paritätsoperation:

$$\mathbb{P}\psi(\vec{x}, t) = \psi(-\vec{x}, t) \quad (4.37)$$

Für freie Teilchen gilt  $[\mathbb{H}, \mathbb{P}] = 0$ . Deshalb gibt es simultane Eigenfunktionen zu  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{P}$ . Die Eigenwerte von  $\mathbb{P}$  sind (abgesehen von einer freien Phase)  $P = \pm 1$  (= Parität):

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}\psi(\vec{x})) = \mathbb{P}\psi(-\vec{x}) = \psi(\vec{x}) = P^2\psi(\vec{x}) \quad (4.38)$$

Die räumliche Konstellation eines Teilchensystems wird durch die relativen Bahndrehimpulse bestimmt, ausgedrückt durch die Kugelflächenfunktionen. Deren Spiegelungseigenschaften sind:

$$\mathbb{P}Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m \quad (4.39)$$

Die P-Eigenwerte für freie Teilchen sind deren **Eigenparität**. Zum Beispiel hat das Photon  $P_\gamma = -1$ . Als Teilcheneigenschaften wird in den Tabellen immer Spin und Parität angegeben, zum Beispiel für das Photon  $J^P = 1^-$ . Mit diesen Quantenzahlen hat das Photon die Transformationseigenschaften eines Vektors. Ein Pion hat  $J^P = 0^-$  und hat damit die Transformationseigenschaften eines Pseudoskalars.

Für Teilchen–Antiteilchen kann man nur relative Paritäten angeben; für Fermion–Antifermion gilt:

$$P_f \cdot P_{\bar{f}} = -1 \quad (4.40)$$

und für Boson–Antiboson:

$$P_b \cdot P_{\bar{b}} = +1 \quad (4.41)$$

Bei Teilchensystemen multiplizieren sich die Eigenparitäten aller Teilchen (multiplikative Quantenzahl). Für die Parität des Systems spielen aber noch die räumlichen Konstellationen, gegeben durch die relativen Bahndrehimpulse, eine Rolle. Da

$$\mathbb{P}Y_l^m = Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m \quad (4.42)$$

ist, trägt ein relativer Bahndrehimpuls  $l$  einen Faktor  $(-1)^l$  bei. In einem Zweiteilchensystem gilt dann:

$$P_{tot} = P_1 \cdot P_2 \cdot (-1)^l \quad (4.43)$$

Die Quantenzahlen des Pions  $J^P = 0^-$  kann man so verstehen, daß das Pion ein Fermion–Antifermion–System (u,d Quarks) mit Gesamtspin 0 und ohne relativen Bahndrehimpuls ist.

Um die negative Parität des Photons zu verstehen, erinnern wir uns, daß in Atomen elektrische Dipol–Übergänge, das entspricht der Emission oder Absorption eines Photons ohne relativen Bahndrehimpuls, den Bahndrehimpuls des Atoms um  $\Delta l = 1$  ändern und damit die Parität umkehren. Elektrische Dipol–Übergänge entsprechen der Emission oder Absorption eines Photons ohne relativen Bahndrehimpuls.

### 4.5.2 Ladungskonjugation

Der Ladungskonjugationsoperator  $\mathbb{C}$  vertauscht Teilchen und Antiteilchen und wechselt für alle ladungsartigen Quantenzahlen das Vorzeichen, zum Beispiel:

$$\mathbb{C} |e^-\rangle = \eta |e^+\rangle \quad (4.44)$$

Dabei ist  $\eta$  eine willkürliche Phase, die man üblicherweise zu  $\pm 1$  wählt.

Für Eigenzustände von  $\mathbb{C}$  müssen alle ladungsartigen Quantenzahlen  $Q = 0$  sein. C-Eigenzustände sind zum Beispiel  $\gamma$  und  $\pi^0$ , aber nicht  $\nu_e, \bar{\nu}_e$ , weil  $L_e \neq 0$ . Ähnlich wie bei der Parität argumentiert man, daß die C-Eigenwerte  $C = \pm 1$  sind.

Die C-Parität des Photons ist  $C_\gamma = -1$ . Das liegt daran, daß das Photon das Quant des elektromagnetischen Feldes ist, das von einer Ladung  $q$  erzeugt wird:

$$|\gamma\rangle \sim q A^\mu \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} |\gamma\rangle \sim -q A^\mu \quad (4.45)$$

Da die C-Parität eine multiplikative Quantenzahl ist, ist die C-Parität eines Systems aus  $n$  Photonen  $(-1)^n$ . Da ein  $\pi^0$ -Meson in zwei Photonen zerfällt, folgt:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} |\pi^0\rangle = + |\pi^0\rangle \quad (4.46)$$

In den Tabellen findet man:

$$J^{PC}(\pi^0) = 0^{-+} \quad \text{und} \quad J^{PC}(\gamma) = 1^{--} \quad (4.47)$$

Für Fermion–Antifermion–Systeme (zum Beispiel Positronium = gebundenes  $e^+e^-$ -System oder analog ‘Quarkonium’ = gebundenes Quark–Antiquark–System) mit Bahndrehimpuls  $L$  und Gesamtspin  $S$  ergibt sich die C-Parität zu:

$$C_{f\bar{f}} = (-1)^{L+S} \quad (4.48)$$

Das legt fest, ob das System in eine gerade oder ungerade Zahl von Photonen zerfallen kann. Für das  $\pi^0$  ist  $L + S = 0$ , also  $C = +1$ .

### 4.5.3 CP-Invarianz

Die Parität ist in schwachen Wechselwirkungen verletzt: Ein Neutrino (Lepton mit Spin 1/2) tritt nur mit Spin entgegengesetzt zum Impuls auf. Das definiert einen Drehsinn, eine linkshändige Schraube. Da Schrauben im Spiegel betrachtet den umgekehrten Drehsinn haben, bedeutet das eine Paritätsverletzung.

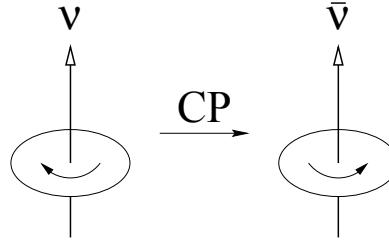


Abbildung 4.6: CP-Transformation für Neutrinos.

Den gespiegelten, rechtshändigen Schraubensinn haben aber die Anti-Neutrinos. Allgemein scheint es in der schwachen Wechselwirkung so zu sein, daß eine gleichzeitige Ausführung der P- und C-Operation die physikalischen Gesetze invariant läßt. Die Vermutung, daß wenigstens die CP-Invarianz allgemein gilt, ist allerdings 1967 experimentell in Systemen mit neutralen K-Mesonen widerlegt worden. Die CP-Verletzung ist allerdings sehr klein, von der Größenordnung  $10^{-9}$  der CP-erhaltenden Prozesse.

CP-Verletzung bedeutet eine Materie–Antimaterie–Asymmetrie und könnte der Grund für die Dominanz von Materie im Universum sein. Wegen dieser fundamentalen Bedeutung ist das Verständnis der CP-Verletzung heute eines der zentralen Forschungsthemen in der Teilchenphysik. Das Standardmodell sagte vorher, dass die CP-Verletzung in Systemen mit Bottom-Quarks ebenfalls auftreten sollte. Seit einigen Jahren wissen wir von den ‘B-Fabriken’ in USA und Japan, dass diese CP-Verletzung mit der vorhergesagten Stärke tatsächlich auftritt.

#### 4.5.4 Zeitumkehrinvarianz und CPT-Theorem

Nach einem auf relativ allgemeinen theoretischen Überlegungen basierenden Theorem ist CPT eine absolute Invarianz der Naturgesetze. Da aber CP nicht erhalten ist, folgt, daß auch die Zeitumkehrinvarianz verletzt sein muß. Allerdings ist in elementaren Prozessen bisher keine Verletzung der T-Invarianz direkt gemessen worden. Es wird weiter danach gesucht.

In makroskopischen Systemen ist es eher die Regel, daß Prozesse irreversibel, nicht zeitumkehrbar, sind. Das ist bekanntlich ein statistischer Effekt: Gasmoleküle, die sich zunächst in einer Hälfte eines Behälters befinden, haben das Bestreben sich zu verteilen. Obwohl es von den Naturgesetzen her erlaubt ist, daß nach einiger Zeit alle Moleküle wieder in einer Hälfte sind, werden wir das bei Systemen von der Größenordnung der Avogadro-Zahl  $N_A$  kaum erleben.

In der Teilchenphysik ist der Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion  $a+b \rightarrow c+d$  gegeben durch den Flußfaktor  $\Phi(a,b)$ , der von den einlaufenden Teilchen abhängt, dem Matrixelement  $M_{fi}$ , das die Dynamik des Prozesses enthält, und den Phasenraum des Endzustandes  $PS(E_{tot}, c, d)$  (und eventuell einen statistischen Faktor für die möglichen Drehimpulszustände):

$$d\sigma(a+b \rightarrow c+d) = \Phi(a,b) \cdot M_{fi}(a+b \rightarrow c+d) \cdot dPS(E_{tot}, c, d) \quad (4.49)$$

Für den Umkehrprozess lautet der Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma(c+d \rightarrow a+b) = \Phi(c,d) \cdot M_{fi}(c+d \rightarrow a+b) \cdot dPS(E_{tot}, a, b) \quad (4.50)$$

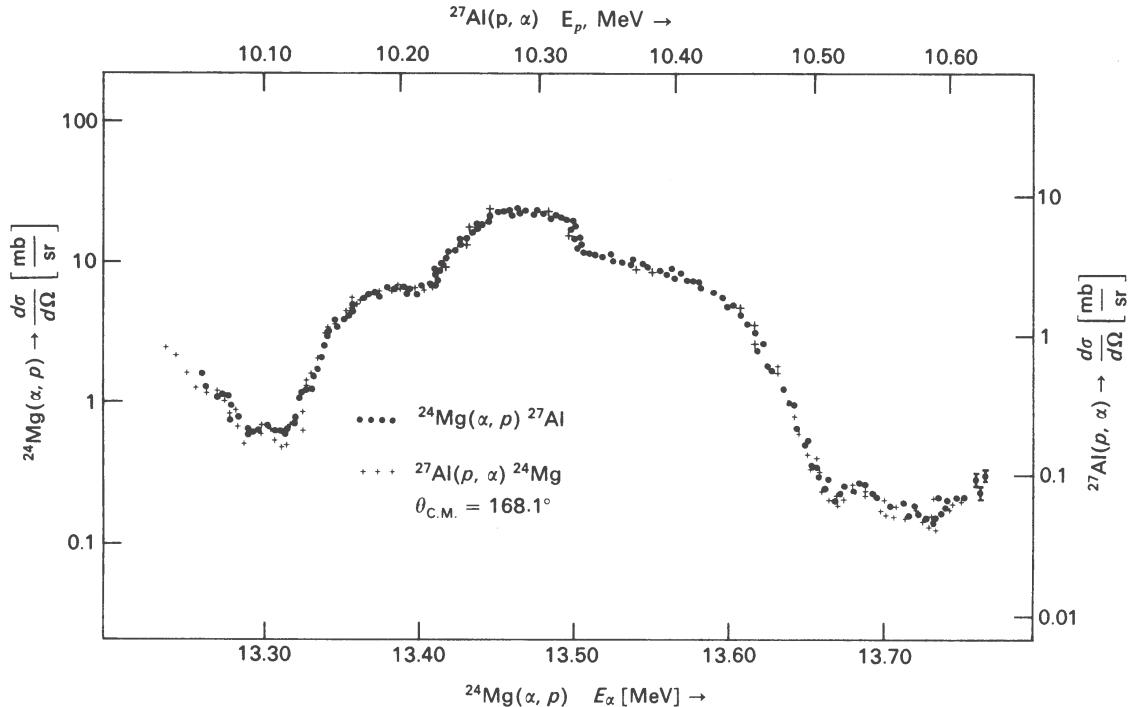


Abbildung 4.7: Test der Zeitumkehrinvarianz.

Diese Wirkungsquerschnitte sind im allgemeinen nicht gleich. Zeitumkehrinvarianz fordert nur, daß  $M_{fi}(a + b \rightarrow c + d) = M_{fi}(c + d \rightarrow a + b)$  ist. In Abb. 4.7 wird ein Test der Zeitumkehrinvarianz gezeigt, in dem beide Reaktionsrichtungen für



gemessen wurden.

Um T-Invarianz zu überprüfen, muß man observable Skalare messen, die bei Zeitumkehr ihr Vorzeichen ändern. Bei T-Invarianz müssen diese Skalare Null sein. In der folgenden Liste kann man die Wirkung der P- und T-Operationen auf verschiedene physikalische Größen sehen:

Größe	T	P
$\vec{x}$	$\vec{x}$	$-\vec{x}$
$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$
$\vec{\sigma} = \vec{x} \times \vec{p}$	$-\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$
$\vec{E}$	$\vec{E}$	$-\vec{E}$
$\vec{B}$	$-\vec{B}$	$\vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$

Die einzige ausgezeichnete Richtung für ein Elementarteilchen ist die Spinrichtung. Deshalb müsste ein von Null verschiedenes elektrisches Dipolmoment die Richtung des Spins haben:  $\vec{d}_e = EDM \cdot \vec{\sigma} / |\vec{\sigma}|$ . Die resultierende Energie des Dipols in

einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  ist dann:

$$\Delta E = EDM \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} \cdot \vec{E} \quad (4.52)$$

Wenn T-Invarianz gilt, muß dieser Ausdruck Null sein, weil  $\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$  das Vorzeichen wechselt. Damit muß auch das elektrische Dipolmoment des Teilchens ( $EDM$ ) Null sein. Die besten Grenzen gibt es bisher für das Neutron

$$EDM(\text{Neutron}) < 0.63 \cdot 10^{-25} e \cdot \text{cm} \ (90\% \text{ c.l.}) \quad (4.53)$$

Dabei ist ‘c.l.’ die Abkürzung für ‘confidence level’ und bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß die Grenze bei den gegebenen Meßergebnissen richtig ist. Die experimentelle Methode zur Bestimmung des Dipolmomentes wird ausführlich in Perkins [12] besprochen. Um die Präzision der Messung zu verstehen, kann man sich klar machen, daß das Ergebnis (4.53) einer Verschiebung von  $10^{-12}$  Elementarladungen ( $e$ ) über den Durchmesser des Neutrons entspricht.

Im Standardmodell, das heißt auf der Basis der bisher beobachteten CP-Verletzung in  $K$ - und  $B$ -Systemen, erwartet man  $EDM(\text{Neutron}) \approx 10^{-30} e \cdot \text{cm}$ , also noch weit entfernt von der Sensitivität der Experimente. Wenn man andererseits in dem jetzt zugänglichen Bereich einen Effekt messen würde, wäre das ein klarer Hinweis auf ‘Physik jenseits des Standarmodells’.



# Kapitel 5

## Quarkmodell und starke Wechselwirkung

Die Protonen und Neutronen der Atomkerne, gemeinsam Nukleonen genannt, werden durch Kräfte zusammengehalten, die viel stärker sind als die aus der makroskopischen Welt bekannten Kräfte der Gravitation und des Elektromagnetismus. Alle Teilchen, die dieser ‘Starken Wechselwirkung’ unterliegen, nennt man Hadronen. Wir wissen heute (oder glauben zu wissen), dass Hadronen aus Quarks aufgebaut sind. Wie aus den Eigenschaften der starken Wechselwirkung und der Hadronen auf das Quarkmodell geschlossen wurde, wird im folgenden dargestellt.

### 5.1 Isospin

#### 5.1.1 Nukleon-Nukleon-Systeme

Ein erster wichtiger Schritt zum Verständnis der Kernkräfte war die Beobachtung, dass die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ladungsunabhängig ist. Das sieht man zum Beispiel

- in der N-N-Streuung ( $N = p$  oder  $n$ );
- bei Spiegelkernen, bei denen die Anzahl der Protonen und Neutronen vertauscht sind und die sehr ähnliche Eigenschaften haben. Ein Beispiel für Spiegelkerne sind:

$^7\text{Li}$  mit  $(3 p + 4 n)$ ,

$^7\text{Be}$  mit  $(4 p + 3 n)$ .

Aus diesen Beobachtungen kann man schlußfolgern, dass es eigentlich nur ein Kern-Teilchen, *das* Nukleon, gibt und dass das Proton und das Neutron nur zwei Zustände dieses Nukleons sind. Tatsächlich haben beide Nukleonen ziemlich ähnliche Eigenschaften, z. B. sind die Massen fast ‘entartet’:

$$M_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2 \quad \approx \quad M_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$$

Zwei Zustände eines Nukleons: Das erinnert einen daran, dass ein Teilchen mit Spin  $1/2$  auch zwei Spineinstellungen bezüglich einer Richtung haben kann:  $m_s = \pm 1/2$ .

Man kann jetzt den gleichen Formalismus wie beim Spin ausprobieren und sagt, dass Nukleon habe einen ‘Isospin’  $I = 1/2$  und kann entlang einer Achse in einem abstrakten (Isospin-) Raum 2 Einstellungen haben:  $I_3 = \pm 1/2$ . Dem Proton wird  $I_3 = +1/2$  und dem Neutron  $I_3 = -1/2$  zugeordnet:

$$|p\rangle = |I = 1/2, I_3 = +1/2\rangle \quad (5.1)$$

$$|n\rangle = |I = 1/2, I_3 = -1/2\rangle \quad (5.2)$$

Wie zwei Teilchen mit Spin 1/2 können auch Nukleon-Nukleon-Systeme zu Gesamtisospin  $I = 1$  (Triplet) oder  $I = 0$  (Singulett) koppeln:

N-N	$I$	$I_3$	Q	
pp	1	+1	+2	
nn	1	-1	0	Triplet
np	1	0	+1	
np	0	0	+1	Singulett

Isospin-Invarianz der starken Wechselwirkung bedeutet, dass die Matrixelemente nur von  $I$ , nicht von  $I_3$  (und damit von der Ladung) abhängen. Zum Beispiel ist das Deuterium,  $d = |np\rangle$ , ein  $I$ -Singulett, das Triplet mit  $|pp\rangle$ ,  $|np\rangle$ ,  $|nn\rangle$  wurde nicht beobachtet. Das bedeutet, dass im Isospinzustand mit  $I = 1$  die Wechselwirkung nicht zur Bindung ausreicht.

### 5.1.2 Isospin-Multiplets

Zu einem Isospin  $I$  gibt es  $2I + 1$  Zustände,  $(-I, -I + 1, \dots, +I)$ , die sich durch ihre Ladung unterscheiden. Als Beispiele haben wir bereits das Nukleonen-Dublett mit  $I = 1/2$  und das  $NN$ -Singulett ( $I = 0$ ) und -Triplet ( $I = 1$ ) kennengelernt. Andererseits kann man Hadronen, die sich in Masse und anderen Eigenschaften stark ähneln, je nach Anzahl einen Isospin zuordnen. Zum Beispiel treten die Pionen als Triplet in drei Ladungszuständen auf. Man ordnet ihnen deshalb den Isospin  $I = 1$  zu:

	$\pi^+$	$\pi^0$	$\pi^-$
M [MeV/c <sup>2</sup> ]	139.6	135.0	139.6
$I_3$	+1	0	-1

Die Ladung und die dritte Komponente des Isospin sind hier gleich. Allgemeiner gilt:

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}, \quad (5.3)$$

wobei  $B$  hier die Baryonenzahl ist. Die bisher eingeführten Multipletts sind dann:

$$I = 1, B = 0$$

$$I = 1/2, B = 1$$

$$I = 1/2, B = -1$$

$$I = 1, B = 2$$

	$I_3$	Q
$\pi^+$	+1	+1
$\pi^0$	0	0
$\pi^-$	-1	-1

	$I_3$	Q
$p$	+1/2	+1
$n$	-1/2	0

	$I_3$	Q
$\bar{n}$	+1/2	0
$\bar{p}$	-1/2	-1

	$I_3$	Q
$nn$	-1	0
$np$	0	+1
$pp$	+1	+2

Man könnte vermuten, dass die beiden Nukleonen mit  $I = 1/2$  der Fundamentaldarstellung des Isospins entsprechen. Ein entsprechendes Modell, in dem alle Hadronen aus Nukleonen und Antinukleonen aufgebaut sind (Sakata-Modell) hat sich allerdings als inkonsistent mit den Beobachtungen erwiesen. Auf der Suche nach einer Fundamentaldarstellung des Isospins haben Gell-Mann und Zweig vorgeschlagen, dass alle Isospin-Multipletts sich durch Kombination von zwei hypothetischen Teilchen, Quarks, ergeben. Die beiden Quarks unterscheiden sich durch ihre ‘Flavour’ up (u) und down (d), haben entsprechende Antiteilchen und bilden jeweils Isospindoublets mit folgenden Quantenzahlen:

	$I_3$	$Q$	$B$	Spin
u	+1/2	2/3	1/3	1/2
d	-1/2	-1/3	1/3	1/2
$\bar{d}$	+1/2	1/3	-1/3	1/2
$\bar{u}$	-1/2	-2/3	-1/3	1/2

Die Nukleonen und Pionen haben damit folgende Quark-Wellenfunktionen:

$$\begin{aligned} |p\rangle &= |uud\rangle \\ |n\rangle &= |udd\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle \\ |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \\ |\pi^-\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \end{aligned} \quad (5.5)$$

Hier ist eine Phasenkonvention benutzt worden, bei der der Zustand mit  $I_3=1/2$  als  $-|\bar{u}\rangle$  definiert wird. Das  $\pi^0$  ist eine Linearkombination der beiden isospin-neutralen Zustände  $d\bar{d}$  und  $u\bar{u}$ . Die orthogonale Kombination

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle + |u\bar{u}\rangle) \quad (5.6)$$

stellt den Singulett-Zustand dar. Die Isospin-Wellenfunktionen von  $\pi^0$  und  $\eta$  sind orthogonal, weil das Skalarprodukt der Quarkzustände wie folgt definiert ist:

$$\langle q_i \bar{q}_j | q_k \bar{q}_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{für } (i, j) \neq (k, l) \end{cases} \quad (5.7)$$

Also ergibt sich für  $\pi^0$  und  $\eta$ :

$$\langle \pi^0 | \eta \rangle = \frac{1}{2} (\langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle - \langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle + \langle d\bar{d} | u\bar{u} \rangle - \langle u\bar{u} | d\bar{d} \rangle) = \frac{1}{2} (1 - 1 + 0 - 0) = 0 \quad (5.8)$$

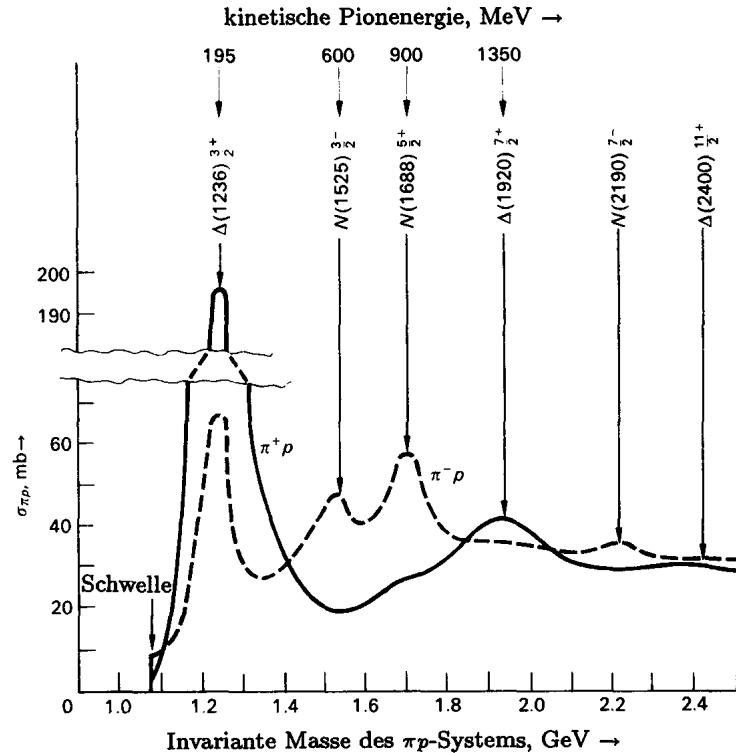


Abbildung 5.1: Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes für die Streuung von  $\pi^+$ – und  $\pi^-$ – Mesonen an Protonen von der Pionenenergie. Das  $\Delta$ -Symbol bezieht sich auf die  $I = 3/2$ –Resonanzen;  $N$  sind die Resonanzen mit  $I = 1/2$ . Es sind nur einige der zahlreichen Zustände mit ihren jeweiligen Spin- und Paritätszuordnungen angegeben.

## 5.2 Pion-Nukleon-Streuung

Wenn man hochenergetische Protonen auf ein massives Target schießt, werden vor allem Pionen erzeugt. Man kann die Impulse der Pionen filtern und so monoenergetische Pionenstrahlen erzeugen.

Wenn man Pionen an Protonen (in einem Wasserstofftarget) streut, mißt man in Abhängigkeit von der invarianten Pion-Proton-Masse (der Pion-Proton-Schwerpunktsenergie) einen stark strukturierten Wirkungsquerschnitt (siehe Abb. 5.1). Die Überhöhungen entsprechen Resonanzen (siehe Abschnitt 1.5) oder instabilen Teilchen mit einer kurzen Lebensdauer. Der Wirkungsquerschnitt läßt sich als eine Überlagerung von Breit-Wigner-Resonanzkurven (1.138) und einem Untergrundanteil beschreiben. Aus der Massenbreite (bzw. Energiebreite) einer Resonanz von typischerweise etwa 100 MeV ergibt sich mit

$$\tau \cdot \Delta M = 1 \quad (\text{mit } \hbar, c : \tau \cdot \Delta M c^2 = \hbar) \quad (5.9)$$

die für starke Wechselwirkungen typische Lebensdauer:

$$\tau \approx 10^{-23} \text{ s}$$

Anschaulich kann man sich das resonanzartige Verhalten des Wirkungsquerschnittes

wie folgt erklären: Wenn die de-Broglie-Wellenlänge des Pions

$$\lambda = \hbar/p \quad (5.10)$$

gerade ein Protodurchmesser (oder ein Vielfaches) ist, ist das Pion in Resonanz mit dem Proton. Das Resonanzsystem wird durch den Zerfall gedämpft und die Wellenfunktion der Resonanz hat die Form:

$$\psi(t) = \psi(0) \cdot e^{-i E_R t} \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad (5.11)$$

Damit ergibt sich die Zerfallswahrscheinlichkeit zu:

$$I(t) = |\psi(t)|^2 = I(0) \cdot e^{-t/r} \quad (5.12)$$

Das Betragsquadrat der Fourier-Transformierten von (5.11) ergibt die Breit-Wigner-Resonanzkurve (1.138).

In der Abb. 5.1 sieht man, dass der Wirkungsquerschnitt für  $\pi^+ p$  anders ist als für  $\pi^- p$ . Das ist nicht im Widerspruch zur Ladungsunabhängigkeit der starken Wechselwirkung, sondern ist durch die Isospin-Invarianz zu erklären: Ein Pion mit  $I = 1$  kann mit einem Nukleon mit  $I = 1/2$  zwei mögliche Isospinzustände einnehmen:  $I = 1 + 1/2 = 3/2$  und  $I = 1 - 1/2 = 1/2$ . Die  $I_3$ -Komponente des Gesamtsystems ergibt sich als Summe der  $I_3$ -Komponenten der einzelnen Teilchen. So gilt:

$$I_3(\pi^+ p) = I_3(\pi^+) + I_3(p) = +1 + 1/2 = +3/2 \quad (5.13)$$

$$I_3(\pi^- p) = I_3(\pi^-) + I_3(p) = -1 + 1/2 = -1/2. \quad (5.14)$$

Der Zustand  $I_3 = 3/2$  kann nur zu  $I = 3/2$  gehören, während für  $I_3 = -1/2$  sowohl  $I = 3/2$  als auch  $I = 1/2$  möglich ist. Da es für beide Isospinzustände unabhängige Streumatrixelemente gibt, sind die Wirkungsquerschnitte für die beiden Kanäle im allgemeinen unterschiedlich (siehe Übungsaufgabe).

Die 1. Resonanz, genannt  $\Delta(1236)$ , bei einer Masse von etwa 1236 MeV hat  $I = 3/2$ . Der Spin ist  $J = 3/2$ , was als ein Zustand von 3 Quarks gedeutet wird, deren Spins alle in eine Richtung weisen und die keinen relativen Bahndrehimpuls haben. Als  $I = 3/2$  Zustand muß die  $\Delta$ -Resonanz in  $2I + 1 = 4$  Ladungszuständen vorkommen:

$I_3$	-3/2	-1/2	+1/2	+3/2
Name	$\Delta^-$	$\Delta^0$	$\Delta^+$	$\Delta^{++}$
Quarks	$ddd$	$udd$	$uud$	$uuu$

### 5.3 Farbladung und Quantenchromodynamik

**Symmetrie der  $\Delta$ -Wellenfunktion:** Für die Weiterentwicklung der starken Wechselwirkung war die  $\Delta$ -Resonanz von besonderer Bedeutung. Der Zustand ist völlig symmetrisch bezüglich der Vertauschung von Quarks, obwohl man einen antisymmetrischen Zustand erwartet, weil das  $\Delta$  ein Fermion ist. Die Symmetrieeigenschaften kann man sich klarmachen, indem man die Wellenfunktion in einen Orts-, Spin- und Isospinanteil zerlegt:

$$\psi_\Delta = \psi_{Ort} \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Isospin} \quad (5.15)$$

In einer Übungsaufgabe werden die Symmetrieeigenschaften für eine entsprechende Wellenfunktion eines Nukleon-Nukleon-Systems diskutiert und auf das Deuteron angewendet, das aus Proton und Neutron besteht. Wenn man wie in (5.15) die Isospin-Wellenfunktion einbezieht, kann man Proton und Neutron als identische Teilchen (Fermionen) betrachten, für die ein ‘verallgemeinertes Pauli-Prinzip’ gilt.

Im Falle der drei Quarks, aus denen die  $\Delta$ -Resonanz besteht, zeigt sich, dass jeder Anteil in (5.15) symmetrisch ist: Der Ortsanteil wegen  $L = 0$  (der Grundzustand ist immer symmetrisch), der Spinanteil, weil alle Spins in eine Richtung weisen und der Isospinanteil, weil z.B. der Zustand  $|uuu\rangle$  mit drei gleichen Quarks vorkommt. Um das Konzept der Fermi-Statistik zu retten, hat man schließlich eine neue Quantenzahl eingeführt, Farbe oder Color, bezüglich der der Zustand antisymmetrisch ist:

$$\psi_{\Delta} = \psi_{Ort} \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Isospin} \cdot \psi_{Farbe} \quad (5.16)$$

Diese Quantenzahl wird heute als die Ladung der starken Wechselwirkung interpretiert, die ihre Formulierung in der Quantenchromodynamik (QCD) gefunden hat. Es gibt drei Farbladungen: rot (r), grün (g) und blau (b). Jedes Quark trägt eine dieser Ladungen, es gibt also zum Beispiel ein rotes, grünes und blaues  $u$ -Quark. Hadronen kommen nur als ‘Farb-Singulette’ vor, das heißt, einer Kombination der Ladungen, die ‘weiß’ ergibt. Für Baryonen ist das die antisymmetrische Kombination von  $rgb$ , für Mesonen ergibt sich eine Farbwellenfunktion:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}). \quad (5.17)$$

Zum Beispiel lautet die Flavour- und Farb-Wellenfunktion des  $\pi^+$ :

$$|\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r\bar{d}_r + u_g\bar{d}_g + u_b\bar{d}_b) \quad (5.18)$$

Die Farbladungen sind für die starke Wechselwirkung verantwortlich. Die Austauschteilchen sind 8 Gluonen, die selbst Träger von Farbladungen sind. Ein Gluon hat immer eine Farbe und eine Antifarbe, zum Beispiel:  $r\bar{r}$ ,  $g\bar{g}$ ,  $b\bar{b}$ ,  $r\bar{b}$ , ... usw. Von den 9 möglichen Kombinationen sind nur 8 linear unabhängig, deshalb 8 Gluonen.

**Quantenchromodynamik:** Hier folgt eine kurze, sehr unvollständige Erläuterung, wie man von den Farbladungen zu einer Wechselwirkungstheorie kommt:

Die 8 Farbe-Antifarbe-Zustände können auch als Generatoren einer Farb-Symmetriegruppe gedeutet werden, die 8 unabhängig Drehungen in dem Farbraum erzeugen (wie die räumlichen Drehungen 3 unabhängig Generatoren für die Drehungen um die 3 Raumachsen haben). Wie wir gesehen hatten, entspricht jeder Drehung eine Transformation der Phase der Wellenfunktion. Wenn man alle Phasen gleichzeitig um das gleiche Stück dreht, nennt man das eine globale Transformation. Fordert man andererseits, dass die Drehung eine Funktion des Ortes sein kann und man dennoch eine Invarianz der entsprechenden Hamilton-Funktion (bzw. Lagrange-Funktion) bekommt, dann spricht man von einer lokalen Transformation.

Transformationen, die ortsabhängig sind, führen zu Spannungen zwischen den Punkten, an denen gedreht wird. Man kann sich das vorstellen, als wenn man auf

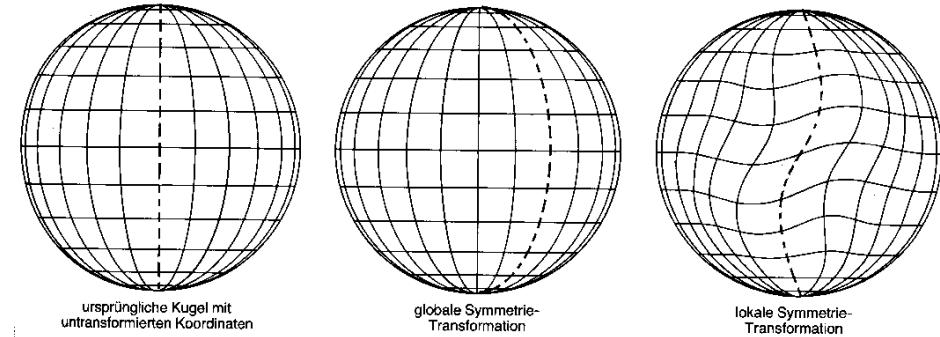


Abbildung 5.2: Globale und lokale Transformation.

der Oberfläche eines Luftballons an zwei Stellen einen Finger aufsetzt und die Finger dann unterschiedlich dreht (eine Drehung des ganzen Ballons wäre eine globale Transformation). Das führt zu einem Faltenwurf auf dem Ballon (Abb. 5.2). Die Falten kann man als Kraftlinien einer Wechselwirkung interpretieren. Um die entsprechende Hamilton-Funktion invariant zu lassen, muß man ein Kraftfeld einbeziehen, das sich entsprechend mittransformieren muß.

Eine lokale Symmetrietransformation nennt man auch eine Eichung und die entsprechende Theorie eine **lokale Eichtheorie**. Die Quantenelektrodynamik (QED) hat das Eichprinzip von der klassischen Elektrodynamik übernommen und auf eine Quantenfeldtheorie angewandt. Da die QED nur einen Generator hat (entsprechend der Symmetriegruppe  $U(1)$ ), der der Ladung entspricht, ist die QED eine ‘abelsche Eichtheorie’. Die QCD mit ihren 8 Generatoren (entsprechend der Symmetriegruppe  $SU(3)$ ) ist entsprechend komplizierter und ist insbesondere eine ‘nicht-abelsche Eichtheorie’.

Das Kraftfeld in der QED ist das Photonenfeld, in der QCD das Gluonenfeld. Entsprechend wird in der QCD die Wechselwirkung durch den Austausch eines oder mehrerer Gluonen beschrieben. Im Gegensatz zur QED wird hier aber Ladung ausgetauscht, weil die Gluonen selbst Ladung tragen. Das Prinzip zeigt folgendes Diagramm: Entsprechend der Feinstrukturkonstanten der QED steht an den Vertices

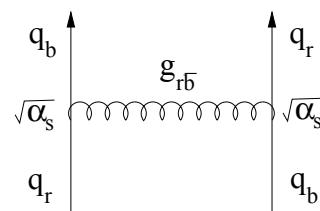


Abbildung 5.3: Quark-Quark-Wechselwirkung über Gluonaustausch.

die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung  $\alpha_s$ , die aber eigentlich keine Konstante ist, sondern ‘läuft’: sie wird bei großem Impulsübertrag  $q^2$  immer kleiner (‘asymptotische Freiheit’):

$$\alpha_s(q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln q^2/\Lambda^2} \quad (5.19)$$

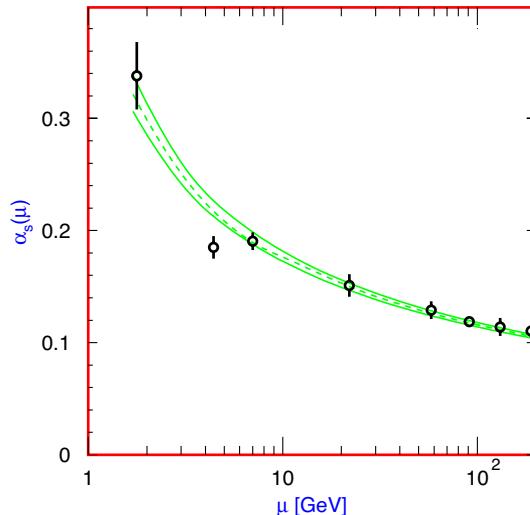


Abbildung 5.4: Messungen der ‘laufenden Kopplungskonstanten’  $\alpha_s$  der starken Wechselwirkung [PDFG 2006].

Dabei ist  $n_f$  die Anzahl der Quarkflavours die in dem jeweiligen Prozess kinematisch erlaubt sind (ausreichende Energie, um die Massen zu erzeugen). Die Konstante  $\Lambda \approx 200$  MeV, entsprechend etwa 1 fm, charakterisiert den Übergang zwischen asymptotischer Freiheit und starker Bindung.

Bedingt durch die unterschiedlichen Strukturen der Eichgruppen, haben die Kräfte in der QED und der QCD ein sehr unterschiedliches Verhalten: Während das Potential in der QED bei Separation von zwei Ladungen mit  $1/r$  abnimmt, nimmt es in der QCD für große Abstände linear  $\sim r$  zu (entsprechend einer konstanten Kraft). Man kann sich das etwa wie ein Gummiband vorstellen, in dem mit zunehmender Separation der Enden immer mehr Energie gespeichert wird. Dieses Kraftgesetz führt dazu, dass Farbladungen wahrscheinlich nicht isoliert auftreten können (‘confinement’). Weil Quarks eine Farbladung tragen, sind sie ‘confined’. Für die Entwicklung der Theorie der Quantenchromodynamik, die dieses Verhalten beschreibt, erhielten Gross, Politzer und Wilczek 2004 den Nobelpreis.

Die Energie, die bei einem Streuprozess in einem ‘String’ (= Gummiband) gespeichert wird, entlädt sich durch Erzeugung von Teilchen, die dann als Hadronen-Jet zu sehen sind (Abb. 5.5). In diesem Fall streut ein Elektron an einem Quark im Proton und das Quark fragmentiert in Hadronen (Abb. 5.6).

In Abb. 3.25 sieht man Jets von einem Quarkpaar, das in einer Elektron-Positron-Reaktion erzeugt wurde (Abb. 5.8a):

$$e^+ e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow 2 \text{ Jets} \quad (5.20)$$

Das Gluon wurde in der Reaktion (Abb. 5.8b)

$$e^+ e^- \rightarrow q\bar{q}g \rightarrow 3 \text{ Jets} \quad (5.21)$$

erstmals 1979 bei DESY beobachtet. Dabei wird ein hartes Gluon aus dem Farbfeld der beiden Quarks abgestrahlt. Das Gluon fragmentiert ähnlich wie die Quarks in Hadronen. Ein charakteristisches 3-Jet-Ereignis ist in Abb. 5.7 gezeigt.

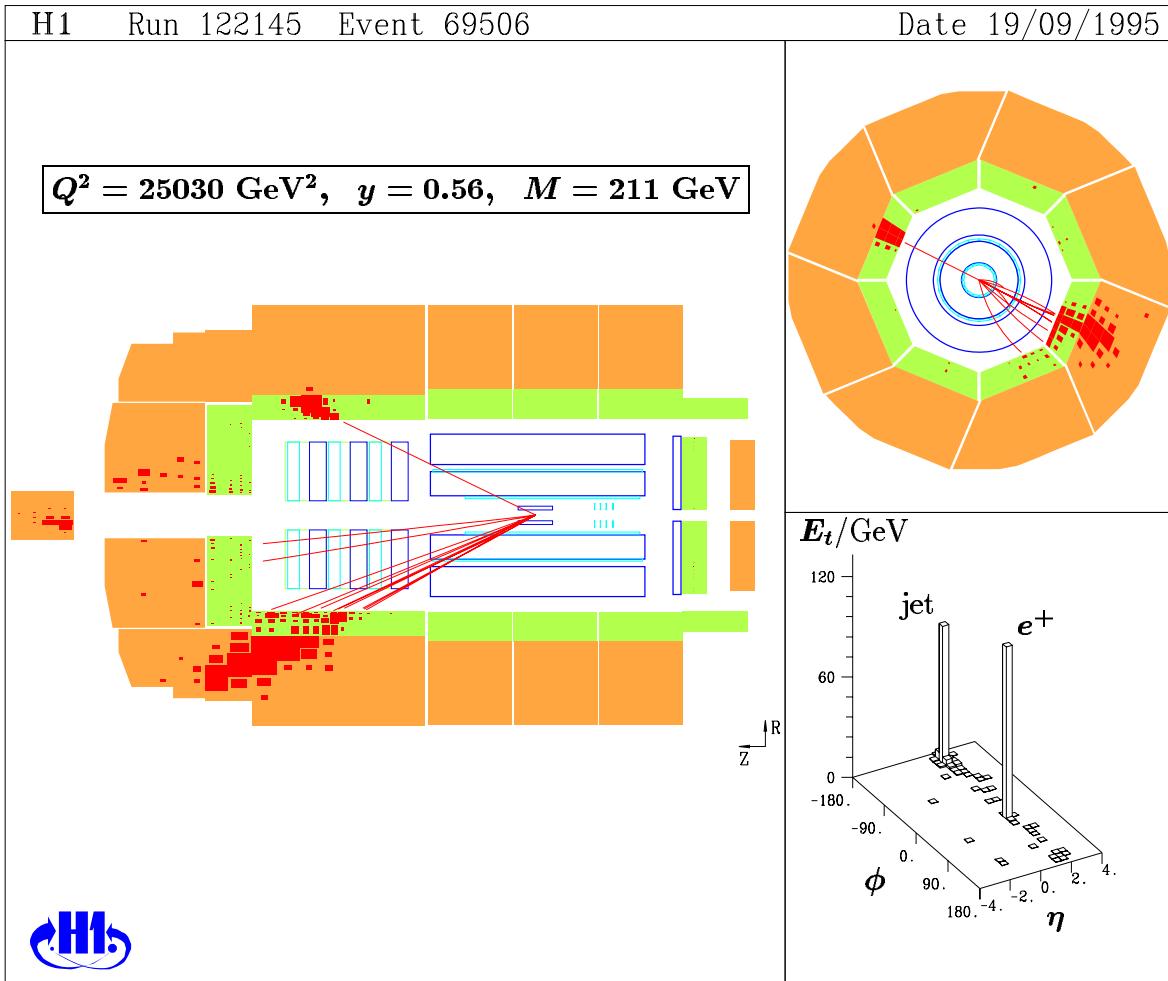


Abbildung 5.5: Tief-inelastische Elektron-Proton-Streuung im H1-Detektor: Das Elektron kommt von links, wird hart zurückgestreut und im elektromagnetischen Kalorimeter nachgewiesen. Das Elektron trifft im Proton, das von rechts kommt, auf ein Quark. Das angestößene Quark entwickelt einen Hadron-Jet, der vor allem im Hadronkalorimeter nachgewiesen wird.

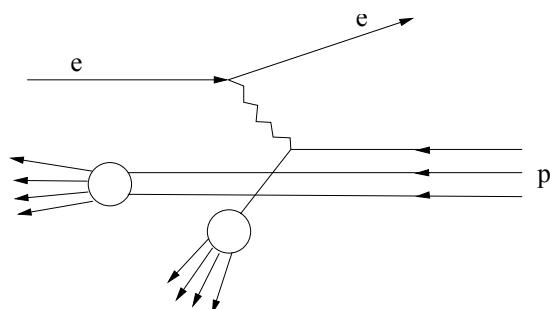


Abbildung 5.6: Elektromagnetische Streuung eines Elektrons an einem Quark im Proton (“tief-inelastische Streuung”).

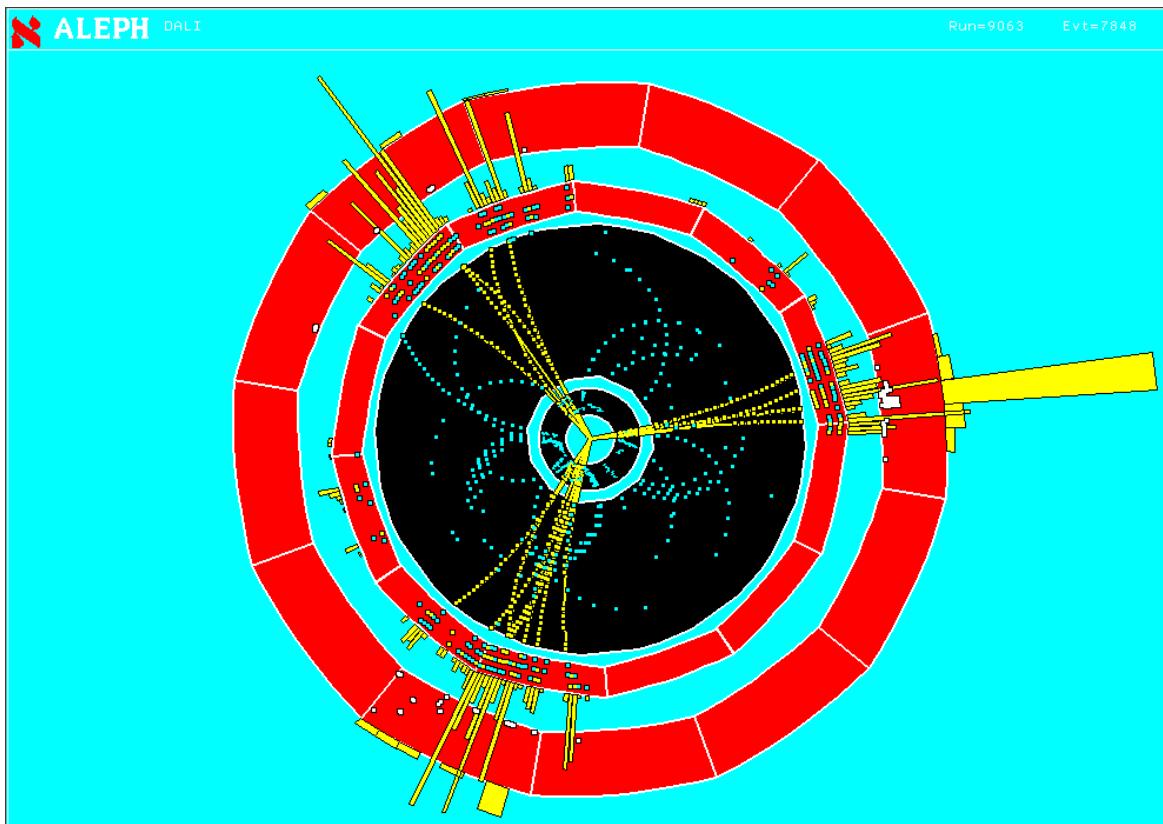


Abbildung 5.7: 3-Jet-Ereignis, das als  $q\bar{q}$ -Ereignis mit Abstrahlung eines harten Gluons (siehe Diagramme) interpretiert wird.

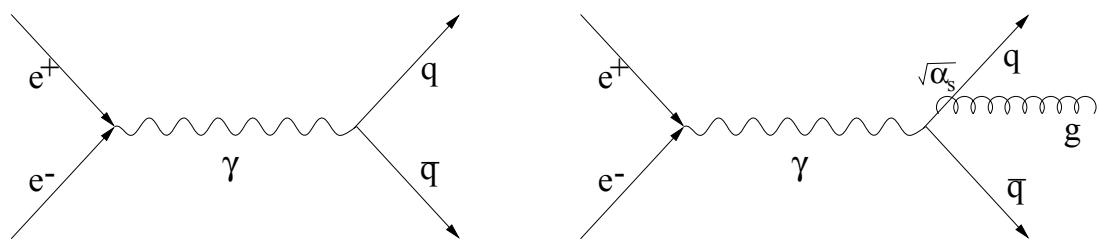


Abbildung 5.8: Jet-Erzeugung in Elektron-Positron-Anihilation: a) Erzeugung eines Quarkpaars in niedrigster Ordnung und b) mit zusätzlicher Abstrahlung eines Gluons.

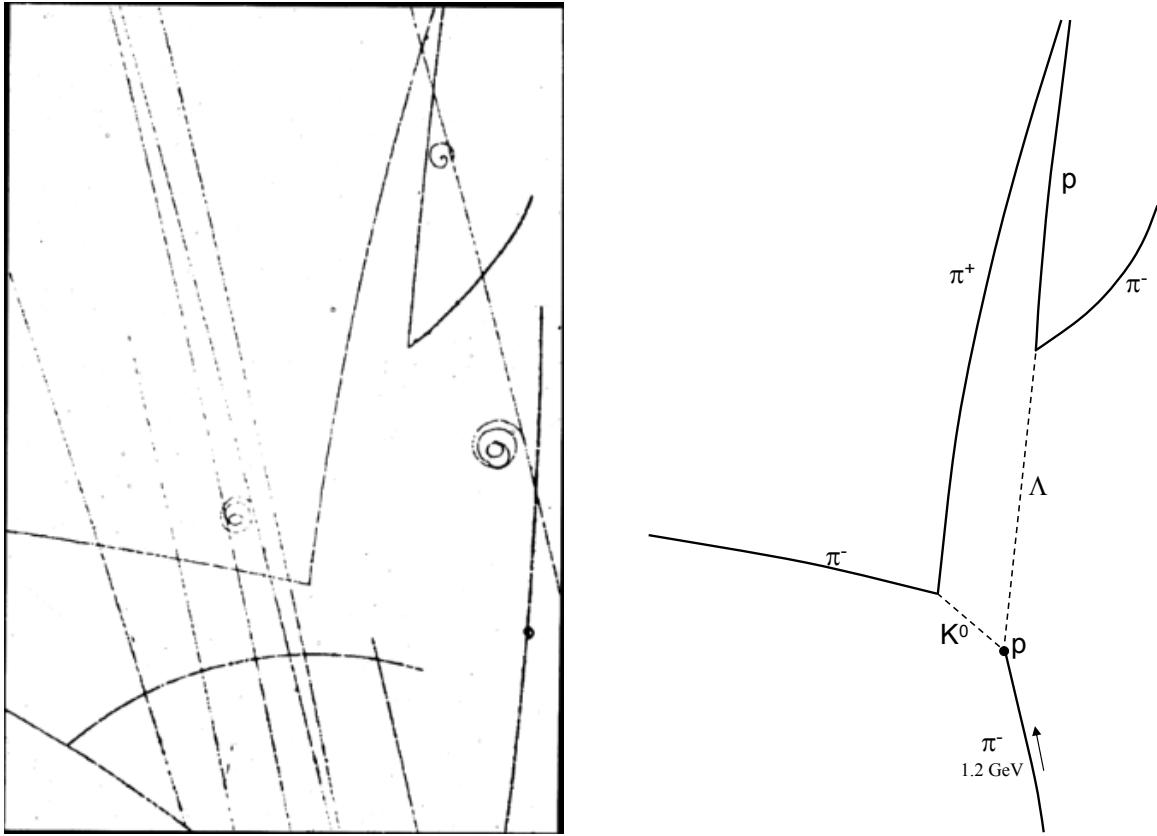


Abbildung 5.9: Ein doppeltes ‘V-Ereignis’ als Beispiel für assoziierte Strangeness Produktion (siehe Text).

## 5.4 Strangeness

Die experimentellen Hinweise auf eine weitere in der starken Wechselwirkung erhaltene Quantenzahl stammen aus der Beobachtung der assoziierten Produktion von Kaonen und bestimmten Baryonen, die ‘Hyperonen’ genannt werden. Zum Beispiel kann in der starken Wechselwirkung ein Kaon und ein  $\Lambda$ -Hyperon zusammen produziert werden:

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda + K^0 \quad (5.22)$$

Das Kaon und das  $\Lambda$ -Hyperon haben beide eine sehr lange Lebensdauer, die auf schwache Zerfälle hinweist:

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow p\pi^- (n\pi^0) & \tau &= 2.6 \cdot 10^{-10} \text{ s} \\ K^0 &\rightarrow \pi^+\pi^- (\pi^0\pi^0) & \tau &= 0.9 \cdot 10^{-10} \text{ s} \end{aligned}$$

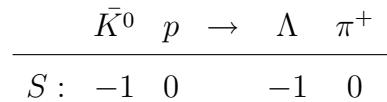
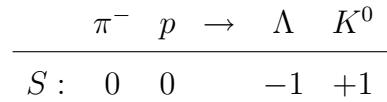
Diese Zerfälle führen zu sogenannten ‘V-Ereignissen’ wie in Abb. 5.9 gezeigt: Nach der Erzeugung fliegen das Kaon und das  $\Lambda$ -Hyperon einige Zentimeter, ohne als neutrale Teilchen eine Spur zu hinterlassen, und zerfallen dann in jeweils zwei Teilchen (‘V’).

Wir postulieren eine neue Quantenzahl Strangeness  $S$  (die beobachteten Ereignisse sehen “seltsam” aus), die in der starken Wechselwirkung erhalten ist ( $\Rightarrow$  assoziierte Produktion) und nur in der schwachen Wechselwirkung vernichtet werden kann ( $\Rightarrow$  lange Lebensdauer).

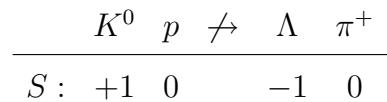
Folgende Zuordnung der Strangeness- und Isospin-Quantenzahlen zu den Teilchen führt zu einem konsistenten Bild:

Teilchen	$K^0$	$\Lambda$	$\bar{K}^0$	$\bar{\Lambda}$	$\pi$	$p$	$n$
$S$	+1	-1	-1	+1	0	0	0
$I$	1/2	0	1/2	0	1	1/2	1/2

Mögliche Reaktionen sind:



Nicht erlaubt ist zum Beispiel:



Gell-Mann und Zweig haben 1964 vorgeschlagen, dass Hadronen Konstituenten haben, die Quarks genannt wurden. Die Quantenzahlen, die in der starken Wechselwirkung erhalten sind, entsprechen Eigenschaften der Quarks. Die Erhaltung von Strangeness fordert ein drittes Quark s, das die Quantenzahl  $S = -1$  trägt (das ‘-’ ist Konvention).

## 5.5 Das SU(3)-Modell der leichten Quarks

### 5.5.1 Eigenschaften der Quarks

Die drei Quarks, die 1964 postuliert wurden, haben folgende Quantenzahlen:

Flavour	$B$	$Q$	$J$	$I$	$I_3$	$S$	$Y$
$u$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
$d$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
$s$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$
$\bar{q}$	$-B$	$-Q$	$J$	$I$	$-I_3$	$-S$	$-Y$

( $B$  = Baryonzahl,  $Q$  = Ladung,  $J$  = Spin,  $(I, I_3)$  = Isospin,  $S$  = Strangeness,  $Y$  = Hyperladung).

Die letzte Zeile sagt aus, dass alle ladungsartigen Quantenzahlen ( $B, Q, I_3, S, Y$ ) das

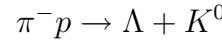
Vorzeichen vertauschen, wenn man zum entsprechenden Antiquark übergeht. In der Tabelle ist die Hyperladung  $Y$  neu eingeführt worden:

$$Y = B + S \quad (5.24)$$

Die Gell-Mann–Nishijima–Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen Ladung, Hyperladung und Isospin an:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (5.25)$$

Quark-Flavour (also  $u, d, s$ ) ist in starken und elektromagnetischen Prozessen erhalten. Die Konsequenz ist assoziierte Produktion von Flavour-Quantenzahlen. Als Beispiel hatten wir den Prozess (5.22)



betrachtet, der als Quarkdiagramm in Abb. 5.10 dargestellt ist. In diesem Diagramm

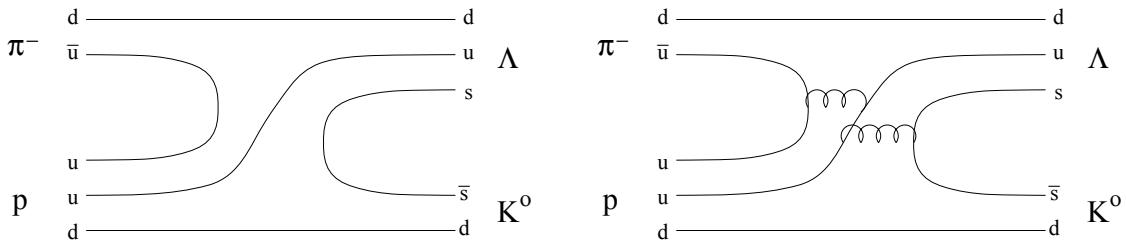


Abbildung 5.10: Quarkdiagramm für assoziierte Strangeness-Produktion. Die dynamische Erzeugung und Vernichtung von Quark-Antiquark-Paaren kann man sich über die Ankopplung an das Gluonenfeld vorstellen (rechts).

wird die Nettozahl einer bestimmten Flavour nicht geändert. Flavour-ändernde ‘Ströme’ treten nur in der schwachen Wechselwirkung auf, zum Beispiel im  $K^0$ -Zerfall, bei dem durch Ankopplung an ein  $W$ -Boson ein  $s$ - in ein  $u$ -Quark übergeht (Abb. 5.11).

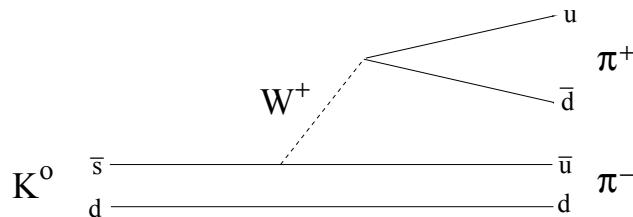
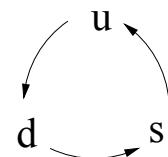


Abbildung 5.11: Schwacher Zerfall eines neutralen Kaons. Der Zerfall heißt ‘hadronisch’, weil nur Quarks im Anfangs- und Endzustand auftreten.

Im Quarkmodell mit drei Quarks wird die Isospin-Symmetrie der  $u$ -,  $d$ -Quarks (mathematisch: SU(2)-Symmetrie) auf drei Quarks erweitert (mathematisch: SU(3)-Symmetrie). Man stellt sich vor, dass eine Rotation in diesem abstrakten SU(3)-Raum



die Dynamik der starken Wechselwirkung nicht ändert, dass also zum Beispiel Streuprozesse unabhängig von der Art der beteiligten Quarks sind. Während allerdings die Isospinsymmetrie eine sehr gute Näherung ist, ist die SU(3)-Symmetrie nur eine grobe Näherung. Das liegt daran, dass das  $s$ -Quark mit 150 MeV erheblich schwerer ist als die  $u$ - und  $d$ -Quarks mit etwa 5 MeV. Exakte Symmetrien gelten nur, wenn alle Massen Null sind.

Die Gruppensymmetrie schreibt vor, wie aus den möglichen Kombinationen von Quarks und Antiquarks SU(3)-Zustände zu konstruieren sind. Die möglichen Zustände treten in Multipletts auf, ähnlich den Isospin-Multipletts, deren Mitglieder sich durch die  $I_3$ -Quantenzahl unterscheiden. Diese eindimensionale Darstellung wird bei der SU(3) zu einer zweidimensionalen Darstellung, die zum Beispiel als Quantenzahlen  $I_3$  und  $Y$  (oder  $S$ ) benutzt. In dieser Darstellung bilden die Quark- und Antiquark-Triplets jeweils ein Dreieck (Abb. 5.12). Diese Quarktriplets sind

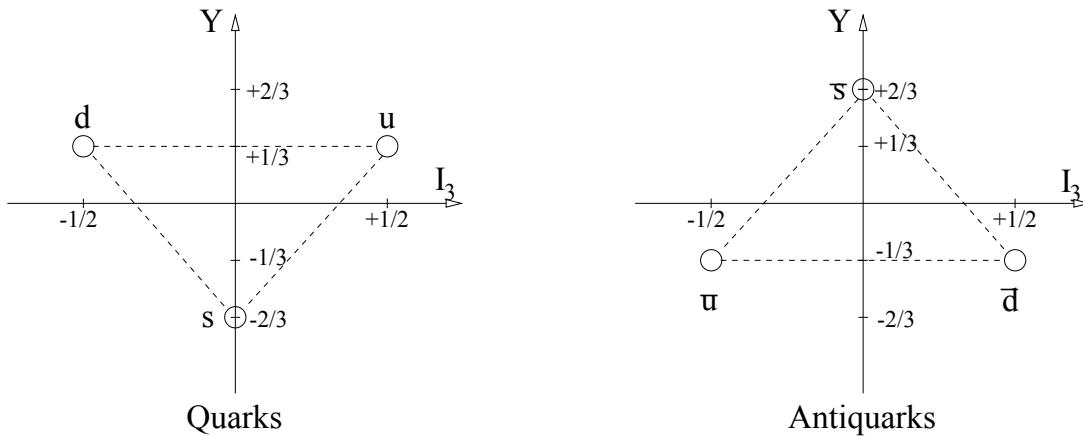


Abbildung 5.12: Die beiden Basisdarstellungen der SU(3).

die Basisdarstellungen. Höhere Multipletts werden wir im folgenden betrachten. Experimentell hat man bisher mit einiger Sicherheit nur Mesonen-Multipletts mit  $q\bar{q}$ -Zuständen, Baryonen-Multipletts mit  $qqq$ -Zuständen und Antibaryonen-Multipletts mit  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ -Zuständen gefunden. Es gibt zwar Kandidaten auch für andere Kombinationen, zum Beispiel  $q\bar{q}q\bar{q}$ , die aber bisher nicht genügend abgesichert sind. Man kann jedenfalls den Schluss ziehen, dass solche Kombinationen im allgemeinen keine oder nicht genügende Bindung haben.

### 5.5.2 Mesonen-Multipletts

Die 9  $q\bar{q}$ -Kombinationen der Mesonen teilen sich in ein Singulett und ein Oktett auf. Formal schreibt man:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

**Das  $J^P = 0^-$ -Multiplett:** Wegen der Symmetriebrechung durch die relativ große  $s$ -Quarkmasse sind die physikalischen Zustände nicht mehr eindeutig einem Multiplett zugeordnet, es gibt Mischungszustände der flavour-neutralen Zustände, von denen es einen im Oktett und einen im Singulett gibt. Deshalb stellt man alle Zustände

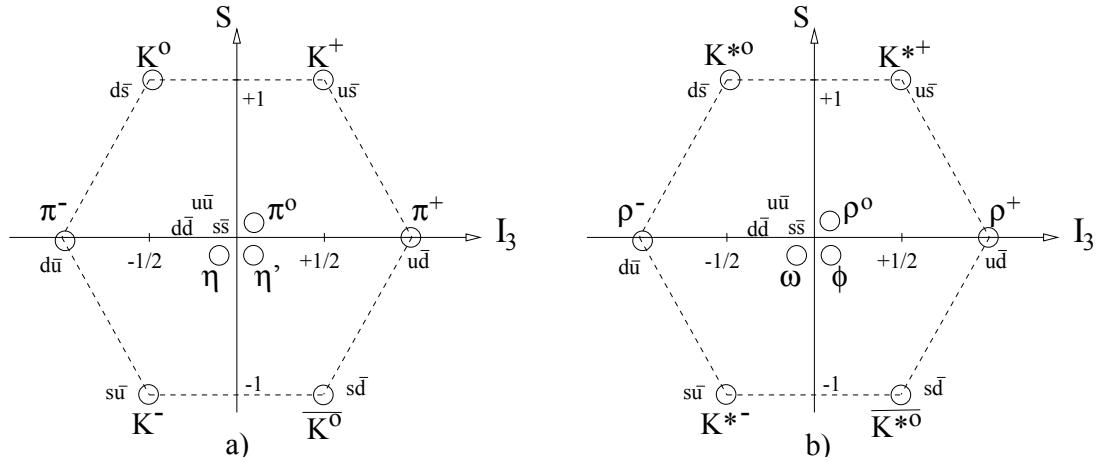


Abbildung 5.13: Die Nonetts der pseudoskalaren Mesonen ( $J^P = 0^-$ ) und der Vektormesonen ( $J^P = 1^-$ ).

in einem Nonett dar. Das Multiplett der pseudoskalaren Mesonen mit  $J^P = 0^-$  ist in Abb. 5.13a gezeigt. Die beiden Zustände  $\eta$  und  $\eta'$  sind Isospin-Singulette (also  $I = 0$ ) und sind orthogonale Kombinationen von  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$ . Eigentlich sollte ein Zustand zum Oktett gehören und einer zum Singulett, aber wie oben bereits erwähnt mischen Oktett und Singulett.

Die Oktett- und Singulett-Wellenfunktionen der beiden Isospin-Singulette sind:

$$\begin{aligned} |\eta_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \\ |\eta_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Entsprechend (5.8) kann man sich überzeugen, dass die beiden Zustände orthogonal sind:

$$\langle \eta_8 | \eta_1 \rangle = 0 \quad (5.27)$$

Die tatsächlich beobachteten Zustände sind orthogonale Mischungen der SU(3)-Zustände:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \cos \theta \cdot |\eta_8\rangle + \sin \theta \cdot |\eta_1\rangle \\ |\eta'\rangle &= -\sin \theta \cdot |\eta_8\rangle + \cos \theta \cdot |\eta_1\rangle \end{aligned} \quad (5.28)$$

mit einem Mischungswinkel  $\theta$ , der experimentell bestimmt werden kann. Für die Vektormesonen ergibt sich die sogenannte “ideale Mischung”: die leichten Quarks  $u$ ,  $d$  und das  $s$ -Quark entkoppeln, das heißt, das  $\phi$ -Meson ist ein reiner  $s\bar{s}$ -Zustand und das  $\omega$ -Meson besteht nur aus leichten Quarks:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle), \quad \phi = -|s\bar{s}\rangle \quad (5.29)$$

Für die schwereren Charm- und Bottom-Quarks werden wir ebenfalls diese Entkopplung von den leichten Quarks finden (siehe Kapitel 6).

Tabelle 5.1: Die schwachen und elektromagnetischen Zerfälle der leichtesten Mesonen.

Teilchen	dominanter Zerfall	Lebensdauer
$\pi^\pm$	$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	$\sim 10^{-8}$ s
$\pi^0$	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	$\sim 10^{-16}$ s
$\eta$	$\eta \rightarrow \gamma\gamma$ ( $\sim 30\%$ ) $\eta \rightarrow 3\pi$ ( $\sim 70\%$ )	$\sim 10^{-18}$ s
$K^\pm$	$K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	$\sim 10^{-8}$ s
$K_S^0$	$K_S^0 \rightarrow 2\pi$	$\sim 10^{-10}$ s
$K_L^0$	$K_L^0 \rightarrow 3\pi$	$\sim 10^{-8}$ s

Die pseudoskalaren Mesonen sind die leichtesten Hadronen und zerfallen daher schwach oder elektromagnetisch mit entsprechend langen Zerfallszeiten (Tab. 5.1). Der  $\eta$ -Zerfall in 3 Pionen kann sich nur unter Isospin-Verletzung als elektromagnetische Reaktion vollziehen.

**Die Flavour- und CP-Eigenzustände der neutralen  $K$ -Mesonen:** Die mit  $K_S^0$  und  $K_L^0$  bezeichneten Teilchen sind Linearkombinationen von  $K^0$  und  $\bar{K}^0$ , die (nahezu) CP-Eigenzustände sind. Definiert man

$$C|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad (5.30)$$

so folgt

$$CP|K^0\rangle = +|\bar{K}^0\rangle. \quad (5.31)$$

Damit sind die CP-Eigenzustände:

$$\begin{aligned} |K_S^0\rangle &\approx |K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \\ |K_L^0\rangle &\approx |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Offensichtlich hat  $K_1$  den CP-Eigenwert +1 und  $K_2$  den CP-Eigenwert -1:

$$\begin{aligned} CP|K_1\rangle &= +|K_1\rangle \\ CP|K_2\rangle &= -|K_2\rangle \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die beiden Zustände zerfallen jeweils in 2 Pionen mit CP=+1 und 3 Pionen mit CP = -1, wenn im Zerfall CP-Invarianz gilt. Tatsächlich ist CP nicht exakt erhalten und die physikalischen Zustände  $K_S^0$  und  $K_L^0$  sind nur annähernd die CP-Eigenzustände. Das  $K_L^0$  nicht ausschließlich CP=-1 hat, zeigt sich darin, dass  $K_L$  auch geringfügig in 2 Pionen mit CP=+1 zerfallen kann (Cronin und Fitch 1964).

Es ergibt sich die eigenartige Situation, dass die Teilchen, die schwach zerfallen, die Zustände  $K_S^0$  und  $K_L^0$  sind, aber die starke Wechselwirkung auf die Flavour-Eigenzustände  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  wirkt. Das heißt, die Teilchen werden als  $K^0$  oder  $\bar{K}^0$

erzeugt und zerfallen als  $K_S^0$  oder  $K_L^0$ . Das führt zu seltsamen, typisch quantenmechanischen Effekten. Weil in der schwachen Wechselwirkung Flavour nicht erhalten ist, kann zum Beispiel ein ursprünglich als  $K^0$  produziertes Teilchen in ein  $\bar{K}^0$  oszillieren. Dazu trägt das Quark-Diagramm (“Boxdiagramm”) in Abb. 5.14 bei.

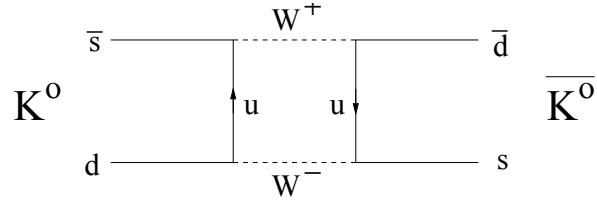


Abbildung 5.14: Boxdiagramm der  $K^0 - \bar{K}^0$ -Oszillationen.

**Das  $J^P = 1^-$ -Multiplett:** Bei den pseudoskalaren Mesonen hat das Quark-Antiquark-Paar keinen relativen Bahndrehimpuls und die beiden Spins sind entgegengerichtet. Die entsprechenden Zustände, bei denen die Spins parallel gerichtet sind (Gesamtspin = 1), sind die Vektormesonen mit  $J^P = 1^-$ , dargestellt in Abb. 5.13b.

Die Teilchen dieses Multipletts können als Anregungen der leichten pseudoskalaren Mesonen angesehen werden. Sie können stark in die leichteren Mesonen zerfallen und haben entsprechend kürzere Lebensdauern ( $O(10^{-23} \text{ s})$ ).

Die neutralen, nicht-seltsamen Vektormesonen ( $\rho^0, \omega, \phi$ ) haben die gleichen Quantenzahlen  $J^{PC} = 1^{--}$  wie das Photon und können deshalb direkt an das Photon ankoppeln. In Elektron-Positron-Speicherringen werden deshalb über die  $e^+e^-$ -Annihilation in ein Photon resonant Vektormesonen erzeugt (Abb. 5.15).

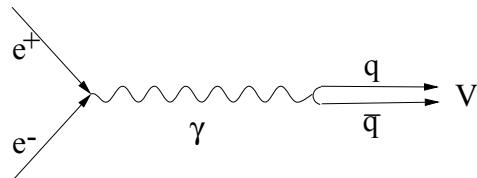


Abbildung 5.15: Diagramm der Vektormeson-Produktion in  $e^+e^-$ -Annihilation.

Der  $e^+e^-$ -Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie zeigt deshalb resonanzartige Überhöhungen bei der Masse der Vektormesonen (Abb. 5.16 oben). Auf diese Weise ist das Charm-Quark  $c$  als  $c\bar{c}$ -Vektormeson  $J/\psi$  gefunden worden (siehe nächster Abschnitt über Charm).

Oberhalb der gebundenen  $q\bar{q}$ -Zustände werden Hadronen ebenfalls über die Ankopplung an  $q\bar{q}$ -Paare erzeugt, die dann bei genügender Energie als Jets von Hadronen sichtbar werden. Im unteren Teil der Abb. 5.16 ist das Verhältnis  $R$  der Wirkungsquerschnitte für  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen und  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  aufgetragen. Es werden also die beiden Graphen in Abb. 5.17 verglichen. Die Kopplungsstärke ist an jedem Vertex des Photons proportional der Ladung der erzeugten oder vernichteten Teilchen. In den beiden Graphen ist das immer die Elementarladung  $e$ , außer für die Quarks, bei denen die Ladung  $e_q = Q_q \cdot e$  ist. Jeder Quarkgraph trägt also einen

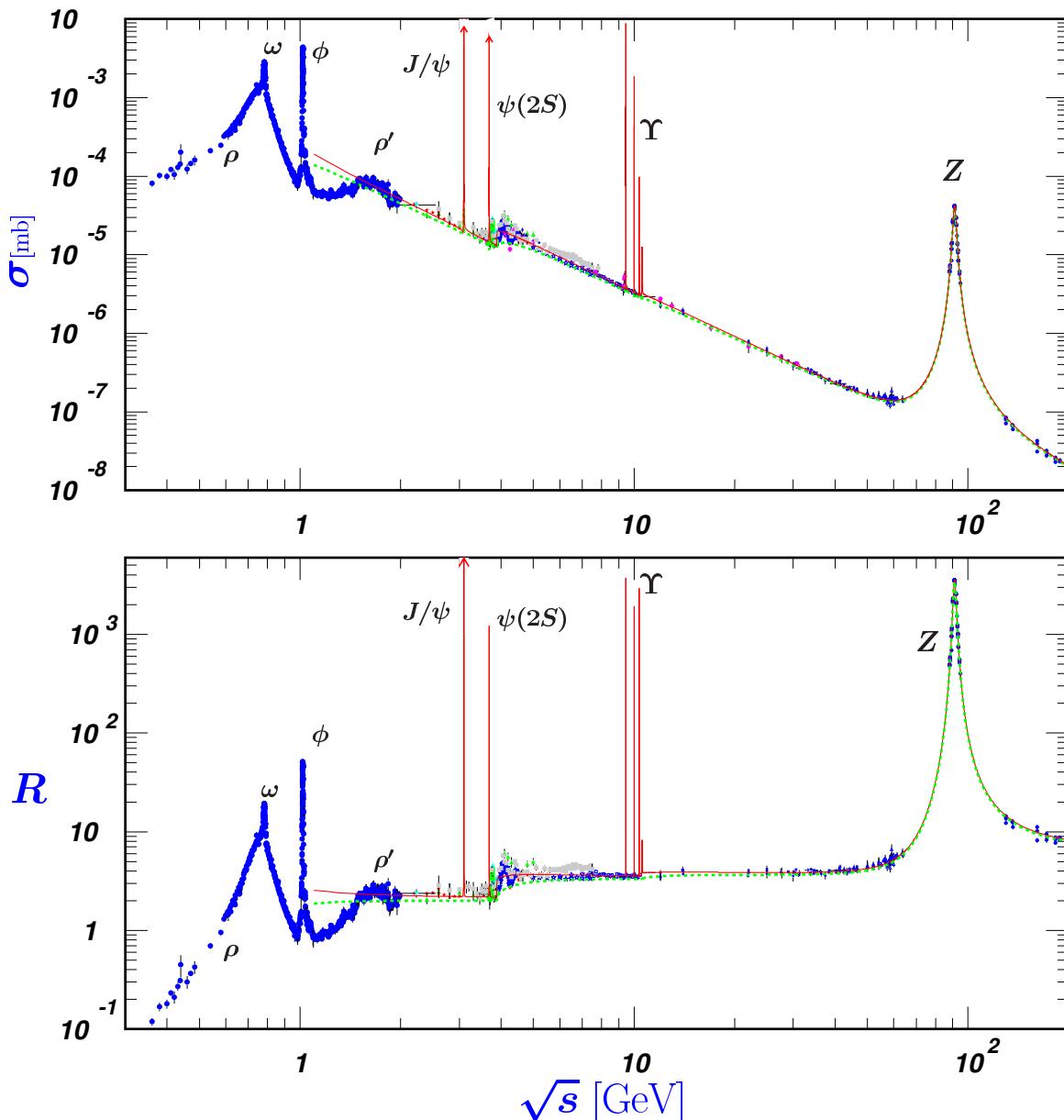


Abbildung 5.16: Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$  (oben) und das Verhältnis  $R$  der Wirkungsquerschnitte für  $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$  und  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  (unten). Man sieht die Überhöhung bei den Massen der Vektormesonen und die Stufen, wenn die Schwelle für die Produktion einer neuen Quark-Sorte überschritten wird.

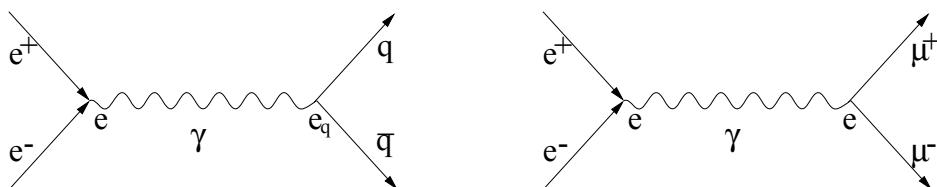


Abbildung 5.17: Diagramme der  $e^+e^-$ -Annihilation in Quark- und Myon-Paare.

Anteil  $Q_q^2$  zu  $R$  bei. Da über alle Quarksorten mit unterschiedlichem Flavour und Colour summiert werden muß, ergibt sich:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{\text{colours}} \sum_{\text{flavours}} Q_q^2 = 3 \sum_{\text{flavours}} Q_q^2 \quad (5.34)$$

Für die ersten 3 Quark-Flavours  $u$ ,  $d$ ,  $s$  ist  $R = 3 \cdot (4/9 + 1/9 + 1/9) = 2$ . Jede neue Quark-Flavour mit Ladung  $2/3$  bzw.  $1/3$  führt zu einem Sprung  $R$  um  $4/3$  bzw.  $1/3$ , wobei jedesmal vor dem Sprung die entsprechenden gebundenen  $q\bar{q}$ -Zustände als Vektormesonen zu sehen sind.

### 5.5.3 Baryonen-Multipletts

Die Baryonen sind  $qqq$ -Zustände, die Antibaryonen  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ -Zustände. Die Nukleonen treten in einem Oktett mit  $J^P = \frac{1}{2}^+$  auf (Abb. 5.18a). Die uns bereits bekannt

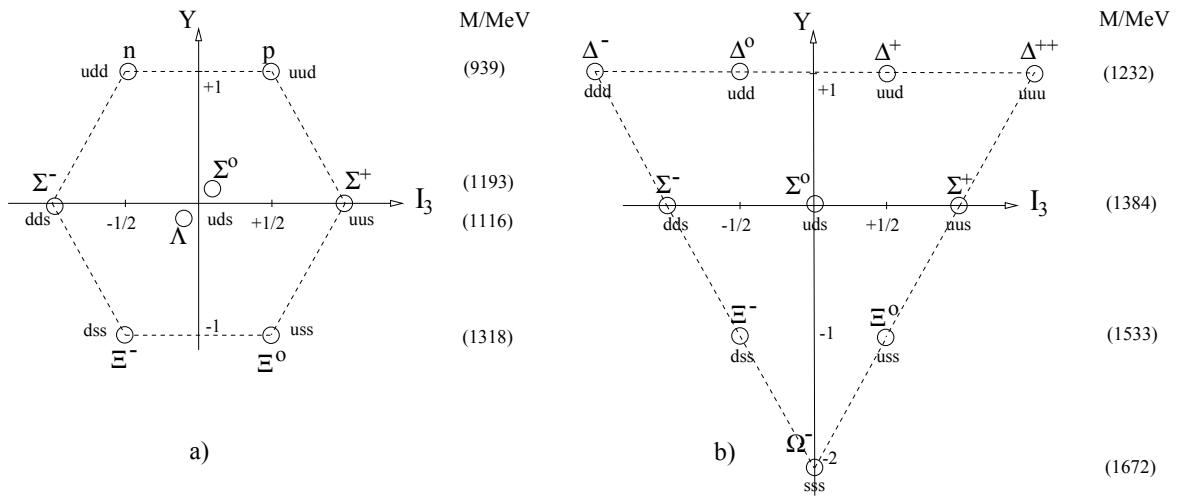


Abbildung 5.18: Baryonenoktett (a) und -dekupllett (b)

ten  $\Delta$ -Resonanzen treten in einem Dekuplett mit  $J^P = \frac{3}{2}^+$  auf (Abb. 5.18b). In jeder horizontalen Reihe liegt ein Isospin-Multiplett, wobei von oben nach unten die Strangeness-Quantenzahl zunimmt. Die Massendifferenzen von Zeile zu Zeile sind etwa 150 MeV, was also etwa der (effektiven) Masse des  $s$ -Quarks entspricht.

Der erste große Erfolg des Quarkmodells war die Vorhersage und anschließende experimentelle Bestätigung des  $\Omega^-$ , eines Baryons mit 3  $s$ -Quarks. Die Entdeckung des  $\Omega^-$  folgte unmittelbar der Veröffentlichung des Quarkmodells im Jahr 1964 durch Gell-Mann und Zweig<sup>1</sup>. Das  $\Omega^-$  zerfällt schwach in einer Kaskade in Teilchen mit jeweils einem  $s$ -Quark weniger (Abb. 5.19).

<sup>1</sup>Barnes et al., ‘Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three’, Phys. Rev. Lett. 8 (1964) 204

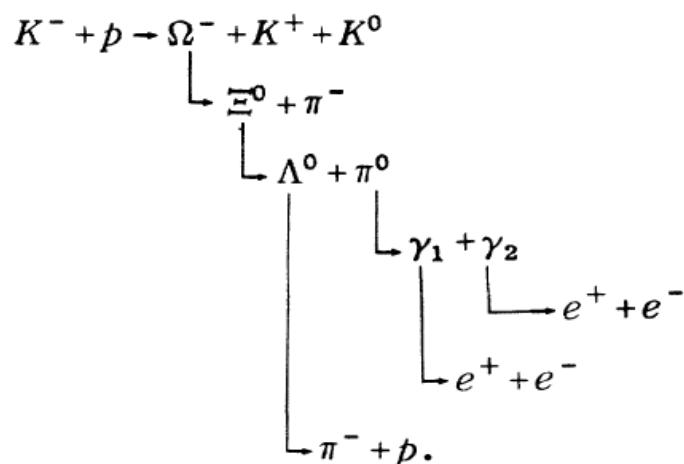
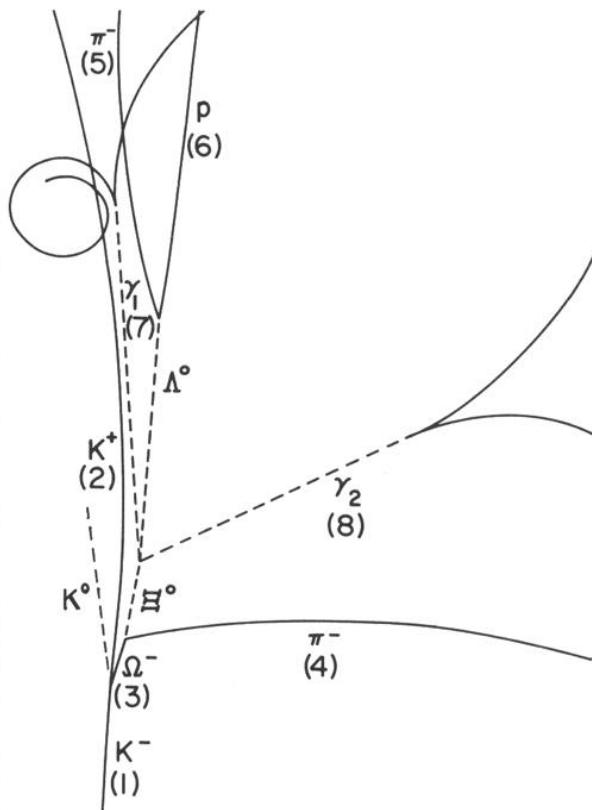
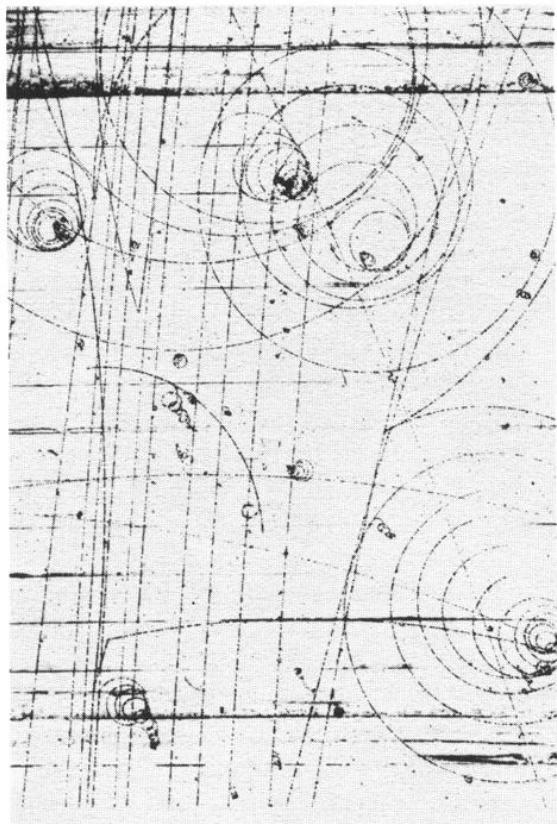


Abbildung 5.19: Zerfall eines  $\Omega^- (S = -3)$  über eine Kaskade, bei der in jedem Schritt ein Baryon mit um eine Einheit verminderter Strangeness auftritt:

$$\Omega^- (S = -3) \rightarrow \Xi^0 (S = -2) \rightarrow \Lambda (S = -1) \rightarrow p (S = 0).$$

# Kapitel 6

## Die Quark-Lepton-Familien

### 6.1 Charm

#### 6.1.1 Der Cabibbo-Winkel und der GIM-Mechanismus

Obwohl das Quarkmodell der 3 leichten Quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  sehr erfolgreich war, hatte man bald vermutet, daß es noch unvollständig ist. Insbesondere ist die Unsymmetrie zwischen den  $-1/3$ -geladenen  $d$ - und  $s$ -Quarks und dem  $2/3$ -geladenen  $u$ -Quark aufgefallen und schon bald wurde die Hypothese eines vierten Quarks mit Ladung  $2/3$  und einer neuen Flavour-Quantenzahl, Charm, diskutiert.

Das theoretische Argument für Charm basierte auf der Analyse von flavour-ändernden schwachen Zerfällen. Bei leptonischen Zerfällen hatte man beobachtet, daß die Kopplung universell ist, unabhängig davon, ob Elektronen oder Myonen (heute schließen wir auch die  $\tau$ -Leptonen ein) mit ihren Neutrinos beteiligt sind (die Kopplungsstärke wird durch die Fermi-Kopplungskonstante  $G_F$  festgelegt, wie wir später besprechen werden). Der Vertex  $W^\pm \rightarrow l^\pm \nu_l$  (Abb. 6.1 oben) ist von Struktur (linkshändige Leptonen und rechtshändige Antileptonen) und Kopplungsstärke für alle Leptonen,  $l = e, \mu, \tau$  gleich.

Bei den entsprechenden Quarkdiagrammen in Abb. 6.1 unten ist das anders: die Kopplung an das  $u\bar{s}$ -Paar (zum Beispiel im  $K^0$ -Zerfall, Abschnitt 5.5.1) ist unterdrückt gegenüber der Kopplung an das  $u\bar{d}$ -Paar (zum Beispiel im Neutron-Zerfall, Abb. 4.1). Um das bei Leptonen beobachtete Konzept der **Universalität der schwachen Wechselwirkung** auch auf Quarks übertragen zu können, hat Cabibbo postuliert, daß die schwache Kopplung eigentlich zwischen dem  $u$ -Quark

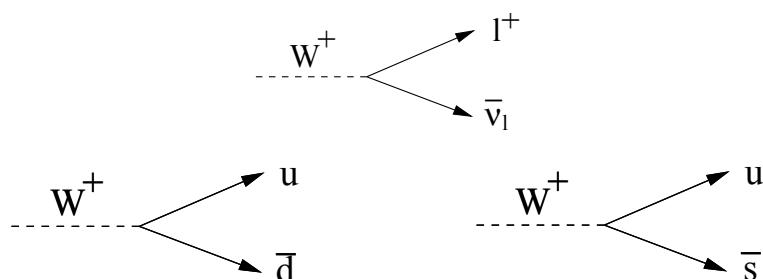


Abbildung 6.1: Diagramme für die Kopplung von  $W$ -Bosonen an Leptonen (oben) und Quarks (unten).

und einem Mischungszustand  $d''$  aus  $d$ - und  $s$ -Quarks besteht:

$$|d''\rangle = \cos \theta_c \cdot |d\rangle + \sin \theta_c \cdot |s\rangle \quad (6.1)$$

mit einem Mischungswinkel  $\theta_c$ , dem Cabibbo-Winkel. Der Cabibbo-Winkel wird zum Beispiel aus dem Vergleich des Neutron-Zerfalls ( $\sim \cos \theta_c$ ) mit Hyperon-Zerfällen ( $\sim \sin \theta_c$ ) bestimmt:

$$\sin \theta_c = 0.22$$

Die Unterdrückung von Hyperon-Zerfällen ist also  $(\sin \theta_c / \cos \theta_c)^2 \approx 0.05$ .

Wie die Leptonen bezüglich der schwachen Wechselwirkung immer in Dubletts auftreten, die an das  $W$ -Boson koppeln,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

gibt es dann ein Quarkdublett

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Die Frage liegt nahe, ob es nicht ein entsprechendes Dublett gibt mit einem Zustand  $s'$ , der orthogonal zu  $d'$  sein sollte:

$$|d'\rangle = \cos \theta_c \cdot |d\rangle + \sin \theta_c \cdot |s\rangle \quad (6.4)$$

$$|s'\rangle = -\sin \theta_c \cdot |d\rangle + \cos \theta_c \cdot |s\rangle \quad (6.5)$$

Das 2/3-ladige Quark im Dublett sollte dann das Charm-Quark sein:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Mit dieser Erweiterung des Cabibbo-Modells haben Glashow, Iliopoulos und Maiani (GIM) 1970 die Unterdrückung sogenannter flavour-ändernder neutraler Ströme (FCNC) erklären können. Zum Beispiel konnte man nicht verstehen, daß der Zerfall  $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$  stark unterdrückt ist, obwohl er eigentlich über das sogenannte Box-Diagramm (Abb. 6.2) ablaufen sollte.

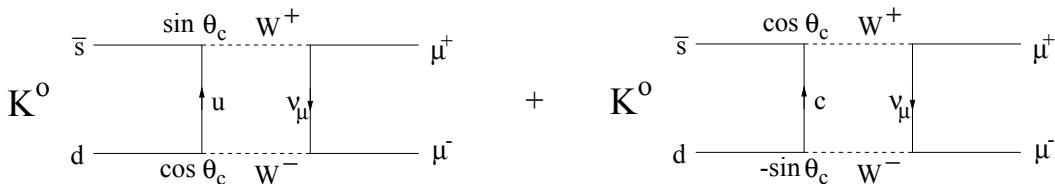


Abbildung 6.2: Box-Diagramme für den Zerfall  $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

Das zweite Diagramm in Abb. 6.2 mit dem Austausch des Charm-Quarks trägt mit dem umgekehrten Vorzeichen bei. Wenn die Massen der  $u$ - und  $c$ -Quarks genau gleich wären, würden sich beide Diagramme exakt auslöschen (GIM-Mechanismus). Aus der nicht vollständigen Unterdrückung des Zerfalls berechneten GIM eine Voraussage für die  $c$ -Quarkmasse:

$$m_c = 1 \dots 3 \text{ GeV.}$$

### 6.1.2 Entdeckung des Charm-Quarks

Im November 1974 ist das Charm-Quark simultan in Stanford (B. Richter et al.) und Brookhaven (S.Ting et al.) entdeckt worden. Man hat danach von der ‘November-Revolution’ der Teilchenphysik gesprochen, weil mit einem Schlag viele Probleme und Ungereimtheiten gelöst wurden.

Beide Gruppen haben den niedrigstliegenden Vektormeson-Zustand  $c\bar{c}$ , das  $J/\psi$  bei einer Masse von etwa 3.1 GeV beobachtet. Das Teilchen bekam einen Doppelnamen, weil die Gruppe an der Ostküste das Teilchen  $J$  (ähnlich dem chinesischen Zeichen für Ting) und die Gruppe an der Westküste das Teilchen  $\psi$  genannt hatte.

Die Richter-Gruppe hatte das  $J/\psi$  an dem  $e^+e^-$ -Speicherring SPEAR als scharfe Spitze im Wirkungsquerschnitt bei einem Energie-Scan um 3 GeV in folgenden Reaktionen beobachtet (Abb. 6.3):

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^- \quad (6.7)$$

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \quad (6.8)$$

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen} \quad (6.9)$$

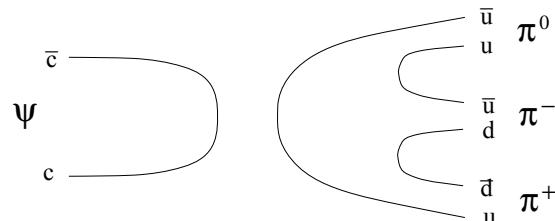
Überraschend war die geringe Breite der Resonanz (entsprechend einer langen Lebensdauer) von  $\Gamma = 87$  keV, die auf eine neue, erhaltene Quantenzahl hinwies. Man ordnet dem  $c$ -Quark die Charmquantenzahl  $C = +1$  und dem  $c$ -Antiquark  $C = -1$  zu.

Die Ting-Gruppe hatte das  $J/\psi$  in Proton-Kern-Reaktionen als Resonanz in der invarianten  $e^+e^-$ -Masse beobachtet (Abb. 6.4):

$$p + Be \rightarrow e^+e^- + X. \quad (6.10)$$

### 6.1.3 Charmonium

Aufgrund der großen Masse des Charm-Quarks entkoppeln die  $c\bar{c}$  gebundenen Zustände, die auch Charmonium-Zustände genannt werden, weitgehend von den leichten Quarks. Die Spektroskopie von Quark-Antiquark-Systemen (‘Onia’) wird deshalb beim Charmonium besonders übersichtlich. Solange ein Charmonium-Zustand noch nicht in Teilchen mit ‘offenem’ Charm (zum Beispiel D-Mesonen mit einem  $c$ -Quark und einem leichten Quark, siehe weiter unten) zerfallen kann, sind ‘starke’ Zerfälle unterdrückt. Zwar ist es möglich, dass das  $c\bar{c}$ -Paar annihielt und leichte Quarks erzeugt werden, wie in dem Diagramm gezeigt wird,



aber diese “disconnected diagrams” sind so stark unterdrückt, dass elektromagnetische Prozesse konkurrenzfähig sind. Damit kommt die Lebensdauer beziehungsweise die Massenbreite in einen Bereich, der eher typisch für elektromagnetische Zerfälle ist. Dadurch werden unterhalb der Schwelle für offenen Charm radiative Übergänge

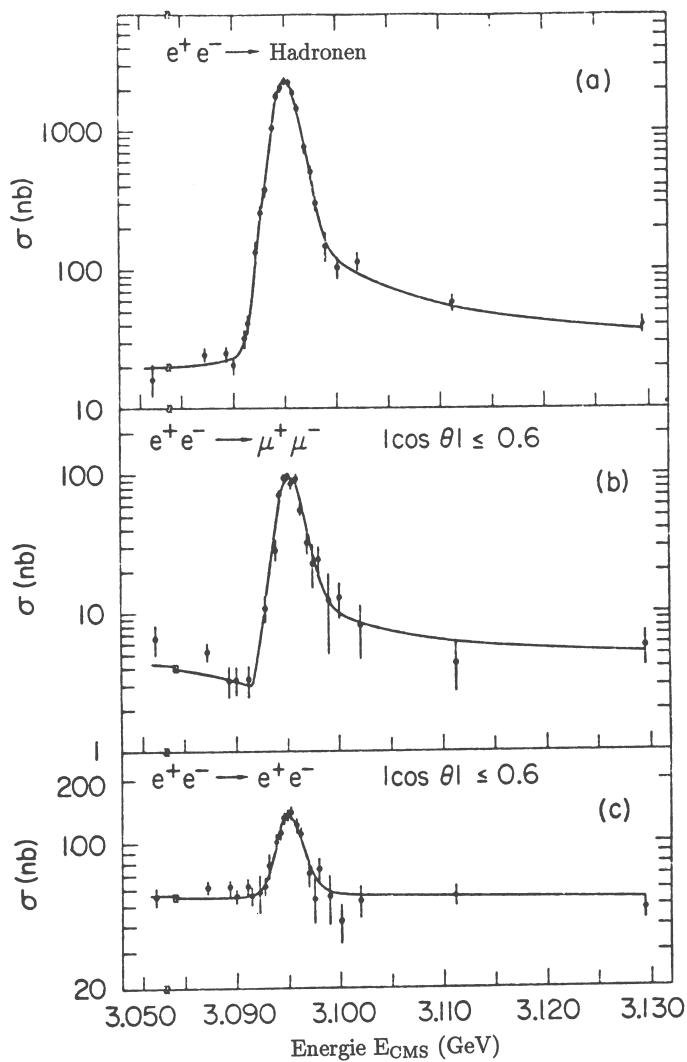


Abbildung 6.3: Elektron-Positron-Wirkungsquerschnitt im Bereich der  $J/\psi$ -Resonanz.

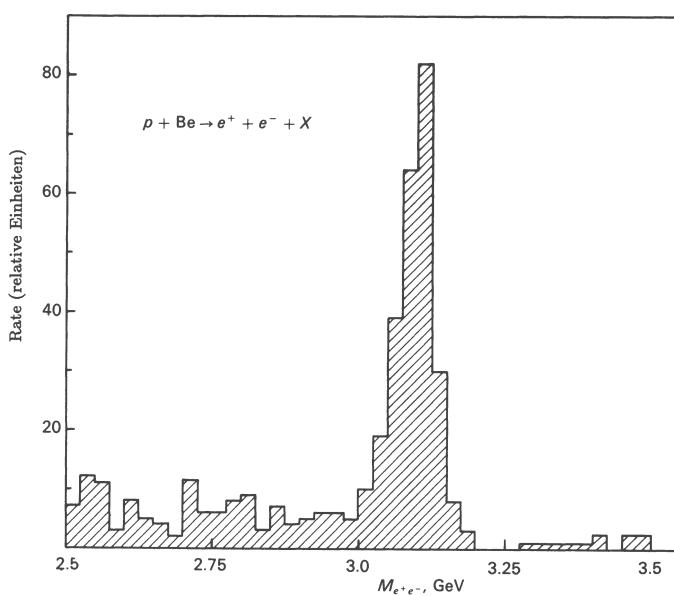


Abbildung 6.4: Entdeckung des  $J/\psi$  durch die Ting-Gruppe.

(Emission von Photonen) zwischen verschiedenen  $c\bar{c}$ -Anregungszuständen (Abb. 6.5) beobachtbar.

Das Studium der Charmonium-Spektroskopie hat zu wesentlichen Erkenntnissen über die QCD, die verantwortlich für die Quarkbindungen ist, geführt. Es zeigt sich, daß die QCD-Wechselwirkung durch ein Potential beschrieben werden kann, das einen Coulomb-artigen kurz-reichweitigen und einen lang-reichweitigen Term hat:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(M^2)}{r} + ar \quad (6.11)$$

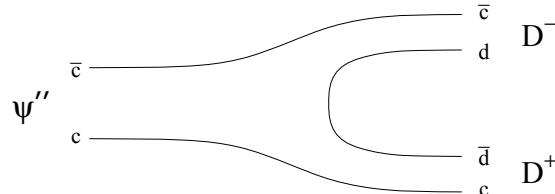
Die Skala für die Kopplungskonstante  $\alpha_s$  ist die Charmonium-Masse  $M$ . In Abbildung 6.6 wird die resultierende Farbkraft in Quarkonium-Systemen mit der elektromagnetischen Kraft verglichen.

### 6.1.4 Offener Charm

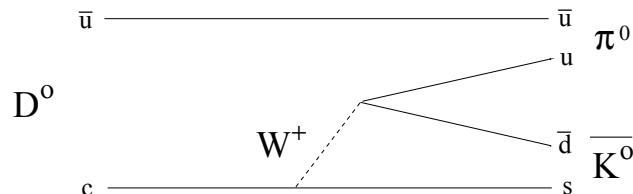
Die leichtesten Teilchen, die Charm besitzen, also mit  $C \neq 0$ , sind die D-Mesonen mit  $J^P = 0^-$  (wie die leichtesten Mesonen bei den anderen Flavours). Die Masse der D-Mesonen ist etwa 1865 MeV und damit ist die Schwelle für die assozierte Produktion von offenem Charm bei etwa 3730 MeV. Die zweite radiale Anregung des  $J/\psi$ , das  $\psi''(3770)$ , liegt oberhalb der Schwelle und zerfällt deshalb bevorzugt in  $D\bar{D}$ -Paare:

$$\begin{aligned} \psi'' &\rightarrow D^0 \bar{D}^0 \\ \psi'' &\rightarrow D^+ D^- \end{aligned}$$

Ein entsprechendes Quarkdiagramm sieht wie folgt aus:



Die leichtesten Hadronen mit Charm können nur schwach zerfallen, wobei das  $c$ -Quark bevorzugt in ein  $s$ -Quark übergeht ('Cabibbo-erlaubte' Zerfälle). Man erwartet also in Charm-Zerfällen bevorzugt die leichtesten Mesonen mit  $s$ -Quarks, also K-Mesonen, zum Beispiel:



Die drei leichten Quarks bilden zusammen mit dem Charm-Quark weitere Meson- und Baryonzustände. Als Beispiel sind die entsprechenden 16-plets für die pseudoskalaren und Vektormesonen in Abb. 6.7 gezeigt (aus Review of Particle Physics [34]). Die entsprechenden Multipletts müssen dreidimensional dargestellt werden, entsprechend den Quantenzahlen  $I_3$ ,  $S$  und  $C$ . Mit dem Einschluß des vierten Quarks erhält man allerdings keine höhere Symmetrie, weil die Masse des Charm-Quarks sehr hoch ist ( $\approx 1.5$  GeV).

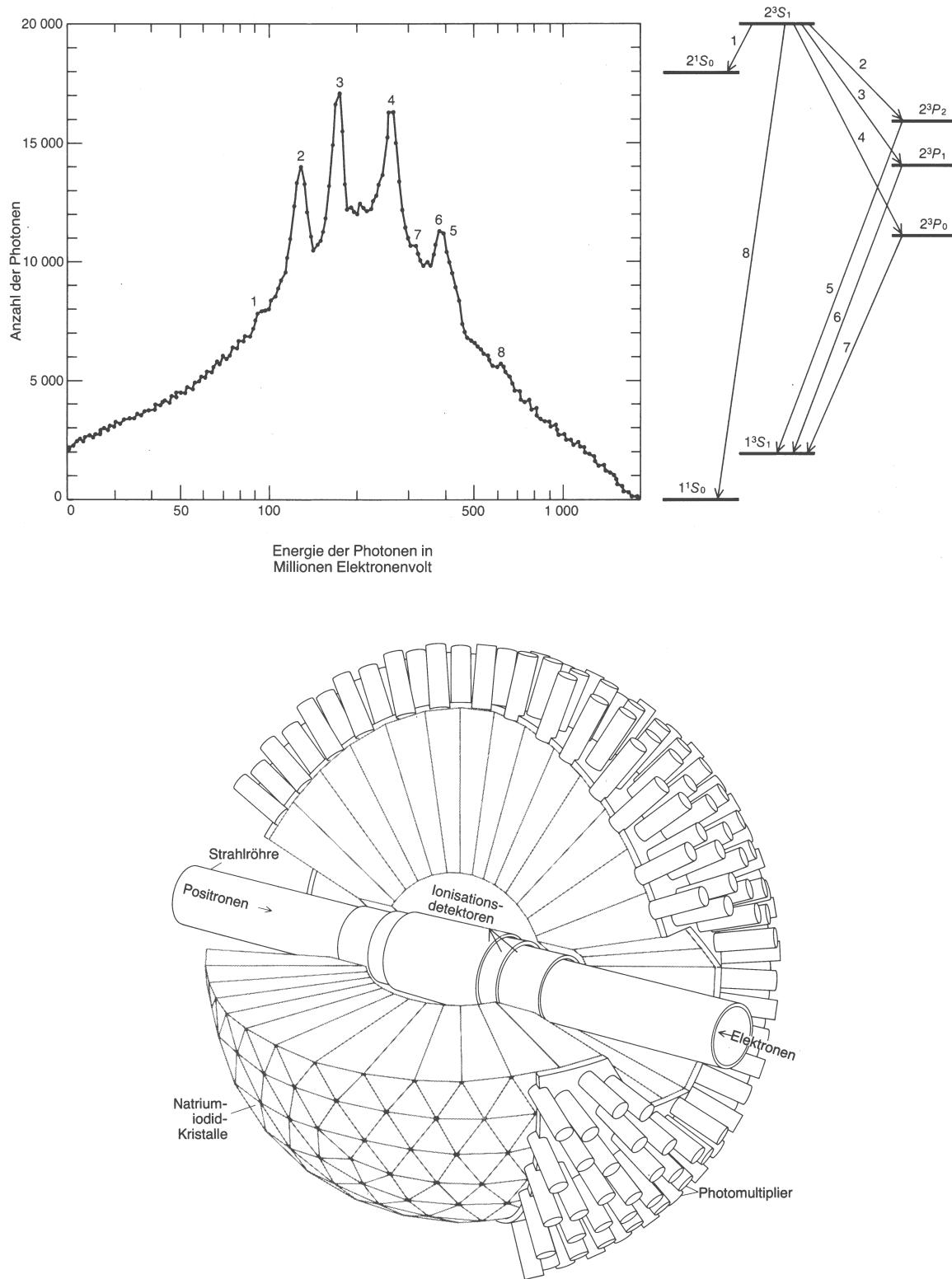


Abbildung 6.5: Photonenspektrum des Charmoniums, aufgenommen mit dem Chrysal Ball Detector (SPEAR). Der Crystal Ball Detector (Abbildung unten) besteht aus NaJ-Kristallen, die in dichter Packung den Wechselwirkungspunkt umgeben.

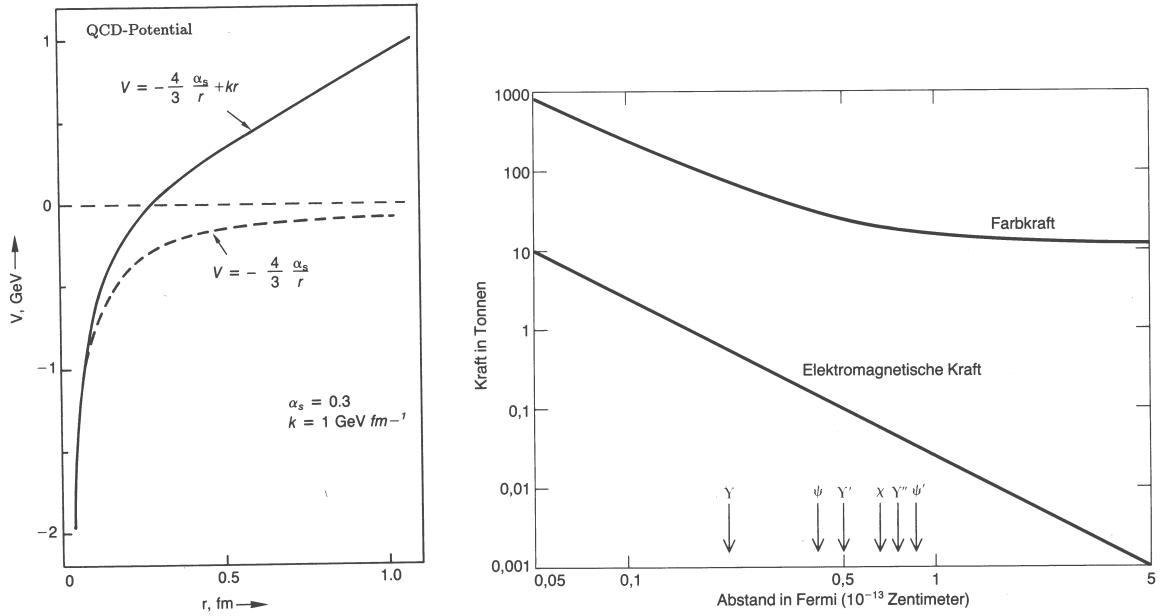


Abbildung 6.6: Links: Form des QCD-Potentials wie es sich aus der Analyse der Bindungszustände schwerer Quarks ergibt (coulomb-artiges Potential bei kleinen Abständen, linear anwachsendes Potential bei großen Abständen). Rechts: Vergleich der Farbkraft mit der elektromagnetische Kraft als Funktion des Abstandes der entsprechenden Elementarladungen. Eingezeichnet ist die Größe einiger  $c\bar{c}$ - und  $b\bar{b}$ -Zustände (aus Spektrum der Wissenschaft).

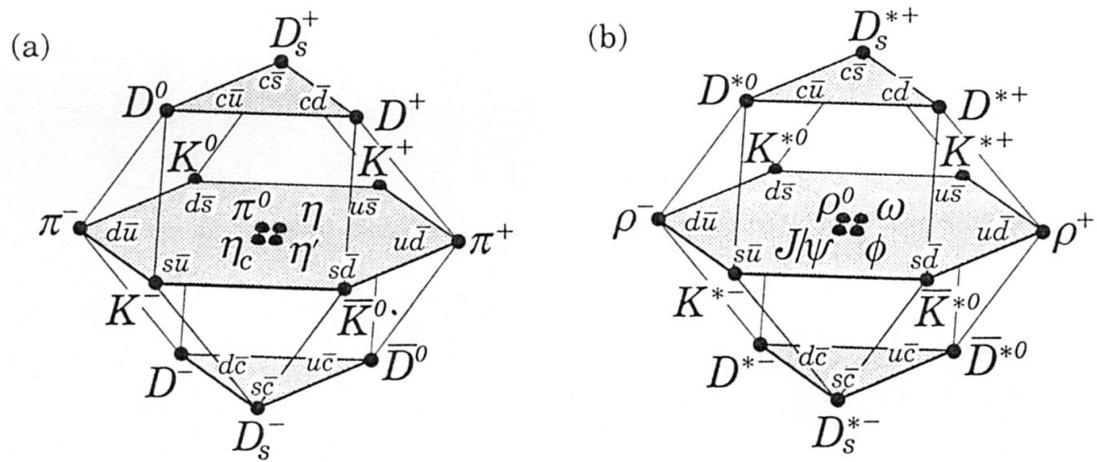


Abbildung 6.7: Multipletts der (a) pseudoskalaren und (b) Vektormesonen, die aus  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -,  $c$ -Quarks aufgebaut sind.

## 6.2 Die dritte Fermionen-Familie

### 6.2.1 Die Entdeckung des Tau-Leptons

Kurz nach der Entdeckung des Charm-Quarks wurde 1975 in  $e^+e^-$ -Kollisionen bei SPEAR das  $\tau$ -Lepton in der folgenden Reaktion (und der mit vertauschten Ladungen im Endzustand) entdeckt (Abb. 6.8):

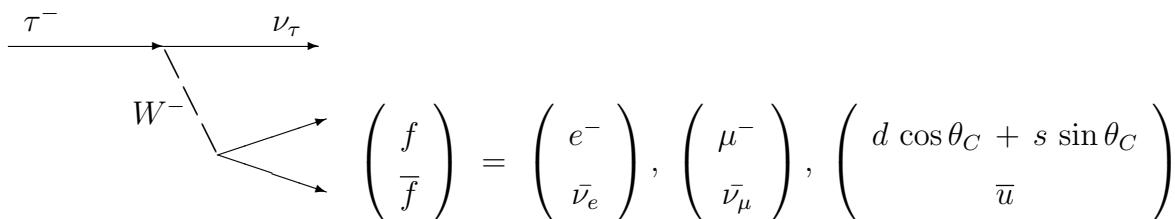
$$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^- \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau \quad \mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau \quad (6.12)$$

Die Beobachtung von 2 unterschiedlichen Leptonen ( $e^+\mu^-$ ) und eine Impuls-Energie-Bilanz, die auf fehlende Teilchen hinwies, war eine sehr klare Signatur, daß ein neues, schweres Lepton gefunden wurde (Masse: 1777 MeV, also etwa 3500 mal schwerer als das Elektron).

In der Folge haben umfangreiche Experimente gezeigt, daß das  $\tau$  mit seinem Neutrino ein ‘sequentielles’ Lepton ist, das heißt, es verhält sich genauso wie die leichteren Leptonen Elektron und Myon. Insbesondere gibt es eine eigene  $\tau$ -Lepton-Quantenzahl und die Universalität der schwachen Wechselwirkung gilt auch hier.

Aufgrund seiner relativ hohen Masse kann das  $\tau$ -Lepton auch in Hadronen über die drei leichtesten Quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  zerfallen. Die Endzustände bestehen dann aus Pionen und Kaonen. Ein typisches  $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$  – Ereignis ist in Abb. 6.9 links gezeigt: ein  $\tau$  zerfällt in 3 Pionen, das andere in ein Lepton (Elektron oder Myon). Eine solche ‘1-3-Topologie’ mit einem identifizierten Lepton kann sehr gut von 2-Jet-Ereignissen unterschieden werden.

Die Lepton-Universalität bedeutet, daß das  $\tau$ -Lepton über  $W$ -Austausch an die fundamentalen Fermionen-Dubletts mit universeller Stärke koppelt:



Universell ist nicht nur die Kopplungsstärke sondern auch die Kopplungsstruktur, die durch den  $W$ -Austausch vermittelt wird. Das  $W$ -Boson tritt sowohl als Vektor ( $J^P = 1^-$ ) als auch als Axialvektor ( $J^P = 1^+$ ) auf, im Gegensatz zum Photon, das nur als Vektor auftritt. Während wir also gesehen haben, daß das Photon bevorzugt in Vektorteilchen wie  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $J/\psi$ , ... übergeht (‘Vektor-Mesondominanz-Modell’, VDM), koppelt das  $W$  sowohl an Vektor- als auch an Axialvektorteilchen. So ist zum Beispiel das Massenspektrum von zwei Pionen im  $\tau$ -Zerfall von der  $\rho$ -Resonanz ( $J^P = 1^-$ ) und das Spektrum von drei Pionen von der  $a_1(1260)$ -Resonanz ( $J^P = 1^+$ ) dominiert (Abb. 6.9 rechts).

Das  $\tau$ -Lepton ist damit sozusagen der Einstieg in die dritte Fermionenfamilie gewesen und man erwartete die Entdeckung der entsprechenden Quarks ( $t$ ,  $b$ ) mit neuen Flavour-Quantenzahlen Bottom ( $Q = -1/3$ ) und Top ( $Q = 2/3$ ).

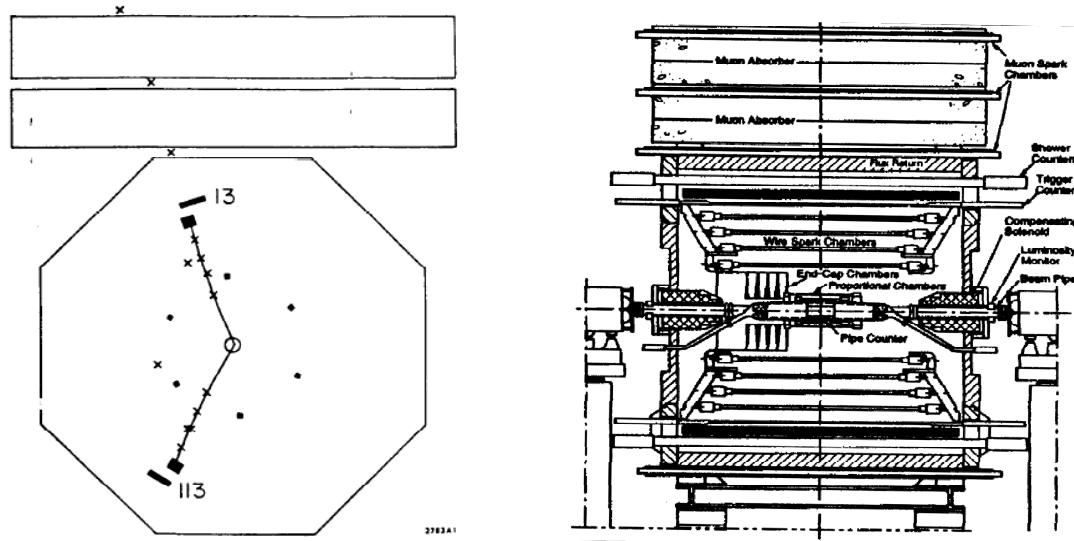


Abbildung 6.8: Links: Entdeckung des  $\tau$ -Leptons in  $e\mu$ -Ereignissen beobachtet mit dem Detektor Mark I am  $e^+e^-$ -Speicherring SPEAR. Rechts der Detektor Mark I.

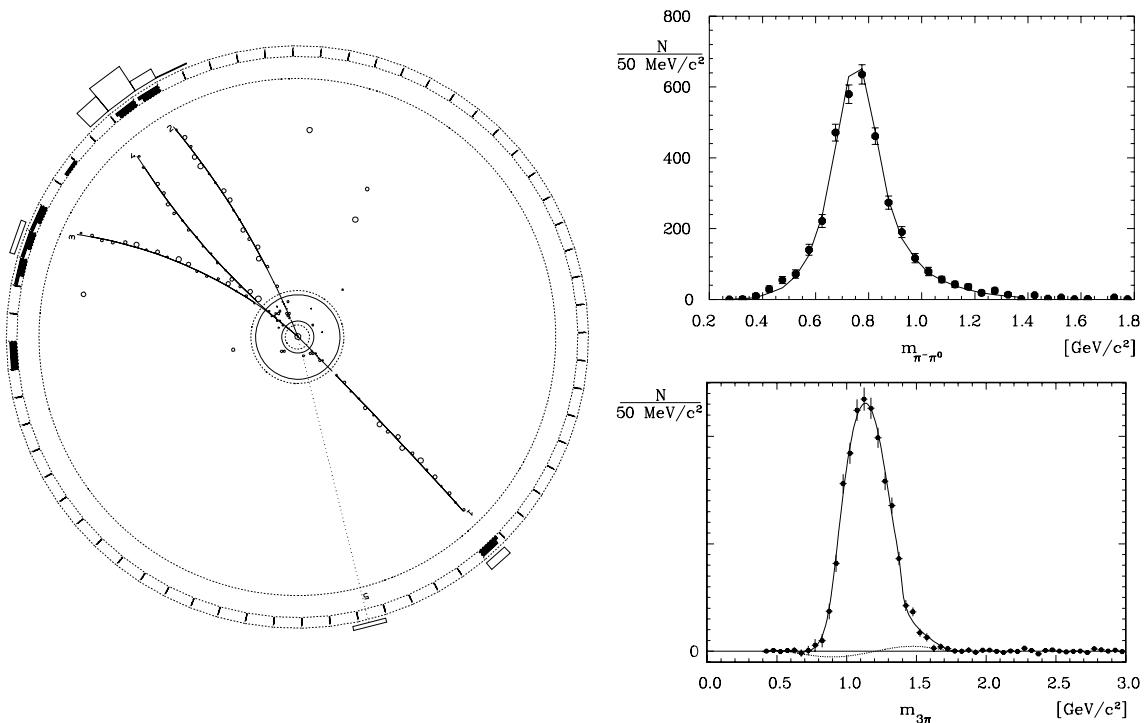


Abbildung 6.9: Ein typisches Ereignis  $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$  mit 1-3-Topologie (links) und Massenspektren von zwei und drei Pionen in  $\tau$ -Zerfällen  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$  und  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+\nu_\tau$  (rechts). Die Spektren werden sehr gut durch die theoretischen Kurven für die  $\rho$ - beziehungsweise  $a_1(1260)$ -Resonanz beschrieben (ARGUS-Experiment).

### 6.2.2 Bottom

Die Bottom-Flavour (auch Beauty genannt) ist 1977 am Fermi-Lab (USA) von L. Lederman et al. in ähnlicher Weise, wie S. Ting Charm gefunden hatte, entdeckt worden :

$$p + \text{Kern} \rightarrow \mu^+ \mu^- + X \quad (6.13)$$

In dem invarianten  $\mu^+ \mu^-$ -Massenspektrum wurden das Meson  $\Upsilon(1s)$ , der niedrigste  $b\bar{b}$  Vektorzustand, und höhere Zustände gesehen (Abb. 6.10). In der Folge wurde die Physik des Bottom-Quarks vor allem in  $e^+ e^-$ -Speicherringen (bei DESY: ARGUS-Experiment am Speicherring DORIS) studiert. Das Spektrum der Vektormesonzustände ist in Abb. 6.11 gezeigt.

Die vierte radiale Anregung,  $\Upsilon(4s)$ , liegt knapp über der Schwelle für die Produktion von Mesonpaaren mit offener Bottom-Flavour. Diese Resonanz zerfällt fast ausschließlich in die leichtesten (pseudoskalaren) Bottom-Mesonen:

$$\begin{aligned} \Upsilon(4s) &\rightarrow B^0 \bar{B}^0 \\ \Upsilon(4s) &\rightarrow B^+ B^- \end{aligned}$$

In den USA und in Japan werden sogenannte ‘B-Fabriken’ betrieben, das sind Elektron-Positron-Speicherringe, mit denen auf der  $\Upsilon(4s)$ -Resonanz  $B\bar{B}$ -Ereignisse erzeugt werden, um nach CP-Verletzung in Bottom-Systemen zu suchen.

Die  $B^0$ - und  $\bar{B}^0$ -Mesonen sind den neutralen Kaonen sehr ähnlich, insbesondere können auch die neutralen  $B$ -Mesonen ineinander übergehen. Oszillationen im  $B^0 \bar{B}^0$ -System sind von dem ARGUS-Experiment 1987 entdeckt worden (Abb. 6.12). Für die Messung der CP-Verletzung will man CP-Eigenzustände nutzen, in die sowohl das  $B^0$  als auch das  $\bar{B}^0$  zerfallen kann. Der sogenannte ‘goldene Kanal’ ist:

$$B^0 (\bar{B}^0) \rightarrow J/\psi K_s^0 \rightarrow l^+ l^- \pi^+ \pi^- \quad (6.14)$$

Das  $J/\psi$  zerfällt in ein Leptonpaar  $l^+ l^-$  und das  $K_s^0$  in ein Pionpaar. Wenn man die Bottom-Quantenzahl des assoziiert produzierten Beauty-Teilchens bestimmt und eine Asymmetrie in der Häufigkeit von  $b$  und  $\bar{b}$  feststellt, hat man CP-Verletzung beobachtet.

### 6.2.3 Top

Der Anstieg des Wirkungsquerschnittes für  $e^+ e^- \rightarrow$  Hadronen (Abb. 5.16) oberhalb der  $\Upsilon$ -Resonanzen ( $\Delta R = 1/3$ ) zeigt, daß der Betrag der Ladung des Bottom-Quarks  $1/3$  ist. Damit konnte man kaum noch daran zweifeln, daß es ein sechstes Quark mit einer neuen Flavour-Quantenzahl Top (oder Truth) und einer Ladung  $2/3$  gibt. Das Top-Quark  $t$  ist schließlich nach langem Suchen bei einer ursprünglich unerwartet hohen Masse von etwa 171 GeV (PDG-Review 2007) gefunden worden. Der einzige zur Zeit existierende Beschleuniger, mit dem diese Entdeckung möglich war, ist der  $p\bar{p}$ -Speicherring Tevatron im Fermi-Lab (1 TeV + 1 TeV, siehe Tab. 3.1).

In  $p\bar{p}$ -Reaktionen können  $t\bar{t}$ -Paare durch Quark-Antiquark-Anihilation oder Gluon-Fusion erzeugt werden (Abb. 6.13):

$$p\bar{p} \rightarrow t\bar{t} + X \quad (6.15)$$

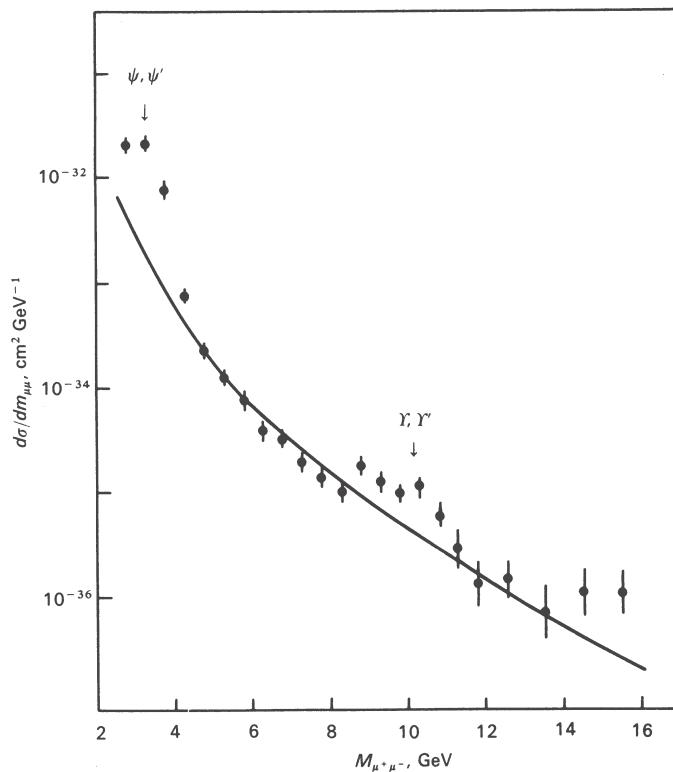


Abbildung 6.10: Entdeckung der  $\Upsilon$ -Resonanzen im Massenspektrum von Myon-Paaren, die in hochenergetischen Proton-Kern-Reaktionen erzeugt wurden.

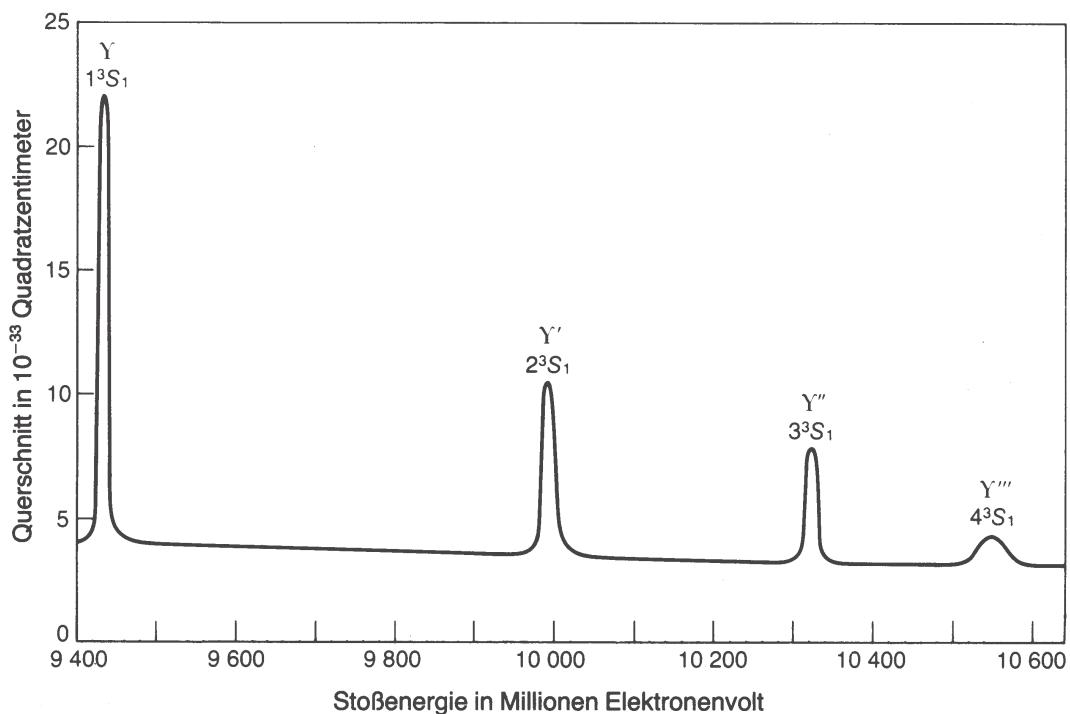


Abbildung 6.11: Der Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen im Bereich der  $\Upsilon$ -Resonanzen.

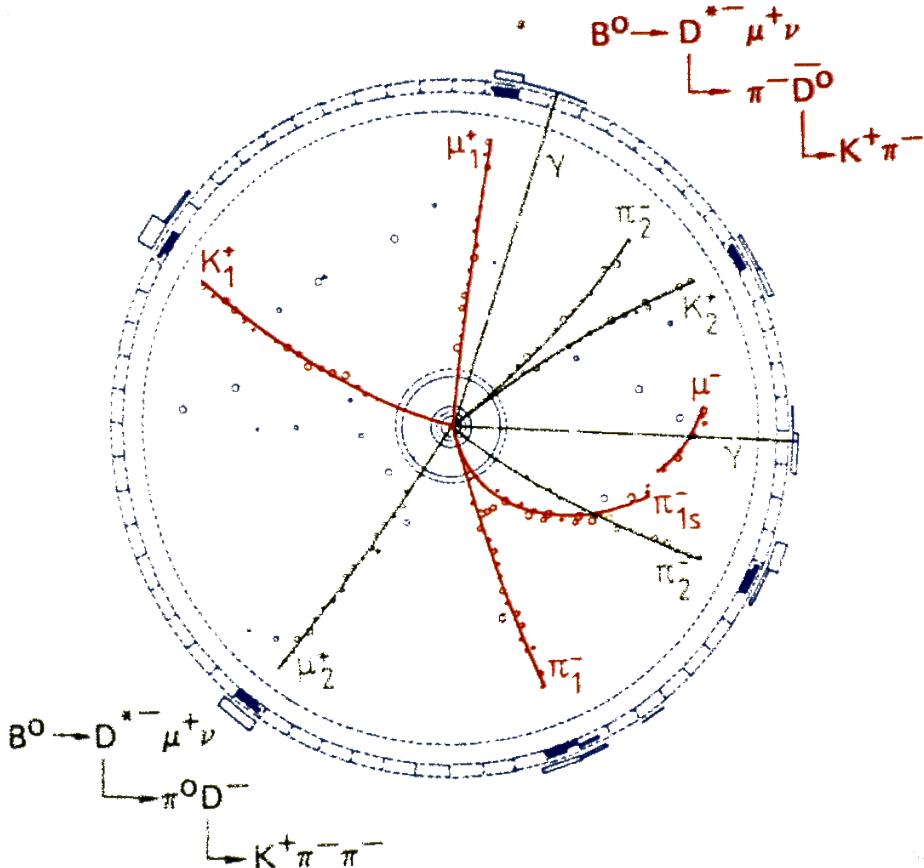
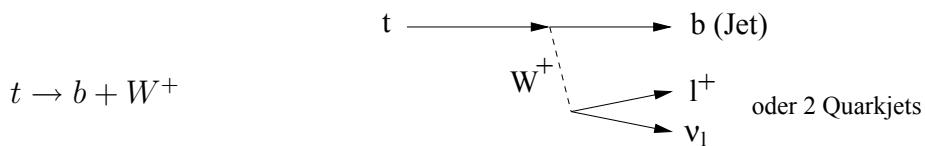


Abbildung 6.12: Ein vollständig rekonstruiertes Ereignis mit zwei  $B^0$ -Mesonen im Zerfall eines  $\Upsilon(4s)$ -Zustandes, der ursprünglich in  $B^0\bar{B}^0$  zerfallen ist (starke Wechselwirkung). Dies ist ein eindeutiger Nachweis der Umwandlung eines  $\bar{B}^0$  in eine  $B^0$  und damit für Oszillationen im  $B^0\bar{B}^0$ -System.

Ein Top-Quark geht bevorzugt durch Emission eines reellen W-Bosons in ein Bottom-Quark über:



Das b-Quark wird als Jet beobachtet, und das W-Boson zerfällt in ein Leptonpaar oder in zwei Quarkjets. Die Abb. 6.14 und 6.15 zeigen mögliche  $t\bar{t}$ -Ereignisse,  $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t} + X$ , die mit dem CDF-Detektor am Tevatron beobachtet wurden. In den ‘Lego-Plots’ wie in Abb. 6.14 trägt man die ‘transversale Energie’  $E_T$  (entsprechend der Impulskomponente senkrecht zum Strahl) gegen die Pseudorapidität  $\eta$  und den Azimuthwinkel  $\phi$  auf. Die Pseudorapidität ist ein Maß für den Polarwinkel des Teilchens (Winkel zwischen Teilchenimpuls und z-Richtung) und ist definiert durch:

$$\eta = -\ln \tan \theta/2 \quad (6.16)$$

Am LHC mit zweimal 7 TeV Strahlenergie erwartet man sehr viel größere Produktionsraten von Top-Quarks (etwa 1 Ereignis pro Sekunde). Damit wird eine

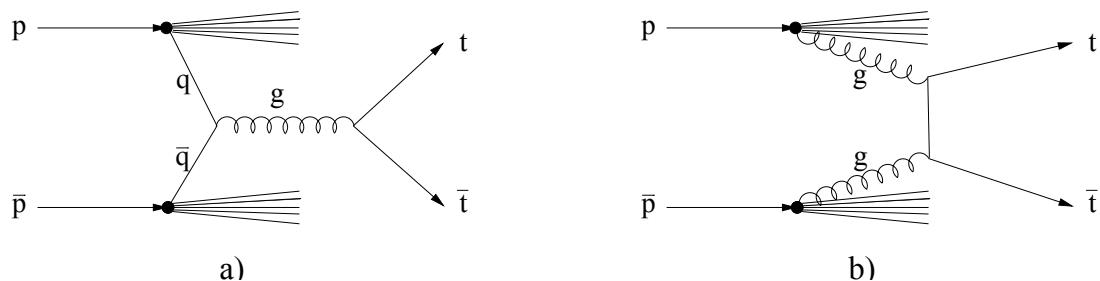


Abbildung 6.13: Produktion eines  $t\bar{t}$ -Paars durch a)  $q\bar{q}$ -Annihilation und b) Gluon-Fusion.

Verbesserung der Massenbestimmung und eine detaillierte Untersuchung der Eigenschaften der Top-Produktion möglich. Außerdem wird das Top-Signal zur Kalibration und als Referenzsignal (zum Beispiel für  $W$ -Boson-Produktion) benutzt werden können.

#### 6.2.4 Überblick über die drei Fermionen-Familien

Mit dem Top-Quark ist die dritte Fermion-Familie ebenfalls vollständig. Alle Fermionen der drei Familien hatten wir bereits in Tabelle 2.1 aufgelistet. Alle experimentellen Ergebnisse sind konsistent damit, daß diese Fermionen elementare, punktförmige Dirac-Teilchen (Spin 1/2) sind. Punktformigkeit bedeutet, daß auf der Skala  $10^{-18}$  m keine Struktur gefunden wurde.

Den Quarks ordnen wir folgende Quantenzahlen zu:

Flavour	Masse/MeV	$Q$	$B$	$I$	$I_3$	$S$	$C$	$B'$	$T$
$u$	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$d$	7	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$s$	120	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	0
$c$	1500	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	1	0	0
$b$	5000	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	0
$t$	171000	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	1
$\bar{q}$	$m_q = m_{\bar{q}}$	$-Q$	$-B$	$I$	$-I_3$	$-S$	$-C$	$-B'$	$-T$

( $Q$  = Ladung,  $B$  = Baryonzahl,  $I$ ,  $I_3$  = Isospin,  $S$  = Strangeness,  $C$  = Charm,  $B'$  = Beauty,  $T$  = Truth). Die Ladung ist durch die verallgemeinerte Gell-Mann–Nishijima–Gleichung festgelegt:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S + C + B' + T) \quad (6.18)$$

Es ist wahrscheinlich, daß es auch nicht mehr als drei Fermionen-Familien gibt.

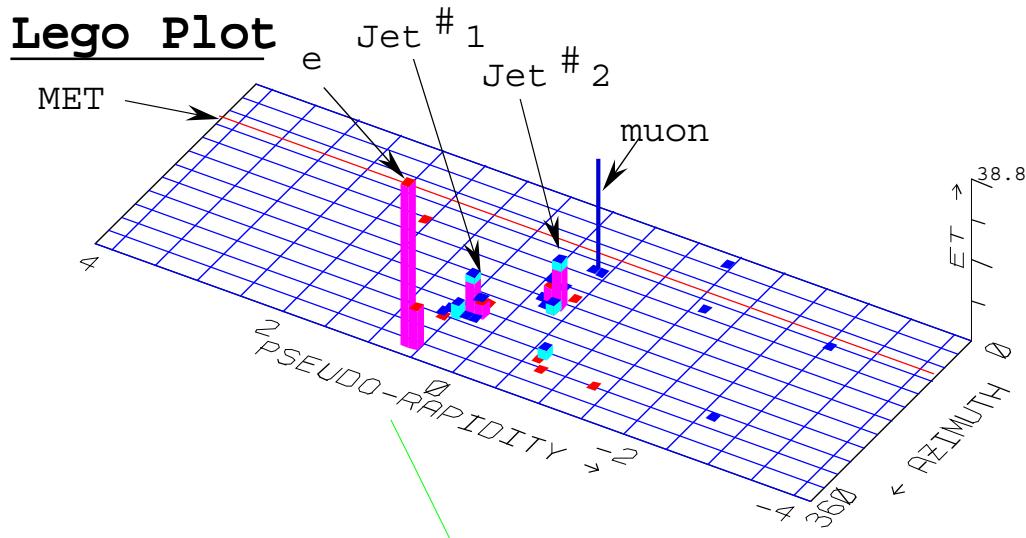


Abbildung 6.14: Kandidat für ein  $t\bar{t}$ -Ereignis, das in dem CDF-Detektor beobachtet wurde. Die ‘transversale Energie’  $E_T$  ist in der durch die Pseudorapidität und den Azimuthwinkel aufgespannte Ebene in einem ‘Lego-Plot’ dargestellt. Die Top-Quarks zerfallen jeweils in einen  $b$ -Quarkjet und ein  $W$ -Boson, die beide leptonisch zerfallen (ein  $W$  in ein Elektron, das andere in ein Myon):  
 $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t} + X \rightarrow b\bar{b} + W^+W^- + X \rightarrow 2 \text{ Jets} + 2 \text{ Leptonen} + X'$

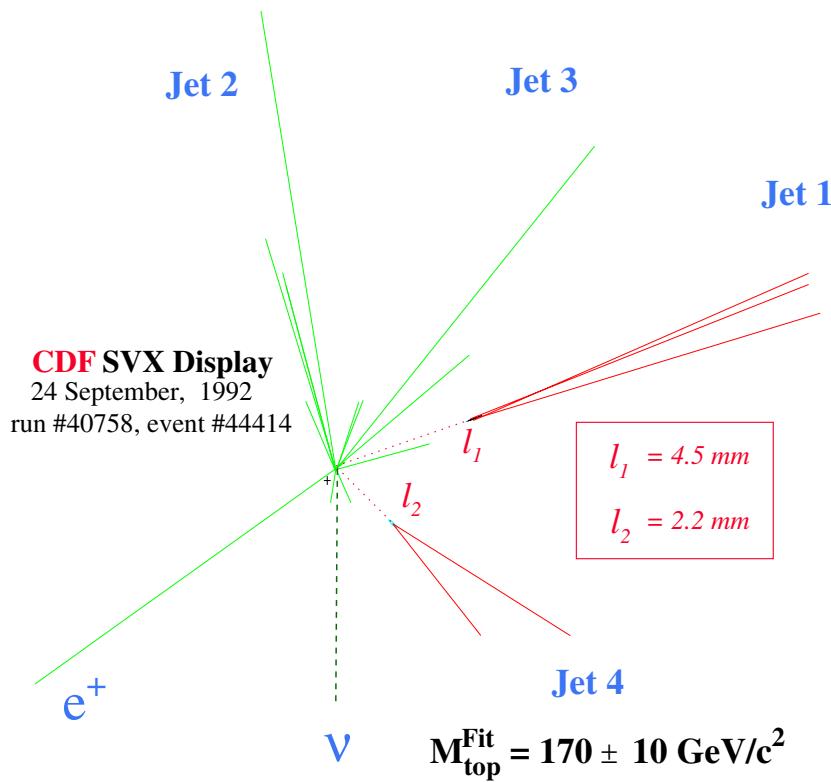


Abbildung 6.15: Kandidat für ein  $t\bar{t}$ -Ereignis, bei dem man klar die Sekundärvertices der Bottom-Teilchen sieht (das erste identifizierte Top-Ereignis von CDF).

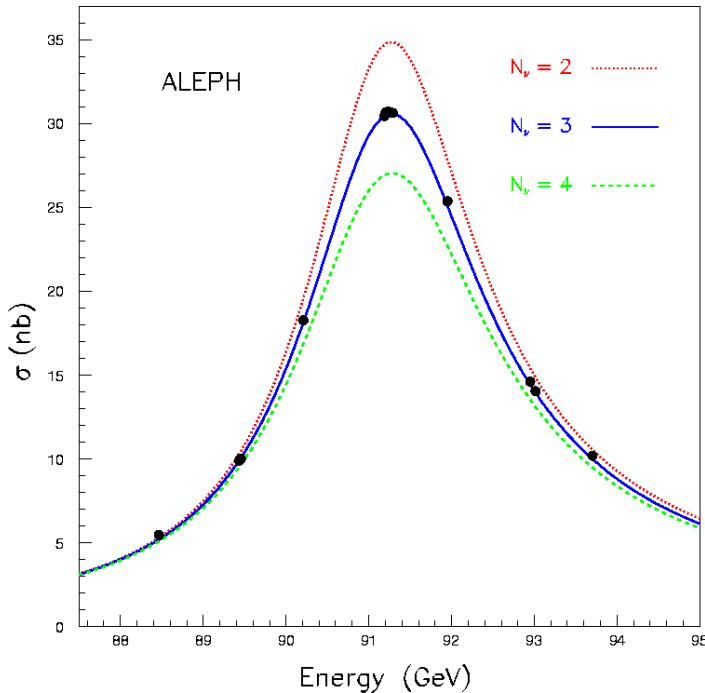


Abbildung 6.16: Der Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen im Bereich der  $Z^0$ -Resonanz. Eingezeichnet sind die Erwartungen für 2, 3, 4 Sorten leichter Neutrinos. Die Messungen ergeben eindeutig, daß es nur drei Sorten gibt.

Der stärkste Hinweis kommt von dem Zerfall des Z-Bosons in Neutrinos ('unsichtbare' Zerfallskanäle):

$$Z^0 \rightarrow \nu_i \bar{\nu}_i$$

Die gemessene Zerfallsbreite ist konsistent mit drei Arten leichter Neutrinos (LEP:  $n_\nu = 2.993 \pm 0.011$ , Abb. 6.16). Von Experimenten, die direkt die Masse der Neutrinos messen, gibt es bisher keine Hinweise auf massive Neutrinos, sondern nur Ausschließungsgrenzen. Kosmologische Modelle haben Probleme mit sehr schweren Neutrinos, weil es dann zuviel 'dunkle Materie' geben würde. In der folgenden Tabelle sind die Massen der geladenen Leptonen und die experimentellen Grenzen für die Massen der Neutrinos aufgeführt:

Lepton	$e$	$\mu$	$\tau$	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
Masse [MeV]	0.511	105.66	1777	$< 3 \cdot 10^{-6}$	$< 0.19$	$< 18.2$

Im Standardmodell sind die Neutrinos masselos. Danach hat, wie bereits in Abschnitt 4.1 ausgeführt, jede Familie eine eigene, absolut erhaltene Leptonquantenzahl. Falls die Neutrinomassen doch endlich sind, könnte auch die Leptonzahl-Symmetrie gebrochen sein, was zum Beispiel zu Oszillationen zwischen den Neutrino-Sorten führen könnte. Tatsächlich sind solche Oszillationen bei atmosphärischen Neutrinos und Neutrinos von der Sonne beobachtete worden.

### 6.2.5 Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix

Bei Quarks gibt es keine absolute Erhaltungszahl innerhalb einer Familie, die schwache Wechselwirkung vermittelt Übergänge zwischen den Familien. Wir hatten bereits gesehen, daß die möglichen Übergänge zwischen den ersten beiden Familien durch eine orthogonale Mischung der 1/3-ladigen Quarks beschrieben werden kann:

$$M \sim (u \ c) \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = u d \cdot \cos \theta_c + \dots \quad (6.19)$$

Die Mischungsmatrix ist in diesem Fall rein reell und durch nur einen Parameter, den Cabibbo-Winkel, gegeben. Im allgemeinen kann die Matrix komplex sein, die Orthogonalität der Matrix ist dann durch die Unitarität zu ersetzen ( $M \cdot M^T = 1 \rightarrow M \cdot M^{T*} = 1$ ). Im Falle von nur zwei Familien können aber die Matrixelemente reell gemacht werden durch Umdefinition der nicht meßbaren Phasen der Quarkwellenfunktionen:

$$|q> \rightarrow |q> \cdot e^{i\phi} \quad (6.20)$$

Die Erweiterung auf drei Familien ist von Kobayashi und Maskawa vorgeschlagen worden:

$$M \sim (u \ c \ t) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Hier gibt zum Beispiel  $V_{us}$  die relative Stärke des Überganges  $s \rightarrow u$  an (daraus folgt:  $V_{us} \approx \sin \theta_c$ ). Die Diagonalelemente sind alle nahe 1, das bedeutet, die Übergänge innerhalb der eigenen Familie sind bevorzugt.

Unter der Voraussetzung der Unitarität hat die Mischungsmatrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, CKM-Matrix) für den Fall von drei Familien vier Parameter: drei Winkel (= Eulerwinkel) und eine Phase. Wenn die Phase ungleich Null ist, die Matrix also komplex ist, kann durch die Quarkmischung CP-Verletzung auftreten. Für Antiteilchen gilt die konjugiert komplexe CKM-Matrix, was eine Phasendifferenz zwischen Teilchen- und Antiteilchenreaktionen bewirkt und damit zu CP-Verletzung führen kann.

Eine wichtige Forschungsrichtung ist zur Zeit die Präzisionsbestimmung der CKM-Matrixelemente und die Überprüfung, ob die Matrix wirklich unitär ist (was auch ein Hinweis auf nur drei Familien wäre). Wenn die CP-Verletzung im  $K$ -System durch die komplexe Phase der CKM-Matrix erklärt werden kann, ergeben sich daraus Vorhersagen für das Auftreten von CP-verletzenden Zerfällen in  $B$ -Systemen. Wie bereits erwähnt, ist diese CP-Verletzung inzwischen tatsächlich gefunden worden.

Die Unitarität der CKM-Matrix bedeutet:

$$\sum_i V_{ij} V_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{und} \quad \sum_j V_{ij} V_{kj} = \delta_{ik} \quad (6.22)$$

Die Relationen, die Null ergeben, definieren ein Dreieck ('Unitaritätsdreieck') in der komplexen Ebene. Voraussetzung für CP-Verletzung ist eine nicht-verschwindende

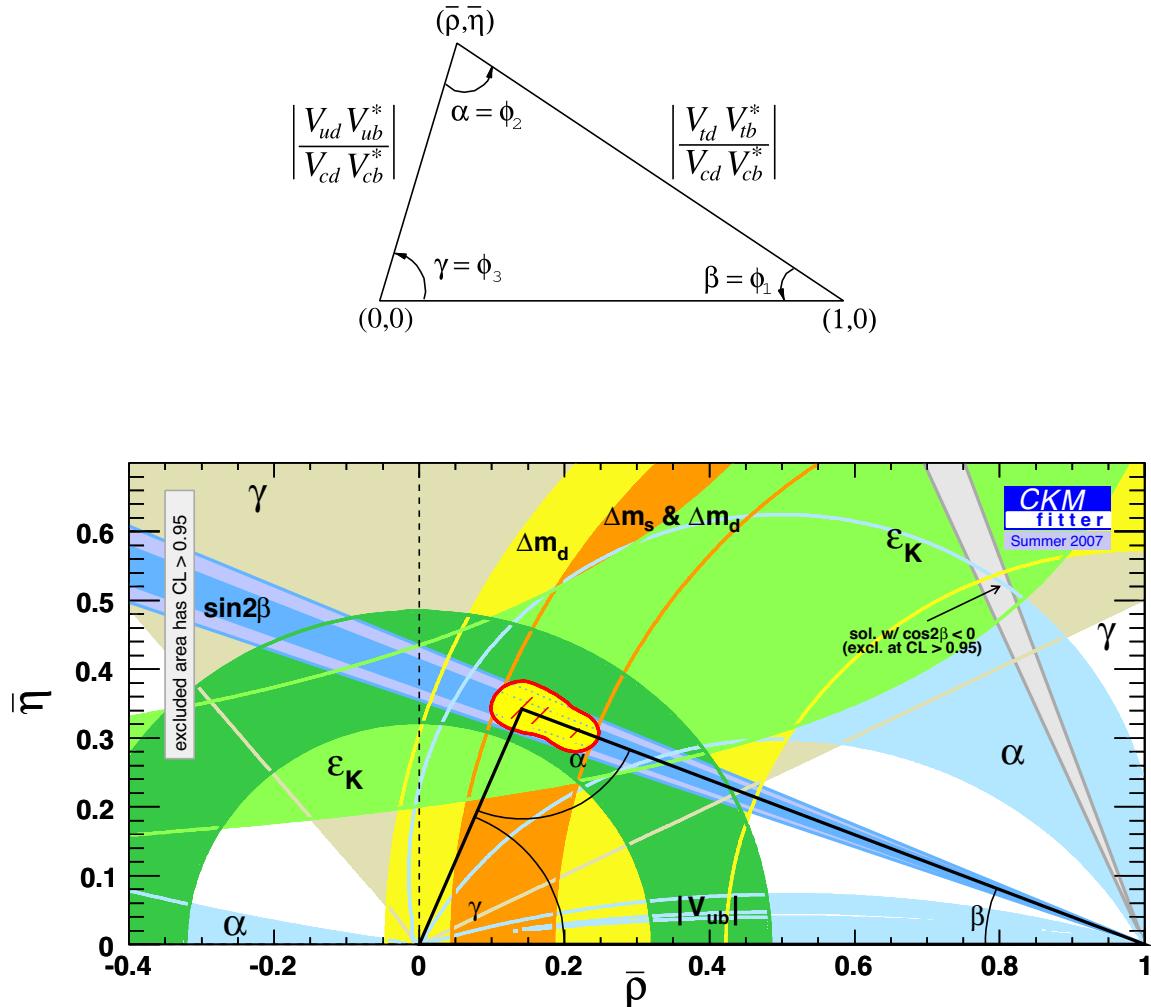


Abbildung 6.17: Oben: Darstellung eines der Unitaritätsdreiecke. Unten: Die experimentelle Bestimmung der Seiten und Winkel des obigen Dreiecks, die alle konsistent sind und damit die Unitarität der CKM-Matrix bestätigen (von <http://www.slac.stanford.edu/xorg/ckmfitter>). Die endliche Fläche, die durch die Lage der Dreieckspitze oberhalb der reellen Achse gegeben ist, wird durch CP-verletzende Prozesse festgelegt.

komplexe Phase, die zu nicht-verschwindenden Flächen der Unitaritätsdreiecke führen. Am häufigsten wird die Relation

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (6.23)$$

betrachtet, weil die experimentellen Werte ähnliche Seitenlängen ergeben (Abb. 6.17 oben). Durch viele Experimente sind Seiten und Winkel dieses Dreiecks redundant gemessen worden. In Abb. 6.17 unten wird dargestellt, dass alle Messungen konsistent sind und die Unitarität der CKM-Matrix mit großer Genauigkeit bestätigen. Von den Winkeln ist  $\beta$  am genauesten, und zwar über die CP-Verletzung im  $B^0 \bar{B}^0$ -System in dem ‘golden Kanal’ (6.14), gemessen worden.

Die Resultate für die Beträge CKM-Matrixelemente waren im Sommer 2007:

$$|V_{CKM}| = \begin{pmatrix} 0.97383^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.2272^{+0.0010}_{-0.0010} & (3.96^{+0.09}_{-0.09}) \cdot 10^{-3} \\ 0.2271^{+0.0010}_{-0.0010} & 0.97296^{+0.00024}_{-0.00024} & (42.21^{+0.10}_{-0.80}) \cdot 10^{-3} \\ (8.14^{+0.32}_{-0.64}) \cdot 10^{-3} & (41.61^{+0.12}_{-0.78}) \cdot 10^{-3} & 0.999100^{+0.000034}_{-0.000004} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Man sieht, dass die Werte auf der Diagonale alle sehr nahe bei 1 sind und mit der Entfernung von der Diagonalen immer kleiner werden. Das bedeutet, dass die schwache Kopplung der Quarks am stärksten innerhalb einer Familie sind, und am schwächsten zwischen den entferntesten, der ersten und dritten, ist.

# Kapitel 7

## Elektromagnetische Struktur der Hadronen

### 7.1 Elastische Elektron-Nukleon-Streuung

In den fünfziger Jahren führten R. Hofstadter et al. in Stanford erstmalig Experimente durch, um durch Streuung von Elektronen an Nukleonen und Kernen die Struktur der Targetteilchen zu untersuchen. Das Prinzip entspricht den Streuexperimenten von Rutherford, wobei Hofstadter allerdings Elektronen statt  $\alpha$ -Teilchen als Sonden benutzte. Elektronen sind zum Abtasten der elektromagnetischen Struktur besonders geeignet, weil sie keine oder nur eine sehr kleine Ausdehnung haben und nur elektromagnetisch wechselwirken. Im folgenden beziehen wir uns auf die Streuung an Protonen. Die Experimente sind aber auch an Kernen gemacht worden, insbesondere auch Deuterium, womit die Struktur des Neutrons bestimmt werden kann.

#### 7.1.1 Kinematik der elastischen Elektron-Proton-Streuung

Die elastische Elektron-Proton-Streuung ist ein elektromagnetischer Prozess, der in guter Näherung durch den Austausch eines Photons beschrieben wird. In dem Graphen in Abb. 7.1 sind die Vierervektoren  $k$  und  $k'$  des einlaufenden bzw. auslaufenden Elektrons und  $p$  des einlaufenden Protons eingetragen. Im Laborsystem

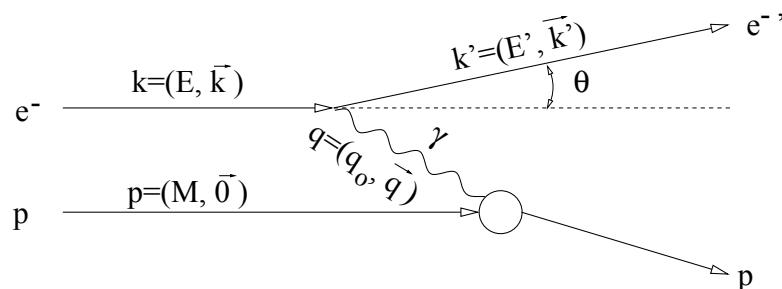


Abbildung 7.1: Kinematik der elastischen Elektron-Proton-Streuung in 1-Photonen-Näherung.

soll das Proton mit der Masse  $M$  im Target ( $H_2$ -Target) ruhen,  $p = (M, \vec{0})$ , und die Energien und der Streuwinkel des Elektrons sei  $(E, E', \theta)$ .

Die räumliche Auflösung hängt von dem Impulsübertrag ab, lorentz-invariant bezieht man sich auf den Viererimpulsübertrag  $q$ , der gleichzeitig der Viererimpuls des ausgetauschten Photons ist:

$$q^2 = (k - k')^2 = k^2 + k'^2 - 2 k k' = -4 E E' \sin^2 \theta / 2 \quad (7.1)$$

Für die rechte Seite wurde  $m_e^2 = k^2 = k'^2 \approx 0$  benutzt; sie gilt auch in Systemen mit bewegtem Proton wie zum Beispiel bei HERA. Das Quadrat des Viereimpulsübertrages  $q^2$  (= Quadrat der ‘Masse’ des virtuellen Photons) ist negativ (raumartig). Man benutzt häufig auch  $Q^2 = -q^2 > 0$  als Variable.

Wir betrachten im folgenden sogenannte ‘Einarm-Messungen’, bei denen nur das Elektron nachgewiesen wird. In dem allgemeinen Fall hängt dann der Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Nukleon-Streuung von drei Variablen ab. Häufig wird

$$(E, E', \theta)$$

benutzt. Wenn man noch die invariante Masse  $W$  des Proton-Photon-Systems definiert:

$$W^2 = (p + q)^2 \quad (7.2)$$

kann man zum Beispiel auch die Kombination

$$(W, q^2, \theta)$$

wählen. Die elastische Streuung zeichnet sich dadurch aus, daß das auslaufende hadronische System wieder ein Proton mit Masse  $M$  ist:

$$W^2 = (p + q)^2 = p'^2 = M^2 \quad (7.3)$$

Damit hat die elastische Streuung nur noch zwei Freiheitsgrade und man kann als Variablen zum Beispiel  $E, \theta$  benutzen.

### 7.1.2 Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt und Formfaktoren

Für die elastische Streuung an einem punktförmigen, spinlosen, unendlich schwerem Teilchen ( $\Rightarrow E = E'$ ) gilt die Rutherford-Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 E^2 \alpha^2}{q^4} = \frac{\alpha^2}{4 E^2 \sin^4 \theta / 2} \quad (7.4)$$

Bei endlicher Targetmasse ergibt sich durch den Rückstoß ein zusätzlicher Faktor  $E'/E$  auf der rechten Seite:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 E'^2 \alpha^2 E'}{q^4 E} = \frac{\alpha^2}{4 E^2 \sin^4 \theta / 2} \frac{E'}{E} \quad (7.5)$$

Der Faktor  $1/q^4$  ist das Quadrat des Photon-Propagators  $1/q^2$ , der in der Berechnung eines Feynman-Diagrams für eine interne Photonlinie steht (wie in Abb. 7.1).

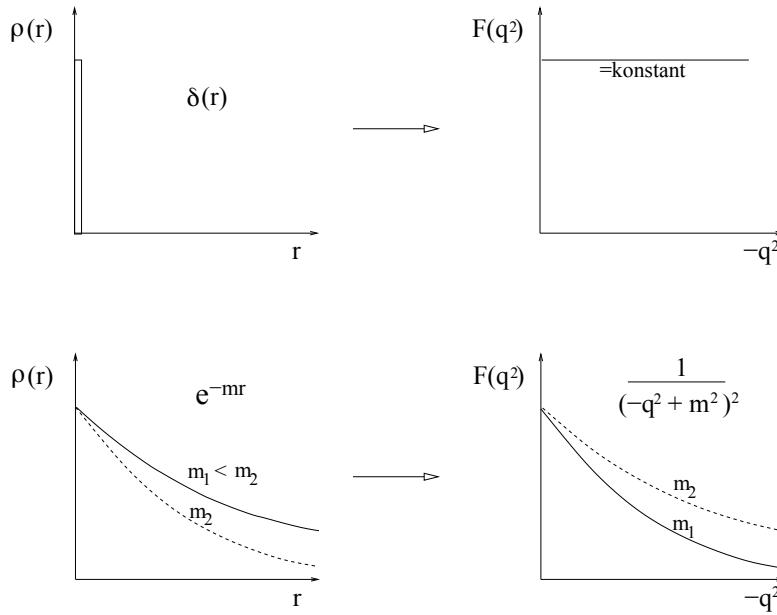


Abbildung 7.2: Beispiele für Ladungsverteilungen und korrespondierende Formfaktoren.

Allgemein tritt in der Berechnung des Beitrages eines Feynman-Diagramms zu einem Streumatrixelement für jede innere Linie eines Teilchens mit der Masse  $m$  ein Faktor

$$\frac{1}{m^2 - q^2}, \quad (7.6)$$

der Propagator des Teilchens, auf. Für  $q^2 = m^2$ , entsprechend einem reellen Teilchen, wird der Propagator unendlich (was durch eine endliche Lebensdauer des Teilchens gedämpft wird: dann wird aus dem Propagator eine Breit-Wigner-Amplitude  $(m^2 - q^2 - im\Gamma)^{-1}$ ). Der Propagator  $1/q^2$  für das masselose Photon ist die Fourier-Transformierte des  $1/r$ -Potentials, dessen unendliche Reichweite sich in der Divergenz des Wirkungsquerschnittes bei  $q^2 = 0$  (entsprechend  $\theta = 0$ ) ausdrückt. Tatsächlich wird die Reichweite durch eine Abschirmung aufgrund der umgebenden Materie, die durch die Ladung polarisiert wird, begrenzt.

Geht man von der punktförmigen zu einer ausgedehnten Ladungsverteilung über, im nicht-relativistischen Fall:

$$\begin{aligned} e \delta(\vec{r}) &\longrightarrow e \rho(\vec{r}), \\ V(r) = \frac{\alpha}{r} &\longrightarrow \alpha \int \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3 \vec{R}, \end{aligned}$$

dann wird der Wirkungsquerschnitt durch einen sogenannten Formfaktor  $F(q^2)$  modifiziert:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Punkt} \cdot |F(q^2)|^2 \quad (7.7)$$

Der Formfaktor ist die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung, im nicht-relativistischen Fall oder in dem speziellen System, in dem  $q_0 = 0$  ist ergibt sich:

$$F(q^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i \vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \quad (7.8)$$

Durch Messung der  $q^2$ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes kann man so durch eine Rücktransformation auf die Ladungsverteilung schließen. In Abb. 7.2 sind folgende Beispiele gezeigt:

$\rho(r)$	$F(q^2)$
$\delta(r)$	konst.
$e^{-mr}$	$\sim \frac{1}{(-q^2+m^2)^2}$

Eine punktförmige Ladungsverteilung führt zu einem konstanten,  $q^2$ -unabhängigen Formfaktor ('harte Streuung'). Mit dem Ansatz  $\rho(r) = e^{-mr}$  lassen sich verschieden harte Ladungsverteilungen erzeugen:

$m$	Abfall von $\rho(r)$	Abfall von $F(q^2)$
hart	groß	schnell
weich	klein	langsam

### 7.1.3 Rosenbluth-Wirkungsquerschnitt

**Streuung eines Elektrons an einem Dirac-Proton:** Betrachtet man die elastische Streuung eines Elektrons mit Spin 1/2 an einem Dirac-Proton, das ist ein punktförmiges Proton mit Spin 1/2, so wird der Rutherford-Wirkungsquerschnitt durch eine weitere Winkelabhängigkeit modifiziert:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Dirac}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{-q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7.9)$$

Der Term mit  $\sin^2 \frac{\theta}{2}$  entspricht einem Umklappen des Protonspins, bei dem  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ -Term bleibt der Spin unverändert. Diese Terme kann man wie folgt verstehen: In einem elektromagnetischen Streuprozess bleibt für relativistische Teilchen (Masse  $\ll$  Energie) die Helizität erhalten, das heißt, die Spinkomponente in Impulsrichtung ist im Anfangs- und Endzustand die gleiche:

$$\left\langle \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{|\vec{p}'|} \right\rangle \quad (7.10)$$

Das Elektron laufe auf das Proton in  $z$ -Richtung zu (siehe Abb. 7.3), das auslauende Elektron wird unter dem Winkel  $\theta$  in die Richtung  $z'$  gestreut, in Bezug auf die Einfallsrichtung kann kein Bahndrehimpuls auftreten,  $L_z = 0$ . Wenn sich der Spin des Protons nicht ändert, ist der Spin des auslaufenden Elektrons bezogen auf die  $z$ -Richtung gleich dem Spin des einlaufenden Elektrons bezogen auf die gleiche Richtung:

$$s'_z = s_z \quad (7.11)$$

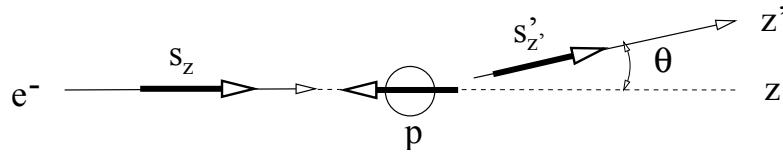


Abbildung 7.3: Beispiel für eine Konstellation von Impulsen (dünne Pfeile) und Spins (dicke Pfeile) in der Elektron-Proton-Streuung.

Wenn der Proton-Spin in bezug auf die  $z$ -Richtung umklappt ('Spin-Flip'), muß sich auch der Spin des auslaufenden Elektrons in  $z$ -Richtung umkehren:

$$s'_z = -s_z \quad (7.12)$$

Wegen Helizitätserhaltung gilt aber für die Spinkomponente in  $z'$ -Richtung:

$$s'_{z'} = s_z \quad (7.13)$$

Die Wahrscheinlichkeit nach einer Drehung der  $z$ -Achse um den Winkel  $\theta$  nach  $z'$  eine Spinkomponente  $s'_{z'}$  zu erhalten, wenn der Spin in  $z$ -Richtung  $s'_z$  ist, ist durch das Quadrat einer sogenannten d-Funktion gegeben (siehe Tabelle im Review of Particle Physics [34]):

$$w(s'_z \rightarrow s'_{z'}) = \left| d_{s'_{z'}, s'_z}^{\frac{1}{2}}(\theta) \right|^2 = \begin{cases} \cos^2 \theta / 2 & \text{für } s'_z = s_z \\ \sin^2 \theta / 2 & \text{für } s'_z = -s_z \end{cases} \quad (7.14)$$

**Formfaktoren:** Der Spin eines geladenen Teilchens ist im allgemeinen mit einem magnetischen Moment verknüpft. Wäre das Proton ein strukturloses Dirac-Teilchen, hätte es ein magnetisches Moment, das gleich dem sogenannten Kernmagneton wäre:

$$\mu_K = \frac{e \hbar}{2 M c} = \frac{e}{2 M}, \quad (7.15)$$

wobei der rechte Ausdruck für  $\hbar = c = 1$  gilt. Allgemeiner setzt man an:

$$\mu_p = g \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_K, \quad (7.16)$$

wobei der Faktor  $1/2$  von der Spinkomponente in einer Vorzugsrichtung kommt und  $g$  der Landé'sche g-Faktor ist (für ein Dirac-Proton gilt  $g = 2$ ).

Bei einem ausgedehnten Teilchen kann die Verteilung der Ladung und der magnetischen Momente grundsätzlich unterschiedlich sein. Deshalb enthält der Wirkungsquerschnitt für die elastische Elektron-Nukleon-Streuung, genannt Rosenbluth-Wirkungsquerschnitt, zwei unabhängige Formfaktoren:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rosenbluth}} &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left( A(q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + B(q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left( A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

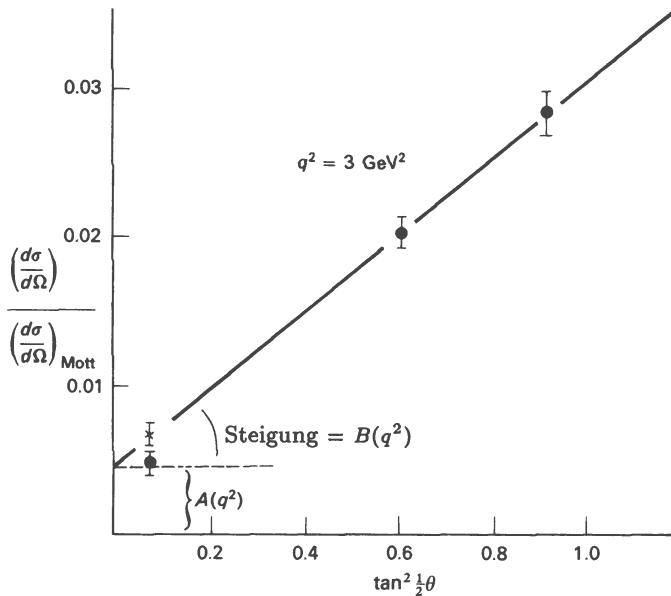


Abbildung 7.4: Rosenbluth-Gerade: bei festem  $q^2$  gemessener Wirkungsquerschnitt dividiert durch den Mott-Wirkungsquerschnitt gegen  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$  aufgetragen.

Der Ausdruck vor der Klammer heißt Mott-Wirkungsquerschnitt und beschreibt die Streuung eines Dirac-Teilchens an einem spinlosen Teilchen (dessen Spin trivialerweise nicht umklappen kann):

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7.18)$$

Trägt man den gemessenen Wirkungsquerschnitt, normiert auf den Mott-Wirkungsquerschnitt, für festes  $q^2$  gegen  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$  auf, so erhält man die sogenannte Rosenbluth-Gerade, deren Achsenabschnitt und Steigung  $A(q^2)$  und  $B(q^2)$  ergeben (Abb. 7.4).

Die Formfaktoren  $A(q^2)$  und  $B(q^2)$  lassen sich auch durch den elektrischen und magnetischen Formfaktor ausdrücken:

$$A(q^2) = \frac{G_E^2(q^2) + \frac{-q^2}{4M^2} G_M^2(q^2)}{1 + \frac{-q^2}{4M^2}} \quad (7.19)$$

$$B(q^2) = \frac{-q^2}{2M^2} G_M^2(q^2) \quad (7.20)$$

Bei  $q^2 = 0$  wird die Struktur nicht aufgelöst, das Photon sieht die Gesamtladung  $Q_N$  bzw. das gesamte magnetische Moment  $\mu_N$  des Nukleons. Als Normierung wird festgelegt:

$$G_E(0) = \frac{Q_N}{e} = \begin{cases} 1 & N = \text{Proton} \\ 0 & N = \text{Neutron} \end{cases} \quad (7.21)$$

$$G_M(0) = \frac{\mu_N}{\mu_K} = \begin{cases} 2.79 & N = \text{Proton} \\ -1.91 & N = \text{Neutron} \end{cases} \quad (7.22)$$

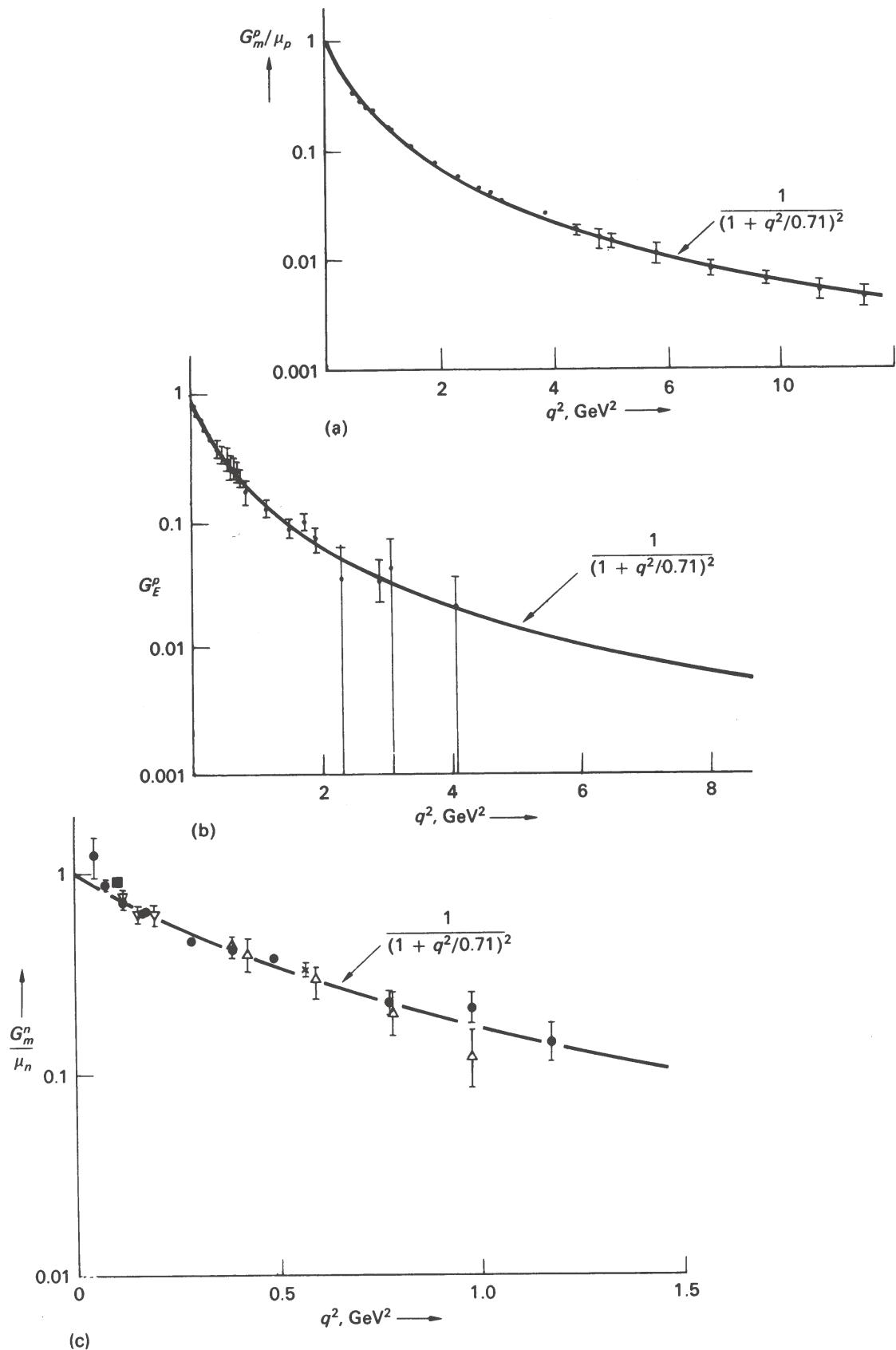


Abbildung 7.5: Gemessene elastische Formfaktoren für Protonen und Neutronen.

Interessant sind die gemessenen ‘anomalen’ magnetischen Momente der Nukleonen: Ein strukturloses Proton hätte das Kernmagneton als magnetisches Moment und ein strukturloses Neutron, weil es neutral ist, hätte ein verschwindendes magnetisches Moment:

	$\mu_{Dirac}$	$\mu_{exp}$
$p$	$\mu_K$	$2.79 \mu_K$
$n$	0	$-1.91 \mu_K$

Im Quarkmodell ergibt sich das magnetische Moment durch Überlagerung der magnetischen Momente der Quarks. Eine vereinfachte Rechnung mit den Quarkwellenfunktionen eines statischen Modells ergibt in guter Übereinstimmung mit dem Experiment:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} \quad (7.23)$$

Die  $q^2$ -Verteilung von  $G_E$ ,  $G_M$  des Protons und von  $G_M$  des Neutrons sind sehr ähnlich (Abb. 7.5):

$$G(q^2) \sim \frac{1}{(1 - q^2/m^2)^2} \quad (7.24)$$

Das ist die sogenannte Dipol-Formel (der Ausdruck hat zwei Polstellen), die einer exponentiellen Ladungsverteilung entspricht:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot \exp(-m r) \quad (7.25)$$

Der Massenparameter wurde zu

$$m^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$$

bestimmt.

Die Ausdehnung eines Nukleons wird durch den mittleren quadratischen Radius definiert:

$$r_{Nukleon} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty r^2 \rho(r) r^2 dr}{\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr}} = \frac{\sqrt{12}}{m} \quad (7.26)$$

Experimentell ergibt sich (ein Faktor  $\hbar c$  ergibt die richtige Dimension):

$$r_{Nukleon} \approx 0.8 \text{ fm.}$$

Die Größenordnung von etwa 1 Fermi ist durch die Skala der starken Wechselwirkung bedingt.

## 7.2 Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung

### 7.2.1 Kinematik und Wirkungsquerschnitt

Der allgemeine Fall der Elektron-Proton-Streuung ist die Reaktion

$$ep \rightarrow e + X, \quad (7.27)$$

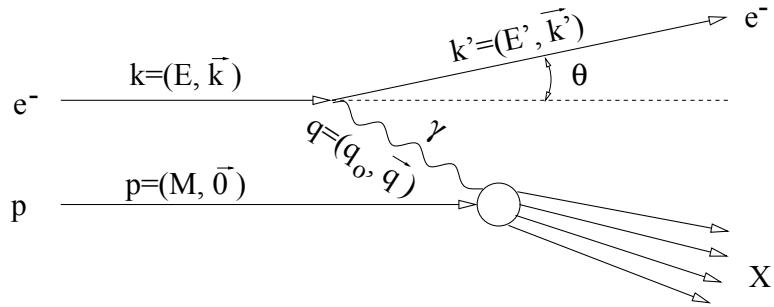


Abbildung 7.6: Kinematik der inelastischen Elektron-Proton-Streuung in 1-Photon-Näherung.

wobei  $X$  das hadronische System im Endzustand ist. Bei inelastischer Streuung ist der Endzustand ein Vielteilchensystem (Abb. 7.6). Für die invariante Masse  $M_X$  des Systems hatten wir die Variable  $W$  eingeführt:

$$W^2 = M_X^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2 q p = M^2 + q^2 + 2 q p \quad (7.28)$$

Für die elastische Streuung ist  $W = M$  und es ergibt sich:

$$\frac{-q^2}{2 q p} = 1 \quad (\text{elastische Bedingung}) \quad (7.29)$$

Für den allgemeinen Fall definiert man die Lorentz-Invariante ('Bjorken-Variable')

$$x = \frac{-q^2}{2 q p} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 1 \quad (7.30)$$

Als weitere Lorentz-Invariante definiert man

$$y = \frac{p q}{p k} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 1. \quad (7.31)$$

Im Laborsystem mit einem im Target ruhenden Proton hat diese Variable die Bedeutung eines normierten Energieübertrages:

$$y_{\text{Lab}} = \frac{E - E'}{E}. \quad (7.32)$$

Allgemeiner, also wenn sich auch das Proton bewegt, wie bei HERA, gilt:

$$y_{\text{Lab}} = \frac{E - E' \cdot \cos^2 \theta / 2}{E}. \quad (7.33)$$

Statt der Laborgrößen ( $E$ ,  $E'$ ,  $\theta$ ) kann man die lorentz-invarianten Größen ( $x$ ,  $y$ ,  $q^2$ ) für die Formulierung des Wirkungsquerschnittes verwenden:

$$\frac{d\sigma}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left[ \frac{1-y}{x} F_2(x, q^2) + y^2 F_1(x, q^2) \right] \quad (7.34)$$

In dieser Formel treten die beiden 'Strukturfunktionen'  $F_1$  und  $F_2$  auf, die den zwei Formfaktoren im elastischen Fall entsprechen. Im Gegensatz zu den Formfaktoren

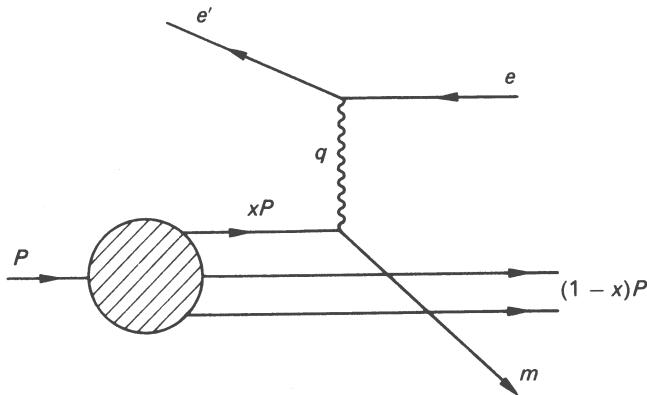


Abbildung 7.7: Tief-inelastische Streuung im Partonmodell.

hängen die Strukturfunktionen allerdings von zwei Variablen ab, z. B. ( $x, q^2$ ), um zusätzlich den Grad der Inelastizität festzulegen. Die Strukturfunktionen hängen von den Details der Wechselwirkung des Photons mit den Nukleonen ab und werden gemessen, um die innerste Struktur der Nukleonen zu verstehen. Bei HERA wurden bisher mit maximalen Impulsüberträgen von  $Q_{max}^2 \approx 50\,000 \text{ GeV}^2$  die höchsten räumlichen Auflösungen erreicht:

$$\Delta r \approx \frac{\hbar c}{\sqrt{Q^2}} \leq 10^{-18} \text{ m} \quad (7.35)$$

### 7.2.2 Strukturfunktionen, Partonmodell und Skaleninvarianz

Wenn Nukleonen eine Substruktur haben, dann kann man das nur in der inelastischen Streuung untersuchen, weil im elastischen Fall die Streuung kohärent am ganzen Nukleon erfolgt.

Wir nehmen an, daß die Nukleonen aus kleinen Teilchen, genannt Partonen, aufgebaut sind, die sich quasi-frei im Nukleon bewegen. Heute würden wir die Annahme der quasi-freien Bewegung mit der ‘asymptotischen Freiheit’ der QCD bei kleinen Abständen begründen. Des Weiteren nehmen wir an, daß die Partonen punktförmig sind, also keine Formfaktoren haben, die vom Impulsübertrag abhängen. Dann kann man danach fragen, was die Bedingung für eine elastische Streuung an diesen Objekten ist.

Es ist üblich, dazu in das ‘infinite momentum frame’ (IMF), in dem die Partonenmassen und die Nukleonmasse vernachlässigbar sind, zu gehen ( $M \ll E_p; m_{parton} \approx 0$ ). Dann ist der Vierervektor des Nukleons:

$$p = (E_p, 0, 0, E_p)$$

Ein Parton habe den Bruchteil  $x$  von dem Nukleonimpuls (Abb. 7.7). Wenn das Photon genau an diesem Parton eine Streuung macht, folgt:

$$(xp + q)^2 = x^2 p^2 + q^2 + 2xpq = m_{parton}^2 \approx 0 \quad (7.36)$$

Daraus folgt, da  $(xp)^2 = m_{parton}^2 \approx 0$  ist, daß der Impulsbruchteil  $x$  des Partons im

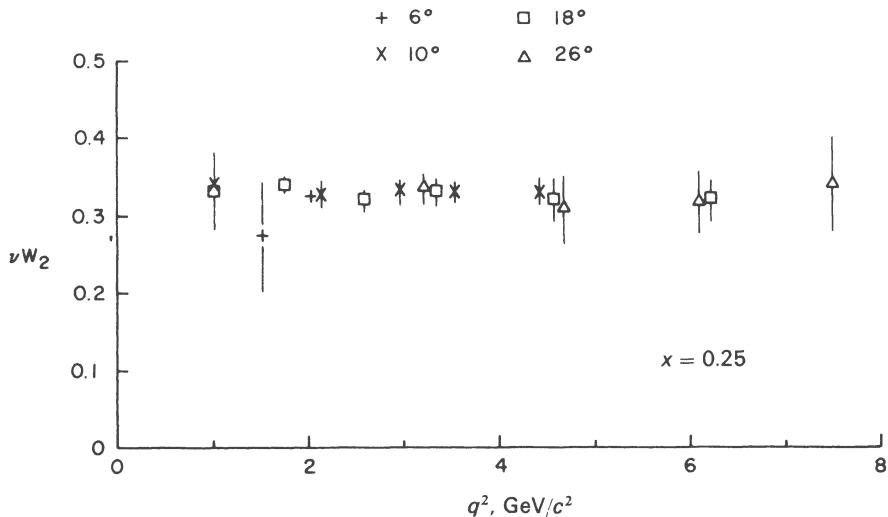


Abbildung 7.8: Die Strukturfunktion  $F_2 = \nu W_2$  als Funktion von  $q^2$  bei festem  $x = 0.25$ .

IMF genau die Bjorken-Variable  $x$  ist:

$$x = \frac{-q^2}{2 q p}.$$

Wir haben hier also eine elastische Bedingung für die Streuung an den Partonen (die inzwischen als Quarks identifiziert werden). Wenn die Partonen keine Struktur haben und sich frei im Proton bewegen, dann hängen die Strukturfunktionen nur von einer Variablen ab, zum Beispiel von der Verteilung der Impulsbruchteile  $x$ . Tatsächlich berechnet man, daß die Strukturfunktion  $F_2$  wie folgt von den Impulsverteilungen  $q(x)$  der Quarks mit Flavour  $q$  und Ladung  $Q_q$  abhängt:

$$F_2(x) = x \sum_{q=u,d,s,\dots} Q_q^2 [q(x) + \bar{q}(x)]. \quad (7.37)$$

Die ersten ‘tief-inelastischen’ Messungen am Linearbeschleuniger SLAC in Stanford (USA) Ende der sechziger Jahre haben gezeigt, daß die Strukturfunktion  $F_2$  bei festem  $x$  nicht mehr von  $q^2$  abhängt (Abb. 7.8). Man bezeichnet dieses Verhalten als **Skaleninvarianz der Strukturfunktionen** ( $x$  ist dimensionslos!). Wenn man bedenkt, daß die damit zu vergleichenden Quadrate der elastischen Formfaktoren in dem gleichen  $q^2$ -Bereich um  $10^{-6}$  abfallen, versteht man, wie spektakulär diese Ergebnisse waren.

Die Messung der Strukturfunktionen hat wesentlich dazu beigetragen, die Struktur der Hadronen und die Dynamik der Partonen zu verstehen. Das hat wiederum entscheidend die Entwicklung der QCD gefördert. Einige wichtige Ergebnisse werden im folgenden kurz referiert.

**Impulsverteilung der Quarks und Gluonen:** Mit der  $x$ -Abhängigkeit der Strukturfunktionen wird die Impulsverteilung der Partonen im Nukleon gemessen. Da das Photon nur an Ladungen koppelt, sieht man allerdings nur die geladenen Partonen. Tatsächlich ergaben die Messungen, daß die Summe aller Partonimpulse

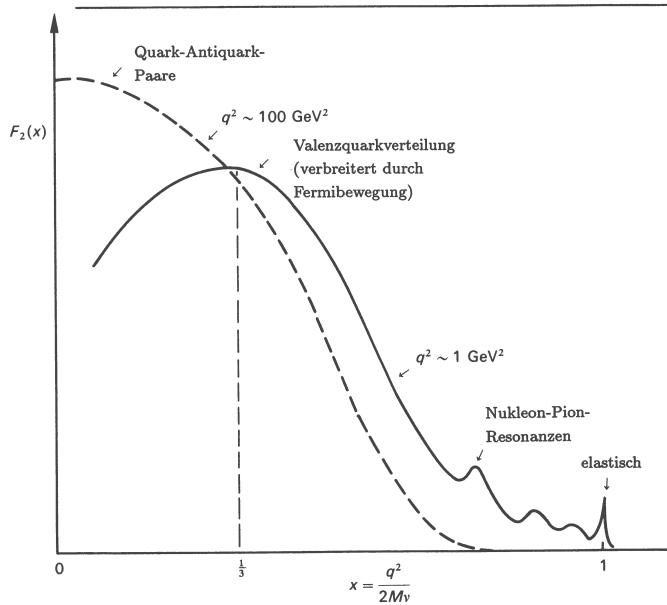


Abbildung 7.9: Die Strukturfunktion  $F_2$  und damit die Impulsverteilung der Quarks verschiebt sich mit wachsendem  $q^2$  zu kleineren  $x$ -Werten. Die elastische Streuung und die Nukleonresonanzen, die bei kleinen  $q^2$ -Werten noch sichtbar sind ( $x = 1$  entspricht der elastischen Streuung), haben viel stärkere  $q^2$ -Abhängigkeiten als die tief-inelastische Streuung.

nur etwa 50% des Protonimpulses ergibt. Wir glauben heute, daß der restliche Impuls von den elektrisch neutralen Gluonen getragen wird.

Zur quantitativen Bestimmung der Impulsbilanz nehmen wir zunächst an, die Nukleonen bestehen aus den  $u$ - und  $d$ -Quarks entsprechend dem SU(3)-Quarkmodell. Seinen  $u^p$ ,  $d^p$  und  $u^n$ ,  $d^n$  die  $u$ - und  $d$ -Quarkverteilungen im Proton beziehungsweise im Neutron. Dann gilt:

$$\frac{1}{x} F_2^{ep} = \frac{4}{9} u^p + \frac{1}{9} d^p \quad (7.38)$$

$$\frac{1}{x} F_2^{en} = \frac{4}{9} u^n + \frac{1}{9} d^n \quad (7.39)$$

Nehmen wir nun an, daß aufgrund der Isospin-Symmetrie die Verteilungen der  $u$ - bzw.  $d$ -Quarks im Proton gleich den Verteilungen der  $d$ - bzw.  $u$ -Quarks im Neutron sind,

$$u = u^p = d^n \quad (7.40)$$

$$d = d^p = u^n , \quad (7.41)$$

dann erhalten wir für die ‘Nukleon-Strukturfunktion’:

$$\frac{1}{x} F_2^{eN} = \frac{1}{x} \frac{F_2^{ep} + F_2^{en}}{2} = \frac{5}{18} (u + d) \quad (7.42)$$

Wenn nur die Quarks zum Impuls der Nukleonen beitragen, sollte das Integral über  $x[u(x) + d(x)]$  gleich 1 sein, es wurde aber gemessen:

$$\frac{18}{5} \int_0^1 F_2^{eN} dx \approx 0.5 \quad (7.43)$$

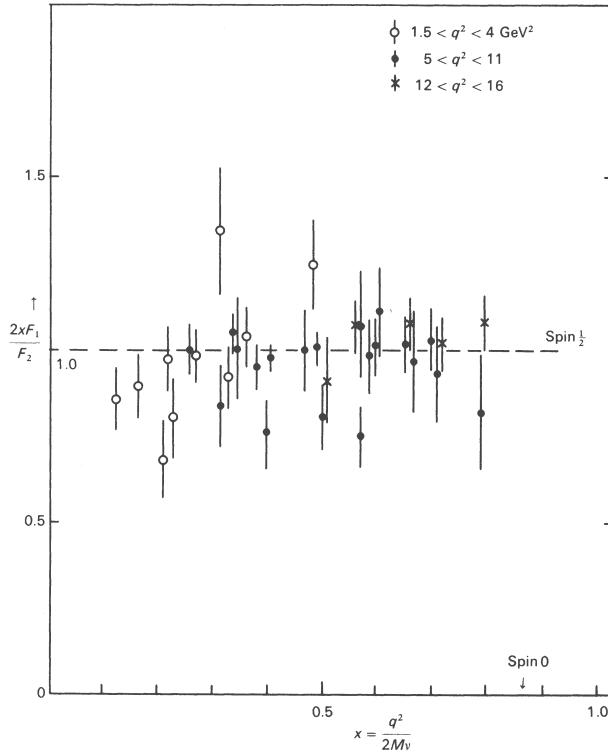


Abbildung 7.10: Das Verhältnis  $2xF_1/F_2$ , das für Dirac-Partonen (Spin 1/2, punktförmig) im Grenzfall großer  $q^2$  gegen 1 gehen soll (Callan-Gross-Relation:  $2xF_1 = F_2$  ).

**Valenz- und Seequarks:** Gluonen werden von den Quarks emittiert und absorbiert. Sie können aber auch Quark-Antiquark-Paare erzeugen. Das führt dazu, daß es einen ‘See’ von Quarks und Antiquarks gibt, die relativ niedrige Impulse haben, weil sie aus einem sekundären Prozess stammen (Abb. 7.9). Die Verteilung der See-Quarks häuft sich entsprechend bei kleineren  $x$ -Werten verglichen mit der Verteilung der sogenannten ‘Valenzquarks’, die wir aus dem statischen Quarkmodell kennen (also zum Beispiel  $uud$  für das Proton). Zum Beispiel ergibt sich dann für die Strukturfunktion des Protons, wenn man annimmt, daß nur die leichtesten Quarks ( $u, d, s$ ) im See erzeugt werden:

$$\frac{1}{x}F_2^{ep} = \frac{4}{9}(u_V + u_S + \bar{u}_S) + \frac{1}{9}(d_V + d_S + \bar{d}_S) + \frac{1}{9}(s_S + \bar{s}_S) \quad (7.44)$$

**Spin der Partonen:** Über die Kopplung der Photonen, die Spin 1 haben, konnte der Spin der (geladenen) Partonen zu 1/2 bestimmt werden. Aus dem Vergleich des inelastischen Wirkungsquerschnittes für Lepton-Nukleon-Streuung (7.34) mit dem Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Leptons an einem Dirac-Parton (punktförmig, Spin 1/2) mit dem Viererimpuls  $xp$  erhält man die Bedingung (Callan-Gross-Relation):

$$2xF_1(x) = F_2(x) \quad (7.45)$$

In Abb. 7.10 sieht man, daß diese Bedingung für verschiedene Impulsüberträge recht gut erfüllt ist (allerdings führt die weiter unten diskutierte Verletzung der Skalenin-

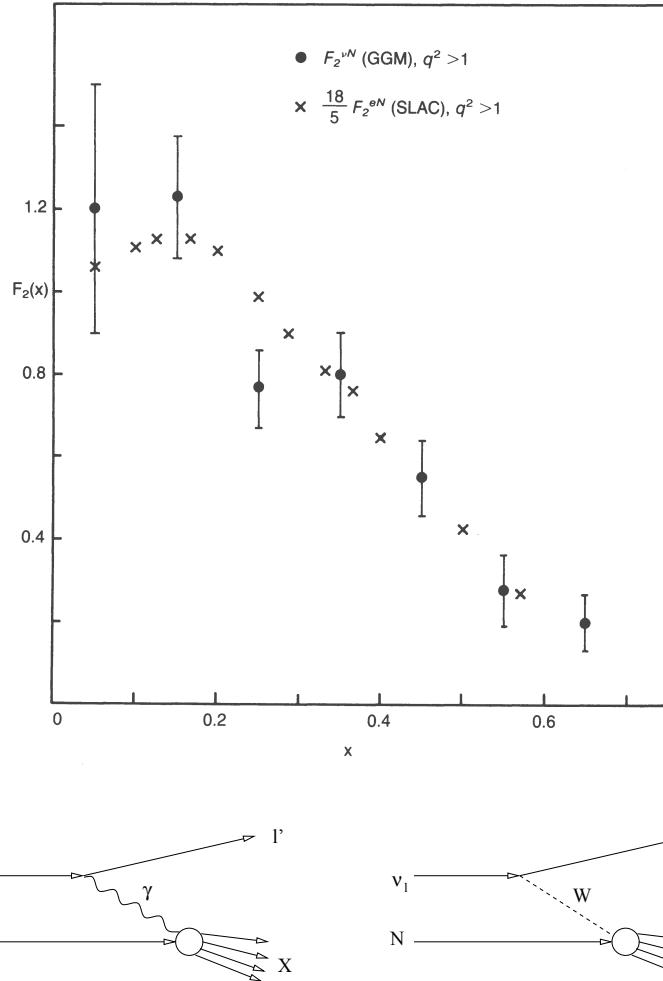


Abbildung 7.11: Vergleich der Strukturfunktionen  $F_2$  für Nukleonen (gemittelt für Protonen und Neutronen) gemessen in Elektron-Nukleon- und in Neutrino-Nukleon-Streuexperimenten (siehe die Graphen darunter). Der Faktor 5/18 entspricht der mittleren quadratischen Ladung der Quarks im Nukleon. Die Übereinstimmung der mit 18/5 korrigierten  $eN$ -Strukturfunktion mit der  $\nu N$ -Strukturfunktion bestätigt die drittzahligen Quarkladungen.

varianz auch zu einer Verletzung der Callan-Gross-Relation).

**Ladung der Partonen:** Die Nukleon-Strukturfunktionen sind sowohl in der Streuung von Elektronen oder Myonen als auch von Neutrinos und Antineutrinos an Nukleonen gemessen worden. In der Neutrino-Nukleon-Streuung mißt man direkt die Quarkverteilungen, ohne die Wichtung durch die Quarkladungen. Die durch den Ladungsfaktor dividierte Nukleon-Strukturfunktion (7.42) aus der Elektron-Nukleon-Streuung,

$$\frac{18}{5} F_2^{eN} \quad (7.46)$$

können direkt mit der in der Neutrino-Streuung gemessenen Strukturfunktion,  $F_2^{\nu N}$ , verglichen werden (Abb. 7.11). Das Ergebnis bestätigt die drittzahligen Quarkladungen.

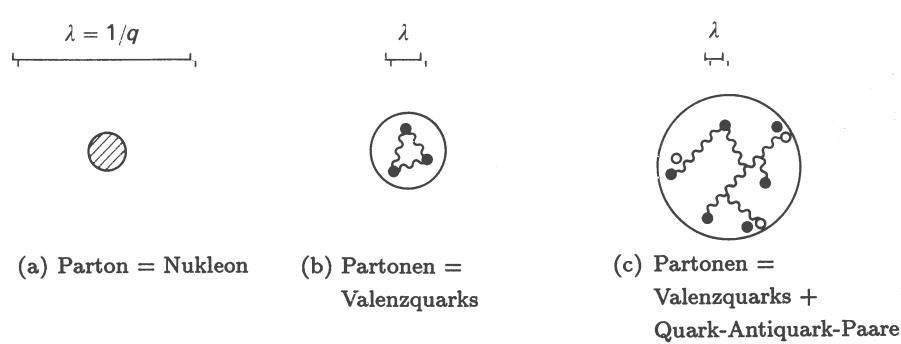


Abbildung 7.12: Struktur eines Nukleons gesehen mit unterschiedlichen Auflösungen  $\lambda = 1/\sqrt{-q^2}$ . Bei geringer Auflösung wird das Nukleon als Ganzes gesehen (elastische Streuung). Mit steigender Auflösung sieht man mehr Details und die Impulse werden auf mehr Partonen verteilt, ein einzelnes Quark, an dem ein Photon streut, hat im Mittel weniger Impuls, entsprechend kleineres  $x$ .

### 7.2.3 Verletzung der Skaleninvarianz und QCD

Skaleninvarianz, das heißt die  $q^2$ -Unabhängigkeit der Strukturfunktionen, erwartet man eigentlich nur bei quasi-elastischer Streuung an den Partonen, das heißt, wenn die Partonen im Nukleon frei sind. Da wir aber wissen, daß es die starke Wechselwirkung gibt, die die Quarks im Nukleon hält, ist es eigentlich erstaunlich, daß die Skaleninvarianz so gut erfüllt ist. Wir erklären das damit, daß die Quarks bei kleinen Abständen ( $< r_{Proton} \approx 1 \text{ fm}$ ) quasi-frei sind ('asymptotische Freiheit' der QCD).

Tatsächlich hat man eine Verletzung der Skaleninvarianz (genannt Skalenverletzung) beobachtet, die inzwischen ein wichtiges Forschungsgebiet geworden ist. Vor allem die HERA-Experimente H1 und ZEUS messen mit höchster Präzision diese Skalenverletzung, weil man dadurch wichtige Eigenschaften der QCD bestimmen kann.

Die Skalenverletzung tritt wegen der Wechselwirkung der Quarks mit dem Gluonenfeld auf. Ein Quark emittiert und absorbiert ständig Gluonen. Bei nicht sehr hohem  $q^2$  wird man eventuell Emission und Absorption nicht auflösen: man merkt garnicht, daß zwischendurch mal zwei Teilchen vorliegen (siehe dazu Abb. 7.12). Erst bei genügend hohem  $q^2$ , entsprechend guter räumlicher Auflösung, 'erwischt' man das Quark, wenn es gerade abgestrahlt hat und einen Anteil  $\Delta x$  des Impulses an ein Gluon abgegeben hat. Damit sieht man mit steigender räumlicher Auflösung, steigendem  $q^2$ , eine Verschiebung der Impulsverteilung zu kleineren  $x$ -Werten. In Abb. 7.9 wird schematisch gezeigt, wie sich die  $x$ -Verteilung mit höherem  $q^2$  verschiebt.

In Abb. 7.13 wird gezeigt, daß die gemessene Strukturfunktion  $F_2$  für feste  $x$ -Werte tatsächlich eine  $q^2$ -Abhängigkeit hat, und zwar bei kleinen  $x$  steigend und bei großen  $x$  fallend.

Die Skalenverletzung macht eine Aussage über die  $q^2$ -Abhängigkeit der Quark-Gluon-Kopplung. Deren Messung erlaubt deshalb eine Bestimmung der laufenden Kopplungskonstanten  $\alpha_s(q^2)$ .

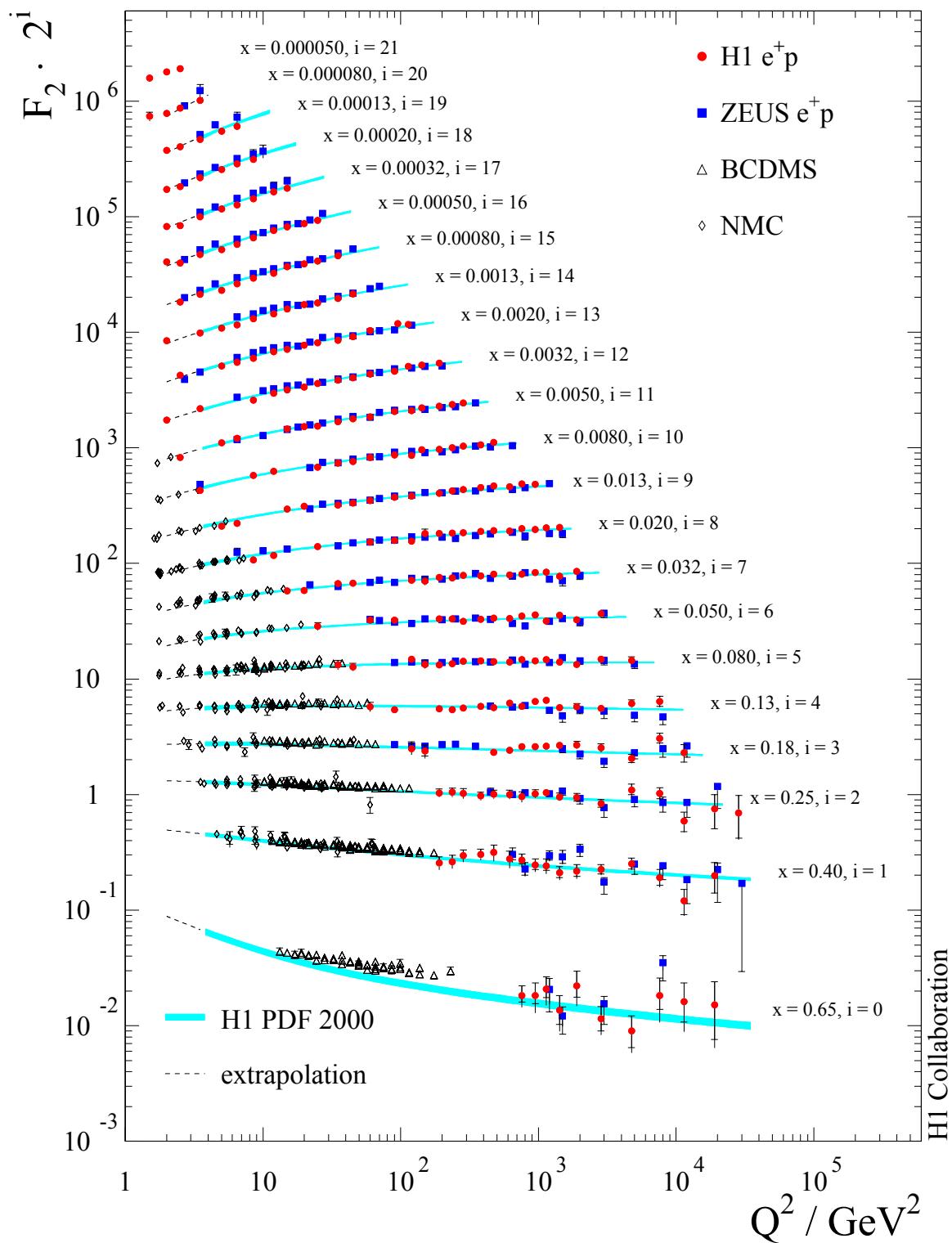


Abbildung 7.13: Die Strukturfunktion  $F_2$  als Funktion von  $Q^2 = -q^2$  für feste  $x$ -Werte (jeweils um einen Faktor 2 verschoben, damit man die Kurven einzeln sehen kann). Die Messungen bei hohen  $Q^2$ - oder kleinen  $x$ -Werten waren erst mit HERA möglich (H1, ZEUS).

# Kapitel 8

## Statische Eigenschaften von Atomkernen

### 8.1 Bindungszustände von Nukleonen

Seit den Streuexperimenten von Rutherford 1911 weiß man, daß die Atome kompakte Kerne haben, die etwa 10000 mal kleiner sind als das ganze Atom und eine positive Ladung tragen, die gerade die negative Ladung der Elektronen in der Atomhülle kompensiert.

Die Kerne sind gebundene Systeme von Protonen und Neutronen, bestehen also aus hadronischer Materie. Die Bindungs Kräfte sind viel stärker als die elektromagnetischen Kräfte. Sie sollten durch die Quantenchromodynamik (QCD), der Theorie der starken Wechselwirkung, zu beschreiben sein. Da ein einzelnes Nukleon nach außen farb-neutral ist (Farb-Singulett), interpretieren wir die Kernkräfte als ‘Van-der-Waals-Kräfte der QCD’, in Analogie zu den elektromagnetischen Wechselwirkungen neutraler Moleküle in einem Gas.

Ein Kern besteht aus Z Protonen, N Neutronen, also  $A = Z + N$  Nukleonen:

Anzahl	Teilchen	Kerne mit gleicher Anzahl
A	Nukleonen	gleiches A: Isobare
Z	Protonen	gleiches Z: Isotope
N	Neutronen	gleiches N: Isotone

Das Gewicht eines Kerns ist im wesentlichen durch die Masse der Nukleonen gegeben (abzüglich der Bindungsenergie, siehe unten), deshalb werden Kerne mit gleichem A Isobare genannt. Ein bestimmtes Element hat eine feste Kernladung Z, also eine feste Anzahl von Protonen. Ein Element kann mit verschiedener Anzahl von Neutronen auftreten, man nennt das die Isotope eines Elementes.

Ein Kern K wird durch das Symbol des entsprechenden Elementes und seine Massenzahl A bezeichnet. Manchmal wird auch Z, seltener auch N in die Bezeichnung einbezogen:

$${}_{(Z)}^A K_{(N)} : \quad {}_2^4 \text{He}, \quad {}_1^1 \text{H}, \quad {}_{92}^{238} \text{U}, \quad \dots \quad (8.1)$$

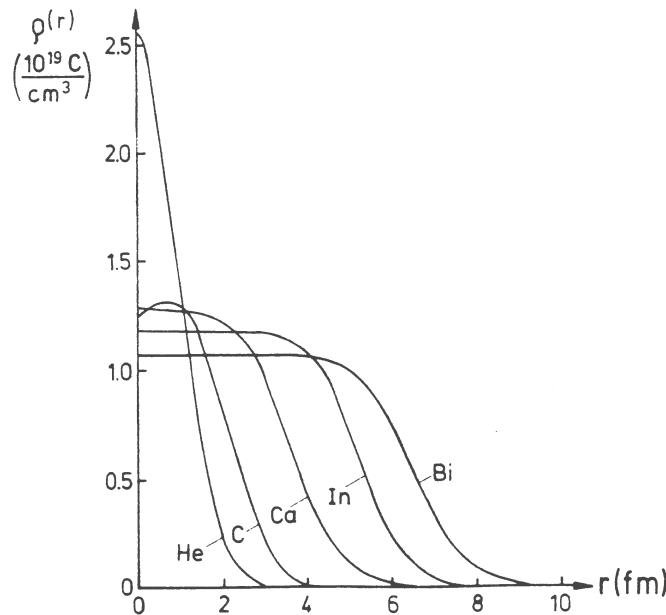


Abbildung 8.1: Ladungsverteilungen verschiedener Kerne (Hofstadter et al., 1957).

## 8.2 Größe und Dichte von Kernen

Abbildung 8.1 zeigt die von Hofstadter et al. gemessenen Ladungsverteilungen verschiedener Kerne, die aus den in Kapitel 7 beschriebenen Formfaktormessungen durch Elektron-Kern-Streuung gewonnen wurden. Die mittleren Ladungsradien zeigen folgende A-Abhängigkeit:

$$R_K \approx r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (8.2)$$

mit  $r_0 = (1.3 \pm 0.1) \text{ fm}$ . Hier wurde  $R_K$  als Radius einer äquivalenten homogen geladenen Kugel mit scharfem Rand definiert. Die in Kapitel 7 benutzte Radius, der als Wurzel aus dem mittleren quadratischen Radius definiert wurde, ist um  $\sqrt{3/5}$  kleiner. Mit (8.2) ergibt sich für die Kernvolumina:

$$V_K = \frac{4}{3}\pi R_K^3 \approx A \frac{4}{3}\pi r_0^3 \quad (8.3)$$

Das bedeutet, daß jedes Nukleon etwa das gleiche Volumen einnimmt:

$$V_N \approx \frac{4}{3}\pi r_0^3 \quad (8.4)$$

daraus wiederum ergibt sich eine konstante Kerndichte:

$$\rho_K \approx \frac{A \cdot m_N}{\frac{4}{3}\pi R_K^3} \approx \frac{m_N}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \text{konst.} \approx 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (8.5)$$

Die Kerndichte ist also  $10^{14}$ -mal größer als die Dichte des Wassers. Solche Dichten werden auch in Neutronensternen erreicht, die aufgrund eines Gravitationskollapses der Überreste von Supernova-Explosionen entstehen.

Die konstante, A-unabhängige Kerndichte läßt sich durch kurzreichweite Kernkräfte, die nur zwischen den Nachbarn wirken, erklären. Das Potential zwischen den Kernen muß folgende Eigenschaften haben (Abb. 8.2):

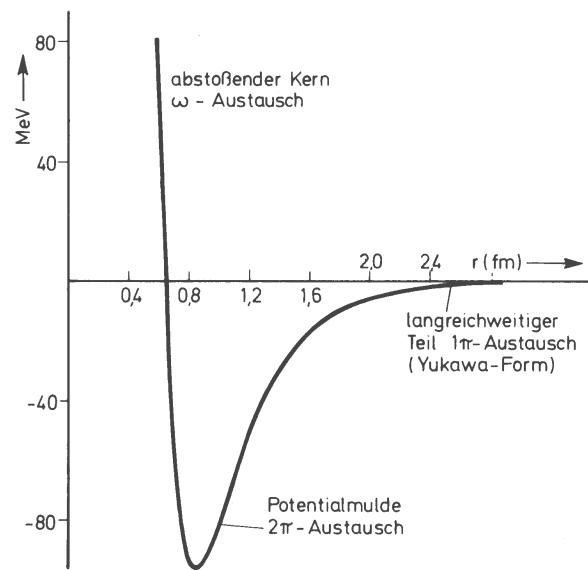


Abbildung 8.2: Qualitative Darstellung des Potentials zwischen zwei Nukleonen. Es ist angegeben, welche Austauschteilchen das Potential bei verschiedenen Abständen bestimmen.

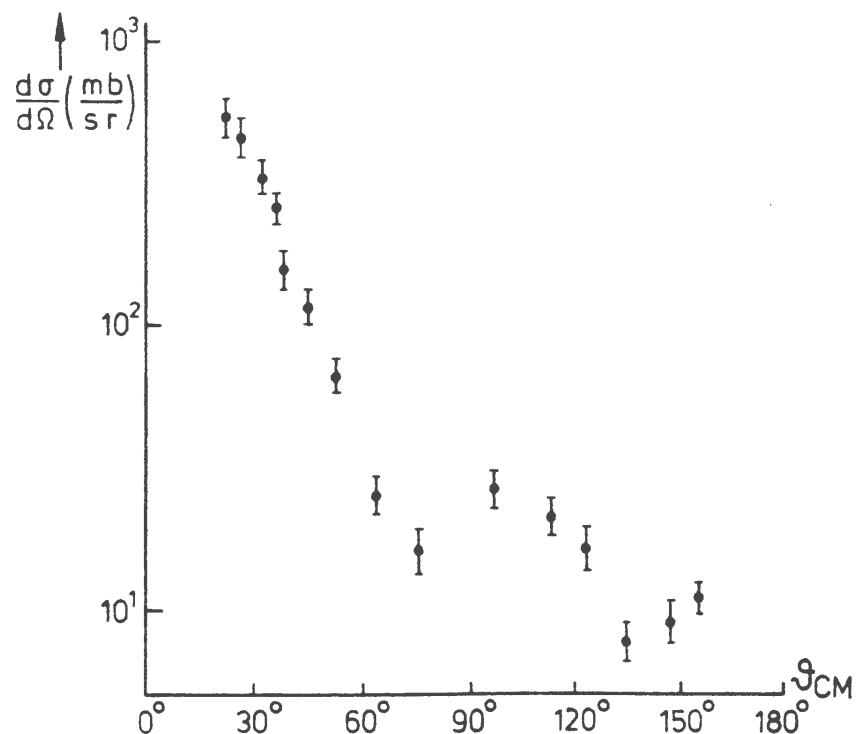


Abbildung 8.3: Winkelverteilung elastisch gestreuter Neutronen (14 MeV) an Bor.

- kurzreichweitiges anziehendes Potential,
- abstoßender Kern ('hard core').

Die einzelnen Beiträge werden nach Yukawa (siehe Kapitel 2) durch Austausch verschiedener Teilchen ( $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $\omega$ ) erzeugt. Ein ähnliches Potential ergibt sich für homöopolare Molekülbindungen ( $N_2$ ,  $CO$ , ...), die durch Elektronenaustausch beschrieben werden.

Stark wechselwirkende Teilchen, also Hadronen, sehen den Kern als absorbierende schwarze Scheibe der Größe:

$$\sigma_{geom} = \pi R_K^2 \approx 50 \text{ mb} \cdot A^{\frac{2}{3}} \quad (8.6)$$

Der geometrische Querschnitt der Kerne gibt also eine Abschätzung für den totalen Wirkungsquerschnitt. Wie bei der Beugung von Licht an einer absorbierenden Scheibe erhält man Beugungsminima und -maxima (Abb. 8.3).

## 8.3 Kernmassen

### 8.3.1 Massendefekt und Bindung

Die Masse eines Kerns ist kleiner als die Summe der Massen seiner Nukleonen,

$$m(Z, A) < Z m_p + (A - Z) m_n, \quad (8.7)$$

wegen der Bindungsenergie der Nukleonen. Die Bindungsenergie mindert die Masse der Kerne, im folgenden wird sie allerdings als positive Größe definiert. Ein Kern der Masse  $m(Z, A)$  hat dann folgende Bindungsenergie:

$$B(Z, A) = -[m(Z, A) - Z m_p - (A - Z) m_n] > 0 \quad (8.8)$$

Die Bindungsenergie pro Nukleon ist für nicht zu kleine Kernmassen annähernd konstant (Abb. 8.4):

$$B/A \approx 8 \text{ MeV} \quad (8.9)$$

Das ist also etwa 1% der Nukleonemasste und etwa  $10^6$  mal mehr als die Bindungsenergie des Elektrons im Wasserstoffatom von etwa 13 eV. In Abb. 8.4 sieht man ein Maximum der Bindungsenergie pro Nukleon um die Massenzahl  $A \approx 60$ , das ist in der Umgebung des Eisens. Die **Fusion** leichterer Kerne und die **Spaltung** schwererer Kerne ist jeweils mit Energiegewinnung verbunden (Energieerzeugung in Sternen, technisch in Reaktoren). Die A-abhängigen Strukturen, besonders ausgeprägt bei kleinen Massenzahlen, sind Effekte abgeschlossener Schalen (wie in der Atomhülle). Zum Beispiel liegt bei  $A=4$  (Helium =  $\alpha$ -Teilchen) ein besonders stabiler Zustand vor.

**Atomare Masseneinheit:** Die Masse eines Elements wird in der atomaren Masseneinheit angegeben, die sich auf das Kohlenstoff-Isotop  $^{12}\text{C}$  bezieht:

$$1u = m_u = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.50 \text{ MeV}/c^2 \quad (8.10)$$

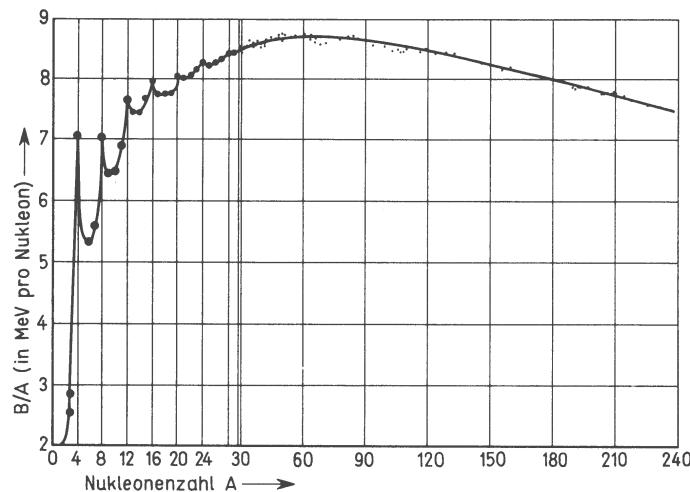


Abbildung 8.4: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl A für stabile Kerne. Die Abzisse ist bis A=30 gespreizt.

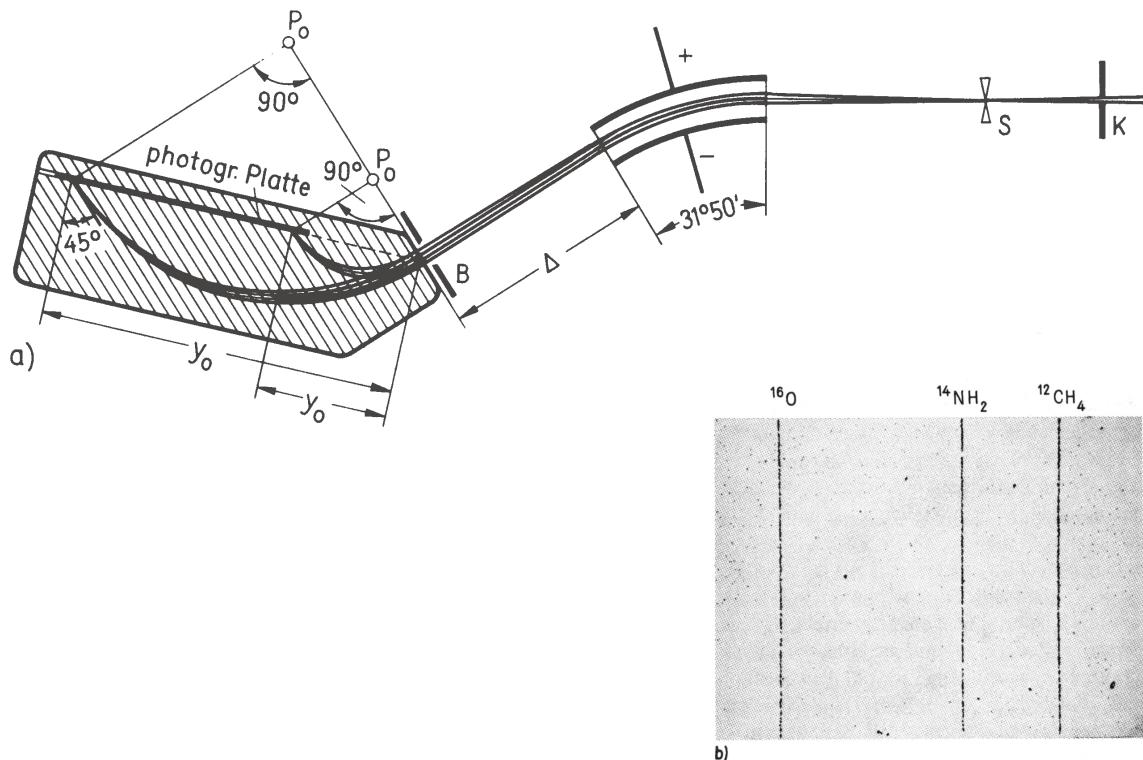
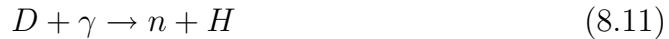


Abbildung 8.5: a) Mattauchscher Massenspektrograph und b) damit aufgenommene Linien zur Massenzahl A=16. Durch einen Kollimator  $K$  und eine Blende  $S$  tritt von rechts ein Jonenstrahl in den Spektrographen. Der Kondensator lenkt je nach  $q/m$ -Wert und Geschwindigkeit ab. Durch das Magnetfeld werden für gleiche  $q/m$ -Werte Jonen mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf einen Punkt fokussiert. In der Fokalebene ist die Photoplatte plaziert.

### 8.3.2 Massenbestimmung

Kernmassen können auf verschiedene Weise ermittelt werden:

- Massenspektroskopie: Durch Kombinationen von  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feldern lässt sich  $q/m = \text{Ladung/Masse}$  von Ionen bestimmen (wie bei der  $e/m$ -Bestimmung für das Elektron nach Thomson). Als Beispiel ist ein Massenspektrograph in Abb. 8.5 gezeigt, mit dem man Auflösungen von  $10^{-8}$  erreicht.
- Kernreaktionen: Zum Beispiel ergibt sich aus der Kinematik der ‘Photospaltung’ des Deuteriums ( $\text{Kern} = np$ ) die Masse des Neutrons:



In der Kernphysik ist auch folgende Schreibweise üblich:



- Energiebilanz bei  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Zerfällen.

## 8.4 Modelle für die A- und Z-Abhängigkeit der Kernmassen

### 8.4.1 Der Kern als inkompressible Flüssigkeit

Die etwa konstante Bindungsenergie pro Nukleon und die annähernd konstante Kerndichte

$$\begin{aligned} B/A &\approx \text{konst} \\ \rho_K &\approx \text{konst} \end{aligned} \quad (8.13)$$

entspricht dem Verhalten einer inkompressiblen Flüssigkeit.

### 8.4.2 Schalenstruktur der Kernzustände

Allerdings gibt es auch Effekte, die auf eine Schalenstruktur der Nukleonenzustände hinweisen und die durch das Modell einer inkompressiblen Flüssigkeit nicht erklärt werden. Die Schalenstruktur macht sich durch Sprünge in  $B/A$  (Abb. 8.4) bei den sogenannten ‘magischen Zahlen’ bemerkbar, wenn  $N$  oder  $Z$  die Werte 2, 8, 20, 28, 50, 82 oder 126 annehmen. In einer Flüssigkeit würde die Wechselwirkung zwischen den Molekülen die Ordnung der Zustände auf Schalen zerstören. Das berücksichtigt das folgende Modell.

### 8.4.3 Fermi-Gas-Modell

Eine bessere Beschreibung liefert das Fermi-Gas-Modell: Die Nukleonen befinden sich in einem Potentialtopf, in dem alle Zustände bis zur Fermi-Energie  $E_F$  besetzt sind (Abb. 8.6). Wegen des Pauli-Prinzips gibt es genau ein Nukleon pro Zustand, weil die Nukleonen Fermionen sind. Deswegen können die Nukleonen auch nicht

miteinander wechselwirken, die Zustände bleiben ungestört und es kann sich, wie in der Atomhülle, eine Schalenstruktur ausbilden.

Die Zustände in dem Potentialtopf kann man durch Lösung der Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen (1.34) erhalten, wenn man die Randbedingung beachtet, daß die Wellenfunktionen am Rand des Potentialtopfes verschwinden (siehe Quantenmechanik-Vorlesung). Durch die Randbedingung werden die Energien quantisiert. Ohne explizit die Zustände zu bestimmen, werden wir im folgenden die Zustandsdichte ableiten und daraus die Energie bestimmen, bis zu der der Potentialtopf aufgefüllt ist, also die Fermi-Energie.

Die Zustandsdichte im Phasenraum (Orts-Impuls-Raum) ist:

$$dn = \frac{V \cdot d^3 \vec{p}}{h^3} = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi V \sqrt{2m^3 E}}{h^3} dE = \frac{dn}{dE} dE \quad (8.14)$$

Dabei ist  $V$  das Kernvolumen,  $E = p^2/2m$  die nicht-relativistische (kinetische) Energie und  $m$  die Masse eines Nukleons. Die Gleichung (8.14) ist die nicht-relativistischen Form der Gleichung (1.125). Die Anzahl der besetzten Zustände ergibt sich durch Integration der Zustandsdichte bis zur Fermi-Energie, wobei für die Nukleonen mit Spin 1/2 jeder Orts-Impuls-Zustand doppelt besetzt werden kann:

$$n(E < E_F) = 2 \int_0^{E_F} \frac{dn}{dE} dE = \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} (2mE_F)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{n}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (8.15)$$

Da die Nukleonendichte

$$\rho_N = \frac{n}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \quad (8.16)$$

konstant ist, ergibt sich in diesem Modell auch eine konstante Fermi-Energie:

$$E_F \approx 30 \text{ MeV} \quad (8.17)$$

Das bedeutet, daß der Phasenraum der Zustände nur durch das Volumen anwächst, was durch die Forderung einer konstanten Nukleonendichte (8.16) hineingesteckt wurde. Damit erhält man auch hier die konstante Bindungsenergie pro Nukleon und die konstante Kerndichte (8.13). Der Potentialtopf (Abb. 8.6a) ist tiefer als die Fermi-Energie wegen der Separationsenergie für ein Nukleon von etwa 8 MeV:

$$V_0 \approx -40 \text{ MeV} \quad (8.18)$$

In der Abbildung sind die Zustände nach oben hin dichter eingezeichnet, weil nach (8.14) gilt:

$$\frac{dn}{dE} \sim \sqrt{E} \quad (8.19)$$

Da das Pauli-Prinzip für Protonen und Neutronen getrennt gilt, gibt es zwei Töpfe (Abb. 8.6b). Der Protonentopf ist wegen der Coulomb-Abstoßung etwas hochgezogen, das Coulomb-Potential ist dem Topfpotential überlagert. Wegen der Coulomb-Abstoßung gilt im allgemeinen auch:

$$Z \leq N \quad (8.20)$$

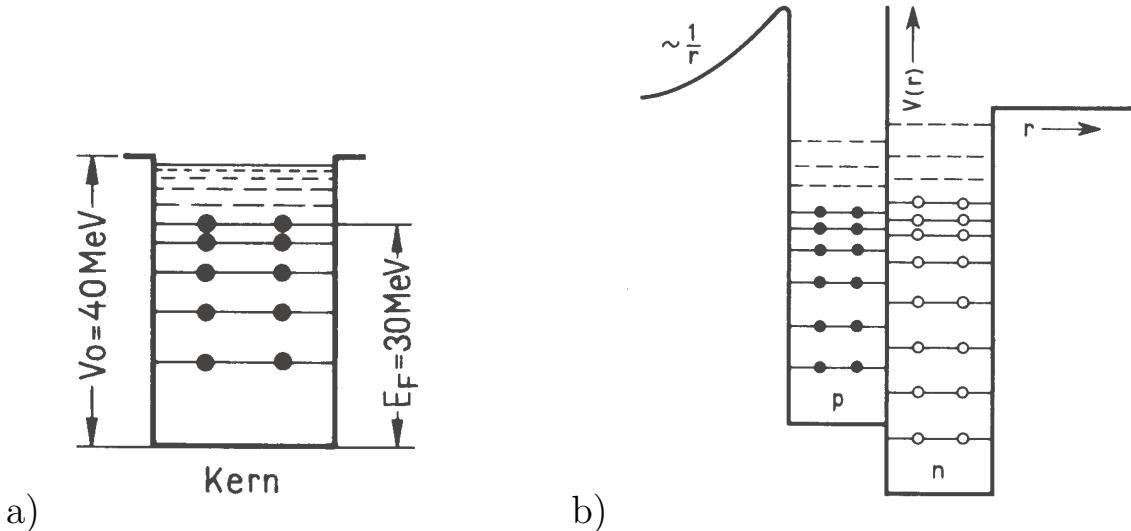


Abbildung 8.6: a) Potentialtopf und Fermi-Gas-Zustände eines Kerns mit Angaben der Potentialtiefe und der Lage der Fermi-Kante. b) Potential für Protonen und Neutronen mit Coulomb-Wall für die Protonen.

Beide Töpfe sind etwa gleich hoch gefüllt, das heißt,

$$E_F(n) \approx E_F(p). \quad (8.21)$$

Kerne, bei denen einer der beiden Töpfe höher gefüllt ist, sind ‘ $\beta$ -instabil’, und die Nukleonenanzahlen gleichen sich durch  $\beta$ -Zerfall aus:



#### 8.4.4 Das Tröpfchenmodell und die Weizsäcker-Massenformel

Die A- und Z-Abhängigkeit der Kernmassen  $m(Z, A)$  wird ‘semi-empirisch’ durch die Weizsäcker-Massenformel beschrieben. Das zugrundeliegende Modell für den Kern ist ein Flüssigkeitstropfen und Schaleneffekte werden nicht berücksichtigt. Die Bindungsenergie in Gleichung 8.8 setzt sich in dem Modell aus 5 Termen zusammen:

$$B(Z, A) = \sum_{i=1}^5 B_i = B_V + B_S + B_C + B_A + B_P \quad (8.23)$$

Die einzelnen Terme (siehe Abb. 8.7) haben folgende Bedeutung:

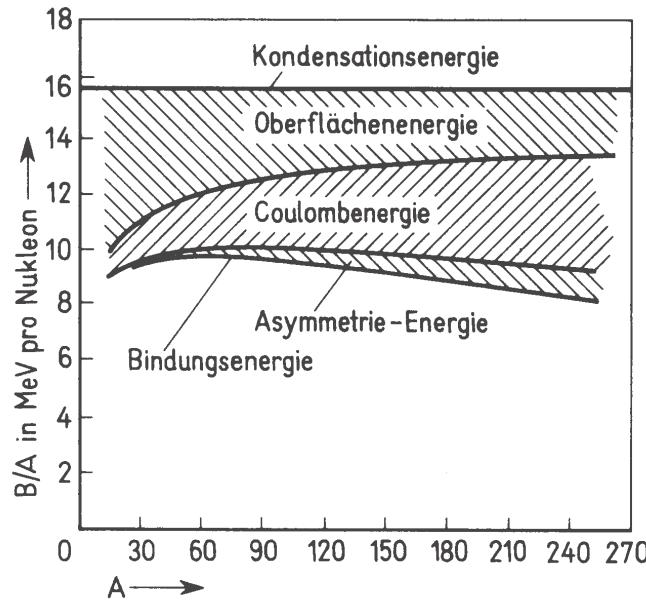


Abbildung 8.7: Beiträge der einzelnen Terme der Weizsäcker-Massenformel zur Bindungsenergie pro Nukleon.

i	Energie	Ursache	$f(Z, A)$	$B_i$	$a_i$ [MeV]
$V$	Konden-sation	Nukleonen konden-sieren zu Kernen	$B/A = \text{konst}$	$a_V \cdot A$	15.85
$S$	Oberfläche	weniger Bindung an der Oberfläche	$S \sim R_K^2 \sim A^{2/3}$	$-a_S \cdot A^{2/3}$	18.34
$C$	Coulomb	für Protonen	$V_C \sim \frac{Z(Z-1)}{\bar{R}_{pp}}$	$-a_C \cdot Z^2 A^{-1/3}$	0.71
$A$	Z/N-Asymmetrie	Z=N bevorzugt (ohne C-Term)	Fermi-Gas	$-a_A \frac{(Z-A/2)^2}{A}$	92.86
$P$	Paarung	gepaarte Nukleonen ( $g$ ) bevorzugt gegen ungepaarte ( $u$ )	$+ \delta$ für $gg$ 0 für $gu, ug$ $-\delta$ für $uu$	$\delta = a_P \cdot A^{-1/2}$	11.46

#### Bemerkungen zur Weizsäcker-Massenformel:

- keine Schaleneffekte berücksichtigt;
- gute Näherung für  $A > 30$ ;

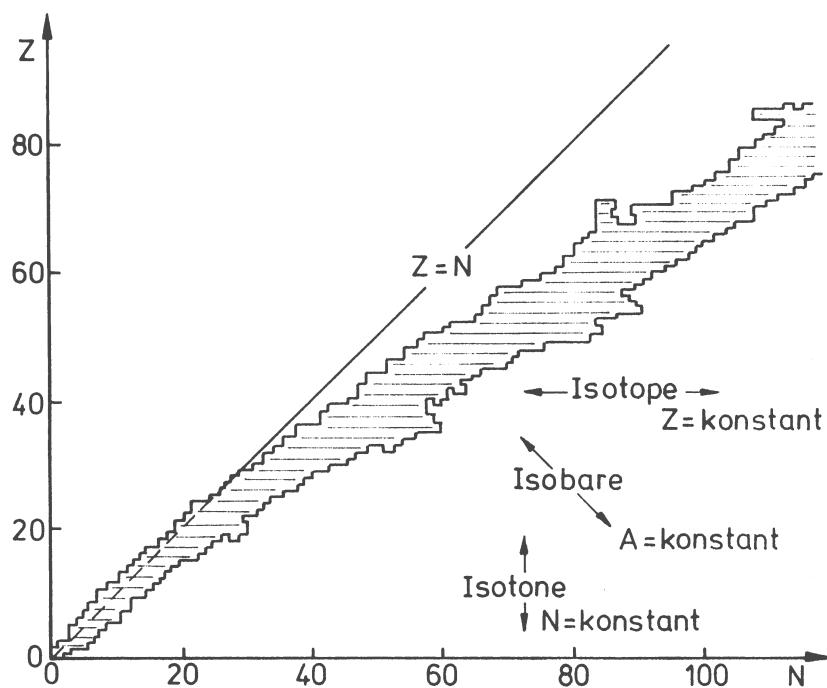


Abbildung 8.8: Lage der stabilen Kerne in der N-Z-Ebene.

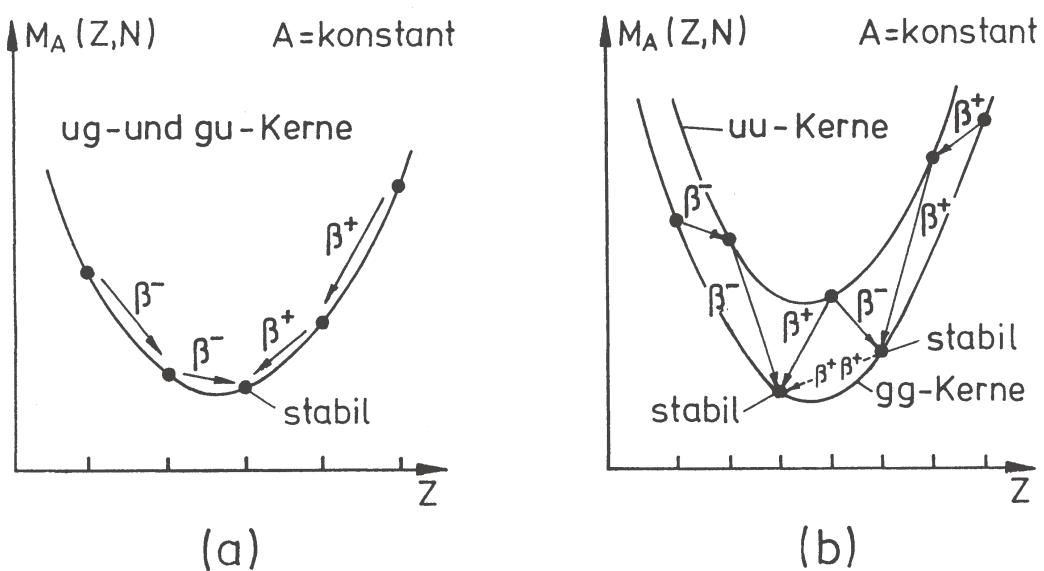


Abbildung 8.9:  $\beta$ -Übergänge zum Massenminimum innerhalb einer Isobarenreihe: a)  $A$  ungerade ( $ug$  oder  $gu$ ); b)  $A$  gerade ( $gg$  oder  $uu$ ): die zwei Parabeln treten wegen der unterschiedlichen Paarungsenergie  $\pm\delta$  für  $gg$ - und  $uu$ -Kerne auf. In diesem Fall sind mehrere  $\beta$ -stabile Nuklide für ein festes  $A$  möglich.

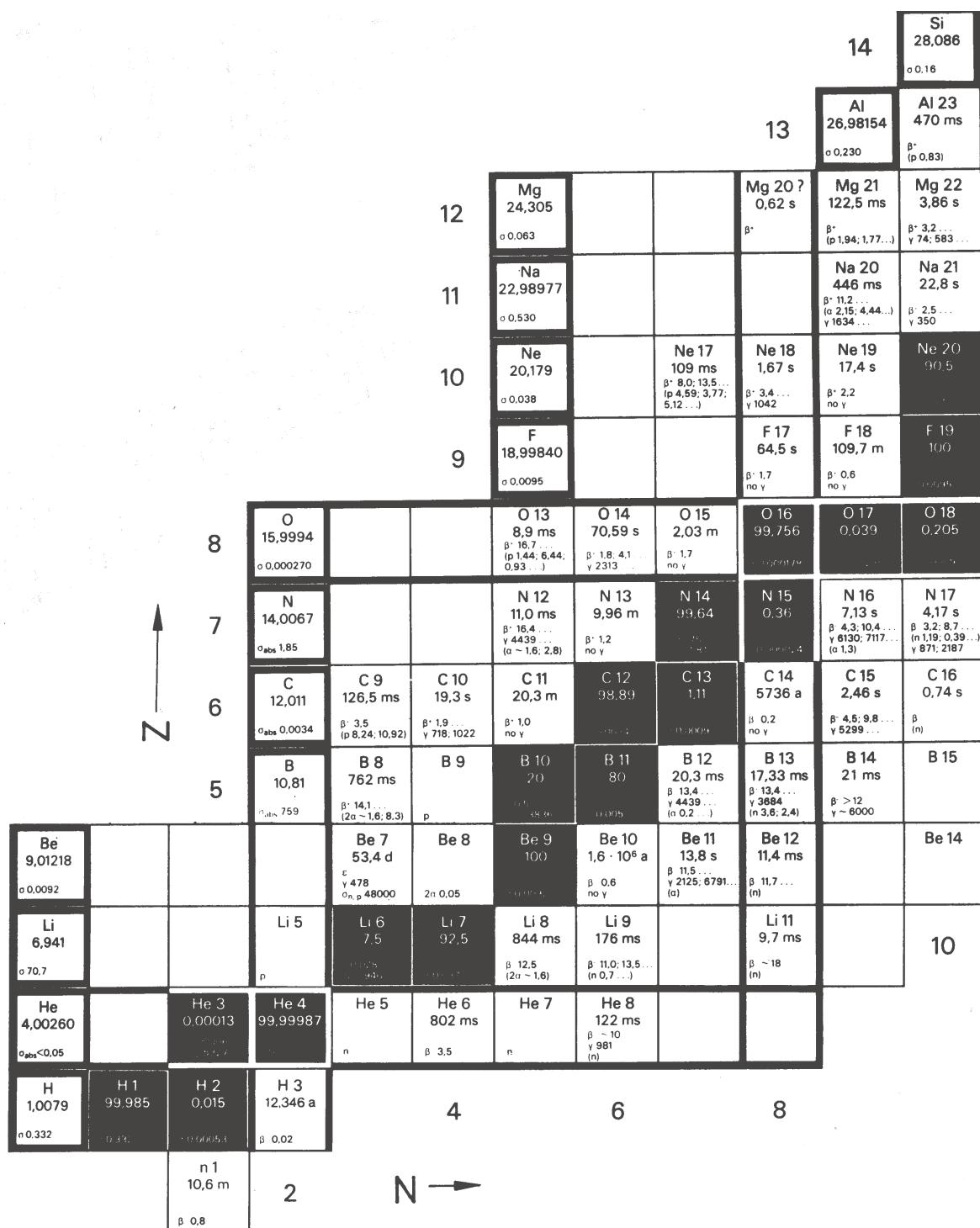


Abbildung 8.10: Ausschnitt aus der Karlsruher Nuklidkarte. Für die stabilen Nuklide (schwarz) sind das Elementsymbol, die Nukleonenzahl A, die Häufigkeit im natürlichen Element und  $(n, \gamma)$ -Wirkungsquerschnitte angegeben; bei den instabilen Nukliden das Elementsymbol, die Nukleonenzahl A, Halbwertszeit und Zerfallsarten mit Maximalenergien.

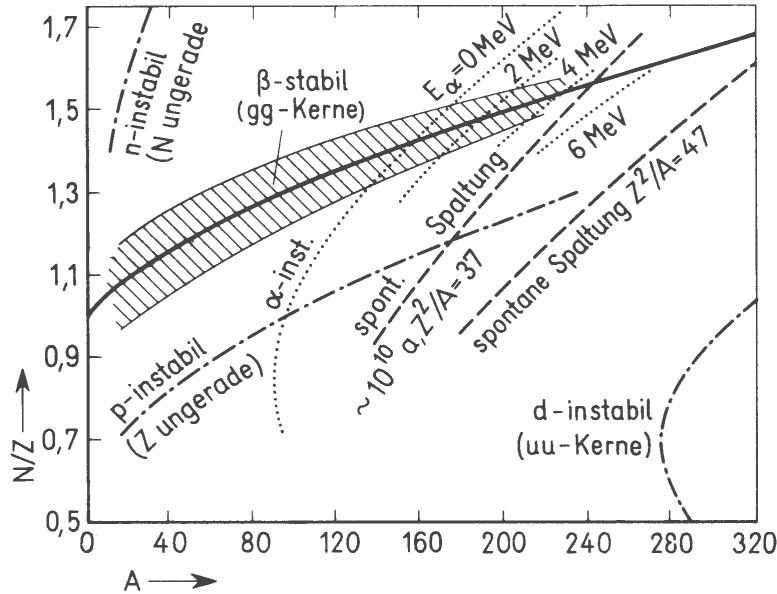


Abbildung 8.11: Stabilitätsgrenzen für Teilchenemission und Spaltung in der A-N/Z-Ebene.

- Maximum bei  $A \approx 60$  durch gegenläufiges Verhalten der Oberflächen- und Coulomb-Terme;
- die maximale Bindungsenergie, entsprechend der minimalen Masse, liegt für festes  $A$  bei  $N \geq Z = Z_0$  (Abb. 8.8);
- für  $Z \neq Z_0$  bei festem  $A$  ist der Kern  $\beta$ -instabil (Abb. 8.9);
- instabil gegen n-Emission wird ein Kern, wenn gilt

$$E_n = [m(Z, A) - m(Z, A - 1) - m_n] > 0; \quad (8.24)$$

- Kernspaltung wird für  $A > 90$  exotherm;
- Kernfusion ist für leichte Kerne exotherm.

Verschiedenen Stabilitätsgrenzen, die man aus der Massenformel ableiten kann, sind in Abb. 8.11 dargestellt.

**Nuklidkarte:** In den Nuklidkarten (Abb. 8.10) sind die stabilen und instabilen Nuklide dargestellt. In den Originalkarten haben die Nuklide unterschiedliche Farben für

- stabil
- $\beta^+$ -instabil,
- $\beta^-$ -instabil,

- $\alpha$ -instabil,
- Spaltungs-instabil.

Außerdem ist in den Karten angegeben:

- relative Häufigkeit stabiler Nuklide,
- Lebensdauer,
- Zerfallskanäle,
- Wirkungsquerschnitt für thermische Neutronen.

## 8.5 Spin, Parität, magnetisches Moment

Kerne haben einen Eigendrehimpuls oder **Kernspin**  $\vec{I}$ , der sich aus dem Gesamtspin  $\vec{S}$  der Nukleonen und dem Gesamtbahndrehimpuls  $\vec{L}$  zusammensetzt:

$$\vec{I} = \vec{S} + \vec{L} \quad (8.25)$$

Die **Parität** ergibt sich mit der Bahndrehimpulsquantenzahl  $L$ :

$$P = (-1)^L \quad (8.26)$$

Wie in der Teilchenphysik werden Kerne durch Spin und Parität gekennzeichnet, zum Beispiel:  $I^P = 0^+, 3/2^-, \dots$

Mit dem Kernspin ist ein **magnetisches Moment** verknüpft:

$$\mu_I = g_K \cdot \mu_K \cdot I. \quad (8.27)$$

Dabei ist  $I$  die Spinquantenzahl (= maximale Spinkomponente),  $\mu_K$  das bereits eingeführte Kernmagneton,  $g_K$  der Landé-Faktor, der die magnetische Anomalie der Nukleonen und deren Verteilung berücksichtigt. Die magnetischen Momente von Kernen sind typisch etwa 3 Größenordnungen kleiner als die der Atomhülle, weil das Kernmagneton etwa 2000 mal kleiner als das Bohrsche Magneton ist ( $\mu_K/\mu_B = m_e/m_p$ ). Die magnetischen Momente können zum Beispiel mit Hilfe der Resonanzmethode nach Rabi gemessen werden (Abb. 8.14).

Für die magnetischen Momente findet man nur sehr beschränkt eine Systematik. Einfach wird es nur für  $gg$ -Kerne im Grundzustand, weil sich da die Nukleonen paarweise zu  $I = 0$  kompensieren.

### 8.5.1 Anwendungen der Kernspins

**Hyperfeinstruktur:** Die Kopplung des Kernspins mit dem Drehimpuls  $\vec{J}$  der Elektronenhülle

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J} \quad (8.28)$$

führt zu einer Hyperfeinstrukturaufspaltung. Zum Beispiel können die Drehimpulse beim Wasserstoff ( $I = 1/2, J = 1/2$ ) zu  $F = 0$  oder  $F = 1$  koppeln. Der Übergang ( $F = 0 \rightarrow F = 1$ ) bei einer Wellenlänge von 21 cm (Abb. 8.12) spielt in der Astronomie eine besondere Rolle, weil das die einzige Möglichkeit bietet, kalten Wasserstoff im Weltall zu messen. Zum Beispiel wurde mit Hilfe der 21 cm-Linie die Spiralstruktur der Milchstraße beobachtet (Abb. 8.13).

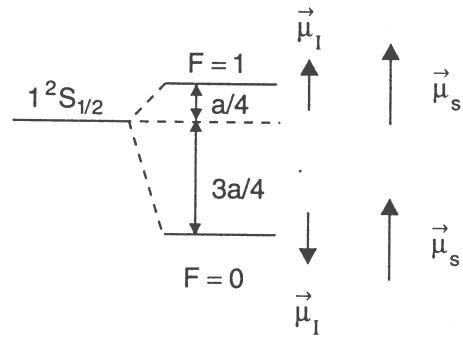


Abbildung 8.12: Hyperfeinstrukturaufspaltung des Grundzustandes des Wasserstoffs ( $\vec{\mu}_I$ ,  $\vec{\mu}_s$  sind die magnetischen Momente des Protons und des Elektrons). Der Übergang zwischen  $F = 1$  und  $F = 0$  hat die Wellenlänge 21 cm.

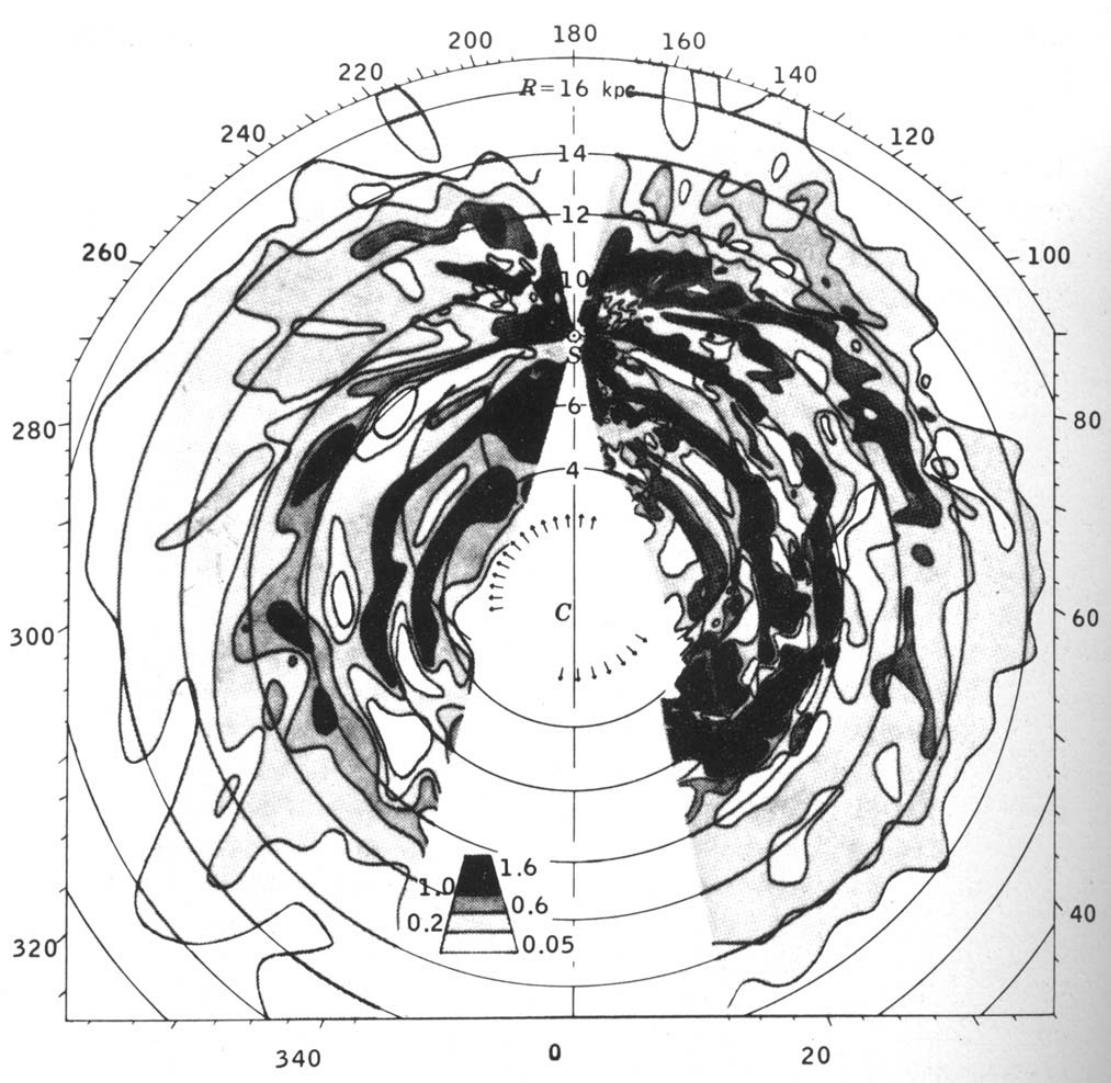


Abbildung 8.13: Verteilung des neutralen Wasserstoffs in der Milchstraße basierend auf Radiobeobachtungen der 21 cm-Linie.

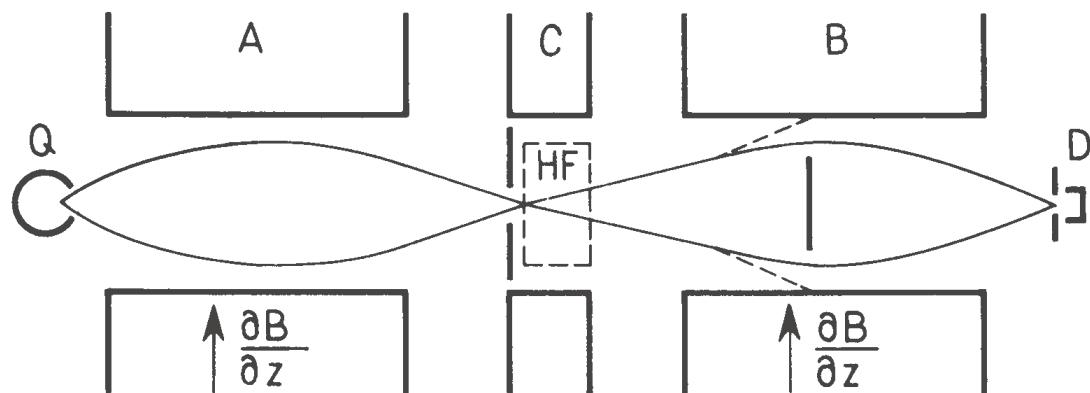


Abbildung 8.14: Apparatur zur Messung magnetischer Momente von Kernen mit Hilfe der Resonanzmethode nach Rabi: Ein Strahl von Atomen oder Molekülen mit verschwindendem magnetischen Moment der Atomhülle wird durch zwei inhomogene magnetische Felder A und B geschickt. Durch die Kraft des Gradientenfeldes auf die magnetischen Momente wird der Strahl für eine bestimmte Einstellung der Momente durch eine Blende vor dem Bereich C auf den Detektor D abgebildet. In dem homogenen Magnetfeld C wird ein Hochfrequenzfeld mit variabler Frequenz eingestrahlt. Bei der Resonanzfrequenz  $\nu = \Delta E/h = \mu_I B/h$  klappen die Kernspins um und der Strahl geht im Bereich B verloren, was als Minimum im Detektorsignal registriert wird.

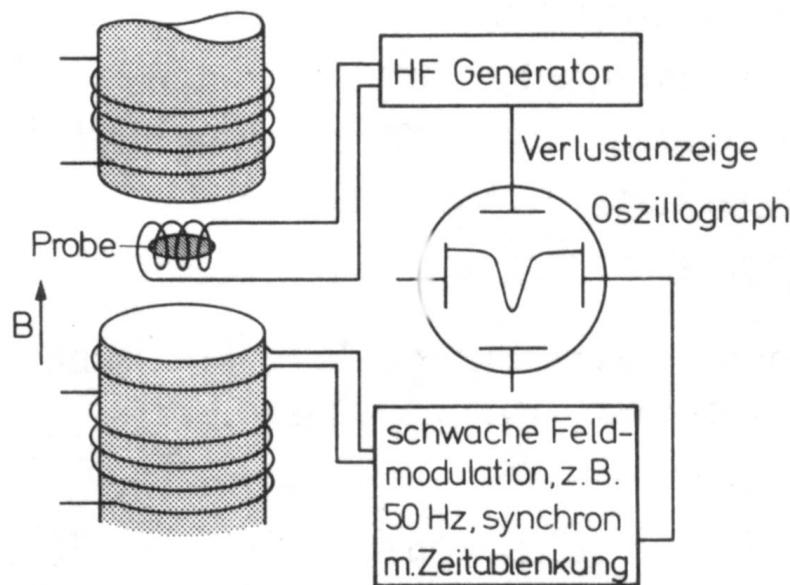


Abbildung 8.15: Prinzip einer Kernresonanz-Apparatur.

**Kernspinresonanz (NMR):** Magnetische Momente richten sich in einem Magnetfeld aus. Um den Spin in einem Magnetfeld  $\vec{B}$  umzuklappen, muß man eine Energie

$$\Delta E = g_K \cdot \mu_K \cdot B \cdot \Delta I_z \quad (8.29)$$

aufbringen, die man einem Strahlungsfeld mit der Frequenz  $\nu = \Delta E / h$  entnehmen kann. Bei Wasserstoff ergibt sich die ‘Protonenresonanz’ bei:

$$\frac{\nu}{B} = 42.57 \frac{\text{MHz}}{\text{T}} \quad (8.30)$$

Abbildung 8.15 zeigt eine Protonenresonanz-Sonde in einem Magnetfeld. Ein Hochfrequenzgenerator speist Strahlung in die Sonde ein. Wenn der Generator die oben angegebene Resonanzfrequenz trifft, wird Strahlung absorbiert. Das Absorptionsignal wird gemessen. Das Signal bleibt auch nach längerer Einstrahlung sichtbar, weil die Spins durch thermische Anregung wieder zurückklappen.

### Anwendungen der NMR-Methode:

- Präzisionsmessung von Magnetfeldern;
- Kernspintomographie (in Materialwissenschaften, Medizin, Chemie, Technik): Das Untersuchungsobjekt wird in ein inhomogenes Magnetfeld gebracht. Dadurch wird die Resonanzfrequenz ortsabhängig, und es lassen sich Dichteverteilungen von Kernen messen.
- NMR-Spektroskopie: Durch den Einfluß chemischer Bindungen auf die Kernresonanzfrequenz lassen sich mit der NMR-Methode komplexe räumliche Molekülstrukturen analysieren (Chemie-Nobelpreis 1991 R. Ernst; siehe Physikalische Blätter 39 (1983); 42 (1986)).

# Kapitel 9

## Zerfall instabiler Kerne

Aus der Massenformel (Abschnitt 8.4.4) kann man die Bedingungen für die Stabilität eines Nuklids ableiten. Die Mehrzahl der bekannten Nuklide ist instabil und zerfällt über  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -,  $n$ -Strahlung und Kernspaltung. Im folgenden sollen solche Zerfälle instabiler Nuklide insbesondere in Hinblick auf die Anwendungen in Wissenschaft und Technik besprochen werden.

### 9.1 Zerfallsgesetz

In Abschnitt 1.5 haben wir bereits den Zusammenhang zwischen Zerfallswahrscheinlichkeit  $\lambda$ , Lebensdauer  $\tau$  und der Energiebreite  $\Gamma$  eines Teilchenzustandes besprochen:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\Gamma}{\hbar} \stackrel{\hbar=1}{=} \Gamma. \quad (9.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kern zerfällt, ist pro Zeit immer gleich, insbesondere auch unabhängig von äußeren Parametern wie Druck oder Temperatur:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = n_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (9.2)$$

Man definiert die **Aktivität** einer Probe:

$$A = -\frac{dn}{dt} = \lambda \cdot n \quad (9.3)$$

Die Einheit der Aktivität ist das Becquerel:

$$[A] = \text{Becquerel} = \text{Bq} = \text{s}^{-1} \quad (9.4)$$

In der Kernphysik wird häufig statt der Lebensdauer die **Halbwertszeit**  $\tau_{1/2}$  benutzt:

$$n(\tau_{1/2}) = n_0 \cdot e^{-\lambda \tau_{1/2}} = n_0 / 2 \quad \Rightarrow \quad \tau_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = \tau \cdot 0.693 \quad (9.5)$$

Für alternative Zerfälle definiert man die partiellen Zerfallswahrscheinlichkeiten und Verzweigungsverhältnisse:

$$\lambda = \sum_i \lambda_i, \quad B_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad (9.6)$$

## 9.2 Natürliche Radioaktivität

Von der Erzeugung der Kerne vor der Entstehung der Erde sind instabile Kerne mit langer Lebensdauer noch vorhanden. Ein Beispiel ist  $^{40}\text{K}$ , ein  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahler mit einer Halbwertszeit von  $1.28 \cdot 10^9$  a. Da Kalium in unserem Körper aufgenommen wird, trägt dieses Radionuklid wesentlich zur natürlichen Strahlenbelastung bei (siehe unten).

Die schwersten Radionuklide treten in Zerfallsreihen auf, bei denen ein instabiler Anfangskern über eine Kaskade von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zerfällen in einen stabilen Endkern übergeht. Bei den Zerfällen ist die Änderung der Massenzahl jeweils:

$$\begin{aligned} \alpha\text{-Zerfall} &\Rightarrow \Delta A = 4 \\ \beta\text{-Zerfall} &\Rightarrow \Delta A = 0. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Deshalb gilt innerhalb einer Zerfallsreihe

$$A = 4n + k; \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{9.8}$$

wobei  $k$  die 4 natürlichen Zerfallsreihen (Abb. 9.1) definiert:

A	Anfangskern	$\tau_{1/2}$ [a]	Endkern
$4n$	$^{232}\text{Th}$	$1.40 \cdot 10^{10}$	$^{208}\text{Pb}$
$4n+1$	$^{237}\text{Np}$	$2.14 \cdot 10^6$	$^{209}\text{Bi}$
$4n+2$	$^{238}\text{U}$	$4.47 \cdot 10^9$	$^{206}\text{Pb}$
$4n+3$	$^{235}\text{U}$	$7.04 \cdot 10^8$	$^{207}\text{Pb}$

Die Lebensdauern der Kerne der  $4n+1$ -Zerfallsreihe sind kurz gegenüber dem Erdalter, deshalb treten diese Zerfälle in der Natur nicht mehr auf.

## 9.3 Anwendungen der Radioaktivität

Radionuklide, in der Natur vorhandene oder an Beschleunigern durch Bestrahlung erzeugte, werden in vielen Bereichen der Wissenschaft, Medizin und Technik eingesetzt. Im folgenden werden einige Beispiele gegeben. Eine kompakte Übersicht kann man auch in dem Lehrbuch von Demtröder (Bd. 4, Abschnitt 8.1) bekommen.

### 9.3.1 Datierungsmethoden

**Geologische Datierung:** Die Häufigkeiten von Zerfallsprodukten, die von den Zerfallsreihen stammen, werden zur geologischen Datierung benutzt. Zum Beispiel führen die  $\alpha$ -Zerfälle zum Einschluß von Helium in Gesteinen, das quantitativ nachgewiesen werden kann.

Wenn in ein Mineral bei seiner Bildung nur der Mutterkern, nicht aber der aus einem Zerfall stammende Tochterkern eingebaut wird, kann man auf die Zeit der

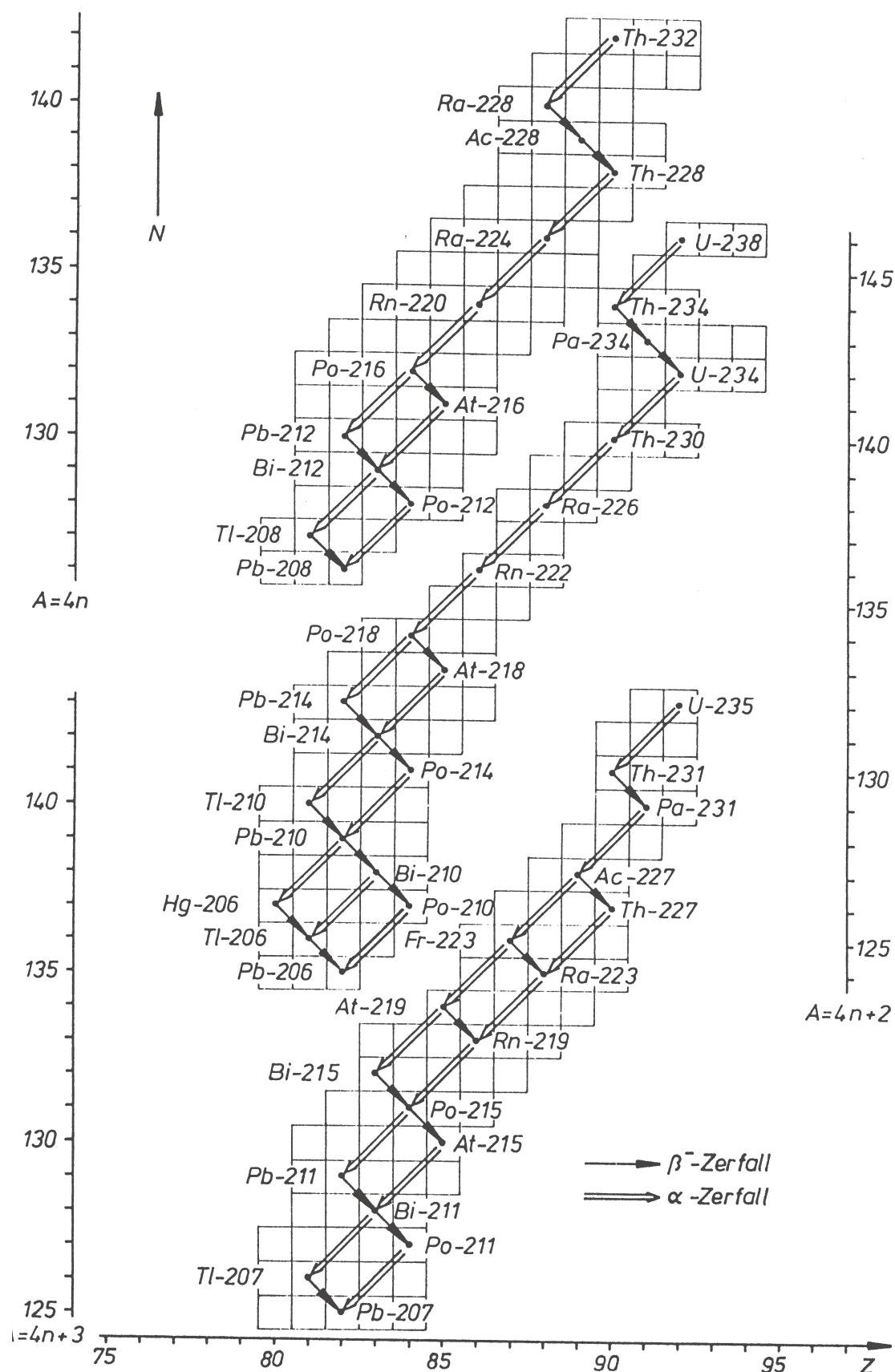


Abbildung 9.1: Die drei natürlich vorkommenden radioaktiven Zerfallsreihen mit ihren Seitenzweigen.

Bildung des Minerals über das Verhältnis der Konzentrationen beider Substanzen schließen. Nach der Zeit  $t$  ist nämlich in dem Mineral folgende Anzahl  $n_2$  des Tochternuklids vorhanden:

$$n_2(t) = n_1(0) - n_1(t) = n_1(0) (1 - e^{-\lambda_1 t}) = n_1(t) (e^{\lambda_1 t} - 1) \quad (9.9)$$

Aus dem augenblicklichen Verhältnis  $n_2/n_1$  und der Kenntnis von  $\lambda_1$  lässt sich dann  $t$  bestimmen.

**Archäologische Datierung mit  $^{14}\text{C}$ :** In der Atmosphäre wird durch kosmische Strahlung in der Reaktion



das  $\beta$ -instabile Kohlenstoff-Isotop  $^{14}\text{C}$  gebildet. Die Produktion und der Zerfall



(die Schreibweise enthält die Halbwertszeit des Zerfalls) sind im Gleichgewicht, das bei folgender  $^{14}\text{C}$ -Konzentration relativ zum häufigsten Kohlenstoff-Isotop  $^{12}\text{C}$  erreicht wird:

$$^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 1.5 \cdot 10^{-12}. \quad (9.12)$$

Organismen nehmen lebend  $^{14}\text{C}$  in natürlicher Konzentration auf. Nach dem Absterben klingt dann die  $\beta$ -Aktivität nach dem Zerfallsgesetz ab. Zum Beispiel ist die Aktivität eines jungen Baumes 0.24 Bq/g und eines vor 5730 Jahren als Bauholz verarbeiteten Baumes 0.12 Bq/g.

### 9.3.2 Tracer-Methoden

Die radioaktive Markierung von Substanzen erlaubt die Verfolgung der Ausbreitung oder Veränderung von Substanzen ohne Eingriff in den zu untersuchenden Ablauf. Dazu werden den beobachteten Substanzen kleine Mengen radioaktiver Präparate hinzugefügt, die sich in bekannter Weise in die Substanz einbauen (chemisch, biologisch, physikalisch).

Diese Verfahren werden in Wissenschaft, Medizin und Technik benutzt. Zum Beispiel kann auf diese Weise der Stoffwechsel in biologischen Systemen oder der Verlauf von unterirdischen Wasseradern (Tritium in Wasser) verfolgt werden.

In der medizinische Diagnose wird diese Methode sehr vielfältig eingesetzt. Ein Beispiel ist die Untersuchung der Schilddrüse mit Hilfe des  $\gamma$ -Strahlers  $^{131}\text{I}$ , der sich in der Schilddrüse anreichert (Abb. 9.2).

Eine besonders gute Auflösung des Ortes der Anreicherung eines Radionuklids bekommt man mit der Positron-Emissions-Tomographie (PET). Hier benutzt man  $\beta^+$ -Strahler und weist die beiden Photonen des Vernichtungsprozesses



in Koinzidenz nach, was die Ortsauflösung wesentlich verbessert beziehungsweise die notwendige Aktivität verringert (Abb. 9.3).

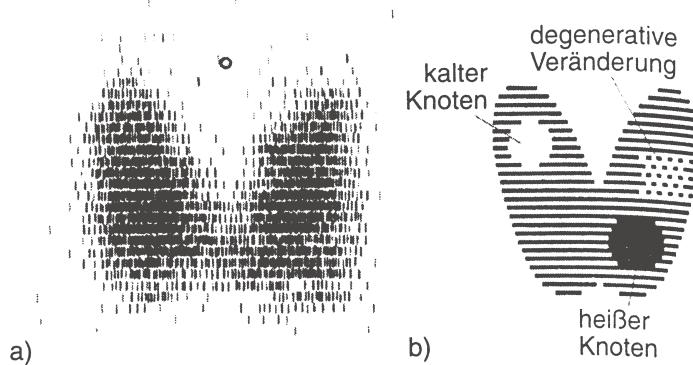


Abbildung 9.2: a) Szintigramm der Schilddrüse nach Verabreichung von  $^{131}\text{I}$  an den Patienten. b) Schematische Darstellung von möglichen Veränderungen in der Schilddrüse.

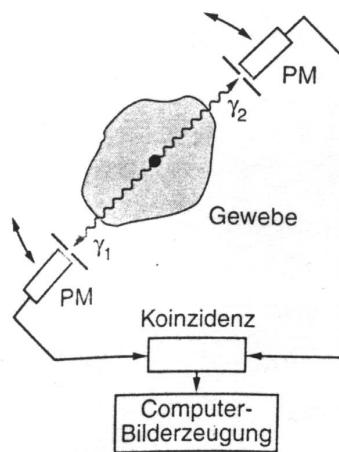


Abbildung 9.3: Positron-Emissions-Tomographie: Die Annihilationsphotonen werden mit zwei Detektoren in Koinzidenz nachgewiesen.

### 9.3.3 Anwendungen in der Technik

Ein Beispiel für die Anwendung von Radionukliden in der Technik ist die Steuerung von Walzstraßen: Ein radioaktives Präparat wird in die Nähe des gewalzten Materials gebracht und auf der gegenüberliegenden Seite wird die Teilchenrate gemessen, die von der zu steuernden Dicke abhängt.

Eine andere Anwendung läuft unter dem Begriff ‘Radionuklid-Technik im Maschinenbau’ (RTM): Zum Beispiel können Maschinenteile aktiviert werden und der Abrieb kann über die absinkende Aktivität oder die Aktivität in einem Ölkreislauf gemessen werden.

### 9.3.4 Neutronenaktivierung

Eine zerstörungsfreie Untersuchung erlaubt die Aktivierung von Proben mit Neutronen von Reaktoren oder speziellen Neutronenquellen. Die in den Proben aktivierte Elemente zerfallen mit charakteristischen Zerfallszeiten bevorzugt über  $\beta$ - oder  $\gamma$ -

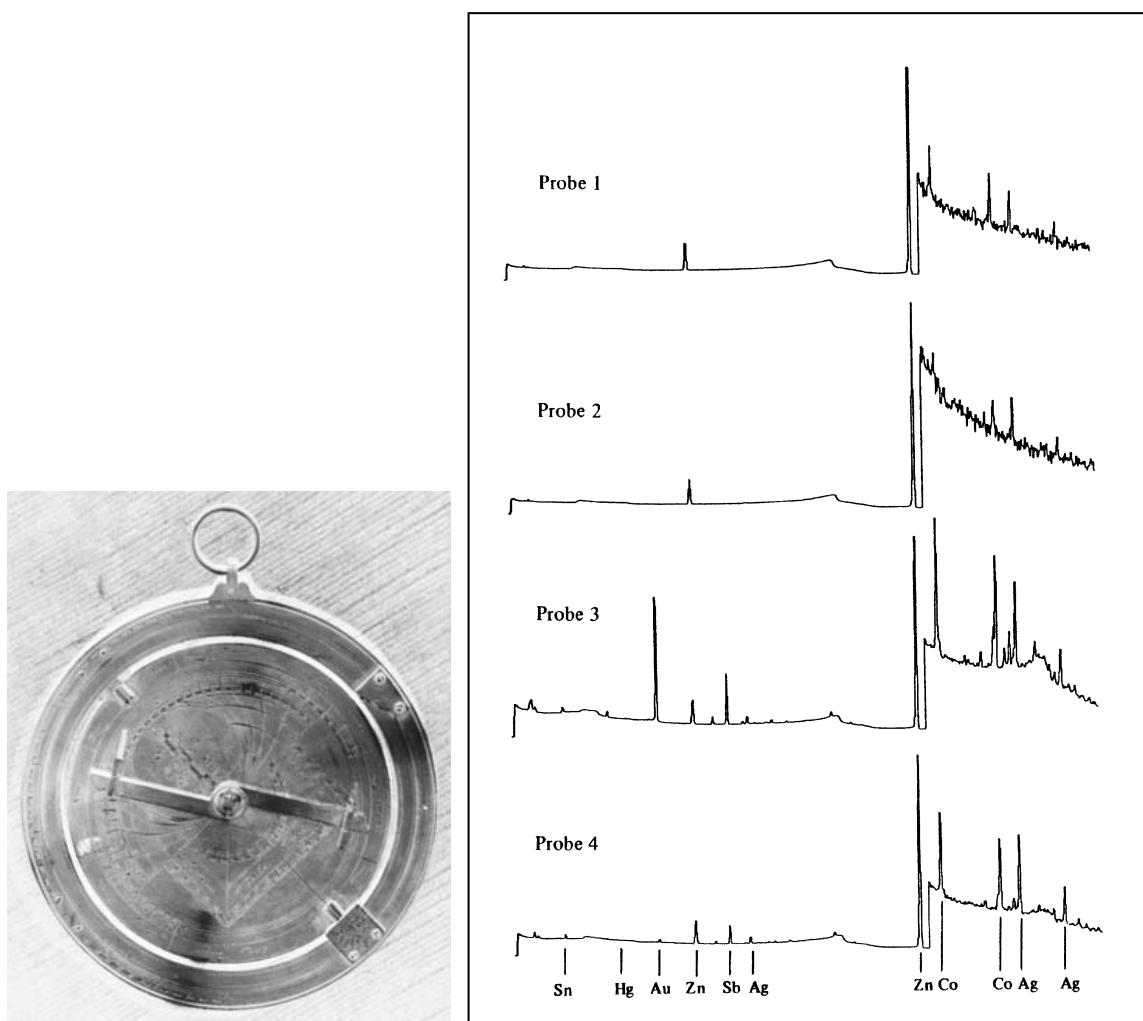


Abbildung 9.4: Untersuchung eines Instrumentes (links, entspricht rechts Probe 2), das aus dem 18. Jahrhundert stammen sollte, durch Neutronenaktivierungsanalyse. Die  $\gamma$ -Spektren dieser Probe werden mit zwei Proben ähnlicher Instrumente aus dieser Zeit (Probe 3 und 4) und einer Probe eines modernen Instrumentes (Probe 1) verglichen. Probe 2 ist der Probe des modernen Instrumentes am ähnlichsten und wird damit als Fälschung entlarvt.

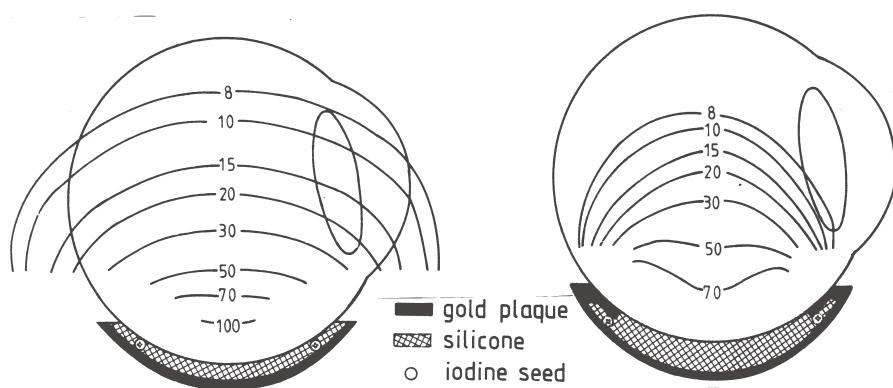


Abbildung 9.5: Entwicklung von Applikatoren für radioaktive Präparate (hier  $^{125}\text{I}$  mit  $\gamma$ -Strahlung von etwa 30 keV): gezeigt ist das Auge mit Linse und die relative Strahlungsdosis als Funktion des Ortes. Die Optimierung erfolgt in Hinblick auf eine gleichmäßige Verteilung der Strahlung über den Tumor (z. B. Aderhautmelanome) und die Risikominimierung für empfindliche Organe (Sehnerv, Linse).

Abstrahlung. Durch spektroskopische Messungen kann auf die Elementenhäufigkeit in der Probe geschlossen werden (Abb. 9.4). Untersuchungen größerer Flächen, wie zum Beispiel Gemälde, werden in verschiedene Zeitabständen aufgelegte Photoplatten durch die Strahlung belichtet, so dass man auf die verschiedenen Zerfallskonstanten der aktivierte Elemente sensitiv wird.

### 9.3.5 Strahlentherapie

Für eine wirkungsvolle Behandlung von Tumoren ist man in vielen Fällen auf Strahlentherapie, häufig in Verbindung mit einer Chemotherapie, angewiesen. Neben einer großen Zahl verschiedener Radionuklide werden heute auch Beschleuniger (Elektronen, Protonen, Ionen) eingesetzt.

Häufig findet die  $\gamma$ -Strahlung von  $^{60}\text{Co}$  (etwa 1 MeV) Anwendung, zum Beispiel bei Ganzkörperbestrahlungen zur Behandlung von Leukämien (in Verbindung mit Knochenmarktransplantationen).

In der sogenannten Brachytherapie werden radioaktive Quellen mit kürzerer Reichweite ( $\beta$ - und niederenergetische  $\gamma$ -Strahlung) nahe an den Tumor gebracht (zum Beispiel bei Kehlkopf-, Schilddrüsen oder Augentumoren, siehe Abb. 9.5).

## 9.4 Dosimetrie

**Einheiten:** Die Dosimetrie legt fest, wie Radioaktivität und die von einer Substanz absorbierte Strahlung zu messen ist. Dazu werden folgende Begriffe benutzt:

- Aktivität: Zerfallsrate einer radioaktiven Probe;
- Dosis: Strahlungsabsorption pro Masse, wobei man unterscheidet:
  - Ionendosis: erzeugte Ladung pro Masse;
  - Energiedosis: absorbierte Energie pro Masse;
  - Äquivalentdosis: Dosis multipliziert mit einem Faktor für die Bewertung der biologischen Wirksamkeit;
- Dosisleistung: Dosis pro Zeit.

In der folgenden Tabelle sind die SI-Einheiten der dosimetrischen Größen zusammen mit den veralteten Einheiten angegeben:

Größe	Symbol	SI-Einheit	veraltete Einheit
Aktivität	$A$	$1 \text{ Bq} = 1 \text{ Becquerel} = 1/\text{s}$	$1 \text{ Ci} = 37 \cdot 10^9 \text{ Bq}$
Ionendosis	$D$	$1 \text{ C/kg}$	$1 \text{ R} = 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$
Energiedosis	$D$	$1 \text{ Gy} = 1 \text{ Gray} = 1 \text{ J/kg}$	$100 \text{ rad} = 1 \text{ Gy}$
Äquivalentdosis	$D_e = D \cdot Q_f$	$1 \text{ Sv} = 1 \text{ Sievert}$	$100 \text{ rem} = 1 \text{ Sv}$

Je höher die Ionisierungsdichte durch Strahlung in einem biologischen Gewebe ist, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit für einen bleibenden Defekt (zum Beispiel Doppelstrangbrüche in der DNA). Der Bewertungsfaktor  $Q_f$  trägt der unterschiedlichen biologischen Wirksamkeit Rechnung:

Strahlung	$Q_f$	Energie/MeV	Reichweite in Wasser
$\gamma$	~ 1	0.02	6.4 cm
	~ 1	1.00	65 cm
$\beta$	~ 1	0.02	10 $\mu\text{m}$
	~ 1	1.00	7.0 mm
langsame n	2 - 3	therm.	(Diffusion)
schnelle n	~ 10	~ 1	(Abbremsung und Diffusion)
p	~ 10	10	3 mm
schwere Kerne	$\geq 20$	50	$\sim 1 \mu\text{m}$

**Strahlenschutz:** Die Einhaltung von Grenzwerten für die Strahlenexposition ist gesetzlich geregelt. Die bisher geltenden Grenzwerte sind 2001 etwa halbiert worden. Einige Grenzwerte sind hier als Beispiel angegeben:

Personenkreis	Grenzwert
beruflich strahlenexponiert: mit ärztlicher Überwachung	< 20 mSv/a
beruflich strahlenexponiert:	< 6 mSv/a
beruflich nicht strahlenexponiert:	< 1 mSv/a

Einer ständigen Bestrahlung sind wir durch die **natürliche Radioaktivität** und Umwelteinflüsse ausgesetzt. Diese Strahlung kann sehr unterschiedlich, zum Beispiel orts- und zeitabhängig, sein. Im folgenden sind typische Werte für Deutschland angegeben:

Strahlungsquelle	Dosis [mSv/a]
Strahlung aus dem Boden:	0.4
Kosmische Strahlung:	0.3
$^{40}\text{K}$ im Körper:	0.3
Radon durch Atmung:	1.0
insgesamt durch nat. Radioakt.:	1 - 4
Medizin (Diagnose, Therapie):	0.6
Kernkraftwerke:	$\leq 0.01$

Die obere Grenze für Kernkraftwerke gilt natürlich nur, wenn es keinen größeren Unfall gibt. Der Tschernobyl-Unfall 1986 hat die  $\beta$ -Aktivität der Bodenoberfläche in einigen Gegenden Deutschlands auf das Dreifache anwachsen lassen, auf etwa 25000 Bq/m<sup>2</sup>. Der Sockel der  $\beta$ -Aktivität vor Tschernobyl rührte von den oberirdischen Kernwaffenversuchen in den fünfziger und sechziger Jahren her. Die zusätzliche Belastung der deutschen Bevölkerung durch den Tschernobyl-Unfall war 1986:

Strahlungsquelle	Dosis [mSv/a]
Nahrung	max. 0.7 - 0.9 (Mittel: 1/5 davon)
Luft	0.03 - 0.06
Boden	0.03 - 0.06

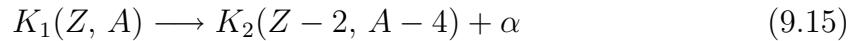
Die Strahlendosis wird mit Dosimetern gemessen. Am gängigsten sind Ionisationskammer (Abb. 3.21), die die von ionisierender Strahlung in einem Gasvolumen erzeugte Ladung messen. Die Meßwerte werden dann in der Regel auf Energiedosiswerte umgerechnet. Die Kalibrierung erfolgt mit Referenznormalen (zum Beispiel in der PTB Braunschweig). Die Aktivität einer Probe kann mit Geiger-Zählrohren gemessen werden. Als integrierende Zähler zur Personenüberwachung werden Filmdosimeter verwendet, die zum Beispiel einmal pro Monat ausgewertet werden. Besonders schwierig, aber auch sehr wichtig, ist die Kontrolle von Neutronenstrahlung. Wegen ihrer fehlenden Ladung können erst die Sekundärteilchen aus einer Wechselwirkung des Neutrons mit dem Detektormaterial nachgewiesen werden.

## 9.5 Alpha-Zerfall

Die  $\alpha$ -Strahlung besteht aus Helium-Kernen:

$$\alpha = {}_2^4He = 2p\ 2n. \quad (9.14)$$

Der Helium-Kern ist als gg-Kern besonders stabil. Diese stabile 4-Nukleonen-Konstellation existiert auch als Einheit innerhalb schwererer Kerne. Die Emission von  $\alpha$ -Teilchen ist deshalb für instabile schwere Kerne eine häufige Zerfallsart:



Der Zerfall ist möglich, wenn gilt:

$$m_1(Z, A) - m_2(Z - 2, A - 4) - m_\alpha > 0 \quad (9.16)$$

Das Spektrum der  $\alpha$ -Teilchen ist monoenergetisch, was auf einen 2-Körperzerfall mit einem Übergang zwischen festen Energieniveaus hinweist. Die Energie kann durch Reichweitemessung bestimmt werden (siehe Abschnitt 3.2.1, Tabelle 3.2 und Abb. 3.12). Die  $\alpha$ -Energie und die Lebensdauer des Zerfallskerns sind korreliert: je kürzer die Lebensdauer, umso höher die Energie. Zum Beispiel:

	${}^{232}\text{Th}$		${}^{212}\text{Po}$
$\tau$	$10^{10}$ a	...	$10^{-7}$ s
$E_\alpha$	4.0 MeV	...	8.8 MeV

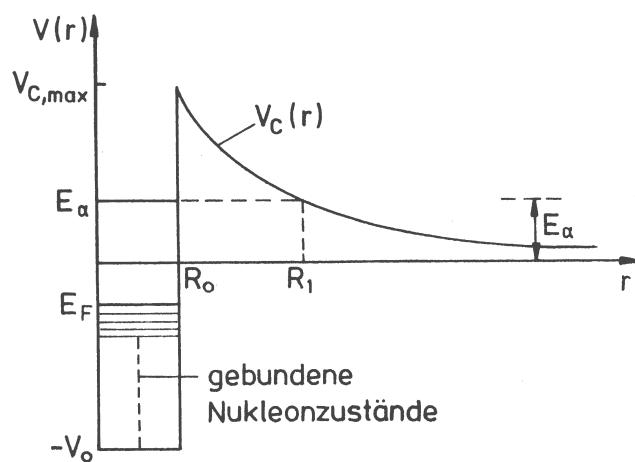


Abbildung 9.6: Potentialverlauf beim  $\alpha$ -Zerfall in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  vom Kernmittelpunkt.

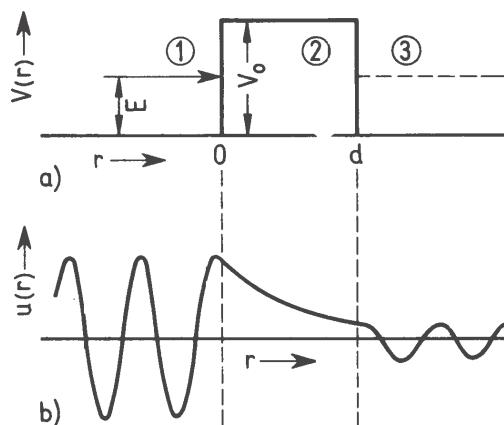


Abbildung 9.7: Beispiel für den Tunneleffekt im eindimensionalen Fall (siehe Text).

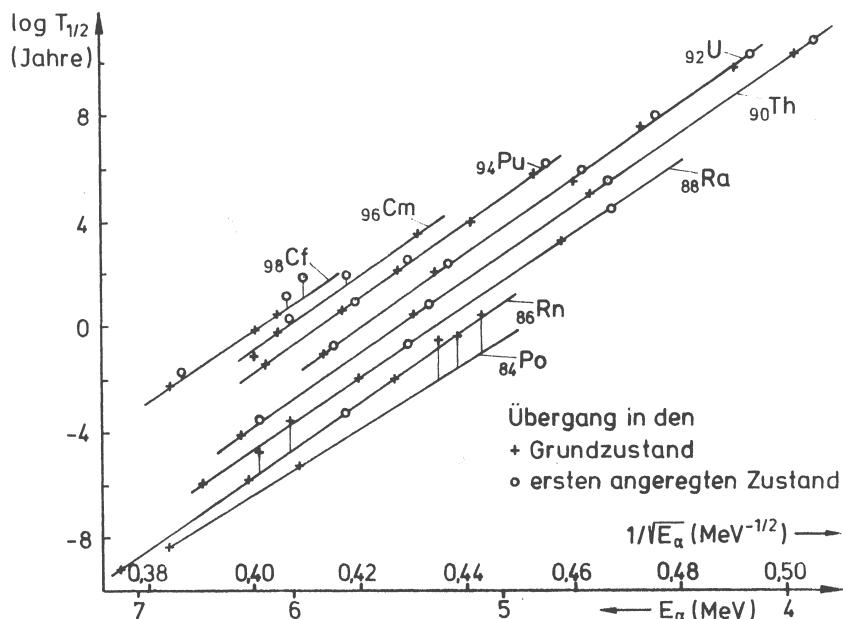


Abbildung 9.8: Abhängigkeiten der Halbwertszeiten von  $\alpha$ -Strahlern von der Energie.

Diese Abhängigkeit lässt sich mit Hilfe eines Modells für den  $\alpha$ -Zerfall verstehen: In Abb. 9.6 ist der Potentialtopf eines Kerns mit den Nukleonenzuständen dargestellt. Wegen der Coulomb-Abstoßung fällt das Potential  $V(r)$  außerhalb des Kerns  $\sim 1/r$  auf  $V(\infty) = 0$  ab. Ein  $\alpha$ -Zustand auf dem Niveau

$$0 < E_\alpha < V(R_0) = V_{max} \quad (9.17)$$

ist klassisch stabil gebunden durch den ‘Coulomb-Wall’. Quantenmechanisch kann das Teilchen die Wand durchtunneln. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot T \quad (9.18)$$

Dabei ist  $\lambda_0$  die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des quasi-stabilen Zustandes multipliziert mit der Häufigkeit, mit der das  $\alpha$ -Teilchen gegen die Potentialwand läuft;  $T$  ist die Wahrscheinlichkeit der Transmissions eines anlaufenden Teilchens durch die Potentialwand.

Die Transmission oder Tunnelwahrscheinlichkeit  $T$  bestimmt im wesentlichen die Energieabhängigkeit der Zerfallswahrscheinlichkeit  $\lambda$ . Die Berechnung von  $T$  soll im folgenden nur kurz skizziert werden, weil der Tunneleffekt üblicherweise ausführlich in der Quantenmechanik behandelt wird. In Abb. 9.7 wird das Prinzip am eindimensionalen Fall gezeigt: Aus dem potentialfreien Raum 1 läuft eine Welle auf eine Rechteckbarriere der Dicke  $d$ , tunnelt hindurch und läuft im Gebiet 3 als freie Welle weiter. Im freien Fall sind die Wellen periodische Lösungen der Schrödinger-Gleichung. Die auf den Potentialberg zulaufende Welle ist:

$$\psi \sim e^{i\vec{p}\vec{r}} \quad \text{mit} \quad |\vec{p}| = \sqrt{2mE}. \quad (9.19)$$

Im Potentialberg, wo das Teilchen klassisch nicht sein dürfte, ist der Impuls imaginär,

$$|\vec{p}| = \sqrt{2m(E - V_0)} = i\sqrt{2m(V_0 - E)}, \quad (9.20)$$

was zu einem exponentiellen Abfall der Amplitude in der Wand führt. Durch stetige Anpassung der Wellenfunktionen bei  $r = 0$  und  $r = d$  erhält man die richtige relative Normierung der Wellenfunktionen in den drei Gebieten. Die Tunnelwahrscheinlichkeit ergibt sich als das Quadrat des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeitsamplituden der auf die Wand laufenden Welle in 1 zu der der auslaufenden Welle in 3. Für einen Potentialwall der Dicke  $d$  und konstanter Höhe  $V_0$  ergibt sich näherungsweise:

$$T = \exp \left( -2\sqrt{2m(V_0 - E)}d \right) \quad (9.21)$$

Das heißt, die Tunnelwahrscheinlichkeit  $T$  hängt exponentiell von der Wanddicke und der Potentialhöhe ab: je dünner die Wand und je niedriger der Potentialwall, umso besser kann das Teilchen hindurchtunneln. Damit ist verständlich, daß die Zustände mit der höheren Energie, die höher im Potentialtopf liegen, kürzere Lebensdauern haben (Geiger-Nuttall-Regel).

Im Fall eines variablen Potentials, wie der Coulomb-Wall in Abb. 9.6, muß über das Potential integriert werden:

$$T = \exp \left( -2 \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2m_\alpha(V(r) - E_\alpha)} dr \right) = e^{-G} \sim \lambda = 1/\tau \quad (9.22)$$

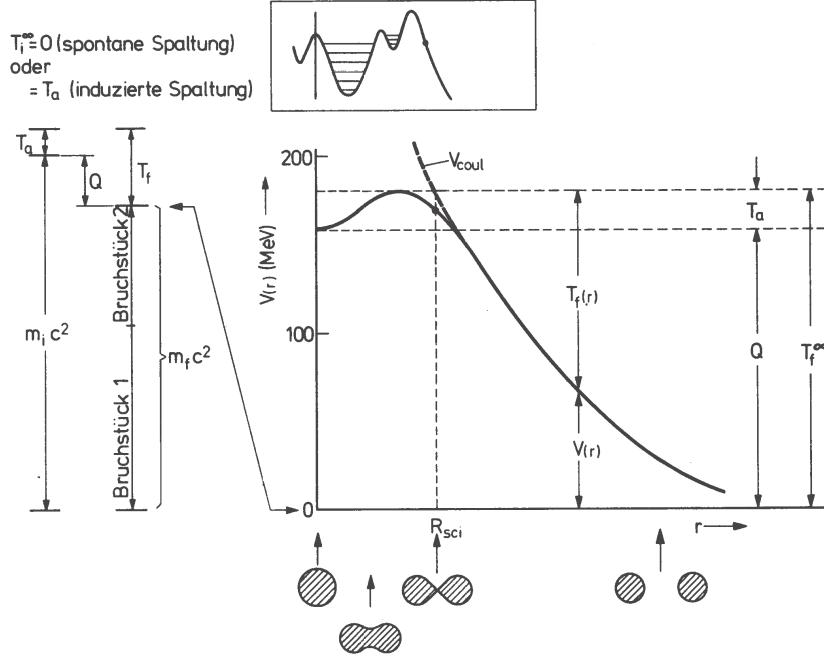


Abbildung 9.9: Modell für den Spaltprozess von Kernen: links sind die Energieverhältnisse nach dem Tröpfchenmodell angegeben; rechts ein realistischeres Modell der Spaltung nach einer Deformation des Kerns.

Da für den in (9.22) definierten Gamow-Faktor  $G$  näherungsweise gilt

$$G \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}, \quad (9.23)$$

ergibt sich eine lineare Beziehung zwischen  $\log \tau$  und  $1/\sqrt{E_\alpha}$  (Abb. 9.8):

$$\log \tau \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} + \text{const.} \quad (9.24)$$

## 9.6 Kernspaltung

Der Kernspaltungsprozess kann ganz ähnlich wie der  $\alpha$ -Zerfall erklärt werden: die beiden Kernfragmente müssen den gemeinsamen Coulomb-Wall durchtunnellen, um sich voneinander trennen zu können. Wann eine Kernspaltung energetisch möglich ist, lässt sich aus der Massenformel (Abschnitt 8.4.4) ableiten. Für den symmetrischen Fall der Spaltung in zwei Kerne mit der halben Masse, erhält man die Bedingung:

$$0 < m(Z, A) - 2 m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) = a_S \left(A^{\frac{2}{3}} - 2\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) + a_C \left(Z^2 \cdot A^{-\frac{1}{3}} - 2\left(\frac{Z}{2}\right)^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right) = -0.26 \cdot a_S \cdot A^{\frac{2}{3}} + 0.37 \cdot a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-\frac{1}{3}} \quad (9.25)$$

$$\Rightarrow Z^2/A > 17.3 \quad (\Rightarrow A \gtrsim 90) \quad (9.26)$$

Wann tatsächlich spontane Spaltung auftritt, hängt allerdings von weiteren Faktoren, wie der Tunnelwahrscheinlichkeit, ab. In Abb. 8.11 ist die Grenze für  $Z^2/A > 37$  eingezeichnet, die einer Lebensdauer von etwa  $10^{10}$  Jahren entspricht, sowie die Grenze für  $Z^2/A > 47$ , ab der Nuklide sich instantan spalten. Oberhalb von  $Z = 92$  gibt es keine stabilen Nuklide.

Die instantane Spaltung sollte einer Energie der Spaltprodukte oberhalb des Coulomb-Walles entsprechen. Aus (9.25) würde sich das allerdings nicht ergeben. Der Spaltprozess läuft offensichtlich komplexer und dynamischer ab, als durch die Massenformel beschrieben werden könnte (Abb. 9.9): Der Kern deFORMiert sich zunächst, so daß die Oberflächenenergie zunimmt und die Coulomb-Energie abnimmt (relativ zu dem statischen Wert in der Massenformel). Ab einer bestimmten Deformation ist es energetisch günstiger, sich in zwei Teile zu spalten.

Die Spaltprodukte sind im allgemeinen instabil, weil  $N/Z$  mit  $A$  wächst. Das heißt, daß die Kerne mit  $A/2$  dann einen n-Überschuß haben, den sie durch  $\beta^-$ -Zerfall oder n-Emission (Spaltneutronen) abbauen.

Durch n-Einfang kann eine Kernspaltung stabiler Kerne angeregt werden (induzierte Kernspaltung in Kernreaktoren).

## 9.7 Beta-Zerfall

### 9.7.1 Zerfallsarten

Der einfachste  $\beta$ -Zerfall ist der Neutron-Zerfall:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad (9.27)$$

Der Zerfall ist möglich, weil das Neutron ausreichend schwerer als das Proton ist:

$$M_n - M_p > m_e \quad (9.28)$$

$$(M_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2, M_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2, m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2) \quad (9.29)$$

Der  $\beta^+$ -Zerfall eines freien Protons ist kinematisch nicht möglich. In einem Kern dagegen kann der Zerfall stattfinden, wenn die Energie des Protonzustandes im Anfangskern höher ist als die Energie eines freien Neutronzustandes im Endkern. Ein Beispiel ist der Übergang:

$${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N} e^+ \nu_e \quad (9.30)$$

Der  ${}^8_8\text{O}$ -Kern hat 6 Neutronen und 8 Protonen auf verschiedenen Energieschalen (wie in der Atomhülle die Elektronen); der oberste Neutronzustand im  ${}^7_7\text{N}$ -Kern ist energetisch günstiger. Die Kernladungszahl  $Z$  ändert sich also bei einem  $\beta$ -Zerfall immer um eine Einheit. Für eine Kern  $K$  gilt also:

$${}^A_Z K \rightarrow {}^A_{Z \pm 1} K + \beta^\pm + \nu \quad (9.31)$$

Zum Beispiel:



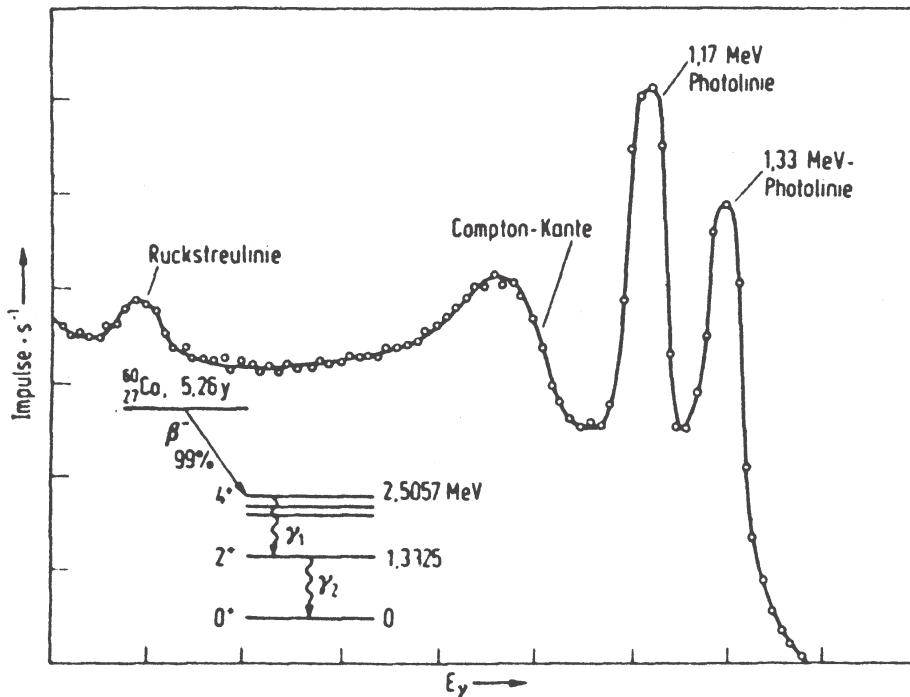
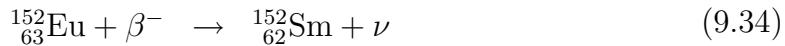


Abbildung 9.10: Zerfallsschema des  $^{60}\text{Co}$  und die mit einem  $\text{NaJ}(\text{Tl})$ -Detektor gemessene Pulshöhenverteilung.

Der Umkehrprozess kann auch stattfinden: ein Kern kann ein Elektron aus der Hülle einfangen ('electron capture' = EC):



Zum Beispiel:



Mit Hilfe dieses EC-Zerfalls ist von Goldhaber in einem berühmten Experiment die Helizität des Neutrinos bestimmt worden.

## 9.8 Gamma-Zerfall

Ein Kern mit festen Quantenzahlen A und Z kann in verschiedenen Energiezuständen mit eventuell unterschiedlichen Drehimpulsanregungen vorkommen. Übergänge in den Grundzustand oder auf andere Energieniveaus können dann über  $\gamma$ -Emission erfolgen. Die  $\gamma$ -Energien reichen vom keV- bis zum MeV-Bereich. Häufig kommt es zu spontaner  $\gamma$ -Emission bei angeregten Zerfallsprodukten vorausgegangener  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfälle.

Im allgemeinen regt sich ein Kern nach einem  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfall sehr schnell ab. Es gibt aber auch angeregte Zustände, die auf Grund von Auswahlregeln langlebiger sind. Diese Zustände heißen **Isomere** und werden auch in den Nuklid-Tabellen aufgeführt.

Übergänge mit hoher Multipolordnung, das heißt großen Drehimpulsänderungen (zum Beispiel die Übergänge im Co-Zerfall in Abb. 9.10), sind unterdrückt und

führen zu langen Lebensdauern. In der Atomhülle treten nicht so lange Lebensdauern wie bei Kernen auf, weil die Elektronen in der Regel die Möglichkeit haben über Stöße ihre Energie abzugeben.

Die Messung von  $\gamma$ -Übergängen (Abb. 9.10) stellt sich häufig als ein schwieriges Problem dar: neben dem ‘Photo-Peak’, der bei der Energie des Überganges liegt, können verschiedene andere Strukturen auftreten, die teilweise physikalischer Natur sind, wie die ‘Compton-Kante’, oder vom Detektor abhängen, wie der ‘Rückstreu-Peak’. Wenn in der primären Wechselwirkung des Photons mit dem Detektor ein weiteres Photon erzeugt wird, so hat das eine Chance aus dem Detektor zu entweichen und das Signal wird kleiner als der Photo-Peak sein.



# Kapitel 10

## Beta-Zerfall und schwache Wechselwirkung

### 10.1 Überblick

Die schwache Wechselwirkung wurde zuerst in  $\beta$ -Zerfällen von Kernen beobachtet. Das einfachste Beispiel für einen  $\beta$ -Zerfall ist der Neutron-Zerfall:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad (10.1)$$

Bei niedrigen Energien (klein gegenüber der Masse der  $W$ -Bosonen) unterscheidet sich die schwache deutlich von der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung durch folgende Eigenschaften (siehe Tabelle 2.2 für den Vergleich mit der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung):

- lange Lebensdauer, typisch  $\tau > 10^{-13}$  s;
- kleine Wirkungsquerschnitte: z. B.  $\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+) \approx 10^{-43} \text{ cm}^2$ ;
- kurze Reichweite:  $R \approx 10^{-18} \text{ m}$ .

Folgende schwache Zerfälle hatten wir bereits kennengelernt:

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \\ K_s^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^- \\ \Lambda &\rightarrow p \pi^- \\ n &\rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

### 10.2 $\beta$ -Zerfall

#### 10.2.1 Impulsspektrum beim $\beta$ -Zerfall

Die Zerfallsbreite ist durch das Matrixelement und den Phasenraum gegeben (siehe Abschnitt 1.5.4, Gleichung (1.137)):

$$d\Gamma = |M|^2 \cdot dPS. \quad (10.2)$$

Der Faktor  $1/(2m)$  gegenüber (1.137) ist hier weggefallen, weil wir, wie in der Kernphysik üblich, die Wellenfunktionen auf  $1/\text{Volumen}$  (statt auf  $2E/\text{Volumen}$ ) normieren. Andererseits wollen wir in diesem Kapitel wie in der Teilchenphysik üblich  $\hbar = c = 1$  setzen.

Die kinematischen Variablen sind wie folgt definiert:  $P_K$ ,  $P_{K'}$ ,  $P_e$ ,  $P_\nu$  sind die Vierervektoren des Anfangskerns, Endkerns, Elektrons und Neutrinos, die Dreiervektoren werden mit kleinen  $p$ 's bezeichnet. Wenn der Anfangskern in Ruhe ist, sind die Vierervektoren:

$$P_K = \begin{pmatrix} m_K \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad P_{K'} = \begin{pmatrix} m_{K'} + T_{K'} \\ \vec{p}_{K'} \end{pmatrix}, \quad P_e = \begin{pmatrix} E_e \\ \vec{p}_e \end{pmatrix}, \quad P_\nu = \begin{pmatrix} E_\nu \\ \vec{p}_\nu \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Der Unterschied der Kernniveaus  $E_0 = m_K - m_{K'}$  ist die maximal zur Verfügung stehende Energie; die Neutrinoenergie ist  $E_\nu = p_\nu = E_0 - E_e$ . Dann ergibt sich für das Phasenraumelement (1.126) mit  $m_\nu = 0$ :

$$\begin{aligned} dPS &= (2\pi)^4 \delta^4(P_K - P_{K'} - P_e - P_\nu) \frac{1}{(2\pi)^9} d^3\vec{p}_{K'} d^3\vec{p}_e d^3\vec{p}_\nu \\ &= (2\pi)^4 \delta(m_K - m_{K'} - T_{K'} - E_e - E_\nu) \frac{1}{(2\pi)^9} d^3\vec{p}_e d^3\vec{p}_\nu \\ &= (2\pi)^4 \delta(E_0 - E_e - E_\nu) \frac{1}{(2\pi)^9} (4\pi)^2 p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu \\ &= \frac{4}{(2\pi)^3} p_e^2 dp_e (E_0 - E_e)^2 \end{aligned} \quad (10.4)$$

Von der zweiten zur dritten Zeile wurde die Rückstoßenergie  $T_{K'}$  des Endkerns vernachlässigt.

Für das Impulsspektrum der Elektronen, also die Zerfallsbreite differenziert nach dem Elektronimpuls  $p_e = |\vec{p}_e|$ , erhält man (mit  $m_\nu = 0$ ):

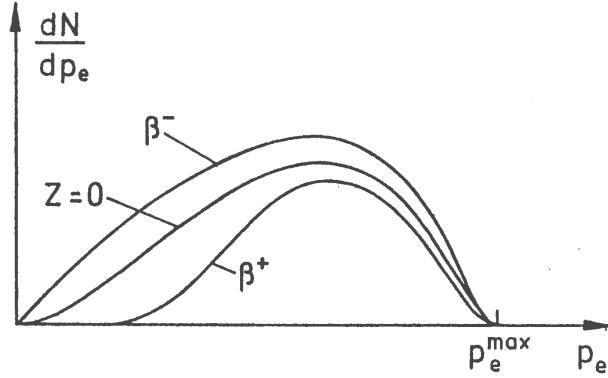
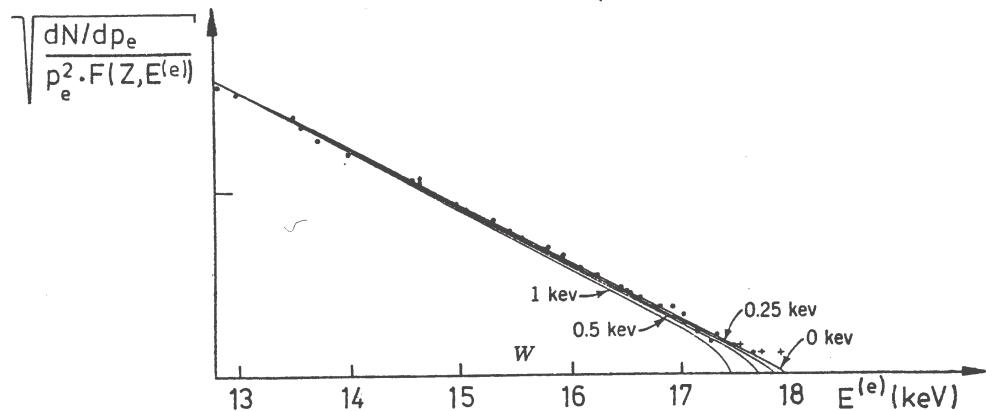
$$\frac{d\Gamma}{dp_e} = \frac{4}{(2\pi)^3} |M_{fi}|^2 \cdot p_e^2 \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot F(p_e, Z) \quad (10.5)$$

Die Funktion  $F(p_e, Z)$  ist eine Korrektur für die Coulomb-Anziehung ( $\beta^-$ ) bzw. -Abstoßung ( $\beta^+$ ), die für die beiden Ladungen unterschiedlich ist (siehe Abb. 10.1). Es ist üblich, statt der gemessenen Zählrate pro  $p_e$ -Interval,  $dN/dp_e$ , die Größe

$$K(E_e) = \sqrt{\frac{dN}{dp_e} \frac{1}{p_e^2 \cdot F(p_e, Z)}} \sim |M_{fi}| \cdot (E_0 - E_e) \quad (10.6)$$

gegen die kinetische Energie der Elektronen  $E_e$  aufzutragen ('Kurie-Plot', Abb. 10.2). Abbildung 10.2 zeigt diese Darstellung für den  $\beta$ -Zerfall des Tritiums. Da die Meßpunkte im wesentlichen auf einer Geraden liegen, folgt, daß das Matrixelement annähernd konstant ist. Eine endliche Neutrino-Masse kann durch einen zusätzlichen Faktor in (10.6) berücksichtigt werden:

$$K(E_e) \sim |M_{fi}| \cdot (E_0 - E_e) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_0 - E_e}\right)^2} \quad (10.7)$$

Abbildung 10.1: Unterschied des Impulsspektrums für  $\beta^+$ - und  $\beta^-$ -Zerfälle.Abbildung 10.2: Ausschnitt aus einem Kurie-Plot des  $\beta$ -Zerfalls von Tritium. An die Meßwerte sind theoretische Kurven für verschiedene angenommene Massen des Elektronenelektrinos angepaßt.

Wenn also die gemessene Kurve nicht den Endpunkt  $E_0$  erreicht, wäre das ein Hinweis auf eine endliche Neutrino-Masse (siehe Abb. 10.2). Analysen des Spektrums in der Nähe des Endpunktes ergeben Grenzen von etwa 2 eV für die Neutrinomasse (PDG-Auswertung von 2006, siehe PDG-Link in [34]).

### 10.2.2 Kernmatrixelemente und Lebensdauern

Durch Integration des Impulsspektrums erhält man aus (10.5) mit einem konstanten Matrixelement die Zerfallswahrscheinlichkeit und Lebensdauer (mit  $\hbar = 1$ ):

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{4}{(2\pi)^3} |M_{fi}|^2 \int_0^{p_e \max} p_e^2 \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot F(p_e, Z) dp_e \quad (10.8)$$

Das Integral enthält die Phasenraumabhängigkeit und die Coulomb-Korrektur und hängt nur von  $E_0$  und  $Z$  ab. Mit der dimensionslosen Funktion

$$f(E_0, Z) = \frac{1}{m_e^5} \int_0^{p_e \max} p_e^2 \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot F(p_e, Z) dp_e \quad (10.9)$$

(der Faktor  $1/m_e^5$  wird hier nur als Bezugsskala benutzt) definiert man den ‘**ft-Wert**’ eines  $\beta$ -Zerfalls:

$$ft = f(E_0, Z) \cdot \tau_{1/2} \sim \frac{1}{|M_{fi}|^2} \quad (10.10)$$

Der ft-Wert ist also ein Maß für die Größe des Matrixelementes, das heißt für die Dynamik des Prozesses. Man kann versuchen, das Matrixelement mit einer Störungsrechnung zu bestimmen:

$$M_{fi} = \langle f | H | i \rangle = \int dV \psi_f^* H \psi_i \quad (10.11)$$

Das Integral erstreckt sich über das Kernvolumen;  $\psi_i$  ist die Wellenfunktion des zerfallenden Kerns und  $\psi_f$  die Wellenfunktion des Endkerns und der Leptonen:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \psi_K \\ \psi_f &= \psi_{K'} \cdot \phi_e \cdot \phi_\nu \end{aligned} \quad (10.12)$$

Da die Energien der Leptonen höchstens etwa 1 MeV erreichen, gilt für deren Wellenlängen:

$$\lambda_{e,\nu} \geq 200 \text{ fm}. \quad (10.13)$$

Das ist groß gegenüber den Kernabmessungen (1 … 10 fm) und es folgt, daß die Leptonwellenfunktionen im Kernvolumen konstant sind. Mit dem Ansatz von ebenen Wellen und der Normierung auf  $V = 1$  erhält man:

$$\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\vec{r}} = 1 + i\vec{p}\vec{r} + \dots \approx \phi(0) = 1 \quad (10.14)$$

Wir stellen nun den Wechselwirkungsoperator  $H$  durch eine Kopplungskonstante  $G$  und einen Operator, der auf den Kern wirkt, dar:

$$H = G \cdot \Omega_K. \quad (10.15)$$

Dann ergibt sich für das Matrixelement des  $\beta$ -Zerfalls:

$$M_{fi} = G \int dV \psi_{K'}^* \Omega_K \psi_K = G \cdot M_K \quad (10.16)$$

und für die Zerfallsbreite (10.8)

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{4}{(2\pi)^3} G^2 |M_K|^2 m_e^5 f(E_0, Z). \quad (10.17)$$

Durch das Integral wurde ein Kernmatrixelement  $M_K$  definiert, daß den Überlapp der Kernwellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand beschreibt:  $M_K$  ist umso größer, je ähnlicher sich die beiden Zustände sind. Eine weitere Unterdrückung ergibt sich, wenn die Leptonen Bahndrehimpuls  $l(e\nu)$  forttragen. Man nennt Zerfälle mit  $l(e\nu) = 0$  ‘erlaubte’ Zerfälle. Weitere Merkmale zur Klassifizierung von  $\beta$ -Zerfällen ergeben sich aus der Struktur der Operatoren  $\Omega_K$ , was aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

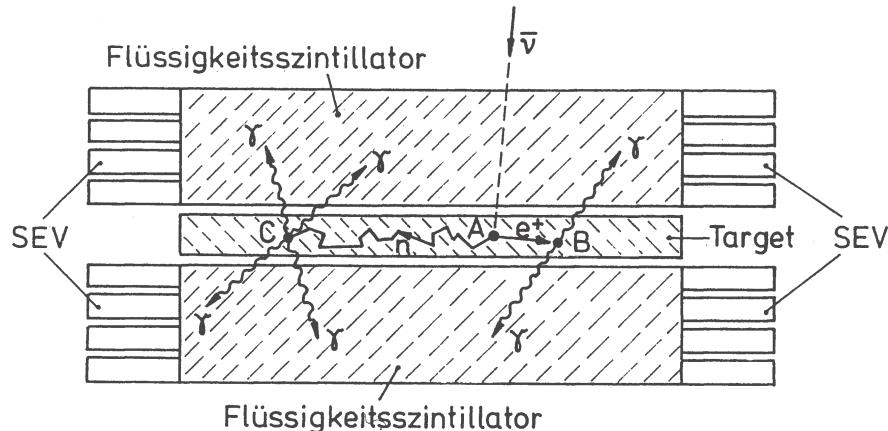


Abbildung 10.3: Prinzip der Apparatur von Reines und Cowan zum Nachweis von Antineutrinos.

### 10.2.3 Nachweis der Neutrinos

Das kontinuierliche Energiespektrum und die Drehimpulsbilanz beim  $\beta$ -Zerfall hatten ursprünglich viel Rätselraten verursacht. Die Widersprüche wurden 1930 durch die Neutrino-Hypothese von W. Pauli gelöst. Damit ist der  $\beta$ -Zerfall ein Dreikörperzerfall (wie in (9.27)), und da das Neutrino ein Fermion ist, konnten auch die ganzzahligen Änderungen des Kernspins erklärt werden.

Das Problem war nur, daß die Neutrinos nicht beobachtet worden waren und nach Paulis Berechnungen auch niemals beobachtet werden könnten. In diesem Punkt hatte er sich getäuscht: 1930 konnte er auch nicht wissen, daß Kernreaktoren einmal extrem hohe (Anti)-Neutrinoströme erzeugen würden.

Der direkte Nachweis von Antineutrinos gelang 1953 F. Reines und C. Cowan über den inversen Neutronzerfall:



Die Antineutrinos kamen von einem Reaktor mit einem Fluß von  $10^{13} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Mit einem Wassertank von  $0.08 \text{ m}^3$  (etwa  $10^{27}$  Protonen) als Target war dann der erwartete Wirkungsquerschnitt von  $\sigma_{\bar{\nu}} \approx 10^{-43} \text{ cm}^2$  meßbar.

In dem Experiment (Abb. 10.3) wurde das Neutron und das Positron der Reaktion (10.18) nachgewiesen. Das Neutron über den Einfang durch Cadmium, das einen hohen Einfangquerschnitt für Neutronen hat und deshalb dem Wasser beigefügt wurde. Das Cadmium wird durch den Einfang angeregt und gibt verzögert seine Energie in Form von Photonen wieder ab. Die Photonen werden in Koinzidenz mit den Annihilationsphotonen des Positrons in einem Flüssigszintillator, der das Target umgibt, nachgewiesen.

Der Nobelpreis für den Nachweis des Neutrinos kam mit erheblicher Verzögerung erst 1995 und ging an F. Reines; C. Cowan lebte zu der Zeit nicht mehr (der Nobelpreis wird nicht posthum vergeben).

## 10.3 Strom-Strom-Wechselwirkung

### 10.3.1 Strom-Strom-Kopplung in der QED

Die elektromagnetische Wechselwirkung lässt sich als eine Strom-Strom-Wechselwirkung darstellen. Im klassischen Fall hat man die Coulomb-Kraft, die proportional dem Produkt der Ladungen ist, und die magnetische Kraft, die proportional dem Produkt der Ströme ist. In relativistischer Schreibweise kann man beides zusammenfassen, indem man Ströme als Vierervektoren definiert mit der Ladungsdichte als zeitliche Komponente und die Stromdichte als räumliche Komponente:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad (10.19)$$

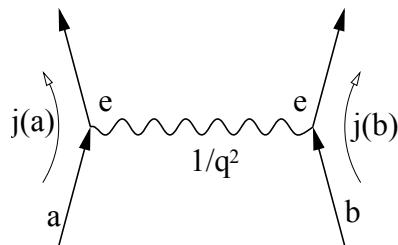


Abbildung 10.4: Elektromagnetische Wechselwirkung als Strom-Strom-Kopplung.

Die elastische Streuung der Teilchen  $a$  und  $b$  (Abb. 10.4) wird dann durch ein Strom-Strom-Matrixelement beschrieben:

$$M_{fi} = \frac{e^2}{q^2} j^\mu(a) j_\mu(b) = \frac{e^2}{q^2} (\rho_a \cdot \rho_b - \vec{j}_a \cdot \vec{j}_b) \quad (10.20)$$

Die Strom-Strom-Kopplung geschieht über den Austausch eines Photons. Die Kopplungsstärke ist proportional  $e^2 \sim \alpha$ . Im Impulsraum ergibt sich durch Fourier-Transformation aus dem  $1/r$ -Potential der Term  $1/q^2$  (siehe auch die Diskussion zum Rutherford-Wirkungsquerschnitt in Abschnitt 7.1.2).

Im allgemeinen beschreibt ein Strom einen Übergang eines Teilchenzustandes 1 in einen Teilchenzustand 2. Ein Fermionenstrom  $j^\mu(1 \rightarrow 2)$  wird durch einen Operator  $V^\mu$  dargestellt, der die Wellenfunktion 1 auf die Wellenfunktion 2 abbildet. Für die fundamentalen Fermionen sind die Wellenfunktionen Dirac-Spinoren  $\psi_1, \psi_2$  (siehe (1.74, 1.75)) und die Operatoren  $V^\mu$  sind analog zur Definition des Wahrscheinlichkeitsstromes (1.69) durch die  $\gamma$ -Matrizen gegeben:

$$j^\mu(1 \rightarrow 2) = \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \quad (10.21)$$

In einem Feynman-Diagramm wird die Kopplungsstärke eines Fermion-Photon-Vertex durch die Ladung  $e$  und die Kopplungsstruktur durch die Operatoren  $\gamma^\mu$  festgelegt (Abb. 10.5).

Die elektromagnetischen Ströme haben wie die Matrizen  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  die Transformationseigenschaften von Vektoren. Man nennt die Wechselwirkung der Ströme deshalb eine **Vektorkopplung**.

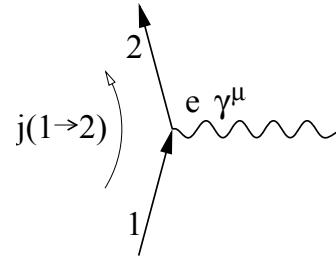


Abbildung 10.5: Feynman-Diagramm für den Fermion-Photon-Vertex.

### 10.3.2 Strom-Strom-Kopplung in der schwachen Wechselwirkung

**Vier-Fermionen-Kopplung:** Da die Reichweite der schwachen Wechselwirkung sehr klein ist, machte Fermi den Ansatz einer Wechselwirkung aller beteiligten Teilchen in einem Punkt. Für den Neutronzerfall sieht der Graph dann wie in Abb. 10.6 aus. Um hier ebenfalls den für die QED so erfolgreichen Strom-Strom-Ansatz be-

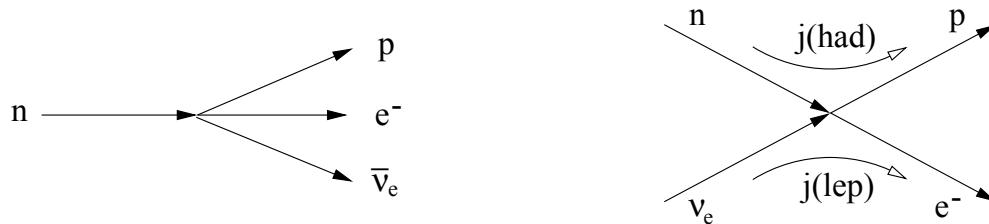


Abbildung 10.6: Zerfall des Neutrons als Vier-Fermion-Kopplung, rechts die Darstellung als Wechselwirkung zwischen einem hadronischen und einem leptonischen Strom.

nutzen zu können, definiert man einen hadronischen Strom  $j_{had}^\mu$  für den Übergang des Neutrons in ein Proton und einen leptonischen Strom  $j_\mu^{lep}$  entsprechend für den Elektron-Neutrino-Übergang. In dem rechten Diagramm der Abb. 10.6, ist das auslaufende Antineutrino durch ein einlaufendes Neutrino ersetzt worden. Versuchsweise können wir annehmen, daß der Strom wie in der QED als Vektorstrom (10.21) gebildet wird. Die tatsächliche Struktur des Stromes muß experimentell bestimmt werden (siehe Abschnitt 10.4).

Als Übergangsmatrixelement schreibt man analog zu (10.20):

$$M_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{had}^\mu j_\mu^{lep} \quad (10.22)$$

Die Kopplungsstärke ist hier durch die Fermi-Konstante  $G_F$  (der Faktor  $1/\sqrt{2}$  ist Konvention) festgelegt. Sie ist am genauesten in rein leptonischen Zerfällen (z. B. dem  $\mu$ -Zerfall) zu bestimmen:

$$G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (10.23)$$

Die Kopplungskonstante hat die Dimension Energie $^{-2}$ , weil der entsprechende  $1/q^2$ -Term von einem Austauschteilchen fehlt.

Weil keine Skala, zum Beispiel durch einen Propagator, definiert ist, ergibt sich für eine punktförmige Wechselwirkung:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \text{const}, \quad (10.24)$$

Dagegen hat die elektromagnetische Streuung punktförmiger Teilchen die Abhängigkeit:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} \sim \frac{1}{q^4}, \quad (10.25)$$

wie der Rutherford-Wirkungsquerschnitt (Gl. 7.4 mit  $dq^2 \sim E^2 d\Omega$ ).

Bei der schwachen punktförmigen “Vier-Fermionen-Wechselwirkung” ergibt zum Beispiel für die Reaktion  $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$ :

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{G_F^2}{\pi}. \quad (10.26)$$

Dann ist der totale Wirkungsquerschnitt proportional zu dem maximalen Impulsübertrag  $q_{max}^2 \approx s = (E_e^{CM} + E_\nu^{CM})^2 = 2 m_e E_\nu$ , was zu einem mit  $E_\nu$  ( $E_\nu = E_\nu^{LAB}$  im Laborsystem) ansteigenden Wirkungsquerschnitt führt,

$$\sigma_\nu \sim E_\nu. \quad (10.27)$$

Dieser Wirkungsquerschnitt übersteigt ab einer bestimmten Energie (im Schwerpunktssystem etwa 300 GeV) die sogenannte Unitaritätsschranke, jenseits von der die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit größer als 1 wäre.

**W-Bosonen:** Das Unitaritätsproblem kann nur umgangen werden, wenn es in der schwachen Wechselwirkung auch Austauschteilchen,  $W$ -Bosonen, gibt, die allerdings wegen der kurzen Reichweite eine Masse

$$M_W \approx 1/R (= \hbar/(c R)) \quad (10.28)$$

haben müssen. Für ein massives Teilchen ergibt sich für den Propagatorterm (Abb. 10.7):

$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{1}{M_W^2 - q^2} \quad (10.29)$$

Für die Kopplung setzt man statt der elektrischen Ladung  $e$  eine Kopplungskonstante  $g$  ein. Wir müssen dann im Matrixelement (10.22) ersetzen:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{g^2}{M_W^2 - q^2} \stackrel{q^2 \rightarrow 0}{\approx} \frac{g^2}{M_W^2} \quad (10.30)$$

Wenn man versuchsweise die Annahme  $g \approx e$  macht, erhält man  $M_W \approx 30$  GeV (tatsächlich treten in (10.30) zusätzliche Faktoren auf; eine exakte Vorhersage wird durch die vereinheitlichte Theorie der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung, die GSW-Theorie, gemacht).

Die  $W$ -Bosonen sind 1983 mit Massen um etwa 80 GeV gefunden worden (Nobelpreis 1984, C. Rubbia, S. van der Meer). In Proton-Antiproton-Kollisionen (jeweils

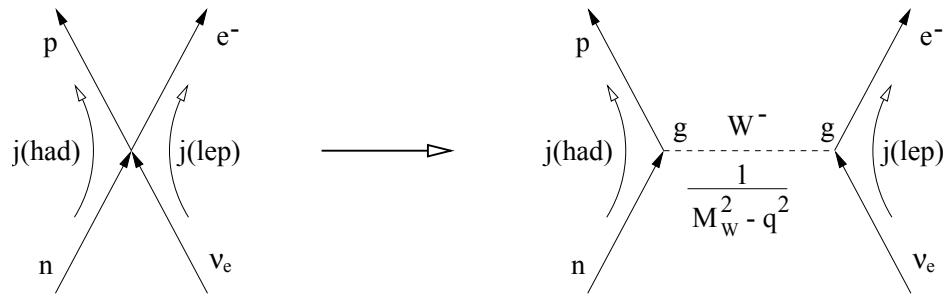


Abbildung 10.7: Übergang von der Vier-Fermion-Kopplung zur Austauschwechselwirkung.

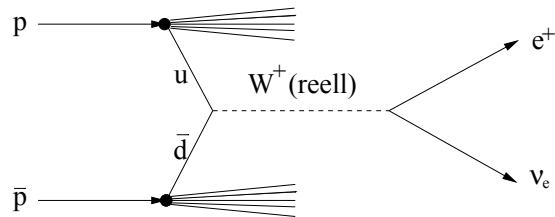


Abbildung 10.8: Erzeugung und Zerfall eines W-Bosons.

270 GeV) am SPS Collider im CERN wurden erstmalig mit dem UA1-Experiment (C. Rubbia et al.) Ereignisse wie in Abb. 10.8 beobachtet. Die Ereignisse sind charakterisiert durch hochenergetische Leptonen mit Transversalimpulsen  $p_T$  nahe  $M_W/2$  (siehe Abb. 10.9), die auf der gegenüberliegenden Seite nicht balanziert werden, weil das Neutrino nicht nachgewiesen wird ('missing  $p_T$ ').

Der Effekt des  $W$ -Propagators und damit die Abweichung von einer punktförmigen Kopplung ist erstmalig bei HERA in der tief-inelastischen Streureaktion

$$ep \rightarrow \nu_e + X, \quad (10.31)$$

beobachtet worden (Abb. 10.10). Um eine entsprechende Messung in einem fixed-target-Experiment machen zu können, würde man eine Neutrino-Strahl von 50 TeV benötigen.

**Das  $Z^0$ -Boson:** Die  $W$ -Bosonen sind geladen, die Kopplung ändert die Ladung der Fermionen. Man spricht deshalb von 'geladenen Strömen' (CC = charged current). Bereits 1973 wurden in Neutrino-Streuexperimenten Ereignisse beobachtet, die auf einen neutralen schwachen Strom (NC = neutral current) hinwiesen. Ein Beispiel ist die elastische Streuung von Neutrinos an Kernen (Abb. 10.11):

$$\nu N \rightarrow \nu N \quad (10.32)$$

In Abb. 10.12 ist ein Kandidat für folgende NC-Reaktion gezeigt:

$$\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^- \quad (10.33)$$

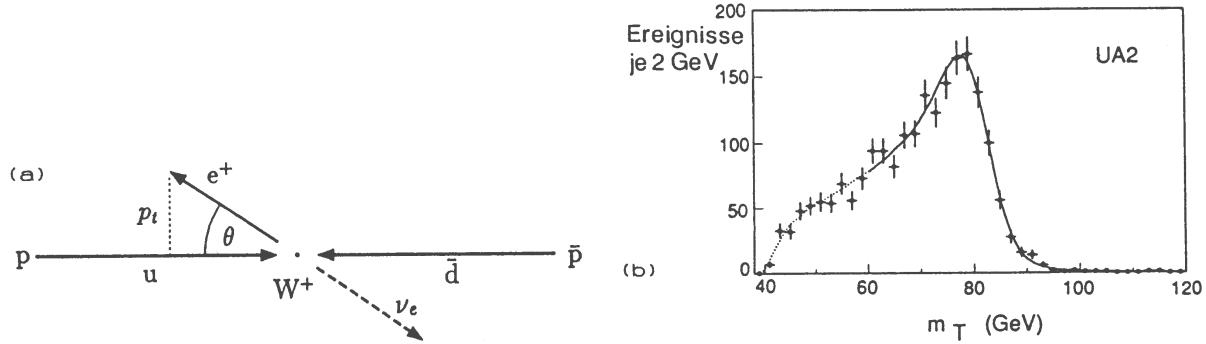


Abbildung 10.9: Rekonstruktion der Masse des  $W$ -Bosons aus einem leptonischen Zerfall eines in einer  $p\bar{p}$ -Reaktion erzeugten  $W$ -Bosons. (a) Kinematik des Zerfalls: weil die Quarks sich in Strahlrichtung bewegen, wird das  $W$ -Boson bevorzugt ohne Transversalimpuls erzeugt, hat aber im allgemeinen einen Impuls entlang der Strahlrichtung. Der maximale Transversalimpuls der Zerfallsleptonen entspricht also etwa der halben  $W$ -Masse. (b) Aus dem Transversalimpuls des beobachteten Leptons wird eine ‘transversale Masse’ bestimmt, deren Endkante bei der tatsächlichen  $W$ -Masse liegt.

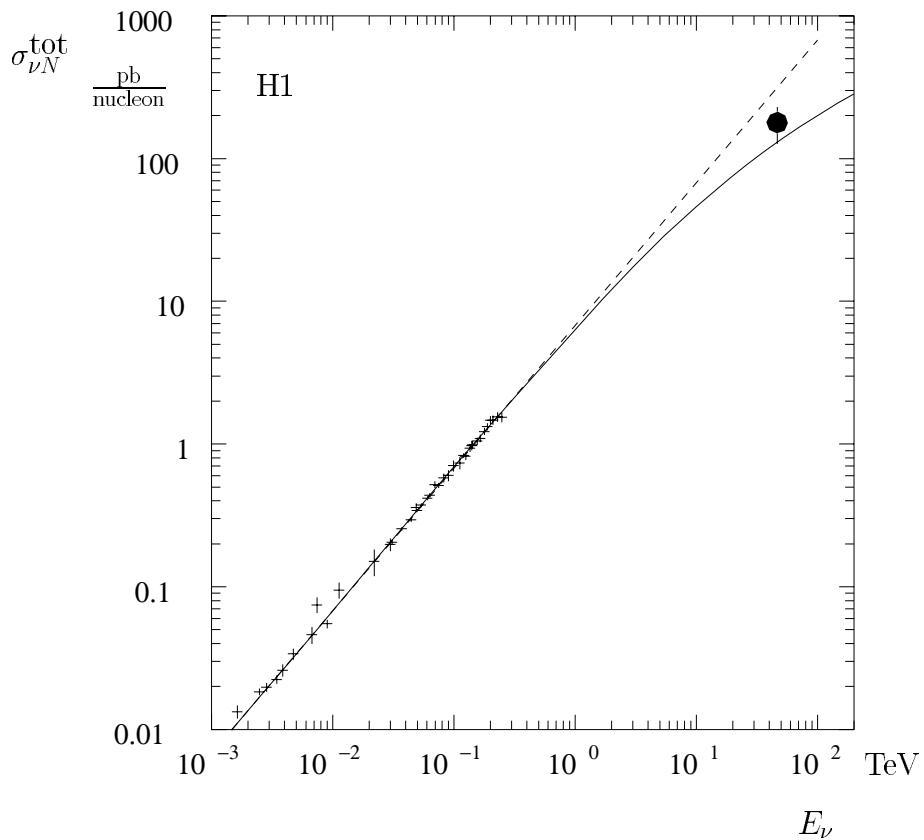


Abbildung 10.10: Die Energieabhängigkeit des Neutrino-Nukleon-Wirkungsquerschnittes (Kreuze). Der Punkt bei  $50$  TeV entspricht dem bei HERA gemessenen Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $(ep \rightarrow \nu_e + X)$ , der in einen  $\nu N$ -Wirkungsquerschnitt umgerechnet wurde. Die gestrichelte Linie ist die lineare Extrapolation von niedrigen Energien, die durchgezogene Kurve enthält den Effekt des  $W$ -Propagators.

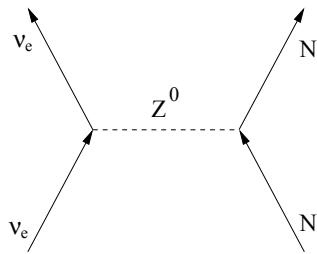


Abbildung 10.11: Elastische  $\nu N$ -Streuung über  $Z^0$ -Austausch.

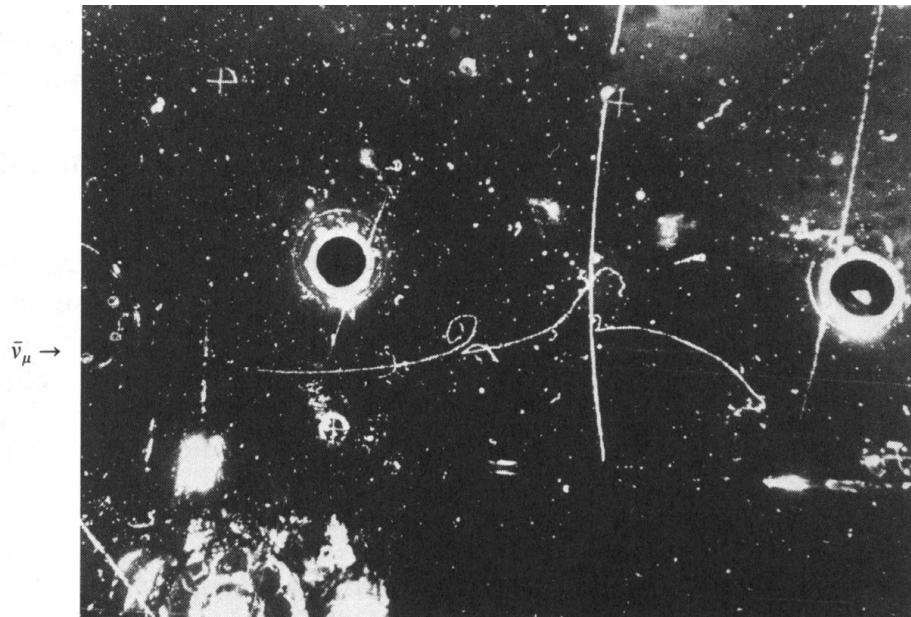


Abbildung 10.12: Ereignis, das von einem  $\bar{\nu}_\mu$ -Strahl in der Gargamelle-Blasenkammer am CERN erzeugt wurde, aufgenommen 1973. Das Ereignis besteht aus einem einzelnen Elektron, das durch die Abstrahlung eines Bremsstrahlungsquants, sichtbar durch die folgende Paarbildung, identifiziert wird (der Neutrino-Strahl kommt von links).

Diese Reaktionen konnten mit einem neutralen Austauschteilchen, dem  $Z^0$ -Boson, erklärt werden. Das  $Z^0$ -Boson wurde von Rubbia et al. gleichzeitig mit den  $W$ -Bosonen über den Zerfall in Myon- oder Elektronpaare nachgewiesen (Abb. 10.13). Ein Ereignis mit zwei hochenergetischen Myonen, die zu einem  $Z^0$  gehören, ist in Abb. 10.14 gezeigt.

Die Masse des  $Z^0$  ist etwa 92 GeV. Am  $e^+e^-$ -Speicherring LEP im CERN wurde das  $Z^0$  in großen Mengen produziert, und Produktion und Zerfall wurden sehr genau untersucht. Die Resultate bestätigen mit hoher Präzision das Standardmodell der elektro-schwachen Wechselwirkung (GSW-Theorie).

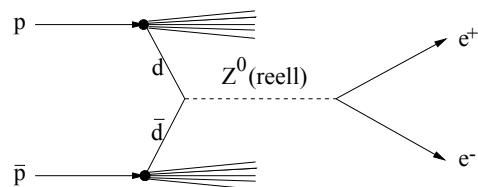


Abbildung 10.13: Erzeugung und Zerfall eines  $Z$ -Bosons.

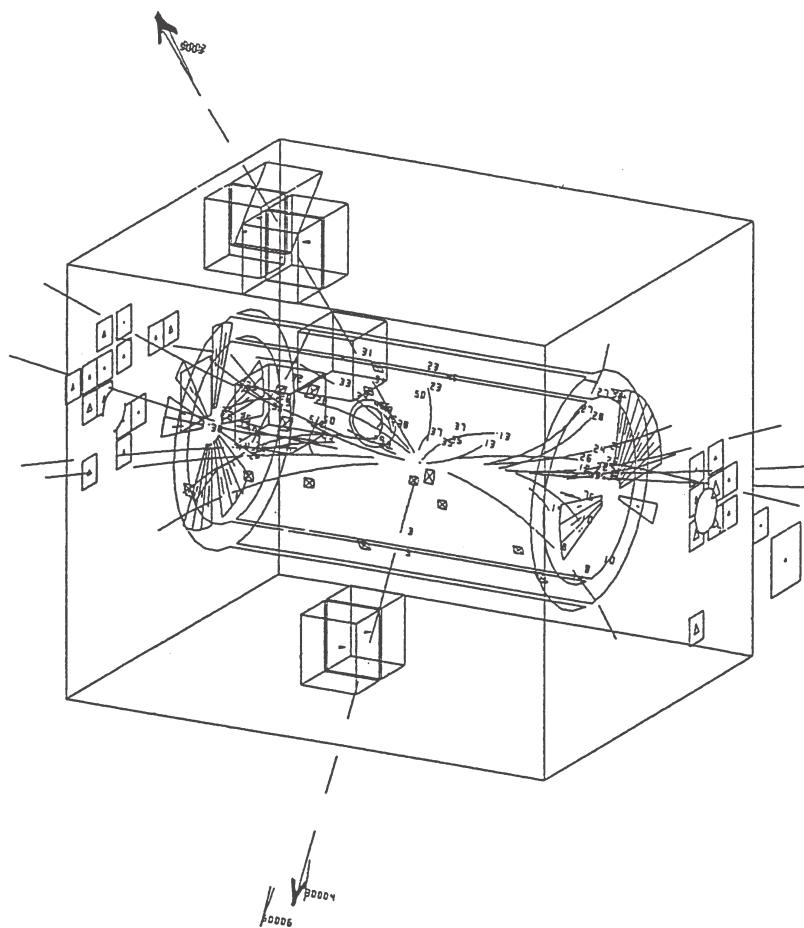


Abbildung 10.14: Nachweis eines in  $p\bar{p}$ -Kollisionen erzeugten  $Z^0$ -Bosons über seinen Zerfall in ein Myonpaar (UA1-Experiment).

## 10.4 Die Lorentz-Struktur der geladenen Ströme

### 10.4.1 Entdeckung der Paritätsverletzung

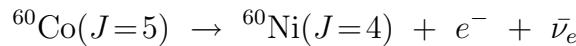
Im Jahre 1956 schlugen Lee und Yang zur Lösung des sogenannten  $\theta$ - $\tau$ -Puzzles (siehe unten) vor, daß die Spiegelungsinvarianz in der schwachen Wechselwirkung verletzt sein könnte. Diese Paritätsverletzung wurde schon ein Jahr später von Wu et al. in dem  $\beta$ -Zerfall von  ${}^{60}\text{Co}$  bestätigt.

**Das  $\theta$ - $\tau$ -Puzzle:** In den fünfziger Jahren sind Zerfälle von geladenen Kaonen in 2 und 3 Pionen beobachtet worden. Da Analysen ergaben, daß in beiden Zerfällen kein relativer Bahndrehimpuls der Pionen auftritt, ist die Parität der Pion-Zustände einfach durch das Produkt der Eigenparität der Pionen gegeben ( $P(\pi) = -1$ ). Also hat der 2-Pionen-Zustand  $P = +1$  und der 3-Pionen-Zustand  $P = -1$ . Man nahm dann an, es handelt sich um zwei verschiedene Teilchen mit entarteten Massen und nannte sie  $\theta$  und  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \pi^+ \pi^0 \quad (L=0) \quad P = +1 \\ \tau &\rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (L=0) \quad P = -1 \end{aligned}$$

Wir wissen jetzt, daß  $\theta = \tau = K^+$  ist und damit die Parität im  $K^+$ -Zerfall verletzt ist.

**Das Wu-Experiment:** Madam Wu hatte 1957 den  $\beta$ -Zerfall von polarisierten  ${}^{60}\text{Co}$ -Kernen (Spin  $J = 5$ ) beobachtet (Abb. 10.15):



Die Beobachtungen ergaben, dass die Elektronen bevorzugt entgegen dem Spin des Co-Kerns emittiert wurden. Da der Spin  $\vec{J}^{\text{Co}}$  ein Axialvektor und der Impuls  $\vec{p}_e$  ein Vektor ist, ist das Produkt ein Pseudoskalar, das bei Spiegelung das Vorzeichen ändert. Das Nicht-Verschwinden eines observablen Pseudoskalars etabliert Paritätsverletzung:

$$\langle \vec{J}^{\text{Co}} \cdot \vec{p}_e \rangle \neq 0 \implies P$$

### 10.4.2 Theoretische Beschreibung der Paritätsverletzung

Fermi hatte bereits 1934 in seiner 4-Fermionen-Theorie eine Verallgemeinerung des in der QED auftretenden Vektorstromes (10.21) vorgeschlagen:

$$\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \rightarrow \bar{u}_2 \mathcal{O}_i u_1. \quad (10.34)$$

Dabei sind die  $\mathcal{O}_i$  Operatoren, die lorentz-kovariant definierbar sein müssen, um zu lorentz-invarianten Matrixelementen zu führen. Die möglichen lorentz-kovarianten Operatoren sind Kombinationen aus den  $\gamma$ -Matrizen mit bestimmten Transformati-onseigenschaften. Zu den vier  $\gamma$ -Matrizen in (1.67) definieren wir noch:

$$\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (10.35)$$

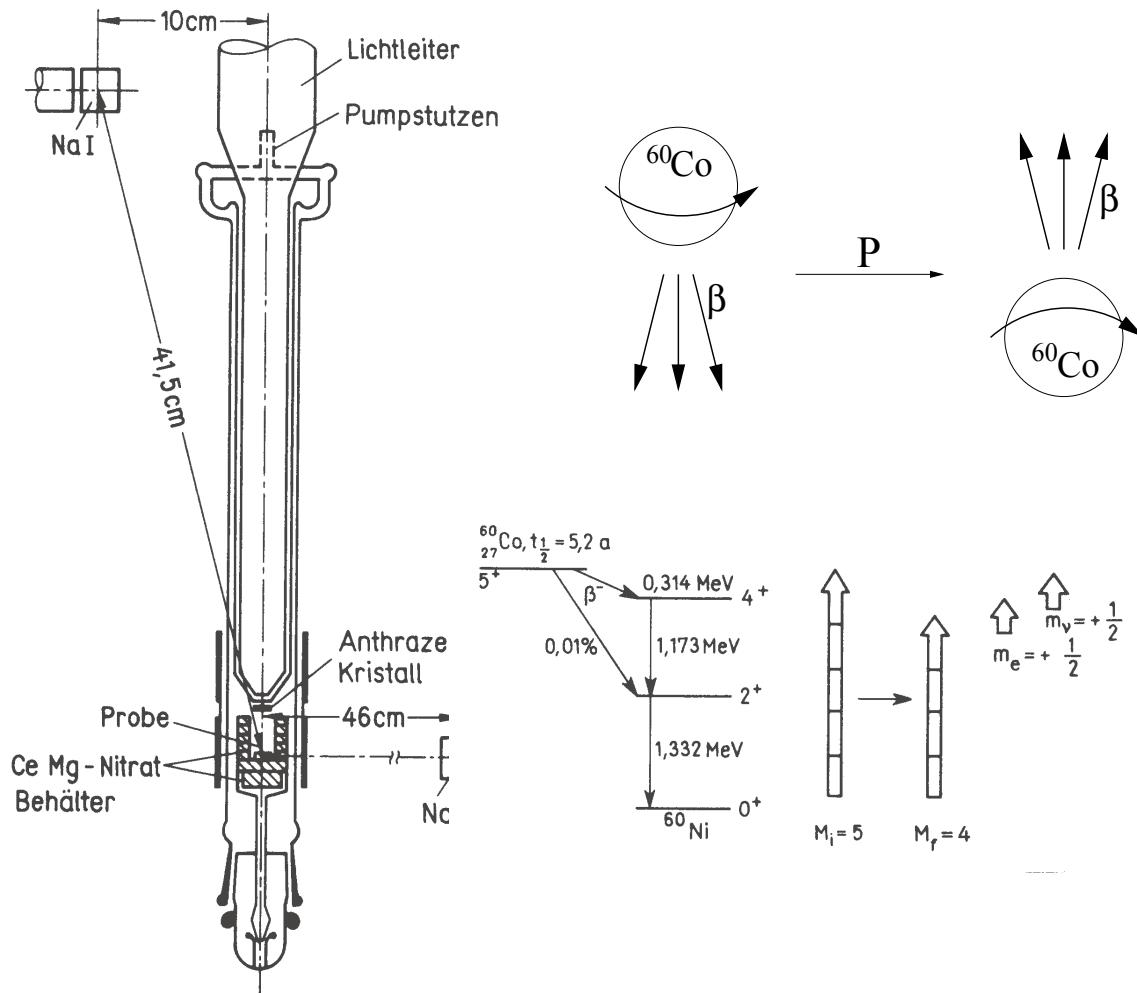


Abbildung 10.15: Das Experiment von Wu et al., mit dem die Paritätsverletzung im  $\beta$ -Zerfall des  $^{60}\text{Co}$  beobachtet wurde. Links ist die Apparatur dargestellt: Durch adiabatische Entmagnetisierung des paramagnetischen Salzes Ce Mg-Nitrat wird die  $^{60}\text{Co}$ -Probe auf etwa 0.01 K abgekühlt. Bei dieser Temperatur können die Spins der  $^{60}\text{Co}$ -Kerne in einem B-Feld parallel zur Achse der Apparatur ausgerichtet werden, weil die magnetische Energie  $\mu B$  ( $\mu(^{60}\text{Co}) = 3.75 \mu_K = 0.12 \cdot 10^{-6} \text{ eV/Tesla}$ ) in eine ähnliche Größenordnung wie die thermische Energie  $kT \approx 0.9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$  kommt. Dem  $\beta$ -Zerfall von  $^{60}\text{Co}$  in  $^{60}\text{Ni}$  folgt eine  $\gamma$ -Kaskade, über die der  $^{60}\text{Ni}$ -Kern in seinen Grundzustand geht (siehe Schema auf der rechten Seite). Die Photonen werden bevorzugt in Richtung oder entgegen der Richtung des Ni-Spins emittiert, so dass durch Vergleich der Zählraten der beiden NaJ-Kristalle der Polarisationsgrad der Kerne bestimmt werden kann. Die  $\beta$ -Strahlung aus dem  $^{60}\text{Co}$ -Zerfall wird in einem Anthrazen-Kristall (Szintillator wie NaJ) nachgewiesen. Zur Bestimmung der Emissionsasymmetrie wird das Magnetfeld umgepolt.

Tabelle 10.1:

i	$\mathcal{O}_i$	Strom	Paritätsverhalten
S Skalar	1	$\bar{u}u$	$P(\bar{u}u) \rightarrow +\bar{u}u$
P Pseudoskalar	$\gamma_5$	$\bar{u}\gamma_5u$	$P(\bar{u}\gamma_5u) \rightarrow -\bar{u}\gamma_5u$
V Vektor	$\gamma_\mu$	$\bar{u}\gamma_\mu u$	$P(\bar{u}\gamma_\mu u) \rightarrow -\bar{u}\gamma_\mu u$
A Axialvektor	$\gamma_\mu\gamma_5$	$\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u$	$P(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u) \rightarrow +\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u$
T Tensor	$\gamma_\mu\gamma_\nu$	$\bar{u}\gamma_\mu\gamma_\nu u$	$P(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_\nu u) \rightarrow +\bar{u}\gamma_\mu\gamma_\nu u$

Alle möglichen kovarianten Operatoren und ihre Transformationseigenschaften bezüglich Lorentz-Transformationen sind in Tabelle 10.1 aufgeführt:

Wenn das Matrixelement als Produkt zweier Ströme gebildet werden soll,  $M_{fi} \sim j_1 j_2$ , müssen die beiden Ströme eine gleiche Anzahl Lorentz-Indizes haben, um sie ‘kontrahieren’ zu können. Zum Beispiel ist  $S \cdot S$ ,  $S \cdot P$ ,  $V \cdot V$ ,  $V \cdot A$  möglich, aber nicht  $V \cdot T$  (die Ströme sind hier mit den Symbolen für ihre Transformationseigenschaften bezeichnet). Das Matrixelement  $M_{fi}$  kann ein Skalar oder auch Pseudoskalar sein, weil  $|M_{fi}|^2$  als Observable ein Skalar sein muß (in symbolischer Schreibweise  $S \cdot S = S$  und  $P \cdot P = S$ ). Die Parität ist nicht erhalten, wenn  $M_{fi}$  eine Skalar-Pseudoskalar-Mischung ist:

$$M_{fi} = S + P \Rightarrow \text{Paritätsverletzung} \quad (10.36)$$

Dann ergeben sich pseudoskalare Anteile ( $S \cdot P = P$ ) in  $|M_{fi}|^2$ , die paritätsverletzend sind, das heißt, in einem gespiegelten Bezugssystem wird nicht mehr der gleiche Prozess beobachtet.

In vielen Experimenten ist die Struktur der Ströme und deren Kopplungsstärke untersucht worden. Das Ergebnis aller Untersuchungen bisher ist, dass die geladenen schwachen Ströme eine sogenannte ‘V-A’-Struktur haben und die Kopplung für alle fundamentalen Fermionen universell ist und durch die Fermi-Konstante  $G_F$  beschrieben wird.

**V-A–Struktur der Ströme:** Der Ausdruck ‘V-A’ bedeutet, dass der Operator  $\mathcal{O}$  aus einem Vektor- und Axialvektor mit einer bestimmten Phase zusammengesetzt ist:

$$\mathcal{O} = c_V \cdot \gamma^\mu - c_A \cdot \gamma^\mu \gamma_5 = \gamma^\mu (c_V - c_A \cdot \gamma_5) \quad (10.37)$$

Für die Ströme der fundamentalen Fermionen (Leptonen und Quarks) wurde experimentell gefunden:

$$c_V = c_A \quad (10.38)$$

Wenn man die Kopplungsstärke in eine getrennte Konstante steckt, kann man  $c_V = c_A = 1$  setzen und erhält für die fundamentalen schwachen geladenen Ströme:

$$j^\mu(1 \rightarrow 2) = \bar{u}_2 \mathcal{O} u_1 = \bar{u}_2 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_1 \quad (10.39)$$

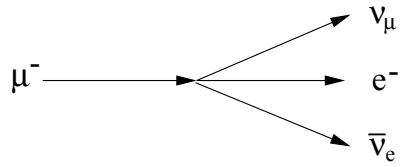


Abbildung 10.16: Der 4-Fermionen-Kontaktgraph für den  $\mu$ -Zerfall (siehe Abb. 4.2 für den entsprechenden Graphen mit W-Austausch).

Das relative Vorzeichen des V- und des A-Terms hängt von der benutzten Konvention für die  $\gamma$ -Matrizen ab. Es ist dadurch festgelegt, dass der Operator  $\mathcal{O}$  links-händige Fermionen und rechtshändige Antifermionen koppelt, was wir weiter unten genauer diskutieren werden. Die Bevorzugung einer Händigkeit bedeutet Verletzung der Spiegelungsinvarianz, also Paritätsverletzung. Formal ergibt sich für das Matrixelement:

$$M_{fi} = (V - A)(V - A) = VV - AV + AA = S + P \quad (10.40)$$

Damit tritt im quadrierten Matrixelement ein pseudoskalarer Term auf, der die Parität verletzt. Tatsächlich ist  $|M_{fi}|^2$  für reine (V-A)-Ströme wie in (10.39) ein reiner Pseudoskalar. Man spricht dann von ‘maximaler Paritätsverletzung’, was einer reinen links- oder rechtshändigen Kopplung entspricht (siehe unten).

**Zerfall des  $\mu$ -Leptons:** Als Beispiel betrachten wir den  $\mu$ -Zerfall (Abb. 10.16):

$$\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e \quad (10.41)$$

In der 4-Fermion-Theorie mit V-A-Kopplung lautet das Matrixelement:

$$M_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{e^-} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}] [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_\mu] \quad (10.42)$$

(ein auslaufendes  $\bar{\nu}_e$  entspricht einem einlaufenden  $\nu_e$ ). Unter Berücksichtigung des 3-Körper-Phasenraums im Endzustand erhält man daraus die Zerfallsbreite des  $\mu$ -Leptons:

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} \quad (10.43)$$

Das entspricht einer Lebensdauer von  $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ . Charakteristisch für diese leptonische Zerfallsbreite ist die Abhängigkeit von der fünften Potenz der Masse. Mit der bekannten Masse des Muons kann aus der Lebensdauermessung ein sehr genauer Wert von  $G_F$  bestimmt werden. Der Vergleich dieses Wertes mit dem in hadronischen Zerfällen gemessenen erlaubt die Bestimmung des Cabibbo-Winkels beziehungsweise der CKM-Matrixelemente für die Quarkmischungen (Abschnitt 6.1.1 und 6.2.5).

Die Gleichung (10.43) kann auch auf die leptonischen Zerfälle von  $\tau$ -Leptonen angewandt werden, wenn man entsprechend die gemessene  $\tau$ -Masse einsetzt. Der Vergleich der  $\mu$ - und  $\tau$ -Zerfälle bestätigt für den leptonischen Sektor die Annahme, dass die schwachen Kopplungen universell sind.

**Hadronische Ströme:** Hadronische Ströme, wie der Übergangsstrom Neutron  $\rightarrow$  Proton in Abb. 10.6, lassen sich auf Quarkströme zurückführen (siehe Abb. 4.1 für den Neutronzerfall). Zur Berechnung der hadronischen Matrixelemente müssen allerdings auf die fundamentalen Quarkströme gluonische Korrekturen angewandt werden, um der starken Wechselwirkung Rechnung zu tragen.

Während leptonische Ströme bisher nur innerhalb einer Generation beobachtet worden sind, müssen bei Quarkströmen die Flavour-Mischungen, beschrieben durch die CKM-Matrix (6.21), beachtet werden. Die  $3 \times 3 = 9$  möglichen geladenen Ströme zwischen ‘d-artigen’ und ‘u-artigen’ Quarks lassen sich kompakt schreiben:

$$\begin{aligned} j^\mu &= (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \\ &= \bar{u}_u \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_d \cdot V_{ud} + \bar{u}_u \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_s \cdot V_{us} + \dots \end{aligned} \quad (10.44)$$

Die Matrixelemente für die schwache Wechselwirkung fundamentaler Fermionen lauten dann allgemein:

$$M_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_1^\mu j_{2\mu}, \quad (10.45)$$

wobei die  $j_i$  Lepton- oder Quarkströme sein können. Das bedeutet also, dass auch für Quarkströme die universelle Kopplung  $G_F$  gilt, wenn man die Ströme jeweils mit dem CKM-Matrixelement wie in (10.44) wichtet.

Die Hypothese der Gleichheit der Kopplungsstärke und Kopplungsstruktur aller fundamentalen Fermionenströme ist in guter Übereinstimmung mit den Experimenten (**Universalität der schwachen Wechselwirkung**).

**Helizität und Chiralität:** Die Chiralitäts-Operatoren

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad \text{und} \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (10.46)$$

projizieren rechts- bzw. linkshändige Zustände  $u_R$ ,  $u_L$ , die durch folgende Gleichungen definiert sind, aus den Spinor-Wellenfunktionen von Dirac-Teilchen:

$$P_R u_R = u_R; \quad P_R u_L = 0; \quad P_L u_R = 0; \quad P_L u_L = u_L \quad (10.47)$$

Man ordnet diesen Zuständen die ‘Chiralität’ oder Händigkeit  $R$  bzw.  $L$  zu. Für Dirac-Teilchen mit Masse  $m = 0$  sind das Zustände mit Spin  $+1/2$  bzw.  $-1/2$  in Impulsrichtung. Die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \quad (10.48)$$

nennet man die Helizität eines Teilchens. Die Helizität kann als Produkt von Spin und Impuls eines Teilchens dargestellt werden,

$$\lambda = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad (10.49)$$

und ist demnach eine pseudoskalare Observable, deren Erwartungswert Null sein müßte, wenn die Parität erhalten wäre.

Wenn die Masse endlich ist, ist die Ausrichtung des Spins in Impulsrichtung nicht mehr Lorentz-invariant. Man kann dann nämlich ein Teilchen (zumindest in Gedanken) überholen, so dass sich die Impulsrichtung für den Betrachter umkehrt; der Drehimpuls behält aber seinen Drehsinn.

Um die Kopplung der schwachen Wechselwirkung für Teilchen mit nicht-ver-schwindender Masse zu beschreiben, definiert man den Grad der Ausrichtung der Helizität  $h$  eines Teilchens durch:

$$h = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} \quad (10.50)$$

Dabei sind  $I_+$  und  $I_-$  jeweils die Intensitäten der Teilchen mit Helizitäten  $\pm 1/2$  (häufig wird die Größe  $h$  auch mit der Helizität gleichgesetzt). In der schwachen Wechselwirkung (mit  $c_V = c_A$ , d. h. maximale Paritätsverletzung) ergibt sich für Fermionen:

$$I_+ = \frac{1 - \beta}{2}; \quad I_- = \frac{1 + \beta}{2}, \quad (10.51)$$

und

$$h = -\frac{v}{c} = -\beta. \quad (10.52)$$

Für Antifermionen gelten jeweils die umgekehrten Vorzeichen. Wir sprechen deshalb von einer linkshändigen Kopplung für Fermionen und einer rechtshändigen für Antifermionen.

Aus (10.52) ergibt sich, dass masselose Fermionen mit  $\beta = 1$  (wie die Neutrinos) in der schwachen Wechselwirkung als reine Helizitätszustände auftreten:

$$h = -1 \quad (10.53)$$

Die Helizität der Elektron-Neutrinos ist erstmalig 1958 von M. Goldhaber et al. in dem als ‘Goldhaber-Experiment’ bekannt gewordenen Experiment bestimmt worden.

**Zerfall der geladenen Pionen:** Für massive Teilchen ist immer  $\beta \neq 1$  und damit gibt es immer Beimischungen des anderen Drehsinns. Die Implikation dieser Aussage ist sehr schön am  $\pi$ -Zerfall zu sehen. Für die beiden Zerfallsmoden in Elektronen oder Myonen ergibt sich für das Verhältnis der Zerfallswahrscheinlichkeiten:

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu)} = 1.275 \cdot 10^{-4},$$

obwohl der Phasenraum für die leichteren Elektronen viel größer ist. Die Erklärung ist eine Diskrepanz zwischen der Drehimpulserhaltung und der Händigkeit in der schwachen Wechselwirkung (Abb. 10.17). Beim Zerfall des Pions mit Spin 0 verlangt die Drehimpulserhaltung, dass das geladene Lepton  $l^- = e^-, \mu^-$  rechtshändig ist, weil ja das Antineutrino in jedem Fall rechtshändig ist und beide Spins sich zu 0 addieren müssen. Da das Myon etwa 200 mal schwerer als das Elektron ist, ist seine Geschwindigkeit kleiner, und es hat damit wegen  $h = -\beta$  einen höheren rechtshändigen Anteil.

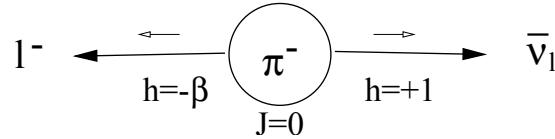


Abbildung 10.17: Drehimpulse und Helizitäten beim Pionzerfall

## 10.5 Glashow-Salam-Weinberg-Theorie (GSW)

Wir haben gesehen, dass die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung sehr ähnliche Strukturen haben. Glashow, Salam und Weinberg ist es gelungen, beide Wechselwirkungen in einer vereinheitlichten Theorie als elektro-schwache Wechselwirkung zu beschreiben (Nobelpreis 1979, nach der Entdeckung der vorausgesagten neutralen Ströme).

Der Ansatz war der Versuch, die schwache Wechselwirkung aus einer lokalen Eichsymmetrie (siehe Abschnitt 5.3) wie bei der QED herzuleiten. Während in der QED nur ein Eichboson, das Photon, auftritt und damit die Eichgruppe die einfache  $U(1)$ -Gruppe der Phasentransformationen mit einem Parameter ist, treten bei der schwachen Wechselwirkung mehrere Eichbosonen auf (zunächst waren es  $W^+$ ,  $W^-$ ) und die Eichgruppe wird komplizierter. Die einfachste Erweiterung ist eine  $SU(2)$ -Eichgruppe, wie sie dem Spin und Isospin unterliegt. Man definiert dann einen **schwachen Isospin**. Die linkshändigen Fermionen bilden Isospin-Dubletts ( $(\nu, e)$ ,  $(u, d)$ , ...) und die rechtshändigen bilden Isospin-Singuletts (weil sie an der schwachen Wechselwirkung nicht teilnehmen).

Wenn man die  $SU(2)$ -Symmetrie als lokale Eichgruppe auffaßt, treten 3 Felder auf, die wir zunächst  $W^\pm$ ,  $W^0$  nennen (zur Erinnerung: die  $U(1)$  der QED hat ein Feld, das Photon, die  $SU(3)$  der QCD hat 8 Felder, die Gluonen). In der folgenden Tabelle sind die Symmetrien, Felder und Kopplungen für die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung zusammengefaßt (Tab. 10.2; das  $L$  in  $SU(2)_L$  drückt aus, dass nur linkshändige Fermionen an der Wechselwirkung teilnehmen).

Tabelle 10.2:

Eichbosonen	Symmetrie	Kopplung
$W^\pm$ , $W^0$	$SU(2)_L$	$g$
$B^0$	$U(1)$	$g'$

Man hatte zunächst die Hoffnung, dass man eine gemeinsame Eichsymmetrie mit einer gemeinsamen Kopplungskonstanten für die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung finden könnte. Das hat sich nicht bestätigt. Allerdings hat sich auch ergeben, dass beide Eichgruppen nicht unabhängig voneinander bleiben: Die beiden neutralen Felder  $B^0$  und  $W^0$ , die an die gleichen Endzustände koppeln können, mischen zu den physikalisch beobachteten Feldern  $\gamma$  und  $Z^0$  mit dem Weinberg-

Mischungswinkel  $\theta_W$ :

$$\begin{aligned} Z^0 &= W^0 \cdot \cos \theta_W - B^0 \cdot \sin \theta_W \\ \gamma &= W^0 \cdot \sin \theta_W + B^0 \cdot \cos \theta_W \end{aligned} \quad (10.54)$$

Die GSW-Theorie ist experimentell sehr gut bestätigt worden. Dennoch gibt es viele offene Fragen, die nahelegen, dass auch diese Theorie nur eine, wenn auch sehr gute, Annäherung an die Wirklichkeit ist. Eine der Fragen ist zum Beispiel, warum die  $W$ - und  $Z$ -Bosonen Masse haben, das Photon aber nicht. Überhaupt ist die Frage nach dem Ursprung der Massen ungeklärt. Massen brechen die Symmetrien, weil Massenterme nicht eichinvariant sind. Im Standardmodell können Massen durch die sogenannte ‘spontane Symmetriebrechung’ eichinvariant eingebaut werden. Ihre Massen erhalten die fundamentalen Fermionen und Bosonen dann durch die Wechselwirkung mit einem zusätzlichen Feld, dem Higgs-Feld, das so gewählt werden kann, dass die  $W$ - und  $Z$ -Bosonen Masse erhalten, das Photon aber masselos bleibt. Dieses Feld entspricht einem skalaren Teilchen, also mit  $J^P = 0^+$ , und einer Masse, die unterhalb von 1 TeV liegen soll.

## 10.6 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Unser heutiges Wissen über die Teilchen und ihre Wechselwirkungen ist in dem Standardmodell der Teilchenphysik, wie bereits in Kapitel 2 vorgestellt, zusammengefaßt: es gibt die Fermionen als die fundamentalen Bausteine der Materie (Tab. 2.1) und die Wechselwirkungen, die über den Austausch von Bosonen beschrieben werden (Tab. 2.2). Die starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung werden aus Eichinvarianzen als Quantenfeldtheorien abgeleitet, deren Basis die spezielle Relativitätstheorie und die Quantentheorie sind. Die Gravitation spielt im Rahmen des Standardmodells eine Sonderrolle. Sie basiert auf der allgemeinen Relativitätstheorie, für die Probleme bei der Quantisierung auftreten.

Das Standardmodell ist in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen. Bisher sind keine Abweichungen gefunden worden. Trotz seines Erfolges wird das Standardmodell der elektro-schwachen und der starken Wechselwirkung nicht als die letzte Wahrheit angesehen. Eines der Argumente ist die große Anzahl der freien Parameter des Modells, die nicht vorhergesagt werden können:

- 3 Kopplungskonstanten  $\alpha$ ,  $\alpha_s$ ,  $\sin \theta_W$ ;
- 2 Bosonmassen  $M_W$ ,  $M_H$ ;
- 3 Leptonmassen  $m_e$ ,  $m_\mu$ ,  $m_\tau$  (die Neutrinos werden im Standardmodell zu Null angenommen);
- 6 Quarkmassen  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_c$ ,  $m_s$ ,  $m_t$ ,  $m_b$ ;
- 4 Parameter der CKM-Matrix: drei Winkel und eine Phase.

Das sind 18 freie Parameter. Da sich jetzt herausgestellt hat, dass die Neutrinos ebenfalls Massen haben, kommen die Massen und eine CKM-Matrix für die Neutrinos dazu.

# Kapitel 11

## Kernreaktionen

Es gibt eine Fülle experimentellen Materials über Kernreaktionen und deren theoretische Beschreibung. In diesem Kapitel werden wir uns auf nur zwei Reaktionen beschränken, die allerdings für die Anwendung, speziell für die technische Nutzung zur Energiegewinnung, sehr wichtig sind:

- induzierte Kernspaltung und
- Kernfusion.

Auf die Bedeutung dieser Themen für die Wirtschaft, Umwelt und Politik braucht man kaum mehr hinzuweisen. Einen Überblick über die physikalischen Aspekte des Energieproblems findet man zum Beispiel in dem Buch ‘Energie’ von Diekmann und Heinloth [35].

### 11.1 Induzierte Kernspaltung

Wir hatten im letzten Kapitel bereits erwähnt, daß Kernspaltung durch Neutronen induziert werden kann. Ein Beispiel, das für die Energiegewinnung durch Kernspaltung wichtig ist, ist die induzierte Spaltung von  $^{235}\text{U}$ :

$$n + {}^{235}\text{U} \rightarrow K_1 + K_2 + \nu \cdot n \quad (11.1)$$

( $\nu$  ist die Anzahl der in der Spaltung freiwerdenden Neutronen). Der **Energiegewinn** ist:

$$\Delta E \approx 200 \text{ MeV / Spaltung} \quad (11.2)$$

Das ist zu vergleichen mit etwa 10 eV bei der chemischen Verbrennung von Kohlenstoff:  $\text{C} + 2\text{O} \rightarrow \text{CO}_2$ .

Von dem Energiegewinn bei der Spaltung gehen etwa 160 MeV in die kinetische Energie der erzeugten Kerne, der Rest wird in Form von Strahlung frei ( $n, \gamma, e, \nu_e$ ). Wenn bei der Spaltung mehr als ein Neutron wieder frei wird,

$$\nu > 1, \quad (11.3)$$

dann ist grundsätzlich eine **Kettenreaktion** möglich. Bei unserem obigen Beispiel ist diese Zahl:

$$\nu({}^{235}\text{U}) = 2.43 \quad (11.4)$$

Es ist also eine Kettenreaktion möglich. Für die Nutzung zur Energiegewinnung gibt es allerdings zwei Schwierigkeiten:

- das Isotop ist nur in geringen Mengen in natürlichem Uran vorhanden,
- die Neutronen müssen für einen effektiven Einfang thermisch sein, werden aber mit MeV-Energien emittiert.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Verhältnisse bei **natürlichem Uran**:

A	Gehalt [%]	Spalt- schwelle [MeV]	$\Delta E_B(U+n)$ [MeV]	notwendige n-Energie	$\sigma(n, f)$ [b]
235	0.7	5.8	6.4	therm.	582
238	99.3	6.3	4.8	$\geq 1.5 \text{ MeV}$	$\leq 1$

Das häufigste Isotop,  $^{238}\text{U}$ , ist für die Spaltung nicht geeignet, weil die Spaltschwelle höher liegt als der Energiezuwachs durch den Neutroneinfang. Für  $^{235}\text{U}$  gibt es dann allerdings das Problem, daß die Neutronen thermisch sein müssen.

Abbildung 11.1 zeigt die Verteilung der Neutronenenergien aus dem Spaltprozess. Da diese Energien im MeV-Bereich liegen, der Einfangquerschnitt von  $^{235}\text{U}$  aber nur für thermische Neutronen (bei Zimmertemperatur ist  $kT \approx 1/40 \text{ eV}$ ) genügend groß ist, müssen die Neutronen abgebremst werden. Abbildung 11.2 zeigt allerdings, daß die Neutronen beim Abbremsen in dem Uran einen sehr gefährlichen Bereich passieren müssen: Oberhalb der thermischen Energien gibt es einen Bereich in dem der Wirkungsquerschnitt für  $(n, \gamma)$ -Reaktionen sehr groß wird. In diesem Bereich werden durch den n-Einfang  $\gamma$ -Übergänge, nicht aber Spaltung angeregt.

Um dieses Problem zu umgehen, werden separate Moderatoren, außerhalb des Urans genutzt, die durch elastische Streuung die Neutronen abbremsen. Die Anforderungen an einen Moderator sind:

- kleiner Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{abs}$  für n-Einfang,
- kleine Bremslänge  $l_{brems}$  für Neutronen, d. h. die Masse der Moderatorkerne sollte nahe der Neutronmasse sein, also sind leichte Kerne bevorzugt.

Eigenschaften gängiger Moderatoren sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Moderator	$\sigma_{abs}$ [b]	$l_{brems}$ [cm]
$\text{H}_2\text{O}$	0.664	5.3
$\text{D}_2\text{O}$	0.001 (!)	11.2
Graphit	0.0045	19.1.

Wasser hat gegenüber Graphit den Vorteil, daß die Funktion des Moderators und des Kühlmittels in Reaktoren kombiniert werden können (Druck- und Siedewasserreaktoren). Das gibt dem System eine Stabilität und Sicherheit: bei Verlust von

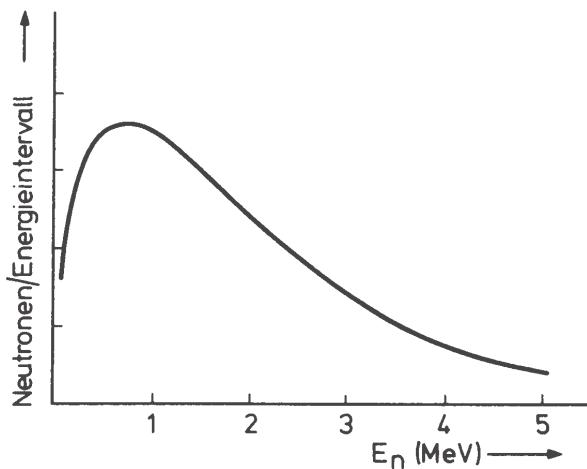


Abbildung 11.1: Energieverteilung der Spaltneutronen.

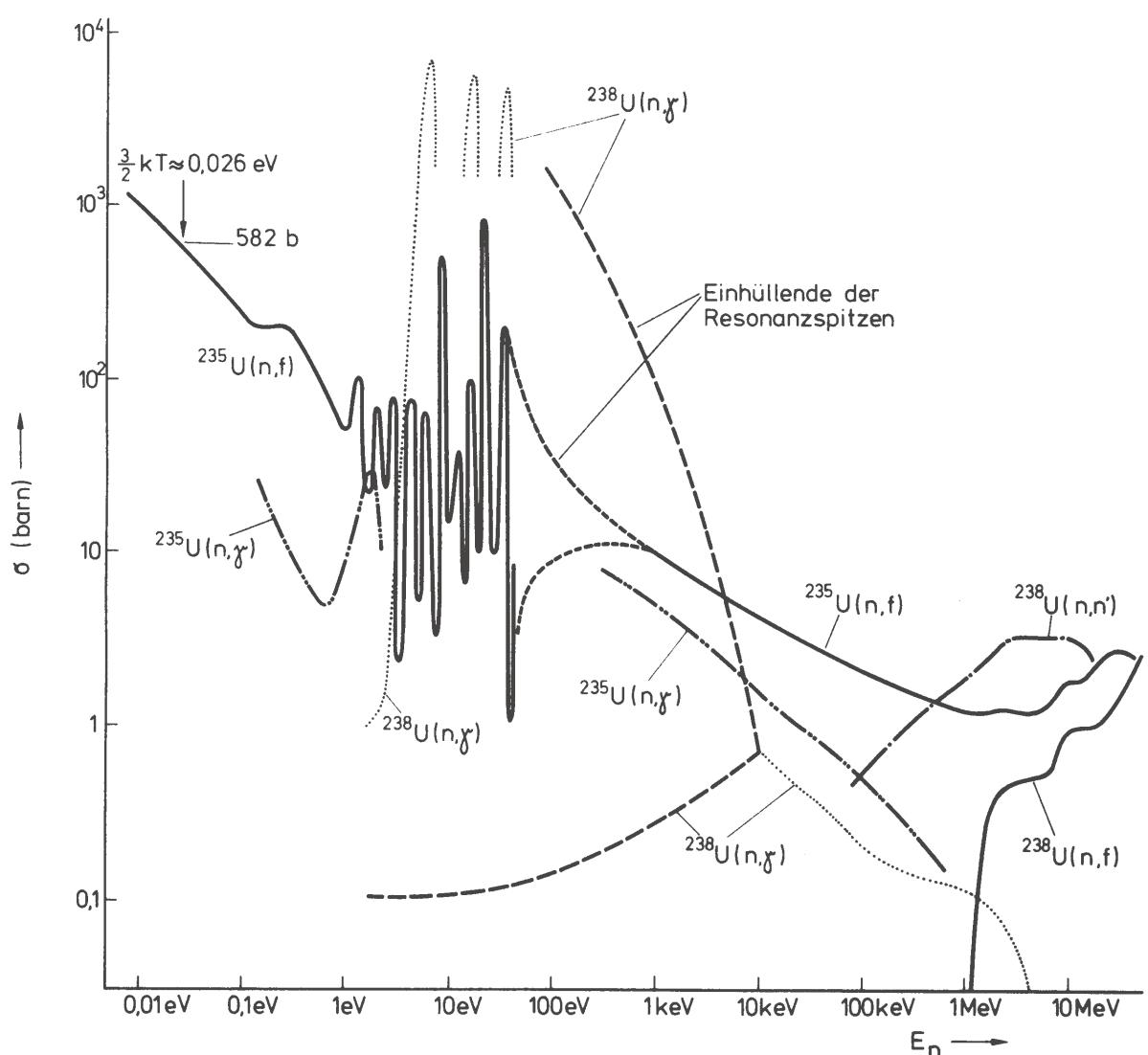


Abbildung 11.2: Wirkungsquerschnitte für Reaktionen von Neutronen mit Uran als Funktion der Neutronenenergie.

Kühlmittel sinkt die Kettenreaktionsrate. Mit Graphit und D<sub>2</sub>O ('schweres Wasser'), die eine besonders geringe Absorption aufweisen, können Kettenreaktionen auch in natürlichem Uran aufrechterhalten werden. Bei einfachem Wasser muß das Isotop <sup>235</sup>U angereichert werden (auf einige Prozent).

### 11.1.1 Kernspaltungsreaktoren

**Neutronenbilanz in einem Reaktor:** In einem Schritt  $i$  seien  $N_i$  thermische Neutronen vorhanden, die Spaltprozesse machen können. Im nächsten Schritt vermehren sich die thermischen Neutronen um einen Faktor  $k_{eff}$ :

$$N_{i+1} = k_{eff} \cdot N_i \quad (11.5)$$

Die Kettenreaktion verläuft stabil (stationär), wenn die Anzahl thermische Neutronen gleich bleibt, das heißt, wenn gilt:

$$k_{eff} = 1 \quad (11.6)$$

Der effektive Vermehrungsfaktor  $k_{eff}$  hängt mit dem Vermehrungsfaktor  $k_\infty$  für einen unendlich großen Reaktor über eine Geometriefaktor zusammen:

$$k_{eff} = k_\infty \cdot p_{geom}. \quad (11.7)$$

Der Faktor  $p_{geom}$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß ein Neutron nicht aus dem Reaktor entweicht. Bei einer Anreicherung von <sup>235</sup>U auf etwa 3% ergibt sich typisch  $k_\infty \approx 1.3$ .

Den Vermehrungsfaktor  $k_\infty$  zerlegt man üblicherweise in vier weitere Faktoren (4-Faktorenformel):

$$k_\infty = \eta \cdot \epsilon \cdot p \cdot f \quad (11.8)$$

Die einzelnen Faktoren haben folgende Bedeutung:

- $\eta$ : Vermehrungsfaktor für thermische Neutronen (Anzahl der erzeugten schnellen Neutronen pro thermischem Neutron; typisch  $\eta \approx 1.3 \dots 2.1$ );
- $\epsilon$ : Wahrscheinlichkeit für Spaltung durch schnelle Neutronen (typisch  $\epsilon \approx 1.03$ );
- $p$ : Wahrscheinlichkeit für Entkommen der  $(n, \gamma)$ -Resonanzen;
- $f$ : Wahrscheinlichkeit für Entkommen der Absorption im thermischen Bereich.

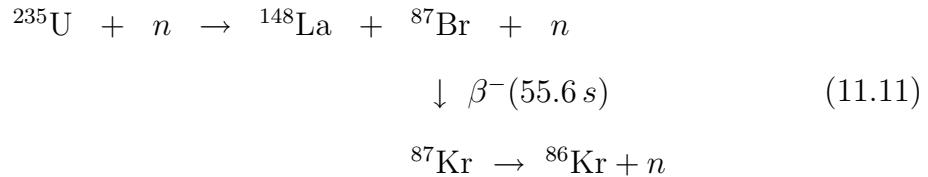
**Reaktorregelung:** Ein Reaktor muß so geregelt werden, daß  $k_{eff} \approx 1$  gehalten wird, das heißt, die Neutronendichte muß zeitlich stabil sein. Die zeitliche Änderung der Neutronendichte ist:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{(k - 1) \cdot \rho}{t_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \cdot e^{t/\tau} \quad (11.9)$$

Die Zeitkonstante für den Neutronenanstieg ist:

$$\tau = \frac{t_0}{k - 1} \quad (11.10)$$

Die typischen Zeiten für die Thermalisierung und den Einfang der Neutronen sind etwa 1 ms. Damit würden sich zu kurze Reaktionszeiten für die Regelung mit mechanischen Methoden ergeben. Hier hilft die Natur weiter: etwa 1% der Neutronen werden verzögert nach dem Spaltprozess erzeugt, zum Beispiel:



Die Regelung erfolgt durch Einführen von Materialien, die Neutronen gut absorbieren, zum Beispiel B- oder Cd-Stäbe ( $\sigma_{th}(\text{B}) = 770\text{ b}$ ,  $\sigma_{th}(\text{Cd}) = 2450\text{ b}$ ). Erstrebenswert ist eine ‘inhärente Sicherheit’, das heißt zum Beispiel, daß sich bei jeder unkontrollierten Veränderung in dem Reaktor der Vermehrungsfaktor erniedrigt:

$$\frac{dk}{dt} < 0 \tag{11.12}$$

Zum Beispiel kann man bei Leichtwasserreaktoren mit folgender Ereigniskette rechnen (negativer ‘Dampfblasenkoeffizient’):

Überhitzen → Blasenbildung → weniger thermische Neutronen.

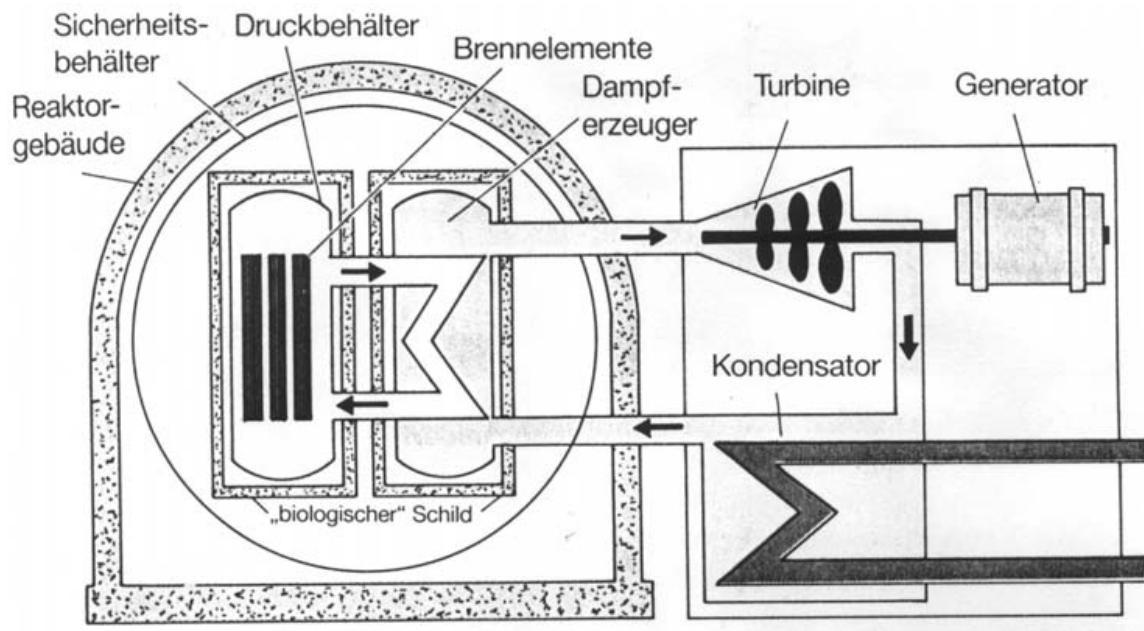
Beim Tschernobyl-Reaktor sind die Funktionen des Moderators (Graphit) und des Kühlmittels (Wasser) getrennt, so daß bei Kühlmittelverlust die Kettenreaktion nicht automatisch reduziert wird.

Allerdings hat auch ein Leichtwasserreaktor Probleme, wenn Kühlwasser verloren geht: auch wenn die Kettenreaktion unterbrochen ist, gibt der Reaktorkern noch große Wärmemengen, die durchaus einige MW sein können, durch Strahlung ab (‘Nachwärme’).

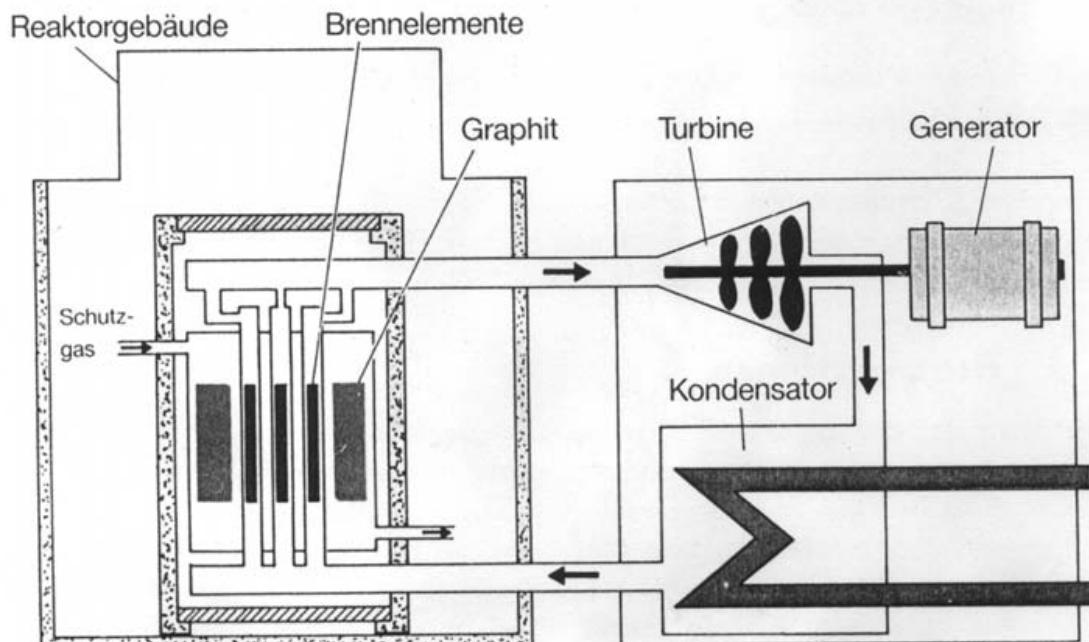
**Technisches Prinzip eines Reaktors:** In Abbildung 11.3 sind schematisch die technischen Ausführungen eines Druckwasserreaktors (z. B. Biblis) und eines graphitmoderierten Siedewasserreaktors (z. B. Tschernobyl) dargestellt.

Der Reaktor enthält den Reaktorkern mit dem Brennstoff, Moderatoren und Absorbern sowie das Dampferzeugungssystem für die Elektrogeneratoren. Die Sicherheitssysteme umfassen die (zum Teil automatischen) Regelungssysteme, Notkühlsysteme und passive Sicherungseinrichtungen. In Abbildung 11.3 zeigt das Schnittbild des Druckwasserreaktors von innen nach außen folgende passive Sicherheitselemente:

- einen den Reaktorkern umgebenden Druckbehälter aus Stahl;
- eine Betonabschirmung;
- einen kugelförmigen Sicherheitsbehälter aus Stahl;
- die äußere Stahlbetonhülle.



Deutscher Druckwasserreaktor



Graphitmodererter Siedewasserreaktor (Tschernobyl)

Abbildung 11.3: Schematische Darstellung eines Druckwasserreaktors und eines graphitmoderierten Siedewasserreaktors.

Da das Kühlmittel, Wasser, gleichzeitig Moderator ist, ergibt sich ein negativer ‘Dampfblasenkoeffizient’ (siehe oben), das heißt, daß die Kettenreaktion bei Kühlmittelverlust gestoppt wird.

Der graphitmoderierte Siedewasserreaktor in Abb. 11.3 unterscheidet sich durch die Trennung von Moderator (Graphit) und Kühlmittel (Wasser). Ebenfalls fehlen abgeschlossene Sicherheitsummantelungen.

**Der Kraftwerksunfall von Tschernobyl:** Als hauptsächliche Ursache für den schweren Kraftwerksunfall in Tschernobyl im April 1986 wird, neben menschlichem Versagen, ein zu kompliziertes Regelungs- und Sicherheitssystem angegeben (siehe zum Beispiel ‘Der Unfall im Kernkraftwerk Tschernobyl’, Gesellschaft für Reaktorsicherheit, Köln/Garching 1986). Schwierigkeiten bei der Erfassung und Regelung der Leistung des Reaktors haben sich unter anderem aus folgenden Gründen ergeben:

- große Abmessungen bei relativ geringer Leistungsdichte des Reaktorkerns (Höhe 7 m, Durchmesser 12 m,  $4.2 \text{ MW/m}^3$ );
- komplizierte Struktur der lokalen Leistungsverteilung (Brennstoff in 1700 Druckröhren);
- positiver ‘Dampfblasenkoeffizient’ weil das Kühlmittel nicht gleichzeitig als Moderator dient.

Im Laufe des Unfalls ist es zur Kernschmelze gekommen, die sich besonders katastrophal auswirkte, weil das Reaktorgebäude durch brennendes Graphit und Wasserstoffexplosionen zerstört wurde. Der Wasserstoff hat sich in Reaktionen von Zirkonium mit Wasser gebildet. Das Zirkonium wird als Schutzhülle für den Brennstoff verwendet. Durch die Hitze und die Explosionen wurde radioaktives Material bis zu 1000 m hoch in die Atmosphäre geschleudert und konnte so durch Strömungen weit über Europa verteilt werden.

### 11.1.2 Brutreaktionen

Das Problem, daß das spaltbare  $^{235}\text{U}$  in nur geringen Mengen vorkommt, kann im Prinzip durch das ‘Brüten’ von Spaltmaterial umgangen werden. Eine Brutreaktion mit  $^{238}\text{U}$  als Brutstoff ist in Abb. 11.4 oben dargestellt: Die Kette beginnt links mit der Spaltung von  $^{239}\text{Pu}$  mit schnellen Neutronen (kein Moderator notwendig!). Von den Spaltneutronen wird ein Teil von dem Brutstoff  $^{238}\text{U}$  eingefangen, der sich dann über einige Zerfälle in  $^{239}\text{Pu}$  umwandelt, das dann wieder für die Spaltung zur Verfügung steht.

Dieses Brutprinzip wird im ‘schnellen Brüter’ verwendet. Dieser Reaktortyp ist technologisch sehr schwierig wegen seiner hohen Energiedichte (ohne Moderator) und die dadurch bedingte Kühlung mit flüssigem Natrium, das eine sehr viel höhere Wärmeleitfähigkeit als Wasser hat. Ein anderes Problem ist die Spaltfähigkeit des Plutoniums durch schnelle Neutronen, was es bombenfähig macht. Bekanntlich ist die Entwicklung des schnellen Brüters in Deutschland (Kalkar) eingestellt worden.

In Abb. 11.4 unten ist der in ‘Hochtemperaturreaktoren’ (HTR) genutzte Brutprozess dargestellt. Hier hat  $^{232}\text{Th}$  die Rolle des Brutstoffes und  $^{233}\text{U}$  die Rolle des

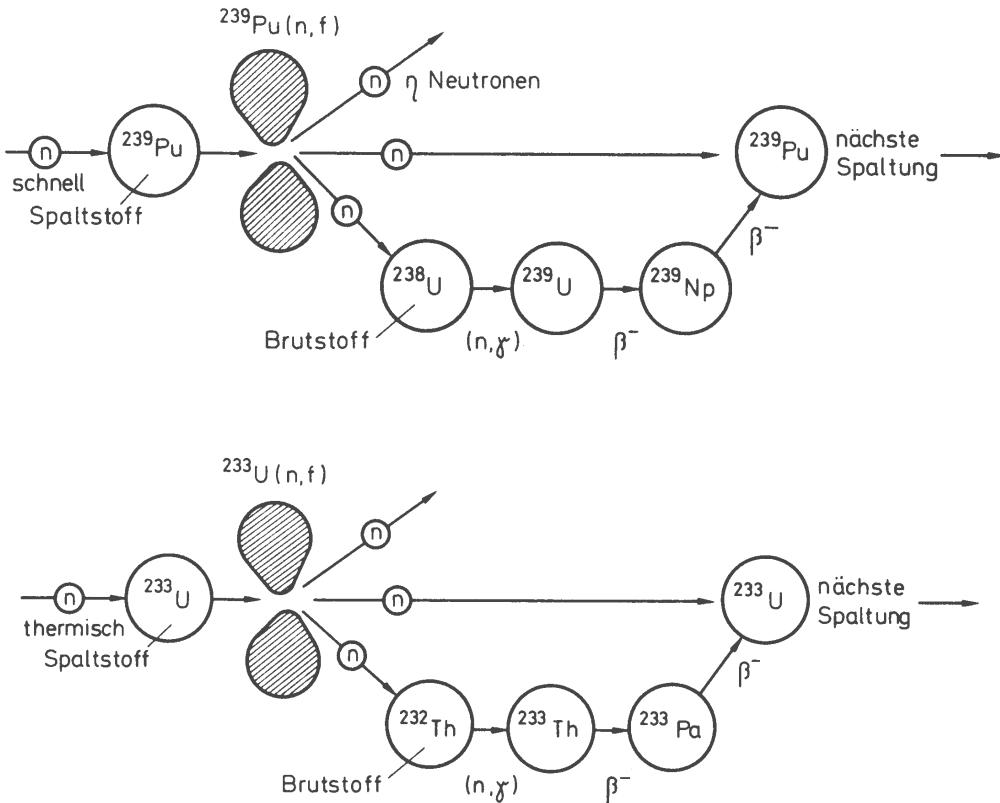


Abbildung 11.4: Oben: Spalt-Brut-Kette des schnellen Brüters; unten: Spalt-Brut-Kette des Hochtemperaturreaktors.

Spaltstoffes. In diesem Fall verläuft die Spaltung allerdings über thermische Neutronen. In Hamm-Uentrop ist bis 1989 ein Prototyp-HRT für vier Jahre in Betrieb gewesen. Diesem Reaktortyp werden einige günstige Eigenschaften nachgesagt: die hohe Betriebstemperatur bewirkt einen guten Wirkungsgrad, wegen der hohen Temperatur kann die Abwärme als Prozesswärme, zum Beispiel für Kohlevergasung genutzt werden, die Verpackung des Brennmaterials in kompakte Kugeln erlaubt eine relativ günstige Entsorgung. Trotzdem ist die Entwicklung aus technischen Gründen (?) abgebrochen worden.

### 11.1.3 Spaltprodukte und nukleare Entsorgung

Die Radioaktivität der abgebrannten Brennelemente und des Reaktorkerns kommt von den Spaltprodukten, den im Spaltprozess erzeugten Aktiniden (z. B. U, Pu, Np wie in der Brutreaktion Abb. 11.4) und den aktivierten Behältermaterialien. Die Spaltprodukte haben in der Regel einen Neutronenüberschuss, den sie meistens durch  $\beta$ -Zerfall, manchmal auch durch Neutronenemission ausgleichen; Anregungsenergien werden auch durch  $\gamma$ -Strahlung abgegeben. Der größte Teil der Aktivität ist nach einigen Monaten abgeklungen (Abb. 11.5), besonders langlebig sind die Aktiniden. Während der anfänglich schnellen Abklingphase werden abgebrannte Brennelemente in einem Wasserbecken im Reaktorbereich gelagert. Zu Beginn der Abklingzeit geben die Spaltprodukte eine Wärmeleistung von etwa 1 MW pro Tonne Brennstoff ab.

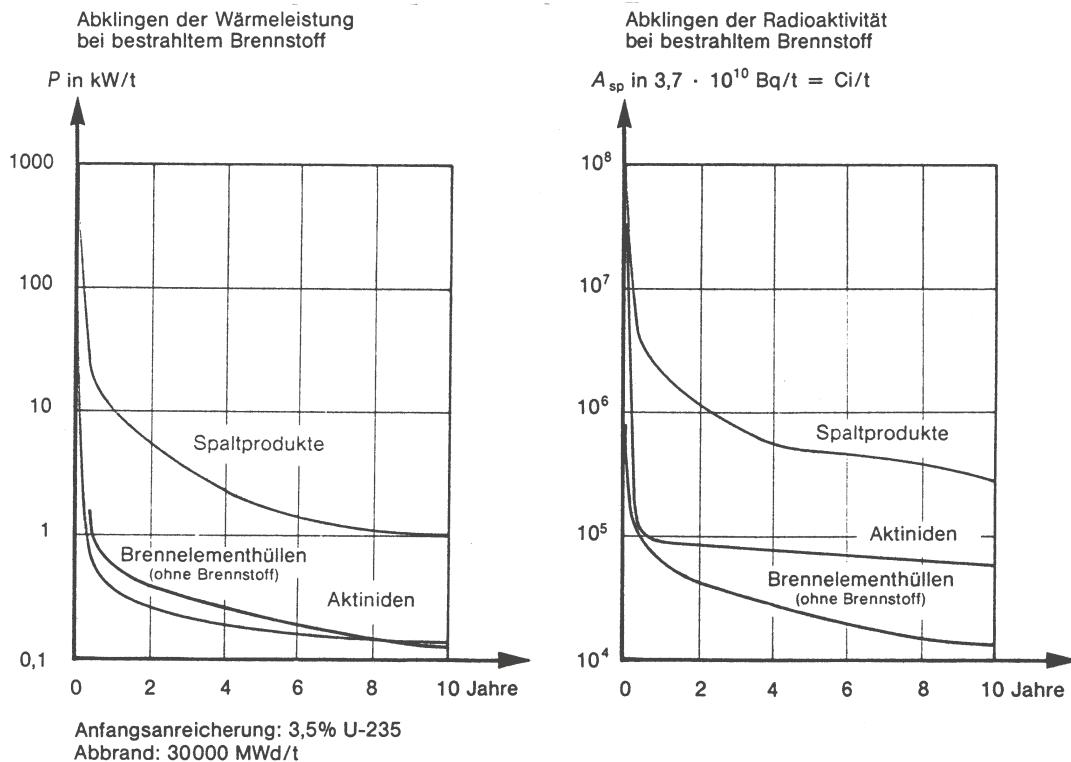


Abbildung 11.5: Abklingen von Wärmeleistung und Radioaktivität bei abgebrannten Brennelementen.

Diese Leistung ist nach einem Jahr um etwa einen Faktor 10 abgefallen. Nach etwa 10 Jahren liegt die Leistung bei etwa 1 kW pro Tonne Brennstoff, klingt aber nur noch sehr wenig ab.

Abgebrannte Brennstäbe eines Reaktors enthalten etwa 3.5% Spaltprodukte, der Rest ist  $^{238}\text{U}$  und ein geringer Anteil gebrütetes Spaltmaterial wie  $^{239}\text{Pu}$  ( $\sim 1\%$ ). Es gibt technologische Verfahren, die allerdings sehr aufwendig sind, die Spaltprodukte von den wiederverwertbaren Anteilen in ausgebrannten Brennstäben zu trennen. Das hohe Strahlenrisiko und die Tatsache, daß mit  $^{239}\text{Pu}$  bombenfähiges Spaltmaterial gewonnen wird, macht die Wiederaufbereitung zu einem brisanten Thema. Von ähnlicher Brisanz ist dieendlagerung von nuklearem Müll, zum Beispiel in Salzstöcken, die als geologisch stabil betrachtet werden.

In Los Alamos ist ein Verfahren vorgeschlagen worden, mit dem langlebige Aktiniden und Spaltprodukte durch Beschuß mit hochenergetischen Protonen aus einem Beschleuniger (etwa 1 GeV) in stabile oder kurzlebige Nuklide umgewandelt werden können. Auch die Möglichkeit, mit Beschleunigerprotonen Kerne unter Vermeidung langlebigen radioaktiven Abfalls zu spalten, wird diskutiert und erprobt ('energy amplifier'; zum Beispiel gibt es im CERN ein entsprechendes Projekt unter Leitung von C. Rubbia). Hier könnte sich ein Weg eröffnen, das Entsorgungsproblem für Kernreaktoren zu lösen.

## 11.2 Kernfusion

### 11.2.1 Kinematische Bedingungen für Kernfusion

Wie wir bereits in Kapitel 8 besprochen haben, hat die Bindungsenergie pro Nukleon bei  $A \approx 60$  ein Maximum (Abb. 8.4). Für leichtere Kerne ist es energetisch günstiger zu schwereren Kernen zu verschmelzen. Allerdings müssen sie dazu zunächst die Coulomb-Abstoßung überwinden. Dazu ist für die Wasserstoffisotope bei der Fusion zu Helium eine Energie von mehr als 1 keV notwendig. Die entsprechende Temperatur ergibt sich aus:

$$k \cdot T = 1 \text{ keV} \Rightarrow T = 11.6 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (11.13)$$

Solche Temperaturen treten im Inneren der Sterne auf. Das expandierende und sich abkühlende Universum hatte ein paar Tage nach dem Urknall ebenfalls diese Temperatur. Zu dieser Zeit begannen sich die Elemente zu bilden ('primordiale Nukleosynthese').

### 11.2.2 Sonnenenergie

Die Dichte, Druck und Temperatur im Inneren der Sonne,

$$\rho = 10^5 \text{ kg/m}^3, \quad p = 2 \cdot 10^{15} \text{ Pa}, \quad T = 15.5 \cdot 10^6 \text{ K}, \quad (11.14)$$

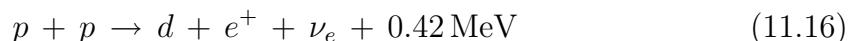
erlauben die Kernfusion, die im wesentlichen über zwei Reaktionsfolgen, die pp-Kette und den CNO-Zyklus, verläuft. In jedem Fall findet eine Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium statt ('Wasserstoffbrennen'). Die Bilanzgleichung lautet:



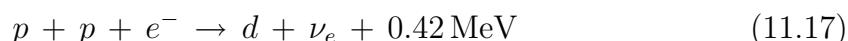
Die Neutrinos verlassen die Sonne mit einer mittleren Energie von 0.26 MeV. In dem Prozess werden zusätzlich Gammaquanten erzeugt die lokal absorbiert werden.

#### Der pp-Zyklus

Die Sonne und entsprechende Sterne bestehen hauptsächlich aus Protonen und Elektronen, die unter den herrschenden Druck- und Temperaturbedingungen ein Plasma bilden. Die Protonen können zu Deuterium entsprechend der folgenden Reaktion verschmelzen:



Das ist ein Prozess der schwachen Wechselwirkung mit einem entsprechend kleinen Wirkungsquerschnitt: Jedes Proton reagiert im Mittel nach etwa  $10^{10}$  Jahren. Damit wird die Langzeitstabilität der Sonne garantiert. Alternativ kann Deuterium mit einem kleinen Anteil (0.23%) über den sogenannten pep-Prozess erzeugt werden:



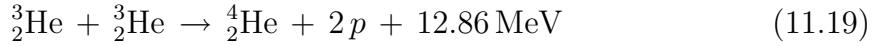
Das ist ein Elektroneneinfang-Prozess (EC), der im Gegensatz zu dem  $\beta$ -Zerfall in (11.16) monoenergetische Neutrinos liefert (siehe Abb. 11.6).

Im nächsten Schritt wird das Heliumisotop  $^3\text{He}$  gebildet:

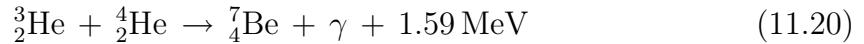


Jetzt gibt es drei unterschiedliche Wege (pp-I bis pp-III), die jeweils am Ende zu  ${}_2^4\text{He}$  führen.

**pp-I:**

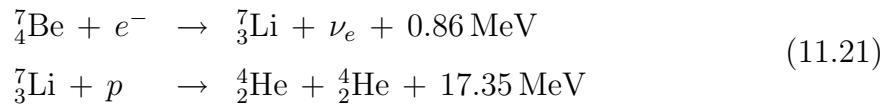


**${}^7\text{Be}$ -Produktion:** Die Ketten pp-II und pp-III beginnen beide bei der Produktion von  ${}^7\text{Be}$ :

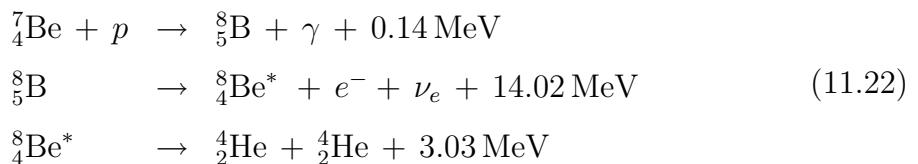


Dann teilen sich die Wege:  ${}^7\text{Be}$  kann mit einem Elektron oder einem Proton reagieren.

**pp-II:**



**pp-III:**



Der angeregte  ${}^8\text{Be}$ -Kern zerfällt spontan in die beiden Heliumkerne.

Ausserdem gibt es noch einen sehr kleinen Beitrag von dem “hep-Prozess”:



Schwerere Elemente, bis zum Maximum der Bindungsenergie etwa bei Eisen, können bei höheren Temperaturen (Sterne mit hoher Masse, Endstadium von Sternen) gebildet werden. Die Elemente oberhalb des Maximums entstehen in Supernova-Explosionen (kollabierende Sterne, bei denen der Strahlungsdruck der Gravitation nicht mehr standhalten kann).

### 11.2.3 Neutrinos von der Sonne

In den verschiedenen Fusionsreaktionen werden Neutrinos produziert, die zum Teil monoenergetisch sind (wenn sie von einem EC Prozess stammen) oder ein kontinuierliches Spektrum bis etwa 10 MeV haben (Abb. 11.6).

Trotz des sehr kleinen Wirkungsquerschnittes dieser niederenergetischen Neutrinos werden Solarneutrinos in Detektoren mit großer Targetmasse nachgewiesen. Zur Abschirmung des Untergrundes von der kosmischen Strahlung sind diese Detektoren in unterirdischen Kavitäten (Bergwerke, Tunnel) untergebracht.

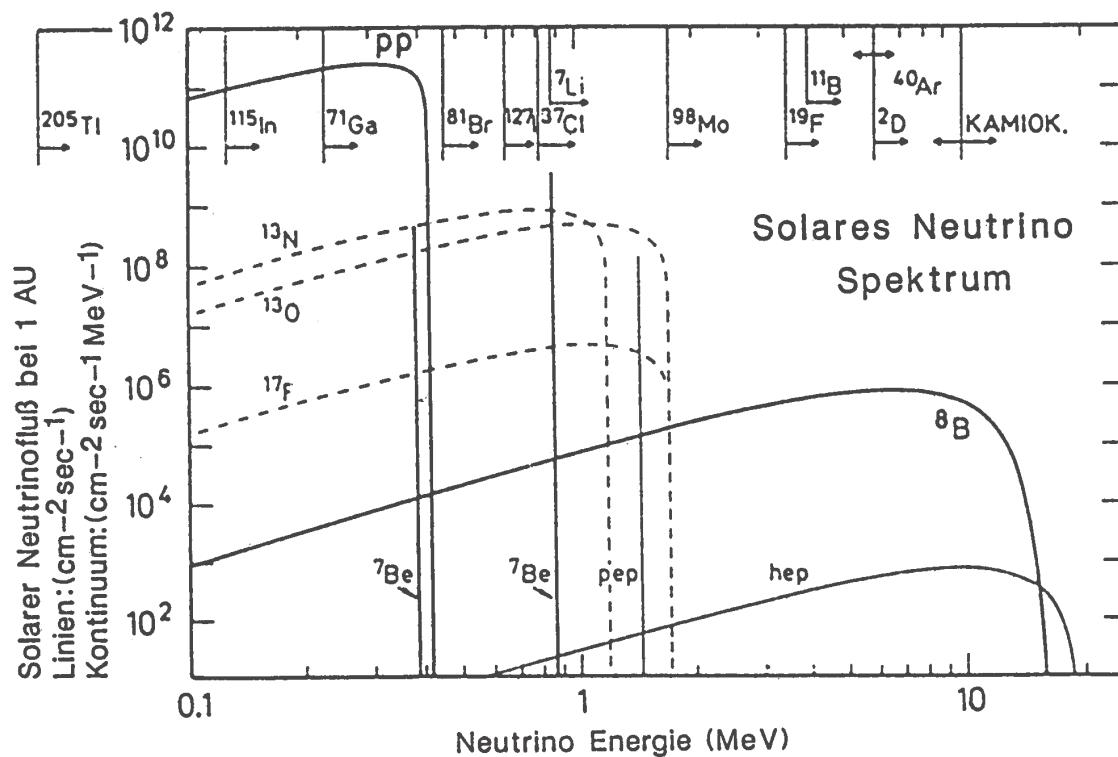


Abbildung 11.6: Das theoretisch berechnete solare Neutrinospektrum mit den Beiträgen der verschiedenen Reaktionen. Eingezeichnet sind auch die Schwellenenergien verschiedener Detektormaterialien. Der EC-Prozess des  $^7\text{Be}$  in (11.21) führt zu zwei Linien entsprechend zwei möglichen Übergängen in  $^7\text{Li}$ .

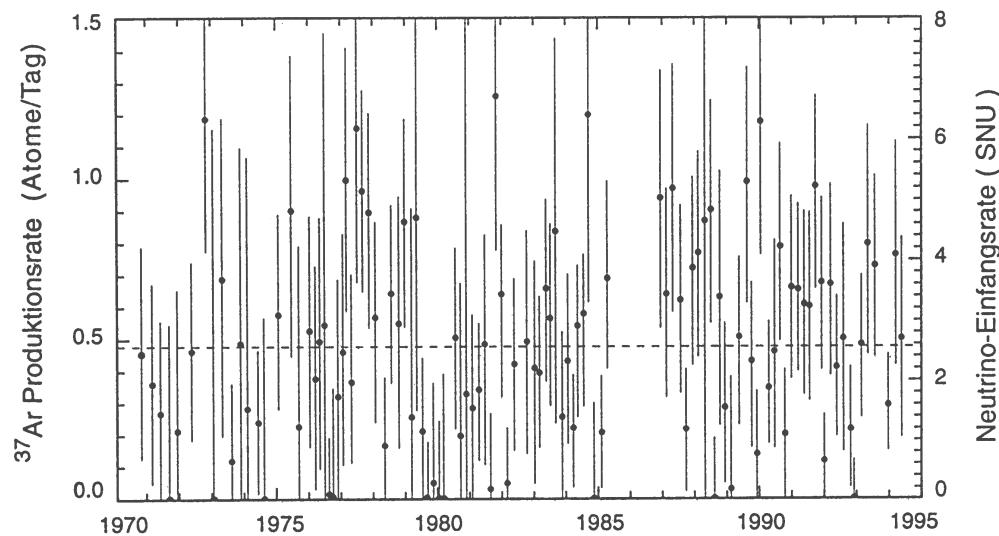
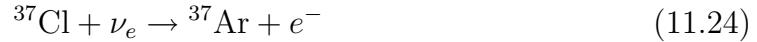


Abbildung 11.7: Mit dem Chlor-Experiment gemessener Neutrinofluß seit 1970. Nach den theoretischen Rechnungen werden  $1.5 \pm 0.6$  Atome pro Tag (linke Skala) erwartet.

Der Neutrinofluß von der Sonne ist von verschiedenen Experimenten in verschiedenen Energiebereichen etwa um einen Faktor 2 kleiner als die theoretischen Erwartungen gemessen worden. Zuerst wurde dieses Defizit an Solarneutrinos in dem Experiment von R. Davis beobachtet (Abb. 11.7). Das Experiment wurde bereits 1968 begonnen und lief bis 1994 in der Homestake Mine in South Dakota mit 615 t Perclorethylen ( $C_2Cl_4$ ). Die Nachweisreaktion



hat eine Schwelle für Neutrinoenergien von 814 keV. Das  $^{37}\text{Ar}$  ist in der Lösung flüchtig und wird jeden Monat extrahiert. Der Nachweis erfolgt über den radioaktiven Zerfall



Die Ergebnisse werden häufig in SNU (solar neutrino units) angegeben:

$$1 \text{ SNU} = 10^{-36} \text{ Einfänge pro Targetatom und Sekunde}$$

Gemessen werden etwa 15 Atome pro Monat! Das Ergebnis des Homestake-Experimentes ist  $2.56 \pm 0.22$  SNU bei erwarteten  $7.7 \pm 1.2$  SNU.

Mit dem Chlor-Experiment kann wegen der Energieschwelle von 814 keV der dominierende pp-Prozess mit  $\nu$ -Energien  $\leq 420$  keV nicht beobachtet werden. Inzwischen gibt es allerdings Ergebnisse von anderen Experimenten, die auch beim pp-Prozess das Neutrinodefizit beobachten. In den Experimenten Gallex und Sage wird für den Nachweis Gallium benutzt:



Die Reaktion hat eine Schwelle für Neutrinoenergien von 233 keV. Mit einer Halbwertszeit von 11.43 Tagen geht Germanium durch Elektroneinfang wieder in Gallium über:



Dieser Zerfall wird über Auger-Elektronen nachgewiesen (Auger-Elektronen werden beim Auffüllen des freien Elektronenplatzes emittiert).

Bei höheren Neutrinoenergien, oberhalb von einigen MeV, können Neutrinos direkt (in ‘Echtzeit’) über ihre Wechselwirkung mit den Elektronen nachgewiesen werden:



Wenn das Elektron genügend Rückstoß bekommen hat, kann es nachgewiesen werden, zum Beispiel kann es in einem Wassertank einen Cherenkov-Kegel erzeugen, dessen Richtung annähernd der Neutrinorichtung entspricht. Das Experiment Super-Kamiokande in Japan hat in einem Tank mit etwa 50000 to Wasser Sonnenneutrinos gemessen. Die gemessenen Winkel relativ zur Richtung der Sonne in Abb. 11.8 zeigen eine Überhöhung in Sonnenrichtung. Super-Kamiokande und der Vorläufer Kamiokande haben auch für energetische Sonnenneutrinos ein Defizit relativ zu der theoretischen Erwartung festgestellt.

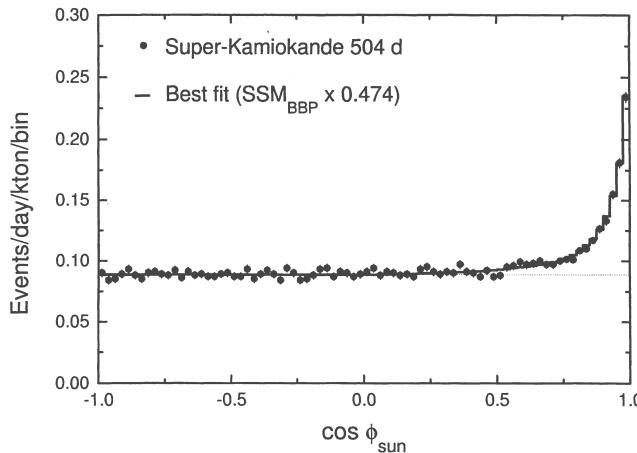


Abbildung 11.8: Neutrino-Raten als Funktion der Einfallrichtung zur Sonne gemessen von Super-Kamiokande;  $\cos \phi_{\text{sun}} = 1$  entspricht der Sonnenrichtung. Nach Subtraktion eines konstanten Untergrundes ist die Form der gemessenen Verteilung in sehr guter Übereinstimmung mit dem Standard-Sonnenmodell (SSM). Die theoretische Kurve muß allerdings um einen Faktor 0.474 herunterskaliert werden.

In Tabelle 11.1 ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse von Experimenten mit verschiedenen Energieschwellen gezeigt (aus T. Kirsten: ‘Solar neutrino experiments: results and implications’, Rev. Mod. Phys., 71 (1999) 1213). Eine aktuelle Zusammenfassung findet man auf der PDG-Seite [34] (Solar Neutrinos Review: [http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/solarnu\\_s067sol.pdf](http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/solarnu_s067sol.pdf)) .

In die theoretischen Berechnungen gehen Temperatur, Dichte und Druck im Inneren der Sonne sehr sensitiv ein. Man glaubt aber diese Parameter sehr gut kontrollieren zu können (unter anderem durch ‘helio-seismische’ Messungen). Für einen gegebenen Prozess zur Energieerzeugung, weiß man, wieviel Energie pro erzeugtem Neutrino zusätzlich erzeugt wird. Bei dem dominierenden pp-Prozess ist es zum Beispiel etwa 13 MeV pro Neutrino. Im Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Abstrahlung der Sonnenenergie lässt sich aus der Strahlungsleistung pro Fläche auf der Erde (Solarkonstante  $S = 8.5 \cdot 10^{11} \text{ MeV cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ) der Neutrino-Fluss bestimmen:

$$\Phi_\nu = S / \langle E_\nu \rangle \approx 6.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (11.29)$$

**Neutrinooszillationen:** Eine Erklärung für das Neutrinodefizit ist möglich, wenn Neutrinos eine Masse haben. Dann kann es Oszillationen zwischen den verschiedenen Neutrinoarten geben<sup>1</sup>. Inzwischen gilt als gesichert, dass die Elektronenelektronen aus den Fusionsprozessen in Myon- oder Tau-Neutrinos übergehen, auf die die Nachweisreaktionen nicht sensitiv sind, und dass die  $(\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu, \nu_\tau)$ -Oszillation auf der Erde gerade ein Minimum für  $\nu_e$  ergeben.

Ein weiterer Hinweis auf Neutrino-Oszillationen kommt von Experimenten, die Neutrinos nachweisen, die in der Atmosphäre entstehen. Elektron- und Myonneu-

<sup>1</sup>Mehr dazu in ‘13. Neutrino mass, mixing, and flavor change’ <http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/numixrpp.pdf> [34]; siehe auch Kapitel 4 in dem Astroteilchenphysik-Skript <http://www-zeuthen.desy.de/~kolanosk/astro0607>

Tabelle 11.1: Resultate von Sonnenneutrino-Experimenten verglichen mit den theoretischen Erwartungen des Standard-Sonnenmodells. Die Vorhersagen und Meßergebnisse sind für die radio-chemischen Experimente (Homestake, Gallex, Sage) in SNU und für (Super)-Kamiokande in  $10^6 \nu(^8\text{B}) \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  angegeben.

	Homestake	Kamiokande	Super-Kamiokande	Gallex	Sage
Schwelle [MeV]	0.814	7.5	7.0	0.233	0.233
Laufzeit	1970 - 1994	1987 - 1995	1996 - 1998	1991 - 1997	1990 - 1997
$S_{th}$ [SNU]	$7.7^{+1.2}_{-1.0}\text{U}$	$5.15^{+0.98}_{-0.72}$	$5.15^{+0.98}_{-0.72}$	$129^{+8}_{-6}$	$129^{+8}_{-6}$
$S_{exp}$ [SNU]	$2.56 \pm 0.22$	$2.82 \pm 0.38$	$2.42 \pm 0.08$	$77.5 \pm 8$	$66.6 \pm 8$
$S_{th}/S_{exp}$	3.0	1.8	2.1	1.7	1.9

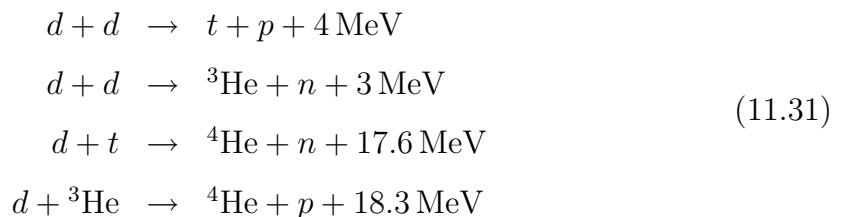
Neutrinos können zum Beispiel in folgender Reaktionskette in der Atmosphäre erzeugt werden:

$$p + \text{Kern} \rightarrow \pi^- + X; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu; \quad \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (11.30)$$

Bei dem entsprechenden Zerfall von  $\pi^+$ -Mesonen werden die ladungskonjugierten Neutrinos erzeugt. Man beobachtet ein Defizit an  $\mu$ -Neutrinos, die von unten kommen, also durch die Erde gehen. Der entsprechende Fluss der Elektronenelektronen stimmt aber etwa mit den Erwartungen ohne Oszillationen überein. Es ist deshalb naheliegend anzunehmen, dass die  $\mu$ -Neutrinos bevorzugt in  $\tau$ -Neutrinos oszillieren (wenn es keine anderen Neutrinoarten gibt).

#### 11.2.4 Technische Nutzung der Kernfusion

Für die technische Nutzung der Kernfusion<sup>2</sup> kommt natürlicher Wasserstoff als Brennstoff nicht in Frage, weil die erste Reaktionsstufe (11.16) wegen der schwachen Wechselwirkung zu langsam ist. Geeigneter sind Deuterium und Tritium ( $d=^2\text{H}$ ,  $t=^3\text{H}$ ), mit denen folgende Fusionsreaktionen in Betracht kommen:



Den größten Wirkungsquerschnitt bei günstigem Energiegewinn (hoher ‘Q-Wert’) hat die d-t-Reaktion. Deuterium kann wirtschaftlich aus Wasser gewonnen werden,

<sup>2</sup>Siehe dazu die Vorlesung von G. Fußmann:  
<http://plasma.physik.hu-berlin.de/publications/PlasmaphysikII2002.pdf>

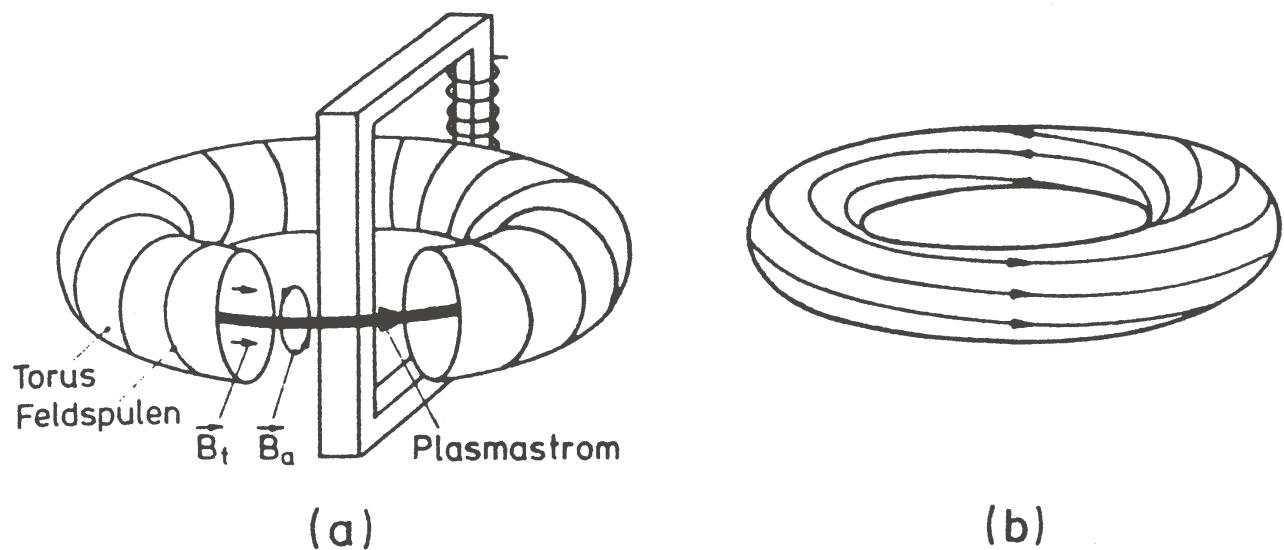


Abbildung 11.9: Das Tokamak-Prinzip: a) Anordnung von Torus, Plasma und Transformator. b) Resultierendes Magnetfeld.

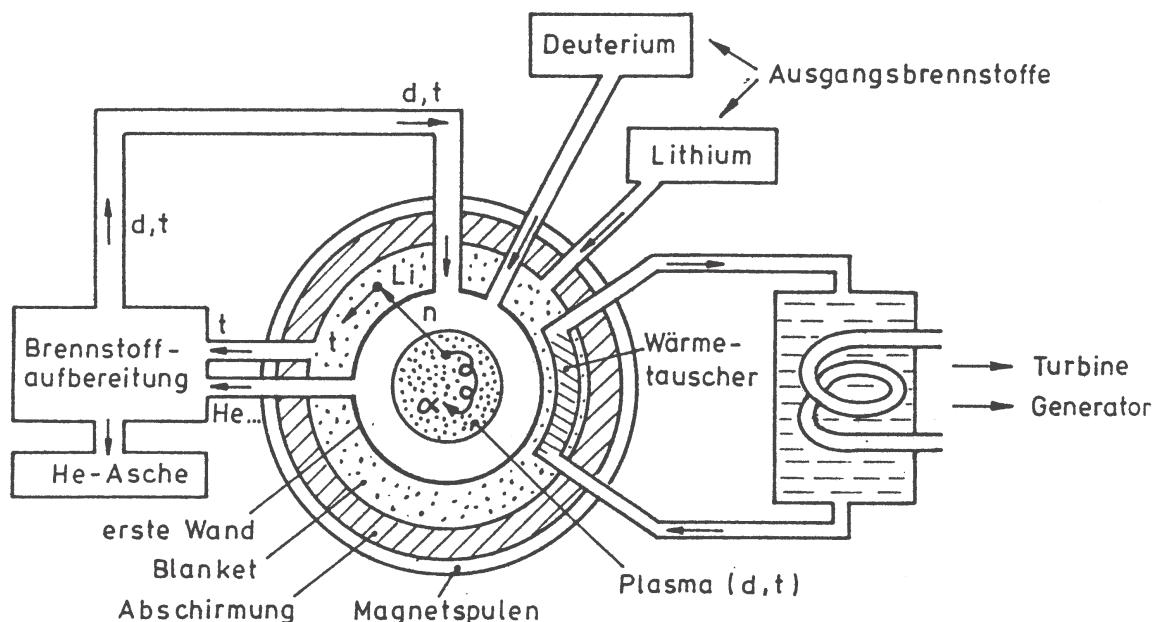


Abbildung 11.10: Komponenten eines Fusionsreaktors nach dem Tokamak-Prinzip.

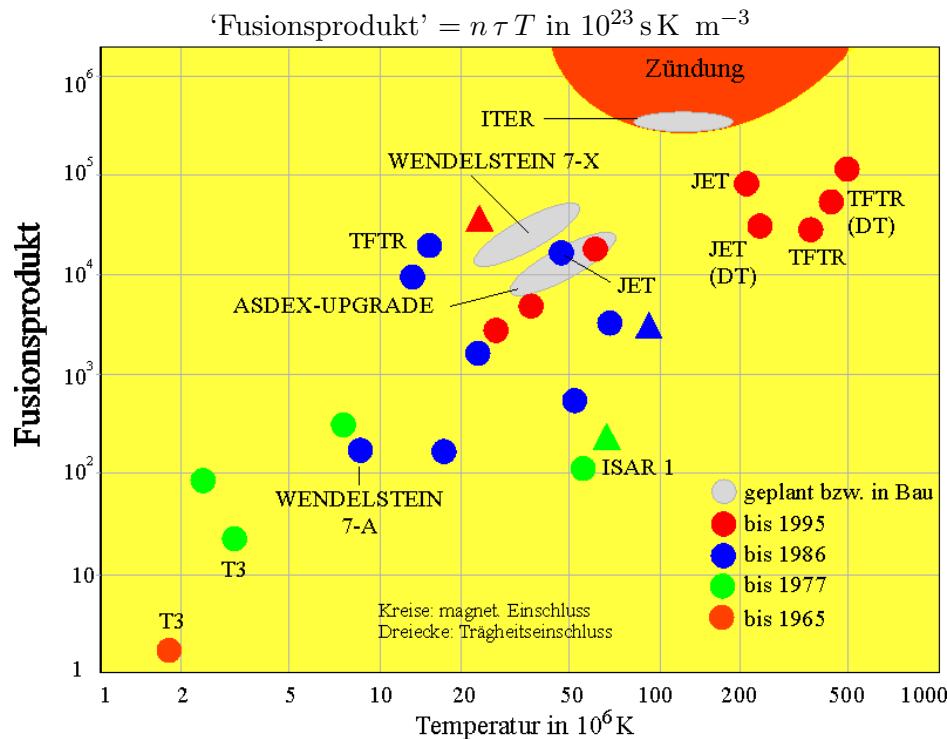
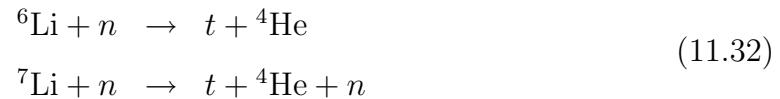


Abbildung 11.11: Das Produkt aus Teilchendruck, Einschlußzeit und erreichte Ionentemperatur ('Fusionsprodukt') aufgetragen gegen die Ionentemperatur für verschiedene Testreaktoren. In dem Bereich 'Zündung' ist ein stationärer Fusionsbetrieb möglich.

in dem das Isotop mit einer Häufigkeit von 0.02% vorkommt. Während Deuterium stabil ist, hat Tritium eine Halbwertszeit von 12.3 Jahren und kommt deshalb in der Natur kaum vor. Es kann aber in Fusionsreaktoren aus Lithium, das in der Natur relativ häufig vorkommt, aus folgenden Reaktionen gewonnen werden:



### Lawson-Kriterium und Plasmaeinschluß:

Für die d-t-Reaktion ist eine Temperatur von mindestens  $4 \cdot 10^7 \text{ K}$  notwendig. Bei diesen Temperaturen sind die d- und t-Atome vollständig ionisiert und bilden ein Plasma. Um ein kontrolliertes stationäres Brennen zu erreichen, muß dieses Plasma genügend lange bei hinreichender Dichte (oder Druck) eingeschlossen sein. Das Produkt aus Teilchendichte und Einschlußzeit bei einer gegebenen Temperatur dient als Kriterium (Lawson-Kriterium<sup>3</sup>):

$$n \tau > \frac{12kT}{\langle v\sigma \rangle \epsilon} \tag{11.33}$$

wobei  $v$  die Teilchengeschwindigkeit,  $\sigma$  der Fusionsquerschnitt,  $\epsilon$  die Reaktionsenergie und  $\langle v\sigma \rangle$  die gemittelte Reaktionsrate sind. Die Wirkungsquerschnitte und

<sup>3</sup>Siehe auch <http://de.wikipedia.org/wiki/Lawson-Kriterium>

Reaktionsenergien verhalten sich als Funktion der Temperatur für jede Fusionsreaktion unterschiedlich. Das Produkt  $n\tau$  hat aber immer ein absolutes Minimum bei einer optimalen Temperatur. Zum Beispiel ergeben sich für die d-d-Reaktion  $n\tau > 10^{20} \text{ s m}^{-3}$  und für die d-t-Reaktion  $n\tau > 10^{18} \text{ s m}^{-3}$ . Das Lawson-Kriterium ist eine notwendige Bedingung, allerdings sind viele weitere Bedingungen zu erfüllen, um zu einer technischen Realisierung eines Reaktors zu kommen.

**Einschlußprinzipien:** Für die technische Realisierung des Einschlusses werden folgende Verfahren untersucht:

- Einschluß in einer magnetischen Flasche (Tokamak-Prinzip);
- Laserfusion: d-t-Kügelchen (pellets) werden mit sehr kurzen, hochintensiven Laserpulsen komprimiert;
- Beschleunigerbeschluß: ähnlich wie beim Laser, statt der Photonen werden hier Ionen benutzt;
- Durch Myonen katalysierte Fusion: negative Myonen, die im Kern eingefangen werden, senken die Coulomb-Barriere.

In den meisten Testanlagen wird der magnetische Einschluß untersucht. Dieses Verfahren hat zur Zeit auch die besten Aussichten, für die Energiegewinnung wirtschaftlich genutzt werden zu können.

**Fusionsreaktoren mit magnetischem Einschluß:** Abbildung 11.9 zeigt das Tokamak-Prinzip der Kernfusion mit magnetischem Einschluß. Das Plasma befindet sich in einem Torus, der von Feldspulen umwickelt ist. Durch ein gepulstes Transformatorfeld wird ein Plasmastrom angeregt (das Plasma wirkt wie die Sekundärwindung des Transformatormodells). Das Toroidalfeld zusammen mit dem zirkulären Feld, das der Plasmastrom selbst erzeugt, ergibt ein resultierendes Feld mit der in Abb. 11.9b gezeigten ‘verschraubten’ Struktur. Abbildung 11.10 zeigt die verschiedenen Komponenten, die für eine kontrollierte Fusion notwendig sind.

Es ist technisch sehr schwierig, die erforderlichen Plasmadichten bei hohen Temperaturen für genügend lange Einschlußzeiten zu erreichen. Bisher ist das europäische Projekt JET (Joint European Torus) in Culham (England) den Anforderungen an selbständiges thermonukleares Brennen am nächsten gekommen (Abb. 11.11). Als nächster Schritt ist das internationale Projekt ITER geplant, mit dem bis etwa 2020 erreicht werden soll, dass zehnmal mehr Energie aus Fusion gewonnen wird, als für die Plasmaheizung aufgewandt wird. Mit einer Fusionsleistung von 500 Megawatt soll ITER erstmals ein brennendes und Energie lieferndes Plasma erzeugen.

Einige Elementarteilchen und deren Eigenschaften

		$I^G(J^{PC})$	$mc^2$	$\tau(\text{sec})/\Gamma$	Zerfälle	$L$	$B$	$S$	$C_q$	$B_q$
(Eich)bosonen	$\gamma$	$0, 1(1^{--})$	0	—	—					
	$W^\pm$	$J = 1$	80.43 GeV	2.12 GeV	$\ell\nu, \text{Hadronen} : q_1\bar{q}_2, \dots$					
	$Z^0$	$J = 1$	91.188 GeV	2.495 GeV	$\ell^+\ell^-, \text{Hadronen} : q\bar{q}, \dots$					
Leptonen ( $\ell$ )	$\nu_e$	$J = \frac{1}{2}$	< 2.2 eV	—	—	$L_e = 1$	0	0	0	0
	$e^-$	$J = \frac{1}{2}$	0.511 MeV	—	—	$L_e = 1$	0	0	0	0
	$\nu_\mu$	$J = \frac{1}{2}$	< 0.19 MeV	—	—	$L_\mu = 1$	0	0	0	0
	$\mu^-$	$J = \frac{1}{2}$	105.658 MeV	$2.197 \cdot 10^{-6}$ s	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$	$L_\mu = 1$	0	0	0	0
	$\nu_\tau$	$J = \frac{1}{2}$	< 18.2 MeV	—	—	$L_\tau = 1$	0	0	0	0
	$\tau^-$	$J = \frac{1}{2}$	1777 MeV	$290.6 \cdot 10^{-15}$ s	$\ell^-\bar{\nu}_\ell\nu_\tau, \rho^-\nu_\tau, \pi^-\nu_\tau, \dots$	$L_\tau = 1$	0	0	0	0
Mesonen	$\pi^\pm$	$1^-(0^-)$	139.6 MeV	$2.6 \cdot 10^{-8}$ s	$\mu^\pm\nu_\mu(99.99\%), e^\pm\nu_e$	0	0	0	0	0
	$\pi^0$	$1^-(0^{++})$	134.977 MeV	$8.4 \cdot 10^{-17}$ s	$\gamma\gamma, \gamma e^+e^-$	0	0	0	0	0
	$\eta$	$0^+(0^{++})$	547.8 MeV	1.29 keV	$\gamma\gamma, 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0, \dots$	0	0	0	0	0
	$\eta'$	$0^+(0^{++})$	957.8 MeV	202 keV	$\pi^+\pi^-\eta, \rho\gamma, \pi^0\pi^0\eta, \dots$	0	0	0	0	0
	$\rho^\pm$	$1^+(1^-)$	776 MeV	150 MeV	$\pi^\pm\pi^0$	0	0	0	0	0
	$\rho^0$	$1^+(1^{--})$	776 MeV	150 MeV	$\pi^+\pi^-$	0	0	0	0	0
	$\omega$	$0^-(1^{--})$	782.6 MeV	8.49 MeV	$\pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma, \pi^+\pi^-$	0	0	0	0	0
	$\phi$	$0^-(1^{--})$	1019.42 MeV	4.46 MeV	$K^+K^-, K_L^0K_S^0, \pi^+\pi^-\pi^0, \dots$	0	0	0	0	0
	$J/\psi$	$0^-(1^{--})$	3096.91 MeV	91 keV	$\ell^+\ell^-, \text{Hadronen}, \dots$	0	0	0	0	0
	$\psi(2S)$	$0^-(1^{--})$	3686.09 MeV	281 keV	$J/\psi\pi\pi, \text{Hadronen}, \dots$	0	0	0	0	0
	$\psi(3770)$	$0^-(1^{--})$	37770 MeV	23.6 MeV	$D^+D^-, D^0\bar{D}^0$	0	0	0	0	0
	$\Upsilon(1S)$	$0^-(1^{--})$	9460.3 MeV	53 keV	$\ell^+\ell^-, \text{Hadronen}, \dots$	0	0	0	0	0
	$\Upsilon(2S)$	$0^-(1^{--})$	10023.26 MeV	43 keV	$\Upsilon(1S)\pi\pi, \text{Hadronen}, \dots$	0	0	0	0	0
	$\Upsilon(4S)$	$0^-(1^{--})$	10580.0 MeV	20 MeV	$B^+B^-, B^0\bar{B}^0$	0	0	0	0	0
	$K^\pm$	$\frac{1}{2}(0^-)$	493.7 MeV	$1.238 \cdot 10^{-8}$ s	$\mu^\pm\nu_\mu, \pi^\pm\pi^0, \dots$	0	0	$\pm 1$	0	0
	$K^0/\bar{K}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	497.65 MeV		$\pi^-\ell^+\nu_\ell/\pi^+\ell^-\bar{\nu}_\ell$	0	0	$\pm 1$	0	0
	$K_S^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	497.65 MeV	$0.8958 \cdot 10^{-10}$ s	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$	0	0	0	0	0
	$K_L^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	497.65 MeV	$5.18 \cdot 10^{-8}$ s	$\pi^+\pi^-\pi^0, 3\pi^0$	0	0	0	0	0
	$K^{*\pm}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	891.7 MeV	50.8 MeV	$K\pi$	0	0	$\pm 1$	0	0
	$\bar{K}^{*0}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	892 MeV	50 MeV	$K\pi$	0	0	-1	0	0
	$K^{*0}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	896.1 MeV	50.7 MeV	$K\pi$	0	0	+1	0	0
	$D^+$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1869.4 MeV	$1.04 \cdot 10^{-12}$ s	$\bar{K}^0\ell^+\nu_\ell, K^-\pi^+\pi^+, \dots$	0	0	0	+1	0
	$D^-$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1869.4 MeV	$1.04 \cdot 10^{-12}$ s	$K^0\ell^-\bar{\nu}_\ell, K^+\pi^-\pi^-, \dots$	0	0	0	-1	0
	$D^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1864.6 MeV	$0.413 \cdot 10^{-12}$ s	$K^-\ell^+\nu_\ell, K^-\pi^+, \dots$	0	0	0	+1	0
	$\bar{D}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1864.6 MeV	$0.413 \cdot 10^{-12}$ s	$K^+\ell^-\bar{\nu}_\ell, K^+\pi^-, \dots$	0	0	0	-1	0
	$D^{*+}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	2010.0 MeV	< 131 keV	$D^0\pi^+, D^+\pi^0, D^+\gamma$	0	0	0	+1	0
	$D^{*0}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	2006.7 MeV	< 2.1 MeV	$D^0\pi^0, D^0\gamma$	0	0	0	+1	0
	$D_S^\pm$	$0(0^-)$	1968.3 MeV	$0.49 \cdot 10^{-12}$ s	$\phi\pi^\pm, K^*K$	0	0	$\pm 1$	$\pm 1$	0
	$B^+$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5279.0 MeV	$1.671 \cdot 10^{-12}$ s	$\bar{D}^{*0}\ell^+\nu_\ell, \bar{D}^{*0}\rho^+, J/\psi X, \dots$	0	0	0	0	+1
	$B^-$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5279.0 MeV	$1.671 \cdot 10^{-12}$ s	$D^{*0}\ell^+\nu_\ell, D^{*0}\rho^+, J/\psi X, \dots$	0	0	0	0	-1
	$\bar{B}^0, B^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5279.4 MeV	$1.536 \cdot 10^{-12}$ s	$D^{*\pm}\ell^\mp\nu_\ell, J/\psi K_S^0, \dots$	0	0	0	0	$\mp 1$
Baryonen	$p$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	938.27 MeV	$> 10^{31}$ a	—	0	1	0	0	0
	$n$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	939.56 MeV	885.7 s	$pe^-\bar{\nu}_e$	0	1	0	0	0
	$\Lambda$	$0(\frac{1}{2}^+)$	1115.68 MeV	$2.63 \cdot 10^{-10}$ s	$p\pi^-, n\pi^0$	0	1	-1	0	0
	$\Sigma^+$	$1(\frac{1}{2}^+)$	1189.37 MeV	$0.802 \cdot 10^{-10}$ s	$p\pi^0, n\pi^+$	0	1	-1	0	0
	$\Sigma^0$	$1(\frac{1}{2}^+)$	1192.64 MeV	$7.4 \cdot 10^{-20}$ s	$\Lambda\gamma$	0	1	-1	0	0
	$\Sigma^-$	$1(\frac{1}{2}^+)$	1197.45 MeV	$1.48 \cdot 10^{-10}$ s	$n\pi^-$	0	1	-1	0	0
	$\Xi^0$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1314.8 MeV	$2.90 \cdot 10^{-10}$ s	$\Lambda\pi^0$	0	1	-2	0	0
	$\Xi^-$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1321.3 MeV	$1.64 \cdot 10^{-10}$ s	$\Lambda\pi^0-$	0	1	-2	0	0
	$\Omega^-$	$0(\frac{1}{2}^+)$	1672.5 MeV	$0.82 \cdot 10^{-10}$ s	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$	0	1	-3	0	0
	$\Delta^{++}$	$\frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)$	1230 MeV	120 MeV	$p\pi^+$	0	1	0	0	0
	$\Lambda_c^+$	$0(\frac{1}{2}^+)$	2284.9 MeV	$0.2 \cdot 10^{-12}$ s	$p\bar{K}^0, pK^-\pi^+, \Lambda\pi^+\pi^0, \dots$	0	1	0	1	0
	$\Xi_c^0$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	2471.8 MeV	$0.11 \cdot 10^{-12}$ s	$\Lambda\bar{K}^0, \Xi^-e^+\nu_e, \dots$	0	1	-1	1	0
	$\Lambda_b$	$0(\frac{1}{2}^+)$	5624 MeV	$1.2 \cdot 10^{-12}$ s	$\Lambda J/\psi, pD^0\pi^-, \Lambda_c\ell^-\bar{\nu}_\ell, \dots$	0	1	0	0	-1

### 31. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1/2 \times 1/2 \\ \begin{array}{c} +1 \\ +1/2 +1/2 \\ +1/2 -1/2 \\ -1/2 +1/2 \\ -1/2 -1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1/2 1/2 \\ 1/2 -1/2 \\ 1/2 -1/2 \\ -1/2 -1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$\begin{array}{c} 5/2 \\ \hline 2 \times 1/2 \\ \begin{array}{c} +5/2 \\ +2 \\ +2 \\ +1 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \\ 4/5 \\ 4/5 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3/2 \\ 3/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{array} \end{array}$$

$J$	$J$	$\dots$
$M$	$M$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	
$m_1$	$m_2$	
$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	

Coefficients

$$\begin{array}{c} 3/2 \\ \hline 1 \times 1/2 \\ \begin{array}{c} +3/2 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{array} \end{array}$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ \hline 2 \times 1 \\ \begin{array}{c} +3 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5/2 \\ \hline 3/2 \times 1 \\ \begin{array}{c} +5/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \times 1 \\ \begin{array}{c} +2 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1/15 \\ 1/6 - 3/10 \\ 0 + 1/6 \\ 6/15 - 1/2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5/2 \\ \hline +3/2 \times 1 \\ \begin{array}{c} +5/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \times 1 \\ \begin{array}{c} +2 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1/2 \\ 1/15 \\ 1/6 - 3/10 \\ 0 + 1/6 \\ 6/15 - 1/2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5/2 \\ \hline +3/2 \times 1 \\ \begin{array}{c} +5/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^m$$

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2   j_1 j_2 JM \rangle$
$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1   j_2 j_1 JM \rangle$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ \hline 3/2 \times 3/2 \\ \begin{array}{c} +3 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array} \end{array}$$

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta$$

$$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\begin{array}{c} 7/2 \\ \hline 2 \times 3/2 \\ \begin{array}{c} +7/2 \\ +7/2 \\ +7/2 \\ +5/2 \\ +5/2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{array} \end{array}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ \hline 2 \times 2 \\ \begin{array}{c} +4 \\ +4 \\ +3 \\ +3 \\ +3 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +2 \\ +1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7/2 \\ \hline 2 \times 2 \\ \begin{array}{c} +7/2 \\ +7/2 \\ +7/2 \\ +5/2 \\ +5/2 \\ +5/2 \\ +5/2 \\ +5/2 \\ +5/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \\ +3/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{array} \end{array}$$

$$d_{-1/2,+1/2}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{2,2}^2 = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$$

$$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,-2}^2 = \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{1,-2}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$d_{0,-1}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

$$d_{-1,0}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$d_{-2,1}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

$$d_{1,-1}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$d_{-1,2}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

$$d_{0,0}^{1/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{-2,0}^{1/2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$d_{0,-2}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

$$d_{-2,-1}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$d_{0,-3}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

$$d_{-2,-2}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

Figure 31.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.