

Das Magnetische Moment

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Ben Brüggemann
ben.brueggemann@udo.edu

Durchführung: 10. Januar 2023

Abgabe: 17. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Homogene Magnetfelder	3
2.2	Makroskopische Dipole	4
2.2.1	Gravitation	4
2.2.2	Schwingung	4
2.2.3	Präzession	5
2.3	Fehlerrechnung	5
2.4	Lineare Regression	6
3	Durchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Apparatur	7
4.2	Gravitation	8
4.3	Schwingung	9
4.4	Präzession	10
5	Diskussion	12
	Literatur	13

1 Zielsetzung

Die nachfolgende Versuchsreihe dient zur Bestimmung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten. Es werden dazu verschiedene Messverfahren angewendet, welche den Testkörper unter Einwirkung eines Drehmoments sowie als harmonischen Oszillator und präzedierenden Kreisel untersuchen. Die notwendigen theoretischen Grundlagen sind der Versuchsanleitung [1] entnommen.

2 Theorie

2.1 Homogene Magnetfelder

Durch einen vom Strom I durchflossenen Leiter mit dem infinitesimalen Längenelement $d\mathbf{s}$ wird am Ort \mathbf{r} nach dem Biot-Savart-Gesetz die magnetische Flussdichte

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

erzeugt. Der Bezeichner $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ [6] gibt hier die magnetische Permeabilität des Vakuums an. Auf der Symmetrieachse einer aus N kreisförmigen Leiterschleifen mit Radius R zusammengesetzten Spule ist damit ein Feld der Form

$$B_0(x) = \frac{\mu_0}{2} NI \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (2)$$

gegeben. Der Feldgradient entlang dieser Achse entspricht dann

$$\frac{dB_0}{dx} = -\frac{3\mu_0}{2} NI \frac{R^2 x}{(R^2 + x^2)^{5/2}} \quad (3)$$

und zeigt die örtliche Änderungsrate der Feldstärke B_0 an. Um ein homogenes Magnetfeld herstellen zu können, werden zwei gleichsinnig vom Strom I durchflossene Kreisspulen identischer Windungszahl N im gegenseitigen Abstand d so zueinander positioniert, dass sich ihre Symmetrieachsen überlagern. Die Superposition der einzelnen Beiträge sorgt für eine näherungsweise konstante Feldstärke um den gemeinsamen Mittelpunkt. Liegt dieser im Ursprung, lässt sich die skalare Flussdichte (2) durch

$$B(x) = B_0\left(x + \frac{d}{2}\right) + B_0\left(x - \frac{d}{2}\right) \quad (4)$$

ausdrücken. Eine solche Anordnung heißt Helmholtz-Spule, wenn $d = R$ gilt. In diesem Fall wird das zentrale Feld maximal homogen und variiert mit $B(x) = B(0) + \mathcal{O}(x^4)$ nur in vierter Ordnung. Für abweichende Distanzen kann mit konstanter linearer Näherung noch $B(x) = B(0) + \mathcal{O}(x^2)$ geschrieben werden. Befindet sich ein Dipol in einem homogenen Magnetfeld, erfährt dieser ein Drehmoment der Form

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (5)$$

und richtet sich so aus, dass magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}$ und Flussdichte \mathbf{B} parallel verlaufen.

2.2 Makroskopische Dipole

Ein magnetischer Dipol lässt sich beispielsweise durch einen Permanentmagneten oder eine stromdurchflossene Leiterschleife realisieren. Letztere weist ein magnetisches Moment

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{A} \quad (6)$$

auf, welches senkrecht zu ihrer Querschnittsfläche A steht. Für Permanentmagneten ist die rechnerische Bestimmung von $\boldsymbol{\mu}$ problematisch, das magnetische Moment kann jedoch auf verschiedene Weisen experimentell ermittelt werden.

2.2.1 Gravitation

Als statische Methode wird die Gravitationskraft $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ mit der Erdbeschleunigung $g = 9,807 \text{ m s}^{-2}$ [6] ausgenutzt. Eine Punktmasse m , die sich im Abstand \mathbf{r} auf der Achse des magnetischen Moments befindet, übt dazu ein Drehmoment

$$\mathbf{D} = m\mathbf{r} \times \mathbf{g} \quad (7)$$

auf den Permanentmagneten aus. Zu jeder festen Entfernung r existiert jeweils genau eine Magnetfeldstärke, welche dieses nach (5) kompensiert. So stellt sich ein Gleichgewicht

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = m\mathbf{r} \times \mathbf{g} \quad (8a)$$

ein, wobei \mathbf{B} und \mathbf{g} sowie $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{r} zueinander gleichgerichtet sind. Damit folgt der Term $\mu B \sin \theta = mrg \sin \theta$ aus den Kreuzprodukten. Die Winkelabhängigkeit θ zwischen den entsprechenden Vektoren kann gekürzt werden, sodass sich

$$\mu B = mrg \quad (8b)$$

ergibt. Das magnetische Moment des betrachteten Dipols wird mit μ bemessen.

2.2.2 Schwingung

Über die Schwingungsdauer T des Permanentmagneten kann alternativ eine dynamische Messmethode aufgestellt werden. Formel (5) lässt sich per Definition des Drehmoments mithilfe von Trägheitsmoment J und Winkelbeschleunigung $\ddot{\theta}$ in der Form $-\mu B \sin \theta = J\ddot{\theta}$ formulieren. Diese Differentialgleichung wird unter Kleinwinkelnäherung zu

$$-\mu B \theta = J\ddot{\theta} \quad (9)$$

und beschreibt damit den harmonischen Oszillator. Dessen Periodendauer

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J}{\mu B} \quad (10)$$

löst die Bewegungsgleichung.

2.2.3 Präzession

Ein weiterer dynamischer Ansatz versetzt den Dipol in Rotation und modelliert diesen als Kreisel. Durch das Einwirken einer äußeren Kraft beginnt die Figurenachse \mathbf{L}_0 sich auf einem Kegelmantel um die Drehimpulsachse \mathbf{L} zu bewegen. Dieses Phänomen wird Präzession genannt und tritt gerade dann auf, wenn der Permanentmagnet dem Einfluss eines homogenen Magnetfeldes ausgesetzt ist. Wieder dient hierbei ein Zusammenhang des Drehmoments dazu, um aus (5) eine Differentialgleichung der Form

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{L}}_0 \quad (11)$$

herzuleiten. Eine Lösung für das präzedierende System ist mit der Umlaufrate

$$\Omega = \frac{\mu B}{L_0} \quad (12)$$

gegeben. Dabei lässt sich der Drehimpuls $L_0 = J\omega$ über das Trägheitsmoment J und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ bestimmen. Indem die Präzessionsfrequenz Ω durch den Kehrwert der Umlaufzeit T ausgedrückt wird, folgt daraus die Beziehung

$$\frac{1}{T} = \frac{\mu B}{2\pi L_0} \quad (13)$$

unter der Voraussetzung, dass die Rotationsfrequenz ν konstant ist.

2.3 Fehlerrechnung

Um die Abweichung der Messgrößen zu untersuchen, werden noch einige weitere Formeln benötigt. Die Rechenvorschrift für den Mittelwert \bar{x} ist mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (14)$$

gegeben. Zur Bestimmung der Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ kann

$$(\Delta\bar{x})^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \quad (15)$$

verwendet werden. Durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2 \quad (16)$$

ist die Abweichung Δf für von fehlerbehafteten Werten x_n abhängige Größen f definiert.

2.4 Lineare Regression

Entlang der linear abhängigen Messgrößen (x_n, y_n) für $n = 1, \dots, N$ lassen sich über

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad (17)$$

die Parameter der Ausgleichsgerade $y = ax + b$ berechnen.

3 Durchführung

Der Versuchsaufbau besteht im Wesentlichen aus einem Helmholtz-Spulenpaar mit vertikal ausgerichteter Symmetrieachse zur Erzeugung eines externen homogenen Magnetfeldes. Darin ist mittig ein Messingzylinder positioniert. Dieser erzeugt ein Luftkissen, welches für eine möglichst reibungsfreie Fixierung des zu untersuchenden Körpers sorgt. Dabei handelt es sich hier um eine Kugel, in der ein zylindrischer Permanentmagnet versenkt ist. Entlang der Richtung des magnetischen Moments ist auf deren Oberfläche ein kurzer Stiel mit einer Bohrung zum Schwerpunkt des Testobjekts befestigt. Zur Überprüfung der Rotationsfrequenz befindet sich noch ein Stroboskop oberhalb der Messapparatur. Spulenstrom, Luftkissen und Stroboskop lassen sich über eine Kontrolleinheit individuell ansteuern. Bei längerer Belastung steigt die Temperatur und damit der elektrische Widerstand, sodass die maximale Feldstärke nicht mehr erreicht werden kann. Daher sollte kein Strom fließen, während die Magnetfelder nicht betrieben werden müssen.

Zur statischen Messung wird eine dünne Aluminiumstange, deren Einfluss vernachlässigbar ist, durch die Bohrung am Stiel in die Kugel eingeführt. Daran befindet sich eine als punktförmig genäherte, verschiebbare Masse. Unter Variation des Abstandes kann die Stromstärke so eingeregelt werden, dass sich ein Gleichgewicht einstellt. Nachhalten der entsprechenden Werte erlaubt die anschließende Untersuchung des Dipols.

Darauf folgt die dynamische Methode durch Betrachtung der Periodendauer. Die Kugel wird geringfügig aus der Ruhelage ausgelenkt, es werden jeweils zehn Schwingungsvorgänge für unterschiedliche Stromstärken aufgenommen. Durch Mitteln der so erhaltenen Zeiten reduziert dieses Vorgehen mögliche Fehlereinflüsse. Dabei bleibt der Aluminiumstab ohne die Punktmasse verbunden, um die Oszillation leichter nachvollziehen zu können.

Zuletzt erfolgt die Datenaufnahme über die Präzession. Nun ohne Aluminiumstange, kann durch Einstellen der geforderten Frequenz am Stroboskop mithilfe einer weißen Kennzeichnung am Stiel die Rotationsrate geprüft werden. Solange die Markierung im Licht stationär erscheint, stimmen diese überein. Die Rotation der Kugel wird zunächst stabilisiert, sodass keine Nutationsbewegungen auftreten. Nachdem dies erfolgt ist, kann die Drehachse leicht von ihrer vertikalen Position ausgelenkt werden. Das Magnetfeld ist bei dieser Methode zunächst abgeschaltet. Wird es nun aktiviert, lässt sich die erwartete Präzession beobachten. Unter variabler Stromstärke werden die Umlaufzeiten gemessen.

4 Auswertung

Im folgenden Abschnitt wird die Fehlerrechnung mithilfe der Bibliothek `uncertainties` [4] unter Python [5] automatisiert. Grafische Darstellungen lassen sich mittels Matplotlib [3] erstellen, während NumPy [2] mittels der Funktion `numpy.polyfit` die lineare Regression durchführt. Abweichungen werden dabei aus der Kovarianzmatrix entnommen.

4.1 Apparatur

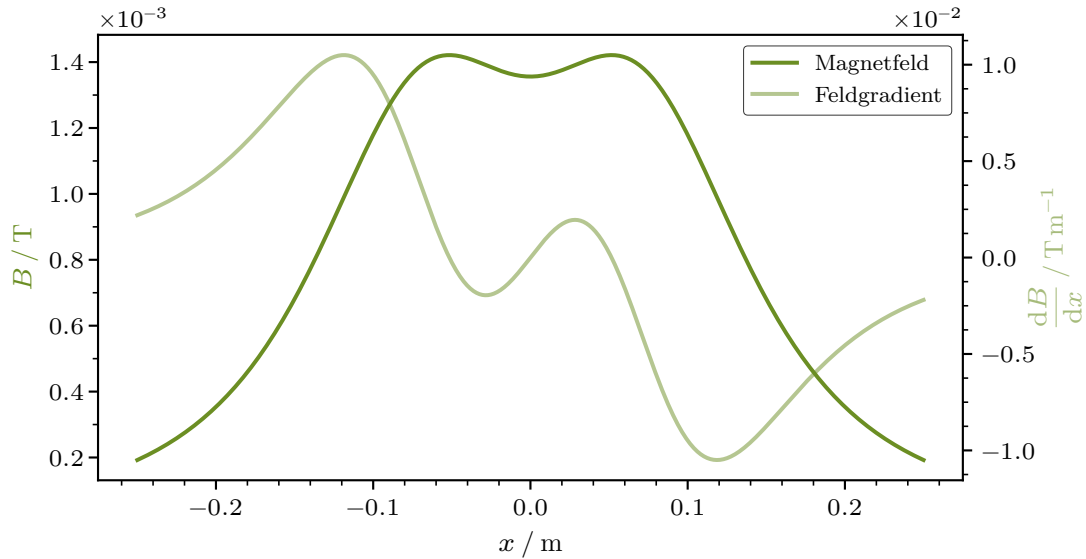


Abbildung 1: Magnetfeldstärke und ortsbedingte Änderungsrate mit $N = 195$, $d = 0,138$ m, $R = 0,109$ m und $I = 1$ A als Parameter der Apparatur.

Anhand von Abbildung 1 lässt sich graphisch verifizieren, dass die Feldstärke (4) zwischen den beiden Spulen mit $N = 195$, $d = 0,138$ m und $R = 0,109$ m weitestgehend konstant bleibt. Auch der Feldgradient entlang der Symmetrieachse, welcher sich nach (3) berechnet, ist in diesem Bereich vernachlässigbar. Es wird daher die Annahme getroffen, dass sich das Magnetfeld, dessen Wirkung hier weiterführend ausgenutzt werden soll, homogen verhält und über Term (4) bei $x = 0$ bestimmen lässt. Mit $I = 1$ A folgt dann $B = 1,356 \cdot 10^{-3}$ T als Faktor, der anschließend zur Ermittlung der magnetischen Flussdichte bei entsprechenden Vielfachen dieser Stromstärke dient.

Für die dynamischen Messmethoden wird außerdem das Trägheitsmoment des Testkörpers benötigt. Dieser wird als Vollkugel homogener Dichte approximiert, womit sich

$$J = \frac{2}{5}MR^2$$

ergibt. Mit Radius $R = 2,5$ cm und Masse $M = 150$ g folgt aus diesem Ausdruck der Wert $J = 3,75 \cdot 10^{-5}$ kg m² als Trägheitsmoment.

4.2 Gravitation

Die Messungen aus Tabelle 1 werden in Abbildung 2 gegeneinander aufgetragen. Ebenfalls dargestellt ist die entsprechende lineare Regressionsfunktion.

Tabelle 1: Messdaten zur statischen Methode.

r / mm	I / A	B / mT
40	1,20	1,63
45	1,25	1,70
50	1,45	1,97
55	1,60	2,17
60	1,70	2,31
65	1,80	2,44
70	1,90	2,58
80	2,10	2,85
90	2,35	3,19
100	2,50	3,39

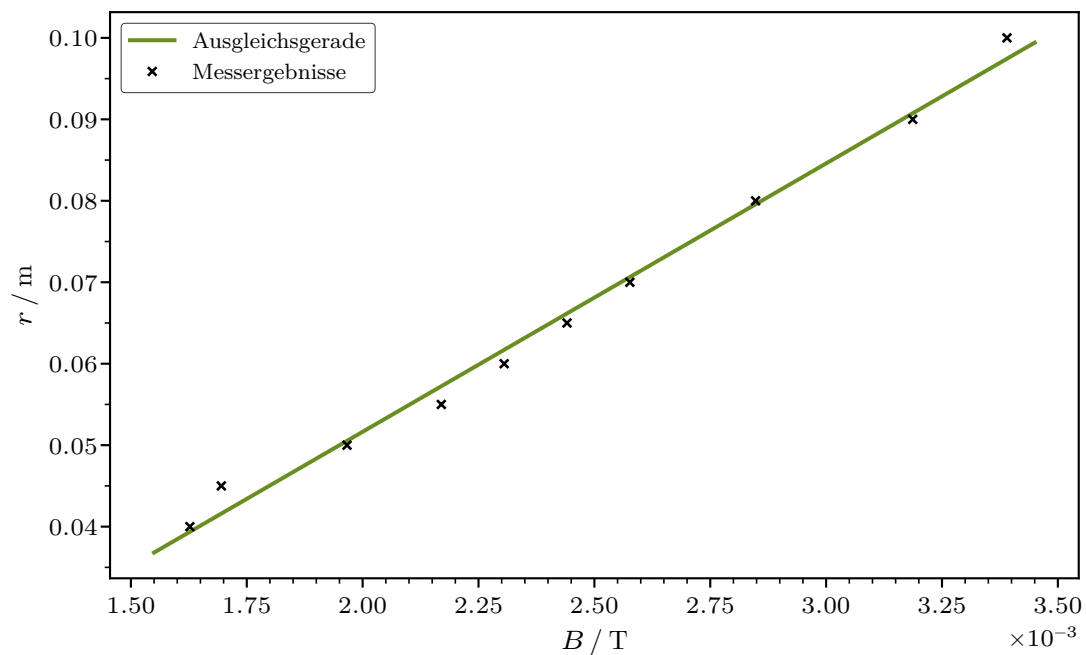


Abbildung 2: Datenpunkte mit linearer Näherungskurve.

Um eine möglichst gute Übereinstimmung mit den aufgenommenen Daten zu erzielen, werden beide Parameter der Gerade $y = ax + b$ genutzt. Die konstante Verschiebung fällt zwar bei der weiteren Verarbeitung weg, dient hier aber als zusätzlicher Freiheitsgrad.

Mit den Diagonalelementen der Kovarianzmatrix liefert dieser Regressionsansatz

$$a = (32,94 \pm 1,07) \text{ m T}^{-1} \quad b = (-14,24 \pm 2,67) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

als fehlerbehaftete Koeffizienten. Vergleich mit (8b) lässt den Zusammenhang

$$a = \frac{\mu}{mg}$$

erkennen. Daraus folgt mit der punktförmig genäherten Testmasse von $m = 1,4 \text{ g}$ der Wert $\mu = (0,452 \pm 0,015) \text{ A m}^2$ für das magnetische Moment des kugelförmigen Dipols.

4.3 Schwingung

Analoges Vorgehen produziert die in Abbildung 3 einsehbare graphische Darstellung. Es werden nun allerdings bereits modifizierte Messdaten aus Tabelle 2 in Form der quadrierten Periodendauer gegen den Kehrwert der magnetischen Flussdichte angezeigt.

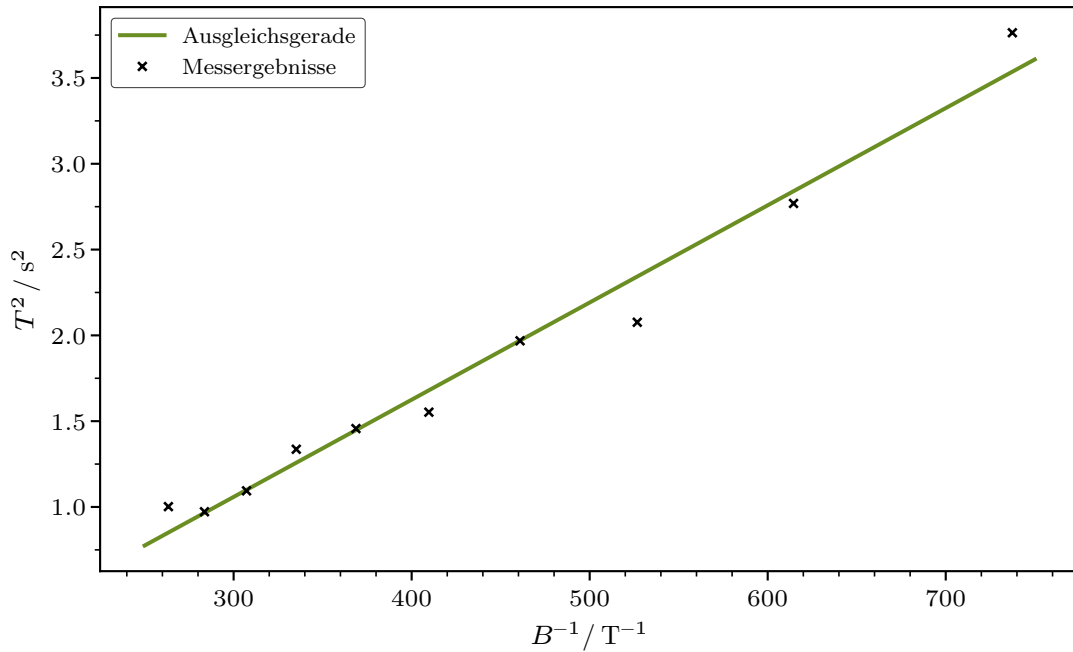


Abbildung 3: Datenpunkte mit linearer Näherungskurve.

Durch die auf diese Weise erhaltenen Parameter der linearen Regressionsrechnung

$$a = (5,66 \pm 0,32) \cdot 10^{-3} \text{ T s}^2 \quad b = (-0,64 \pm 0,14) \text{ s}^2$$

werden die modellspezifischen Fehlerquadrate minimal.

Tabelle 2: Messdaten zur dynamischen Oszillatormethode.

I / A	B / mT	B^{-1} / T^{-1}	T / s	T^2 / s^2
1,0	1,36	737	1,94	3,76
1,2	1,63	615	1,66	2,77
1,4	1,90	527	1,44	2,08
1,6	2,17	461	1,40	1,97
1,8	2,44	410	1,25	1,55
2,0	2,71	369	1,21	1,46
2,2	2,98	335	1,16	1,34
2,4	3,25	307	1,05	1,09
2,6	3,53	284	0,99	0,97
2,8	3,80	263	1,00	1,00

Aus Gleichung (10) lässt sich über die Schwingungsdauer eine Beziehung der Form

$$a = \frac{4\pi^2 J}{\mu}$$

herleiten. Mithilfe der in Tabelle 2 ersichtlichen Messungen wird das magnetische Moment dann zu $\mu = (0,261 \pm 0,015) \text{ A m}^2$ bestimmt.

4.4 Präzession

Wie zuvor werden die Messwerte in Tabelle 3 zur Ausgleichsrechnung herangezogen.

Tabelle 3: Messdaten zur dynamischen Kreismethode.

I / A	B / mT	T / s	T^{-1} / s^{-1}
0,50	0,68	23,21	0,04
1,05	1,42	8,92	0,11
1,20	1,63	10,18	0,10
1,40	1,90	10,92	0,09
1,60	2,17	7,09	0,14
1,75	2,37	11,16	0,09
1,95	2,64	8,29	0,12
2,20	2,98	3,80	0,26
2,35	3,19	4,61	0,22
2,40	3,25	3,18	0,31
2,50	3,39	7,40	0,14
2,60	3,53	2,80	0,36
2,95	4,00	6,53	0,15
3,20	4,34	5,64	0,18
3,40	4,61	4,36	0,23
3,60	4,88	3,89	0,26

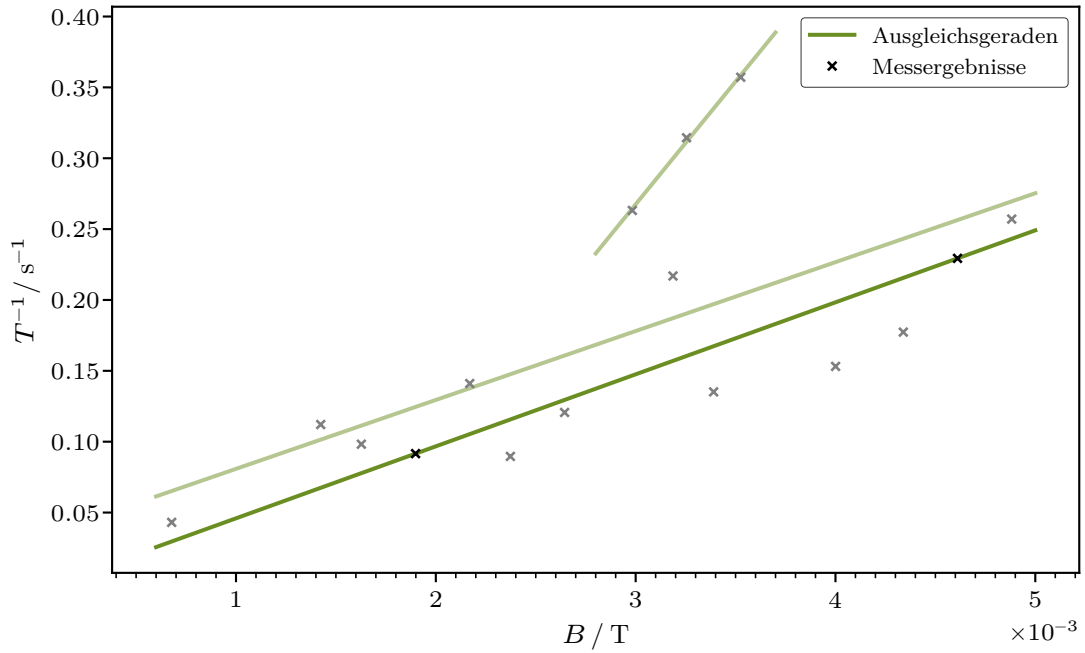


Abbildung 4: Gewertete Datenpunkte mit entsprechenden linearen Näherungskurven.

Hier findet die reziproke Umlaufzeit Verwendung, indem diese gegen die Magnetfeldstärke aufgetragen wird. Für den Steigungsparameter lässt sich über (13) der Ausdruck

$$a = \frac{\mu}{2\pi L_0}$$

formulieren. Vorausgesetzt wird eine Rotationsfrequenz von $\nu = 6 \text{ Hz}$ mit einem Wert von $L_0 = 1,41 \cdot 10^{-3} \text{ N m s}$ als Drehimpuls. Die Verifikation mittels der Stroboskopvorrichtung lässt für die Stromstärken $I = 1,4 \text{ A}$ und $I = 3,4 \text{ A}$ auf eine besonders hohe Genauigkeit schließen. Abbildung 4 hebt diese Daten mit der zugehörigen Schnittgerade durch eine höhere Opazität hervor. Als Parametrisierung ergeben sich an dieser Stelle die Faktoren

$$a = 50,80 \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1} \quad b = -4,87 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

sowie $\mu = 0,451 \text{ A m}^2$ als resultierendes magnetisches Moment der Kugel. Die transparente, nahezu parallel verlaufende Regressionsgerade berücksichtigt mit den Koeffizienten

$$a = (48,62 \pm 15,06) \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1} \quad b = (32,22 \pm 47,56) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

alle aufgezeichneten Messdaten. Mit $\mu = (0,432 \pm 0,134) \text{ A m}^2$ wird das passende Ergebnis bemessen. Der steilere eingefügte Geradenabschnitt dient zur anschaulichen Bewertung der unterschiedlichen Messansätze und wird im nächsten Abschnitt behandelt.

5 Diskussion

Neben den unvermeidbaren Ungenauigkeiten bei der Messwertaufzeichnung lässt sich ein weiterer genereller Fehlereinfluss durch die trotz verbauter Libelle nicht kompensierte Neigung der Apparatur festhalten. Die resultierenden Abweichungen dürften dabei jedoch vernachlässigbar sein. Anders verhält es sich mit der Leistung des Luftkissens, welches den Kontakt zwischen Kugel und Halterung nur in unregelmäßigen Intervallen minimiert. Es kommt zu zeitweise starker Reibung, dies hat signifikante Verfälschungen der Daten zur Folge. Für die statische Messung lässt sich ein fehlerhaftes Festsetzen gut von echten Gleichgewichtslagen unterscheiden, weshalb die Ergebnisse hierzu eine vergleichsweise geringe Streuung aufweisen. Das auf diese Weise ermittelte magnetische Moment lautet $\mu = (0,452 \pm 0,015) \text{ A m}^2$ und ist mit dem ungefilterten Wert $\mu = (0,432 \pm 0,134) \text{ A m}^2$ sowie dem gewerteten Resultat $\mu = 0,451 \text{ A m}^2$ aus der Präzession vereinbar. Betrachtung der Methode über die Schwingungsdauer zeigt mit $\mu = (0,261 \pm 0,015) \text{ A m}^2$ eindeutig eine schlechtere Übereinstimmung auf, obwohl ebenfalls ein eher geringer Fehlerbereich vorliegt. Diese Tatsache kann wahrscheinlich auf erhöhte Reibung durch Fehlfunktion des Luftkissens zurückgeführt werden, deren Korrektur sich für dynamische Methoden wesentlich problematischer gestaltet. Zur Präzessionsuntersuchung wird ein baugleicher Apparat genutzt, der recht stabil geringere mechanische Widerstände erzielt. Die größeren Unsicherheitsintervalle stammen in diesem Fall aus anderer Quelle. Es sei dazu angemerkt, dass idealerweise eine Rotationsfrequenz zwischen 4 Hz und 6 Hz angestrebt wird, da die zeitlich exponentiell abfallende Frequenzkurve dazwischen noch ausreichend flach verläuft. Eine gezielt konstante Rotationsrate kann durch Drehen von Hand allerdings kaum gewährleistet werden. Dies lässt sich an den Umlaufzeiten bei $I = 2,2 \text{ A}$, $I = 2,4 \text{ A}$ und $I = 2,6 \text{ A}$ in Tabelle 3 illustrieren, da diese Messwerte einem gemeinsamen Drehvorgang entspringen. Die in Abbildung 4 ausschnitthaft dargestellte Regressionsgerade mit

$$a = (173,26 \pm 15,06) \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1} \quad b = (-252,32 \pm 47,56) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

passt gut zu den Daten. Besagtes Vorgehen, das Magnetfeld also anzupassen, ohne die Kugel währenddessen zu stoppen, ist zunächst durchaus brauchbar. Wird daraus für 6 Hz das magnetische Moment bestimmt, ergibt sich mit $\mu = (1,539 \pm 0,134) \text{ A m}^2$ ein stark ausreißendes Ergebnis. Alternativ lässt sich durch die Annahme, dass der reale Wert $\mu = 0,451 \text{ A m}^2$ entspricht, eine plausible Drehrate $\nu = (1,8 \pm 0,2) \text{ Hz}$ ermitteln. Diese liegt außerhalb des erlaubten Frequenzbereichs und ist somit eigentlich ungeeignet.

Zusammenfassend fällt es schwer, eine der Methoden als allgemein überlegen zu bezeichnen. Unter den gegebenen Bedingungen erzielt der statische Messansatz unter Einwirken der Gravitation das exakteste Ergebnis. Die beiden dynamischen Herangehensweisen könnten unter anderen Umständen aber ebenfalls in der Lage sein, Werte äquivalenter oder sogar höherer Qualität zu liefern.

Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 105, Das Magnetische Moment.*
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] Charles R. Harris u. a.
„Array programming with NumPy“.
In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362.
DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [3] John D. Hunter.
„Matplotlib: A 2D Graphics Environment“.
Version 1.4.3.
In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95.
DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
URL: <http://matplotlib.org/>.
Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [4] Eric O. Lebigot.
Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.
Version 2.4.6.1.
URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] *Python.*
Version 3.11.0.
24. Okt. 2022.
URL: <https://www.python.org>.
- [6] Pauli Virtanen u. a.
„SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“.
Version 1.9.3.
In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272.
DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.