

Das Trägheitsmoment

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Ben Brüggemann
ben.brueggemann@udo.edu

Durchführung: 20. Dezember 2022
Abgabe: 20. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	2
2	Theorie	2
3	Durchführung	4
4	Auswertung	5
4.1	Gerätekonstanten	5
4.1.1	Winkelrichtgröße	5
4.1.2	Eigenträgheitsmoment	5
4.2	Einfache Körper	8
4.3	Modellfigur	9
5	Diskussion	11
	Literatur	12

1 Zielsetzung

Im nachfolgenden Versuch sollen die Trägheitsmomente von verschiedenen Körpern unter Verwendung einer Drillachse bestimmt werden. Durch Vergleich mit den vorhergesagten Werten wird außerdem der Steinersche Satz verifiziert. Alle theoretischen Grundlagen sind der Versuchsanleitung [1] entnommen.

2 Theorie

Allgemein lässt sich die Dynamik eines rotierenden Systems vollständig durch das wirkende Drehmoment \mathbf{M} , den Trägheitstensor \mathbf{I} und die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ beschreiben. Um das Trägheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r zur Drehachse für den skalaren Fall zu ermitteln, wird der Ausdruck

$$I = mr^2 \quad (1)$$

herangezogen. Rotiert nun ein ausgedehnter starrer Körper mit Volumen V und konstanter Dichte ρ um eine feste Achse gilt, dass sich alle infinitesimalen Massen dm mit identischer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ bewegen. Aus (1) kann damit der Term

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \quad (2)$$

abgeleitet werden. Eine weitere vereinfachende Beziehung liefert der Steinersche Satz. Dieser besagt, dass sich das Trägheitsmoment eines Körpers der Masse m bezüglich einer Achse mit Abstand a zur parallelen Schwerpunktsachse mit Trägheitsmoment I_0 über

$$I = I_0 + ma^2 \quad (3)$$

berechnet. Unter Verwendung von Formel (2) können gerade für einfache Geometrien gut die speziellen Trägheitsmomente hinsichtlich solcher Drehachsen bestimmt werden, die durch deren jeweiligen Schwerpunkt verlaufen. Die Vorschrift

$$I_0 = \frac{2}{5}mR^2 \quad (4a)$$

gibt dieses für eine Vollkugel mit Radius R an. Für einen Vollzylinder bemisst

$$I_0 = \frac{1}{2}mR^2 \quad (4b)$$

dessen Trägheitsmoment bei Rotation um die Symmetrieachse. Mit

$$I_0 = m \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2 \right) \quad (4c)$$

ist jenes für denselben Zylinder gegeben, wenn die Drehachse senkrecht zur Mantelfläche durch den Schwerpunkt verläuft. Dazu wird nun auch die Höhe h benötigt.

Beim Ansetzen einer Kraft \mathbf{F} im Abstand \mathbf{r} zur Achse wird das Drehmoment über den Zusammenhang $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$ definiert. Durch die bekannte Proportionalität $M \propto \sin \theta$ erreicht der Betrag des Vektorprodukts unter orthogonalem Einwirken bei $\theta = 90^\circ$

$$M = Fr \quad (6)$$

als Maximum. Analog zur Translation mit $F = m\ddot{r}$ kann dieses als $M = I\ddot{\varphi}$ formuliert werden. Handelt es sich um ein schwingungsfähiges System, wirkt der Drehung außerdem ein in erster Näherung zum Auslenkwinkel φ lineares Rückstellmoment

$$M = -D\varphi \quad (7)$$

mit D als Winkelrichtgröße entgegen. Gleichsetzen der Beträge von (6) und (7) ergibt

$$D = \frac{Fr}{\varphi} \quad (8)$$

als Beziehung, mit deren Hilfe der benannte Faktor bestimmt werden kann. Aufstellen des Terms $I\ddot{\varphi} = -D\varphi$ liefert dann genau die charakteristische Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, dessen Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (9)$$

sich über Frequenz ν und Kreisfrequenz ω bestimmt. Bei Drehschwingungen gilt diese zwar nur in Kleinwinkelnäherung, bietet sich durch Umstellen nach

$$I = D \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (10)$$

aber trotzdem zur Bestimmung des Trägheitsmomentes an.

3 Durchführung

Für die Untersuchung verschiedener Trägheitsmomente wird eine Drillachse verwendet. Diese ist zweifach drehbar gelagert und über eine Spiralfeder fest mit einem Rahmen verbunden. An ihrem oberen Ende lassen sich die zu betrachtenden Körper fixieren. Der Messapparat ist durch zwei Gerätekonstanten charakterisiert, welche es zu bestimmen gilt. Zunächst lässt sich die Winkelrichtgröße D anhand der *statischen Messmethode* ermitteln. Dazu wird eine Stange vernachlässigbarer Masse waagerecht eingespannt. Anschließend wird an diese ein Schraubfederkraftmesser in konstantem Abstand senkrecht angesetzt und die Rückstellkraft für verschiedene Auslenkwinkel aufgenommen. Weiter lässt sich das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse über die *dynamische Messmethode* feststellen, indem nun zwei zylindrische Massen symmetrisch an den beiden Enden der Stange befestigt werden. Unter Variation des Abstands wird die Apparatur in Schwingung versetzt und die Periodendauer notiert. Messen der fünffachen Zeit und anschließendes Mitteln sorgen dabei für eine Reduktion fehlerhafter Einflüsse.

Sind die Gerätekonstanten bekannt, wird mit den eigentlichen Messungen fortgefahren. Mit einer Kugel und einem Zylinder werden dabei die Trägheitsmomente einfacher Körper betrachtet. Nach initialer Auslenkung lassen sich diese erneut über die Schwingungsperiode ermitteln, deren Bestimmung wieder nach der vorherigen Beschreibung erfolgt. Analoges Vorgehen liefert den Wert einer geometrisch komplexeren Modellpuppe. Diese wird in zwei Körperhaltungen bemessen. In der ersten Haltung befinden sich die Arme seitlich vom Körper gestreckt, die Beine stehen senkrecht unter dem Torso. Die zweite Haltung behält die Position der Arme bei, die Beine zeigen nun parallel nach vorn. Zur theoretischen Näherung werden Kopf, Arme, Torso und Beine der Figur als Zylinder genähert.

4 Auswertung

4.1 Gerätekonstanten

4.1.1 Winkelrichtgröße

Nach (8) folgt $D = (2,97 \pm 0,13) \cdot 10^{-2} \text{ N m}$ als Ergebnis aus den Daten in Tabelle 1.

Tabelle 1: Ergebnisse der statischen Messmethode mit einem Achsenabstand von $r = 20 \text{ cm}$ zur Bestimmung der Winkelrichtgröße.

$\varphi / ^\circ$	φ / rad	F / N	$D / 10^{-2} \text{ N m}$
20	$0,11\pi$	0,050	2,86
30	$0,17\pi$	0,075	2,86
40	$0,22\pi$	0,110	3,15
50	$0,28\pi$	0,125	2,86
60	$0,33\pi$	0,145	2,77
70	$0,39\pi$	0,175	2,86
80	$0,44\pi$	0,215	3,08
90	$0,50\pi$	0,245	3,12
100	$0,56\pi$	0,270	3,09
110	$0,61\pi$	0,290	3,02

Dieser Wert setzt sich aus dem Mittelwert \bar{x} mit der Rechenvorschrift

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

und der Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ zusammen, welche sich über den Ausdruck

$$(\Delta\bar{x})^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2$$

ermitteln lässt. Unter Python [5] kann dies mithilfe von NumPy [2] durch die Funktionen `numpy.mean` und `numpy.std` automatisiert werden.

4.1.2 Eigenträgheitsmoment

Tabelle 2: Maße der verwendeten Testmassen mit Messgeräteabweichung.

	m / g	d / mm	h / mm
1. TESTMASSE	$222,7 \pm 0,1$	34,9	30
2. TESTMASSE	$222,6 \pm 0,1$	34,9	30

Aufgrund der aus Tabelle 2 entnommenen Messergebnisse wird von identischen Testmassen mit $m = (222,6 \pm 0,1) \text{ g}$ ausgegangen. Es handelt sich also um Zylinder, welche durch die Längen $R = 17,4 \text{ mm}$ und $h = 30 \text{ mm}$ vollständig beschrieben sind. Im Aufbau stehen deren Rotationsachsen senkrecht zur Symmetrie, über Formel (4c) lässt sich demnach $I_0 = (336,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$ bestimmen. Hier wird die Abweichung Δf unter Anwendung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2$$

bestimmt. Für die nachfolgenden Abschnitte lässt sich dieser Schritt durch Einsatz von uncertainties [4] berücksichtigen. Bei Verschiebung entlang der eingespannten Stange ermittelt sich das Trägheitsmoment I_Z eines einzelnen Zylinders durch (3) nach Steiner. Das Gesamtträgheitsmoment I des Messaufbaus entspricht nun der Summe des konstanten Eigenträgheitsmoments I_D mit denen der beiden Zylindermassen. Quadrieren von und anschließendes Einsetzen in Gleichung (9) liefert die Beziehung

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D} = 4\pi^2 \frac{1}{D} (2I_Z + I_D) = 8\pi^2 \frac{1}{D} m a^2 + 4\pi^2 \frac{1}{D} (2I_0 + I_D)$$

als Ansatz. Dieser stellt so einen linearen Zusammenhang zwischen Periodendauer T^2 und zugehörigem Achsenabstand a^2 her. Tabelle 3 enthält die entsprechenden Messungen.

Tabelle 3: Ergebnisse der dynamischen Messmethode mit einer Auslenkung von $\varphi = 90^\circ$ zur linearen Regressionsrechnung.

a / cm	a^2 / cm^2	T / s	T^2 / s^2
26	676	6,83	46,68
24	576	6,38	40,65
22	484	5,89	34,67
20	400	5,43	29,51
18	324	4,98	24,76
16	256	4,49	20,14
14	196	4,07	16,60
12	144	3,64	13,24
10	100	3,24	10,52
8	64	2,88	8,27

Entlang der aufgenommenen Werte wird eine Modellfunktion der Form

$$T^2 = pa^2 + q$$

zur linearen Regression angewendet. Diese beschreibt eine Gerade $y = px + q$ mit

$$p = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad q = \bar{y} - p\bar{x}$$

als zugehörige Parameter. Durch Koeffizientenvergleich kann über

$$q = 4\pi^2 \frac{1}{D} (2I_0 + I_D)$$

das Eigenträgheitsmoment der Drillachse mit der bekannten Winkelrichtgröße zu

$$I_D = \frac{1}{4\pi^2} Dq - 2I_0$$

bestimmt werden. Abbildung 1 reproduziert die resultierende Ausgleichsgerade.

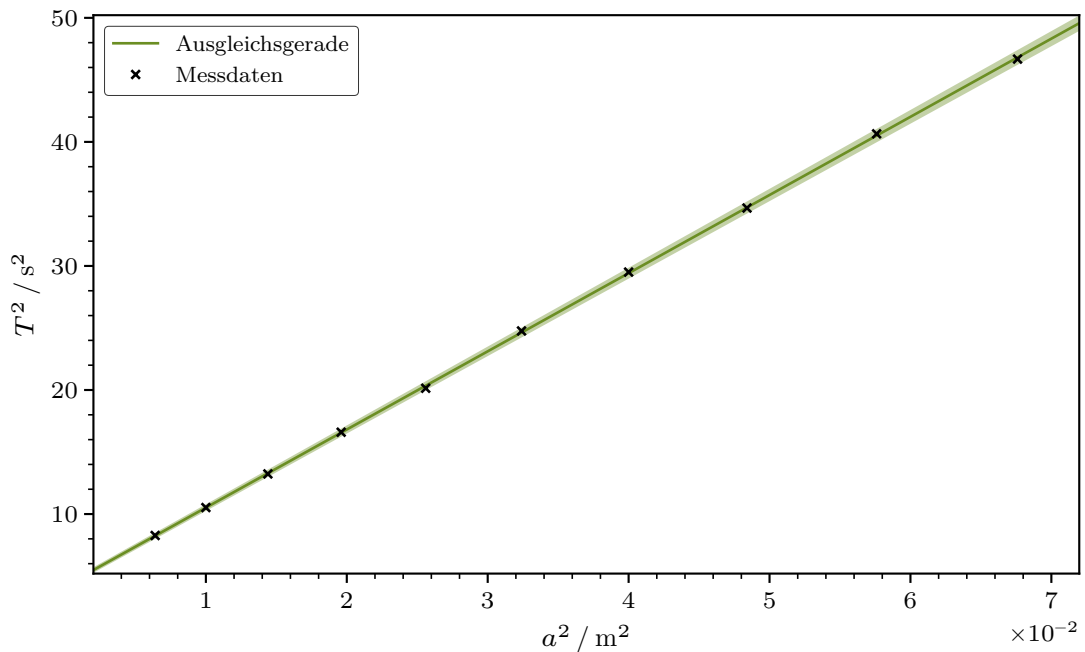


Abbildung 1: Quadrierte Messwerte mit passender Gerade aus der linearen Regression.
Die Grafik wird mittels Matplotlib [3] erstellt.

Die Funktion `numpy.polyfit` aus der Bibliothek NumPy [2] dient zur Berechnung der gesuchten Regressionsparameter, deren Abweichung aus den jeweiligen Diagonalelementen der Kovarianzmatrix ermittelt wird. Mit den zuvor definierten Faktoren

$$p = (630 \pm 2) \text{ s}^2 \text{ m}^{-2} \quad q = (4,21 \pm 0,07) \text{ s}^2$$

ist eine optimale Näherung an die Messdaten gegeben. Daraus ergibt sich schließlich der Wert $I_D = (310,2 \pm 14,9) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ als weitere Apparatekonstante.

4.2 Einfache Körper

Zur Untersuchung der in Tabelle 4 charakterisierten Körper fällt die Drehachse mit deren Symmetrieachsen zusammen. Indem I_D von (10) subtrahiert wird, lässt sich dann aus der Schwingungsdauer experimentell das Trägheitsmoment bestimmen.

Tabelle 4: Maße der verwendeten Körper mit Messgeräteabweichung.

	m / g	d / mm	h / mm
HOLZKUGEL	$1169,0 \pm 0,1$	147	-
HOLZZYLINDER	$421,7 \pm 0,1$	219	15

Um einen Vergleich zu ermöglichen werden zunächst die theoretischen Werte ermittelt. Nach Formel (4a) beträgt $I'_{HK} = (252,60 \pm 0,02) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ für die Holzkugel. Analog dazu folgt $I'_{HZ} = (252,81 \pm 0,06) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ aus (4b) im Falle des Holzzylinders.

Tabelle 5: Messwerte der Schwingungsdauer für die Holzkörper bei $\varphi = 90^\circ$ als Auslenkung.

T / s			
HOLZKUGEL		HOLZZYLINDER	
1,81	1,82	1,82	1,81
1,82	1,81	1,81	1,81
1,82	1,81	1,82	1,81
1,79	1,82	1,82	1,81
1,81	1,81	1,80	1,81

Aus den gemessenen Schwingungszeiten in Tabelle 5 ergeben sich $T_{HK} = (1,81 \pm 0,01) \text{ s}$ und $T_{HZ} = (1,81 \pm 0,01) \text{ s}$ als gemittelte Ergebnisse. Unter Berücksichtigung des zuvor bestimmten Eigentragheitsmoments liefern diese Werte $I_{HK} = (-63,09 \pm 6,69) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ und $I_{HZ} = (-63,42 \pm 6,46) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ als Resultate. Die Ergebnisse müssen allerdings verworfen werden, da physikalisch keine negativen Trägheitsmomente auftreten können. Auf die Gültigkeit dieser Messungen wird genauer in der Diskussion eingegangen.

4.3 Modellfigur

Wie in Tabelle 6 aufgeführt, werden die Durchmesser d der Körperteile je mehrfach entlang deren gesamter Länge gemessen. Anhand dieser leiten sich anschließend die gemittelten Werte zur zylindrischen Approximation ab.

Tabelle 6: Messwerte der zylindrisch genäherten Körperteile der Puppe.

KOPF		ARME		TORSO		BEINE	
d / mm	h / mm	d / mm	h / mm	d / mm	h / mm	d / mm	h / mm
28,60	54	14,30	137	40,20	99	15,00	170
28,34	53	14,90	136	39,06	99	19,18	169
26,60	-	14,70	-	38,90	-	12,06	-
23,50	-	11,30	-	42,20	-	16,20	-
16,20	-	13,90	-	40,50	-	11,90	-
-	-	12,10	-	24,96	-	12,20	-
-	-	9,70	-	26,84	-	16,22	-
-	-	8,40	-	33,20	-	16,20	-
-	-	13,16	-	34,60	-	13,30	-
-	-	13,88	-	38,22	-	17,30	-

Mit den so beschriebenen Zylindern wird für Tabelle 7 über den Volumenanteil auch die entsprechende Masse ermittelt.

Tabelle 7: Gemittelte Maße der Körperteile mit $m = (168,0 \pm 0,1) \text{ g}$ als Gesamtmasse und $V = (172,45 \pm 34,50) \text{ cm}^3$ als Gesamtvolumen. Daraus lässt sich die Dichte der Puppe zu $\rho = (0,97 \pm 0,19) \text{ g cm}^{-3}$ bestimmen.

	d / mm	h / mm	V / cm^3	m / g
KOPF	$24,65 \pm 4,60$	$53,5 \pm 0,5$	$25,53 \pm 9,53$	$24,87 \pm 9,24$
ARME	$12,63 \pm 2,10$	$136,5 \pm 0,5$	$17,11 \pm 5,70$	$16,67 \pm 5,98$
TORSO	$35,87 \pm 5,61$	$99,0 \pm 0,0$	$100,03 \pm 31,28$	$97,45 \pm 15,21$
BEINE	$14,96 \pm 2,37$	$169,5 \pm 0,5$	$29,78 \pm 9,43$	$29,01 \pm 9,43$

In der theoretischen Näherung liegt die Symmetrieachse von Kopf und Torso für beide Haltungen der Puppe auf der Drehachse, es kann also einfach (4b) verwendet werden. Bei der ersten Pose stehen die Beine ebenfalls parallel zur Rotation mit einer seitlichen Verschiebung von R_{BEINE} zur Achse. Die Arme sind dagegen orthogonal zur Drehung vom Körper gestreckt, über Ausdruck (4c) berechnet sich bei einem seitlichen Achsenabstand entsprechend der Summe von R_{TORSO} und der halben Höhe h_{ARME} ihr Trägheitsmoment. Es ergibt sich daraus $I'_1 = (16,99 \pm 4,75) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ für die gesamte Figur.

Wird nun die zweite Haltung angenommen, bleiben alle bestehenden Distanzen erhalten. Durch die veränderte Orientierung der Beine kommt allerdings noch eine Verschiebung der Achse um deren halbe Höhe h_{BEINE} nach vorn hinzu. Über den Hypotenusensatz nach Pythagoras ergibt sich der angepasste Gesamtabstand, welcher in den Steinerschen Satz (3) eingesetzt werden muss. Das Trägheitsmoment lässt sich damit schließlich zu $I'_2 = (37,82 \pm 8,10) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ bestimmen.

Tabelle 8: Messwerte der Schwingungsdauer für zwei Körperhaltungen unter je zwei Auslenkungen.

T / s			
1. KÖRPERHALTUNG		2. KÖRPERHALTUNG	
$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 120^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 120^\circ$
0,59	0,58	0,90	0,89
0,56	0,56	0,90	0,90
0,57	0,57	0,91	0,89
0,56	0,59	0,91	0,90
0,58	0,56	0,91	0,89

Aus den in Tabelle 8 nachgehaltenen Periodendauern ergeben sich für beide Posen die jeweiligen Zeiten $T_1 = (0,57 \pm 0,01) \text{ s}$ und $T_2 = (0,90 \pm 0,01) \text{ s}$ als mittlere Messungen, mit deren Hilfe die experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente unter Verwendung von Ausdruck (10) erfolgt. Dieses Vorgehen liefert so $I_1 = (-285,64 \pm 13,93) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ und $I_2 = (-249,29 \pm 12,49) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ als resultierende Werte. Wie zuvor erwähnt dürfen keine negativen Ergebnisse auftreten. Ein sinnvoller Korrekturansatz folgt.

5 Diskussion

Negative Trägheitsmomente sind physikalisch nicht möglich. Um diesen somit signifikanten Fehler zu behandeln, welcher hier für jeden untersuchten Körper auftritt, wird nach einer plausiblen Fehlerquelle gesucht. Als wahrscheinlichster Kandidat fällt der Blick dabei auf die bei der Bestimmung der Gerätekonstanten verwendete Stange. Diese kann durch einen Zylinder vernachlässigbarer Dicke mit einer Höhe $h = 60$ cm genähert werden. Für eine Masse $m = (95,8 \pm 0,1)$ g ergibt sich nach (4c) der Wert $I_S = (287,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ als ihr Beitrag, welcher innerhalb der gleichen Größenordnung wie das zuvor ermittelte Eigenträgheitsmoment $I_D = (310,2 \pm 14,9) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ liegt. Dieser darf daher bei dessen Berechnung nicht ausgelassen werden. Unter Beachtung dieser Erkenntnis lässt sich die korrigierte Konstante von gerade einmal $I_D = (22,8 \pm 14,9) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ aufstellen. Wird diese für eine wiederholte Berechnung der Trägheitsmomente herangezogen, ergeben sich die Werte $I_{HK} = (224,31 \pm 6,70) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ und $I_{HZ} = (223,98 \pm 6,46) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ für die einfachen Holzkörper. Der Vergleich mit den zuvor gewonnenen theoretischen Vorhersagen $I'_{HK} = (252,60 \pm 0,02) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ und $I'_{HZ} = (252,81 \pm 0,06) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ gibt entsprechende relative Übereinstimmungen von 88,8 % und 88,6 % zwischen Experiment und Modell an. Verbleibende Abweichungen erklären sich durch weitere Einflüsse. So werden etwa die Massen der Halterungen vernachlässigt. Da sich diese hauptsächlich auf der Rotationsachse befinden, sollte der resultierende Fehler jedoch minimal ausfallen. Generelle Ungenauigkeiten beim Messverfahren sind ebenfalls nicht ausgeschlossen. Bei der Rückstellkraftmessung zur Bestimmung der Winkelrichtgröße muss beispielsweise genau senkrecht angesetzt werden, ansonsten kann es zu verfälschten Ergebnissen kommen.

Die verschiedenen Haltungen der Modellfigur belaufen sich mithilfe dieser Korrektur auf $I_1 = (1,76 \pm 13,94) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ sowie $I_2 = (38,11 \pm 12,49) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ als experimentelle Resultate. Dies entspricht etwa 10,4 % von $I'_1 = (16,99 \pm 4,75) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ sowie 100,8 % von $I'_2 = (37,82 \pm 8,10) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ als Theoriewerte. In der zweiten Pose decken sich mittlere Vorhersage und Ergebnis demnach zu einem sehr hohen Grad. Dagegen liegt das erwartete theoretische Trägheitsmoment für die erste Haltung eine volle Größenordnung über dem resultierenden Mittelwert. Erklären lässt sich dieser Umstand mit den breiten Fehlerintervallen der Messungen. Diese wiederum begründen sich vor allem darin, dass die Puppe in beiden Posen Trägheitsmomente aufweist, die sich im Bereich des Eigenbeitrags $I_D = (22,8 \pm 14,9) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ der Apparatur befinden. Deren Bestimmung wird dadurch deutlich störanfälliger. Abgesehen von den vorherigen Fehlerquellen tragen hier auch noch die ungenaue Positionierung der Körperteile sowie die vereinfachte Geometrie zur realen Abweichung bezüglich der Theorievorhersage bei.

Zuletzt folgt aus der Modellierung der Figur in der ersten Haltung ein Trägheitsmoment entsprechend 44,9 % der zweiten Pose. Diese Vorhersage ist erwartet, da die vom Körper weggestreckten Beine im zweiten Fall für eine Massenverteilung in weiterer Entfernung zur Drehachse sorgen. Im Experiment beträgt das Trägheitsmoment in der ersten nur 4,6 % dessen in der zweiten Haltung. Werden die großen Fehlerintervalle beachtet, dürfen theoretische und reale Änderung an dieser Stelle aber trotzdem als vergleichbar behandelt werden. Sie sind daher wenigstens mit dem Satz von Steiner vereinbar.

Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 101, Das Trägheitsmoment.*
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] Charles R. Harris u. a.
„Array programming with NumPy“.
In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362.
DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [3] John D. Hunter.
„Matplotlib: A 2D Graphics Environment“.
Version 1.4.3.
In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95.
DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
URL: <http://matplotlib.org/>.
Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [4] Eric O. Lebigot.
Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.
Version 2.4.6.1.
URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] *Python.*
Version 3.11.0.
24. Okt. 2022.
URL: <https://www.python.org>.