

## **Der Lock-In-Verstärker**

Fritz Agildere  
fritz.agildere@udo.edu

Ben Brüggemann  
ben.brueggemann@udo.edu

Durchführung: 29. November 2022

Abgabe: 6. Dezember 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufgabe</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Verifikation der Phasenabhängigkeit .....	4
3.2	Anwendung zur Rauschunterdrückung .....	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Gleichrichtungsverlauf und abgegriffene Intensität .....	6
4.1.1	Rauschfreies Signal .....	6
4.1.2	Verrauschtes Signal .....	8
4.2	Abstandsabhängiger Intensitätsverlauf eines Lichtsignals .....	10
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Theorie

Lock-In-Verstärker finden Verwendung in der Messung stark verrauschter Signale, indem diese mit einer Referenzfrequenz  $\omega_0$  moduliert werden. Aus dem Messsignal entsteht  $U_{\text{sig}}$  als Nutzsignal, welches unter Anwendung eines Bandpassfilters von Rauschanteilen mit niedrigen ( $\omega \ll \omega_0$ ) und hohen ( $\omega \gg \omega_0$ ) Frequenzen bereinigt wird. Im nachgeschalteten Mischer wird  $U_{\text{sig}}$  mit einer Referenzspannung  $U_{\text{ref}}$  der Frequenz  $\omega_0$  multipliziert, wobei durch Variation deren Phase eine Synchronisation ( $\phi = 0$ ) beider Signale erreicht wird. Zuletzt wird das Mischsignal  $U_{\text{mix}} = U_{\text{sig}} \times U_{\text{ref}}$  über einen Tiefpass integriert. Durch Wahl einer ausreichend großen Zeitkonstante ( $\tau \gg 1/\omega_0$ ) kann diese Integration über mehrere Perioden der Modulationsfrequenz stattfinden. So werden asynchrone Rauschbeiträge weitestgehend herausgemittelt. Es ergibt sich mit  $U_{\text{out}}$  eine Gleichspannung, deren Wert proportional zum Eingangssignal ist. Unter der Farbkodierung nach Abbildung 1 lässt sich in Abbildung 2 der schematische Aufbau eines Lock-In-Verstärkers nachvollziehen.

Die Bandbreite  $\Delta\nu$  des Restrauschens ist vom Integrierglied abhängig. Durch Wahl einer besonders großen Zeitkonstante  $\tau = RC$  am Tiefpass, lässt sich  $\Delta\nu = 1/(\pi RC)$  beliebig klein kalibrieren. Dieses Vorgehen erlaubt das Erreichen von Gütefaktoren bis  $Q = 100\,000$ . Ein einfacher Bandpass besitzt dagegen eine Güte von  $Q = 1000$ .

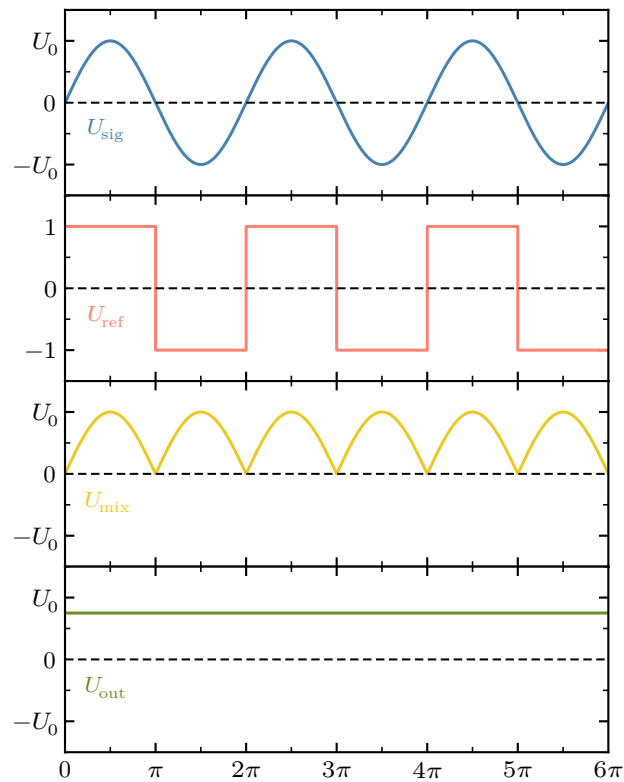


Abbildung 1: Exemplarische Signalverläufe am Lock-In-Verstärker.

Anhand Abbildung 1 lassen sich die mathematischen Hintergründe des Filtervorgangs darstellen. Eine typische Signalspannung der Form

$$U_{\text{sig}} = U_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

wird hier durch ein Rechtecksignal gleicher Frequenz moduliert. Zu beachten ist dabei, dass die Amplitude dieser Referenzspannung  $U_{\text{ref}}$  normiert ist. Als Näherung wird ihre Fourierreihe aus den ungeraden Harmonischen zur Grundfrequenz  $\omega$  genutzt:

$$U_{\text{ref}} = \frac{4}{\pi} \left( \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right) \quad (2)$$

Am Mischer folgt damit für das Produkt aus Signal und Referenz:

$$U_{\text{mix}} = \frac{2}{\pi} U_0 \left( 1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega t) - \frac{2}{35} \cos(6\omega t) - \dots \right) \quad (3)$$

Nach diesem Schritt sind nur noch die geraden Oberwellen von  $\omega$  enthalten, der Detektor funktioniert demnach als Gleichrichter. Der Tiefpassfilter wird anschließend so gewählt, dass alle höheren Schwingungen unterdrückt werden. Nun kann die Gleichspannung

$$U_{\text{out}} = \frac{2}{\pi} U_0 \quad (4)$$

abgegriffen werden. Weisen  $U_{\text{sig}}$  und  $U_{\text{ref}}$  anders als in Abbildung 1 eine Phasendifferenz  $\phi$  auf, so ergibt sich für die Ausgangsspannung stattdessen:

$$U_{\text{out}} = \frac{2}{\pi} U_0 \cos(\phi) \quad (5)$$

Entspricht die Referenzspannung einem nicht normierten Sinussignal, gilt eine allgemeine Proportionalität der folgenden Form:

$$U_{\text{out}} \propto U_0 \cos(\phi) \quad (6)$$

## 2 Aufgabe

Ziel dieser Versuchsreihe ist es, die Funktion eines Lock-In-Verstärkers zu untersuchen. Dazu werden zunächst die Phasenabhängigkeiten der Gestalt des Mischsignals sowie des Intensitätsverlaufs der Ausgangsspannung betrachtet. Anschließend wird die aufgebaute Messapparatur zur Rauschunterdrückung in einer Photodetektorschaltung angewendet.

### 3 Durchführung

Am Lock-In-Verstärker werden zuerst die Signale der Ausgänge des Funktionsgenerators (Reference/Oscillator) gemessen. An **OUT** lässt sich eine Spannung  $U_{\text{sig}}$  mit variabler Amplitude als Nutzsignal abgreifen. Das Referenzsignal  $U_{\text{ref}}$  wird mit einer konstanten Amplitude 5 V durch **Phase OUT** geliefert. Beide Spannungen entsprechen Sinussignalen mit identischer Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$ . Der Vorverstärker sowie der Detektor werden auf eine Verstärkung (Gain) von 10 kalibriert und gemeinsam mit dem eingebauten digitalen Oszilloskop auf Gleichspannung eingestellt. Dadurch lässt sich das unerwartete Filtern bestimmter Frequenzen vermeiden.

#### 3.1 Verifikation der Phasenabhängigkeit

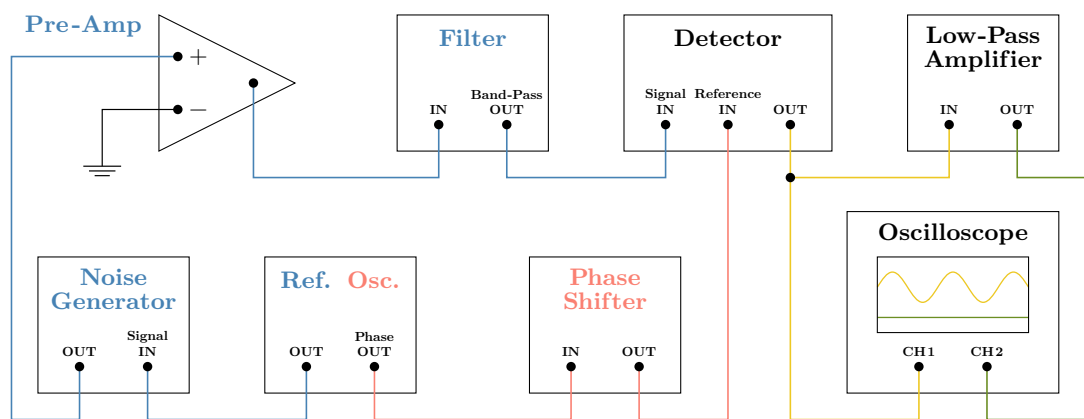


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines Lock-In-Verstärkers.

Abbildung 2 zeigt das Schaltnetz eines Lock-In-Verstärkers zusammen mit Signalwegen, die der Farbkodierung in Abbildung 1 folgen. Angesetzt wird eine Frequenz von  $\nu = 1 \text{ kHz}$ . Das Nutzsignal  $U_{\text{sig}}$  hat eine Amplitude von 10 mV und ist durch das anfangs phasengleiche Sinussignal  $U_{\text{ref}}$  moduliert. Der Rauschgenerator bleibt zunächst überbrückt. Um die Funktion des im Detektor enthaltenen phasempfindlichen Gleichrichters zu beurteilen, werden die zeitlichen Verläufe des Mischsignals  $U_{\text{mix}}$  am digitalen Oszilloskop unter Variation der relativen Phase als Bildschirmaufnahme mitgeführt. Dabei ist die Anzeige des Spannungsmessers vertikal auf 200 mV/div und horizontal auf 200  $\mu\text{s}/\text{div}$  skaliert. Weiter wird die integrierte Gleichspannung  $U_{\text{out}}$  für verschiedene Phasenverschiebungen nachgehalten. Um eine möglichst geringe Bandbreite der verbleibenden Oberfrequenzen zu garantieren, ist am Tiefpass eine vergleichsweise hohe Integrationszeit von  $\tau = 3 \text{ s}$  eingestellt. Im Anschluss an diese Messungen nutzt man den Störgenerator, um  $U_{\text{sig}}$  ein Rauschsignal der Größenordnung 10 mV zuzufügen. Das vorherige Vorgehen wird für diesen Fall wiederholt, um im Vergleich die Güte der Rauschunterdrückung des Lock-In-Verstärkers nachzuweisen.

### 3.2 Anwendung zur Rauschunterdrückung

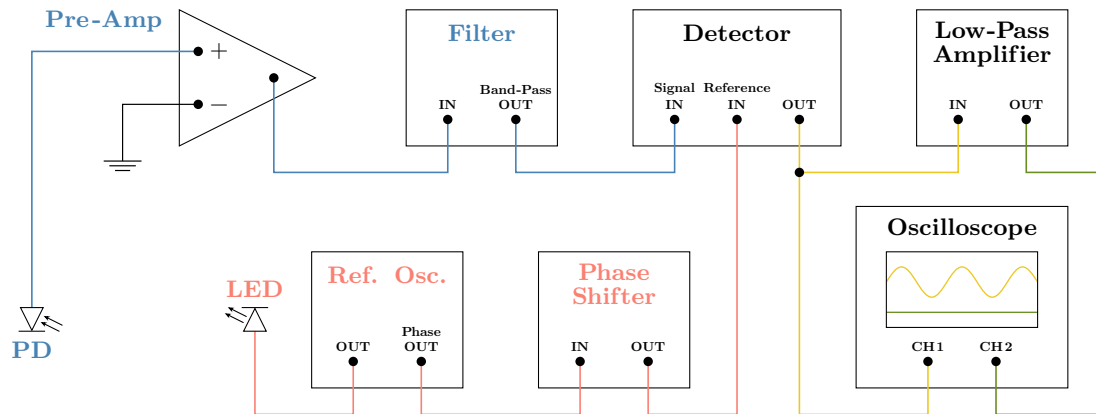


Abbildung 3: Schematischer Aufbau einer Photodektorschaltung.

Wie in Abbildung 3 gezeigt, ist nun eine Leuchtdiode (LED) verbaut. Sie wird bei 10 V mit einer Frequenz von  $\nu = 100$  Hz moduliert. Ein Photodetektor (PD) registriert ihr Lichtsignal. Beide Bauteile sind auf einer Schiene geführt. Durch gegenseitiges Verschieben kann der Abstand  $r$  zwischen LED und PD variiert werden. Um die abstandsabhängige Intensitätsänderung zu messen, muss die bekannte Signalfrequenz der Lichtquelle vom Hintergrundrauschen der Umgebungsbeleuchtung getrennt werden. Dazu kommt der Lock-In-Verstärker zum Einsatz, indem die Werte der Ausgangsspannung  $U_{\text{out}}$  zu verschiedenen Entfernungen aufgenommen und verarbeitet werden.

## 4 Auswertung

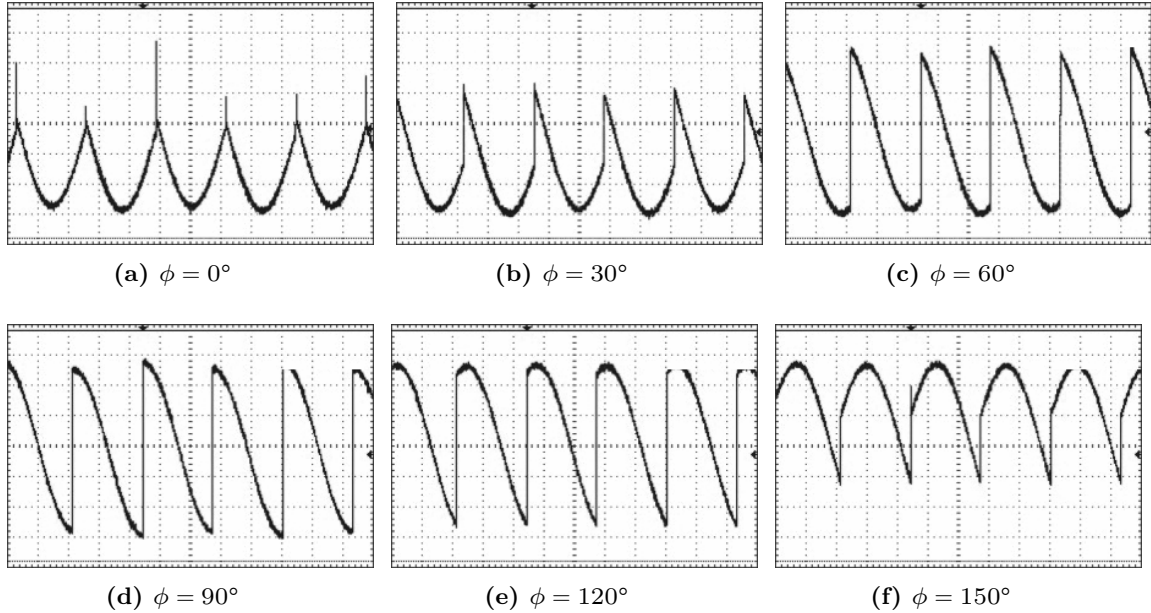
Zur graphischen Darstellung werden die Bibliotheken NumPy [2] und Matplotlib [3] unter Python [4] verwendet. Um nichtlineare Ausgleichsrechnungen mit einer Schätzung der zugehörigen Abweichungen durchzuführen, kommt SciPy [5] zum Einsatz. Speziell liefert die Funktion `scipy.optimize.curve_fit` sowohl die optimalen Parameter, um die Fehlerquadrate zwischen Messdaten und Modellverlauf zu minimieren, als auch die jeweilige Kovarianz  $\sigma^2$ , aus der direkt die Standardabweichung  $\sigma$  bestimmt werden kann.

## 4.1 Gleichrichtungsverlauf und abgegriffene Intensität

Unter Berücksichtigung von (6) lässt sich eine phasenabhängige Modellfunktion aufstellen, die im Folgenden zur nichtlinearen Regressionsrechnung dienen soll:

$$U = a \cos(b\phi + c) + d \quad (7)$$

### 4.1.1 Rauschfreies Signal



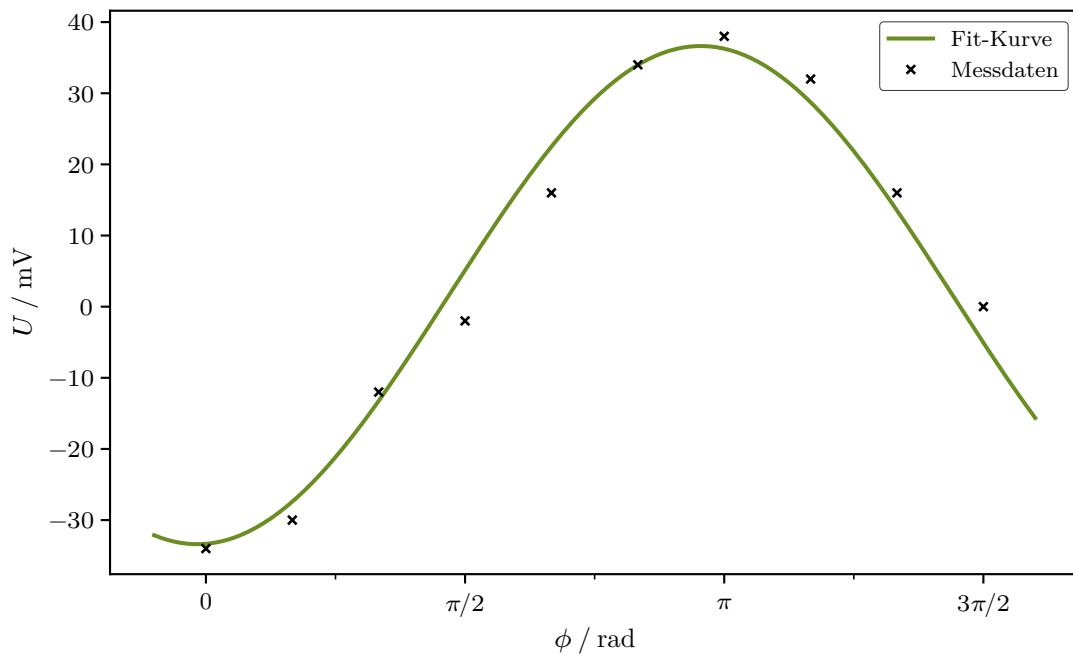
**Abbildung 4:** Spannungsverlauf  $U_{\text{mix}}$  eines Sinussignals am Mischer für verschiedene Phasen.

Abbildung 4 zeigt die Verläufe des Mischsignals am Gleichrichter bei den angegebenen Phasendifferenzen. Es ist zu erkennen, dass die Spannung dabei immer einer halben Periode des Ursprungssignals folgt. Der jeweilige Abschnitt variiert mit der Verschiebung der Referenzspannung.

Aus den Werten in Tabelle 1 ergeben sich für (7) die folgenden Parameter:

$$\begin{aligned} a &= (-35,01 \pm 1,42) \text{ mV} & b &= 1,03 \\ d &= (1,63 \pm 1,58) \text{ mV} & c &= 0,05 \pm 0,13 \end{aligned}$$

Dabei entspricht  $a$  der betragsmäßig maximalen Intensität. Die Variablen  $b$ ,  $c$  und  $d$  charakterisieren entsprechende Verschiebungen und Stauchungen, die von der Erwartung aus (6) abweichen.



**Abbildung 5:** Abgegriffene Gleichspannung  $U_{\text{out}}$  zur Verschiebung  $\phi$  mit passender phasenabhängiger Ausgleichsrechnung.

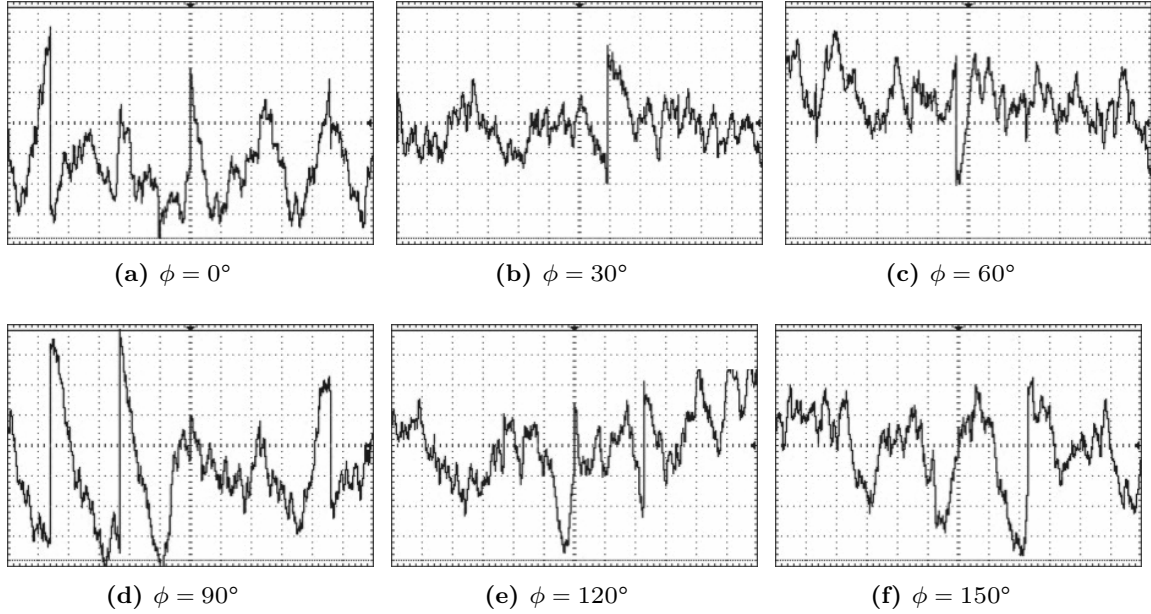
Die so parametrisierte Ausgleichskurve ist mit den Messaufzeichnungen aus Tabelle 1 in Abbildung 5 dargestellt. Nach Betrachtung der Kenngrößen mit ihren Fehlern und des graphischen Verlaufs entlang der Daten scheint die berechnete Funktion einen relativ hohen Deckungsgrad zu erreichen.

**Tabelle 1:** Messdaten der Ausgangsspannung  $U_{\text{out}}$  zur relativen Phase.

$\phi / ^\circ$	$\phi / \text{rad}$	$U / \text{mV}$
0	0,00	−34,0
30	0,52	−30,0
60	1,05	−12,0
90	1,57	−2,0
120	2,09	16,0
150	2,62	34,0
180	3,14	38,0
210	3,67	32,0
240	4,19	16,0
270	4,71	0,0



#### 4.1.2 Verrauschtes Signal



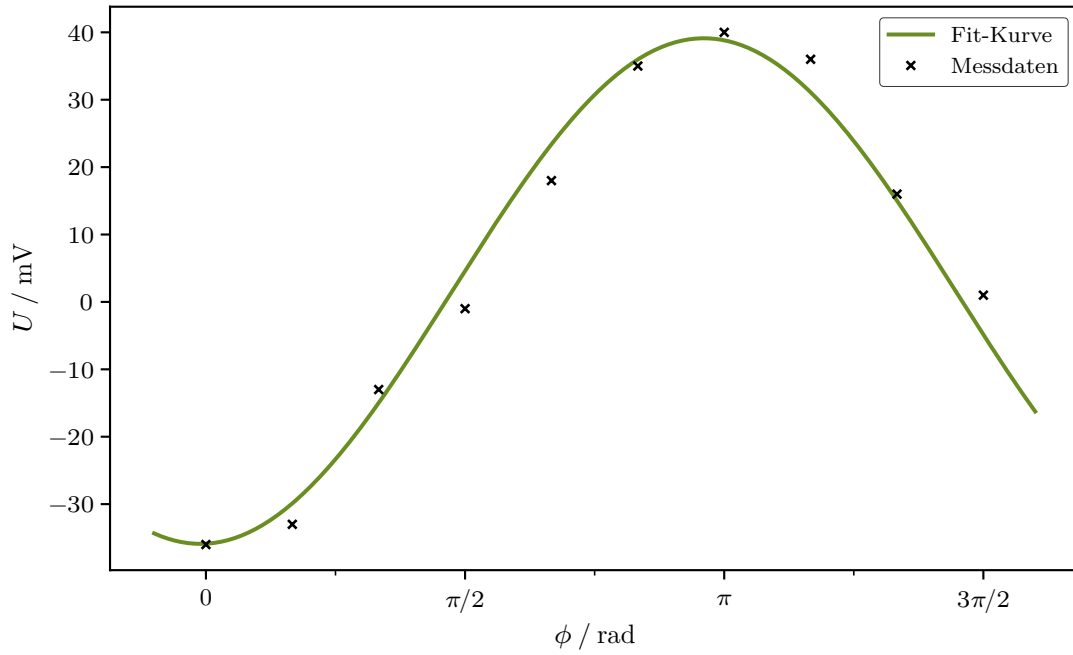
**Abbildung 6:** Spannungsverlauf  $U_{\text{mix}}$  eines Sinussignals am Mischer für verschiedene Phasen.

Verglichen mit Abbildung 4 lassen sich aus den Verläufen der verrauschten Mischsignale in Abbildung 6 kaum mehr Informationen über die Messgröße ablesen. Stark eingeschränkt kann anhand der Peaks noch die Frequenz der Referenzspannung  $U_{\text{ref}}$  erkannt werden.

**Tabelle 2:** Messdaten der Ausgangsspannung  $U_{\text{out}}$  zur relativen Phase.

$\phi / ^\circ$	$\phi / \text{rad}$	$U / \text{mV}$
0	0,00	−36,0
30	0,52	−33,0
60	1,05	−13,0
90	1,57	−1,0
120	2,09	18,0
150	2,62	35,0
180	3,14	40,0
210	3,67	36,0
240	4,19	16,0
270	4,71	1,0

Mit den Werten in Tabelle 2 lässt sich die Regressionskurve zu den Daten in Abbildung 7 berechnen. Der Einfluss der einzelnen Merkmale entspricht der vorherigen Beschreibung.



**Abbildung 7:** Abgegriffene Gleichspannung  $U_{\text{out}}$  zur Verschiebung  $\phi$  mit passender phasenabhängiger Ausgleichsrechnung.

Der Fit an (7) ist durch folgende Eigenschaften beschrieben:

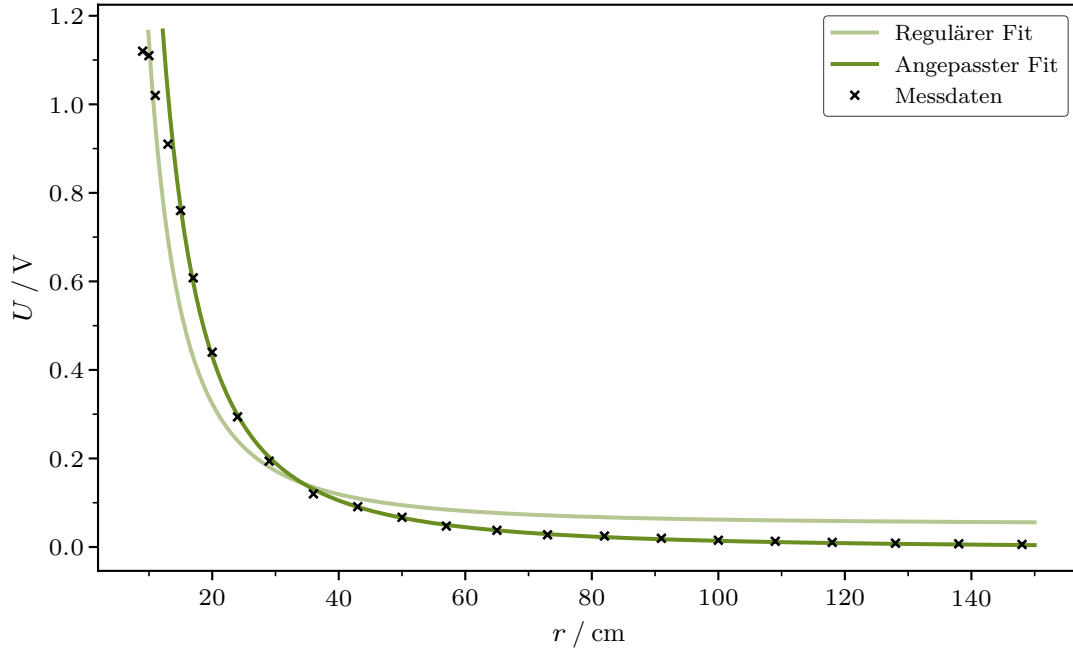
$$\begin{aligned}
 a &= (-37,51 \pm 1,48) \text{ mV} & b &= 1,03 \\
 d &= (1,61 \pm 1,67) \text{ mV} & c &= 0,03 \pm 0,13
 \end{aligned}$$

Trotz starker Rauschkomponente lässt sich also ein deutliches Signal messen, dessen Verlauf dem rauschfreien Fall stark ähnelt. Die Streuung der Messungen um den Fit ist hier ebenfalls nicht signifikant stärker ausgeprägt.

## 4.2 Abstandsabhängiger Intensitätsverlauf eines Lichtsignals

Da sich die Leuchtdiode besonders für größere Entfernungen als Punktquelle nähern lässt, breitet sich ihre Lichtintensität per Annahme gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche aus. Damit kann das folgende mathematische Modell genutzt werden:

$$U = v r^{-2} + w \quad (8)$$



**Abbildung 8:** Gemessene Intensität  $U_{\text{out}}$  bei Abstand  $r$  mit Ausgleichskurven.

Mit den Werten aus Tabelle 3 lässt sich die nichtlineare Regression an (8) durchführen. Die resultierenden Kurven sind in Abbildung 8 dargestellt. Um für die Abweichung bei geringeren Abständen zu kompensieren, können die ersten drei Messungen ignoriert werden. Dieses angepasste Vorgehen liefert  $v = (173,63 \pm 1,01) \text{ mV cm}^2$  als Koeffizienten, während die Verschiebung  $w$  ganz verschwindet. Dagegen ergeben sich für den regulären Ausgleich folgende Parameter:

$$\begin{aligned} v &= (109,09 \pm 6,57) \text{ mV cm}^2 \\ w &= (0,05 \pm 0,03) \text{ mV} \end{aligned}$$

Das Signal der LED verschwindet nie vollständig am Photodetektor, da der Versuch durch die Länge der Schiene begrenzt ist. Für den Maximalabstand lässt sich also mit  $r_{\text{max}} > 148 \text{ cm}$  nur eine untere Schranke festlegen.

**Tabelle 3:** Messdaten der auftretenden Spannung  $U_{\text{out}}$  zum Abstand  $r$  zwischen LED und PD.

$r / \text{cm}$	$U / \text{mV}$	$r / \text{cm}$	$U / \text{mV}$
9	1120	57	47,2
10	1110	65	37,6
11	1020	73	27,6
13	910	82	24,8
15	760	91	19,6
17	608	100	15,2
20	440	109	12,9
24	294	118	10,4
29	194	128	8,5
36	120	138	7,2
43	91	148	5,8
50	67		

## 5 Diskussion

Sowohl die Schaltung des Lock-In-Verstärkers als auch das digitale Oszilloskop weisen nur sehr geringe baubedingte Abweichungen auf. Die größte Fehlerquelle dürfte daher vom menschlichen Faktor herrühren, also aus ungenauer Einstellung der Messapparatur oder dem fehlerhaften Ablesen der Werte. Da die Messergebnisse insgesamt aber zu einem hohen Grad mit den Erwartungen aus der Theorie übereinstimmen, kann für den Versuch von einer großen Gesamtgenauigkeit ausgegangen werden.

Das Verhalten des Gleichrichters lässt sich graphisch nur ohne Rauschen beurteilen. In diesem Fall wird deutlich, dass der Spannungsverlauf aus sinusartigen Halbwellen genau mit der Vorhersage im Einklang steht. Auch die phasenabhängige Intensität der Ausgangsspannung passt bis auf leichte Verschiebungen zur Theorie. Die fest auftretende Verschiebung  $d$  ist am besten durch ungenaues Einstellen des Spannungsmessers erklärt. Der Versatz  $c$  kann auf ungewollte innere Widerstände des Aufbaus zurückgeführt werden, die eine geringe Phasendifferenz hervorrufen. Zu beachten ist bei der Analyse des störbehafteten Intensitätsverlaufs noch das Auftreten signifikanter Schwankungen in der Gleichspannung. Trotzdem stimmt das Ergebnis gut mit dem eines reinen Sinussignals überein. Daraus lässt sich auf die Güte des Lock-In-Verstärkers schließen. Dieser ist offenbar dazu in der Lage, aus einem stark verrauschten Signal mit hoher Genauigkeit den Anteil der Modulationsfrequenz herauszufiltern und zu verstärken.

Auch bei der Anwendung zur Rauschunterdrückung in der Photodektorschaltung wird der Nutzen dieser Funktion deutlich. Trotz des ambienten Lichteinfalls passen die Messdaten sehr gut zum korrigierten Ausgleich mit der Theoriefunktion. Die Abweichung für nähere Abstände rührt hauptsächlich daher, dass Höhe und Neigung des Detektors nicht perfekt mit der Leuchtdiode abgestimmt sind.

Alle Informationen sind aus der Versuchsanleitung [1] entnommen. Auch die Skizzen der exemplarischen Spannungsverläufe sowie die schematischen Schaltbilder sind an die darin enthaltenen Grafiken angelehnt.

## Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 303, Der Lock-In-Verstärker.*  
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] Charles R. Harris u. a.  
„Array programming with NumPy“.  
In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362.  
DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.  
URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [3] John D. Hunter.  
„Matplotlib: A 2D Graphics Environment“.  
Version 1.4.3.  
In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95.  
DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.  
URL: <http://matplotlib.org/>.  
Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [4] *Python.*  
Version 3.11.0.  
24. Okt. 2022.  
URL: <https://www.python.org>.
- [5] Pauli Virtanen u. a.  
„SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“.  
Version 1.9.3.  
In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272.  
DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.