

## **Elektrische Brückenschaltungen**

Fritz Agildere  
fritz.agildere@udo.edu

Ben Brüggemann  
ben.brueggemann@udo.edu

Durchführung: 22. November 2022

Abgabe: 29. November 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
1.1	Grundlegendes zur Brückenschaltung	2
1.1.1	Kirchhoffsche Gesetze	2
1.1.2	Abgleichbedingung	3
1.1.3	Komplexe Widerstände	3
1.2	Spezielle Brückenschaltungen	4
1.2.1	Wheatstonesche Brücke	4
1.2.2	Kapazitätsmessbrücke	4
1.2.3	Induktivitätsmessbrücke	5
1.2.4	Maxwell-Brücke	6
1.2.5	Wien-Robinson-Brücke	7
1.3	Fehlerrechnung	8
<b>2</b>	<b>Aufgabe</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
3.1	Widerstandsmessung	9
3.2	Kapazitätsmessung	9
3.3	Induktivitätsmessung	9
3.4	Untersuchung frequenzabhängiger Brückenschaltungen	9
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>10</b>
4.1	Wheatstonesche Messbrücke	10
4.2	Kapazitätsmessbrücke	11
4.3	Induktivitätsmessbrücke	12
4.4	Maxwell-Brücke	12
4.5	Frequenzverhalten der Wien-Robinson-Brücke	12
4.6	Klirrfaktor des Generators	14
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
5.1	Ausmessen elektronischer Bauteile	16
5.2	Untersuchung des Frequenzverhaltens	17
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

# 1 Theorie

## 1.1 Grundlegendes zur Brückenschaltung

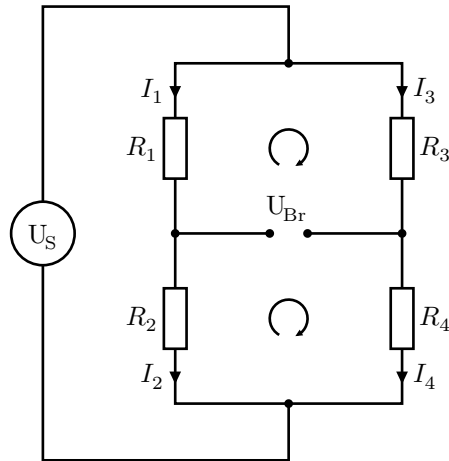


Abbildung 1: Prinzipielle Brückenschaltung.

Im Allgemeinen dient eine Brückenschaltung der Untersuchung einer Potentialdifferenz, welche jeweils von den Verhältnissen der verbauten Widerstände abhängt. Sie wird als Brückenspannung  $U_{Br}$  bezeichnet. Für ihre Berechnung aus der Speisespannung  $U_S$  werden die Kirchhoffschen Gesetze benötigt.

### 1.1.1 Kirchhoffsche Gesetze

An den Verzweigungen des Schaltkreises können sowohl zufließende Ströme ( $I > 0$ ) als auch abfließende Ströme ( $I < 0$ ) definiert werden. Die **Knotenregel** besagt dann, dass die Summe der ein- und auslaufenden elektrischen Ströme an einem beliebigen Punkt immer gleich Null ist:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

Für die Brückenschaltung in Abbildung 1 folgt daraus direkt, dass  $I_1 = I_2$  und  $I_3 = I_4$  gelten muss. Weiter besagt die **Maschenregel**, dass die Summe aller Spannungen in einem geschlossenen Unterkreis eines elektrischen Netzwerkes gleich Null ist. Per Konvention ist die positive Richtung dabei als rechtsdrehend definiert. Eine bestimmte elektromotorische Kraft entspricht demnach der Summe der übrigen Potentiale. Wird der Spannungsabfall an einem Widerstand als dessen Produkt mit der Stromstärke geschrieben, ergibt sich:

$$U = \sum_k U_k = \sum_k I_k R_k \quad (2)$$

Damit kann der folgende Ausdruck für die Brückenspannung hergeleitet werden:

$$U_{\text{Br}} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_3 + R_4} I_1 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (3)$$

### 1.1.2 Abgleichbedingung

Verschwindet diese für beliebige Speisespannungen, wird die entsprechende Schaltung abgegliche Brücke genannt. Anhand von (3) lässt sich ablesen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die **Abgleichbedingung** erfüllt ist:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (4)$$

Diese Relation erlaubt das Ausmessen eines unbekannten Widerstandes, solange die Werte der übrigen Bauteile bekannt sind.

### 1.1.3 Komplexe Widerstände

Um (4) auch auf Kondensatoren und Spulen anwenden zu können, müssen noch **komplexe Widerstände** eingeführt werden. Solche lassen sich allgemein mit der imaginären Einheit  $i$  ausdrücken:

$$Z = X + iY \quad (5)$$

Dabei bezeichnet  $X$  den leistungsverbrauchenden Wirkwiderstand. Der Blindwiderstand  $Y$  erzeugt eine zeitliche Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung, ohne dass es zur Umwandlung von Energie kommt.

Es werden die Widerstandsoperatoren für eine Kapazität  $C$ , eine Induktivität  $L$  und einen ohmschen Widerstand  $R$  mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  angegeben:

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad Z_L = i\omega L \quad Z_R = R \quad (6)$$

Durch Einsetzen von  $Z$  in (4) ergibt sich  $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$  als Abgleichbedingung. Da für Gleichheit im komplexen Zahlenraum jeweils Real- und Imaginärteil übereinstimmen müssen, lässt sich äquivalent formulieren:

$$\begin{aligned} X_1 X_4 - Y_1 Y_4 &= X_2 X_3 - Y_2 Y_3 \\ X_1 Y_4 + X_4 Y_1 &= X_2 Y_3 + X_3 Y_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Zum Abgleichen einer Wechselstrombrücke müssen Betrag und Phase verschwinden, woraus sich die beiden Bedingungen (7) ergeben. In der Schaltung braucht es dazu immer zwei unabhängige Stellglieder.

## 1.2 Spezielle Brückenschaltungen

### 1.2.1 Wheatstonesche Brücke

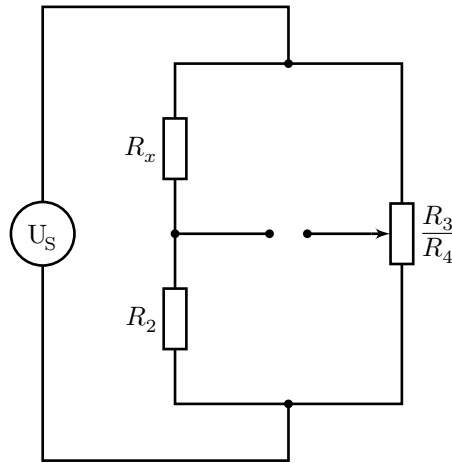


Abbildung 2: Wheatstonesche Brückenschaltung.

Die Wheatstonesche Brücke enthält nur ohmsche Widerstände und kann daher mit Gleich- oder Wechselstrom betrieben werden. Wird ein unbekannter Widerstand  $R_x$  wie in Abbildung 2 eingebaut, ergibt sich aus der Abgleichbedingung (4) folgender Ausdruck:

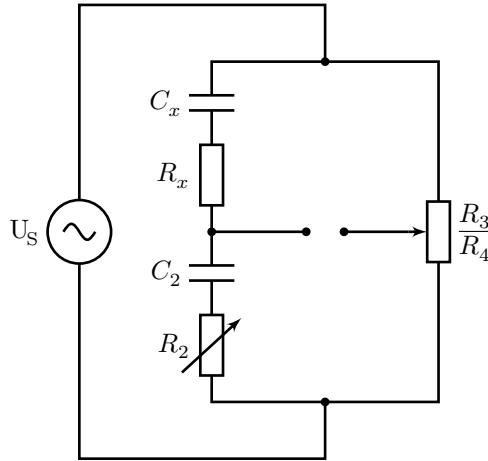
$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8)$$

Da es zur Bestimmung von  $R_x$  ausreicht, nur das Verhältnis von  $R_3$  und  $R_4$  zu variieren, können diese beiden Bauteile durch ein Potentiometer ersetzt werden.

### 1.2.2 Kapazitätsmessbrücke

Ein idealer Kondensator ist vollständig durch seine Speicherkapazität beschrieben. In realen Kondensatoren treten zusätzlich dielektrische Verluste auf, bei denen elektrische Energie in Wärme umgewandelt wird. Um dies bei der Berechnung von Schaltungen zu berücksichtigen, wird im Ersatzschaltbild ein ohmscher Widerstand in Reihe mit einem idealen Kondensator identischer Kapazität gesetzt. Der passende Operator lautet dann:

$$Z_{C\text{real}} = R + \frac{1}{i\omega C} \quad (9)$$



**Abbildung 3:** Brückenschaltung zur Kapazitätsmessung.

Eine Kapazitätsmessbrücke muss wie in Abbildung 3 mit Wechselstrom gespeist werden. Um bei der Messung von  $C_x$  die Phasenverschiebung des Verlustwiderstandes  $R_x$  zu kompensieren, wird zu  $C_2$  noch ein weiterer verstellbarer Widerstand  $R_2$  als zweiter Freiheitsgrad benötigt. Nach dem Abgleich für Wechselstrombrücken (7) folgt:

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \qquad R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \qquad (10)$$

### 1.2.3 Induktivitätsmessbrücke

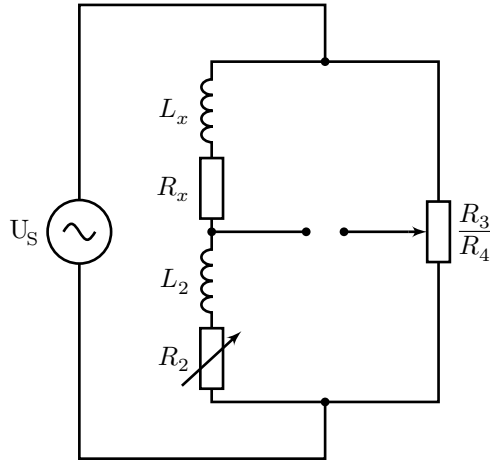
Auch eine reale Induktivität wandelt magnetische Feldenergie teilweise in Wärme um. Um also etwa eine Spule darzustellen, wird wieder ein ohmscher Widerstand in Reihe mit einer idealen Induktivität geschaltet. Ihr Widerstandsoperator kann wie folgt geschrieben werden:

$$Z_{L\text{ real}} = R + i\omega L \qquad (11)$$

Wie zuvor kann nach dem Aufbau in Abbildung 4 in die bekannte Abgleichbedingung für Wechselstrom (7) eingesetzt werden. Lösen dieser Gleichung liefert:

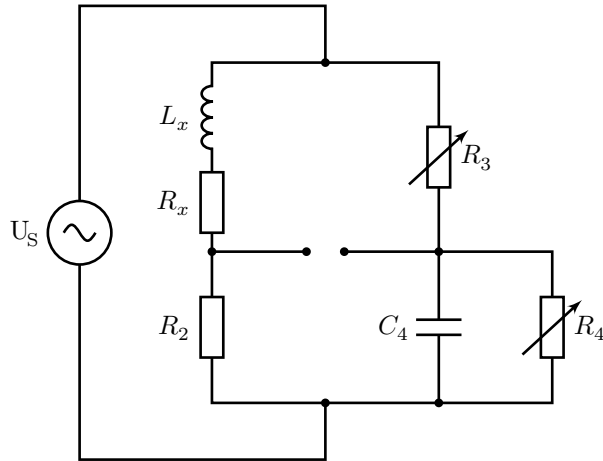
$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \qquad R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \qquad (12)$$

Um verlustbehaftete Bauteile auszumessen, dürfen entsprechende bekannte Komponenten  $L_2$  oder  $C_2$  nur möglichst geringe Fehler aufweisen. Für Induktivitäten ist dies besonders bei niedrigen Frequenzen  $\nu$  kaum möglich. Statt einer in Reihe geschalteten Spule bietet es sich daher an, einen parallel geschalteten Kondensator zu nutzen, da solche mit deutlich geringeren Verlusten gebaut werden können. Eine Schaltung dieser Form heißt Maxwell-Brücke.



**Abbildung 4:** Brückenschaltung zur Induktivitätsmessung.

#### 1.2.4 Maxwell-Brücke



**Abbildung 5:** Maxwell-Brückenschaltung zur Induktivitätsmessung.

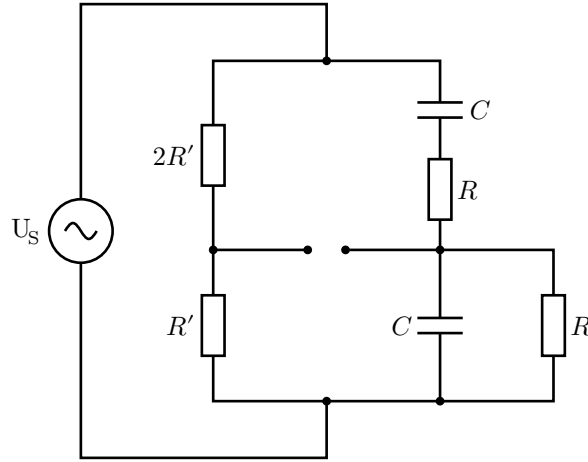
Hier müssen  $R_3$  und  $R_4$  nach Abbildung 5 wieder separat anpassbar sein. Um parallel geschaltete Widerstände und Kapazitäten zusammenzufassen, wird die Summe ihrer Kehrwerte gebildet. Der komplexe Operator dazu lautet:

$$Z_{RC} = \left( \frac{1}{R} + i\omega C \right)^{-1} \quad (13)$$

Zum Abgleich der Schaltung wird dies wieder in (7) eingesetzt und anschließend eliminiert:

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (14)$$

### 1.2.5 Wien-Robinson-Brücke



**Abbildung 6:** Frequenzabhängige Wien-Robinson-Brückenschaltung.

Wie in Abbildung 6 dargestellt, enthält eine Wien-Robinson-Brücke keine verstellbaren Widerstände mehr. Der Abgleich dieser Schaltung ist nur durch Einstellen genau einer bestimmten Frequenz  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  möglich. Durch Zusammenfassen der Bauteile und Einsetzen in den Ausdruck (3) lässt sich das Verhältnis von Brücken- und Speisespannung als Betrag ausdrücken:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9 \left( (1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2 \right)} \quad (15)$$

Aus dieser Übertragungsfunktion lässt sich ablesen, dass  $U_{Br}$  für den Wert  $\omega_0 = (RC)^{-1}$  verschwindet. Bei niedrigeren und höheren Frequenzen ist die Schaltung durchlässig. Die Wien-Robinson-Brücke entspricht daher einem elektronischen Sperrfilter. Zur weiteren Vereinfachung wird noch folgendes Verhältnis eingeführt:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\nu}{\nu_0} \quad \left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \quad (16)$$

Ein realer Generator erzeugt keine reine Sinusschwingung. Das Verhältnis der Oberwellen zur Grundwelle wird **Klirrfaktor**  $k$  genannt und bemisst die Güte eines Sinusgenerators. Kleinere Faktoren zeigen eine entsprechend höhere Qualität an. Mit der Wien-Robinson-Brücke kann durch Einstellen des Generators auf die Sperrfrequenz  $\nu_0$  eine Messung des Klirrfaktors durchgeführt werden. Die Amplitude der Oberschwingung zur Frequenz  $(n + 1)\nu_0$  sei dabei als  $U_n$  definiert. Dann gilt:

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N U_n^2}}{U_0} \quad (17)$$



### 1.3 Fehlerrechnung

Um die Abweichung der Messgrößen zu untersuchen, werden noch einige weitere Formeln benötigt. Der Mittelwert  $\bar{x}$  berechnet sich nach:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (18)$$

Zur Bestimmung der Standardabweichung  $\Delta\bar{x}$  wird folgender Ausdruck verwendet:

$$(\Delta\bar{x})^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \quad (19)$$

Durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung ist die Abweichung  $\Delta f$  für aus fehlerbehafteten Messwerten  $x_n$  abgeleitete Größen  $f$  berücksichtigt:

$$(\Delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2 \quad (20)$$

Für Größen der speziellen Formen  $f = xyz$  oder  $f = xyz^{-1}$  ergibt sich damit der Fehler:

$$\Delta f = f \sqrt{\left( \frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z}{z} \right)^2} \quad (21)$$

## 2 Aufgabe

Ziel dieser Versuchsreihe ist es, verschiedene elektronische Bauteile auszumessen. Dazu werden unbekannte ohmsche Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten in eine jeweils passende Brückenschaltung eingebaut. Weiter soll das frequenzabhängige Verhalten einer Filter-Brücke untersucht und mit ihrer Hilfe der Klirrfaktor eines Sinusgenerators bestimmt werden.

## 3 Durchführung

Alle Schaltungen werden mit einer sinusförmigen Wechselspannung gespeist. Um die Komponenten zu schonen, wird ihre Amplitude auf  $U_S = 1 \text{ V}$  beschränkt. Während der Messung elektronischer Bauteile ist die Frequenz konstant auf  $\nu = 1 \text{ kHz}$  festgelegt, da so Wirk- und Blindwiderstände im Bereich einer Größenordnung liegen. Dadurch lassen sich unerwünschte Streukapazitäten und lange Einschwingvorgänge minimieren. Für Widerstandsverhältnisse und variable Widerstände wird ein Drehregler-Potentiometer mit Gesamtwiderstand  $R = 1 \text{ k}\Omega$  verbaut. Als Messgerät für die Brückenspannung dient ein Kathodenstrahloszillograph. Dieser ist mit  $5 \text{ mV/div}$  auf die feinste Einstellung kalibriert.

### 3.1 Widerstandsmessung

Zunächst wird eine Wheatstonesche Brücke gemäß Abbildung 2 aufgebaut. Das Abgleichen der Schaltung erfolgt durch Variation des Potentiometers. Anschließend werden die Werte  $R_2$  und  $R_3$  notiert. Da für das Widerstandsverhältnis  $R_4 = 1\text{ k}\Omega - R_3$  gilt, muss  $R_4$  nicht explizit nachgehalten werden. Dieses Vorgehen wird für zwei unbekannte Werte mit jeweils drei verschiedenen  $R_2$  wiederholt.

### 3.2 Kapazitätsmessung

Die Kapazitätsmessbrücke folgt im Aufbau dem Schaltplan in Abbildung 3. Gemessen werden zwei unbekannte Kondensatoren und eine  $RC$ -Kombination. Obwohl bei den Kapazitäten davon auszugehen ist, dass sie nur geringe Verlustwiderstände besitzen, wird ein zuvor berechneter ohmscher Widerstand in Reihe geschaltet. Damit wird für alle Messungen das verstellbare Kompensationsglied  $R_2$  benötigt. Durch abwechselndes Anpassen des Verhältnisses  $R_3$  zu  $R_4$  und von  $R_2$  lassen sich Betrag und Phase der Brückenspannung minimieren. Nachdem die Werte  $C_2$ ,  $R_2$  und  $R_3$  notiert sind, wird  $C_2$  jeweils einmal ausgetauscht und das Verfahren erneut durchgeführt.

### 3.3 Induktivitätsmessung

Es werden verlustbehaftete Induktivitäten gemessen, deren innerer Wirkwiderstand nicht vernachlässigt werden kann. Demnach müssen wieder zwei Freiheitsgrade verbaut sein. Zunächst nutzt man einen Aufbau nach Abbildung 4. Durch Variieren von Potentiometer und  $R_2$  wird die Schaltung so eingestellt, dass die Brückenspannung verschwindet. Die Werte  $L_2$ ,  $R_2$  und  $R_3$  werden für zwei bekannte  $L_2$  notiert.

Nun wird die vorherige Induktivitätsmessbrücke durch eine Maxwell-Brücke ersetzt, deren Aufbau Abbildung 5 entnommen werden kann. Es wird ein gleichbleibender Widerstand  $R_2$  verbaut, allerdings werden  $R_3$  und  $R_4$  jetzt unabhängig voneinander angepasst. Für die abgegliche Brücke werden  $C_4$ ,  $R_3$  und  $R_4$  nachgehalten. Die Messung wird für zwei verschiedene  $C_4$  wiederholt.

### 3.4 Untersuchung frequenzabhängiger Brückenschaltungen

Eine Wien-Robinson-Brücke wird gemäß Abbildung 6 aufgebaut. Hierbei ist das Ziel die Analyse des Frequenzverhaltens der Brückenspannung. Entsprechend kann die Frequenz nicht mehr konstant bleiben, sondern wird von 20 Hz bis 30 kHz variiert. Dabei werden dreißig Datentupel aus  $\nu$  und der dabei auftretenden Amplitude  $U_{Br}$  gebildet. Eine gleichbleibende Einstellung der Generatorspannung  $U_S$  ist Voraussetzung für dieses Vorgehen. Die so aufgenommenen Werte werden im Anschluss noch zur Klirrfaktorbestimmung herangezogen.

## 4 Auswertung

Die hier verwendeten Komponenten weisen baubedingt gewisse Toleranzbereiche sowie unsystematische Fehler auf. Diese sind in relativer Darstellung angegeben, können für die Fehlerfortpflanzung also direkt als Verhältnis in (21) eingesetzt werden. Außerdem folgt aufgrund der Funktionsweise des Potentiometers für Versuche, in denen ein solches zur Einstellung eines Widerstandsverhältnisses gebraucht wird:

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_3}{1 \text{ k}\Omega - R_3}$$

Zur Bestimmung der Abweichung wird jeweils die Standardabweichung des Mittelwertes nach (19) gebildet und mit dem Ergebnis der Fehlerfortpflanzung (20) verglichen. Der größere Wert wird dann als Unsicherheit festgelegt. Zur graphischen Darstellung sowie zum automatisierten Ausgeben der Tabellen werden die Bibliotheken NumPy [2] und Matplotlib [3] unter Python [4] genutzt.

### 4.1 Wheatstonesche Messbrücke

**Tabelle 1:** Messdaten zur Bestimmung ohmscher Widerstände unter Anwendung der Wheatstoneschen Brücke bei  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega - R_3$ .

$R_2 / \Omega$	Wert 13		Wert 14	
	$R_3 / \Omega$	$R_x / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_x / \Omega$
500	391	321,018	645	908,451
664	326	321,163	577	905,740
1000	243	321,004	475	904,762

Die relative Abweichung für  $R_2$  ist mit 0,2 % angegeben, das am Potentiometer erzeugte Verhältnis von  $R_3$  zu  $R_4$  besitzt mit 0,5 % eine etwas größere Ungenauigkeit.  $R_x$  berechnet sich nach Formel (8). Daraus und aus den in Tabelle 1 nachgehaltenen Messergebnissen ergeben sich die Mittelwerte mit ihren baubedingten absoluten Fehlern:

$$R_{x,13} = (321,1 \pm 1,7) \Omega \qquad R_{x,14} = (906,3 \pm 4,9) \Omega$$

Die Abweichungen der Mittelwerte fallen mit  $\Delta R_{x,13} = 0,1 \Omega$  und  $\Delta R_{x,14} = 1,1 \Omega$  deutlich geringer aus.

## 4.2 Kapazitätsmessbrücke

**Tabelle 2:** Messdaten zur Bestimmung von Kapazität und Verlustwiderstand.

$C_2 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$C_x / \text{nF}$	$R_x / \Omega$
Wert 8				
450	380	606	292,574	584,467
597	288	671	292,717	587,380
Wert 3 mit Wert 13				
450	412	484	479,752	386,450
597	232	589	416,582	332,477
Wert 4 mit Wert 13				
450	694	321	951,869	328,091
597	615	350	1108,714	331,154

Der relative Fehler von  $C_2$  beträgt 0,2 %, während das Verhältnis von  $R_3$  zu  $R_4$  weiterhin mit einer Abweichung von 0,5 % behaftet ist. Um den verstellbaren Widerstand  $R_2$  zu realisieren, wird ein einzelner Ausgang eines Potentiometers genutzt. Der zugehörige Fehler ist mit 3 % gegeben. Zur Messung der Kapazitäten werden sie mit Wert 13 in Reihe geschaltet. Dies ermöglicht es, die Verlustwiderstände mit den vorherigen Ergebnissen zu vergleichen. Unter Verwendung von (10) lassen sich die in Tabelle 2 eingetragenen Messungen auswerten.

Für Wert 4 ergibt sich ein Fehler von 5,5 nF, welchen die Standardabweichung eindeutig übertrifft. Dagegen ist für den kombinierten Verlustwiderstand die Abweichung des Mittelwertes mit  $\Delta R_{x,4} = 1,5 \Omega$  geringer:

$$C_{x,4} = (1030 \pm 78) \text{ nF} \quad R_{x,4} = (330 \pm 10) \Omega$$

Zu Wert 3 liegen beide baubedingten Fehler mit 2,4 nF und  $11 \Omega$  deutlich unter ihren entsprechenden Mittelwertsabweichungen:

$$C_{x,3} = (448 \pm 32) \text{ nF} \quad R_{x,3} = (359 \pm 27) \Omega$$

Der Vergleich der kombinierten Wirkwiderstände mit dem einzelnen zuvor gemessenen Bauteil  $R_{x,13} = (321,1 \pm 1,7) \Omega$  zeigt, dass die realen Kondensatoren tatsächlich geringere Verluste aufweisen, diese aber nicht unbedingt völlig vernachlässigbar sind.

Für die RC-Kombination Wert 8 sind die Messungen ähnlicher, die Standardabweichungen  $\Delta C_{x,8} = 0,1 \text{ nF}$  und  $\Delta R_{x,8} = 1,5 \Omega$  fallen geringer als die baubedingten Fehler aus:

$$C_{x,8} = (292,6 \pm 1,6) \text{ nF} \quad R_{x,8} = (586 \pm 18) \Omega$$

### 4.3 Induktivitätsmessbrücke

**Tabelle 3:** Messdaten zur Bestimmung von Induktivität und Verlustwiderstand.

Wert 18				
$L_2 / \text{mH}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$L_x / \text{mH}$	$R_x / \Omega$
20,1	24	849	113,01	134,94
14,6	26	895	124,45	221,62

Die Induktivität  $L_2$  besitzt eine relative Abweichung 0,2 %. Für Größen, welche ohmsche Widerstände enthalten, gelten die gleichen Ungenauigkeiten wie vorher. Werden die Ausdrücke (12) auf die Messergebnisse aus Tabelle 3 angewendet, überwiegt erneut die Mittelwertsabweichung im Vergleich zu den baubedingten Fehlern 0,7 mH und 5,4  $\Omega$ :

$$L_{x,18} = (118,7 \pm 5,7) \text{ mH} \quad R_{x,18} = (178 \pm 43) \Omega$$

### 4.4 Maxwell-Brücke

**Tabelle 4:** Messdaten zur Bestimmung von Induktivität und Verlustwiderstand mittels der Maxwell-Brücke bei  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ .

Wert 16				
$C_4 / \text{nF}$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$L_x / \text{mH}$	$R_x / \Omega$
450	284	506	127,800	561,265
597	225	314	134,325	716,561

Nun werden zwei variable Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  eingebaut, die beide eine Toleranz von 3 % besitzen. Für die Kapazität  $C_4$  und den festen Widerstand  $R_2$  kann wieder von einem relativen Fehler 0,2 % ausgegangen werden. Mit (14) lassen sich aus den Werten in Tabelle 4 folgende Ergebnisse bestimmen:

$$L_{x,16} = (131,1 \pm 3,9) \text{ mH} \quad R_{x,16} = (639 \pm 78) \Omega$$

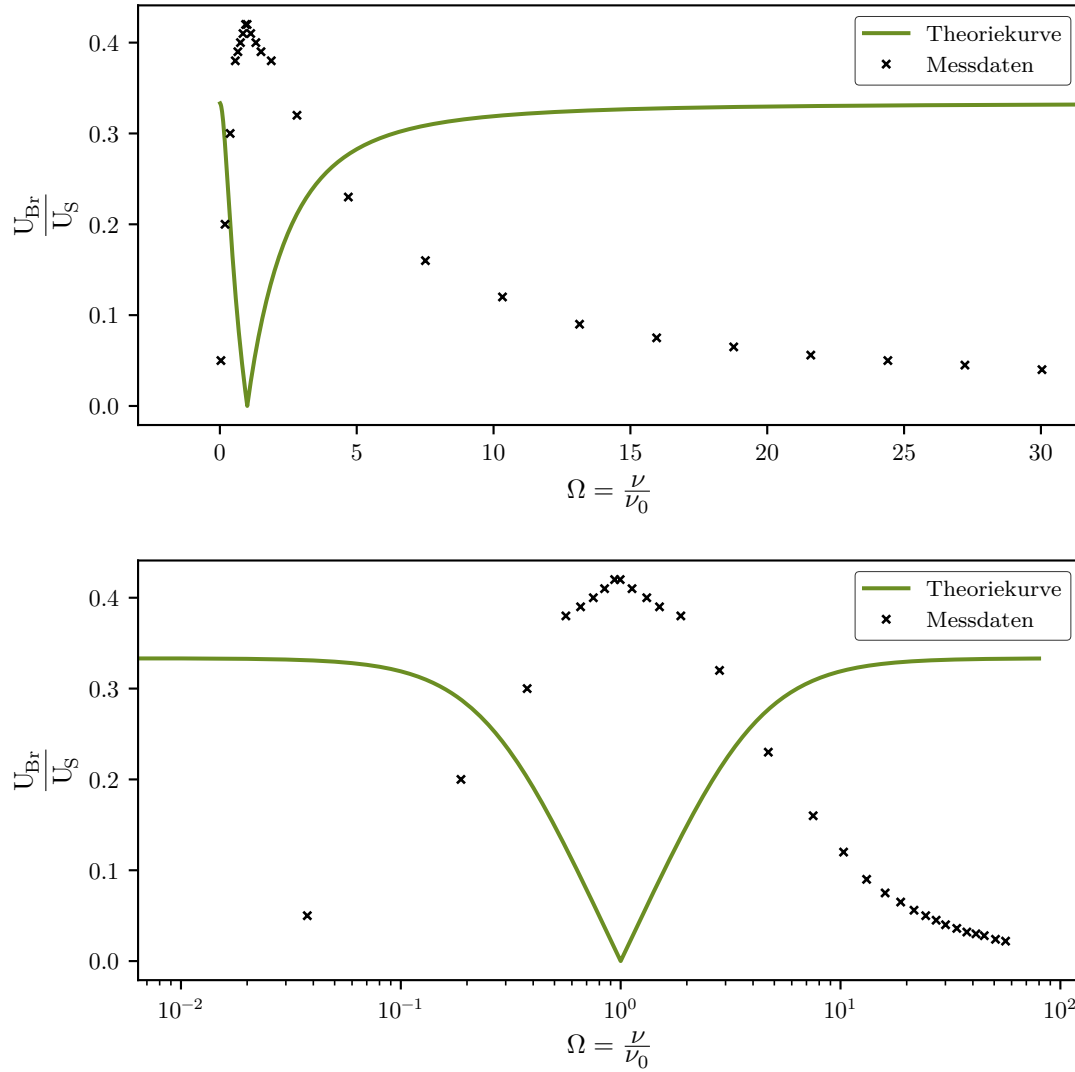
Für die Induktivität fällt die Standardabweichung des Mittelwertes  $\Delta L_{x,16} = 3,3 \text{ mH}$  knapp geringer aus, beim Verlustwiderstand ist wiederum der baubedingte Fehler mit 27  $\Omega$  klar niedriger.

### 4.5 Frequenzverhalten der Wien-Robinson-Brücke

Die in der Schaltung verbauten Komponenten haben die Werte  $R' = 500 \Omega$ ,  $R = 664 \Omega$  und  $C = 450 \text{ nF}$ . Damit ergibt sich folgende Sperrfrequenz:

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = 532,65 \text{ Hz}$$

Unter Betrachtung von Abbildung 7 und Tabelle 5 wird direkt deutlich, dass bei  $\Omega = 1$  ein Extremum liegt, genau wie es nach (16) zu erwarten wäre. Allerdings handelt es sich dabei um ein Maximum statt einem Minimum. Auch global scheinen die Daten eher der Übertragung eines Bandpasses anstelle der eines Sperrfilters zu folgen. Mögliche Gründe dafür werden in Abschnitt 5 diskutiert. Zur Durchführung der anschließenden Rechnungen wird davon ausgegangen, dass die Daten in guter Näherung einer verzerrten Spiegelung der Theoriekurve entsprechen.



**Abbildung 7:** Messdaten mit Theoriekurve zum Frequenzverhalten der Wien-Robinson-Brücke in linearer und halblogarithmischer Skalierung.

**Tabelle 5:** Messdaten zur Untersuchung des Frequenzverhaltens einer Wien-Robinson-Brücke mit  $R' = 500 \Omega$ ,  $R = 664 \Omega$  und  $C = 450 \text{ nF}$ .

$\nu / \text{Hz}$	$U_{\text{Br}} / \text{V}$	$\nu/\nu_0$	$U_{\text{Br}}/U_{\text{S}}$	Theorie
20	0,050	0,04	0,050	0,331
100	0,200	0,19	0,200	0,288
200	0,300	0,38	0,300	0,202
300	0,380	0,56	0,380	0,125
350	0,390	0,66	0,390	0,092
400	0,400	0,75	0,400	0,063
450	0,410	0,84	0,410	0,037
500	0,420	0,94	0,420	0,014
530	0,420	1,00	0,420	0,001
600	0,410	1,13	0,410	0,026
700	0,400	1,31	0,400	0,060
800	0,390	1,50	0,390	0,089
1000	0,380	1,88	0,380	0,136
1500	0,320	2,82	0,320	0,211
2500	0,230	4,69	0,230	0,277
4000	0,160	7,51	0,160	0,309
5500	0,120	10,33	0,120	0,320
7000	0,090	13,14	0,090	0,325
8500	0,075	15,96	0,075	0,328
10 000	0,065	18,77	0,065	0,329
11 500	0,056	21,59	0,056	0,330
13 000	0,050	24,41	0,050	0,331
14 500	0,045	27,22	0,045	0,331
16 000	0,040	30,04	0,040	0,332
18 000	0,036	33,79	0,036	0,332
20 000	0,032	37,55	0,032	0,332
22 000	0,030	41,30	0,030	0,332
24 000	0,028	45,06	0,028	0,333
27 000	0,024	50,69	0,024	0,333
30 000	0,022	56,32	0,022	0,333

#### 4.6 Klirrfaktor des Generators

Um den Klirrfaktor nach (17) zu bestimmen, wird zunächst in erster Approximation angenommen, dass sich die Summe der Oberwellen nur aus der ersten Oberschwingung  $U_1$  mit  $\nu = 2\nu_0$  zusammensetzt. Als übrig bleibende Brückenspannung wird die Differenz aus der gemessenen maximalen Übertragung 0,42 und dem asymptotischen Verhalten der Theoriekurve 0,33 gebildet. Mit einer Speisespannung  $U_{\text{S}} = 1 \text{ V}$  ergibt sich somit

$U_{Br} = 0,09 \text{ V}$ . Dabei ist anzumerken, dass es sich weiterhin immer um die Amplituden der Schwingungen handelt. Das Verhältnis von  $U_{Br}$  und  $U_1$  ergibt sich durch Einsetzen von  $\Omega = 2$  in (16) zu 0,15. Nun kann berechnet werden:

$$U_1 = \frac{0,09 \text{ V}}{0,15} = 0,6 \text{ V}$$

Da die Grundschiwingung  $U_0 = 1 \text{ V}$  entspricht, würde sich für den Generator damit ein Klirrfaktor von  $k = 0,6$  ergeben.

Um dieses Ergebnis unter Berücksichtigung des Gesamtverlaufs der Aufzeichnungen zu prüfen, werden weitere Überlegungen angestellt. Statt einer direkten korrektiven Spiegelung kann vereinfacht angenommen werden, dass sich die tatsächliche Übertragung als Superposition aus den Übertragungsfunktionen von Grundschiwingung und erster Oberschiwingung darstellen lässt. Der Einfluss der letzteren ist dabei um den Klirrfaktor  $k$  abgeschwächt. Aus (16) bildet sich damit folgender Ausdruck:

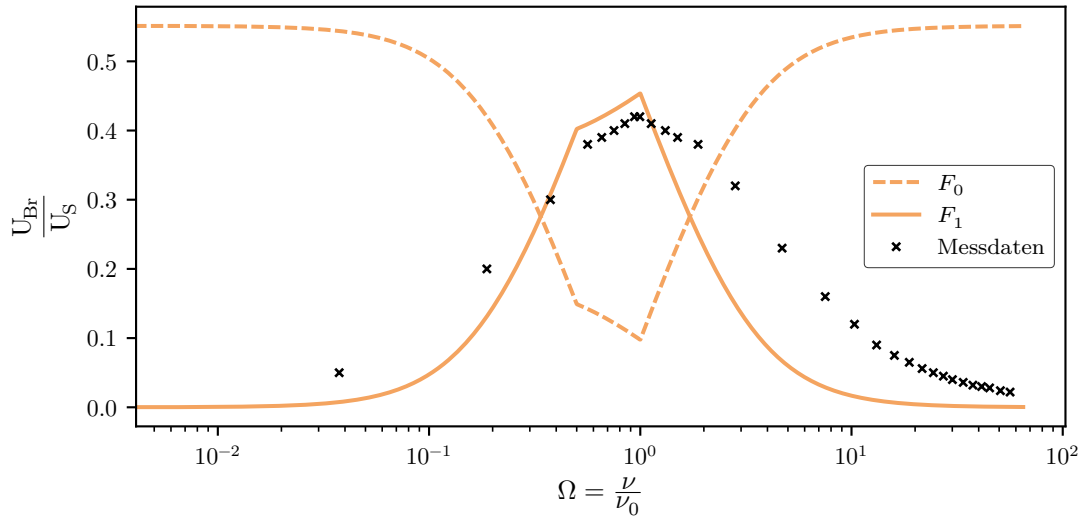
$$F_0 = \frac{1}{3} \left( \left( \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} + k \left( \frac{(4\Omega^2 - 1)^2}{(1 - 4\Omega^2)^2 + 36\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Die Spiegelung  $F_1$  der Gleichung  $F_0$  soll für  $\Omega = 0$  immer Null sein:

$$F_1 = \frac{1}{3} \left( 1 + k - \left( \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} - k \left( \frac{(4\Omega^2 - 1)^2}{(1 - 4\Omega^2)^2 + 36\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Es wird mithilfe von SciPy [5] unter Python [4] eine nichtlineare Regression entlang  $F_1$  auf die Daten in Tabelle 5 angewendet. Dieses Vorgehen liefert mit  $k = 0,65$  einen ähnlichen Klirrfaktor wie zuvor.





**Abbildung 8:** Messdaten und gespiegelte Kurven  $F$  nach Anwendung der nichtlinearen Näherung kleinster Abweichungsquadrate.

## 5 Diskussion

### 5.1 Ausmessen elektronischer Bauteile

Für die Messungen von Widerstand, Kapazität und Induktivität ist durch die rein baubedingten Fehler allgemein davon auszugehen, dass abgeleitete Ergebnisse eine hohe Genauigkeit aufweisen. Bei der Betrachtung der in Abschnitt 4 berechneten Werte fallen jedoch auch einige Ausreißer mit vergleichsweise großen Abweichungen auf. Diese lassen sich teilweise durch unbekannte Größen der Referenzbauteile begründen. Besonders für Induktivitäten lassen sich innere Verlustwiderstände nie ganz vermeiden. Kapazitäten sind davon weniger betroffen. Auch Fluktuationen von Frequenz und Amplitude der Generatorspannung können zu schlecht reproduzierbaren Ergebnissen führen. Nicht zu vernachlässigen ist außerdem, dass durch menschliches Irrtum etwa bei der Einstellung der Spannungsminima fehlerhafte Werte aufgenommen werden können. All diese Faktoren sind für Messgrößen mit größerer statistischer Streuung kompensiert, indem mehrere Messungen durchgeführt werden.

Ein gesonderter Vergleich der klassischen Induktionsmessbrücke 4.3 mit der Maxwell-Brücke 4.4 kann nicht erbracht werden, da das auszumessende Bauteil sich nach dem Umbau der Schaltungen nicht mehr abgleichen lässt. Grund dafür ist wahrscheinlich ein unerkannter Defekt an der Steckverbindung. Erwartet wird hier ein geringerer Fehler unter der Maxwell-Bauweise, da diese statt einer Spule einen Kondensator mit geringerem Wirkwiderstand verwendet.

## 5.2 Untersuchung des Frequenzverhaltens

Die Verarbeitung der Messergebnisse zur Wien-Robinson-Brücke gestaltet sich stark problematisch. Da die Werte genau gegensätzlich zur theoretischen Vorhersage laufen, müssen grobe Annahmen getroffen werden, um überhaupt eine Analyse zu ermöglichen. Der resultierende Klirrfaktor im Bereich von  $k = 0,6$  wird damit unerwartet groß. Ein solcher Oberschwingungsanteil von 60 % kann zudem durch die Erkenntnisse aus den bereits erfolgten Messungen ausgeschlossen werden. Es gilt also, mögliche signifikante Fehlerquellen zu bestimmen. Als erster Anhaltspunkt werden in der Brückenschaltung abweichende Kapazitäten verbaut: Da keine identischen Bauteile zur Verfügung stehen, muss einmal 450 nF durch 420 nF ersetzt werden. Diese Ungenauigkeit kann aber nur das Minimum der Übertragungsfunktion leicht verschieben und ist damit nicht für die Umkehrung der Erwartungswerte verantwortlich. Weiter ist es möglich, dass eine fehlerhafte Einstellung am Oszilloskop die Messdaten verfälscht. Da dieses sowohl zur Einstellung der Speisepannung auf 1 V als auch zum Ablesen der Spannungsverhältnisse dient, lassen sich durch ungenaues Kalibrieren der Auflösung V/div tatsächlich stärkere Abweichungen in der Form der Messverteilung erklären. Allerdings sollte es sich auch dabei nur um Streckungen und Stauchungen handeln, nicht aber um ein vollständiges Umkehren. Für dieses offensichtliche Mängel bleiben noch zwei Ursachen offen:

Am Oszillograph kann eine Erdung gewählt werden, die den beobachteten Effekt eines gespiegelten Betrags hervorrufen würde. Diese Einstellungsänderung müsste aber auch die vorherigen Messungen beeinflussen und ist demnach eher unwahrscheinlich. Als letzte Möglichkeit kann ein Fehler im Schaltungsaufbau aufgetreten sein. Dann würde womöglich das Bandpass-Glied innerhalb der Wien-Robinson-Brücke ausgemessen, dessen Übertragungsfunktion nicht nur gespiegelt ist, sondern auch eine andere Form aufweist. Dass dieses Problem in mehrfach unabhängig aufgebauten und geprüften Versuchen wiederholt auftritt, scheint aber ebenfalls nicht plausibel. Der Ursprung der verkehrten Messreihe bleibt also zunächst ungeklärt.

Alle Informationen sind aus der Versuchsanleitung [1] entnommen. Auch die Schaltbilder sind an die darin enthaltenen Grafiken angelehnt.

## Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 302, Elektrische Brückenschaltungen.*  
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] Charles R. Harris u. a.  
„Array programming with NumPy“.  
In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362.  
DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.  
URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [3] John D. Hunter.  
„Matplotlib: A 2D Graphics Environment“.  
Version 1.4.3.  
In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95.  
DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.  
URL: <http://matplotlib.org/>.  
Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [4] *Python.*  
Version 3.11.0.  
24. Okt. 2022.  
URL: <https://www.python.org>.
- [5] Pauli Virtanen u. a.  
„SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“.  
Version 1.9.3.  
In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272.  
DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.