

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Ben Brüggemann
ben.brueggemann@udo.edu

Durchführung: 15. Dezember 2022

Abgabe: 7. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theorie	2
2.1 Strömungsverhalten Newtonscher Fluide.....	2
2.1.1 Dynamische Viskosität.....	2
2.1.2 Strömungen laminarer und turbulenter Art	3
2.2 Kugelfallmethode im Höppler-Viskosimeter	4
2.3 Fehlerrechnung.....	5
2.4 Lineare Regression	5
3 Durchführung	6
4 Auswertung	7
4.1 Gerätekonstante.....	7
4.2 Viskositätsverlauf	8
4.2.1 Andradesche Gleichung	10
4.2.2 Reynoldssche Zahl	10
5 Diskussion	11
Literatur	12

1 Zielsetzung

Der nachfolgende Versuch dient zur Bestimmung des temperaturabhängigen Verlaufs der Viskosität von destilliertem Wasser. Ein Kugelfallviskosimeter ermöglicht das Aufzeichnen entsprechender Messreihen, welche anschließend nach der Höppler-Methode ausgewertet werden.

2 Theorie

2.1 Strömungsverhalten Newtonscher Fluide [3]

Für Wasser kann im flüssigen Zustand allgemein Inkompressibilität angenommen werden. Daher beschränkt sich die Gültigkeit der folgenden Beschreibung auf Fluide, welche ebenfalls diese Eigenschaften erfüllen. Im ruhenden Zustand besitzt eine solche Flüssigkeit einen makroskopischen Gesamtimpuls von \mathbf{p} gleich Null, wobei die einzelnen Moleküle aufgrund ihrer thermischen Eigenbewegung durchaus mikroskopische Impulse aufweisen. Ist dagegen \mathbf{p} von Null verschieden, so existiert eine Strömung. Diese ist an jedem Ort \mathbf{r} und zu allen Zeitpunkten t durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ beschrieben. Eine stationäre Strömung liegt vor, wenn die Zeitabhängigkeit in $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ wegfällt. In diesem Fall folgt ein Teilchen mit einem Impuls von $d\mathbf{p} = \mathbf{u} dm = \mathbf{u} \rho dV$ den Feldlinien von $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Dieser spezielle Bahnverlauf tritt bei zeitlich variablen Strömungen generell nicht auf. Als Bezeichnung der allgemeinen Ortskurve $\mathbf{r}(t)$ eines Flüssigkeitselements dV wird der Begriff Stromlinie verwendet. Alle $\mathbf{r}(t)$, die durch eine Querschnittsfläche verlaufen, bilden eine Stromröhre. Über die Anzahl der Stromlinien pro Flächeneinheit dA ist die Flussdichte charakterisiert. Die Form der Stromfäden $\mathbf{r}(t)$ wird unter anderem durch innere Reibungsvorgänge zwischen den Flüssigkeitsschichten sowie die Haftreibung entlang der Gefäßwände beeinflusst.

2.1.1 Dynamische Viskosität

In einer idealen Flüssigkeit sind die Reibungskräfte \mathbf{F}_R gegenüber der Wirkung anderer Kräfte vernachlässigbar. Real tritt jedoch meist signifikante Reibung auf. Dies drückt sich als Zähigkeit aus und wird in Pa s oder N s m^{-2} oder $\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$ durch die dynamische Viskosität η bemessen, welche eine für das Medium spezifische Temperaturabhängigkeit aufweist. Mit $\eta = \nu \rho$ besteht über die Dichte ρ zudem ein direkter Zusammenhang zur kinematischen Viskosität ν als verwandte Größe.

2.1.2 Strömungen laminarer und turbulenter Art

Sind die inneren Reibungskräfte einer Flüssigkeit groß gegenüber den beschleunigenden Kräften, so verlaufen die Stromlinien nebeneinander, ohne dass es zu Durchmischung kommt. Eine solche Strömung heißt laminar und ist in Abbildung 1a dargestellt. Für den Fall, dass stattdessen beschleunigende Kräfte überwiegen, entsteht durch Reibung der Randschichten mit den Gefäßwänden eine turbulente Strömung. Dabei bilden sich Wirbel aus, welche die Stromfäden destabilisieren und zunehmend vermengen. Dies lässt sich in Abbildung 1b erkennen.

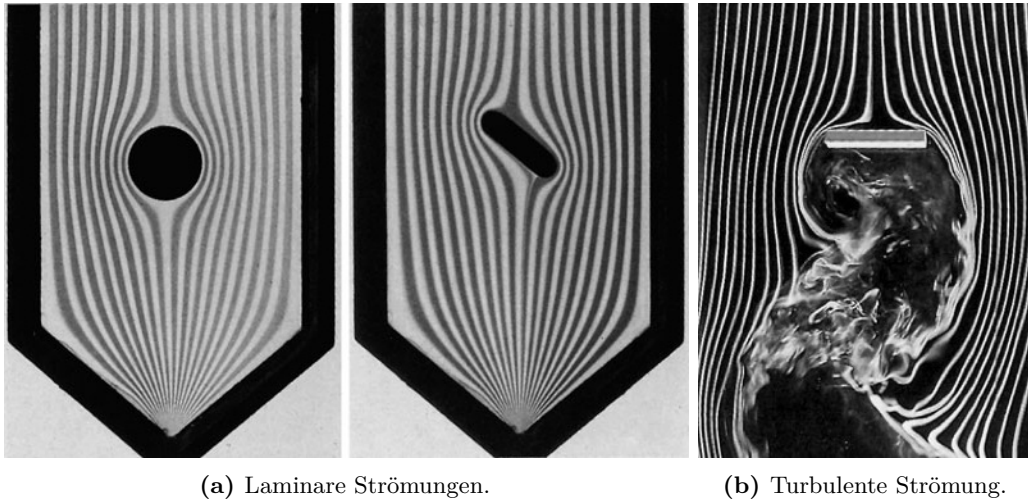


Abbildung 1: Darstellung verschiedener Strömungsverläufe mittels Stromfädenapparat. Einzelne Wasserschichten werden durch Einfärben sichtbar. Der Fluss ist von oben nach unten gerichtet und wird über ein Ventil reguliert. [3]

Der vorliegende Strömungstyp lässt sich über die dimensionslose Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (1)$$

einordnen, wobei v die relative Geschwindigkeit eines Körpers zur Flüssigkeit beschreibt und d einer für das System charakteristischen Länge entspricht. Wird dabei die kritische Reynoldszahl $Re_{\text{krit}} \approx 2300$ überschritten, treten makroskopische Turbulenzen auf. Für Werte weit darunter überwiegt die laminare Strömung.

2.2 Kugelfallmethode im Höppler-Viskosimeter [1]

Im Wesentlichen besteht das Kugelfallviskosimeter aus einem transparenten, mit dem zu untersuchenden Fluid befüllten Zylinder. In diesem befindet sich eine Kugel, deren Radius r vernachlässigbar kleiner als der des Behälters ist. Diese Differenz muss dennoch ausreichen, um die Bildung von Wirbeln zu verhindern. Damit weiterhin ein laminarer Strömungsverlauf gewährleistet ist, wird der Zylinder leicht geneigt, sodass die Kugel an dessen Mantel herabgleiten kann. Der entsprechende Winkel ist in der Fallbeschleunigung g berücksichtigt. Als nach Gleichung (1) geforderte charakteristische Länge gilt in diesem System der Durchmesser $d = 2r$. Nun werden die wirkenden Kräfte beim Fall der Kugel im Fluid betrachtet. Unter der Voraussetzung laminaren Strömverhaltens ist die Reibung

$$F_R = 6\pi\eta vr \quad (2a)$$

gegeben, welche nach Stokes den Einfluss der einzelnen Flüssigkeitsschichten auf die Bewegung der Kugel beschreibt. Zusätzlich setzt die Auftriebskraft

$$F_A = \rho_{\text{fl}} Vg \quad (2b)$$

entgegen der Beschleunigung an, die von der Kugel als Resultat der Gravitation

$$F_G = mg = \rho_{\text{ob}} Vg \quad (2c)$$

erfahren wird. Dabei entspricht v der Sedimentationsgeschwindigkeit, $V = 4/3 \pi r^3$ dient als Bezeichner des Kugelvolumens. Mit den Dichten ρ_{fl} des Fluids und ρ_{ob} des sinkenden Objekts ergibt sich daraus die verdrängte sowie die verdrängende Masse. Nach kurzer Beschleunigungsphase stellt sich die konstante Fallgeschwindigkeit v_0 ein. Dieser Vorgang begründet sich durch das Eintreten eines Kräftegleichgewichtes, welches über

$$F_R + F_A = F_G \quad (3)$$

aufgestellt wird. Durch Umformen und Einsetzen lassen sich die äquivalenten Ausdrücke

$$F_R = F_G - F_A \quad (4a)$$

$$6\pi\eta v_0 r = \rho_{\text{ob}} Vg - \rho_{\text{fl}} Vg \quad (4b)$$

$$\eta = \frac{Vg}{6\pi v_0 r} (\rho_{\text{ob}} - \rho_{\text{fl}}) \quad (4c)$$

schreiben, wobei Fallhöhe x und Fallzeit t über $v_0 = x/t$ verknüpft sind. Zusammenfassen konstanter Größen erlaubt nun, den apparaturspezifischen Proportionalitätsfaktor

$$K \propto K_0 = \frac{Vg}{6\pi r x} \quad (5)$$

zu bestimmen. Die tatsächliche Gerätekonstante K lässt sich auf diesem idealisierten Weg allerdings nicht ermitteln, da weitere Korrekturfaktoren einfließen. Ist K dennoch bekannt, so kann durch Messen der Fallzeit die Viskosität

$$\eta = K (\rho_{\text{ob}} - \rho_{\text{fl}}) t \quad (6)$$

berechnet werden.

Eine temperaturabhängige Form der dynamischen Viskosität wird durch den Term

$$\eta = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (7a)$$

geliefert, die sogenannte Andradesche Gleichung. Mit dem natürlichen Logarithmus folgen

$$\ln(\eta) = \ln(A) + \frac{B}{T} \quad (7b)$$

$$\ln\left(\frac{\eta}{A}\right) = \frac{B}{T} \quad (7c)$$

als zur inversen Temperatur linearisierte Varianten.

2.3 Fehlerrechnung [4]

Um die Abweichung der Messgrößen zu untersuchen, werden noch einige weitere Formeln benötigt. Die Rechenvorschrift für den Mittelwert \bar{x} ist mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (8)$$

gegeben. Zur Bestimmung der Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ kann

$$(\Delta\bar{x})^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \quad (9)$$

verwendet werden. Durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2 \quad (10)$$

ist die Abweichung Δf für von fehlerbehafteten Werten x_n abhängige Größen f definiert.

2.4 Lineare Regression [4]

Entlang der linear abhängigen Messgrößen (x_n, y_n) für $n = 1, \dots, N$ lassen sich über

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} \quad (11)$$

die Parameter der Ausgleichsgerade $y = mx + b$ berechnen.

3 Durchführung

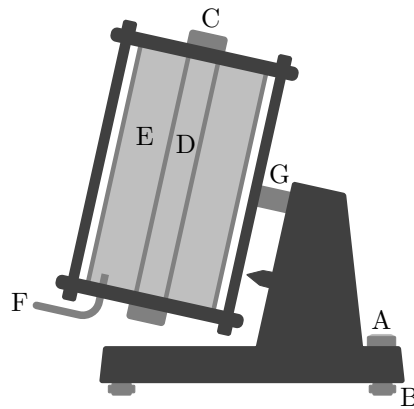


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Messapparatur.

Zunächst werden zwei verschieden große Glaskugeln gewogen und mithilfe einer genormten Bügelmessschraube vermessen. Anschließend wird an der Libelle (A) überprüft, ob die Apparatur horizontal eben steht. Gegebenenfalls kann durch Verstellen der Stützen (B) nachjustiert werden. Über die beidseitigen Schraubverschlüsse (C) wird das Fallrohr (D) des Höppler-Viskosimeters mit bidestilliertem Wasser gefüllt. Umgeben ist dieses von einem Wasserbad (E), welches über die Anschlüsse (F) durch ein Thermostat gespeist wird. So ist für eine stetige Durchmischung sowie ein dadurch gleichmäßiges Temperieren der Flüssigkeit im Fallrohr gesorgt. Die Wassertemperatur lässt sich am Thermostat einstellen und ablesen. Der Reservoirzylinder ist über die Achse (G) mit dem Stativ verbunden und kann frei rotiert werden. Damit keine Luftblasen verbleiben, wird der Aufbau nach Einfüllen der Kugeln jeweils mehrfach gedreht und das Fallrohr entlüftet.

Nun wird nacheinander für kleine und große Kugel jeweils zehnmal die Fallzeit t bei fester Umgebungstemperatur gemessen, indem die Apparatur um 180° gekippt wird. Dazu sind am Zylinder Rasten für die entsprechenden Orientierungen angebracht. Messmarken am Fallrohr kennzeichnen die Fallstrecke x . Es ist darauf zu achten, dass die Kugeln beim Eintritt in den so eingegrenzten Bereich ihre konstante Endgeschwindigkeit v_0 erreicht haben. Aus den gewonnenen Daten und der bereits gegebenen Gerätekonstante K_{kl} der kleinen Kugel lässt sich K_{gr} für die große Kugel bestimmen. Im Anschluss daran wird die Temperatur stufenweise über neun weitere Werte erhöht, die Fallzeit der großen Kugel wird zu jedem Schritt zweimal aufgenommen. Mit dem zuvor bestimmten Faktor K_{gr} lassen sich dann Viskosität des destillierten Wassers und Laminarität der Strömung auswerten.

4 Auswertung

Im folgenden Abschnitt wird die Fehlerrechnung mithilfe der Bibliothek `uncertainties` [7] unter Python [8] automatisiert. Grafische Darstellungen lassen sich mittels Matplotlib [6] erstellen, während NumPy [5] und SciPy [10] die Regressionsrechnung vereinfachen.

Tabelle 1: Messwerte für Durchmesser d und Masse m der Fallkugeln.

KLEINE KUGEL		GROSSE KUGEL	
d / mm	m / g	d / mm	m / g
15,04	4,45	15,76	4,60
15,05	4,44	15,73	4,60
15,01	4,46	15,72	4,60

Zunächst werden die in Tabelle 1 aufgetragenen Messdaten genutzt, um Tabelle 2 unter Berücksichtigung der mit Abweichungen behafteten Ergebnisse zu füllen.

Tabelle 2: Gemittelte Ergebnisse mit Standardabweichung für die Durchmesser d und Masse m sowie die abgeleiteten Größen Volumen V und Dichte ρ .

	d / mm	m / g	V / cm^3	$\rho / \text{g cm}^{-3}$
KLEINE KUGEL	$15,03 \pm 0,02$	$4,45 \pm 0,01$	$1,78 \pm 0,01$	$2,50 \pm 0,01$
GROSSE KUGEL	$15,74 \pm 0,02$	$4,60 \pm 0,00$	$2,04 \pm 0,01$	$2,25 \pm 0,01$

Ein Vergleich der auf diese Art für die kleine Kugel bestimmten Masse mit dem gegebenen Literaturwert von $m_{\text{kl}} = 4,4531 \text{ g}$ [1] zeigt eine gute Übereinstimmung an.

4.1 Gerätekonstante

Tabelle 3 enthält die Zeiten, welche die beiden Kugeln jeweils benötigen, um eine markierte Fallstrecke von $x = 100 \text{ mm}$ zurückzulegen.

Tabelle 3: Fallzeiten der Kugeln bei konstanter Temperatur von $T = 18^\circ\text{C}$.

t / s			
KLEINE KUGEL		GROSSE KUGEL	
12,88	13,19	98,84	99,91
13,00	13,22	99,16	101,56
13,00	13,00	99,56	100,43
13,09	13,19	99,03	101,06
13,09	13,00	99,06	101,35

Um diese Messungen weiter zu verarbeiten, lassen sich die mittleren Fallzeiten

$$t_{\text{kl}} = (13,07 \pm 0,10) \text{ s} \quad t_{\text{gr}} = (100,00 \pm 0,98) \text{ s}$$

bestimmen. Die dynamische Viskosität wird so mit den der Literatur entnommenen Werten $K_{\text{kl}} = 0,0764 \text{ mPa cm}^3 \text{ g}^{-1}$ [1] und $\rho_{\text{fl}} = 0,998\,595 \text{ g cm}^{-3}$ [9] zu $\eta = (1,500 \pm 0,015) \text{ mPa s}$ berechnet. Für die große Kugel folgt daraus unter erneuter Verwendung von Formel (6) die Gerätekonstante $K_{\text{gr}} = 0,012 \text{ mPa cm}^3 \text{ g}^{-1}$.

4.2 Viskositätsverlauf

Mithilfe der großen Kugel wird nun der Temperaturverlauf der Viskosität untersucht. In Tabelle 4 sind dafür zunächst die entsprechenden Fallzeiten über die Höhe x bei verschiedenen Temperaturwerten nachgehalten.

Tabelle 4: Fallzeiten t der großen Kugel unter schrittweiser Erhöhung der Temperatur T .

$T / ^\circ\text{C}$	t / s		$T / ^\circ\text{C}$	t / s		$T / ^\circ\text{C}$	t / s	
21	94,88	93,88	30	79,09	76,28	39	66,47	65,59
24	90,28	87,16	33	74,81	73,69	45	59,22	57,85
27	84,75	83,53	36	70,28	69,54	50	54,87	54,57

Tabelle 5 fasst alle weiterhin benötigten Größen zusammen. Die temperaturspezifische Dichte ρ_{fl} des destillierten Wassers wird als Literaturwert neben der darüber berechneten Viskosität eingetragen. Auch die Fallgeschwindigkeit wird so mitgeführt, da diese zur Bestimmung der Reynoldsschen Zahl nach (1) notwendig ist.

Tabelle 5: Relevante Werte im Bezug auf die große Kugel. Der Verlauf der Viskosität η zur Temperatur T wird mit der Dichte ρ_{fl} aus [9] und der Fallzeit t über (6) erstellt. Mit der zurückgelegten Distanz $x = 100 \text{ mm}$ lassen sich weiter Geschwindigkeit v und damit Reynoldssche Zahl Re bestimmen.

$T / ^\circ\text{C}$	t / s	$\rho_{\text{fl}} / \text{g cm}^{-3}$	$\eta / \text{mPa s}$	$v / \text{mm s}^{-1}$	Re
18	$100,00 \pm 0,98$	0,998 595	$1,500 \pm 0,015$	$1,00 \pm 0,01$	$10,48 \pm 0,15$
21	$94,38 \pm 0,50$	0,997 991	$1,417 \pm 0,021$	$1,06 \pm 0,01$	$11,75 \pm 0,21$
24	$88,72 \pm 1,56$	0,997 295	$1,332 \pm 0,030$	$1,13 \pm 0,02$	$13,28 \pm 0,50$
27	$84,14 \pm 0,61$	0,996 511	$1,264 \pm 0,020$	$1,19 \pm 0,01$	$14,74 \pm 0,30$
30	$77,69 \pm 1,41$	0,995 645	$1,168 \pm 0,027$	$1,29 \pm 0,02$	$17,26 \pm 0,67$
33	$74,25 \pm 0,56$	0,994 700	$1,117 \pm 0,018$	$1,35 \pm 0,01$	$18,87 \pm 0,39$
36	$69,91 \pm 0,37$	0,993 681	$1,053 \pm 0,016$	$1,43 \pm 0,01$	$21,24 \pm 0,38$
39	$66,03 \pm 0,44$	0,992 591	$0,995 \pm 0,016$	$1,51 \pm 0,01$	$23,77 \pm 0,46$
45	$58,53 \pm 0,68$	0,990 208	$0,884 \pm 0,016$	$1,71 \pm 0,02$	$30,11 \pm 0,82$
50	$54,72 \pm 0,15$	0,988 030	$0,828 \pm 0,012$	$1,83 \pm 0,01$	$34,32 \pm 0,52$

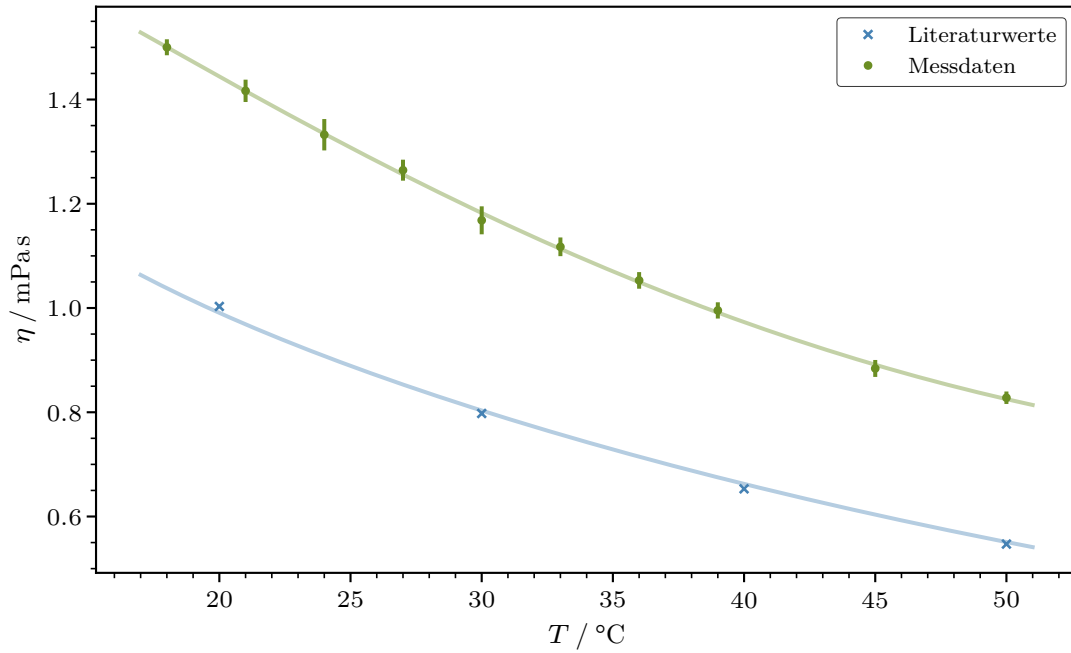


Abbildung 3: Die gemessene Viskosität η wird gegen die Temperatur T aufgetragen. Um einen besseren Vergleich zu ermöglichen, sind einige Literaturwerte nach [2] sowie passende Ausgleichskurven eingefügt.

Der Verlauf der Viskosität ist in Abbildung 3 nachzuvollziehen. Die Modellfunktion

$$\eta = a + \frac{b}{T} + cT + dT^2$$

dient hier als Vorlage für die Regression. Die Parameter werden digital mit der Funktion `scipy.optimize.curve_fit` ermittelt, wobei sich die Fehler aus den Diagonalelementen der Kovarianzmatrix ergeben. Die Messergebnisse sind dann durch die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a &= (2,32 \pm 0,31) \text{ mPa s} & b &= (-1,85 \pm 2,98) \text{ mPa s } ^\circ\text{C} \\ c &= (-0,05 \pm 0,01) \text{ mPa s } ^\circ\text{C}^{-1} & d &= (0,34 \pm 0,10) \text{ } \mu\text{Pa s } ^\circ\text{C}^{-2} \end{aligned}$$

optimal angenähert. Um den Ausgleich entlang der Literaturwerte [2] zu erhalten, werden neun Werte für Temperaturen von 10 °C bis 90 °C in gleichmäßigen Intervallen verwendet. Dies liefert die Parameter

$$\begin{aligned} a &= (1,13 \pm 0,05) \text{ mPa s} & b &= (3,44 \pm 0,40) \text{ mPa s } ^\circ\text{C} \\ c &= (-0,02 \pm 0,00) \text{ mPa s } ^\circ\text{C}^{-1} & d &= (0,09 \pm 0,01) \text{ } \mu\text{Pa s } ^\circ\text{C}^{-2} \end{aligned}$$

zur Minimierung der Fehlerquadrate.

4.2.1 Andradesche Gleichung

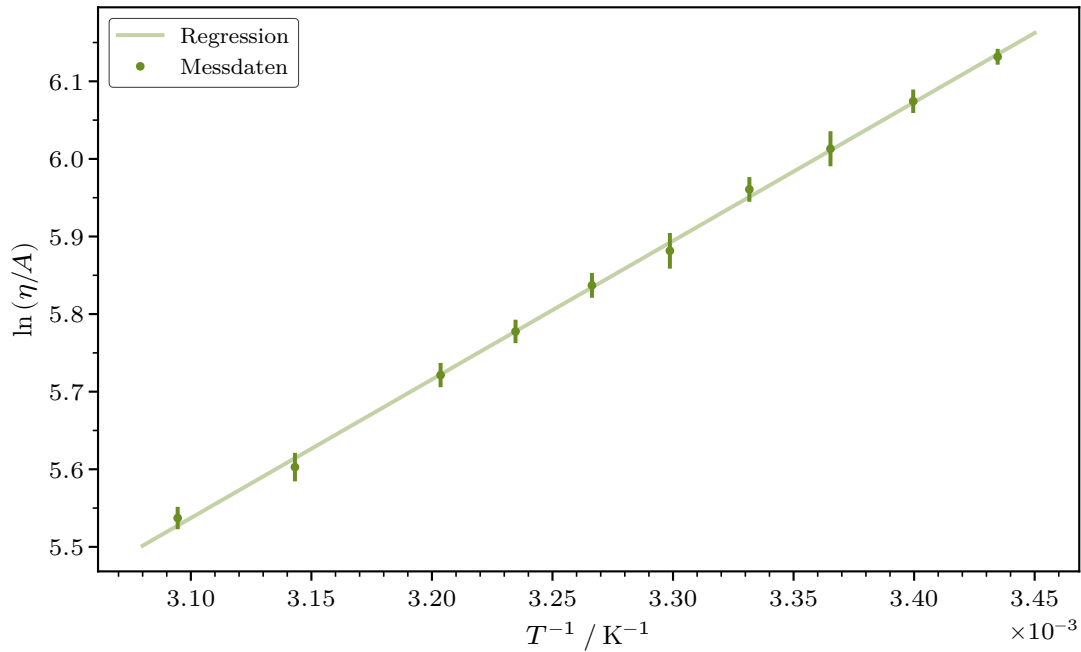


Abbildung 4: Darstellung der Messdaten entlang der linearisierten Andradeschen Gleichung (7c) als Ausgleichsgerade.

Um die Vorfaktoren der linearen Regression nach (11) zu erhalten, wird hier die Funktion `numpy.polyfit` eingesetzt. Damit bestimmen sich die Parameter

$$A = (3,26 \pm 0,24) \mu\text{Pa s}$$

$$B = (1786,18 \pm 22,85) \text{ K}$$

aus einem Modell der Form (7b).

4.2.2 Reynoldssche Zahl

Zuletzt soll an dieser Stelle noch der Strömungstyp anhand der Reynoldsschen Zahl (1) überprüft werden. Die kleine Kugel fällt bei raumtemperaturäquivalenten 18°C mit einer Geschwindigkeit von $v = (7,65 \pm 0,06) \text{ mm s}^{-1}$ und liefert somit ein Ergebnis von $Re = 76,58 \pm 1,34$. Für die große Kugel können die entsprechenden Werte aus Tabelle 5 entnommen werden. Da die kritische Reynoldszahl im Bereich $Re_{\text{krit}} \approx 2300$ liegt, kann davon ausgegangen werden, dass bei diesem Versuch insgesamt nur stabile laminare Strömungen auftreten. Die beobachteten Werte liegen deutlich mehr als eine Größenordnung unterhalb solcher Skalen.

5 Diskussion

Bei Betrachtung der Messergebnisse wird deutlich, dass die Werte eine gute Kompatibilität zum Modell aufweisen. Im Vergleich mit den Literaturwerten treten allerdings signifikante Abweichungen auf. Neben der Ableseungenauigkeit bei der Zeitmessung am Fallrohr des Viskosimeters existieren weitere mögliche Fehlerquellen, welche eher für die um etwa ein Drittel größere ermittelte Viskosität verantwortlich sein können. So fallen beim Vermessen der Kugeln schnell einige Sprünge an deren Oberfläche auf, die reale Verfälschungen in Volumen und Geometrie produzieren. Trotz gleicher Materialien besitzt die große Kugel außerdem eine geringere Dichte als die kleinere. Diese Differenz dürfte nicht allein auf die fehlenden Splitter zurückzuführen sein, lässt sich aber womöglich durch Unreinheiten innerhalb der Objekte erklären. Eine weitere Möglichkeit, Fehler in die Messungen einzuführen, besteht in der geforderten Blasenfreiheit. Diese lässt sich nur visuell prüfen. Schon sehr feine Restbläschen können drastischen Einfluss auf das Resultat der Messungen haben. Auch beim Drehen der Apparatur könnten Variationen auftreten, da die Raste nicht immer greift. Eine letzte plausible Begründung stellt das kontinuierliche Erhitzen am Thermostat dar. Durch eine recht grobe Einstellung ist nicht garantiert, dass die momentane mit der nachgehaltenen Temperatur übereinstimmt. Dies sollte allerdings nur zu leichten statistischen Ausreißern führen und im Mittel wegfallen. Turbulenzen können wegen der niedrigen Reynoldsschen Zahlen weitestgehend ausgeschlossen werden.

Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 207, Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler.*
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] Walter Blanke.
„Verschiedene Eigenschaften von Wasser und Wasserdampf bei 0,1 MPa“.
In: Friedrich Kohlrausch.
Praktische Physik.
24. Aufl. Bd. 1.
Teubner, 1996.
Kap. 3: Wärme, S. 351.
- [3] Wolfgang Demtröder.
„Strömende Flüssigkeiten und Gase“.
In:
Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme.
9. Aufl.
Springer-Lehrbuch.
Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2021.
Kap. 8.
ISBN: 978-3-662-62728-0.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62728-0>.
- [4] *Formelsammlung zur Berechnung von Messunsicherheiten.*
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [5] Charles R. Harris u. a.
„Array programming with NumPy“.
In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362.
DOI: [10.1038/s41586-020-2649-2](https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2).
URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [6] John D. Hunter.
„Matplotlib: A 2D Graphics Environment“.
Version 1.4.3.
In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95.
DOI: [10.1109/MCSE.2007.55](https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55).
URL: <http://matplotlib.org/>.
Current version 3.6.2, DOI: [10.5281/zenodo.7275322](https://doi.org/10.5281/zenodo.7275322).
- [7] Eric O. Lebigot.
Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.
Version 2.4.6.1.
URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [8] *Python.*
Version 3.11.0.
24. Okt. 2022.
URL: <https://www.python.org>.
- [9] Frank Spieweck.
„Dichte von luftfreiem Wasser bei 101,325 kPa als Funktion der Celsius-temperatur“.
In: Friedrich Kohlrausch.
Praktische Physik.
24. Aufl. Bd. 1.
Teubner, 1996.
Kap. 3: Wärme, S. 349–350.
- [10] Pauli Virtanen u. a.
„SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“.
Version 1.9.3.
In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272.
DOI: [10.1038/s41592-019-0686-2](https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2).