

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Durchführung: 13. Dezember 2022
Abgabe: 20. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Relaxationsvorgänge	2
1.2	Kondensatorladung	2
1.2.1	Entladevorgang	3
1.2.2	Aufladevorgang	3
1.2.3	Zeitkonstante	3
1.3	Periodische Auslenkung	4
1.3.1	Impedanzen	4
1.3.2	Amplitudenverlauf	4
1.3.3	Phasenverschiebung	5
1.4	Integrationsanwendung	5
1.5	Fehlerrechnung	6
1.6	Lineare Regression	6
2	Aufgabe	6
3	Durchführung	7
4	Auswertung	8
4.1	Entladungskurve	8
4.2	Übertragungsfunktion	9
4.3	Phasenverlauf	10
4.4	Integration	12
5	Diskussion	12
	Literatur	13

1 Theorie

1.1 Relaxationsvorgänge

Allgemein bezeichnen Relaxationserscheinungen das nichtoszillatorische Einstellen des Gleichgewichtszustandes eines physikalischen Systems. Unter der Annahme, dass sich die Änderungsrate dabei proportional zur Abweichung von $A(t)$ zum asymptotischen stationären Endzustand A_∞ verhält, lässt sich die Gleichung

$$\frac{dA}{dt} = c(A(t) - A_\infty) \quad (1)$$

mit der Konstante c aufstellen. Integration von (1) über die Zeitpunkte 0 bis t liefert

$$\int_{A_0}^{A(t)} \frac{dA}{A - A_\infty} = \int_0^t c dt' \quad (2a)$$

als entsprechende Operationsvorschrift sowie die äquivalente Formulierung

$$\ln \frac{A(t) - A_\infty}{A_0 - A_\infty} = ct \quad (2b)$$

für deren Ergebnis. Durch Auflösen nach der Größe $A(t)$ ergibt sich damit der Ausdruck

$$A(t) = A_\infty + (A_0 - A_\infty) \exp(ct) \quad (2c)$$

zur Beschreibung des Systems. Aus (2c) folgt noch $c < 0$, sodass $A(t)$ beschränkt ist.

1.2 Kondensatorladung

Mit dem Ladungsträgerstrom I und der lokalen Ladung Q gilt die Beziehung

$$dQ = -I dt \quad (3)$$

an jedem Punkt in der Schaltung. Nach dem ohmschen Gesetz kann außerdem

$$U = RI \quad (4)$$

geschrieben werden, wobei die Spannung U am Widerstand R abfällt. Daraus folgt dann

$$U = \frac{Q}{C} = RI = -R \frac{dQ}{dt} \quad (5a)$$

als Differentialgleichung am Kondensator der Kapazität C . Umgeschrieben in die Form

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q \quad (5b)$$

entspricht dies nach (2c) dem Zusammenhang

$$Q(t) = Q_\infty + (Q_0 - Q_\infty) \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right) \quad (6)$$

für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorladung.

1.2.1 Entladevorgang

Bei der Entladung fällt die anfängliche Ladung Q_0 gegen $Q_\infty = 0$ ab. Laut (6) ist dann

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right) \quad (7a)$$

gegeben. Gleichzeitig lässt sich mit $Q = CU$ und $Q_0 = CU_0$ der Ausdruck

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right) \quad (7b)$$

für die Kondensatorspannung aufstellen.

1.2.2 Aufladevorgang

Anders als zuvor ist der Kondensator mit $Q_0 = 0$ zunächst entladen. Unter der angelegten Gleichspannung U_0 gilt $Q_\infty = CU_0$ als aufgeladener Endzustand. Einsetzen in (6) liefert

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right)\right) \quad (8a)$$

zur Beschreibung der Ladung. Weiter definiert der Term

$$U(t) = U_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right)\right) \quad (8b)$$

den entsprechenden Spannungsverlauf.

1.2.3 Zeitkonstante

Mit $\tau = RC$ ist die charakteristische Zeitkonstante des RC-Kreises bezeichnet. Diese bemisst die Geschwindigkeit, mit welcher das System gegen den Endzustand strebt.

1.3 Periodische Auslenkung

Wird nun stattdessen eine periodische Generatorspannung der Gestalt $U_{\text{in}} = U_0 \cos(\omega t)$ mit einer Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ angelegt, bietet sich die Durchführung einer komplexen Wechselstromrechnung an.

1.3.1 Impedanzen

Mit der imaginären Einheit i kann die Gesamtimpedanz der Schaltung als

$$Z_{RC} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C} \quad (9)$$

zusammengefasst werden. Dabei entspricht der reale Term Z_R dem verbauten ohmschen Wirkwiderstand. Der Blindwiderstand des Kondensators ist mit Z_C angegeben. Weiter gilt

$$U = ZI \quad (10)$$

als verallgemeinerter Zusammenhang zwischen Spannung, Impedanz und Stromstärke. Speziell folgen aus (10) die Proportionalitäten $U_{\text{in}} \propto Z_{RC}$ für die Eingangsspannung und $U_{\text{out}} \propto Z_C$ für jene Spannung, die am Kondensator abfällt. Durch (9) lässt sich mit

$$H = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{Z_C}{Z_{RC}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (11)$$

schließlich das Übertragungsverhältnis aufstellen.

1.3.2 Amplitudenverlauf

Aus Gleichung (11) ist die betragsmäßige Transmission direkt mit dem Ausdruck

$$|H| = \left| \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} \right| = \frac{|Z_C|}{|Z_{RC}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (12)$$

bestimmt. Die Amplitude U der Kondensatorspannung verläuft dann nach der Beziehung

$$U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (13)$$

in Abhängigkeit zur Kreisfrequenz ω . Demnach bildet der RC-Kreis einen Tiefpass.

1.3.3 Phasenverschiebung

Konjugiertes Ergänzen von (11) zeigt, dass zusätzlich die Proportionalitätsrelation

$$H \propto 1 - i\omega RC \quad (14)$$

erfüllt ist. Indem aus der Gaußschen Zahlenebene der geometrische Zusammenhang

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\operatorname{Im}(H)}{\operatorname{Re}(H)} = -\omega RC \quad (15)$$

entnommen wird, lässt sich so die Phase $\varphi = \arg(H)$ zwischen U_{in} und U_{out} als

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad (16)$$

definieren. Schließlich folgt nach Einsetzen von (15) in (13) noch

$$U(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}} U_0 = \cos(\varphi) U_0 \quad (17)$$

als phasenabhängiger Ausdruck für die Amplitudenspannung.

1.4 Integrationsanwendung

Bei Eingangsspannungen mit $\omega \gg \tau^{-1}$ läuft Z_C gegen Null. Dann kann die Näherung

$$U_{\text{in}} = ZI = Z_R I = RI = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dU_{\text{out}}}{dt} \quad (18a)$$

aus (10) hergeleitet werden. Integrieren von 0 bis t liefert die Beziehung

$$U_{\text{out}} = \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{in}} dt' \quad (18b)$$

für den RC-Kreis. Dieser beschreibt somit einen Integrator hochfrequenter Signale.

1.5 Fehlerrechnung

Um die Abweichung der Messgrößen zu untersuchen, werden noch einige weitere Formeln benötigt. Die Rechenvorschrift für den Mittelwert \bar{x} ist mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (19)$$

gegeben. Zur Bestimmung der Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ kann

$$(\Delta\bar{x})^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \quad (20)$$

verwendet werden. Durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2 \quad (21)$$

ist die Abweichung Δf für von fehlerbehafteten Werten x_n abhängige Größen f definiert.

1.6 Lineare Regression

Entlang der linear abhängigen Messgrößen (x_n, y_n) für $n = 1, \dots, N$ lassen sich über

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} \quad (22)$$

die Parameter der Ausgleichsgerade $y = mx + b$ berechnen.

2 Aufgabe

Zielsetzung dieser Versuchsreihe ist die Untersuchung des Verhaltens eines RC-Kreises in Abhängigkeit von Zeit, Frequenz und Phase. Speziell soll anhand der beobachteten Beziehungen die Zeitkonstante τ bestimmt werden. Dazu werden entsprechende Messungen durchgeführt und aufbauend auf den theoretischen Grundlagen ausgewertet.

3 Durchführung

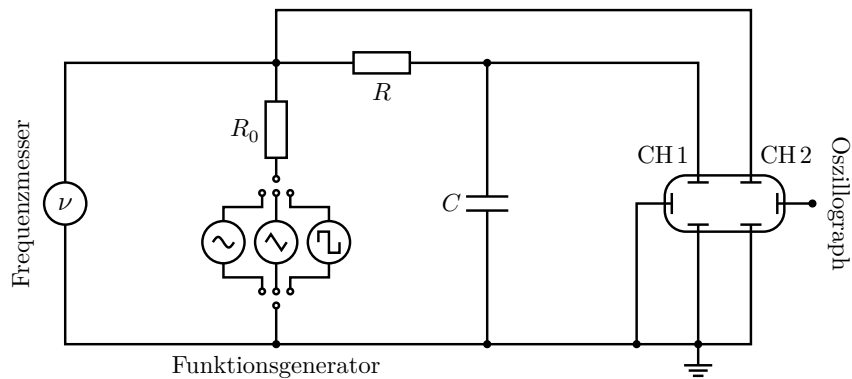


Abbildung 1: Veranschaulichendes Schaltbild des Messaufbaus.

Zunächst soll der Entladungsvorgang des Kondensators nach (7b) betrachtet werden. Am Funktionsgenerator in Abbildung 1 wird dazu ein Rechtecksignal eingestellt. Durch Wahl einer ausreichend großen Periode $T \gg \tau$ fällt die Kondensatorspannung am Eingang CH 1 gegen Null ab. Auf diesem Weg lässt sich die Messskala kalibrieren. Anschließend wird unter erhöhter Frequenz ein Druck des Oszilloskopschirms angefertigt, um aus den vom Verlauf abzulesenden Daten die Zeitkonstante τ zu bestimmen. Im Weiteren erlaubt das Abgreifen einer veränderlichen Sinusspannung, über das Transmissionsverhalten (11) auf $\tau = RC$ zu schließen. Die Amplitude der Kondensatorspannung wird hierbei mit den entsprechenden Frequenzen nachgehalten. Darauf folgend ist die Phasenabhängigkeit (16) zu untersuchen. Es werden Verlauf von Eingangsspannung an CH 2 und Ausgangsspannung an CH 1 gemeinsam betrachtet, um daraus die Verschiebung

$$\varphi = \frac{a}{b} 360^\circ \quad (23)$$

mit den Größen a und b nach Abbildung 2 zu erhalten.

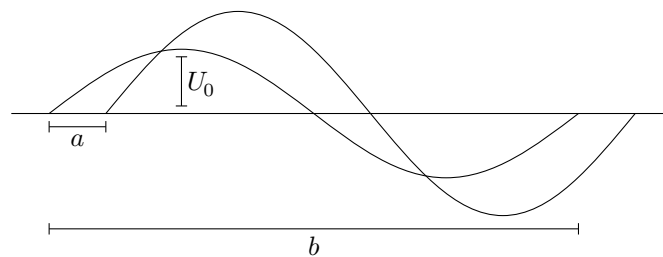


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Oszillographenschirms.

Anhand der so gewonnenen Messwerte wird zur Phase auch eine Polarprojektion des Zusammenhangs (17) vorgenommen. Zuletzt ist noch die Integralfunktion des RC-Gliedes qualitativ anhand verschiedener Signaltypen abgebildet.

4 Auswertung

Der Innenwiderstand des Funktionsgenerators ist mit $R_0 = 600\ \Omega$ angegeben, während sich der Wert für den RC-Kreis zu $R = 11\ \text{k}\Omega$ bemisst. Mit $\tilde{R} = R_0 + R$ ist daher eine weitere Relation zu berücksichtigen. Ausgleichsrechnungen werden mit den Bibliotheken NumPy [3] und SciPy [6] unter Python [5] durchgeführt. Zum Erstellen von Grafiken wird Matplotlib [4] verwendet.

4.1 Entladungskurve

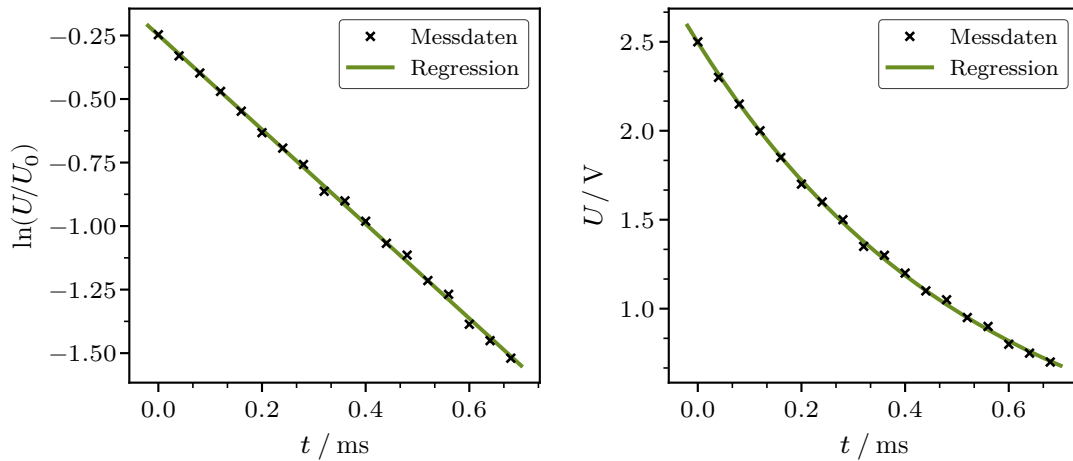


Abbildung 3: Messdaten mit linearisierter Regressionsrechnung.

Der exponentielle Verlauf der Daten in Tabelle 1 kann mit $U_0 = 3,2\ \text{V}$ in die Form

$$\ln \frac{U}{U_0} = vt + w \quad (24)$$

gebracht werden, sodass sich nach (22) mittels `numpy.polyfit` die in Abbildung 3 gezeigte optimale Ausgleichsgerade ermitteln lässt. Die fehlerbehafteten Parameter

$$v = (-1,86 \pm 0,02)\ \text{ms}^{-1} \quad w = -0,25 \pm 0,01$$

folgen aus der automatisch generierten Kovarianzmatrix, indem die Quadratwurzeln der Diagonalelemente berechnet werden. Der Wert $RC = -v^{-1} = (538,1 \pm 4,5)\ \mu\text{s}$ ergibt sich somit als Maß der Zeitkonstante.

Tabelle 1: Abgelesene Daten aus dem zeitlichen Verlauf der Entladung.

t / ms	U / V	U/U_0	$\ln(U/U_0)$	t / ms	U / V	U/U_0	$\ln(U/U_0)$
0,00	2,50	0,78	-0,25	0,36	1,30	0,41	-0,90
0,04	2,30	0,72	-0,33	0,40	1,20	0,37	-0,98
0,08	2,15	0,67	-0,40	0,44	1,10	0,34	-1,07
0,12	2,00	0,62	-0,47	0,48	1,05	0,33	-1,11
0,16	1,85	0,58	-0,55	0,52	0,95	0,30	-1,21
0,20	1,70	0,53	-0,63	0,56	0,90	0,28	-1,27
0,24	1,60	0,50	-0,69	0,60	0,80	0,25	-1,39
0,28	1,50	0,47	-0,76	0,64	0,75	0,23	-1,45
0,32	1,35	0,42	-0,86	0,68	0,70	0,22	-1,52

4.2 Übertragungsfunktion

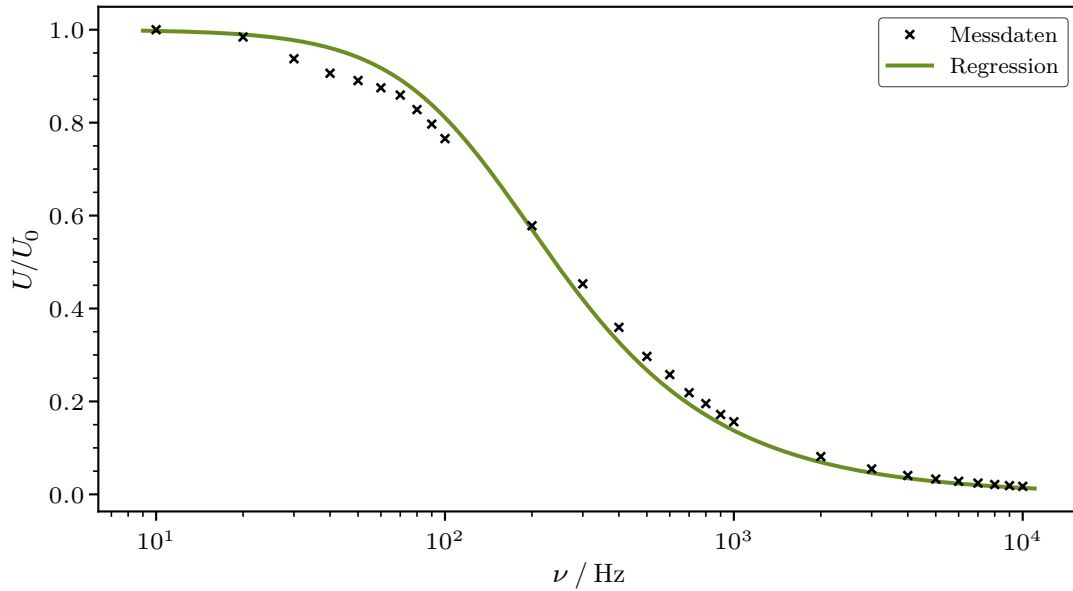


Abbildung 4: Messdaten mit nichtlinearer Näherungsrechnung.

Für den frequenzabhängigen Amplitudenverlauf (13) wird `scipy.optimize.curve_fit` als generalisierte Alternative zum vorherigen Vorgehen mit $U_0 = 640 \text{ mV}$ genutzt. Zu den Werten aus Tabelle 2 ergibt sich so der Verlauf in Abbildung 4 sowie der Parameter $\tilde{RC} = (1148,2 \pm 35,7) \mu\text{s}$. Die Korrektur für den Innenwiderstand R_0 lautet

$$R = \frac{11}{11,6} \tilde{R}$$

und liefert dann die Zeitkonstante $RC = (1088,9 \pm 33,9) \mu\text{s}$.

Tabelle 2: Aufgenommene Messdaten unter Variation der Frequenz.

ν / Hz	U / mV	U/U_0	ν / Hz	U / mV	U/U_0
10	640	1,000	600	165	0,258
20	630	0,984	700	140	0,219
30	600	0,938	800	125	0,195
40	580	0,906	900	110	0,172
50	570	0,891	1000	100	0,156
60	560	0,875	2000	52	0,081
70	550	0,859	3000	35	0,055
80	530	0,828	4000	26	0,041
90	510	0,797	5000	21	0,033
100	490	0,766	6000	18	0,028
200	370	0,578	7000	16	0,024
300	290	0,453	8000	14	0,021
400	230	0,359	9000	12	0,019
500	190	0,297	10 000	11	0,017

4.3 Phasenverlauf

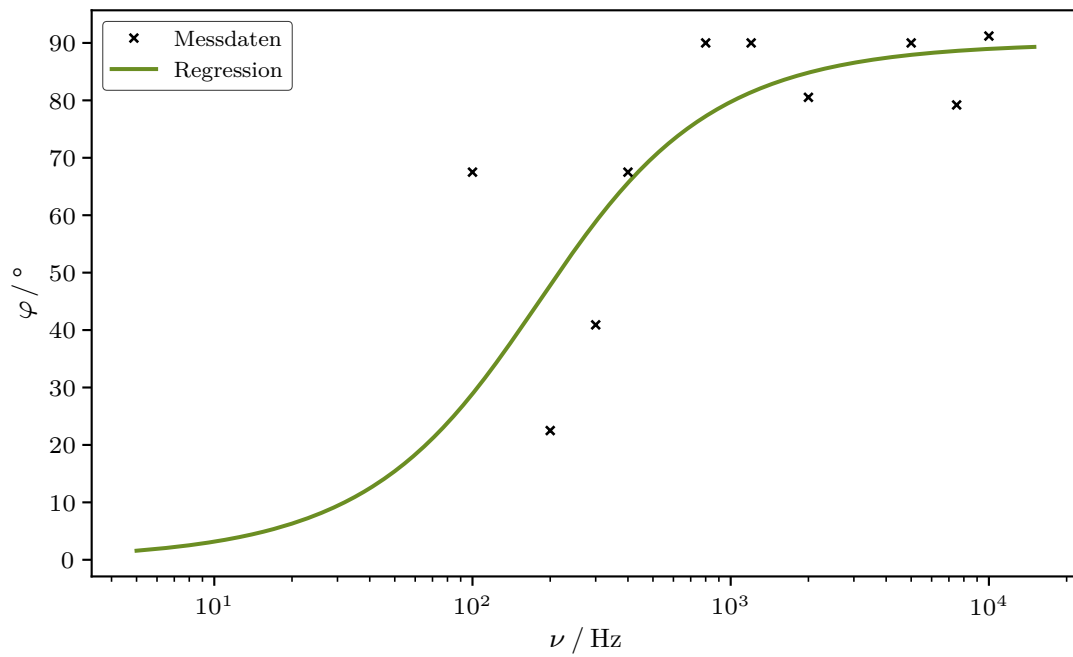


Abbildung 5: Messdaten mit nichtlinearer Näherungsrechnung.

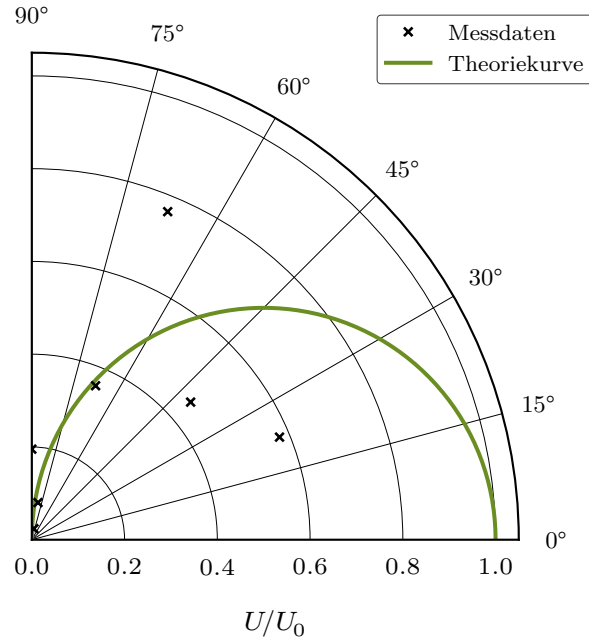


Abbildung 6: Theoriekurve mit Messwerten.

Die Messwerte in Tabelle 3 werden zunächst für Phasensprünge korrigiert. Unter analoger Anwendung von `scipy.optimize.curve_fit` folgen daraus die Regressionskurve (16) in Abbildung 5 mit dem charakteristischen Parameter $\tilde{RC} = (878,5 \pm 295,2) \mu\text{s}$ sowie der korrigierte Wert $RC = (833,0 \pm 280,0) \mu\text{s}$ als Zeitkonstante. Abbildung 6 stellt dann noch den phasenbedingten Amplitudenverlauf nach Vorschrift (17) dar.

Tabelle 3: Aufgenommene Messdaten unter Variation der Frequenz.

ν / Hz	\tilde{a} / ms	\tilde{b} / ms	\tilde{a}/\tilde{b}	a/b	$\varphi / ^\circ$	φ / rad
100	0,600	3,200	0,187	0,187	67,5	1,178
200	0,500	1,600	0,312	0,062	22,5	0,393
300	0,400	1,100	0,364	0,114	40,9	0,714
400	0,300	1,600	0,187	0,187	67,5	1,178
800	0,200	0,800	0,250	0,250	90,0	1,571
1200	0,150	0,600	0,250	0,250	90,0	1,571
2000	0,090	0,190	0,474	0,224	80,5	1,405
5000	0,036	0,144	0,250	0,250	90,0	1,571
7500	0,022	0,100	0,220	0,220	79,2	1,382
10 000	0,019	0,075	0,253	0,253	91,2	1,592

4.4 Integration

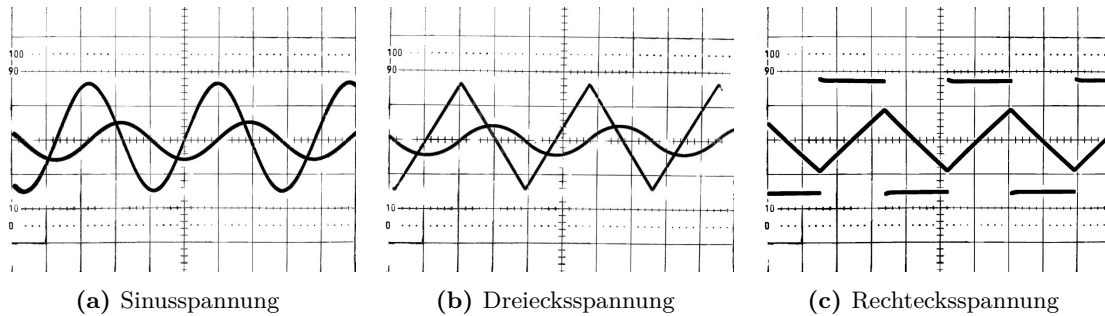


Abbildung 7: Integration verschiedener Eingangssignale am RC-Glied.

Anhand der Spannungsverläufe in Abbildung 7 lässt sich exemplarisch die Anwendung als Integrationsglied nach (18b) erkennen. Angelegt ist dazu eine Frequenz von $\nu = 10 \text{ kHz}$.

5 Diskussion

Insgesamt liegen die resultierenden Werte der verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der Zeitkonstante zwar innerhalb einer Größenordnung, weisen aber dennoch signifikante Abweichungen auf. So liefert die Entladungskurve $RC = (538,1 \pm 4,5) \mu\text{s}$ als das kleinste Ergebnis mit dem geringsten Relativfehler zum Modell. Dies ist darin begründet, dass anhand des Oszillographenschirms sehr genau Punkte abgelesen werden können. Die große Differenz zu den anderen Methoden kann durch einen unbekannten Fehler in der Feinskalierung erklärt werden. So liefert eine plausible Abweichung der Skala von nur $0,125 \text{ ms}$ bereits die Grenzen $(403,5 \pm 3,4) \mu\text{s} \leq RC \leq (672,6 \pm 5,6) \mu\text{s}$. Dagegen erscheint der Amplitudenverlauf robuster, da die Zeitkonstante $RC = (1088,9 \pm 33,9) \mu\text{s}$ hier nicht durch eine potenziell ungenaue Skalierung der Apparatur beeinflusst wird. Als einzige Annahme ist die Näherung $U_0 = 640 \text{ mV}$ als Messwert bei der niedrigsten Frequenz $\nu = 10 \text{ Hz}$ gegeben. Die Eingangsamplitude am Funktionsgenerator bleibt ebenfalls über ein breites Frequenzspektrum stabil. Zuletzt wird durch die Abweichung von $RC = (833,0 \pm 280,0) \mu\text{s}$ aus dem Phasenverlauf klar, dass die Messungen stark streuen. Tatsächlich kann für diese Daten insgesamt von einer schlechten Qualität ausgegangen werden, da das Verhalten zum Triggern des Oszilloskops nicht konsistent gesetzt wird und es somit zu Sprüngen kommt. Diese Fehler werden auch im Polarplot deutlich. Abschließend dient die Betrachtung der integrierten Signale noch als Bestätigung der hierzu postulierten Beziehung.

Alle theoretischen Grundlagen sind den Versuchsanleitungen [1,2] entnommen. Auch die Schaltkizze sowie der schematische Spannungsverlauf sind an darin enthaltene Grafiken angelehnt.

Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 302, Elektrische Brückenschaltungen.*
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] *Anleitung zu Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises.*
TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [3] Charles R. Harris u. a.
„Array programming with NumPy“.
In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362.
DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [4] John D. Hunter.
„Matplotlib: A 2D Graphics Environment“.
Version 1.4.3.
In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95.
DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
URL: <http://matplotlib.org/>.
Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [5] *Python.*
Version 3.11.0.
24. Okt. 2022.
URL: <https://www.python.org>.
- [6] Pauli Virtanen u. a.
„SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“.
Version 1.9.3.
In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272.
DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.