

V46

Der Faraday-Effekt

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Amelie Strathmann
amelie.strathmann@udo.edu

Durchführung: 15. April 2024
Abgabe:

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theorie	2
2.1 Bandstruktur	2
2.2 Dotierung	4
2.3 Faraday-Effekt	5
2.3.1 Zirkulare Doppelbrechung	5
2.3.2 Rotationswinkel	9
3 Aufbau	11
4 Durchführung	12
5 Auswertung	12
5.1 Magnetfeld	12
5.2 Faraday-Rotation.....	12
5.2.1 Dotierte Proben	12
5.2.2 Reine Probe	12
5.3 Effektive Masse	12
6 Diskussion	12
Literatur	12
Anhang	14

1 Zielsetzung

Im diesem Versuch soll die Faraday-Rotation ausgenutzt werden, um die effektive Masse der Leitungselektronen in negativ dotiertem Galliumarsenid (n-GaAs) zu bestimmen.

2 Theorie [1]

Nichtrelativistische Quantensysteme werden durch die Schrödingergleichung beschrieben. Die Dynamik eines Teilchens der Masse m im Zustand Ψ nimmt dann die Form

$$E\Psi = H\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + V\Psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Psi + V\Psi$$

an, wobei E die Energie, p den Impuls und k die Wellenzahl beschreiben. Mit \hbar wird die reduzierte Planckkonstante bezeichnet. Für den freien Grenzfall mit verschwindendem Potential V weisen Energieeigenzustände demnach eine parabolische Dispersion

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1a)$$

auf. Im für die in Festkörpern auftretende Gitterperiodizität konzipierten reduzierten Zonenschema folgen diese Funktionen den erlaubten Energiebändern der Gitterelektronen. Unter der Annahme freier Elektronen entstehen dann Entartungen am Zonenrand.

2.1 Bandstruktur

Durch die strukturelle Anordnung der Gitteratome wirkt im Festkörper ein periodisches Potential, das für ein Auflösen der Energieentartung der Elektronen sorgt. Stattdessen bilden sich Bandlücken aus, deren Energiebereiche nicht besetzt werden können. Die Beschreibung als freie Teilchen ist nun ebenfalls nicht mehr gültig. Für schwach gebundene Elektronen kann $E(k)$ allerdings um ein Minimum $E'(k_0) = 0$ in k entwickelt werden. Bis zur quadratischen Ordnung ergeben die ersten Glieder der Potenzreihe

$$E(k) \approx E(k_0) + E'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}E''(k_0)(k - k_0)^2 = E(k_0) + \frac{1}{2}E''(k_0)(k - k_0)^2$$

und vereinfachen sich mit der Auswahl $E(k_0) \equiv 0$ und $k_0 \equiv 0$ zu

$$E(k) \approx \frac{1}{2}E''(0)k^2$$

als parabolische Näherung. Dieser Ausdruck lässt sich analog zu (1a) als

$$E(k) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad (1b)$$

formulieren.

An dieser Stelle definieren wir den in (1b) verwendeten Ausdruck

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1} \quad (2)$$

als effektive Masse. Die Interpretation dieser Schreibweise besagt also, dass sich quasi-freie Elektronen in zweiter Ordnung wie freie Ladungsträger mit Masse m^* verhalten. Damit Abweichungen in verschiedene Raumrichtungen vernachlässigbar sind, wird ein hinreichend hoher Grad an Symmetrie vom Kristall gefordert.

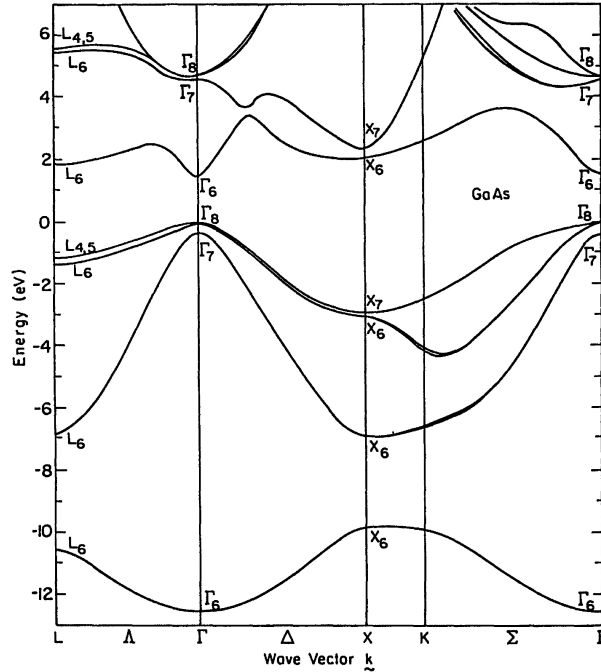


Abbildung 1: Berechnete Bandstruktur von GaAs um die Bandlücke. [2]

Abbildung 1 zeigt exemplarische Bandverläufe für reines GaAs. Neben dem Auftreten von Bandlücken lässt sich auch die lokal parabolische Form der Elektronendispersion deutlich erkennen. Unsere Approximation erscheint damit gerechtfertigt.

Zur Charakterisierung wesentlicher Materialeigenschaften von Festkörpern ist es sinnvoll, die Begriffe Valenzband (VB) und Leitungsband (LB) einzuführen. Bei einer absoluten Temperatur $T = 0$ gibt das VB den höchsten vollständig gefüllten Energiebereich an, während das LB den niedrigsten wenigstens teilweise oder auch vollständig unbesetzten Bereich umfasst. In dieser Betrachtung ist ein Stoff gerade dann leitfähig, wenn sich ausreichend viele Elektronen im LB befinden.

Im gegebenen Kontext sollte zur Einordnung verschiedener Materialklassen außerdem die Fermienergie E_F erwähnt werden. Am absoluten Temperaturnullpunkt sind laut der Fermi-Dirac Verteilung alle niedrigeren Zustände $E < E_F$ besetzt und alle höheren Zustände $E > E_F$ unbesetzt.

Durch Erwärmung wird diese Trennung zunehmend unscharf. Da viele relevante Festkörper eine über die Boltzmannkonstante k_B und $E_F = k_B T_F$ definierte Fermitemperatur T_F weit oberhalb des Schmelzpunktes besitzen, wird $T = 0$ hier als Näherung beibehalten.

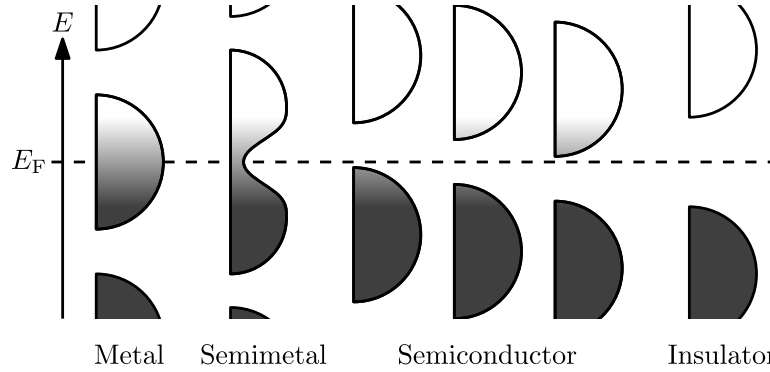


Abbildung 2: Energieschemata verschiedener Materialklassen im Vergleich. [5]

In Abbildung 2 sind einige mögliche Konfigurationen von VB (unten) und LB (oben) in Relation zu E_F schematisch aufgeführt. Für Metalle und Halbmatalle liegt E_F innerhalb des LB, sodass solche Stoffe elektrischen Strom gut leiten. Auf der anderen Seite besitzen Isolatoren eine große Bandlücke von mehreren eV zwischen VB und LB, welche auch E_F enthält. Da selbst für hohe Temperaturen kaum Elektronen das LB erreichen, sind entsprechende Stoffe nichtleitend. Zwischen diesen Kategorien lassen sich die sogenannten Halbleiter einordnen. Sie weisen zwar ebenfalls eine Bandlücke um E_F auf, allerdings fällt diese mit wenigen eV vergleichsweise klein aus. Dank der niedrigeren Energiedifferenz können bereits bei moderaten Temperaturen signifikante Zahlen an Elektronen in das LB aufsteigen, sodass sich die Leitungseigenschaften des Materials leicht ändern lassen.

2.2 Dotierung

Die Kategorie der Halbleiter wird nach Abbildung 2 in drei Unterkategorien eingeteilt. Bei intrinsischen Halbleitern (mittig) handelt es sich um Reinstoffe, welche die zuvor beschriebenen Eigenschaften erfüllen. Daneben kann die Leitfähigkeit von Materie aber auch durch gezieltes Einbringen von Fremdatomen präzise angepasst werden. Ein solches Vorgehen wird Dotierung genannt, die resultierenden Mischstoffe werden je nach Art als Halbleiter vom p-Typ (links) oder n-Typ (rechts) bezeichnet.

Bei der n-Dotierung werden Atome mit Elektronenüberschuss als Donatoren eingebracht. Die zusätzlichen negativen Ladungen besitzen Energien knapp unterhalb des LB, sodass der Abstand zwischen LB und E_F stark reduziert wird.

Zur p-Dotierung werden dagegen Atome mit Elektronendefizit als Akzeptoren verwendet. Die Energien der zusätzlichen als Löcher bezeichneten positiven Ladungen liegen knapp oberhalb des VB, sodass die Lücke zwischen VB und E_F stark reduziert wird.

Beide Methoden steigern die Konduktivität des Halbleiters, indem insgesamt weniger Energie aufzuwenden ist, um Elektronen ins LB zu heben.

2.3 Faraday-Effekt

Der Faraday-Effekt bezeichnet das Auftreten einer Rotation der Polarisationsrichtung von linear polarisierten elektromagnetischen Wellen beim Durchlaufen eines von einem homogenen Magnetfeld durchdrungenen transparenten Festkörpers in Richtung der Feldlinien. Abbildung 3 stellt dieses Phänomen für den allgemeinen Fall dar.

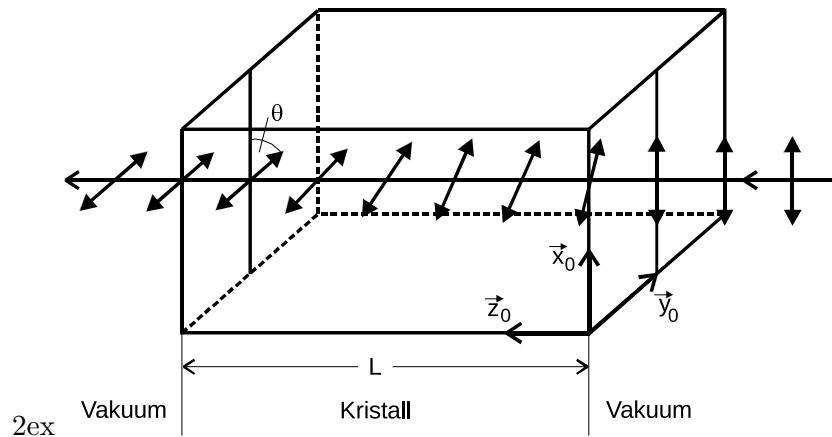


Abbildung 3: Drehung der Polarisationssebene beim Durchgang durch einen Kristall. [1]

2.3.1 Zirkulare Doppelbrechung

Die beobachtete Drehung der Schwingungsebene bei Transmission lässt sich erklären, indem für linksgerichtet und rechtsgerichtet polarisierte Lichtwellen jeweils abweichende Phasengeschwindigkeiten vorausgesetzt werden. Das elektrische Feld lässt sich dann zu

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_R(z) + \mathbf{E}_L(z))$$

zerlegen, wobei die einzelnen Komponenten

$$\mathbf{E}_R(z) = E_0 (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_R z} \quad \mathbf{E}_L(z) = E_0 (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_L z}$$

lauten. Daraus kann beim Eintritt ins Material an der Stelle $z = 0$ direkt

$$\mathbf{E}(0) = E_0 \hat{\mathbf{x}} \quad (3)$$

abgelesen werden.

Nachdem die Länge des Festkörpers L zurückgelegt ist, gibt

$$\mathbf{E}(L) = \frac{1}{2}E_0 \left((e^{ik_R L} + e^{ik_L L}) \hat{\mathbf{x}} + (e^{ik_R L} - e^{ik_L L}) \hat{\mathbf{y}} \right)$$

die Feldstärke an. Durch Einführen der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \frac{L}{2}(k_R + k_L) \\ \theta &\equiv \frac{L}{2}(k_R - k_L) \end{aligned} \tag{4a}$$

lässt sich dieser Term zu

$$\mathbf{E}(L) = \frac{1}{2}E_0 \left((e^{i\psi} e^{i\theta} + e^{i\psi} e^{-i\theta}) \hat{\mathbf{x}} + (e^{i\psi} e^{i\theta} - e^{i\psi} e^{-i\theta}) \hat{\mathbf{y}} \right)$$

umschreiben, mit der eulerschen Formel $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ wird daraus

$$\mathbf{E}(L) = E_0 e^{i\psi} (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}})$$

beim Austritt aus dem Material. Im Vergleich mit (3) wird deutlich, dass es sich hierbei wieder um eine linear polarisierte Welle handelt, die um einen Winkel θ gedreht schwingt.

Mithilfe der Definition für Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k}$$

und Brechungsindex

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega}$$

lässt sich (4a) als

$$\theta = \frac{L\omega}{2c}(n_R - n_L) \tag{4b}$$

formulieren. Dabei beschreibt c die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Zirkulare Doppelbrechung tritt als Konsequenz induzierter elektrischer Dipolmomente auf, die eine makroskopische Gesamtpolarisation \mathbf{P} erzeugen. Für kleine Feldstärken \mathbf{E} kann diese mit der Influenzkonstanten ε_0 über $\mathbf{P} \approx \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi} \mathbf{E}$ aufgestellt werden. Im isotropen Medium wird die dielektrische Suszeptibilität χ skalar, für den anisotropen Fall muss sie als Tensor aufgefasst werden. Bei ordinärer Brechung gibt

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

die Schreibweise von $\boldsymbol{\chi}$ als diagonale Matrix nach Hauptachsentransformation an.

Um Doppelbrechung zu erzeugen, muss χ die Form einer nichtdiagonalen hermiteschen Matrix annehmen. Der einfachste Fall ist mit

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{xy} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei gleichartige Brechung in der Normalenebene zur Ausbreitungsrichtung angesetzt wird. Im folgenden zeigen wir, dass aus dieser Formulierung verschiedene Wellenvektoren für beide Polarisationsanteile folgen.

Zur Beschreibung der Welle in Materie wird die dielektrische Verschiebung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \approx \varepsilon_0 (\mathbf{1} + \chi) \mathbf{E} \quad (5)$$

verwendet. Weiter ergibt sich aus den Maxwellgleichungen sowie der Relation zwischen magnetischer Flussdichte \mathbf{B} und Feldstärke \mathbf{H}

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

und indem (5) verwendet wird

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \approx -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \approx -\varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{1} + \chi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} (\mathbf{1} + \chi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

unter Vernachlässigung der Stromdichte \mathbf{j} gegenüber der Änderung der Polarisierung. Mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

folgt nach Ausführen der Differentialoperatoren

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \approx -\frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{1} + \chi) \mathbf{E} \quad (6)$$

als Näherungsergebnis. Durch Koordinatenwahl

$$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{z}}$$

und

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$$

kann außerdem

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -k^2 (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}) \quad (7)$$

für die linke Seite von (6) geschrieben werden.

Ausführen des Matrixprodukts liefert

$$\chi \mathbf{E} = (\chi_{xx} E_x + i\chi_{xy} E_y) \hat{\mathbf{x}} + (\chi_{xx} E_y - i\chi_{xy} E_x) \hat{\mathbf{y}} + \chi_{zz} E_z \hat{\mathbf{z}} \quad (8)$$

für die rechte Seite von (6) und erlaubt für die Komponente in Ausbreitungsrichtung

$$\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{zz}) E_z = 0 \quad (9)$$

direkt die Aussage, dass die Welle wegen

$$E_z = 0 \quad (10)$$

transversal schwingt. Die orthogonalen Komponenten können als homogenes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) - k^2 & i\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xy} \\ i\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xy} & -\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

zusammengefasst werden. Damit dieses eine nichttriviale Lösung besitzt, muss zwingend die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$0 = -\det \mathbf{C} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) - k^2 \right)^2 + i^2 \frac{\omega^4}{c^4} \chi_{xy}^2 \quad (12)$$

verschwinden. Es ergeben sich zwei Lösungen für die Wellenzahl

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{xx} \pm \chi_{xy}} \quad (13)$$

und somit

$$v_L^R = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx} \pm \chi_{xy}}} \quad (14)$$

für die Phasengeschwindigkeit.

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx}}} \quad (15)$$

$$E_{x_L}^R = \pm i E_y \quad (16)$$

$$\theta = \frac{L}{2} (k_+ - k_-) = \frac{L\omega}{2c} \left(\sqrt{1 + \chi_{xx} + \chi_{xy}} - \sqrt{1 + \chi_{xx} - \chi_{xy}} \right) \quad (17)$$

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2c\sqrt{1 + \chi_{xx}}} \chi_{xy} = \frac{L\omega v}{2c^2} \chi_{xy} = \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy} \quad (18)$$

2.3.2 Rotationswinkel

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + K \mathbf{r} = -e_0 \mathbf{E} - e_0 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B} \quad (19)$$

$$\mathbf{E} \sim \mathbf{r} \sim e^{-i\omega t} \quad (20)$$

$$-m\omega^2 \mathbf{r} + K \mathbf{r} = -e_0 \mathbf{E} + ie_0 \omega \mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (21)$$

$$\mathbf{P} = -Ne \mathbf{r} \quad (22)$$

$$-m\omega^2 \mathbf{P} + K \mathbf{P} = Ne^2 \mathbf{E} + ie_0 \omega \mathbf{P} \times \mathbf{B} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}} \quad (24)$$

$$(K - m\omega^2) P_x = Ne_0^2 E_x + ie_0 \omega P_y B \quad (25)$$

$$(K - m\omega^2) P_y = Ne_0^2 E_y - ie_0 \omega P_x B \quad (26)$$

$$(K - m\omega^2) P_z = Ne_0^2 E_z \quad (27)$$

$$\varepsilon_0 (K - m\omega^2) (\chi_{xx} E_x + i\chi_{xy} E_y) = Ne_0^2 E_x + i\varepsilon_0 e_0 \omega (i\chi_{yx} E_x + \chi_{xx} E_y) B \quad (28)$$

$$\varepsilon_0 (K - m\omega^2) \chi_{xx} = Ne_0^2 - \varepsilon_0 e_0 \omega \chi_{yx} B \quad (29)$$

$$\varepsilon_0 (K - m\omega^2) \chi_{xy} = \varepsilon_0 e_0 \omega \chi_{xx} B \quad (30)$$

$$(31)$$

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)(i\chi_{yx}E_x + \chi_{xx}E_y) = Ne_0^2E_y - i\varepsilon_0e_0\omega(\chi_{xx}E_x + i\chi_{xy}E_y)B \quad (32)$$

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)\chi_{xx} = Ne_0^2 + \varepsilon_0e_0\omega\chi_{xy}B \quad (33)$$

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)\chi_{yx} = -\varepsilon_0e_0\omega\chi_{xx}B \quad (34)$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} \quad (35)$$

$$\chi_{xy} = \frac{Ne_0^3\omega B}{\varepsilon_0 \left((K - m\omega^2)^2 - (e_0\omega B)^2 \right)} \quad (36)$$

$$\theta \approx \frac{LNe_0^3\omega^2 B}{2\varepsilon_0cn \left((K - m\omega^2)^2 - (e_0\omega B)^2 \right)} = \frac{LNe_0^3\omega^2 B}{2\varepsilon_0cm^2 \left(\left(\frac{K}{m} - \omega^2 \right)^2 - \frac{e_0^2 B^2}{m^2} \omega^2 \right)} \quad (37)$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (38)$$

$$\omega_C \equiv \frac{e_0 B}{m} \quad (39)$$

$$\theta \approx \frac{LNe_0^3\omega^2 B}{2\varepsilon_0cm^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_C^2 \omega^2 \right)} \quad (40)$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \gg \omega_C \omega \quad (41)$$

$$\theta \approx \frac{LNe_0^3\omega^2 B}{2\varepsilon_0cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (42)$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda} \quad (43)$$

$$\omega \ll \omega_0 \quad (44)$$

$$\theta \approx \frac{LN e_0^3 \omega^2 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \omega_0^4} = \frac{2\pi^2 L N e_0^3 c B}{\varepsilon_0 m^2 \lambda^2 \omega_0^4} \quad (45)$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad (46)$$

$$\theta \approx \frac{L N e_0^3 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \omega^2} = \frac{L N e_0^3 \lambda^2 B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2 n} \quad (47)$$

$$\frac{\theta}{L} \approx \frac{N e_0^3 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \omega^2} = \frac{N e_0^3 \lambda^2 B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2 n} \quad (48)$$

3 Aufbau

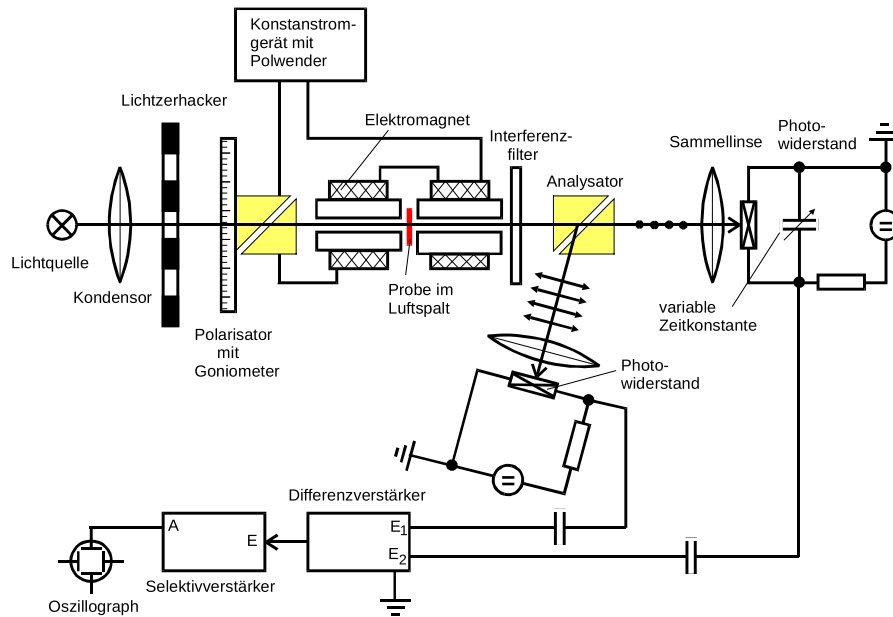


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Messapparatur. [1]

4 Durchführung

5 Auswertung

[4] [3]

5.1 Magnetfeld

5.2 Faraday-Rotation

5.2.1 Dotierte Proben

5.2.2 Reine Probe

5.3 Effektive Masse

6 Diskussion

Literatur

[1] *Anleitung zu Versuch 46, Der Faraday-Effekt.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2024.

- [2] „Band Structure of Gallium Arsenide“. In: Marvin L. Cohen und James R. Chelikowsky. *Electronic Structure and Optical Properties of Semiconductors*. Springer Berlin, Heidelberg, 1988, S. 103. ISBN: 978-3-642-97080-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97080-1>.
- [3] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: <http://matplotlib.org/>. Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [5] *Valence and Conduction Bands*. 2013. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/file:band_filling_diagram.svg.

Anhang