

V21

Optisches Pumpen

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Amelie Strathmann
amelie.strathmann@udo.edu

Durchführung: 6. Mai 2024

Abgabe:

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theorie	2
2.1 Atomare Drehimpulse	2
2.1.1 Hülle	3
2.1.2 Kern	4
2.2 Optisches Pumpen	5
2.3 Zeeman Aufspaltung	7
3 Aufbau	9
4 Durchführung	10
5 Auswertung	10
5.1 Magnetfeld der Erde	11
5.2 Bestimmung Landé-Faktor	12
5.3 Kernspin der Rubidium-Isotope	12
5.4 Isotopenverhältnis	13
5.5 Quadratischer Zeeman-Effekt	13
6 Diskussion	14
Literatur	14
Anhang	15

1 Zielsetzung

Durch das nachfolgend beschriebenen Verfahrens sollen Kernspin und Niveaufenspaltung einer Mischung der Rubidiumisotope ^{85}Rb und ^{87}Rb untersucht werden.

2 Theorie [1]

Spätestens seit Einführung des Atommodells nach Bohr ist allgemein bekannt, dass sich Elektronenhüllen von Atomen aus scharf definierten Energieniveaus zusammensetzen, deren Besetzung durch das Ausschließungsprinzip nach Pauli beschrieben wird. Äußere Schalen sind nur teilweise oder gar nicht gefüllt und unterliegen dadurch zusätzlich der temperaturbedingten Verteilung nach Boltzmann. Für Zustände mit $E_1 < E_2$ folgt

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \quad (1)$$

als das erwartete Verhältnis der Besetzungszahlen mit k_B als Boltzmannkonstante und T als absolute Temperatur. Die Faktoren g_1 und g_2 geben als statistische Gewichte die Multiplizität oder Entartung der jeweiligen Energien E_1 und E_2 an.

Im thermischen Gleichgewicht gilt bei $g_1 = g_2$ also typischerweise $N_1 > N_2$ für äußere Niveaus. Die Beschreibung von Rubidium fällt in diesem Kontext besonders leicht, da nur ein Elektron in einer nicht vollständig gefüllten Schale liegt [3]. Unter Energieaufwand und bei passender Niveaustuktur lässt sich diese Relation zu $N_1 < N_2$ umkehren. Beim optischen Pumpen geschieht dies unter Einstrahlung von Lichtquanten, wobei die Photonenergie genau

$$E_\gamma = h\nu = E_2 - E_1 \quad (2)$$

betragen muss, um ein Elektron in die nächsthöhere Schale zu heben. Hierbei geben h die Planckkonstante und ν die Frequenz an. Dieses Vorgehen erlaubt eine sehr präzise Messung niederenergetischer Strukturen innerhalb der Niveaus. Einige der so zugänglichen Größen sollen für das stabile ^{85}Rb und den langlebigen Betastrahler ^{87}Rb [3] bestimmt werden. Dazu müssen gewisse Zusammenhänge zwischen Drehimpulsen und magnetischen Momenten im atomaren System bekannt sein.

2.1 Atomare Drehimpulse

Zur Untersuchung des Rubidiums müssen die relevanten Drehimpulsbeiträge verstanden werden. Abbildung 1 skizziert deren Verknüpfungen in geometrischer Form.

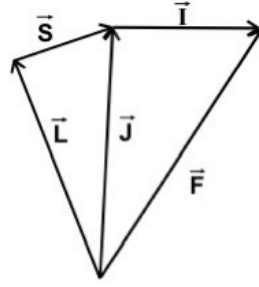


Abbildung 1: Vektordiagramm sämtlicher Drehimpulse eines Atoms. [1]

Es lassen sich verschiedene Regionen unterscheiden, namentlich die Atomhülle und der Atomkern. Diese werden im folgenden genauer betrachtet.

2.1.1 Hülle

Aus den Eigenwerten der Drehimpulsoperatoren folgen mit $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$ betragsweise

$$\mu_J = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}$$

$$\mu_S = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}$$

$$\mu_L = \mu_B \sqrt{L(L+1)}$$

als zugehörige magnetische Momente mit dem Bohr Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

und den Quantenzahlen J für den Gesamtdrehimpuls, S für den Spin und L für den Bahndrehimpuls. Mit μ_J wird der Landé Faktor bezeichnet, der die Kombination aus μ_S und μ_L berücksichtigt. Im weiteren Verlauf werden genauere Korrekturen aus der Quantenelektrodynamik vernachlässigt und der gyromagnetische Faktor des Elektrons $g_S = 2$ gesetzt. Zudem schränkt $|S - L| \leq J \leq |S + L|$ den erlaubten Wertebereich ein.

Solange äußere Magnetfelder klein genug sind um als Störung behandelt zu werden, wird das Gesamtmoment nach Russel und Saunders über

$$\boldsymbol{\mu}_J = \boldsymbol{\mu}_S + \boldsymbol{\mu}_L$$

als vereinfachte Kopplung ausgedrückt. Trigonometrische Überlegungen führen schließlich

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (3)$$

für die geltende Beziehung ein. An dieser Stelle sei angemerkt, dass Alkalimetalle wie Rubidium ihren gesamten Hüllendrehimpuls in einen äußeren Elektron [3] tragen. Daher kann in diesem Fall immer $S = \frac{1}{2}$ eingesetzt werden.

Beim Anlegen eines äußeren lokal homogenen Magnetfeldes \mathbf{B} wird die zuvor arbiträre Basiswahl durch eine natürliche Symmetrie ersetzt. Entlang der Feldrichtung präzidiert nun μ_J und führt über Richtungsquantelung die Wechselwirkungsenergie

$$E_Z = M_J g_J \mu_B B \quad (4a)$$

ein. Die Orientierungsquantenzahl M_J gibt die Projektion von \mathbf{J} auf die Feldachse an und läuft von $-J$ bis J in ganzzahligen Schritten. Auf diese Weise werden die Energieniveaus in $2J + 1$ Unterniveaus gespalten, der sogenannte Zeeman Effekt tritt hier in linearer Form zum Vorschein.

2.1.2 Kern

Die beiden zu untersuchenden Isotope ^{85}Rb und ^{87}Rb besitzen mit den Quantenzahlen $I_{85} = \frac{5}{2}$ und $I_{87} = \frac{3}{2}$ [3] zusätzlich einen jeweils von Null verschiedenen Kernspin, dessen Einfluss wie in Abbildung 1 aufgezeigt per $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$ im Drehimpuls des gesamten Atoms inkludiert werden muss. Dabei liegt F ganzzahlig zwischen $|J - F|$ und $|J + F|$ mit einer zu J analogen Zeeman Aufspaltung. Statt (4a) gilt nun

$$E_Z = M_F g_F \mu_B B \quad (4b)$$

mit $-F \leq M_F \leq F$ und dementsprechend $2F + 1$ Unterniveaus.

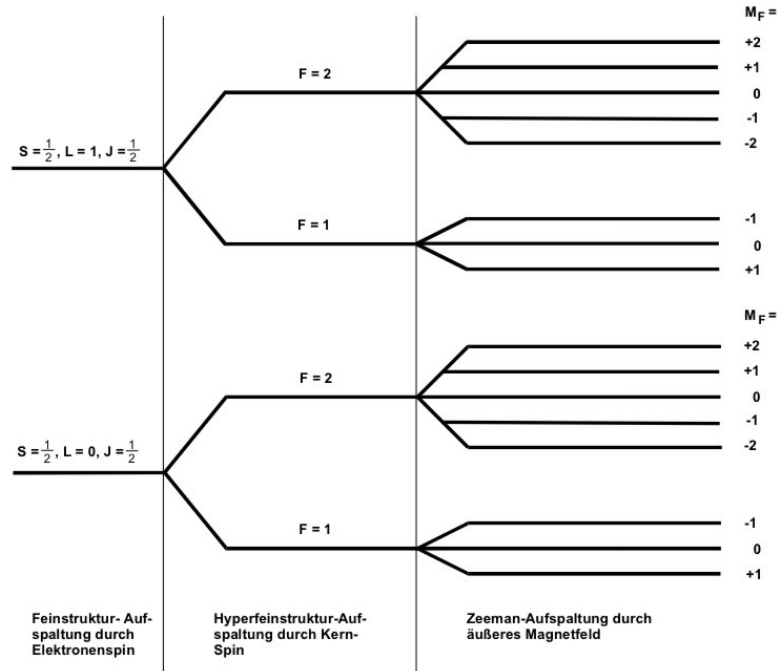


Abbildung 2: Exemplarisches Termschema von ^{87}Rb unter Einwirkung eines Magnetfeldes. Energiedifferenzen sind nicht maßstabsgetreu und liegen im Bereich von 1,5 eV für die Hauptstruktur und 30 μeV für die Hyperfeinstruktur. [1]

In Abbildung 2 wird beispielhaft eine resultierende Niveaufspaltung dargestellt. Durch einen Ansatz der Form

$$\mu_F = g_F \mu_B \sqrt{F(F+1)}$$

ergibt sich nach ähnlicher Rechnung zu (3) schließlich

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} \quad (5)$$

für den Landé Faktor des atomaren Gesamtdrehimpulses. Im Grundzustand gelten $L = 0$ sowie folglich $J = S = \frac{1}{2}$ um aus (5) die Vorhersagen

$$g_F^{85} = \frac{1}{3} \quad (6a)$$

$$g_F^{87} = \frac{1}{2} \quad (6b)$$

für die jeweiligen oberen Zweige der Hyperfeinstruktur $F_{85} = 3$ und $F_{87} = 2$ zu treffen.

2.2 Optisches Pumpen

Die prinzipielle Funktionsweise des optischen Pumpens wird nun zunächst anhand eines vereinfachten Alkaliatoms ohne Kernspin erklärt und im Anschluss auf die spezifische Anwendung übertragen. In einem solchen System sind der Grundzustand $^2S_{1/2}$ sowie die durch LS Kopplung hervorgerufenen angeregten Zustände $^2P_{1/2}$ und $^2P_{3/2}$ wie in Abbildung 3 angeordnet, wobei hier zur Anschaulichkeit auf eine korrekte Skalierung verzichtet wird.

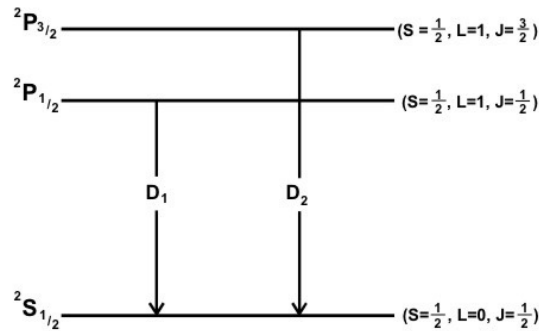


Abbildung 3: Entstehung der Dublettstruktur in Alkalispektren. [1]

Die aufgezeigten Übergänge D_1 und D_2 erzeugen dann duplettartige Spektren wie sie für Alkalimetalle typisch sind. Wird dazu ein Magnetfeld angelegt, spalten sich die ersten Niveaus nach Zeeman auf. Das resultierende Termschema ist zusammen mit möglichen Übergängen in Abbildung 4 skizziert.

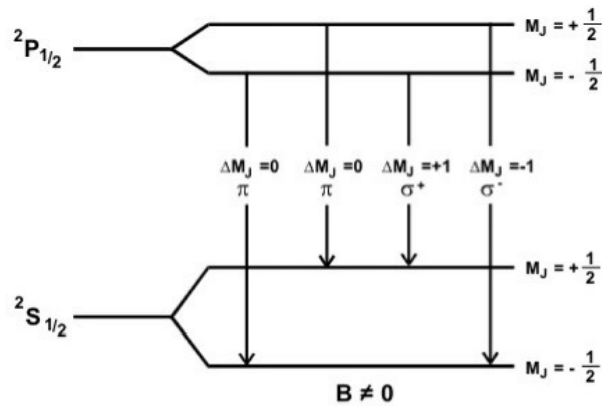


Abbildung 4: Zeeman Aufspaltung eines Alkaliatoms ohne Kernspin. [1]

Da Photonen Spin $S = 1$ tragen, folgt aus Erhaltung des Drehimpulses, dass allgemein nur Übergänge mit $\Delta M_J = 0$ oder $\Delta M_J = \pm 1$ möglich sind. Diese Auswahlregeln führen mit den eingeführten Bezeichnungen auf die Beschreibung des mikroskopischen Polarisationszustandes durch Ausrichtung des Spins relativ zur Bewegung des Photons. Dabei entsprechen σ^+ und σ^- je rechtshändig oder linkshändig zirkular polarisiertem Licht, also einer antiparallelen oder parallelen Helizität. Im Fall von π Emission liegt dagegen lineare Polarisation vor, durch den Dipolcharakter der Feldkonfiguration wird davon jedoch keine Intensität entlang der Feldachse abgestrahlt.

Befindet sich nun eine mit diesen hypothetischen Alkaliatomen gefüllte und von einem homogenen Magnetfeld durchsetzte Dampfzelle in einem Photonenfeld aus rechtshändig zirkular polarisierter D_1 Strahlung, erlauben die Auswahlkriterien die in Abbildung 5 markierten Übergänge.

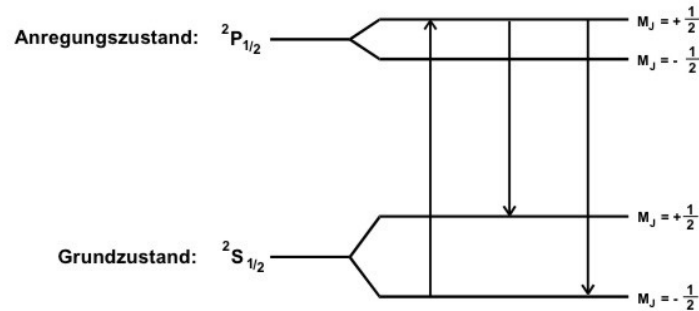


Abbildung 5: Mögliche Übergänge bei Einfall rechtzirkular polarisiertem Lichts. [1]

Initial herrscht thermisches Gleichgewicht und die Besetzung ist wie in (1) nach Boltzmann verteilt. Durch das einfallende Licht werden die Elektronen aus dem niedrigsten $^2S_{-1/2}$ Zustand nach $^2P_{+1/2}$ angeregt.

Für Photonenemission an sich folgt $\Delta L = -1$ aus Drehimpulserhaltung, sodass die obere Population mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in $^2S_{-1/2}$ oder $^2S_{+1/2}$ abfallen kann. Da Elektronen aus dem $^2S_{+1/2}$ Zustand bei der gegebenen Lichtfrequenz allerdings nicht wieder angeregt werden und die Wahrscheinlichkeit für ein spontanes Absinken in $^2S_{-1/2}$ verschwindend gering ist, wird das höhere der $^2S_{1/2}$ Zeeman Niveaus auf Kosten des niedrigeren vollgepumpt. Der so entstehende makroskopische Zustand wird auch Besetzungsinversion genannt.

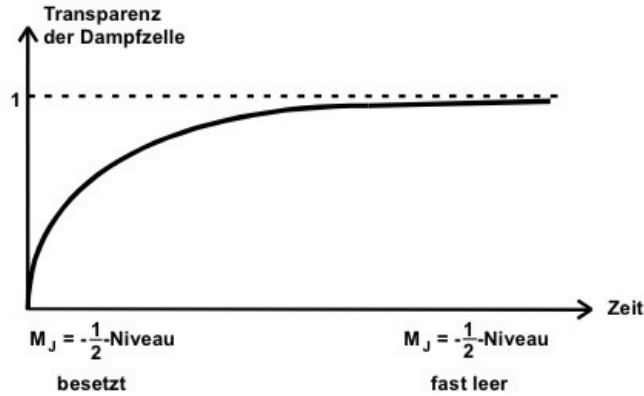


Abbildung 6: Zeitabhängige Transparenz einer Alkalidampfzelle. [1]

Da die Anzahl der absorbierten D_1 Photonen direkt von der Besetzung des so entleerten Grundniveaus abhängt, steigen Transparenz und Intensität wie in Abbildung 6 über

$$I = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

mit der Zeit an, wobei τ eine unbekannte Zeitkonstante ist.

Real spielt auch der Kernspin der verschiedenen Isotope eine Rolle und führt zu deutlich mehr Zeeman Unterniveaus. Dazu kommt, dass die verwendeten Spektrallinien einer Gasentladungslampe der Dopplerverbreiterung unterliegen, sodass die feine Aufteilung sicher abgedeckt ist. Die auftretenden Phänomene decken sich ansonsten aber hinreichend mit dem vereinfachten Fall.

2.3 Zeeman Aufspaltung

Der lineare Zeeman Effekt aus (4a) und (4b) muss für größere Magnetfeldstärken in höherer Ordnung entwickelt werden. Mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung ΔE_{HF} aus der Interaktion mit dem Kernspin beschreibt

$$\Delta E_Z = g_F \mu_B B + g_F^2 \mu_B^2 B^2 \frac{1 - 2M_F}{\Delta E_{HF}} \quad (7)$$

die Differenz benachbarter Unterniveaus in quadratischer Ordnung nach Breit und Rabi.

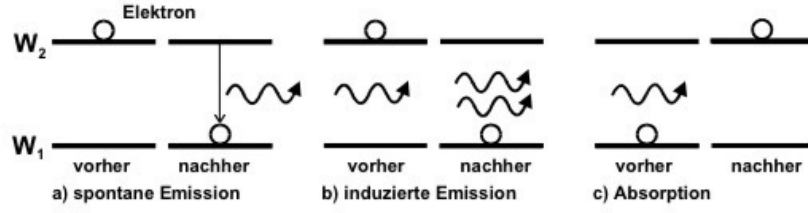


Abbildung 7: Übergangsmöglichkeiten eines Elektrons zwischen Energieniveaus. [1]

Zum Verständnis der Präzisionsmessung sehr geringer Aufspaltungswerte müssen die beteiligten Übergangsmechanismen erläutert werden. Abbildung 7 stellt diese schematisch dar. Spontane Emission verläuft ohne Beteiligung äußerer Effekte. Auch im Vakuum und ohne thermische Energie würden angeregte Zustände durch Quantenfluktuationen wieder auf energetisch günstigere Niveaus abfallen. Dagegen erfolgt die stimulierte oder induzierte Emission durch resonante Wechselwirkung eines Photons mit dem Dipolmoment des übergehenden Elektrons. Auf diese Weise wird ein weiteres zum einlaufenden kohärentes Photon emittiert, also mit gleicher Frequenz, Polarisation und Ausbreitungsrichtung.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten spontaner und induzierter Emission P_{spon} und P_{ind} lassen sich über Einsteinfaktoren und die Planckformel für Schwarzkörperstrahlung im Kontext thermischer Induktionsphotonen mit der Frequenz $\Delta\nu$ und über (2) mit der Energiedifferenz ΔE in Verbindung setzen. Dann ist P_{ind} in erster Näherung konstant und $P_{\text{spon}} \propto \Delta\nu^3 \propto \Delta E^3$ nur für große Niveauabstände relevant. Zwischen den höheren Zeeman Aufspaltungen mit $\nu \sim 100 \text{ kHz}$ treten spontane Übergänge demnach praktisch nie auf, unter den Hauptniveaus im Bereich $\nu \sim 100 \text{ THz}$ sind solche Emissionsprozesse dagegen problemlos möglich.

Wird nun noch die Magnetfeldstärke im Radiofrequenzbereich $\nu \sim 1 \text{ MHz}$ variiert, lässt sich über die Resonanz $\Delta E_Z = h\nu_{RF}$ nach (2) und (7) die Niveaufaufspaltung bestimmen, da bei passender Einstellung von B_{RF} Emission stimuliert wird und die Elektronen folglich erneut D_1 Photonen absorbieren können.

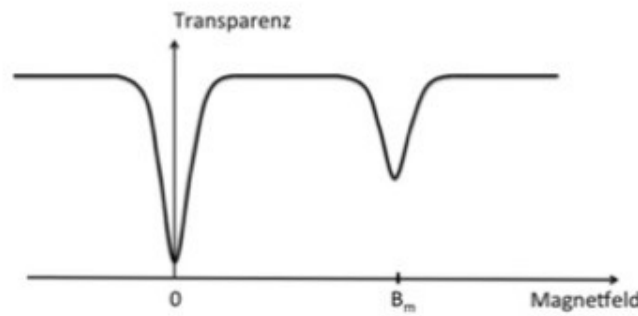


Abbildung 8: Transparenz einer Alkalidampfungszelle unter Wirkung eines hochfrequenten Magnetfeldes in Abhängigkeit zur Feldstärke. [1]

Die Intensität verläuft dann wie in Abbildung 8 gezeigt, wobei das tiefere Minimum bei Null Feldstärke darin begründet ist, dass bei verschwindender Aufspaltung kein optisches Pumpen mehr möglich ist. Für schwache Felder gibt

$$\omega_{RF} = \frac{g_F \mu_B B_{RF}}{\hbar} \quad (8)$$

die Kreisfrequenz der in Abbildung 9 dargestellten Larmor Präzession bei Resonanz an.

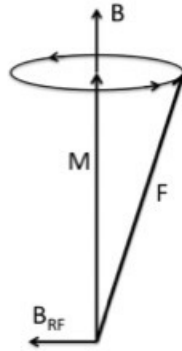


Abbildung 9: Drehimpulspräzession um die Magnetfeldachse. [1]

3 Aufbau

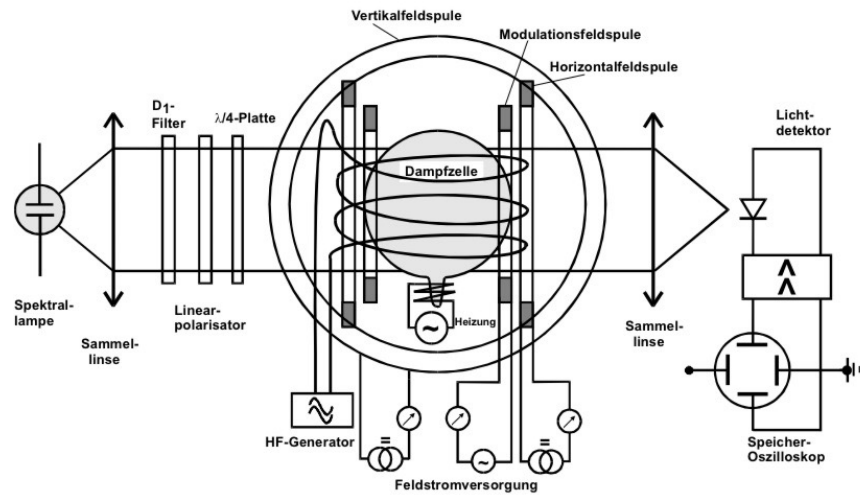


Abbildung 10: Schematische Aufsicht der gesamten Messapparatur. [1]

4 Durchführung

5 Auswertung

Im Folgenden werden die aufgenommenen Messdaten ausgewertet, um den Kernspin der Isotope zu bestimmen. Dafür müssen zunächst die Landé-Faktoren der Isotope bestimmt werden und die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes. Anschließend wird das Isotopenverhältnis der Rubidium-Isotope bestimmt und der quadratische Zeeman-Effekt untersucht.

Es werden die Werte der Magnetfeldstärken der Horizontalen Spule berechnet, indem die jeweiligen Anteile der sweep und der horizontalen Verschiebungsspule addiert werden. Für die Magnetfeldstärken der Spulen im Zentrum gilt

$$B(0) = \frac{8\mu_0 N I}{\sqrt{125} A}. \quad (9)$$

Die Stromstärke des Sweepanteils wird per Umdrehungen gemessen. Dieser Wert wird mit 0,1 A pro Umdrehung umgerechnet. Für den horizontalen Anteil wurde die Spannung in mV gemessen und kann umgerechnet werden in mA, indem die Werte der Spannungen verdoppelt werden. Die notierten Werte werden in Tabelle 1 aufgetragen, wobei die Stromstärken bereits umgerechnet wurden.

Tabelle 1: Die aufgenommenen Messwerte der Sweep-Spule und der horizontalen Verschiebungsspule für beide Isotope.

f / kHz	I_{s1} / A	I_{h1} / A	I_{s2} / A	I_{h2} / A
100	0.54	0.00	0.658	0.00
200	0.776	0.00	0.731	0.0194
300	0.436	0.0402	0.790	0.0402
400	0.328	0.0642	0.801	0.0642
500	0.291	0.0834	0.891	0.0834
600	0.281	0.1006	0.987	0.1006
700	0.10	0.1298	0.928	0.1298
800	0.272	0.1374	0.433	0.1894
900	0.384	0.1432	0.598	0.2028
1000	0.459	0.2374	0.522	0.2328

In Abbildung 11 sind die mit der Gleichung 9 berechneten Magnetfeldstärken gegen die Frequenz für beide Isotope aufgetragen.

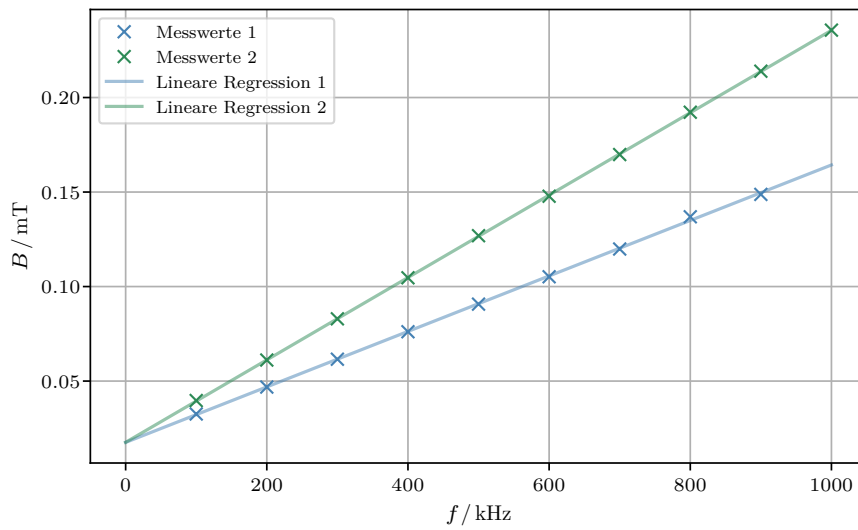


Abbildung 11: Magnetfeldstärke aufgetragen gegen die Frequenz für beide Isotope.

Es wurde eine lineare Regression der Messwerte für beide Isotope durchgeführt. Die verwendete Ausgleichsfunktion hat die Form

$$f(x) = a \cdot x + b. \quad (10)$$

Daraus folgen die Parameter beider Isotope

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,468 \pm 0,011) \cdot 10^{-7} \text{ T Hz}^{-1} \\ b_1 &= (1,76 \pm 0,06) \cdot 10^{-5} \text{ T} \\ a_2 &= (2,1795 \pm 0,0035) \cdot 10^{-7} \text{ T Hz}^{-1} \\ b_2 &= (1,760 \pm 0,022) \cdot 10^{-5} \text{ T}. \end{aligned}$$

Die berechneten Werte werden für die weiteren Rechnungen verwendet

5.1 Magnetfeld der Erde

Die Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes hat aufgrund des horizontal verlaufenden Lichtstrahls einen Einfluss auf die Messung. Daher wird diese durch ein vertikal verlaufendes Magnetfeld kompensiert und der Aufbau wird um die vertikale Achse in Nord-Süd Richtung gedreht, sodass die horizontale Komponente parallel oder antiparallel zu dem horizontalen Magnetfeld verläuft. Zur Berechnung der Feldstärke des Erdmagnetfeldes muss zunächst die magnetische Feldstärke des vertikalen Feldes gemessen werden. Diese betrug in diesem Experiment 0,23 A.

Anschließend wird über den y -Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden in Abbildung 11 die horizontale Magnetfeldstärke bestimmt. Der Mittelwert der y -Achsenabschnitte wird mittels uncertainties [2] gebildet, um den Wert des horizontalen Feldes zu bestimmen. Über den Satz des Pythagoras kann der Wert des Erdmagnetfeldes ermittelt werden. Schlussendlich ergibt sich für das Magnetfeld der Erde ein Wert von $(3,939 \pm 0,015) \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

5.2 Bestimmung Landé-Faktor

Durch Umstellen der Gleichung 8 kann auf den Zusammenhang

$$g_F = \frac{h}{\mu_B a} \quad (11)$$

geschlossen werden. Für die Landé Faktoren der Isotope ergeben sich die Werte

$$g_1 = 0,487 \pm 0,004 \quad (12)$$

$$g_2 = 0,328 \pm 0,001. \quad (13)$$

Anhand der in Abschnitt 2 theoretisch bestimmten Werte für die Landé Faktoren der beiden Isotope (Rb-85 6a und Rb-87 6b) können schließlich die experimentellen Werte zugeordnet werden. Daher entspricht g_1 dem Wert des Isotops Rb-87 und g_2 kann zu dem Isotop Rb-85 eingeordnet werden. Im Folgenden werden auch die jeweiligen Ausgleichsgeraden zugeordnet. Die lineare Regression 1 entspricht daher Rb-87 und die lineare Regression 2 gehört zu Rb-85.

5.3 Kernspin der Rubidium-Isotope

Mittels der bestimmten g_F -Faktoren kann anschließend der Kernspin berechnet werden. Aus der Formel 3 und den Werten der Quantenzahlen, welche in Abschnitt 2 angegeben sind, ergibt sich $g_J = 2$. Somit sind alle benötigten Variablen bekannt. Der Kernspin der Isotope kann durch Umstellen der Gleichung 5 berechnet werden. Es folgt für den Kernspin

$$I = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + F(F+1) \cdot (1 - g_F)}. \quad (14)$$

Für die Isotope Rb-85 und Rb-87 ergeben sich die experimentellen Kernspins

$$I_{85} = 2,511 \pm 0,001 \quad (15)$$

$$I_{87} = 1,520 \pm 0,005. \quad (16)$$

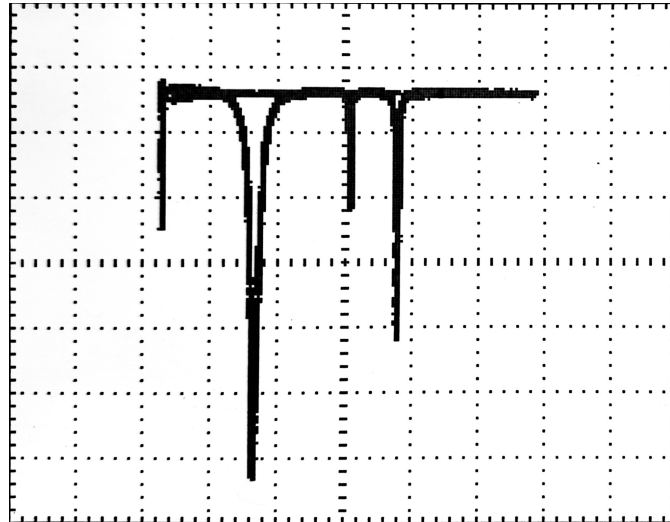


Abbildung 12: Bearbeitete Aufnahme des Oszilloskops.

5.4 Isotopenverhältnis

Wegen besserer Ablesbarkeit der Peaks wird die Aufnahme des Oszilloskops bearbeitet, diese ist in Abbildung 12 zu sehen.

Die Aufnahme der Resonanzstellen wurde bei einer Frequenz von $f = 100 \text{ kHz}$ getätigt. Um das Isotopenverhältnis zu bestimmen, werden die Amplituden der Resonanzstellen abgelesen, indem die Kästchen auf dem Oszilloskop gezählt werden. Der erste kleinere Peak gehört zu dem Isotop Rb-87 und der größere zu Rb-85. Für den ersten Peak hat eine Tiefe von ungefähr 2 und der zweite besitzt eine Tiefe von ungefähr 4 Kästchen. Das Verhältnis ist daher 1:2. Daraus folgt für die Anteile

$$P_1 = 33\% \quad (17)$$

$$P_2 = 67\%. \quad (18)$$

5.5 Quadratischer Zeeman-Effekt

Zusammen mit der Gleichung 7 und den Theoriewerten in der Tabelle 2 kann die quadratische Zeemann Aufspaltung berechnet werden.

Somit ergeben sich die Werte der quadratischen Zeemann Aufspaltung für beide Isotope

$$\Delta E_Z^{87} = (4,175 \pm 0,007) \cdot 10^{-28} \text{ J} \quad (19)$$

$$\Delta E_Z^{85} = (4,105 \pm 0,031) \cdot 10^{-28} \text{ J}. \quad (20)$$

Tabelle 2: Theoriewerte der Isotope zur Berechnung der Zeemann Aufspaltung und experimentell bestimmte Werte des B-Feldes. [1]

Rb-87	Rb-85
$B = 0,0909 \text{ mT}$	$B = 0,137 \text{ mT}$
$M_f = 2$	$M_f = 3$
$\Delta E_{hf} = 4,53 \cdot 10^{-24} \text{ J}$	$\Delta E_{hf} = 2,01 \cdot 10^{-24} \text{ J}$

6 Diskussion

Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 21, Optisches Pumpen*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2024.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [3] *Rubidium*. Spektrum. 2024. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/rubidium/12616>.

Anhang