

**V46**

# **Der Faraday-Effekt**

Fritz Agildere	Amelie Strathmann
fritz.agildere@udo.edu	amelie.strathmann@udo.edu

Durchführung: 15. April 2024  
Abgabe: 15. April 2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>2</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>2</b>
2.1 Bandstruktur . . . . .	2
2.2 Dotierung . . . . .	4
2.3 Faraday-Effekt . . . . .	5
2.3.1 Zirkulare Doppelbrechung . . . . .	5
2.3.2 Rotationswinkel . . . . .	9
<b>3 Aufbau</b>	<b>12</b>
<b>4 Durchführung</b>	<b>13</b>
4.1 Justierung des Versuchsaufbaus . . . . .	13
4.2 Messung der Faraday Rotation . . . . .	13
4.3 Messung der magnetischen Kraftflussdichte . . . . .	14
<b>5 Auswertung</b>	<b>14</b>
5.1 Magnetfeld . . . . .	14
5.2 Faraday-Rotation . . . . .	16
5.2.1 Dotierte Proben . . . . .	16
5.2.2 Reine Probe . . . . .	18
5.3 Effektive Masse . . . . .	19
<b>6 Diskussion</b>	<b>20</b>
<b>Literatur</b>	<b>21</b>
<b>Anhang</b>	<b>22</b>

# 1 Zielsetzung

Im diesem Versuch soll die Faraday-Rotation ausgenutzt werden, um die effektive Masse der Leitungselektronen in negativ dotiertem Galliumarsenid (n-GaAs) zu bestimmen.

## 2 Theorie [1]

Nichtrelativistische Quantensysteme werden durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben. Die Dynamik eines Teilchens der Masse  $m$  im Zustand  $\Psi$  nimmt dann die Form

$$E\Psi = H\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + V\Psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Psi + V\Psi$$

an, wobei  $E$  die Energie,  $p$  den Impuls und  $k$  die Wellenzahl beschreiben. Mit  $\hbar$  wird die reduzierte Planckkonstante bezeichnet. Für den freien Grenzfall mit verschwindendem Potential  $V$  weisen Energieeigenzustände demnach eine parabolische Dispersion

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

auf. Im für die in Festkörpern auftretende Gitterperiodizität konzipierten reduzierten Zonenschema folgen diese Funktionen den erlaubten Energieänderungen der Gitterelektronen. Unter der Annahme freier Elektronen entstehen dann Entartungen am Zonenrand.

### 2.1 Bandstruktur

Durch die strukturelle Anordnung der Gitteratome wirkt im Festkörper ein periodisches Potential, das für ein Auflösen der Energieentartung der Elektronen sorgt. Stattdessen bilden sich Bandlücken aus, deren Energiebereiche nicht besetzt werden können. Die Beschreibung als freie Teilchen ist nun ebenfalls nicht mehr gültig. Für schwach gebundene Elektronen kann  $E(k)$  allerdings um ein Minimum  $E'(k_0) = 0$  in  $k$  entwickelt werden. Bis zur quadratischen Ordnung ergeben die ersten Glieder der Potenzreihe

$$E(k) \approx E(k_0) + E'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}E''(k_0)(k - k_0)^2 = E(k_0) + \frac{1}{2}E''(k_0)(k - k_0)^2$$

und vereinfachen sich mit der Auswahl  $E(k_0) \equiv 0$  und  $k_0 \equiv 0$  zu

$$E(k) \approx \frac{1}{2}E''(0)k^2$$

als parabolische Näherung. Dieser Ausdruck lässt sich analog zum vollständig freien Grenzfall als

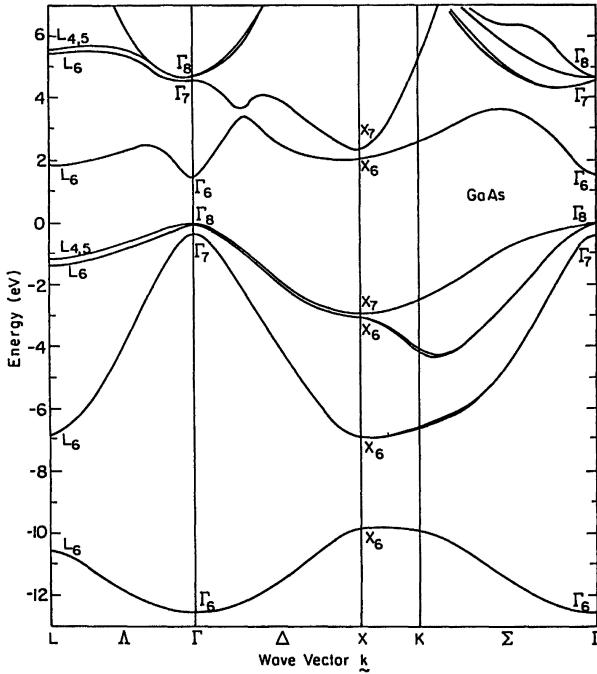
$$E(k) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

formulieren.

An dieser Stelle definieren wir den Ausdruck

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1} \quad (1)$$

als effektive Masse. Die Interpretation dieser Schreibweise besagt also, dass sich quasifreie Elektronen in zweiter Ordnung wie freie Ladungsträger mit Masse  $m^*$  verhalten. Damit Abweichungen in verschiedene Raumrichtungen vernachlässigbar sind, wird ein hinreichend hoher Grad an Symmetrie vom Kristall gefordert.



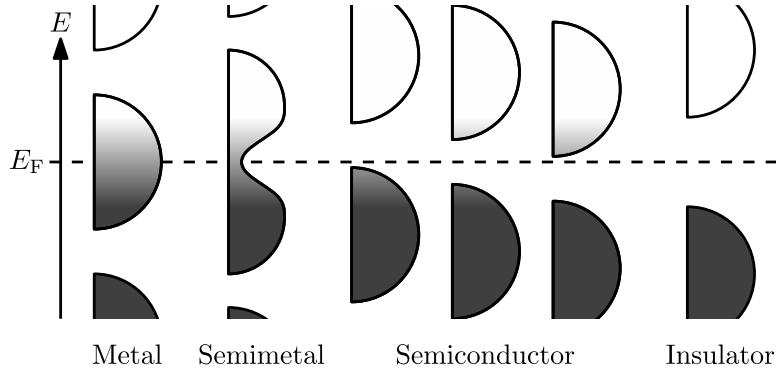
**Abbildung 1:** Berechnete Bandstruktur von GaAs um die Bandlücke. [2]

Abbildung 1 zeigt exemplarische Bandverläufe für reines GaAs. Neben dem Auftreten von Bandlücken lässt sich auch die lokal parabolische Form der Elektronendispersion deutlich erkennen. Unsere Approximation erscheint damit gerechtfertigt.

Zur Charakterisierung wesentlicher Materialeigenschaften von Festkörpern ist es sinnvoll, die Begriffe Valenzband (VB) und Leitungsband (LB) einzuführen. Bei einer absoluten Temperatur  $T = 0$  gibt das VB den höchsten vollständig gefüllten Energiebereich an, während das LB den niedrigsten wenigstens teilweise oder auch vollständig unbesetzten Bereich umfasst. In dieser Betrachtung ist ein Stoff gerade dann leitfähig, wenn sich ausreichend viele Elektronen im LB befinden.

Im gegebenen Kontext sollte zur Einordnung verschiedener Materialklassen außerdem die Fermienergie  $E_F$  erwähnt werden. Am absoluten Temperaturnullpunkt sind laut der Fermi-Dirac Verteilung alle niedrigeren Zustände  $E < E_F$  besetzt und alle höheren Zustände  $E > E_F$  unbesetzt.

Durch Erwärmung wird diese Trennung zunehmend unscharf. Da viele relevante Festkörper eine über die Boltzmannkonstante  $k_B$  und  $E_F = k_B T_F$  definierte Fermitemperatur  $T_F$  weit oberhalb des Schmelzpunktes besitzen, wird  $T = 0$  hier als Näherung beibehalten.



**Abbildung 2:** Energieschemata verschiedener Materialklassen im Vergleich. [8]

In Abbildung 2 sind einige mögliche Konfigurationen von VB (unten) und LB (oben) in Relation zu  $E_F$  schematisch aufgeführt. Für Metalle und Halbmetalle liegt  $E_F$  innerhalb des LB, sodass solche Stoffe elektrischen Strom gut leiten. Auf der anderen Seite besitzen Isolatoren eine große Bandlücke von mehreren eV zwischen VB und LB, welche auch  $E_F$  enthält. Da selbst für hohe Temperaturen kaum Elektronen das LB erreichen, sind entsprechende Stoffe nichtleitend. Zwischen diesen Kategorien lassen sich die sogenannten Halbleiter einordnen. Sie weisen zwar ebenfalls eine Bandlücke um  $E_F$  auf, allerdings fällt diese mit wenigen eV vergleichsweise klein aus. Dank der niedrigeren Energiedifferenz können bereits bei moderaten Temperaturen signifikante Zahlen an Elektronen in das LB aufsteigen, sodass sich die Leitungseigenschaften des Materials leicht ändern lassen.

## 2.2 Dotierung

Die Kategorie der Halbleiter wird nach Abbildung 2 in drei Unterkategorien eingeteilt. Bei intrinsischen Halbleitern (mittig) handelt es sich um Reinstoffe, welche die zuvor beschriebenen Eigenschaften erfüllen. Daneben kann die Leitfähigkeit von Materie aber auch durch gezieltes Einbringen von Fremdatomen präzise angepasst werden. Ein solches Vorgehen wird Dotierung genannt, die resultierenden Mischstoffe werden je nach Art als Halbleiter vom p-Typ (links) oder n-Typ (rechts) bezeichnet.

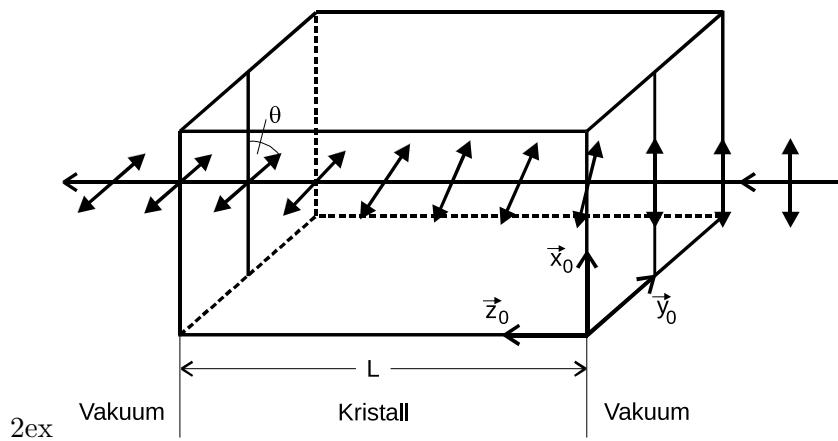
Bei der n-Dotierung werden Atome mit Elektronenüberschuss als Donatoren eingebracht. Die zusätzlichen negativen Ladungen besitzen Energien knapp unterhalb des LB, sodass der Abstand zwischen LB und  $E_F$  stark reduziert wird.

Zur p-Dotierung werden dagegen Atome mit Elektronendefizit als Akzeptoren verwendet. Die Energien der zusätzlichen als Löcher bezeichneten positiven Ladungen liegen knapp oberhalb des VB, sodass die Lücke zwischen VB und  $E_F$  stark reduziert wird.

Beide Methoden steigern die Konduktivität des Halbleiters, indem insgesamt weniger Energie aufzuwenden ist, um Elektronen ins LB zu heben.

## 2.3 Faraday-Effekt

Der Faraday-Effekt bezeichnet das Auftreten einer Rotation der Polarisationsrichtung von linear polarisierten elektromagnetischen Wellen beim Durchlaufen eines von einem homogenen Magnetfeld durchdrungenen transparenten Festkörpers in Richtung der Feldlinien. Abbildung 3 stellt dieses Phänomen für den allgemeinen Fall dar.



**Abbildung 3:** Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang durch einen Kristall. [1]

### 2.3.1 Zirkulare Doppelbrechung

Die beobachtete Drehung der Schwingungsebene bei Transmission lässt sich erklären, indem für linksgerichtet und rechtsgerichtet polarisierte Lichtwellen jeweils abweichende Phasengeschwindigkeiten vorausgesetzt werden. Das elektrische Feld lässt sich dann zu

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_R(z) + \mathbf{E}_L(z))$$

zerlegen, wobei die einzelnen Komponenten

$$\mathbf{E}_R(z) = E_0 (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_R z} \quad \mathbf{E}_L(z) = E_0 (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_L z}$$

lauten. Daraus kann beim Eintritt ins Material an der Stelle  $z = 0$  direkt

$$\mathbf{E}(0) = E_0 \hat{\mathbf{x}} \tag{2}$$

abgelesen werden.

Nachdem die Länge des Festkörpers  $L$  zurückgelegt ist, gibt

$$\mathbf{E}(L) = \frac{1}{2} E_0 \left( (e^{ik_R L} + e^{ik_L L}) \hat{\mathbf{x}} + (e^{ik_R L} - e^{ik_L L}) \hat{\mathbf{y}} \right)$$

die Feldstärke an. Durch Einführen der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \frac{L}{2}(k_R + k_L) \\ \theta &\equiv \frac{L}{2}(k_R - k_L) \end{aligned} \tag{3}$$

lässt sich dieser Term zu

$$\mathbf{E}(L) = \frac{1}{2} E_0 \left( (e^{i\psi} e^{i\theta} + e^{i\psi} e^{-i\theta}) \hat{\mathbf{x}} + (e^{i\psi} e^{i\theta} - e^{i\psi} e^{-i\theta}) \hat{\mathbf{y}} \right)$$

umschreiben, mit der eulerschen Formel  $e^{ia} = \cos a + i \sin a$  wird daraus

$$\mathbf{E}(L) = E_0 e^{i\psi} (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}})$$

beim Austritt aus dem Material. Im Vergleich mit (2) wird deutlich, dass es sich hierbei wieder um eine linear polarisierte Welle handelt, die um einen Winkel  $\theta$  gedreht schwingt.

Mithilfe der Definition für Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k}$$

und Brechungsindex

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega}$$

lässt sich (3) als

$$\theta = \frac{L\omega}{2c} (n_R - n_L)$$

formulieren. Dabei beschreibt  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Zirkulare Doppelbrechung tritt als Konsequenz induzierter elektrischer Dipolmomente auf, die eine makroskopische Gesamtpolarisation  $\mathbf{P}$  erzeugen. Für kleine Feldstärken  $\mathbf{E}$  kann diese mit der Influenzkonstanten  $\epsilon_0$  über  $\mathbf{P} \approx \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$  aufgestellt werden. Im isotropen Medium wird die dielektrische Suszeptibilität  $\chi$  skalar, für den anisotropen Fall muss sie als Tensor aufgefasst werden. Bei ordinärer Brechung gibt

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

die Schreibweise von  $\chi$  als diagonale Matrix nach Hauptachsentransformation an.

Um Doppelbrechung zu erzeugen, muss  $\chi$  die Form einer nichtdiagonalen hermiteschen Matrix annehmen. Der einfachste Fall ist mit

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{xy} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei gleichartige Brechung in der Normalenebene zur Ausbreitungsrichtung angesetzt wird. Im folgenden zeigen wir, dass aus dieser Formulierung verschiedene Wellenvektoren für beide Polarisationsanteile folgen.

Zur Beschreibung der Welle in Materie wird die dielektrische Verschiebung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \approx \varepsilon_0 (\mathbf{1} + \chi) \mathbf{E} \quad (4)$$

verwendet. Weiter ergibt sich aus den Maxwellgleichungen sowie der Relation zwischen magnetischer Flussdichte  $\mathbf{B}$  und Feldstärke  $\mathbf{H}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

und indem (4) verwendet wird

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \approx -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \approx -\varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{1} + \chi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} (\mathbf{1} + \chi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

unter Vernachlässigung der Stromdichte  $\mathbf{j}$  gegenüber der Änderung der Polarisation. Mit dem Ansatz einer ebenen Welle mit  $\mathbf{k}$  als Wellenvektor und  $\omega$  als Kreisfrequenz

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

folgt nach Ausführen der Differentialoperatoren

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \approx -\frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{1} + \chi) \mathbf{E} \quad (5)$$

als Näherungsergebnis. Durch Koordinatenwahl

$$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{z}}$$

und

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$$

kann außerdem

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -k^2 (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}})$$

für die linke Seite von (5) geschrieben werden.

Ausführen des Matrixprodukts liefert

$$\chi \mathbf{E} = (\chi_{xx} E_x + i\chi_{xy} E_y) \hat{\mathbf{x}} + (\chi_{xx} E_y - i\chi_{xy} E_x) \hat{\mathbf{y}} + \chi_{zz} E_z \hat{\mathbf{z}}$$

für die rechte Seite von (5) und erlaubt für die Komponente in Ausbreitungsrichtung

$$\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{zz}) E_z \approx 0$$

direkt die Aussage, dass die Welle wegen

$$E_z \approx 0$$

transversal schwingt. Die dazu orthogonalen Komponenten können anhand (5) leicht als homogenes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) - k^2 & i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xy} \\ i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{xy} & -\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

zusammengefasst werden. Damit dieses eine nichtriviale Lösung besitzt, muss zwingend die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$0 = -\det \mathbf{C} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{xx}) - k^2 \right)^2 + i^2 \frac{\omega^4}{c^4} \chi_{xy}^2$$

verschwinden. Es ergeben sich zwei Lösungen

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{xx} \pm \chi_{xy}} \quad (7)$$

für die Wellenzahl und somit

$$v_L^R = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx} \pm \chi_{xy}}}$$

für die Phasengeschwindigkeit, die entweder größer oder kleiner als

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx}}} \quad (8)$$

für den Fall  $\chi_{xy} = 0$  ist. Einsetzen von (7) in (6) liefert

$$(E_x)_L^R = \pm i E_y \quad (9)$$

und belegt damit die Behauptung, dass sich je eine rechtszirkular und eine linkszirkular polarisierte Welle mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten überlagern, um beim Wiedereintritt ins Vakuum eine zur initialen Ausrichtung gedrehte linear polarisierte Welle zu bilden.

Aus Einsetzen von (7) in (3) folgt

$$\theta = \frac{L}{2}(k_+ - k_-) = \frac{L\omega}{2c} \left( \sqrt{1 + \chi_{xx} + \chi_{xy}} - \sqrt{1 + \chi_{xx} + \chi_{xy}} \right)$$

als Bestimmungsformel für den Drehwinkel. Allgemein darf  $\chi_{xy} \ll \chi_{xx}$  angenommen werden, sodass eine Reihenentwicklung bis zum linearen Glied

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2c\sqrt{1 + \chi_{xx}}} \chi_{xy} = \frac{L\omega v}{2c^2} \chi_{xy} = \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy} \quad (10)$$

eine gute Näherung liefert. Zur Berechnung von  $\theta$  aus experimentell zugänglichen Größen muss jetzt nur noch  $\chi_{xy}$  gefunden werden.

### 2.3.2 Rotationswinkel

Optisch inaktive Materialien werden erst durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes  $\mathbf{B}$  doppelbrechend. Um diesen Effekt genauer zu untersuchen, stellen wir mit

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + K\mathbf{r} = -e_0 \mathbf{E} - e_0 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B}$$

ein einfaches Modell für die gebundenen Gitterelektronen auf. Hier geben  $\mathbf{r}$  die Auslenkung zur Gleichgewichtslage,  $K$  eine Kopplungskonstante der linearen Rückstellkraft und  $\mathbf{E}$  die Feldstärke der einfallenden Lichtwelle an. Die Elementarladung wird mit  $e_0$  bezeichnet. Geschwindigkeitsproportionale Dämpfungseffekte sowie die magnetische Komponente der Welle tragen nur schwach bei und werden daher nicht berücksichtigt. Zusammenfassend lassen sich Elektronen also als geladene harmonische Oszillatoren unter dem Einfluss der klassischen Kräfte nach Coulomb und Lorentz auffassen.

Wir nehmen wieder eine oszillatorische Zeitabhängigkeit für das Feld an und fordern, dass die Ladungen proportional dazu ausgelenkt werden. Einsetzen von

$$\mathbf{E} \sim \mathbf{r} \sim e^{-i\omega t}$$

erlaubt das Auflösen der Differentialoperatoren und liefert

$$-m\omega^2 \mathbf{r} + K\mathbf{r} = -e_0 \mathbf{E} + ie_0\omega \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

als Umformulierung. Aufgrund der vergleichsweise hohen Frequenz tritt mit

$$\mathbf{P} = -N e \mathbf{r}$$

ausschließlich eine Verschiebungspolarisation auf, wobei  $N$  die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit angibt. Durch Eliminieren von  $\mathbf{r}$  lässt sich damit

$$-m\omega^2 \mathbf{P} + K\mathbf{P} = Ne^2 \mathbf{E} + ie_0\omega \mathbf{P} \times \mathbf{B}$$

aufstellen.

Mit der vereinfachten Annahme eines homogenen äußeren Feldes

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$$

gibt die Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}(K - m\omega^2)P_x &= Ne_0^2E_x + ie_0\omega P_y B \\ (K - m\omega^2)P_y &= Ne_0^2E_y - ie_0\omega P_x B \\ (K - m\omega^2)P_z &= Ne_0^2E_z\end{aligned}$$

ein Gleichungssystem vor. Um daraus eine nichttriviale Lösung unabhängig von den Feldstärkekomponenten zu erhalten, muss für den Suszeptibilitätstensor ein Ansatz mit imaginären nichtdiagonalen Einträgen gewählt werden. Die Trivialität der dritten Komponente führt zu

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ i\chi_{yx} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

als einfachste Variante. Für die erste Komponente folgt dann

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)(\chi_{xx}E_x + i\chi_{xy}E_y) = Ne_0^2E_x + i\varepsilon_0e_0\omega(i\chi_{yx}E_x + \chi_{xx}E_y)B$$

und

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)\chi_{xx} = Ne_0^2 - \varepsilon_0e_0\omega\chi_{yx}B \quad (11a)$$

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)\chi_{xy} = \varepsilon_0e_0\omega\chi_{xx}B \quad (11b)$$

durch Vergleich von Realteilen und Imaginärteilen. Für die zweite Komponente gilt

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)(i\chi_{yx}E_x + \chi_{xx}E_y) = Ne_0^2E_y - i\varepsilon_0e_0\omega(\chi_{xx}E_x + i\chi_{xy}E_y)B$$

und

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)\chi_{xx} = Ne_0^2 + \varepsilon_0e_0\omega\chi_{xy}B \quad (12a)$$

$$\varepsilon_0(K - m\omega^2)\chi_{yx} = -\varepsilon_0e_0\omega\chi_{xx}B \quad (12b)$$

aus erneutem Koeffizientenvergleich. Betrachtung der Gleichungspaare (11a) und (12a) oder (11b) und (12b) lässt erkennen, dass

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx}$$

erfüllt sein muss. Einsetzen erlaubt die Herleitung von

$$\chi_{xy} = \frac{Ne_0^3\omega B}{\varepsilon_0((K - m\omega^2)^2 - (e_0\omega B)^2)}$$

für den gesuchten Ausdruck.

Der Rotationswinkel lässt sich dann nach (10) zu

$$\theta \approx \frac{LN e_0^3 \omega^2 B}{2\varepsilon_0 c n \left( (K - m\omega^2)^2 - (e_0 \omega B)^2 \right)} = \frac{LN e_0^3 \omega^2 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \left( \left( \frac{K}{m} - \omega^2 \right)^2 - \frac{e_0^2 B^2}{m^2} \omega^2 \right)}$$

abschätzen. Darin lassen sich die Resonanzfrequenz

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{K}{m}}$$

und die Zyklotronfrequenz

$$\omega_c \equiv \frac{e_0 B}{m}$$

identifizieren, mit deren Hilfe sich der Ausdruck zu

$$\theta \approx \frac{LN e_0^3 \omega^2 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_C^2 \omega^2 \right)}$$

vereinfacht. Typischerweise gilt im Experiment

$$\omega_0^2 - \omega^2 \gg \omega_C \omega$$

und erlaubt das Schreiben von

$$\theta \approx \frac{LN e_0^3 \omega^2 B}{2\varepsilon_0 c m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

als weitere Vereinfachung. Über die Beziehung

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

kann der Winkel auch in Abhängigkeit zur Wellenlänge  $\lambda$  definiert werden.

Bei Messfrequenzen  $\omega \ll \omega_0$  gilt

$$\theta \approx \frac{LN e_0^3 \omega^2 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \omega_0^4} = \frac{2\pi^2 L N e_0^3 c B}{\varepsilon_0 m^2 \lambda^2 \omega_0^4}$$

und für  $\omega \gg \omega_0$  wiederum

$$\theta \approx \frac{LN e_0^3 B}{2\varepsilon_0 c m^2 \omega^2} = \frac{LN e_0^3 \lambda^2 B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2 n}$$

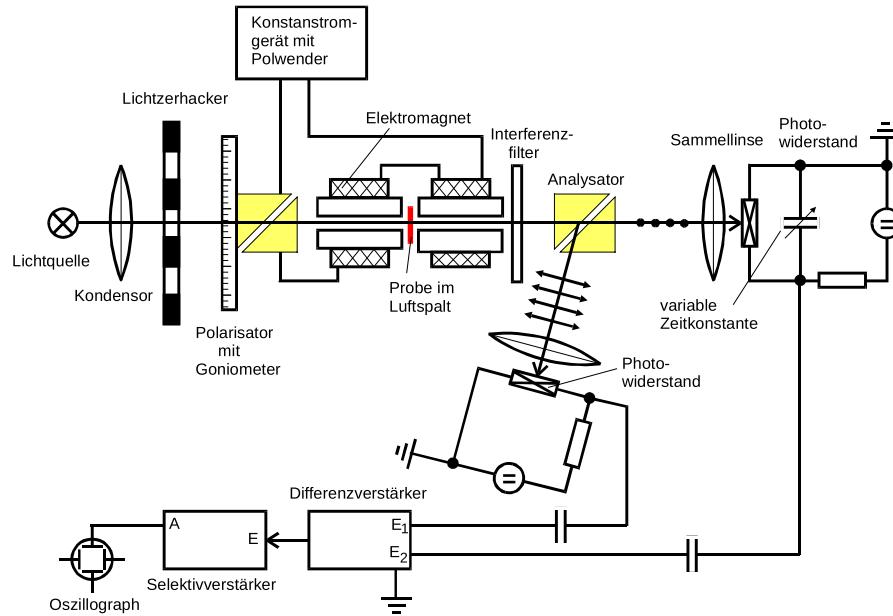
als finale Näherung. Letzterer Fall beschreibt die Problemstellung quasifreier Elektronen am besten. Die Vorschrift

$$\frac{\theta}{L} \approx \frac{N e_0^3 B}{2\varepsilon_0 c m^{*2} \omega^2} = \frac{N e_0^3 \lambda^2 B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^{*2} n} \quad (13)$$

erlaubt uns also, die in (1) definierte effektive Elektronenmasse mit guter Genauigkeit und unabhängig von der Ausdehnung der Probe zu bestimmen.

### 3 Aufbau

Zur Bestimmung der effektiven Masse der Leitungselektronen von n-dotiertem Gallium Arsenid, wird die Faraday Rotation gemessen. Dabei wird der in Abbildung 4 dargestellte Versuchsaufbau verwendet.



**Abbildung 4:** Schematische Darstellung der Messapparatur. [1]

Die Halogenlampe besitzt ein Emissionsspektrum im hauptsächlich Infrarotbereich. Dieses Licht trifft auf eine Sammellinse, sodass das Licht parallelisiert und anschließend durch einen Licht-Zerhacker gepulst wird. Das nun gepulste Licht trifft senkrecht auf ein Glan-Thomson Prisma, welches anhand eines Goniometer drehbar gelagert ist. Sobald der Lichtstrahl aus dem Prisma austritt, ist dieser linear polarisiert. Mit Hilfe des Goniometers lässt sich der Polarisationswinkel ablesen.

Unsere scheibenförmige Probe befindet sich in einem Elektromagneten, welcher durch ein Konstantstromgerät gespeist wird. So ist die Probe mit einem zeitlich konstanten Magnetfeld durchsetzt. Das linear polarisierte Licht durchquert den Elektromagneten und die verwendete Probe. Im Anschluss trifft der Lichtstrahl auf einen Interferenzfilter und wird so monochromatisiert. Das nahezu monochromatische Licht fällt auf einen zweiten Glan-Thomson Prisma und wird demnach zu einem ordentlichen und außerordentlichen Lichtstrahl geteilt. Die Lichtstrahlen sind orthogonal zueinander linear polarisiert. Die Strahlen treffen darauf jeweils auf einen Photowiderstand.

Beide Photowiderstände bestehen aus PbS und deren spektrale Empfindlichkeit befindet sich vom sichtbaren Bereich bis ins nahe Infrarot. Die Innenwiderstände sind über mehrere Zehnerpotenzen proportional zur einfallenden Lichtintensität. Ein Photowiderstand befindet

sich jeweils in einem geerdeten Schaltkreis, welcher über eine Spannungsquelle und einen Vorwiderstand verfügt. Wenn nun ein Gleichstrom ausgehend von der Spannungsquelle durch den Vorwiderstand geschickt wird, kann der entstehende Spannungsabfall gemessen werden. Dadurch, dass das Licht gepulst durch die Photowiderstände läuft, ist die am Photowiderstand abfallende Spannung auch eine Wechselspannung.

Die Signalspannung der Photowiderstände wird auf die beiden Eingänge des Differenzverstärkers gegeben. Die Ausgangsspannung ist demnach proportional zur Differenz der Eingangsspannungen. Wenn beide Signale in ihrer Phase und ihrem Betrag übereinstimmen, verschwindet das Signal. Zusätzlich wird ein Selektivverstärker eingebaut, welcher auf die Frequenz der Licht-Zerhacker eingestellt ist. Schlussendlich wird das Signal des Selektivverstärkers an ein Oszillograph angeschlossen.

## 4 Durchführung

Im Folgenden wird die Durchführung des Versuches beschrieben.

### 4.1 Justierung des Versuchsaufbaus

Zunächst werden Probe und Interferenzfilter aus der Apperatur entfernt. Die Halogenlampe wird bei einer Spannung bis ungefähr 11 V betrieben. Um sicherzustellen, dass die Lichtstrahlen korrekt auf die Photowiderstände abbilden, werden die Gehäuse der Photowiderstände abgebaut. Weiter wird überprüft, ob das einfallende Licht senkrecht auf den Polarisator trifft. Anschließend ist festzustellen, ob der polarisierte Lichtstrahl vollständig auf die Probe trifft. Es wird nun geschaut, ob die beiden Lichtstrahlen jeweils mittig auf die Photowiderstände abbilden. Durch Drehen des Polarisators sollte es anschließend möglich sein, das Licht zwischen den beiden Photowiderstände hin und her zu schalten. Dabei ist es wichtig darauf zu achten, dass ein guter Kontrast vorliegt.

Die Gehäuse der Photowiderstände werden im Folgenden wieder eingebaut. Daraufhin wird der Licht-Zerhacker eingebaut und auf eine Frequenz von ungefähr 443 Hz eingestellt. Nun wird die Mittenfrequenz des Selektivverstärkers auf den eingestellten Wert geregelt. Zur Justierung wird ein Photowiderstand an den Input des Selektivverstärkers geschlossen und anschließend wird ein Oszillograph an den Ausgang "Resonance" geschlossen. Es kann nun der Selektivverstärker auf das maximale Ausgangssignal eingestellt werden. Schlussendlich wird eine  $90^\circ$  Periodizität am Differenzverstärkers überprüft.

### 4.2 Messung der Faraday Rotation

Insgesamt wird die Faraday-Rotation für drei Proben vermessen. Dabei werden zwei n-dotierte Gallium Arsenid Proben verwendet und anschließen eine hochreine Probe

des Gallium Arsenid. Für alle drei Proben werden in Summe 9 unterschiedliche Interferenzfilter zwischen dem Bereich 1,06 µm bis 2,65 µm eingebaut. Um  $\theta$  zu messen wird so vorgegangen, dass bei maximalem Feld, beispielsweise bei positivem Feld, die Lichtintensität in beiden Strahlen auf den gleichen Wert eingeregelt wird, sodass die Spannung am Differenzverstärker minimal wird.

Es werden Messwerte für die positive und die negative Polung notiert. Diese benennt man daher als  $\theta_1$  und als  $\theta_2$ .

### 4.3 Messung der magnetischen Kraftflussdichte

Das externe zeitlich konstanten Magnetfeld wird mit einer Hallsonde in Richtung des einfal-lenden Lichts vermessen. Dafür werden zunächst der Photowiderstand und die Halterung der Interferenzfilters abgebaut, um anschließend die Hallsonde zu plazieren. Diese wird per Augenmaß bis zur Mitte des Elektromagneten eingeführt. Das Konstantstromgerät wird wie bisher verwendet auf einen maximalen Strom von ungefähr 10 V eingestellt. In einem Abstand von 1 mm wird die magnetische Flussdichte in einem Bereich von 10 mm jeweils vor und hinter der Mitte des Spaltes gemessen.

## 5 Auswertung

Die aufgenommenen Messdaten werden mithilfe der Python-Pakete Matplotlib [5] und NumPy [4] ausgewertet. Fehlerrechnung in erster Ordnung wird mittels [6] automati-siert.

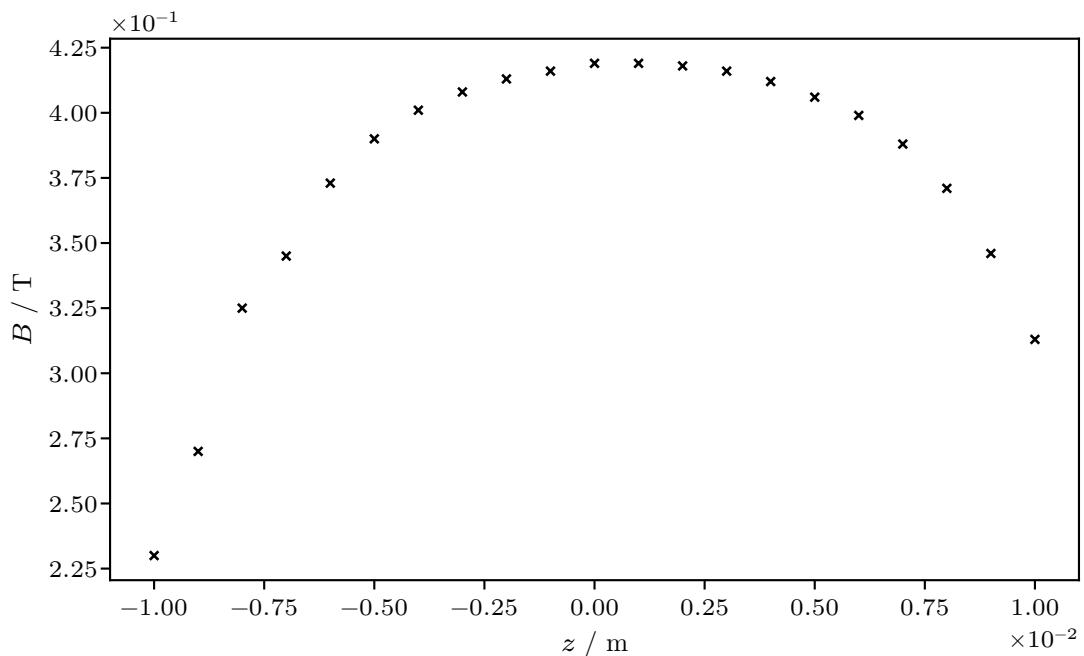
### 5.1 Magnetfeld

Die aufgenommenen Messwerte der magnetische Flussdichte werden in der Tabelle 1 darge-stellt. Es wurde die Flussdichte  $B$  an der jeweiligen Position  $z$  notiert. Die Reihenfolge in der die Werte dargestellt sind entspricht auch der Reihenfolge in der die Messwerte aufgenommen wurden. Dabei wurde die Mitte in dem Luftspalt per Auge abgeschätzt.

**Tabelle 1:** Messwerte der magnetischen Flussdichte um den Luftspalt.

$z / \text{mm}$	$B / \text{mT}$	$z / \text{mm}$	$B / \text{mT}$	$z / \text{mm}$	$B / \text{mT}$
-10	230	-3	408	4	412
-9	270	-2	413	5	406
-8	325	-1	416	6	399
-7	345	0	419	7	388
-6	373	1	419	8	371
-5	390	2	418	9	346
-4	401	3	416	10	313

Zur Bestimmung der maximalen Flussdichte werden die in der Tabelle 1 angegebenen Werte in dem Plot 5 aufgetragen.



**Abbildung 5:** Messung zum Verlauf des Magnetfeldes um den Luftspalt.

Der Maximalwert der magnetischen Flussdichte lässt anhand des Plots 5 ablesen und beträgt 419 mT.

## 5.2 Faraday-Rotation

Es wurden drei unterschiedliche Proben verwendet. Die jeweiligen Messwerte der Proben für die unterschiedlichen Interferenzfilter werden in Tabelle 2 dargestellt.

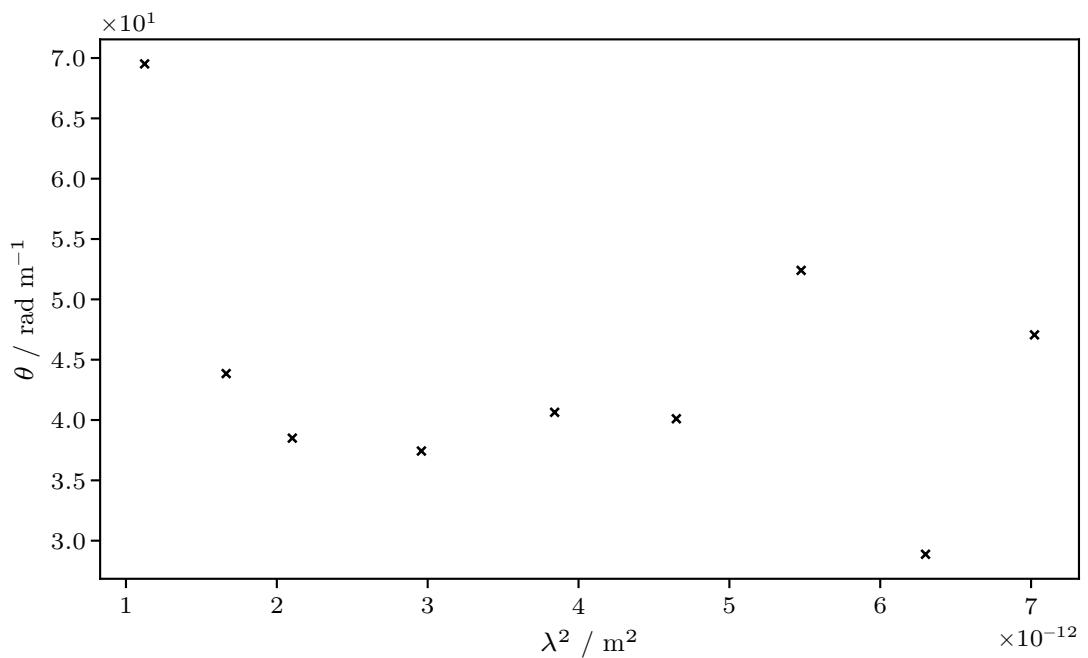
**Tabelle 2:** Messwerte der Rotationswinkel für beide Feldrichtungen.

$\lambda / \mu\text{m}$	n-GaAs (1)		n-GaAs (2)		GaAs	
	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$
1,060	157,33	146,50	157,42	146,17	273,00	249,67
1,290	83,00	76,17	157,50	147,83	268,33	253,00
1,450	84,00	78,00	155,08	147,17	268,92	255,42
1,720	82,67	76,83	157,33	148,00	265,75	256,33
1,960	78,50	72,17	162,08	151,50	260,08	253,33
2,156	77,00	70,75	163,17	151,67	257,58	252,25
2,340	53,25	45,08	189,17	176,83	232,17	227,17
2,510	208,08	203,58	214,58	197,25	213,00	199,42
2,650	250,75	243,42	255,83	242,42	250,00	244,25

### 5.2.1 Dotierte Proben

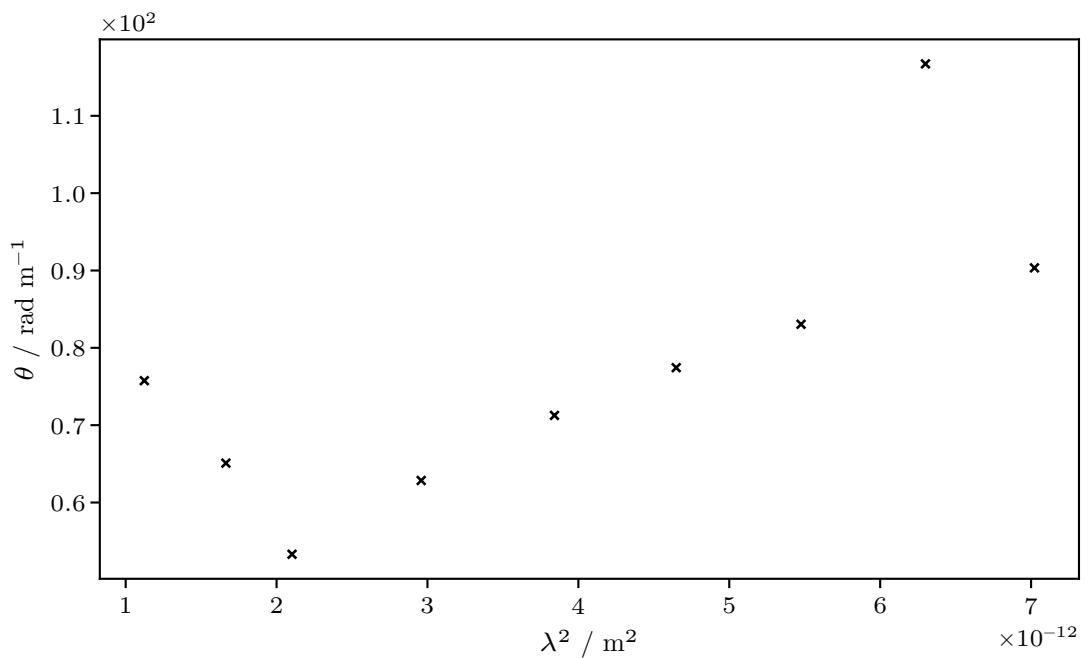
Es werden zunächst zwei verschiedene Dotierungsstärken des Galliumarsenids ausgewertet. Die mit n-GaAs (1) bezeichnete Probe hat die Eigenschaften  $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  und  $L = 1,36 \text{ mm}$ . Die mit n-GaAs (2) bezeichnete Probe hat die Eigenschaften  $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  und  $L = 1,296 \text{ mm}$ .

Für n-GaAs (1) wurde die Differenz der Messwerte auf eine Feldstärke von  $B$  an Stelle von  $2 \cdot B$  normiert. Anschließend wurden diese normierten Werte gegenüber der Wellenlänge der Interferenzfilter zum Quadrat im Plot 6 aufgetragen.



**Abbildung 6:** Messung zum normierten Drehwinkel für n-GaAs (1).

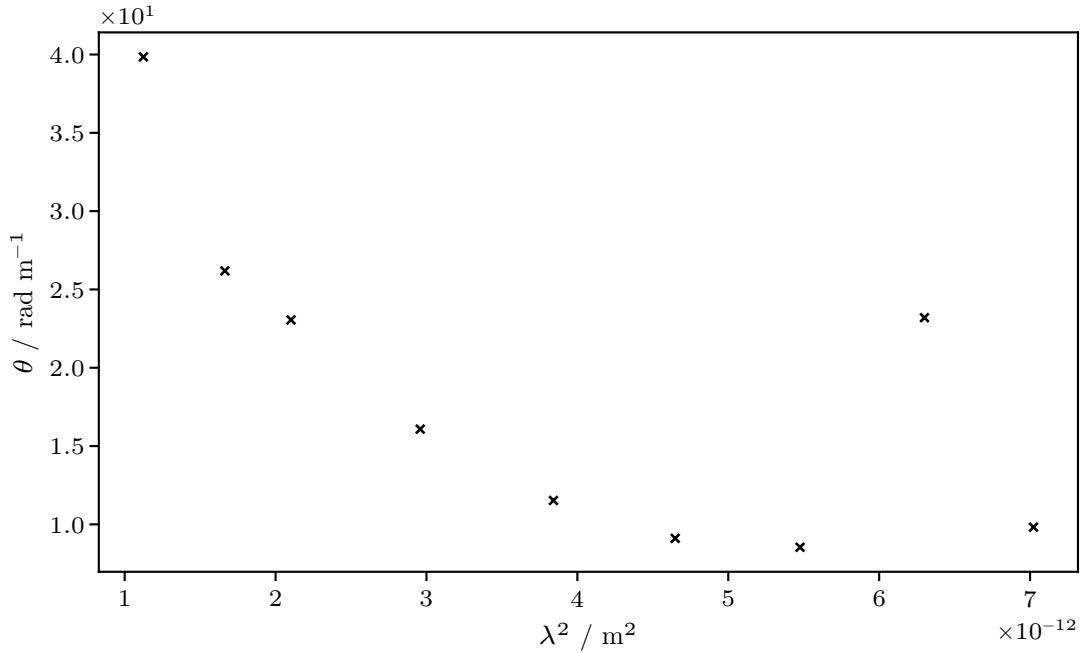
Für n-GaAs (2) wurde die Differenz der Messwerte auf gleicher Weise normiert. Dies wird äquivalent wie in Abbildung 6 im Plot 7 aufgetragen.



**Abbildung 7:** Messung zum normierten Drehwinkel für n-GaAs (2).

### 5.2.2 Reine Probe

Die hochreine GaAs Probe hat eine Dicke von  $L = 5,11 \text{ mm}$ . Für die Messwerte der reinen GaAs Probe wurde wie in Abschnitt 5.2.1 verfahren. Anschließend wurden die Winkel-Werte gegenüber der Wellenlänge der Interferenzfilter zum Quadrat in Plot 8 aufgetragen.



**Abbildung 8:** Messung zum normierten Drehwinkel für GaAs.

### 5.3 Effektive Masse

Anhand (13) lässt sich eine Ausgleichsgerade der Form

$$\frac{\theta}{L} = a\lambda^2 + b$$

an die Messdaten legen. Der Parameter  $b$  erlaubt dabei für eine Verschiebung der Ergebnisse und kompensiert somit derartige Ungenauigkeiten aus dem Versuchsaufbau. Der Koeffizient  $a$  lässt sich nach  $m^*$  auflösen, sodass

$$m^* = \sqrt{\frac{Ne_0^3 B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 n a}} \quad (14)$$

die effektive Masse beschreibt. Dazu werden die Naturkonstanten  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ,  $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  sowie die Materialeigenschaft  $n = 3,397$  [3] benötigt.

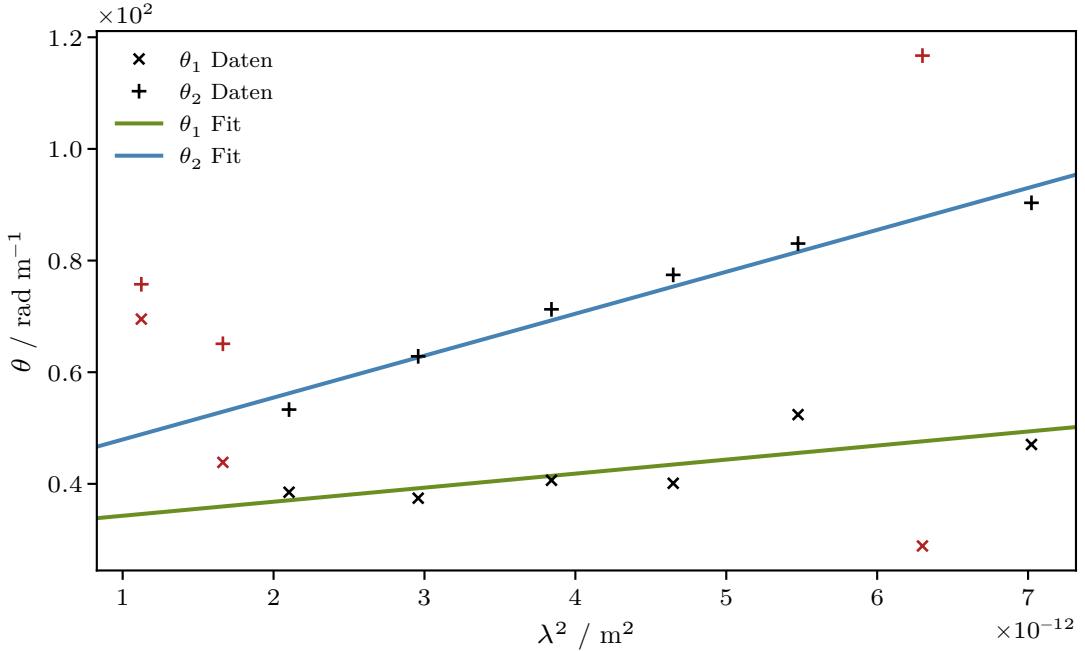
Für die Winkeldifferenz aus GaAs und n-GaAs (1) folgen

$$a = (2,52 \pm 1,05) \cdot 10^{12} \text{ rad m}^{-3} \quad b = (31,77 \pm 4,88) \text{ rad m}^{-1}$$

aus der Ausgleichsrechnung. Analog lassen sich

$$a = (7,51 \pm 0,66) \cdot 10^{12} \text{ rad m}^{-3} \quad b = (40,43 \pm 3,04) \text{ rad m}^{-1}$$

für GaAs und n-GaAs (2) bestimmen. Beim Fitting werden einige Datenpunkte ignoriert, im folgenden Abschnitt gehen wir näher darauf ein.



**Abbildung 9:** Messergebnisse und Ausgleichsgeraden zum Drehwinkel aus Wirkung der Leitungselektronen. Ausgelassene Datenpunkte sind hervorgehoben.

## 6 Diskussion

Aus der Differenz der Drehwinkel zwischen dotierten Proben und reiner Probe lässt sich in Abbildung 9 der Beitrag der quasifreien Elektronen isolieren. Wie zuvor erwähnt, werden dabei einige Messwerte ausgelassen. Diese Entscheidung ist hauptsächlich in der beobachteten Streuung begründet, die wahrscheinlich auf Verunreinigungen der Apparatur und unzulängliche Justierung der Bauteile zurückzuführen ist. Dazu kommt, dass die Nullkalibrierung teilweise durch Rauschen überdeckt wird, sodass die Ergebnisse nicht mehr brauchbar sind.

Aus dem auf diese Weise reduzierten Datensatz ergeben sich

$$m_1^* = (0,124 \pm 0,026) m_0 \quad m_2^* = (0,110 \pm 0,005) m_0$$

für die effektiven Massen der Leitungselektronen. Im Vergleich mit einem Literaturwert  $m^* = (0,078 \pm 0,004) m_0$  [7] zeigt sich zwar eine ähnliche Größenordnung, die von uns aufgeführten Unsicherheiten scheinen aber zu gering auszufallen. Um eine höhere Übereinstimmung zu erhalten, müssten systematische Einflüsse besser verstanden werden, die aber nicht ohne weiteres zugänglich sind.

Allgemein fallen einige weitere systematische Fehlerquellen auf. Optische Elemente wie Linsen, Filter und Prismen haben teilweise zerkratzte oder befleckte Oberflächen. Besonders für die Polarisatoren können schon geringfügige Fehleinstellungen für eine leicht elliptische Polarisation sorgen und die Resultate entsprechend verfälschen. Auch die geometrische Anordnung des Aufbaus ist fehleranfällig. So lässt sich etwa die Winkeleinstellung der Photowiderstände nicht vollständig fixieren. Zusätzlich wird der senkrechte Lichteinfall auf Probe und Prismen mit bloßem Auge abgeschätzt. Selbiges gilt für das Ablesen der händisch eingestellten Winkel am Goniometer.

Zuletzt sei noch die Beobachtung eines leicht abfallenden Spulenstroms erwähnt. Erklären lässt sich dieser mit einer Erwärmung des Elektromagneten und einer resultierenden Abschwächung der Flussdichte. Die Annahme eines zeitlich völlig konstanten Feldes ist somit strenggenommen nicht erfüllt, wobei die auftretende Variation im Vergleich zu den anderen Unsicherheiten verschwindend gering sein dürfte.

## Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 46, Der Faraday-Effekt*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2024.
- [2] „Band Structure of Gallium Arsenide“. In: Marvin L. Cohen und James R. Chelikowsky. *Electronic Structure and Optical Properties of Semiconductors*. Springer Berlin, Heidelberg, 1988, S. 103. ISBN: 978-3-642-97080-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97080-1>.
- [3] *Brechungsindex von Gallium Arsenid*. Filmetrics. 2024. URL: <https://www.filmetrics.de/refractive-index-database/GaAs/Gallium-Arsenide>.
- [4] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [5] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“ Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: <http://matplotlib.org/>. Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [6] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [7] W. G. Spitzer und J. M. Whelan. „Infrared Absorption and Electron Effective Mass in *n*-Type Gallium Arsenide“. In: *Phys. Rev.* 114 (1 Apr. 1959), S. 59–63. DOI: 10.1103/PhysRev.114.59. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.114.59>.
- [8] *Valence and Conduction Bands*. 2013. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/file:band\\_filling\\_diagram.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/file:band_filling_diagram.svg).

## Anhang

V46

443 Hz Lichtzerhacker  
Mean Spannung  $115 \text{ mV} \pm 25 \text{ mV}$

1. Probe GaAs n-dotiert  
 $N = 1,2 \cdot 10^{18} / \text{cm}^3$   
Dicke = 1,36 mm

•  $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$

•  $335,25^\circ \text{ (in } \text{°)}$   
↳ ungefähr  $110^\circ$  periodisch

•  $V \sim 65 \text{ mV}$

DISKUSSION

→ Fingerabdrücke  
Interferenzfilter

→ Konstantstromgerät

$\lambda$	$\theta_1$ (in °)	$\theta_2$ (in °)
1,06 μm	(335,25)   157,20	(75,40) ?   146,30
1,29 μm	83,00	76,10
1,45 μm	84,00	78,00
1,72 μm	82,40	76,50
1,96 μm	78,30	72,10
2,156 μm	77,00	70,45 → Feld vergessen
2,34 μm	53,75	40,20   45,05
2,510 μm	208,05	203,35
2,65 μm	250,45	243,25

$\lambda$ in nm	$\theta_1$	$\theta_2$	GaAs (n-dotiert)
1,06 μm	266,0   157,25	146,10	
1,29	157,30	147,50	$N = 2,8 \times 10^{19} / \text{cm}^3$
1,45	155,05	147,10	Dicke = 1,296 mm
1,72	157,20	148,00	
1,96	162,05	151,30	
2,156	163,10	151,40	
2,34	169,10	176,80	
2,510	214,35	197,15	
2,65	255,50	242,25	

gas AS (noch rein)		
$\lambda / \mu\text{m}$	$\Theta_1$	$\Theta_2$
1,06	273,0	249,40
1,29	268,20	253,00
1,45	268,55	255,25
1,72	265,45	256,20
1,96	260,05	253,20
2,156	257,35	252,15
2,34	232,10	224,10
2,510	213,00	199,25
2,65	250,00	244,15

$B / \text{mT}$	$z / \text{mm}$
230	-10
270	-9
325	-8
345	-7
373	-6
390	-5
401	-4
408	-3
413	-2
416	-1
419	0
419	1
418	2
416	3
412	4
406	5
399	6
388	7
371	8
346 313	9
	10