

V407

## **Fresnelsche Formeln**

Fritz Agildere  
fritz.agildere@udo.edu

Amelie Strathmann  
amelie.strathmann@udo.edu

Durchführung: 2. Mai 2023

Abgabe: 7. Mai 2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>2</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>2</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1 Methoden und Messparameter .....	8
4.2 Senkrechte Polarisierung .....	9
4.3 Parallele Polarisierung .....	13
<b>5 Diskussion</b>	<b>17</b>
<b>Literatur</b>	<b>18</b>
<b>Anhang</b>	<b>19</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, die Intensität von einfallender Strahlung und an der Si-Oberfläche reflektierter Strahlung in Abhängigkeit des Einfallswinkels zu messen. Anschließend werden die experimentell bestimmten Werte für die Brechungsindizes mit den theoretischen Werten verglichen.

# 2 Theorie

Als Grundlage des Versuches dient die elektromagnetische Wellentheorie, wobei die Ausbreitung von Licht mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \mu_0 \partial_t \vec{H} \quad (2)$$

beschrieben wird.  $\vec{H}$  und  $\vec{E}$  entsprechen dabei der magnetischen, beziehungsweise der elektrischen Feldstärke,  $\vec{j}$  der Stromdichte,  $\varepsilon$  der relativen Dielektrizitätskonstante und  $\mu$  der Permeabilität des Mediums.  $\varepsilon_0$  ist die Influenzkonstante und  $\mu_0$  die Induktionskonstante. Im Folgenden werden nicht-ferromagnetische und nicht elektrisch leitende Materialien betrachtet, somit gilt  $\mu \approx 1$  und  $\vec{j} = 0$ . Die elektrische und magnetische Arbeit

$$W_{\text{elektrisch}} := \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad \text{und}$$

$$W_{\text{magnetisch}} := \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2$$

stellen den Zusammenhang zwischen Energie pro Volumeneinheit eines elektrischen, beziehungsweise magnetischen Feldes dar. Der Poynting Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{und} \quad (3)$$

$$|\vec{S}| = v \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (4)$$

besitzt die Dimension Leistung/Fläche und stellt die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit eines elektromagnetischen Feldes dar. Wenn eine Welle reflektiert wird, wird diese an einer Grenzfläche zurückgeworfen. An dieser Grenzfläche ändert sich der Wellenwiderstand oder der Brechungsindex des Ausbreitungsmediums. Während eine Welle gebrochen wird, wechselt die Ausbreitungsrichtung der Welle durch eine räumliche Änderung des Brechungsindex des Mediums, das durchlaufen wird. Beim Einfallen einer Welle aus dem Vakuum auf eine Grenzfläche unter einem Winkel  $\alpha$ , wird ein Bruchteil dieser reflektiert und der andere dringt in das Medium ein. Der Lichtstrahl, welcher in das optisch dichtere Medium eindringt, erfährt eine Richtungsänderung und wird so gebrochen, dass der

Beugungswinkel  $\beta < \alpha$  ist. Es werden nur nicht absorbierende Medien verwendet und es gilt somit

$$\begin{aligned} S_e F_e &= S_r F_e + S_d F_d \quad \text{oder} \\ S_e \cos \alpha &= S_r \cos \alpha + S_d \cos \beta. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann umgeschrieben werden zu

$$c\varepsilon_0 \vec{E}_e^2 \cos \alpha = c\varepsilon_0 \vec{E}_r^2 \cos \alpha + v\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_d^2 \cos \beta. \quad (5)$$

Für den Brechungsindex, welcher eine optische Materialeigenschaft beschreibt, die angibt, wie schnell ein Lichtstrahl durch ein Medium dringt, ergibt sich das Verhältnis

$$n = \frac{c}{v}. \quad (6)$$

Aus den Maxwellschen Gleichungen (2) ergibt sich die Maxwellsche Relation

$$n = \varepsilon^2. \quad (7)$$

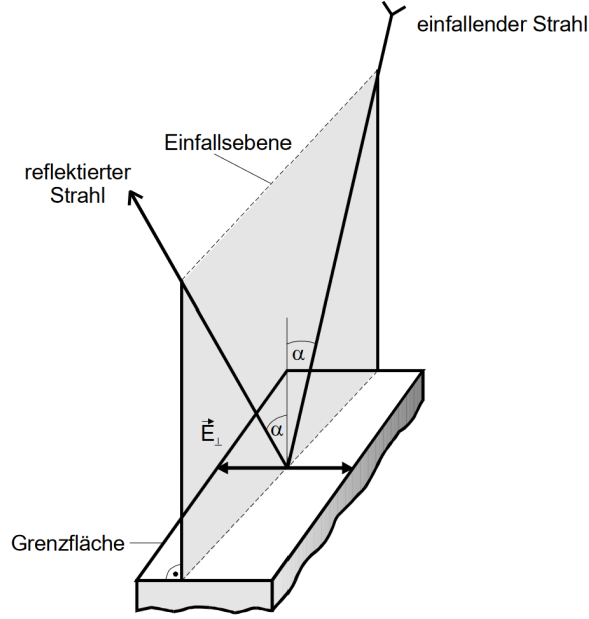
Aus der Maxwellschen Relation (7) und der Gleichung 5 ergibt sich

$$\left( \vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2 \right) \cos \alpha = n \vec{E}_d^2 \cos \beta. \quad (8)$$

Die Polarisationsrichtung der einfallenden Welle  $\vec{E}_e$  relativ zur Einfallsebene ist entweder senkrecht polarisiert oder parallel polarisiert, sodass

$$\vec{E}_e = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel \quad (9)$$

gegeben ist. Zunächst wird die Polarisation senkrecht zur Einfallsebene betrachtet. Für den parallel polarisierten Teil  $\vec{E}_\parallel$  geht hervor, dass dieser tangential zur Grenzfläche schwingt. In der Abbildung 1 wird die Reflexion eines Lichtstrahls an einer Grenzfläche dargestellt.



**Abbildung 1:** Reflexion und Brechung des senkrecht polarisierten Lichtstrahls. [1]

Da die Beträge der  $\vec{E}_\perp$  gleich ihren Tangentialkomponenten sind und keine Normalkomponente vorhanden ist kann aus den Stetigkeitsbedingungen die Beziehung

$$\vec{E}_{e\perp} + \vec{E}_{r\perp} = \vec{E}_{d\perp}$$

aufgestellt werden. Zusammen mit dem Snellius Brechungsgesetz

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (10)$$

ergeben sich die Fresnel Formeln

$$\begin{aligned} \vec{E}_{r\perp} &= -\vec{E}_{e\perp} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \\ \vec{E}_{r\perp} &= -\vec{E}_{e\perp} \frac{\left( \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right)^2}{n^2 - 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

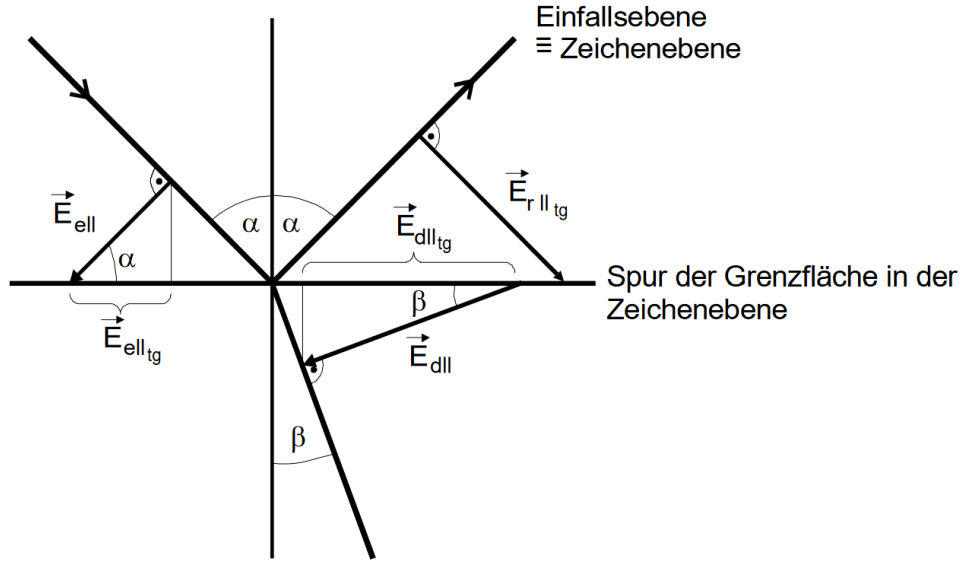
Für den streifenden Einfall  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  gilt

$$\vec{E}_{r\perp}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{E}_{r\perp}.$$

Wenn der Lichtstrahl senkrecht einfällt, also bei  $\alpha = 0$  gilt

$$\vec{E}_{r\perp}(0) = -\vec{E}_{r\perp} \frac{n-1}{n+1}.$$

Die Reflexion und Brechung des parallel zur Einfallsebene einfallenden Strahls ist in Abbildung 2 dargestellt.



**Abbildung 2:** Reflexion und Brechung des parallel polarisierten Lichtstrahls. [1]

Die parallel polarisierte Komponente  $\vec{E}_{\parallel}$  setzt sich zusammen aus einer tangentialen Komponente  $\vec{E}_{\parallel tg}$  und eine Komponente, welche normal zu Grenzfläche ist.

Aus den Stetigkeitsbedingungen und den Tangentialkomponenten der Vektoren  $\vec{E}_e$ ,  $\vec{E}_{r\parallel}$  und  $\vec{E}_{d\parallel}$  ergibt sich die Gleichung

$$\vec{E}_{r\parallel} = \vec{E}_e \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha + \cos \beta}. \quad (12)$$

Für das parallel polarisierte Licht lassen sich ebenfalls die Fresnelschen Gleichungen aufstellen

$$\begin{aligned} \vec{E}_{r\parallel} &= \vec{E}_e \left\| \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right\| \quad \text{und} \\ \vec{E}_{r\parallel}(\alpha) &= \vec{E}_e \left\| \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right\|. \end{aligned} \quad (13)$$

Für den senkrechten Einfall  $\alpha = 0$  gilt

$$\vec{E}_{r\parallel}(0) = \vec{E}_e \frac{n - 1}{n + 1}$$

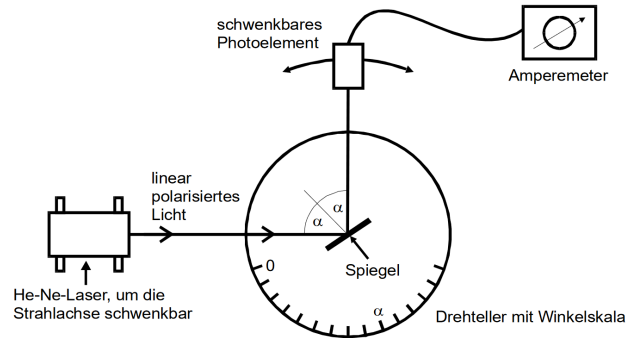
und für den streifenden Fall  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  gilt

$$\vec{E}_{r\parallel}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{E}_e.$$

Fällt Licht unter einem Winkel  $\alpha_0$ , dem sogenannten Brewsterschen Winkel, auf die Grenzfläche, so wird dieses nicht mehr reflektiert sondern dringt ganz in das brechende Medium ein.

### 3 Durchführung

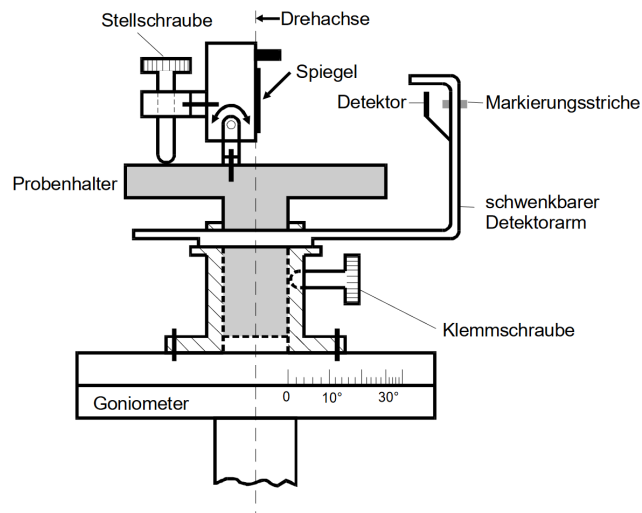
Zur Versuchsdurchführung wurde der Aufbau aus Abbildung 3 verwendet.



**Abbildung 3:** Schematische Darstellung der verwendeten Messapparatur. [1]

Der Lasertstrahl des He-Ne-Lasers wird mithilfe des Polarisationsfilters polarisiert. Mit Hilfe des Goniometers lässt sich der Spiegel einstellen. Gemessen wird mit einem schwenkbaren Photoelement.

In der Abbildung 4 ist das Goniometer mit aufgesetztem Probenhalter dargestellt.



**Abbildung 4:** Schematische Darstellung des Goniometers mit aufgesetztem Probenhalter. [1]

Der Spiegel ist mit einer Stellschraube befestigt. Unterhalb des Probehalters ist die Haltung des Detektors befestigt.

Bevor die Messung beginnt, werden der Dunkelstrom und der Photostrom des direkten Laserstrahls aufgenommen. Daraufhin muss die Apparatur zunächst justiert werden. Der Probehalter wird aus dem Strahlengang entfernt und der Detektor wird so eingestellt, dass der Laserstrahl direkt auf diesen trifft. Es wird der Polarisationsfilter in den Strahlengang des Lasers eingebaut. Als erstes wird die Messung für s-polarisiertes Licht durchgeführt, dementsprechend wird der Winkel des Polarisationsfilters auf 0 gestellt. Der Drehteller mit der Winkelskala wird auf 0° eingestellt. Die Skala des Drehtellers wird variiert. Die Messung startet bei 6°, in 2°-Schritten wird der Winkel größer, dabei werden die Messwerte für die Stromstärke der Intensität aufgenommen. Der Vorgang endet bei 86°. Analog verläuft der Mess-Vorgang für den Polarisationswinkel  $\frac{\pi}{2}$ .



## 4 Auswertung

Unter Verwendung der bis zu dieser Stelle beschriebenen Zusammenhänge werden die gewonnenen Messdaten nun untersucht.

### 4.1 Methoden und Messparameter

Für alle folgenden Messungen wird der verwendete Laser in einem Wellenlängenbereich von  $\lambda_0 = (681 \pm 3) \text{ nm}$  betrieben. Allgemein ist der Brechungsindex  $n$  von Dispersion betroffen und daher nur für  $\lambda_0$  gültig. Der Dunkelstrom am Detektor beträgt dabei  $I_D = (4,7 \pm 0,2) \text{ nA}$  und erlaubt den Messwert  $\check{I}$  mit der Korrektur

$$I = \check{I} - I_D$$

um mögliche Streulichteinflüsse zu bereinigen. Damit gibt  $I_0 = (490 \pm 20) \mu\text{A}$  die totale Intensität des direkten Laserlichts an, indem die Proportionalität zwischen Photostrom und Flächenleistungsdichte ausgenutzt wird. Die Intensität erreicht für einen Winkel  $\alpha = 49^\circ$  am Polarisationsfilter bei  $I = (38 \pm 2) \text{ nA}$  ihr Minimum.

Der gewichtete Mittelwert einer Messreihe  $x_k$  mit Gewichten  $w_k$  ist über

$$x = \frac{\sum_k w_k x_k}{\sum_k w_k}$$

gegeben, wobei hier die reziproken Varianzen  $w_k = \sigma_{x_k}^{-2}$  gesetzt werden. Der Ablesefehler lässt sich auf 2 % der eingestellten Skala schätzen, abrupte Sprünge in der angegebenen Abweichung sind also darauf zurückzuführen. Um ein Maß für die Sicherheit der mittels `scipy.optimize.curve_fit` [7] bestimmten Optimierungsparameter zu erhalten, wird die Quadratwurzel der Diagonalelemente der Kovarianzmatrix gebildet. Die Bibliothek `uncertainties.unumpy` [5] dient weiter zur automatisierten Fehlerfortpflanzung, welche nach Gauß für unabhängige Messgrößen als Ausdruck der Form

$$\sigma_f^2 = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

formuliert ist. Grafische Darstellungen der Ergebnisse erzeugt `matplotlib.pyplot` [4] indem die Datenstrukturen `numpy.array` und `numpy.meshgrid` [3] verwendet werden.

Auf diese Weise werden für beide Polarisationsfälle die analytischen Lösungen von  $n$  evaluiert. Die verschiedenen Lösungswege werden bei einem festen Amplitudenverhältnis  $E/E_0 = \pm 0,15$  über die entsprechenden Niveaus eines Konturplots gelegt, anhand der Grafik lässt sich dann deren Gültigkeit prüfen.

## 4.2 Senkrechte Polarisation

Aus den Fresnelschen Formeln (11) ergibt sich bei senkrechter Polarisationsrichtung

$$-E/E_0 = \frac{1}{n^2-1} \left( \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right)^2 \quad (\text{LS})$$

für das Amplitudenverhältnis. Umstellen und Anwenden der Wurzel liefert den Ausdruck

$$\sqrt{(1-n^2)E/E_0} + \cos \alpha = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

sowie durch erneutes beideseitiges Quadrieren

$$(1-n^2)E/E_0 + 2 \cos \alpha \sqrt{(1-n^2)E/E_0} + \cos^2 \alpha = n^2 - \sin^2 \alpha$$

als weiterführenden Term. Wegen  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  kann

$$(1-n^2)E/E_0 + 2 \cos \alpha \sqrt{(1-n^2)E/E_0} = n^2 - 1$$

geschrieben werden. Division durch sowie anschließendes Auflösen nach  $n^2-1$  produziert

$$\frac{1}{1-n^2} = E_0/E \left( \frac{1+E/E_0}{2 \cos \alpha} \right)^2$$

und stellt so eine separierte Beziehung zu  $n$  auf. Schließlich ist mit

$$n = \sqrt{1 - E/E_0 \left( \frac{2 \cos \alpha}{1 + E/E_0} \right)^2}$$

der Brechungsindex aufgestellt. Einsetzen des Zusammenhangs

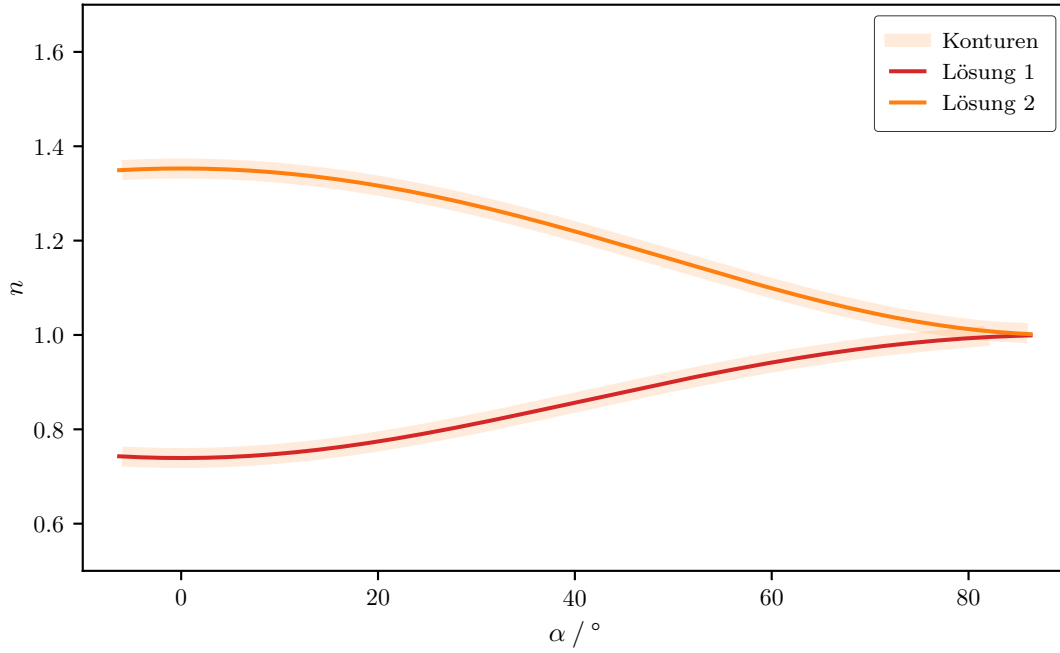
$$E/E_0 = \pm \sqrt{I/I_0}$$

führt dann über die Fallunterscheidung

$$n = \sqrt{1 - \sqrt{I/I_0} \left( \frac{2 \cos \alpha}{1 + \sqrt{I/I_0}} \right)^2} \quad (\text{L1})$$

$$n = \sqrt{1 + \sqrt{I/I_0} \left( \frac{2 \cos \alpha}{1 - \sqrt{I/I_0}} \right)^2} \quad (\text{L2})$$

zwei Lösungswege ein, welche in Abbildung 5 dargestellt sind.



**Abbildung 5:** Fälle (L1) und (L2) mit hinterlegtem Konturplot der impliziten Lösung (LS).

Die Zweige (L1) und (L2) stimmen mit dem Konturplot der Ausgangsgleichung (LS) überein. Aus der allgemein für sichtbare Wellenlängen angenommenen Forderung  $n \geq 1$  folgt, dass Lösung (L2) zu wählen ist. Diese wird verwendet, um aus den in Tabelle 1 geführten Winkeln und Photoströmen den jeweiligen Brechungsindex zu bestimmen.

Aus den so gewonnenen fehlerbehafteten Werten ergibt sich

$$n = 1,523 \pm 0,022$$

als gewichtetes Mittel der Messreihe. Um eine Ausgleichsrechnung entlang der Daten durchzuführen, wird (LS) in Abbildung 6 um einen Skalierungsfaktor  $s$  zu

$$I/I_0 = s \left( \frac{1}{n^2 - 1} (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)^2 \right)^2$$

erweitert. Die Einführung dieses zusätzlichen Freiheitsgrades ermöglicht eine bessere Behandlung von systematischen Messfehlern und weiteren stauchenden oder streckenden Störeinflüssen, da der Regressionsalgorithmus derartige Abweichungen vom theoretischen Verlauf nicht mehr ausschließlich über eine Verschiebung von  $n$  ausgleichen muss.

Dazu sind die Optimierungsparameter mit

$$n = 3,642 \pm 0,071$$

$$s = 0,457 \pm 0,009$$

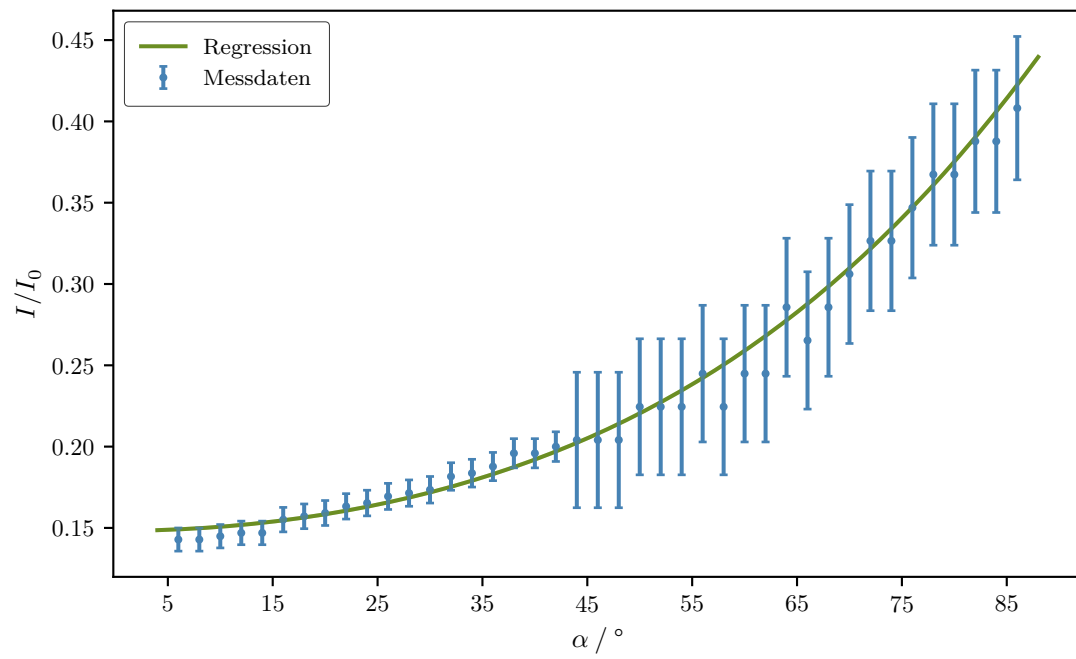
bemessen. Eine einfache Regression entlang (LS) liefert stattdessen

$$n = 2,134 \pm 0,041$$

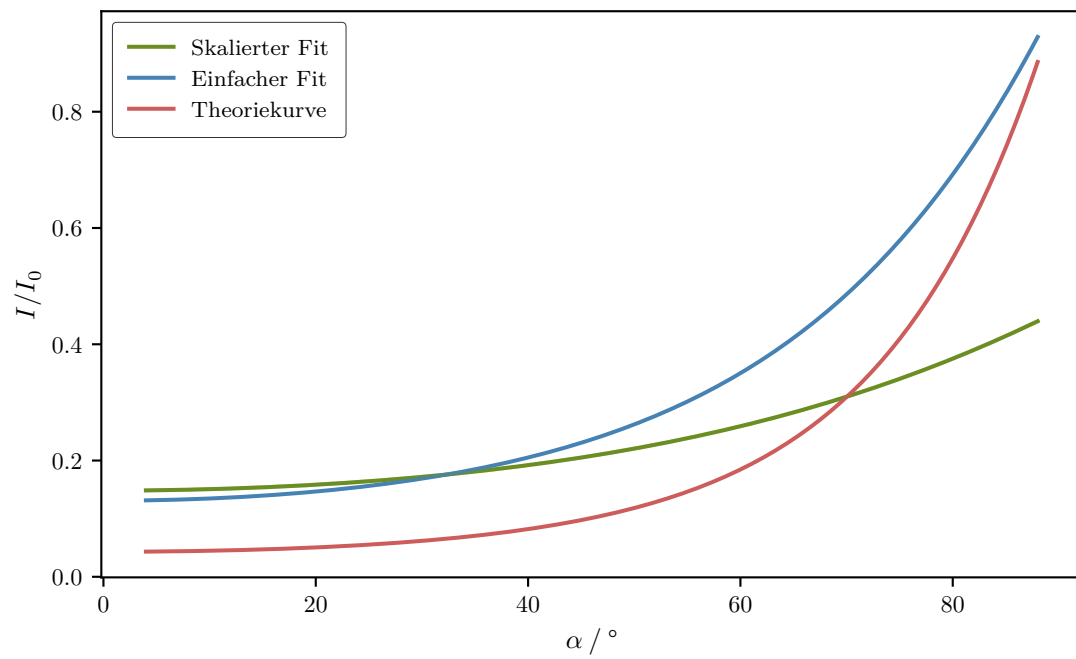
und wird in Abbildung 7 neben den Kurven der zuvor ermittelten Indizes  $n$  aufgeführt. Die skalierte Regression dient hier als genäherte Veranschaulichung der Messdaten und ermöglicht einen übersichtlichen Vergleich der verschiedenen Verläufe.

**Tabelle 1:** Messergebnisse bei  $0^\circ$  am Polarisationsfilter für senkrecht polarisiertes Licht.

$\alpha / ^\circ$	$I / \mu\text{A}$	$I/I_0$	$n$	$\alpha / ^\circ$	$I / \mu\text{A}$	$I/I_0$	$n$
6	$70 \pm 2$	$0,143 \pm 0,007$	$2,206 \pm 0,048$	44	$100 \pm 20$	$0,204 \pm 0,042$	$2,027 \pm 0,207$
8	$70 \pm 2$	$0,143 \pm 0,007$	$2,198 \pm 0,048$	46	$100 \pm 20$	$0,204 \pm 0,042$	$1,975 \pm 0,198$
10	$71 \pm 2$	$0,145 \pm 0,007$	$2,202 \pm 0,048$	48	$100 \pm 20$	$0,204 \pm 0,042$	$1,921 \pm 0,189$
12	$72 \pm 2$	$0,147 \pm 0,007$	$2,204 \pm 0,048$	50	$110 \pm 20$	$0,224 \pm 0,042$	$1,957 \pm 0,189$
14	$72 \pm 2$	$0,147 \pm 0,007$	$2,190 \pm 0,048$	52	$110 \pm 20$	$0,224 \pm 0,042$	$1,896 \pm 0,179$
16	$76 \pm 2$	$0,155 \pm 0,008$	$2,227 \pm 0,050$	54	$110 \pm 20$	$0,224 \pm 0,042$	$1,834 \pm 0,168$
18	$77 \pm 2$	$0,157 \pm 0,008$	$2,222 \pm 0,050$	56	$120 \pm 20$	$0,245 \pm 0,042$	$1,851 \pm 0,166$
20	$78 \pm 2$	$0,159 \pm 0,008$	$2,214 \pm 0,049$	58	$110 \pm 20$	$0,224 \pm 0,042$	$1,709 \pm 0,147$
22	$80 \pm 2$	$0,163 \pm 0,008$	$2,216 \pm 0,050$	60	$120 \pm 20$	$0,245 \pm 0,042$	$1,714 \pm 0,144$
24	$81 \pm 2$	$0,165 \pm 0,008$	$2,203 \pm 0,049$	62	$120 \pm 20$	$0,245 \pm 0,042$	$1,646 \pm 0,132$
26	$83 \pm 2$	$0,169 \pm 0,008$	$2,200 \pm 0,050$	64	$140 \pm 20$	$0,286 \pm 0,042$	$1,702 \pm 0,136$
28	$84 \pm 2$	$0,171 \pm 0,008$	$2,182 \pm 0,049$	66	$130 \pm 20$	$0,265 \pm 0,042$	$1,565 \pm 0,115$
30	$85 \pm 2$	$0,173 \pm 0,008$	$2,161 \pm 0,049$	68	$140 \pm 20$	$0,286 \pm 0,042$	$1,544 \pm 0,110$
32	$89 \pm 2$	$0,182 \pm 0,008$	$2,173 \pm 0,050$	70	$150 \pm 20$	$0,306 \pm 0,043$	$1,516 \pm 0,104$
34	$90 \pm 2$	$0,184 \pm 0,009$	$2,147 \pm 0,049$	72	$160 \pm 20$	$0,327 \pm 0,043$	$1,479 \pm 0,097$
36	$92 \pm 2$	$0,188 \pm 0,009$	$2,129 \pm 0,049$	74	$160 \pm 20$	$0,327 \pm 0,043$	$1,395 \pm 0,082$
38	$96 \pm 2$	$0,196 \pm 0,009$	$2,130 \pm 0,049$	76	$170 \pm 20$	$0,347 \pm 0,043$	$1,348 \pm 0,073$
40	$96 \pm 2$	$0,196 \pm 0,009$	$2,084 \pm 0,048$	78	$180 \pm 20$	$0,367 \pm 0,043$	$1,294 \pm 0,063$
42	$98 \pm 2$	$0,200 \pm 0,009$	$2,057 \pm 0,047$	80	$180 \pm 20$	$0,367 \pm 0,043$	$1,213 \pm 0,047$
				82	$190 \pm 20$	$0,388 \pm 0,044$	$1,157 \pm 0,036$
				84	$190 \pm 20$	$0,388 \pm 0,044$	$1,091 \pm 0,021$
				86	$200 \pm 20$	$0,408 \pm 0,044$	$1,047 \pm 0,011$



**Abbildung 6:** Fehlerbehaftete Messdaten und skalierte Ausgleichskurve nach (LS).



**Abbildung 7:** Vergleich der bestimmten Brechungsindizes mittels passender Intensitätsverläufe.

### 4.3 Parallele Polarisation

Aus den Fresnelschen Formeln (13) ergibt sich bei paralleler Polarisationsrichtung

$$\frac{E}{E_0} = \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (\text{LP})$$

für das Amplitudenverhältnis. Umstellen liefert die Gleichung

$$(E/E_0 - 1) n^2 \cos \alpha = -(E/E_0 + 1) \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

sowie durch Division und anschließendes Quadrieren

$$\left( \frac{E/E_0 - 1}{E/E_0 + 1} \right)^2 n^4 \cos^2 \alpha = n^2 - \sin^2 \alpha$$

als weiterführenden Term. Daraus folgt

$$n^4 - \left( \frac{E/E_0 + 1}{E/E_0 - 1} \right)^2 \frac{n^2}{\cos^2 \alpha} + \left( \frac{E/E_0 + 1}{E/E_0 - 1} \right)^2 \tan^2 \alpha = 0$$

und unter Anwendung quadratischer Ergänzung

$$n = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{E/E_0 + 1}{E/E_0 - 1} \right)^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cos^4 \alpha} \left( \frac{E/E_0 + 1}{E/E_0 - 1} \right)^4 - \left( \frac{E/E_0 + 1}{E/E_0 - 1} \right)^2 \tan^2 \alpha}}$$

als Ausdruck des Brechungsindex. Einsetzen des Zusammenhangs

$$E/E_0 = \pm \sqrt{I/I_0}$$

produziert nun vier verschiedene Fälle

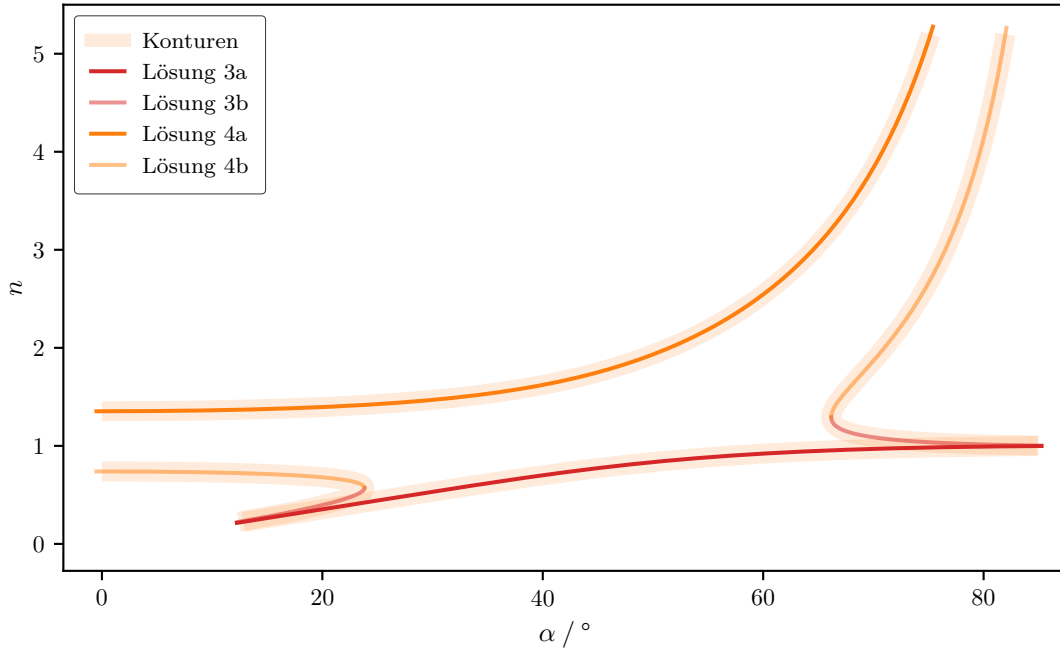
$$n = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} + 1}{\sqrt{I/I_0} - 1} \right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4 \cos^4 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} + 1}{\sqrt{I/I_0} - 1} \right)^4 - \left( \frac{\sqrt{I/I_0} + 1}{\sqrt{I/I_0} - 1} \right)^2 \tan^2 \alpha}} \quad (\text{L3a})$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} - 1}{\sqrt{I/I_0} + 1} \right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4 \cos^4 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} - 1}{\sqrt{I/I_0} + 1} \right)^4 - \left( \frac{\sqrt{I/I_0} - 1}{\sqrt{I/I_0} + 1} \right)^2 \tan^2 \alpha}} \quad (\text{L3b})$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} + 1}{\sqrt{I/I_0} - 1} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4 \cos^4 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} + 1}{\sqrt{I/I_0} - 1} \right)^4 - \left( \frac{\sqrt{I/I_0} + 1}{\sqrt{I/I_0} - 1} \right)^2 \tan^2 \alpha}} \quad (\text{L4a})$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} - 1}{\sqrt{I/I_0} + 1} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4 \cos^4 \alpha} \left( \frac{\sqrt{I/I_0} - 1}{\sqrt{I/I_0} + 1} \right)^4 - \left( \frac{\sqrt{I/I_0} - 1}{\sqrt{I/I_0} + 1} \right)^2 \tan^2 \alpha}} \quad (\text{L4b})$$

für die Lösung, welche in Abbildung 8 dargestellt sind.



**Abbildung 8:** Lösungsfälle (L3a), (L3b), (L4a) und (L4b) mit hinterlegtem Konturplot der zugehörigen impliziten Lösung (LP).

Auch für parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht passen die Verläufe der Zweige zu den implizit aus (LP) gewonnenen Lösungen der Konturniveaus. Da neben  $n \geq 1$  auch Stetigkeit auf dem Messintervall von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  gefordert ist, muss Lösungsfall (L4a) zur weiteren Berechnung der in Tabelle 2 nachgehaltenen Ergebnisse für den Brechungsindex verwendet werden.

Auf gleiche Weise wie für senkrechte Polarisationsrichtung ergibt sich daraus

$$n = 3,527 \pm 0,018$$

als über die Varianz gewichteter Mittelwert. Der skalierte Ansatz in Abbildung 9 lautet

$$I/I_0 = s \left( \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)^2$$

mit der gleichen Begründung wie für die senkrechte Polarisation und liefert

$$n = 4,265 \pm 0,053 \quad s = 0,282 \pm 0,010$$

zur Approximation des Messverlaufs, während aus einfacher Ausgleichsrechnung

$$n = 3,798 \pm 0,156$$

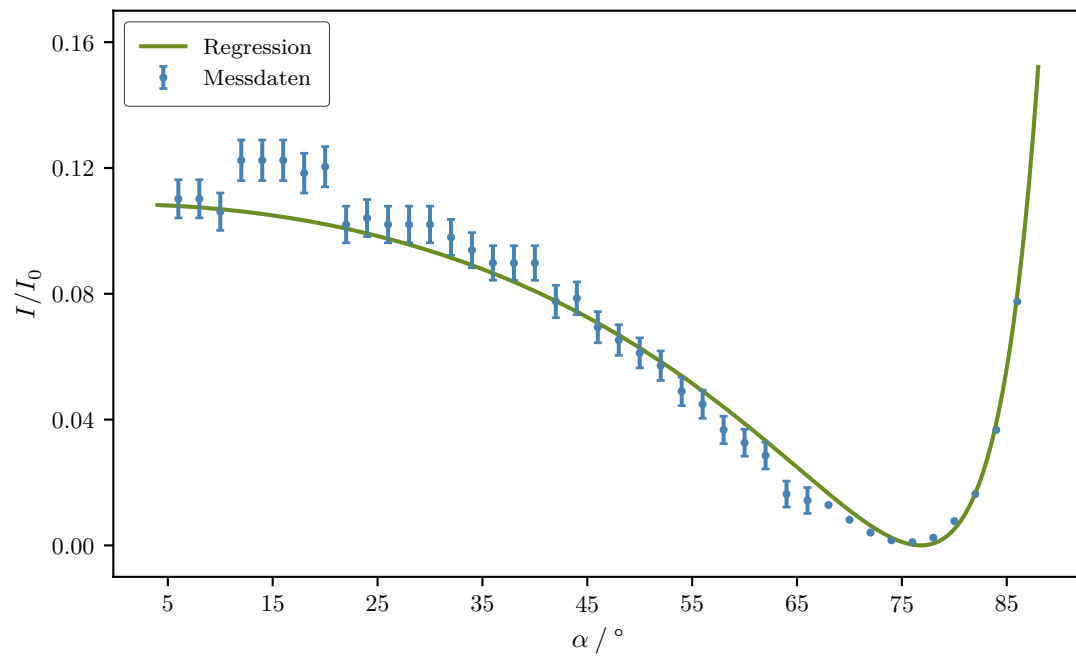
zur Optimierung folgt. Die entsprechenden Kurven sind ebenfalls zum grafischen Vergleich in Abbildung 10 wiedergegeben.

**Tabelle 2:** Messergebnisse bei 90° am Polarisationsfilter für parallel polarisiertes Licht.

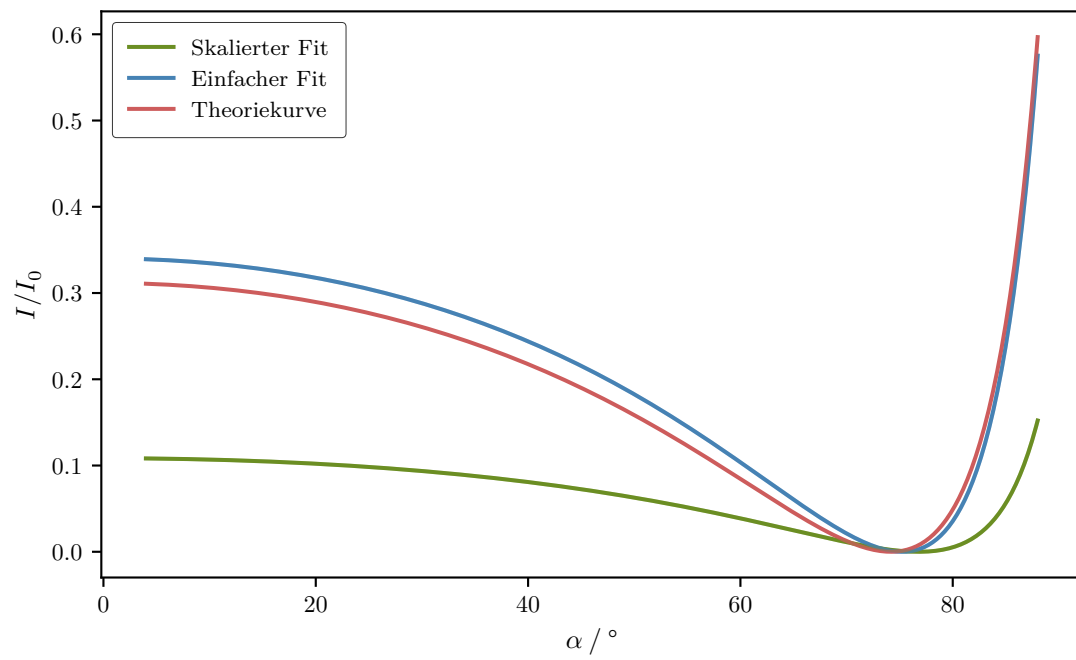
$\alpha / ^\circ$	$I / \mu\text{A}$	$I/I_0$	$n$	$\alpha / ^\circ$	$I / \mu\text{A}$	$I/I_0$	$n$
6	$54,0 \pm 2,0$	$0,1102 \pm 0,0061$	$2,002 \pm 0,041$	48	$32,0 \pm 2,0$	$0,0653 \pm 0,0049$	$2,396 \pm 0,055$
8	$54,0 \pm 2,0$	$0,1102 \pm 0,0061$	$2,009 \pm 0,042$	50	$30,0 \pm 2,0$	$0,0612 \pm 0,0048$	$2,449 \pm 0,057$
10	$52,0 \pm 2,0$	$0,1061 \pm 0,0060$	$1,989 \pm 0,041$	52	$28,0 \pm 2,0$	$0,0571 \pm 0,0047$	$2,511 \pm 0,059$
12	$60,0 \pm 2,0$	$0,1224 \pm 0,0065$	$2,113 \pm 0,045$	54	$24,0 \pm 2,0$	$0,0490 \pm 0,0045$	$2,528 \pm 0,062$
14	$60,0 \pm 2,0$	$0,1224 \pm 0,0065$	$2,126 \pm 0,045$	56	$22,0 \pm 2,0$	$0,0449 \pm 0,0045$	$2,607 \pm 0,065$
16	$60,0 \pm 2,0$	$0,1224 \pm 0,0065$	$2,142 \pm 0,046$	58	$18,0 \pm 2,0$	$0,0367 \pm 0,0043$	$2,634 \pm 0,070$
18	$58,0 \pm 2,0$	$0,1184 \pm 0,0063$	$2,132 \pm 0,045$	60	$16,0 \pm 2,0$	$0,0326 \pm 0,0043$	$2,734 \pm 0,076$
20	$59,0 \pm 2,0$	$0,1204 \pm 0,0064$	$2,168 \pm 0,047$	62	$14,0 \pm 2,0$	$0,0286 \pm 0,0042$	$2,849 \pm 0,082$
22	$50,0 \pm 2,0$	$0,1020 \pm 0,0058$	$2,056 \pm 0,043$	64	$8,0 \pm 2,0$	$0,0163 \pm 0,0041$	$2,792 \pm 0,104$
24	$51,0 \pm 2,0$	$0,1041 \pm 0,0059$	$2,097 \pm 0,044$	66	$7,0 \pm 2,0$	$0,0143 \pm 0,0041$	$2,975 \pm 0,116$
26	$50,0 \pm 2,0$	$0,1020 \pm 0,0058$	$2,110 \pm 0,045$	68	$6,3 \pm 0,2$	$0,0128 \pm 0,0007$	$3,209 \pm 0,021$
28	$50,0 \pm 2,0$	$0,1020 \pm 0,0058$	$2,142 \pm 0,046$	70	$4,0 \pm 0,2$	$0,0082 \pm 0,0005$	$3,365 \pm 0,022$
30	$50,0 \pm 2,0$	$0,1020 \pm 0,0058$	$2,179 \pm 0,047$	72	$2,0 \pm 0,2$	$0,0041 \pm 0,0004$	$3,542 \pm 0,027$
32	$48,0 \pm 2,0$	$0,0979 \pm 0,0057$	$2,186 \pm 0,047$	74	$0,8 \pm 0,2$	$0,0016 \pm 0,0004$	$3,805 \pm 0,042$
34	$46,0 \pm 2,0$	$0,0939 \pm 0,0056$	$2,197 \pm 0,048$	76	$0,5 \pm 0,02$	$0,0010 \pm 0,0001$	$4,291 \pm 0,008$
36	$44,0 \pm 2,0$	$0,0898 \pm 0,0055$	$2,211 \pm 0,048$	78	$1,2 \pm 0,2$	$0,0024 \pm 0,0004$	$5,215 \pm 0,046$
38	$44,0 \pm 2,0$	$0,0898 \pm 0,0055$	$2,266 \pm 0,050$	80	$3,8 \pm 0,2$	$0,0077 \pm 0,0005$	$6,798 \pm 0,041$
40	$44,0 \pm 2,0$	$0,0898 \pm 0,0055$	$2,328 \pm 0,051$	82	$8,0 \pm 0,2$	$0,0163 \pm 0,0008$	$9,236 \pm 0,058$
42	$38,0 \pm 2,0$	$0,0775 \pm 0,0052$	$2,279 \pm 0,051$	84	$18,0 \pm 0,2$	$0,0367 \pm 0,0016$	$14,067 \pm 0,119$
44	$38,5 \pm 2,0$	$0,0786 \pm 0,0052$	$2,364 \pm 0,052$	86	$38,0 \pm 0,2$	$0,0775 \pm 0,0032$	$25,381 \pm 0,316$
46	$34,0 \pm 2,0$	$0,0694 \pm 0,0050$	$2,351 \pm 0,053$				

Aus Tabelle 2 lässt sich eine minimale Intensität von  $I = (0,50 \pm 0,02) \mu\text{A}$  bei  $\alpha_0 = 76^\circ$  ablesen. Mithilfe der für den Brewsterwinkel geltenden Beziehung  $n = \tan \alpha_0$  ergibt sich daraus  $n = 4,011$  als Näherung für den Brechungsindex.





**Abbildung 9:** Fehlerbehaftete Messdaten und skalierte Ausgleichskurve nach (LP).



**Abbildung 10:** Vergleich der bestimmten Brechungsindizes mittels passender Intensitätsverläufe.

## 5 Diskussion

Als Literaturwert kann für Si ein Brechungsindex von  $n = 3,805$  bei einer Wellenlänge  $\lambda = 681,20 \text{ nm}$  angenommen werden [2].

Bei der Messung senkrechter Polarisation besitzt der skalierte Optimierungsparameter  $n = 3,642 \pm 0,071$  die beste Übereinstimmung, der einfache Fit wie auch der mittlere Brechungsindex liegen mit  $n = 2,134 \pm 0,041$  und  $n = 1,523 \pm 0,022$  deutlich darunter. Als Konsequenz der nach Fehlergröße gewichteten Regressionseingabe zeigt der einfache Fit in Abbildung 7 für kleine Winkel eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten, da in diesem Bereich durch Wahl der Skala geringere Abweichungen auftreten. Bei größeren Winkeln divergiert der Fit von der Messverteilung, nähert sich aber der Theoriekurve an, welche zuvor unterhalb der approximierten Messung liegt.

Für parallel polarisiertes Licht verträgt sich die Optimierung  $n = 3,798 \pm 0,156$  am besten mit dem Literaturwert, dicht gefolgt vom gewichteten Mittelwert  $n = 3,527 \pm 0,018$  der Messreihe. Der skalierte Fit liegt mit  $n = 4,265 \pm 0,053$  oberhalb der erwarteten Größe. Entsprechend ist das Minimum der durch die Regression über Skalierungsfaktor genäherten Messreihe in Abbildung 10 zu etwas größeren Winkeln hin verschoben, mit

$$\alpha_0 = \arctan n$$

entspricht es dem Brewsterwinkel, bei dem der parallel polarisierte Lichtanteil vollständig absorbiert wird. Die Kurven aus Theorie und einfacher Ausgleichsrechnung stimmen wegen ihrer ähnlichen Ergebnisse gut miteinander überein, nähern sich den Messergebnissen aber nur im Bereich des Intensitätsminimums lokal an. Das aus den Messdaten entnommene Minimum beim Brewsterwinkel  $\alpha_0 = 76^\circ$  stimmt annähernd mit dem aus der Literatur abgeleiteten Wert von  $\alpha_0 = 75,27^\circ$  überein und liefert  $n = 4,011$  als Ergebnis, das sich ebenfalls gut mit dem Literaturwert verträgt.

Anhand der mit  $s$  skalierten Ausgleichsrechnungen fällt auf, dass die Verhältnisse der Intensitäten beider Polarisationsrichtungen jeweils Stauchungsfaktoren von  $0,457 \pm 0,009$  beziehungsweise  $0,282 \pm 0,010$  zum Theorieverlauf aufweisen. Diese Tatsache führt auf die naheliegende Korrektur, statt der ungefilterten Gesamtintensität jeweils  $I_0$  auf die direkte Intensität der betrachteten Polarisationsrichtung zu setzen. Damit ist dann auch die konkrete Gültigkeit der Fresnelschen Formeln erfüllt, welche sich auf die Verhältnisse gleich polarisierter Wellen beschränkt, und erfordert in jedem Fall nur eine zusätzliche Messung. Es ist davon auszugehen, dass die Berücksichtigung dieses Vorgehens die wesentlichen Abweichungen der Auswertungsergebnisse aufheben würde.

Eine weitere mögliche systematische Fehlerquelle ist durch oxidierte Oberflächenschichten gegeben, da  $\text{SiO}_2$  bei  $\lambda = 680,00 \text{ nm}$  einen geringeren Brechungsindex von  $n = 1,456$  besitzt [6]. Weiter kann spekuliert werden, dass eine anisotrope Anordnung der Kristall-Struktur polarisationsspezifische Abweichungen hervorruft.

Das gewichtete Mittel aller Resultate beträgt  $n = 2,794 \pm 0,016$  und liegt damit zwischen den bekannten Werten für  $\text{SiO}_2$  und Si. Es ist ebenso nicht auszuschließen, dass andere Verunreinigungen des Spiegels zu verfälschten Ergebnissen beitragen.

Zuletzt können bei Justierung von Goniometer und Detektor zufällige Fehlereinflüsse auftreten, indem der Winkel der Spiegelfläche oder die Detektoröffnung teils unpräzise eingestellt und positioniert werden. So entstehende Abweichungen sollten aber generell ohne einseitige Tendenz und entsprechend durch mehrfache Messung kompensierbar sein, sie werden daher auch als statistisch bezeichnet.

## Literatur

- [1] *Anleitung zu Versuch 407, Fresnelsche Formeln*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.
- [2] D. E. Aspnes und J. B. Theeten. „Spectroscopic Analysis of the Interface Between Silicon and Its Thermally Grown Oxide“. In: *Journal of The Electrochemical Society* 127.6 (Juni 1980), S. 1359. DOI: 10.1149/1.2129899. URL: <https://dx.doi.org/10.1149/1.2129899>.
- [3] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: <http://matplotlib.org/>. Current version 3.6.2, DOI: 10.5281/zenodo.7275322.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] I. H. Malitson. „Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica“. In: *J. Opt. Soc. Am.* 55.10 (Okt. 1965), S. 1205–1209. DOI: 10.1364/JOSA.55.001205. URL: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-55-10-1205>.
- [7] Pauli Virtanen u. a. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. Version 1.9.3. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

## Anhang

V407	
678 - 684 nm Laser	
grundintensität	dunkelstrom
<del>3,5 mA</del>	4,7 nA
<del>± 0,35 mA</del>	± 0,2 nA
<del>± 0,02 mA</del>	
0,49 mA	
± 0,02 mA	
intensitätsminimum	
→ 49°	mit 43 nA ± 2 nA

		27. von Skala	
$\alpha$	I	-100V	Pol 0° → S-Pol?
0	70	$\mu A$	
8	70	$\mu A$	
10	71	$\mu A$	
12	72	$\mu A$	
14	72	$\mu A$	
16	76	$\mu A$	
18	77	$\mu A$	
20	78	$\mu A$	
22	80	$\mu A$	
24	81	$\mu A$	
26	83	$\mu A$	
28	84	$\mu A$	
30	85	$\mu A$	
32	89	$\mu A$	
34	90	$\mu A$	
36	92	$\mu A$	
38	96	$\mu A$	
40	96	$\mu A$	

42	$98 \mu A - 1m$		
44	$0,1 mA$		
46	$0,1 mA$		
48	$0,1 mA$		
50	$0,11 mA$		
52	$0,11 mA$	86	84
54	$0,11 mA$		82
56	$0,12 mA$		
58	$0,11 mA$		
60	$0,12 mA$		
62	$0,12$		
64	$0,14$		
66	$0,13$		
68	$0,14$		
70	$0,15$		
72	$0,16$		
74	$0,16$		
76	$0,17$		
78	$0,19$		
80	$0,19$		

Pol. $90^\circ \rightarrow$ P-Pol		
$\alpha$	I	— 100 $\mu$ (skala)
6	54 $\mu A$	
8	54 $\mu A$	
10	52 $\mu A$	
12	60 $\mu A$	
14	60 $\mu A$	
16	60 $\mu A$	
18	58 $\mu A$	
20	59 $\mu A$	
22	50 $\mu A$	
24	51 $\mu A$	
26	50 $\mu A$	
28	50 $\mu A$	
30	50 $\mu A$	
32	48 $\mu A$	
34	46 $\mu A$	
36	44 $\mu A$	
38	44 $\mu A$	

$\alpha$	I	$\alpha$	I
40	44 $\mu A$	76	0,5 $\mu A$ <sup>-1 <math>\mu</math></sup>
42	38 $\mu A$	78	1,2 $\mu A$ <sup>-10 <math>\mu</math></sup>
44	38,5 $\mu A$	80	3,8 $\mu A$
46	34 $\mu A$	82	8 $\mu A$
48	32 $\mu A$	84	18 $\mu A$
50	30 $\mu A$	86	38 $\mu A$
52	28 $\mu A$		
54	24 $\mu A$		
56	22 $\mu A$		
58	18 $\mu A$		
60	16 $\mu A$		
62	14 $\mu A$		
64	8 $\mu A$		
66	7 $\mu A$		
68	6,3 $\mu A$		
70	4 $\mu A$		
72	2 $\mu A$		
74	0,8 $\mu A$		