V606

Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen

Fritz Agildere
fritz.agildere@udo.edu

Amelie Strathmann
amelie.strathmann@udo.edu

Durchführung: 11. April 2023
Abgabe:

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Mit dem nachfolgenden Versuch soll die Suszeptibilität der Oxide einiger Seltener-Erd-Elemente gemessen werden. Die Messergebnisse dienen anschließend zum Vergleich mit den aus der Theorie errechneten Erwartungswerten.

2 Theorie [1]

2.1 Magnetismus und Materie

Der im Vakuum geltende Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte $\boldsymbol{B}$ und magnetischer Feldstärke $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

muss unter Anwesenheit von Materie um die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ zu

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$$

ergänzt werden. Dabei beschreibt μ_0 die magnetische Feldkonstante. Verantwortlich für das Auftreten von $\boldsymbol{M}$ sind atomare magnetische Momente im betrachteten Material. Daher lässt sich die Magnetisierung mit dem mittleren magnetischen Moment $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ und der Anzahl der Momente pro Volumen N als

$$\boldsymbol{M} = N \mu_0 \, \bar{\boldsymbol{\mu}} \tag{1}$$

ausdrücken. Ihre Abhängigkeit zu $\boldsymbol{H}$ wird über

$$\boldsymbol{M} = \mu_0 \, \chi \boldsymbol{H} \tag{2}$$

formuliert. Der Faktor χ heißt magnetische Suszeptibilität und weist selbst komplexe Beziehungen zur Feldstärke $\boldsymbol{H}$ und Temperatur T auf.

2.1.1 Diamagnetismus

Durch die Induktion magnetischer Momente beim Einwirken äußerer Magnetfelder tritt in allen Atomen das Phänomen des Diamagnetismus auf. Das induzierte Feld ist dem ursächlichen dabei entgegengesetzt und schwächt so dessen Einfluss ab. Für die Suszeptibilität muss dann $\chi < 0$ gelten. Ideale Diamagneten werden durch Supraleiter realisiert, welche $\chi = -1$ erreichen und das Magnetfeld in ihrem Inneren vollständig verdrängen.

2.1.2 Paramagnetismus

Anders als der Diamagnetismus ist der Paramagnetismus keine universelle Eigenschaft der Materie, sondern lässt sich nur bei Atomen, Ionen und Molekülen beobachten, deren Gesamtdrehimpuls nicht verschwindet. Bei Abwesenheit eines äußeren Feldes sind die an den Drehimpuls gekoppelten magnetischen Momente durch thermische Bewegung zufällig orientiert, sodass keine mittlere Magnetisierung existiert. Wird jedoch ein Magnetfeld angelegt, richten sich die Momente parallel dazu aus, sodass dessen Wirkung verstärkt wird. Die Suszeptibilität erfüllt dann $\chi > 0$ und ist aufgrund des Störeinflusses der thermischen Bewegung temperaturabhängig. Anhand dieses Modells kann χ nun berechnet werden.

2.2 Paramagnetische Suszeptibilität

Der atomare Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ setzt sich aus Bahndrehimpuls der Elektronenhülle und Eigendrehimpuls der Elektronen, dem Spin, zusammen. Für den Paramagnetismus kann der Beitrag des zusätzlich auftretenden Kerndrehimpulses vernachlässigt werden. Solange das äußere Magnetfeld nicht zu stark ist, wird von LS-Kopplung mit

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$$

ausgegangen, also der Annahme, dass $\boldsymbol{J}$ der Vektorsumme von Gesamtbahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ und Gesamtspin $\boldsymbol{S}$ entspricht. Dabei setzen sich $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{S}$ nach

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i \qquad \boldsymbol{S} = \sum_i \boldsymbol{s}_i$$

aus der jeweiligen Vektorsumme der Einzeldrehimpulse sämtlicher in der Hülle enthaltenen Elektronen zusammen. Anwenden quantenmechanischer Mittel liefert dann die zugehörigen magnetischen Momente, welche sich auf

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{\mu_B}{\hbar}\boldsymbol{L} \tag{3}$$

und

$$\boldsymbol{\mu}_S = -g_s\frac{\mu_B}{\hbar}\boldsymbol{S} \tag{4}$$

belaufen. Dabei entspricht $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ der reduzierten Planck-Konstante, die mit Wirkungsquantum h, Frequenz ν und Kreisfrequenz ω die Beziehung $h\nu = \hbar\omega$ erfüllt. Mit der Ladung e_0 und Ruhemasse m_0 des Elektrons bezeichnet das Bohrsche Magneton

$$\mu_B = \frac{1}{2}\frac{e_0}{m_0}\hbar$$

das zur Drehimpulseinheit $\hbar$ gehörige magnetische Moment. Ebenso ist mit der negativen Ladung des Elektrons das negative Vorzeichen in (3) und (4) erklärt. Der Faktor g_S entspricht dem gyromagnetischen Verhältnis des freien Elektrons.

Unter Verwendung der Bahndrehimpulsquantenzahl L, Spinquantenzahl S und Gesamtdrehimpulsquantenzahl J des Atoms lässt sich

$$|\boldsymbol{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar \qquad |\boldsymbol{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar \qquad |\boldsymbol{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar \tag{5}$$

für die Beträge der Drehimpulse schreiben. Aus (3) und (4) folgt damit weiter

$$|\boldsymbol{\mu}_L| = \frac{\mu_B}{\hbar}|\boldsymbol{L}| = \mu_B\sqrt{L(L+1)} \tag{6}$$

und

$$|\boldsymbol{\mu}_S| = g_s\frac{\mu_B}{\hbar}|\boldsymbol{S}| = g_S\,\mu_B\sqrt{S(S+1)} \tag{7}$$

für die entsprechenden magnetischen Momente. Bei LS-Kopplung verschwindet die zu $\boldsymbol{J}$ orthogonale Komponente von $\boldsymbol{\mu}$, sodass nur $\boldsymbol{\mu}_J \parallel \boldsymbol{J}$ messbar ist. In Abbildung 1 kann dazu der Zusammenhang

$$|\boldsymbol{\mu}_J| = |\boldsymbol{\mu}_S|\cos\alpha + |\boldsymbol{\mu}_L|\cos\beta \tag{8}$$

abgelesen werden. Zudem lässt sich nach dem Cosinussatz mittels des Dreiecks OAB

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{J}|^2 - |\boldsymbol{L}|^2 + |\boldsymbol{S}|^2}{2|\boldsymbol{J}||\boldsymbol{S}|} \qquad \cos\beta = \frac{|\boldsymbol{J}|^2 + |\boldsymbol{L}|^2 - |\boldsymbol{S}|^2}{2|\boldsymbol{J}||\boldsymbol{S}|} \tag{9}$$

aus Abbildung 1 herleiten.

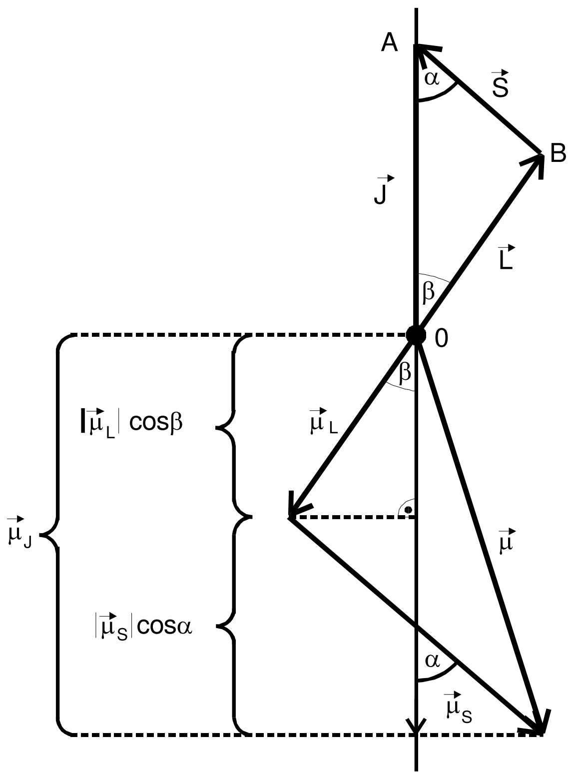

Abbildung 1: Vektordiagramm der Drehimpulse einer Elektronenhülle mit den resultierenden magnetischen Momenten.

Einsetzen von (5), (6), (7) und (9) in die Beziehung (8) liefert nun

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\mu}_J| &= \mu_B\left(g_S\sqrt{S(S+1)}\cos\alpha + \sqrt{L(L+1)}\cos\beta\right)\\ &= \mu_B\frac{(g_S+1)J(J+1)+(g_S-1)\left(S(S+1)-L(L+1)\right)}{2\sqrt{J(J+1)}}\end{aligned}$$

als Betrag des magnetischen Moments. Anhand der Größe g_S kann mit guter Genauigkeit die Näherung $g_S \approx 2$ ausgenutzt werden, um über den für das Atom spezifischen Landé-Faktor

$$g_J = \frac{3J(J+1)+\left(S(S+1)-L(L+1)\right)}{2J(J+1)}$$

den Ausdruck

$$|\boldsymbol{\mu}_J| \approx \mu_B\, g_J\sqrt{J(J+1)} \tag{10}$$

zusammenzufassen. Ein weiteres quantenmechanisches Phänomen ist die Richtungsquantelung, wonach der Winkel zwischen einem äußeren Magnetfeld und $\boldsymbol{\mu}_J$ nicht beliebig ist, sondern nur solche Werte einnimmt, bei denen die Komponente μ_{J_z} von $\boldsymbol{\mu}_J$ in Feldrichtung ein ganzzahliges Vielfaches von $\mu_B g_J$ darstellt. Entsprechend muss

$$\mu_{J_z} = -\mu_B\, g_J\, m$$

gelten, wobei $m \in \mathbb{Z}$ die Orientierungsquantenzahl bezeichnet. Da μ_{J_z} als Komponente von $\boldsymbol{\mu}_J$ immer $|\mu_{J_z}| \leq |\boldsymbol{\mu}_J|$, also laut (10) $m \leq \sqrt{J(J+1)}$ erfüllt, führt die Einschränkung $m \in \{-J, -J+1, \dots, 0, \dots, J-1, J\}$ zu dem Schluss, dass genau $2J+1$ Möglichkeiten zur Einstellung des magnetischen Moments relativ zur äußeren Feldrichtung existieren. Jeder dieser Einstellrichtungen lässt sich eine spezifische potentielle Energie

$$E_m = -\boldsymbol{\mu}_J\cdot\boldsymbol{B} = \mu_{J_z}B = \mu_B\, g_J\, mB$$

zuordnen. Dieses Auftreten von $2J+1$ Unterenergieniveaus heißt Zeeman-Effekt. Deren Besetzungshäufigkeit folgt mit

$$Z(E_m, T) = \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right)$$

einer Boltzmann-Verteilung, Summation über alle Niveaus liefert

$$\mu_{\text{ges}} = \sum_{m=-J}^{J} -\mu_B\, g_J\, mZ(E,T) = -\mu_B\, g_J \sum_{m=-J}^{J} m\, \exp\left(-\frac{\mu_B\, g_J\, mB}{kT}\right)$$

für das gesamte magnetische Moment.

Nach Division durch die Gesamthäufigkeit aller vorkommenden Orientierungen ergibt sich daraus

$$\bar{\mu} = -\mu_B \, g_J \frac{\sum_{m=-J}^{J} m \exp\left(-\frac{\mu_B \, g_J \, mB}{kT}\right)}{\sum_{m=-J}^{J} \exp\left(-\frac{\mu_B \, g_J \, mB}{kT}\right)} \tag{11}$$

als Betrag des in (1) geforderten mittleren magnetischen Moments. Der Quotient in Ausdruck (11) wird als Brillouin-Funktion bezeichnet. Bei einer Temperatur im Bereich $T \approx 300\,\mathrm{K}$ sowie unter Einwirkung von Flussdichten bis $B \approx 1\,\mathrm{T}$ gilt

$$\frac{\mu_B \, g_J \, mB}{kT} \ll 1$$

und erlaubt mit der Entwicklung

$$\exp\left(-\frac{\mu_B \, g_J \, mB}{kT}\right) \simeq 1 - \frac{\mu_B \, g_J \, mB}{kT}$$

das Aufstellen einer Näherungsformel. So ergibt sich

$$\sum_{m=-J}^{J} \left(1 - \frac{\mu_B \, g_J \, mB}{kT}\right) = 2J + 1 - \frac{\mu_B \, g_J \, B}{kT} \sum_{m=-J}^{J} m = 2J + 1 \tag{12}$$

für den Nenner der Funktion, der Zähler ist mit

$$\sum_{m=-J}^{J} \left(m - \frac{\mu_B \, g_J \, m^2 B}{kT}\right) = -\frac{\mu_B \, g_J \, B}{kT} \sum_{m=-J}^{J} m^2 = -\frac{\mu_B \, g_J \, B}{3kT} J(J+1)(2J+1) \tag{13}$$

gegeben. Einsetzen von (11), (12) und (13) in Gleichung (1) liefert den Term

$$M = N\mu_0 \, \bar{\mu} = N\mu_0 \, \mu_B^2 \, g_J^2 \, \frac{J(J+1)B}{3kT}$$

als Betrag der makroskopischen Magnetisierung. Aus der Äquivalenz (2) folgt dann mit

$$\chi = \frac{N\mu_0 \, \mu_B^2 \, g_J^2 \, J(J+1)}{3kT} \tag{14}$$

die magnetische Suszeptibilität, welche damit dem Zusammenhang

$$\chi \sim \frac{1}{T}$$

gehorcht. Dabei handelt es sich um das Curiesche Gesetz des Paramagnetismus, dessen Gültigkeit hiermit für ausreichend hohe Temperaturen belegt ist.

2.2.1 Seltene-Erd-Verbindungen

2.3 Messverfahren

2.3.1 Apparatur zur Induktivitätsmessung

$$L = \mu_0 \frac{n^2}{I} F$$

$$L_{\widehat{M}} = \mu \, \mu_0 \frac{n^2}{I} F$$

$$L_M = \mu_0 \frac{n^2}{I} F + (\mu - 1)\mu_0 \frac{n^2}{I} Q = \mu_0 \frac{n^2}{I} F + \chi \mu_0 \frac{n^2}{I} Q$$

$$\Delta L = \chi \mu_0 \frac{n^2}{I} Q$$

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{Br}} = \frac{\mathfrak{r}_4 \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_2}{(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_4)} \mathfrak{U}_{\mathrm{Sp}}$$

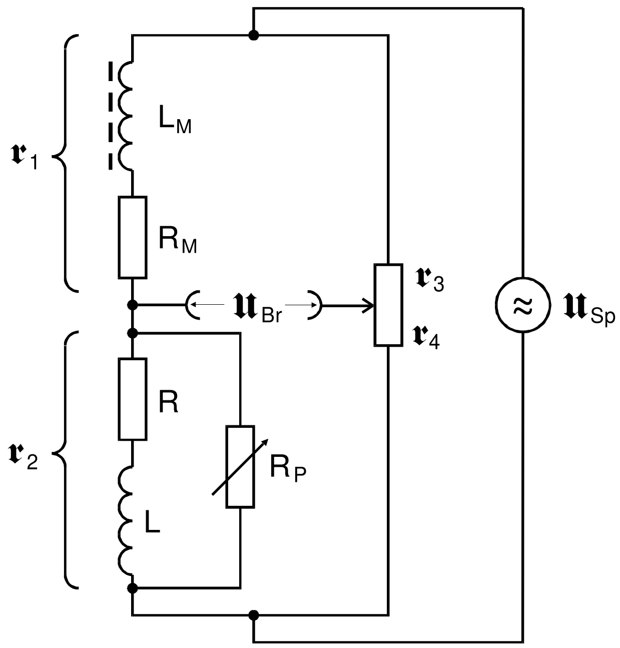

Abbildung 2: Brückenschaltung für eine Suszeptibilitätsmessung.

2.3.2 Unterdrückung von Störspannungen

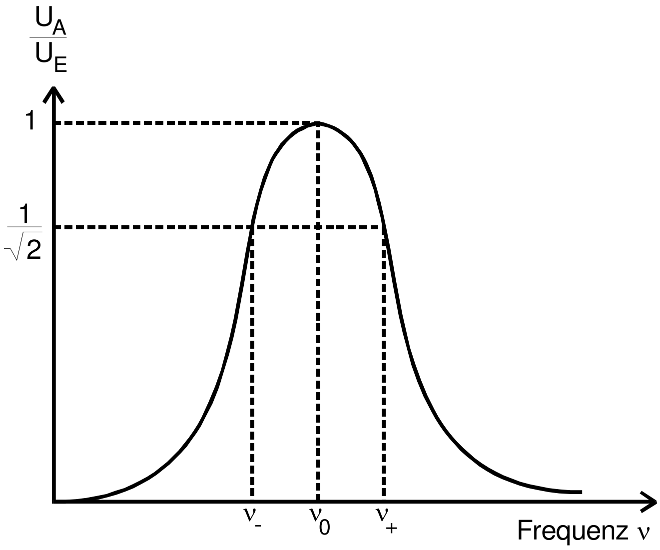

Abbildung 3: Filterkurve eines Selektivverstärkers.

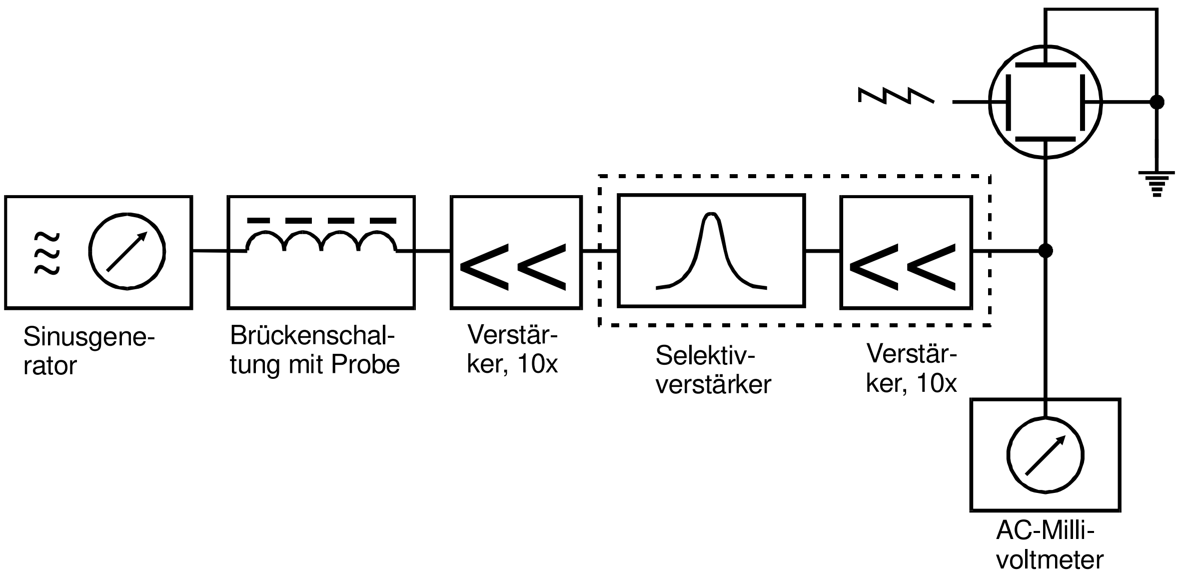

Abbildung 4: Blockschaltbild der verwendeten Messapparatur.

r

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Für den Mittelwert gilt

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{15}$$

Für den Fehler des Mittelwertes gilt

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}. \tag{16}$$

Für die Gaußsche Fehlerfortpflanzung gilt

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \left(\Delta x_i\right)^2}. \tag{17}$$

Diese Formeln werden für sämtliche Fehlerrechnungen in diesem Versuch verwendet, ohne sie für die jeweiligen Rechnungen explizit anzugeben. Die Rechnungen selbst werden dabei mithilfe von Uncertainties durchgeführt.

4.2 Durchlasskurve

Zunächst wird die Filterkurve eines Selektivverstärkers untersucht, wobei eine effektive Spannung U_E in Höhe von 1 V verwendet. Aufgenommen wird dabei die Ausgangspannung U_A in Anhängigkeit von der Frequenz v. Die Frequenz wurde von 2 kHz auf 31 kHz hochgedreht. In der (1) sind die aufgenommen Messwerte aufgetragen.

Tabelle 1: Die Messwerte für Filterkurve

v / kHz	U / v
2	0.01
4	0.02
6	0.025
8	0.03
10	0.04
11	0.05
12	0.06
13	0.07
14	0.08
15	0.095
16	0.115
17	0.145
18	0.19
19	0.26
20	0.42
20.5	0.6
21	0.98
21.1	1.2
21.2	1.3
21.3	1.5
21.4	1.85
21.5	2.35
21.6	3.1
21.7	4
21.8	4.4
21.9	3.8
22	2.95
22.1	2.45
22.2	1.85
22.3	1.55
22.4	1.3
22.5	1.15
23	0.68
25	0.265
27	0.17
29	0.125
31	0.1

In der (5) wird die Durchlasskurve der aufgenommenen Messwerte abgebildet. Dabei ist der Quotient $\frac{U_A}{U_E}$ gegen die Frequenz v aufgetragen. Anhand des Graphens lässt sich ablesen, dass das Maximum bei 21,8 kHz liegt mit einer Spannung von 4,4 V. Dieses Maximum ist dann die Durchlassfrequenz.

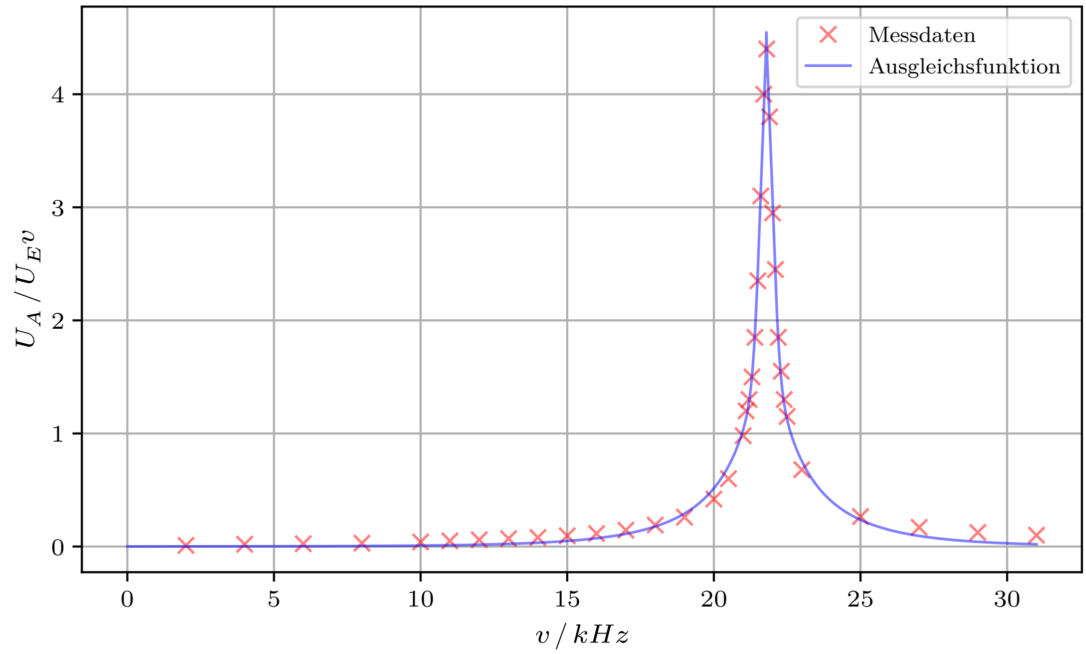

Abbildung 5: Filterkurve des Selektivverstärkers mit einer Güte $Q = 20$ und die Ausgleichskurve in Form einer Gaußverteilung .

4.3 Effektiver Querschnitt

Der effektive Querschnitt wird im Folgenden von vier unterschiedlioche Stoffe bestimmt. Für die Berechnung des realen Querschnitts gilt

$$Q_{real} = \frac{m}{l \cdot \rho_w}. \tag{18}$$

In der (2)stehen die gemessenen Werte für die Stoffe ,sowie die brechneten effektiven Querschnitte.

In der (2)stehen die gemessenen Werte für die Stoffe ,sowie die brechneten effektiven Querschnitte.

4.4 Suszeptibilität

Im Folgenden wird die Suszeptibilität χ unterschiedlicher Stoffe untersucht.

Tabelle 2: Maße der Stoffe und der daraus berechnete effektive Querschnitt

Stoff	m/g	l/cm	$\rho/\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^3$	Q/cm^2
Dy_2O_3	14,38	16,3	7,80	0,113104
Gd_2O_3	14,08	17,3	7,40	0,109983
Nd_2O_3	18,48	14,5	7,24	0,176034

In der Tabelle (3) sind die Messwerte der Probe Dy_2O_3 angegeben. Es sind die Werte ohne die Probe für die Spannung und den Widerstand angebenen und für den Fall, dass die Probe verwendet wurde. Daraus wurde die Differenz des Widerstände ΔR / Ω berechnet.

Tabelle 3: Messwerte der Probe Dy_2O_3 sowie die Differenz ΔR.

ohne Probe		mit Probe		
U / mV	$R_{3/4}$ / Ω	U / mV	$R_{3/4}$ / Ω	ΔR / Ω
15.5	2.62	15	3.265	0.645
16	2.565	15.5	3.245	0.68
16.5	2.445	15	3.245	0.8
16	2.525	14.3	3.245	0.72

Aus den brechneten Werten der Differenz wird anschließend der Mittelwert (16) bestimmt

$$\bar{\Delta R} \approx 0.711\Omega. \tag{19}$$

5 Diskussion

Literatur

[1] *Anleitung zu Versuch 606, Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

Anhang