«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА»

Основы математического моделирования

Практическое задание №1

Решение уравнения переноса с использованием схемы бегущего счета и итерационных методов

Студент:	Гаврилов Владислав Романович
Преподаватель:	Боголюбов Николай Александрович
Группа:	342

Москва

2021

Содержание

1. Постановка задачи

Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = -x \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

Будем получать решение, произведя замену $x = -x$. Задача в данном случае перейдет в следующую:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = x \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

При этом решение исходной задачи можно получить зеркальным отображением решения вспомогательной задачи относительно начала пространнственной координаты.

2. Анализ характеристик уравнения

Уравнение характеристик по определению для данной задачи:

$$dt = (1+u^2)dx$$

Интегрируя, получим:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} (1+u^2)\,dx \Rightarrow (t - t_0) = (1+u^2)(x - x_0)$$

Для получения семейств характеристик подействуем на данное уравнение начальными условиями:

$$\begin{cases} u(x_0, t_0 = 0) = x_0 \Rightarrow t = (1+x_0^2)(x - x_0) \\ u(x_0 = 0, t_0) = 0 \Rightarrow t - t_0 = x \end{cases}$$

Построим графики характеристик для разных значений x_0, t_0 из отрезка $[0, 1]$ и убедимся, что они не пересекаются.

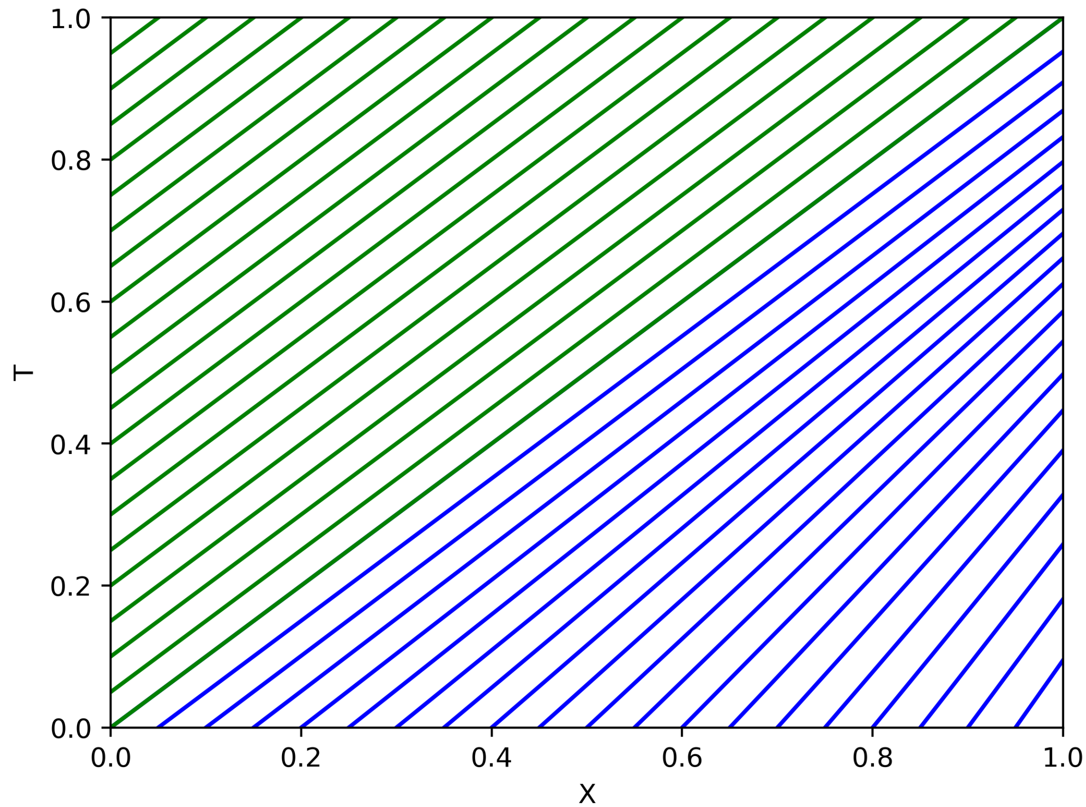


Рис. 1: Графики характеристик. Синим цветом - первое семейство, зеленым - второе

Итак, после анализа характеристик в квадрате $[0,1]$x$[0,1]$ было установлено, что уравнение можно однозначно разрешить в данной области.

3. Дискретизация задачи

3.1. Разностная схема

Задаем равномерную сетку на множестве $[0,1]$x$[0,1]$:

$$\begin{cases} x_i = ih, i = \overline{0, N_x} \\ t_j = j\tau, j = \overline{0, N_t} \end{cases}$$

Помимо этого, в исходной задаче введем множитель $\frac{1}{1+u^2}$ под знак дифференцирования. Тогда получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(arctg(u))}{\partial x} = 0$$

Введем также функцию $f(i,j) = f_{ij}$, которая задается для каждого узла (i,j) сетки и характеризует решение дискретной задачи. Для решения задачи будет использоваться четырехточечный шаблон, так как он гарантирует безусловную устойчивость схемы. Поэтому после сведения задачи к дискретному виду, она будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j}+f_{i}^{j+1}-f_{i}^{j}}{2\tau}+\frac{arctg(f_{i+1}^{j+1})-arctg(f_{i}^{j+1})+arctg(f_{i+1}^{j})-arctg(f_{i}^{j})}{2h}=0 \\ f_{0,j}=0 \\ f_{i,0}=x_i \end{cases}$$

3.2. Устойчивость

3.2.1. Необходимое условие

Для анализа устойчивости схемы воспользуемся необходимым спектральным условием. Заменим коэффициент при $\frac{\partial}{\partial x}$ на постоянную C. Таким образом получим следующее уравнение:

$$\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j}+f_{i}^{j+1}-f_{i}^{j}}{2\tau}+C\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i}^{j+1}+f_{i+1}^{j}-f_{i}^{j}}{2h}=0$$

Будем искать решение в виде $f_n^j=\lambda^j e^{i\alpha n}$. Подставляя его у уравнение и сокращая на $\lambda^j e^{i\alpha n}$ получим следующее выражение для опредедния λ:

$$\frac{\lambda e^{i\alpha}-e^{i\alpha}+\lambda-1}{2\tau}+C\frac{\lambda e^{i\alpha}+e^{i\alpha}-\lambda-1}{2h}=0$$

Выражая из него λ, получим:

$$\lambda=\frac{2h(e^{i\alpha+1})-2C\tau(e^{i\alpha+1})}{2h(e^{i\alpha+1})+2C\tau(e^{i\alpha+1})}=\frac{1+C\frac{\tau}{h}+e^{i\alpha}(1-C\frac{\tau}{h})}{1-C\frac{\tau}{h}+e^{i\alpha}(1+C\frac{\tau}{h})}$$

Теперь найдем модуль λ:

$$|\lambda|=\left|\frac{1+C\frac{\tau}{h}+e^{i\alpha}(1-C\frac{\tau}{h})}{1-C\frac{\tau}{h}+e^{i\alpha}(1+C\frac{\tau}{h})}\right|=\left|\frac{x+ye^{i\alpha}}{y+xe^{i\alpha}}\right|=\sqrt{\frac{x^2+2xycos\alpha+y^2}{y^2+2xycos\alpha+x^2}}=1$$

Таким образом, выполнение условия Неймана доказано.

3.2.2. Достаточное условие

Уравнение

$$\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j}+f_{i}^{j+1}-f_{i}^{j}}{2\tau}+C\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i}^{j+1}+f_{i+1}^{j}-f_{i}^{j}}{2h}=0$$

домножим на 2τ и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$f_{i+1}^{j+1}(1+C\frac{\tau}{h})=-f_{i}^{j+1}(1-C\frac{\tau}{h})+f_{i+1}^{j}(1-C\frac{\tau}{h})+f_{i}^{j}(1+C\frac{\tau}{h})$$

Взяв норму и применив неравенство треугольника, получим, что $||f^{m+1}||\leq||f^m||$, что и доказывает выполнение достаточного условия Куранта.

3.2.3. Геометрический критерий

Геометрический критерий для четырехточечного шаблона выполняется всегда: как бы мы не провели характеристику, она всегда пересечет отрезок, который соединяет две точки, значение функции в которых уже было получено.

3.3. Порядок аппроксимации

Так как в данной работе используется 4-ех точечный шаблон, то диффернциальный оператор аппроксимуируется следующим образом:

$$L_{h\tau}(f) = \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^{j} + f_{i}^{j+1} - f_{i}^{j}}{2\tau} + C(x_i + \frac{h}{2}, t_i + \frac{\tau}{2})\frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i}^{j+1} + f_{i+1}^{j} - f_{i}^{j}}{2h}$$

Выполним разложение сеточных функций в ряд Тейлора в центральной точке шаблона $(x_i + 0.5h, t_j + 0.5\tau)$:

$$f_i^j = f(x_{i+0.5} - \frac{h}{2}, t_{j+0.5} - \frac{\tau}{2}) = f - f_x\frac{h}{2} - f_t\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}(f_{xx}\frac{h^2}{4} + f_{tt}\frac{\tau^2}{4} + f_{xt}\frac{h\tau}{4}) + O(h^3 + \tau^3)$$

$$f_i^{j+1} = f(x_{i+0.5} - \frac{h}{2}, t_{j+0.5} + \frac{\tau}{2}) = f - f_x\frac{h}{2} + f_t\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}(f_{xx}\frac{h^2}{4} + f_{tt}\frac{\tau^2}{4} - f_{xt}\frac{h\tau}{4}) + O(h^3 + \tau^3)$$

$$f_{i+1}^j = f(x_{i+0.5} + \frac{h}{2}, t_{j+0.5} - \frac{\tau}{2}) = f + f_x\frac{h}{2} - f_t\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}(f_{xx}\frac{h^2}{4} + f_{tt}\frac{\tau^2}{4} - f_{xt}\frac{h\tau}{4}) + O(h^3 + \tau^3)$$

$$f_{i+1}^{j+1} = f(x_{i+0.5} + \frac{h}{2}, t_{j+0.5} + \frac{\tau}{2}) = f + f_x\frac{h}{2} + f_t\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}(f_{xx}\frac{h^2}{4} + f_{tt}\frac{\tau^2}{4} + f_{xt}\frac{h\tau}{4}) + O(h^3 + \tau^3)$$

Подставляя данные значения в аппроксимацию оператора, получим:

$$L_{h\tau}(f) = f_t + cf_x + O(h^2) + O(\tau^2)$$

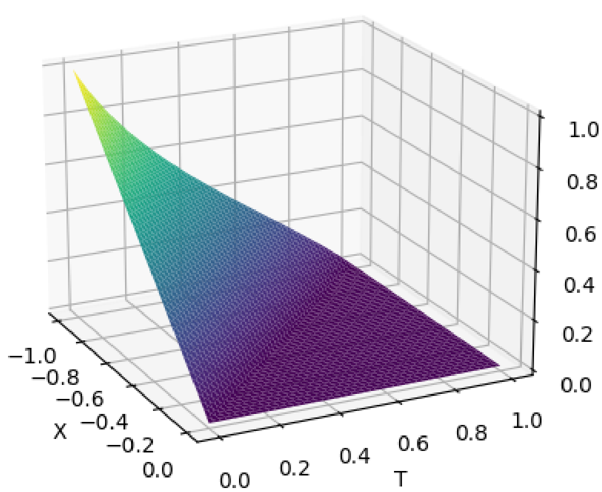
4. Программная реализация и визуализация решения

Задача была решена с помощью интерпретируемого языка программирования - Python и библиотеки numpy, в которой определяются основные математические функции. Визуализация решения была получена с помощью библиотеки matplotlib. Исполняемый код приведен ниже:

```python
import numpy as math
import matplotlib.pyplot as plt
nx, nt = map(int, input('net dim: ').split())
xs, xe = map(int, input('x set: ').split())
ts, te = map(int, input('t set: ').split())
```

```
eps = float((input('e: ')))
solution = math.zeros((nx, nt), dtype=float)
netx, nett = math.linspace(xs, xe, nx), math.linspace(ts, te, nt)
h, tau = float(xe - xs)/(nx - 1), float(te - ts)/(nt - 1)
solution[0, :], solution[:, 0] = 0, netx
def itfoo(v, d, l, dl):
    return (v - d)/(2*tau) + (l - dl)/(2*tau) + (math.arctan(d) - math.arctan(dl))/(2*h) + (math.arctan(v) - math.arctan(l))/(2*h)
def ditfoo(v):
    return 1/(2*tau) + 1/(2*h*(1 + v**2))
def iterator(d, l, dl):
    e = eps + math.inf
    value = dl
    while e > eps:
        aux = value
        value = aux - itfoo(aux, d, l, dl)/ditfoo(aux)
        e = abs(aux - value)
    return value
for i in range(1, nx):
    for j in range(1, nt):
        solution[i, j] = iterator(solution[i - 1, j], solution[i, j - 1], solution[i - 1, j - 1])
ax = plt.axes(projection="3d")
T, X = math.meshgrid(nett, -netx)
ax.plot_surface(X, T, solution, cmap='plasma')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("T")
plt.savefig("graphresh.jpeg", dpi=400)
```

В результате выполнения программы было получено следующее решение:



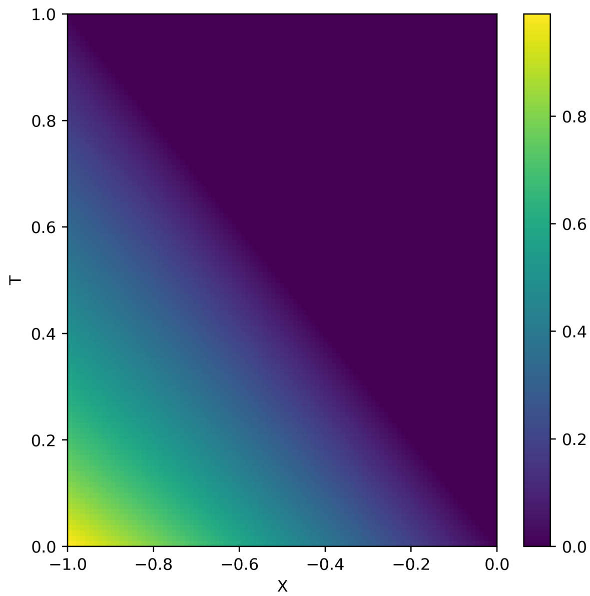


Рис. 2: Графики решения уравнения переноса