

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**



**Trần Đức Mạnh**

**ĐỊNH GIÁ QUYỀN CHỌN TRONG  
TÀI CHÍNH VÀ THỬ NGHIỆM CẢI TIẾN**

**KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC HỆ CHÍNH QUY  
Ngành : Mạng máy tính và truyền thông dữ liệu**

**Hà Nội, 2023**

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**

**Trần Đức Mạnh**

**ĐỊNH GIÁ QUYỀN CHỌN TRONG  
TÀI CHÍNH VÀ THỬ NGHIỆM CẢI TIẾN**

**KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC HỆ CHÍNH QUY**  
**Ngành : Mạng máy tính và truyền thông dữ liệu**

**Cán bộ hướng dẫn: TS. Hoàng Thị Diệp**

**Hà Nội, 2023**

# Lời cam đoan

“Tôi xin cam đoan rằng những nghiên cứu và thực nghiệm được thực hiện trong khóa luận này là của riêng tôi và chưa từng được gửi nộp ở bất kỳ một khóa luận hay báo cáo nào. Những lời văn trình bày trong khóa luận được dựa trên hiểu biết của bản thân không sao chép từ bất kỳ nguồn nào mà không có trích dẫn. Những kết quả được thực nghiệm là báo cáo trung thực.”

Chữ ký:.....

# Lời cảm ơn

Đầu tiên, tôi xin gửi lời chân thành cảm ơn đến TS. Hoàng Thị Diệp, người đã luôn tạo cơ hội và hướng dẫn nhiệt tình để tôi có thể hoàn thành khoá luận này.

Tiếp đến, tôi xin cảm ơn các giảng viên của trường Đại học Công Nghệ, Đại Học Quốc gia Hà Nội đã truyền cảm hứng và kiến thức cho tôi. Tôi cũng xin cảm ơn các bạn trong lớp Mạng máy tính và truyền thông dữ liệu (K64-N) đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình và người thân, những người luôn bên cạnh quan tâm, động viên và giúp đỡ tôi hết mình trong suốt quá trình học tập và hoàn thành khoá luận tốt nghiệp.

## *Định giá quyền chọn trong tài chính và thử nghiệm cải tiến*

### Tóm tắt

Trong thị trường tài chính ngày nay, quyền chọn đóng vai trò quan trọng trong việc quản lý rủi ro và tối ưu hóa cơ hội đầu tư. Định giá quyền chọn, hay còn gọi là việc đặt giá cho quyền mua hoặc bán tài sản cơ bản trong tương lai, đã trở thành một lĩnh vực nghiên cứu sôi động trong lĩnh vực tài chính, toán học và khoa học dữ liệu.

Trong số những phương pháp định giá quyền chọn, hai mô hình nổi tiếng nhất là Black-Scholes[4] và GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)[7]. Tuy nhiên các mô hình này vẫn còn tồn tại một số hạn chế nhất định. Khóa luận này đề xuất một mô hình định giá mới, sử dụng Gaussian Process để mô tả sự biến động của tài sản gốc. Các kết quả thực nghiệm đối với chỉ số S&P 500 đã chứng minh được tính hiệu quả của phương pháp đối với bài toán.

**Keywords:** định giá quyền chọn, biến động, Black-Scholes, GARCH, Gaussian Process

# Mục lục

TÓM TẮT	v
DANH SÁCH HÌNH VẼ	ix
DANH SÁCH BẢNG	xi
DANH SÁCH TỪ VIẾT TẮT	xii
DANH SÁCH THUẬT NGỮ	xiii
DANH SÁCH KÝ TỰ ĐẶC BIỆT	xvi
MỞ ĐẦU	1
1 GIỚI THIỆU BÀI TOÁN	3
1.1 Hợp đồng quyền chọn . . . . .	3
1.2 Bài toán định giá quyền chọn trong tài chính . . . . .	5
1.3 Lý do chọn đề tài . . . . .	7
2 CÁC KIẾN THỨC NỀN TẢNG	9
2.1 Các khái niệm tài chính . . . . .	9
2.1.1 Chênh lệch giá, không chênh lệch giá và lãi suất phi rủi ro .	9
2.1.2 Phương pháp đo lường $P$ và $Q$ . . . . .	10
2.1.3 Định giá quyền chọn . . . . .	10
2.2 Mô hình Black-Scholes . . . . .	11
2.3 Quá trình GARCH và mô hình định giá dựa trên GARCH . . . . .	13
2.3.1 GARCH . . . . .	13
2.3.2 Xác suất trung tính rủi ro cục bộ . . . . .	14

2.3.3	Mô hình định giá . . . . .	15
2.4	Quá trình Gauss . . . . .	16
2.4.1	Phân phối chuẩn . . . . .	17
2.4.2	Phân phối chuẩn nhiều chiều . . . . .	18
2.4.3	Nhân . . . . .	19
2.4.4	Hàm trung bình . . . . .	21
2.4.5	Quá trình Gauss . . . . .	21
2.5	Nghiên cứu gần đây . . . . .	23
2.5.1	MLP1 . . . . .	23
2.5.2	MLP2 . . . . .	24
2.5.3	LSTM . . . . .	24
2.5.4	Kết luận của nghiên cứu . . . . .	24
<b>3</b>	<b>MÔ HÌNH ĐỀ XUẤT</b>	<b>26</b>
3.1	Hạn chế của Black-Scholes và GARCH . . . . .	26
3.2	Sử dụng quá trình Gauss để mô phỏng biến động thị trường . . . . .	27
3.3	Quá trình Gauss biến thiên . . . . .	28
3.4	Phân kỳ Kullback–Leibler và dấu hiệu cận dưới . . . . .	29
3.5	Lấy mẫu rải rác . . . . .	32
3.6	Tính giá quyền chọn . . . . .	33
<b>4</b>	<b>XÂY DỰNG SẢN PHẨM THỬ NGHIỆM</b>	<b>35</b>
4.1	Tổng quan về sản phẩm . . . . .	35
4.2	Dữ liệu . . . . .	36
4.3	Phần mềm . . . . .	38
4.4	Luồng hoạt động . . . . .	38
4.4.1	Thẻ thứ nhất . . . . .	38
4.4.2	Thẻ thứ hai . . . . .	41
<b>5</b>	<b>THỰC NGHIỆM VÀ KẾT QUẢ</b>	<b>43</b>
5.1	Dữ liệu thực nghiệm . . . . .	43
5.2	Cài đặt . . . . .	45
5.2.1	Black-Scholes . . . . .	45
5.2.2	GARCH . . . . .	45
5.2.3	Quá trình Gauss . . . . .	46
5.3	Các độ đo đánh giá . . . . .	47

5.4 So sánh kết quả . . . . .	47
KẾT LUẬN	51
TƯ LIỆU THAM KHẢO	55

# Danh sách hình vẽ

1.1	Ảnh hưởng của mức độ biến động đến giá quyền chọn . . . . .	5
1.2	Màn hình định giá quyền chọn của Bloomberg Terminal. Nguồn: Bloomberg . . . . .	6
1.3	Màn hình định giá quyền chọn của moomoo SG. Nguồn: DollarsAndSense . . . . .	7
1.4	Màn hình định giá quyền chọn của CME Group. Nguồn: CME Group	8
2.1	Giả lập các mức giá của $S$ với 500 mẫu. . . . .	15
2.2	Các điểm dữ liệu được vẽ dưới dạng các thanh dọc màu xanh trên trực hoành. Hàm mật độ xác suất của các điểm dữ liệu này được vẽ dưới dạng đường cong chuông hai chiều. . . . .	17
2.3	Hai vector Gauss độc lập được vẽ theo chiều dọc trong không gian tọa độ x, y. . . . .	18
2.4	Nối các điểm từ các vector Gauss độc lập . . . . .	19
2.5	Các mẫu từ hai phân phối chuẩn nhiều chiều khác nhau . . . . .	20
2.6	Phân phối chuẩn nhiều chiều trước và sau khi quan sát được dữ liệu. Nguồn: Github . . . . .	21
2.7	Một minh họa về thực hiện hồi quy bằng quá trình Gauss. Các điểm màu đỏ là dữ liệu quan sát được, và việc dự đoán diễn ra tại các điểm màu xanh. Nguồn: Github . . . . .	22
2.8	Kiến trúc LSTM . . . . .	24
3.1	Hàm mật độ của phân phối xác suất hậu nghiệm và phân phối biến thiên. Nguồn: towardsdatascience . . . . .	29
4.1	Biểu đồ hoạt động của thẻ thứ nhất . . . . .	39
4.2	Ảnh chụp kết quả ở thẻ thứ nhất . . . . .	40

4.3	Biểu đồ hoạt động của thẻ thứ hai . . . . .	41
4.4	Ảnh chụp kết quả ở thẻ thứ hai . . . . .	42
5.1	Ví dụ về so sánh các phương pháp . . . . .	48

# Danh sách bảng

2.1	Biểu đồ sai số . . . . .	25
3.1	Bảng Gauss-Hermite với 5 mẫu[34] . . . . .	32
4.1	Dữ liệu về giá của chỉ số S&P 500 . . . . .	37
4.2	Một số quyền chọn của chỉ số S&P 500 . . . . .	37
5.1	Thống kê quyền chọn mua chỉ số S&P 500 . . . . .	45
5.2	Thống kê quyền chọn bán chỉ số S&P 500 . . . . .	46
5.3	So sánh phương thức cài đặt GARCH với giá trị tham khảo . . . . .	46
5.4	Kết quả tổng quan giữa các mô hình . . . . .	49
5.5	Kết quả định giá quyền chọn mua của chỉ số S&P 500 . . . . .	49
5.6	Kết quả định giá quyền chọn bán của chỉ số S&P 500 . . . . .	50

# Danh sách các từ viết tắt

**AAPE** Average Absolute Percentage Error.

**API** Application Programming Interface.

**ATM** At The Money.

**GARCH** Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.

**ITM** In The Money.

**KL** Kullback–Leibler.

**LSTM** Long Short-Term Memory.

**MAE** Mean Absolute Error.

**MAPE** Median Absolute Percentage Error.

**MdAPE** Median Absolute Percentage Error.

**MLP** Multi-Layer Perceptron.

**MOE** Mean Outside Error.

**MSE** Mean Squared Error.

**OTM** Out The Money.

**RMSE** Root Mean Square Error.

**RNN** Recurrent Neural Network.

**UML** Unified Modeling Language.

# Danh sách các thuật ngữ

**adam** Thuật toán tối ưu cục bộ.

**basin-hopping** Lặp lại liên tục các thuật toán tối ưu cục bộ, nhằm tìm ra kết quả tối ưu toàn cục[25].

**bán không** Tiếng Anh là short: mượn chứng khoán và bán trong trường hợp dự đoán giá chứng khoán giảm, sau đó mua lại để trả với giá thấp hơn trong tương lai nhằm thu lợi.

**bổ đề Itô** Tiếng Anh là Itô's lemma: các lý thuyết được sử dụng trong lĩnh vực giải tích ngẫu nhiên.

**chuyển động hình học Brown** Tiếng Anh là geometric Brownian motion:  $S_t$  được coi là tuân theo chuyển động hình học Brown khi thoả mãn  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ . Trong đó  $W_t$  là quá trình Weiner.

**chỉ số chứng khoán** Tiếng Anh là stock index: một con số phản ánh giá trị của một nhóm các cổ phiếu cụ thể trên thị trường chứng khoán. Ví dụ S&P 500 là chỉ số chứng khoán được dựa trên vốn hóa của 500 công ty đại chúng lớn nhất nước Mỹ.

**cổ tức** Tiếng Anh là dividend: phần lợi nhuận mà một công ty chia sẻ cho cổ đông (người sở hữu cổ phiếu) của mình dưới dạng tiền mặt hoặc cổ phiếu.

**dấu hiệu cận dưới** Tiếng Anh là evidence lower bound: cận dưới của hàm xác suất khả năng trong quá trình Gauss biến thiên.

**giảm độ dốc ngẫu nhiên** Tiếng Anh là stochastic gradient descent: thuật toán tối ưu toàn cục.

**Glorot** Một phương thức khởi tạo tham số đối với mạng nơ-ron.

**hàm hoàn trả** Tiếng Anh là payoff function: Hàm toán học thể hiện giá trị của quyền chọn tại một thời điểm nhất định.

**hàm mục tiêu** Tiếng Anh là objective function: Một công thức hoặc chỉ số toán học mà cần cố gắng tối đa hóa (hoặc tối thiểu).

**hàm xác suất biên** Tiếng Anh là marginal likelihood: Hàm toán học thể hiện xác suất mà dữ liệu có thể quan sát được một cách độc lập.

**hàm xác suất khả năng** Tiếng Anh là likelihood: Hàm toán học thể hiện xác suất mà dữ liệu có thể quan sát được đổi với các tham số của mô hình.

**khung thiết kế** Tiếng Anh là framework: một bộ khung được cấu thành bởi các đoạn mã đã được viết sẵn, kèm theo các thư viện lập trình và các công cụ như trình biên dịch hoặc các API. Mục tiêu của giúp lập trình viên tối giản công sức trong việc phát triển ứng dụng..

**L-BFGS-B** Thuật toán tối ưu cục bộ.

**Leaky ReLU** Tiếng Anh là leaky rectified linear unit: hàm  $f(x) = \text{negative\_slope} \times x$  nếu  $x \leq 0$  và  $f(x) = x$  nếu  $x > 0$ .

**phân phối xác suất hậu nghiệm** Tiếng Anh là posterior probability: phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên sau khi đã xem xét thông tin mới.

**phương sai có điều kiện** Tiếng Anh là conditional variance: phương sai của chuỗi thời gian khi tất cả các thông tin trong quá khứ được biết.

**phương sai không đồng nhất** Tiếng Anh là heteroskedacity: sự khác nhau về mức độ biến đổi của các điểm dữ liệu xung quanh giá trị trung bình trong một tập hợp dữ liệu.

**quá trình Weiner** Tiếng Anh là Weiner process: là một quá trình ngẫu nhiên liên tục  $W_t$  với  $W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t)$ , và độc lập đối với các khoảng thời gian khác nhau[14].

**quỹ phòng hộ** Tiếng Anh là hedge funds: một loại quỹ đầu tư.

**ReLU** Tiếng Anh là rectified linear unit: hàm  $f(x) = 0$  nếu  $x \leq 0$  và  $f(x) = x$  nếu  $x > 0$ .

**tỷ suất lợi nhuận** Tiếng Anh là return: hàm  $\frac{S_t}{S_{t-1}}$  với  $S_t$  là giá tài sản.

**tỷ suất lợi nhuận logarit** Tiếng Anh là log return: hàm  $\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$  với  $S_t$  là giá tài sản.

**ước lượng hợp lý tối đa** Tiếng Anh là maximum likelihood estimation: ước lượng giá trị tham số của một mô hình xác suất dựa trên những dữ liệu quan sát được bằng cách tối đa hàm xác suất khả năng.

# Danh sách các ký tự đặc biệt

$\Sigma$  Ma trận hiệp phương sai của một biến ngẫu nhiên nhiều chiều.

$\mu$  Vector gồm các giá trị kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên nhiều chiều.

$\mathbb{E}$  Ký hiệu giá trị kỳ vọng của một hàm. Ví dụ  $\mathbb{E}_{x \sim \mathcal{N}}(f(x))$  là giá trị kỳ vọng của  $f(x)$  với  $x$  là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

$\mathcal{GP}$  Quá trình Gauss.

$\mathcal{N}$  Phân phối chuẩn.

$\mathbb{P}$  Phương pháp đo lường xác suất dựa trên dữ liệu thực tế.

$\mathbb{Q}$  Phương pháp đo lường xác suất dựa trên giả thuyết trung tính rủi ro.

$\mu$  Giá trị kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên.

$\mu_0, \sigma_k, l$  Các tham số trong quá trình Gauss:  $\mu_0$  là giá trị của hàm kỳ vọng;  $\sigma_k, l$  là tham số của nhân (kernel) luỹ thừa bình phương.

$\mu_S$  Mức lợi nhuận kỳ vọng của giá tài sản.

$\omega, \alpha, \beta, \lambda$  Các tham số trong GARCH.

$\sigma$  Độ lệch chuẩn của một biến ngẫu nhiên.

$\sigma_S$  Mức độ biến động của tài sản.

$\varepsilon$  Biến ngẫu nhiên dưới phương pháp đo lường  $\mathbb{P}$ , là một yếu tố nhiễu (noise).

$\xi$  Biến ngẫu nhiên dưới phương pháp đo lường  $\mathbb{Q}$ , là một yếu tố nhiễu (noise).

**softplus** hàm có dạng  $f(x) = \ln(1 + e^x)$ .

# MỞ ĐẦU

Trong môi trường tài chính hiện đại, định giá quyền chọn đóng vai trò quan trọng trong việc quản lý rủi ro và tối ưu hóa cơ hội đầu tư. Hợp đồng quyền chọn, như một công cụ tài chính độc lập, cung cấp khả năng mua hoặc bán một tài sản cơ sở (thường là cổ phiếu hoặc chỉ số chứng khoán) trong tương lai với mức giá được thỏa thuận trước đó. Điều này mang lại cho các nhà đầu tư sự linh hoạt và khả năng định hình chiến lược đầu tư hiệu quả.

Trong nhiều năm, mô hình Black-Scholes đã đóng vai trò quan trọng và trở thành phương pháp tiêu chuẩn trong lĩnh vực này. Được công bố vào năm 1973, mô hình đã cung cấp một cách tiếp cận toàn diện về định giá quyền chọn trong điều kiện thị trường ổn định, dựa trên giả định độ biến động của thị trường (volatility) là một hằng số[4]. Tuy nhiên, trong thực tế, thị trường thường xuyên đổi mới với những biến động phức tạp và khó nắm bắt. Năm 1995, một mô hình định giá mới ra đời dựa trên phương pháp mô phỏng sự biến động bằng quá trình GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)[7]. Một trong những ưu điểm nổi bật của mô hình GARCH là khả năng nắm bắt được dao động của cổ phiếu, giúp đưa ra kết quả chính xác hơn so với Black-Scholes trong một số thử nghiệm[2].

Trong khóa luận này tập trung nghiên cứu và phát triển phương pháp định giá mới bằng cách sử dụng quá trình Gauss để mô tả cũng như dự đoán độ biến động của cổ phiếu, qua đó xác định giá của hợp đồng quyền chọn. Khóa luận bao gồm 4 chương, và phần kết luận, mỗi chương có nội dung chính như sau:

- **Chương 1:** Giới thiệu về bài toán định giá quyền chọn.
- **Chương 2:** Giới thiệu các kiến thức nền tảng, các nghiên cứu liên quan. Chương này đi sâu vào các vấn đề lý thuyết, phương pháp đã được đề xuất để giải quyết bài toán.

- **Chương 3:** Phân tích hạn chế của hai mô hình Black-Scholes và GARCH, đồng thời giới thiệu đề xuất của khóa luận.
- **Chương 4:** Xây dựng sản phẩm thử nghiệm là một trang web định giá quyền chọn.
- **Chương 5:** Kết quả thực nghiệm. Chương này tập trung vào mô tả dữ liệu được chọn, phương thức dùng để đánh giá mô hình và so sánh kết quả với hai mô hình Black-Scholes và GARCH, đem ra đánh giá nhận xét kết quả.
- **Kết luận:** Đánh giá tổng kết các kết quả mà khóa luận đạt được. Cuối cùng đưa ra hướng phát triển tương lai cho bài toán.

# Chương 1

## Giới Thiệu Bài Toán

### 1.1 Hợp đồng quyền chọn

Hợp đồng quyền chọn (option contract) là một trong những thành phần chính của tài chính chứng khoán. Thời gian gần đây, quyền chọn đã tạo nên một cơn sốt ở Phố Wall khi giúp cho các nhà đầu tư bảo vệ tài sản của họ trong điều kiện thị trường đầy biến động[6].

Một hợp đồng quyền chọn mang lại quyền cho người nắm giữ, nhưng không bắt buộc, để mua (call) hoặc bán (put) một tài sản tại một giá đã định trước (giá thực thi) vào một ngày xác định (ngày đáo hạn)[15]. Chúng có thể được phân loại theo nhiều cách khác nhau nhưng có chủ yếu hai loại: kiểu châu Âu (European) và kiểu Mỹ (American). Quyền chọn kiểu châu Âu chỉ có thể được thực hiện vào ngày đáo hạn, trong khi kiểu Mỹ có thể được thực hiện vào bất kỳ ngày giao dịch nào trước ngày đáo hạn. Khoá luận sẽ tập trung vào phân tích và định giá quyền chọn kiểu châu Âu với tài sản là các loại cổ phiếu (không chia cổ tức) hoặc chỉ số chứng khoán.

Ví dụ, ngày 30 tháng 11 năm 2023 giá của cổ phiếu X là 189.53\$. Lúc này ông A mua một hợp đồng quyền chọn kiểu châu Âu của cổ phiếu X với giá 14.65\$ từ ông B. Hợp đồng này có kiểu mua với giá thực thi là 190\$ và ngày đáo hạn là ngày 20 tháng 12 năm 2024, nghĩa là đến ngày đó, ông A có quyền mua hoặc không mua cổ phiếu X với giá 190\$. Xem xét một vài trường hợp có thể xảy ra ở ngày đáo hạn:

- Giả sử giá của cổ phiếu X tăng lên đến 250\$, thì ông A cũng chỉ cần bỏ ra

190\$ để mua bằng cách kích hoạt hợp đồng, và ông B sẽ buộc phải bán cho ông A với giá đó. Để thấy trong trường hợp này, ông A sẽ lời một khoản là  $60\$ - 14.65\$ = 45.35\$$  và ông B lỗ một khoản tương tự.

- Một trường hợp khác là giá cổ phiếu X xuống mức 150\$, thì ông A sẽ phải bỏ qua và mất khoản phí 14.65\$ (tiền hợp đồng) cho ông B.

Như vậy cả bên mua (A) lẫn bên bán (B) đều có những chiến lược và cơ hội kiếm lời của riêng mình. Các nhà đầu tư, nhà giao dịch và các tổ chức tài chính sử dụng quyền chọn nhờ những ưu điểm vượt trội như:

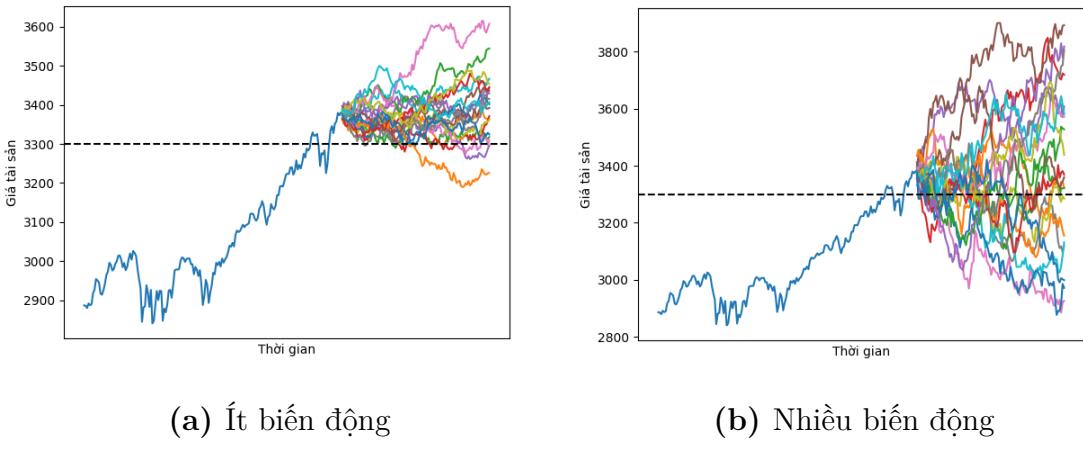
- **Cung cấp sức mạnh đòn bẩy lớn:** Với một khoản đầu tư nhỏ, nhà đầu tư có thể kiểm soát một lượng tài sản lớn. Như ở ví dụ trên, ông A có thể kiếm lời chỉ với 14.65\$ cho phí hợp đồng quyền chọn, thay vì mua cổ phiếu X với giá 189.53\$.
- **Tính linh hoạt:** Nhà đầu tư có thể tận dụng biến động thị trường mà không cần phải nắm giữ trực tiếp tài sản. Như ở trong ví dụ trên, ông B không cần thiết phải sở hữu cổ phiếu mới có thể bán quyền chọn[15]. Khi ông A kích hoạt quyền chọn, ông B có thể mua hoặc vay cổ phiếu để bán lại cho ông A, còn nếu không thì ông B nghiêm nhận một khoản lời từ việc bán quyền chọn.
- **Tính phòng thủ:** Người nắm giữ quyền chọn chỉ mất mức phí khi thị trường di chuyển ngược hướng so với dự đoán của họ, trong khi những người nắm giữ tài sản cơ bản có thể mất toàn bộ giá trị của nó. Như ở ví dụ trên, khi giá cổ phiếu xuống đến 150\$, ông A chỉ mất 14.65\$. Còn đối với những người nắm giữ cổ phiếu, họ sẽ mất  $189.53\$ - 150\$ = 39.53\$$ .

Các hợp đồng quyền chọn là công cụ tài chính ưa thích đối với những quỹ phòng hộ khi họ có thể sử dụng chúng để tối ưu lợi nhuận đầu tư cũng như bảo vệ tài sản trước những rủi ro của thị trường. Quỹ phòng hộ là một dạng quỹ đầu tư đặc biệt và ngày càng trở nên phổ biến, với giá trị tài sản khoảng 2000 tỷ USD được đầu tư vào trên toàn thế giới[13].

Các hợp đồng quyền chọn có thể được mua và bán trên các sàn giao dịch, ví dụ như sàn giao dịch quyền chọn Chicago. Đây là một trong những sàn giao dịch quyền chọn lớn nhất trên thế giới với hàng chục triệu hợp đồng được trao đổi mỗi ngày[8].

## 1.2 Bài toán định giá quyền chọn trong tài chính

Câu hỏi đầu tiên đặt ra cho các nhà đầu tư khi tham gia giao dịch quyền chọn là: làm sao để xác định được giá trị của nó? Ở ví dụ trước, làm sao để ông A biết rằng mức giá 14.65\$ mà ông B đưa ra là đắt hay rẻ? Hay làm sao để ông B tính toán được mức giá 14.65\$ để mà chào bán cho ông A? Lúc này sẽ cần một mức giá để các nhà đầu tư có thể tham khảo và lên chiến lược cho kế hoạch của họ, và mức giá này có thể xác định nhờ các mô hình định giá (option pricing model) như Black-Scholes hay GARCH. Một mô hình định giá tốt sẽ cho ra giá trị hợp lý của hợp đồng quyền chọn, và phù hợp với mức giá của thị trường. Chương 5 sẽ đi sâu hơn về phương pháp được dùng để đánh giá độ chính xác của các mô hình.



**Hình 1.1:** Ảnh hưởng của mức độ biến động đến giá quyền chọn

Có 6 yếu tố ảnh hưởng đến giá của một hợp đồng quyền chọn[16]:

- Mức giá hiện tại của tài sản,  $S_0$ .
- Mức giá thực thi,  $K$ .
- Thời gian đáo hạn (năm),  $T$ .
- Độ biến động của giá tài sản,  $\sigma_S$ .
- Lãi suất phi rủi ro,  $r$ .

Từ những yếu tố trên, các mô hình định giá sẽ tính toán và đưa ra mức giá lý thuyết cho hợp đồng. Trong đó  $\sigma_S$  là yếu tố quan trọng và khó xác định nhất, vì

$S_0$ ,  $K$  và  $T$  là ba thông tin gắn liền với mỗi quyền chọn, còn  $r$  có thể lấy theo lãi suất phi rủi ro của thị trường (sẽ được giải thích chi tiết hơn ở chương 2). Hình 1.1 giả lập giá của tài sản trong tương lai dưới các mức độ biến động khác nhau, từ đó xem xét ảnh hưởng của nó đến giá trị của quyền chọn kiểu mua (các yếu tố khác như  $S_0$ ,  $K$ ,  $T$ ,  $r$  là như nhau). Đường nét đứt màu đen thể hiện mức giá thực thi  $K$ . Có thể thấy rằng, đối với các trường hợp giá tài sản lớn hơn  $K$ , thì quyền chọn sẽ mang lại lời cho nhà đầu tư khi kích hoạt (mua với giá  $K$  trong khi thực tế giá lớn hơn  $K$ ). Từ hình 1.1 có thể nhận ra rằng, khi  $\sigma_S$  cao, nhà đầu tư sẽ có khả năng lời lớn hơn khi giá tài sản có thể lên rất cao. Điều đó khiến cho quyền chọn mua này trở nên có giá trị hơn. Điều tương tự cũng xảy ra đối với quyền chọn bán.

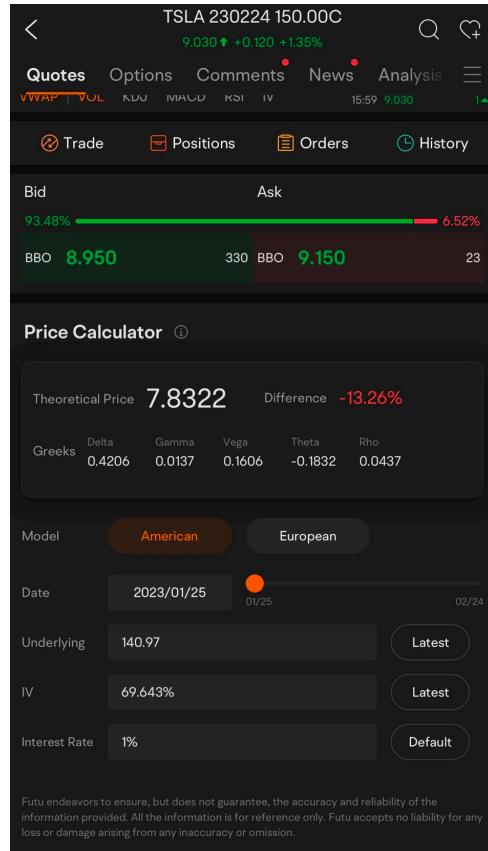
Hiện nay, các mô hình định giá được tích hợp vào rất nhiều ứng dụng phân tích tài chính cho các nhà đầu tư chuyên nghiệp, cũng như các ứng dụng giao dịch cho người dùng phổ thông. Có thể kể đến một số như:



**Hình 1.2:** Màn hình định giá quyền chọn của Bloomberg Terminal. Nguồn: Bloomberg

- **Bloomberg Terminal:** một hệ thống máy tính cho phép các nhà đầu tư truy cập dịch vụ dữ liệu của Bloomberg, cung cấp dữ liệu tài chính, tin tức, hệ thống nhắn tin độc quyền cũng như tạo điều kiện cho việc giao dịch tài chính theo thời gian thực. Bloomberg Terminal được sử dụng rộng rãi bởi các tổ chức tài chính lớn trên thế giới[19]. Bloomberg Terminal cung cấp chức năng tính toán giá của quyền chọn theo nhiều mô hình khác nhau (hình 1.2).
- **moomoo SG:** một ứng dụng di động giúp người dùng giao dịch chứng khoán

ở các thị trường như Mỹ, Trung Quốc hay Singapore. Tại màn hình giao dịch quyền chọn, moomoo sẽ tính toán mức giá lý thuyết của quyền chọn đó và mức chênh lệch so với giá thị trường (hình 1.3).

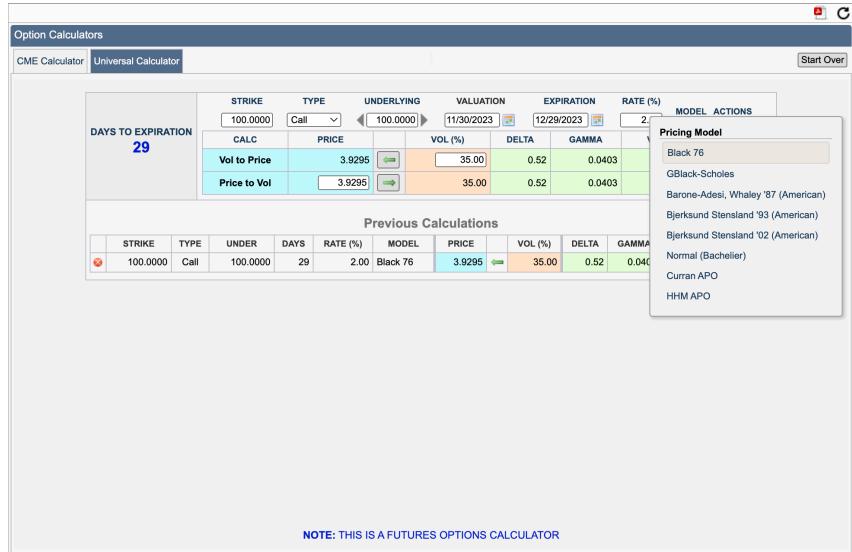


**Hình 1.3:** Màn hình định giá quyền chọn của moomoo SG. Nguồn: DollarsAndSense

- **CME Group Calculator:** CME Group, tập đoàn vận hành các sàn giao dịch lớn trên thế giới, cũng cung cấp chức năng tính toán giá quyền chọn trên trang web của họ. Người dùng có thể truy cập vào địa chỉ này và lựa chọn các thông số về quyền chọn cũng như mô hình muốn sử dụng để tính toán mức giá lý thuyết của nó (hình 1.4).

### 1.3 Lý do chọn đòn bẩy tài

Ngày nay, việc định giá quyền chọn đang trải qua những xu hướng quan trọng, đồng thời thách thức và định hình bởi những tiến bộ trong công nghệ và sự biến



**Hình 1.4:** Màn hình định giá quyền chọn của CME Group. Nguồn: CME Group

động ngày càng phức tạp của thị trường tài chính toàn cầu. Sự tiến bộ của khoa học máy tính, cụ thể hơn là học máy và trí tuệ nhân tạo cũng đã mở ra những cơ hội mới trong lĩnh vực này. Các mô hình dự đoán và học máy ngày càng được tận dụng nhiều hơn, giúp nhà đầu tư và nhà phân tích tài chính hiểu rõ hơn về những vấn đề của thị trường.

Một trong những mô hình học máy có thể ứng dụng trong tài chính là quá trình Gauss, khi một số nghiên cứu cho thấy mô hình này tỏ ra hiệu quả trong việc dự báo chỉ số biến động của tài sản[22][26]. Do đó, khoá luận này tập trung phát triển một mô hình định giá quyền chọn kiểu châu Âu, dựa trên quá trình Gauss và những lý thuyết đã được chứng minh bởi mô hình định giá GARCH. Ngoài ra, khoá luận cũng xây dựng sản phẩm thử nghiệm là một trang web định giá quyền chọn sử dụng ba phương pháp là Black-Scholes, GARCH và quá trình Gauss.

# Chương 2

## Các Kiến Thức Nền Tảng

### 2.1 Các khái niệm tài chính

#### 2.1.1 Chênh lệch giá, không chênh lệch giá và lãi suất phi rủi ro

Chênh lệch giá (Arbitrage) là sự chênh lệch giữa giá của một tài sản trên các thị trường khác nhau hoặc giữa giá thị trường và giá lý thuyết dự kiến. Trong ngữ cảnh tài chính, chênh lệch giá tạo ra cơ hội lợi nhuận phi rủi ro cho nhà đầu tư thông minh. Nhà đầu tư có thể mua tài sản ở giá thấp nhất và bán ở giá cao nhất, tận dụng sự không đồng đều giữa giá cung cấp và giá yêu cầu trên thị trường.

Giả sử có một cặp tiền tệ, ví dụ EUR/USD, đang được giao dịch trên các sàn giao dịch khác nhau. Tại một thời điểm nhất định, giá mua của một Euro (EUR) có thể là 1.10 đô la Mỹ (USD) trên sàn A, trong khi đồng thời, trên sàn B, giá bán của một Euro có thể là 1.09 USD. Nhà đầu tư có thể tận dụng chênh lệch giá này để có lợi nhuận mà không phải chịu bất kỳ rủi ro nào. Họ có thể mua một Euro từ sàn B ở giá 1.09 USD và ngay lập tức bán nó trên sàn A ở giá 1.10 USD. Như vậy, họ kiếm được 0.01 USD cho mỗi Euro mà họ đã mua và bán.

Tuy nhiên, trong thực tế, các cơ hội chênh lệch giá thường chỉ tồn tại trong khoảng thời gian ngắn và có thể biến mất nhanh chóng do sự can thiệp của thị trường. Ở trong ví dụ trên, các sàn sẽ điều chỉnh lại khiến cho giá mua và bán bằng nhau do áp lực cung-cầu: khi số lượng mua tăng lên thì sàn A sẽ phải tăng giá bán;

khi số lượng bán tăng lên thì sàn B sẽ giảm giá mua. Lúc này thị trường hội tụ về một trạng thái được gọi là không chênh lệch giá (No arbitrage hay Arbitrage-free).

Khi thị trường ở trạng thái không chênh lệch giá, nếu không muốn chịu bất kỳ rủi ro nào thì nhà đầu tư chỉ có thể nhận về mức lợi nhuận tối đa tương đương với lãi suất phi rủi ro (Risk-free interest rate). Một ví dụ về lãi suất phi rủi ro đó là lãi suất trái phiếu của chính phủ. Nếu nhà đầu tư mua trái phiếu này thì gần như chắc chắn sẽ có lãi khi rủi ro mất tiền là rất thấp (chính phủ sụp đổ và không có tiền trả cho trái phiếu).

### 2.1.2 Phương pháp đo lường $\mathbb{P}$ và $\mathbb{Q}$

Phương pháp đo lường  $\mathbb{P}$  tính toán xác suất của các sự kiện xảy ra dựa trên dữ liệu thực tế. Trong khi phương pháp đo lường  $\mathbb{Q}$  tính toán xác suất dựa trên giả thuyết trung tính rủi ro. Xác suất trung tính rủi ro (Risk neutral probability) quy định rằng xác suất mà một tài sản bất kỳ  $X$ , sau khi trải qua một khoảng thời gian  $t$ , có giá trị kỳ vọng đem lại lợi nhuận bằng với lãi suất phi rủi ro  $r$ [17]:

$$E_{\mathbb{Q}}[X_t] = X_0 e^{rt}$$

Việc áp dụng xác suất trung tính rủi ro giúp đảm bảo không có cơ hội chênh lệch giá nào được tạo ra. Giúp xác định giá quyền chọn một cách chính xác và nhất quán.

### 2.1.3 Định giá quyền chọn

Mỗi quyền chọn có các thông tin cụ thể:

- Thời gian đáo hạn  $T$ .
- Giá thực thi khi hợp đồng đáo hạn  $K$ .
- Giá của tài sản cơ sở ở thời điểm hiện tại  $S_0$ .

Từ thị trường ta còn có thêm các thông tin bao gồm:

- Lãi suất phi rủi ro  $r$ .

- Độ biến động của tài sản  $\sigma_S$ .

Tại thời điểm  $T$ , đối với quyền chọn mua, giả sử tài sản đạt đến một mức giá  $S_T$  nào đó thấp hơn giá thực thi  $K$ , nhà đầu tư không cần kích hoạt hợp đồng, lợi nhuận thu về là 0. Tuy nhiên nếu  $S_T$  lớn hơn  $K$ , nhà đầu tư có thể kích hoạt hợp đồng, qua đó nhận về khoản lời là  $S_T - K$ . Tương tự với quyền chọn bán. Dưới  $\mathbb{Q}$ , ta có kỳ vọng của hàm hoàn trả (thể hiện giá trị của quyền chọn mua (call) và bán (put) tại thời điểm  $T$ ) như sau[12]:

$$P_c = E_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)]$$

$$P_p = E_{\mathbb{Q}}[\max(K - S_T, 0)]$$

Lúc này, bằng cách ứng dụng xác suất trung tính rủi ro, lấy tích của hàm hoàn trả trả và tỉ lệ chiết khấu  $e^{-rT}$ , ta sẽ có giá trị của quyền chọn ở thời điểm hiện tại[12]:

$$C = e^{-rT} E_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)] \quad (2.1)$$

$$P = e^{-rT} E_{\mathbb{Q}}[\max(K - S_T, 0)] \quad (2.2)$$

## 2.2 Mô hình Black-Scholes

Để có thể suy ra công thức cho giá trị của một quyền chọn dựa trên giá tài sản, cần một số giả định về “điều kiện lý tưởng” của thị trường[4]:

- Lãi suất phi rủi ro có thể biết trước và không đổi theo thời gian.
- Tỷ suất lợi nhuận logarit tuân theo phân phối chuẩn.
- Mức độ biến động của tài sản (độ lệch chuẩn của tỷ suất lợi nhuận) là cố định.
- Tài sản không chia cổ tức.
- Quyền chọn phải là kiểu châu Âu.
- Không có phí giao dịch khi mua hoặc bán tài sản.
- Có thể vay (kèm lãi) để mua tài sản.
- Không có khoản phạt nào cho việc bán khống.

Mô hình Black-Scholes giả định rằng giá của tài sản cơ sở  $S_t$  tuân theo chuyển động hình học Brown[12]:

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t \quad (2.3)$$

Trong đó  $\mu_S$  và  $\sigma_S$  là hằng số,  $\mu_S$  là mức lợi nhuận kỳ vọng còn  $\sigma_S$  là mức độ biến động của  $S$ .  $W_t$  là một quá trình ngẫu nhiên liên tục, có phân phối chuẩn với giá trị kỳ vọng là 0 và phương sai là  $dt$ . Bằng bổ đề Itô, ta có thể chứng minh được giá trị chênh lệch của  $\ln S$  trong khoảng thời gian  $t$  là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn[14]:

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim \phi \left[ \left( \mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) t, \sigma_S^2 t \right] \quad (2.4)$$

Mức độ biến động của tài sản,  $\sigma_S$ , có thể định nghĩa như độ lệch chuẩn của tỷ suất lợi nhuận. Áp dụng xác suất trung tính rủi ro, đặt  $\mu_S = r$ , và từ bổ đề Itô, ta có thể tìm ra công thức của giá quyền chọn mua và bán[12] lần lượt là:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.5)$$

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.6)$$

Trong đó:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma_S^2/2)T}{\sigma_S \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma_S^2/2)T}{\sigma_S \sqrt{T}} = d_1 - \sigma_S \sqrt{T}$$

Trong công thức trên, các tham số biết trước là:

- $S_0$ : Giá trị hiện tại của tài sản cơ sở.
- $K$ : Giá thực thi khi hợp đồng đến thời gian đáo hạn. Tài sản có thể được mua hoặc bán với giá  $K$ .
- $T$ : Thời gian đáo hạn của hợp đồng quyền chọn.
- $r$ : Lãi suất phi rủi ro của thị trường.

Tham số duy nhất trong Black-Scholes không thể quan sát trực tiếp được là biến động của giá tài sản:  $\sigma_S$ . Cách đơn giản nhất để tính  $\sigma_S$  là sử dụng dữ liệu từ quá khứ. Theo [12], với  $n+1$  là số điểm dữ liệu quan sát được,  $S_i$  là giá trị của tài sản

tại  $i$  với  $i = 0, 1, \dots, n$ , ta có:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Có thể ước tính được giá trị của độ lệch chuẩn  $s$  của  $u_i$ :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

Hay:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2}$$

Với  $\tau$  là khoảng thời gian từ  $i$  đến  $i+1$ , có đơn vị là năm, từ công thức (2.4), độ lệch chuẩn của  $u_i$  là  $\sigma_S \sqrt{\tau}$ . Suy ra  $\sigma_S$  có thể được ước lượng từ  $s$ :

$$\hat{\sigma}_S = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Đối với tài chính chứng khoán, các điểm dữ liệu là giá cổ phiếu hằng ngày. Khi đó  $\tau = \frac{1}{252}$  (do một năm có 252 ngày giao dịch). Suy ra:

$$\hat{\sigma}_S = s \sqrt{252}$$

## 2.3 Quá trình GARCH và mô hình định giá dựa trên GARCH

### 2.3.1 GARCH

GARCH là một mô hình dùng để phân tích biến động của giá tài sản và dự đoán nó trong tương lai. Mô hình định giá quyền chọn GARCH sử dụng các giả thiết về thị trường giống như Black-Scholes, ngoại trừ việc coi biến động của giá tài sản không phải là một hằng số. GARCH cho rằng biến động thay đổi theo thời gian và có phương sai không đồng nhất. Một điểm nữa là mô hình định giá GARCH ứng dụng với miền thời gian rời rạc, trong khi Black-Scholes là miền thời gian liên tục.

Trong miền thời gian rời rạc, với  $S_t$  là giá trị của tài sản cơ sở tại thời điểm  $t$  và  $r_t$  là lãi suất phi rủi ro trong khoảng thời gian từ  $t-1$  đến  $t$ . Theo  $\mathbb{P}$ , tỷ suất

lợi nhuận đơn kỳ của tài sản được giả định là phân bố chuẩn logarit[7], khi đó:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r_t + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \varepsilon_t, \quad (2.7)$$

Trong đó  $\varepsilon_t$  có giá trị kỳ vọng là 0 và phương sai  $h_t = \sigma_S^2$ , trong điều kiện xác suất thực tế  $\mathbb{P}$ ,  $\lambda$  là phần bù rủi ro.  $\varepsilon_t$  tuân theo quá trình GARCH( $p, q$ ):

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t) \quad (2.8)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (2.9)$$

Trong đó  $\phi_t$  là tập hợp tất cả các thông tin có được cho đến thời điểm  $t$ ,  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $\omega \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  và  $\beta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$  với  $i = 0, 1, \dots, n$ . Nói cách khác, phương sai có điều kiện  $h_t$  là một hàm tuyến tính của các nhiễu bình phương và chính nó trong quá khứ. Vậy nên  $h_t$  có thể dự đoán được dựa vào  $\phi_t$ .

### 2.3.2 Xác suất trung tính rủi ro cục bộ

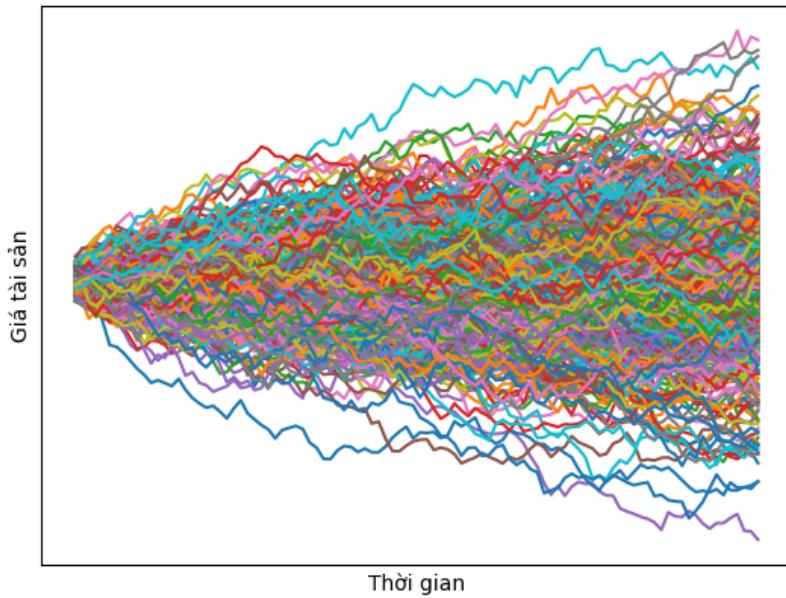
Để phát triển mô hình định giá quyền chọn GARCH, khái niệm xác suất trung tính rủi ro cục bộ được sử dụng để thích ứng với phương sai không đồng nhất của hàm tỷ suất lợi nhuận[7]:

$$E_{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} | \phi_{t-1}\right) = e^{r_t} \quad (2.10)$$

Và:

$$Var_{\mathbb{Q}}\left(\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} | \phi_{t-1}\right) = Var_{\mathbb{P}}\left(\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} | \phi_{t-1}\right) \quad (2.11)$$

Ở định nghĩa trên, phương sai có điều kiện  $h_t$  dưới  $\mathbb{P}$  và  $\mathbb{Q}$  phải bằng nhau. Điều này là cần thiết để có thể tính toán  $h_t$  cho bài toán định giá bằng cách sử dụng dữ liệu từ quá khứ.



**Hình 2.1:** Giả lập các mức giá của  $S$  với 500 mẫu.

### 2.3.3 Mô hình định giá

Theo xác suất trung tính rủi ro cục bộ, dưới phương pháp đo lường  $\mathbb{Q}$ , tỷ suất lợi nhuận của tài sản  $S$  và phương sai của nó có thể được biểu diễn như sau[7]:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r_t - \frac{1}{2}h_t + \xi_t \quad (2.12)$$

Trong đó:

$$\xi_t | \phi_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t) \quad (2.13)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-1}})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (2.14)$$

Trong công thức trên, ngoài các tham số đã biết như giá tài sản  $S_t$  và lãi suất phi rủi ro đơn kỳ  $r_t$ , thì bộ  $\theta = \{\omega, \alpha, \beta, \lambda\}$  là các tham số chưa biết. Tuy nhiên  $\theta$  có thể xác định được dựa trên phương pháp ước lượng hợp lý tối đa với hàm mục tiêu là logarit của hàm xác suất khả năng. Khoa luận này sử dụng GARCH(1,1) khi đây là mô hình GARCH phổ biến nhất[7]. GARCH(1,1) có logarit của hàm xác suất

khả năng là[9]:

$$-\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(h_t) + \left[ \ln(X_t/X_{t-1}) - r - \lambda \sqrt{h_t} + \frac{1}{2} h_t \right]^2 / h_t \right\} \quad (2.15)$$

Dựa trên định lý giới hạn trung tâm: khi số mẫu tiến đến vô cùng thì giá trị kỳ vọng sẽ tiến về giá trị đúng của nó, ta giả lập các giá trị có thể có của  $S_T$ , qua đó tính giá quyền chọn theo công thức (2.1) và (2.2). Phương pháp này còn được gọi là giả lập Monte-Carlo (hình 2.1). Thuật toán cụ thể được mô tả ở 1.

### **Algorithm 1** Tính giá quyền chọn bằng GARCH

**Input:** Giá hàng ngày của tài sản trong quá khứ cho đến hiện tại  $\mathbf{S} = [\dots, S_{-1}, S_0]$ , giá của lãi suất phi rủi ro trong quá khứ cho đến hiện tại  $\mathbf{r} = [\dots, r_{-1}, r_0]$ , thời gian đáo hạn  $T$  (ngày) và giá thực khi  $K$

**Output:** Giá của quyền chọn

- 1: Tính  $h_t$  dựa trên  $\mathbf{S}$  và  $\mathbf{r}$ ;
- 2: Xác định  $\theta = \{\omega, \alpha, \beta, \lambda\}$  bằng cách tối đa logarit của hàm xác suất khả năng ở (2.15);
- 3:  $M = 10000$  ▷ Số mẫu cần lấy
- 4: **for**  $i = 1 \dots M$  **do**
- 5:     Sinh  $\mathbf{h}_* = [h_1, \dots, h_T]$  từ  $\theta$ ;
- 6:     Tính  $S_T$  từ  $\mathbf{h}_*$ ;
- 7:     Tính hàm hoàn trả dựa trên  $S_T$  và  $K$
- 8: **end for**
- 9: Tính giá quyền chọn  $C$  và  $P$  bằng cách lấy trung bình các hàm hoàn trả, và chiết khấu về thời điểm hiện tại;
- 10: **return**  $C, P$ ;

## 2.4 Quá trình Gauss

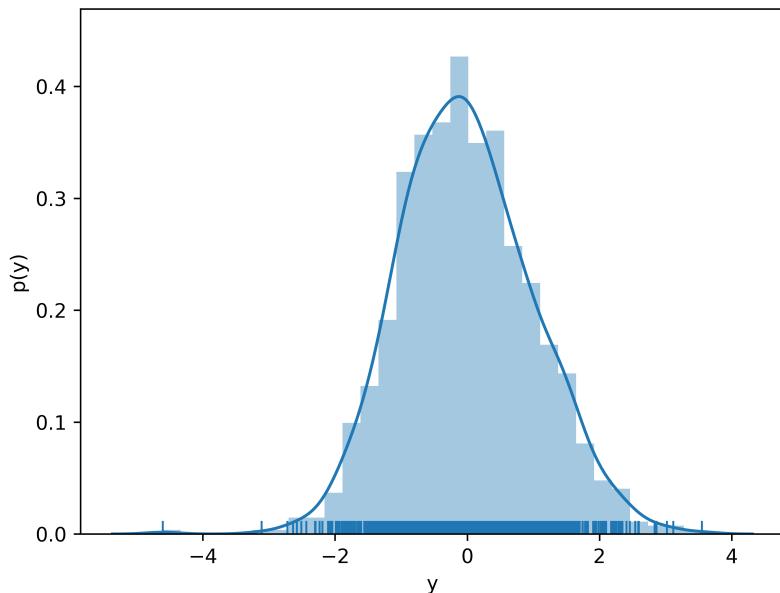
Quá trình Gauss là một mô hình phi tham số: thay vì giả định một hàm  $f$  có một cấu trúc cụ thể (ví dụ như hàm tuyến tính), quá trình Gauss cho rằng  $f$  có thể là bất kỳ một hàm nào. Việc dự đoán sẽ được thực hiện bằng cách áp dụng định luật Bayes.

### 2.4.1 Phân phối chuẩn

Gọi  $y$  là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $y$  có hàm mật độ xác suất là[32]:

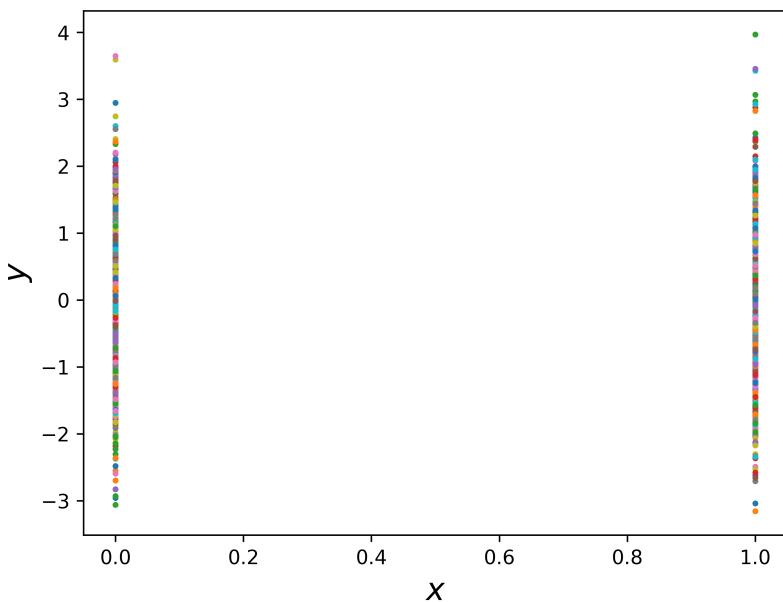
$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Hàm mật độ xác suất của phân phối chuẩn một chiều được biểu diễn ở hình 2.2. Đặt những điểm dữ liệu trong hình 2.2 là  $\mathbf{y}_1 = [y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(n)}]$ . Vẽ  $\mathbf{y}_1$  lên trục  $x$  tại



**Hình 2.2:** Các điểm dữ liệu được vẽ dưới dạng các thanh dọc màu xanh trên trục hoành. Hàm mật độ xác suất của các điểm dữ liệu này được vẽ dưới dạng đường cong chuông hai chiều.

$x = 0$ , ta có thể biểu diễn  $\mathbf{y}_1$  trong một miền toạ độ mới như ở hình 2.3. Tương tự như thế, vẽ thêm một vector khác  $\mathbf{y}_2 = [y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)}]$  tại  $x = 1$ . Lưu ý rằng cả  $\mathbf{y}_1$  và  $\mathbf{y}_2$  đều có phân phối chuẩn. Ngẫu nhiên chọn ra 10 điểm từ vector  $\mathbf{y}_1$  và  $\mathbf{y}_2$ , nối 20 điểm này theo thứ tự bằng các đường thẳng như thể hiện trong hình 2.4a. Các đường kết nối lúc này trông giống như các hàm tuyến tính trải dài trong miền  $[0, 1]$ . Các hàm này có thể sử dụng để thực hiện dự đoán cho các tác vụ hồi quy nếu các điểm dữ liệu mới nằm trên (hoặc đủ gần) các đường tuyến tính này. Tuy nhiên điều này khó có thể xảy ra trong hầu hết các trường hợp khi các hàm này còn quá thô sơ và đơn giản. Nếu sử dụng nhiều vector hơn, ví dụ như 20 vector



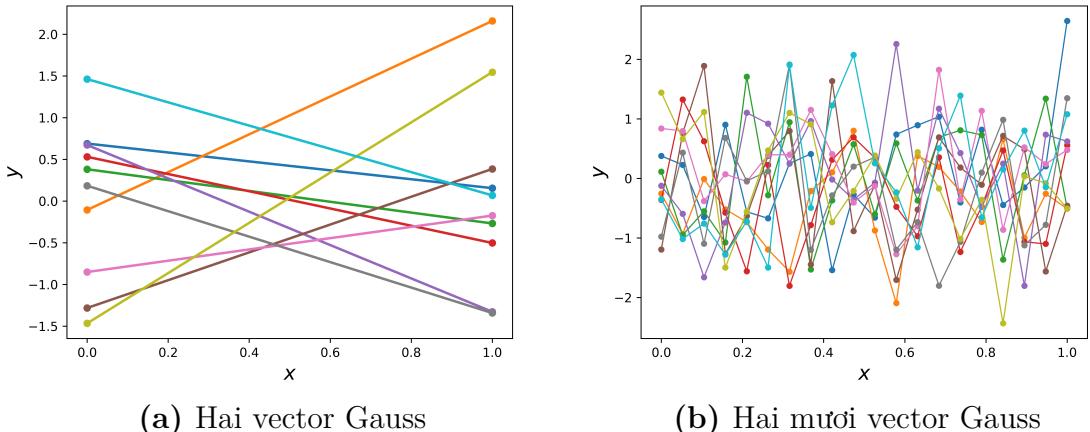
**Hình 2.3:** Hai vector Gauss độc lập được vẽ theo chiều dọc trong không gian tọa độ x, y.

$[y_1, \dots, y_{20}]$  trong miền  $[0, 1]$ , và kết nối 10 điểm mẫu được chọn ngẫu nhiên của mỗi vector thành các đường thẳng, sẽ có 10 đường được hiển thị như trong hình 2.4b. Lúc này các hàm sẽ dễ dàng khớp với dữ liệu hơn. Tuy vậy vẫn không thể sử dụng chúng để thực hiện dự đoán cho các tác vụ hồi quy vì quá nhiều. Vậy nên, các đường này phải mượt hơn, nghĩa là các điểm đầu vào gần nhau phải có giá trị đầu ra tương tự.

Các hàm được tạo ra bằng cách kết nối các điểm trong từng phân phối độc lập không đủ mượt cho các tác vụ hồi quy, lúc này ta cần các phân phối tương quan với nhau như một phân phối chuẩn chung - phân phối chuẩn nhiều chiều.

#### 2.4.2 Phân phối chuẩn nhiều chiều

Phân phối chuẩn nhiều chiều, còn được gọi là phân phối Gauss nhiều chiều hoặc phân phối chuẩn chung, là tổng quát hóa của phân phối chuẩn cho không gian nhiều chiều hơn. Giả sử  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  là một vector ngẫu nhiên có phân phối chuẩn nhiều chiều với vector kỳ vọng  $\boldsymbol{\mu}$  và ma trận hiệp phương sai  $\boldsymbol{\Sigma}$ , khi đó hàm



**Hình 2.4:** Nối các điểm từ các vector Gauss độc lập

mật độ xác suất của  $\mathbf{y}$  được định nghĩa[32]:

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

Trong đó  $\boldsymbol{\Sigma}$  là ma trận hiệp phương sai (đối xứng):  $\Sigma_{ij}$  thể hiện mối tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên  $y_i$  và  $y_j$ . Để thấy  $\Sigma_{ii}$  chính là phương sai của  $y_i$ .  $|\boldsymbol{\Sigma}|$  và  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  lần lượt là định thức và nghịch đảo của  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Biểu thức trên có thể viết tắt thành:

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}\right)$$

### 2.4.3 Nhân

Nhân (kernel), hay còn gọi là hàm hiệp phương sai, là một hàm được sử dụng để đo lường mức độ tương quan giữa hai điểm dữ liệu trong một phân phối chuẩn nhiều chiều. Nhân được sử dụng để tính toán ma trận hiệp phương sai của phân phối. Một trong những nhân phổ biến nhất là hàm luỹ thừa bình phương, với dạng

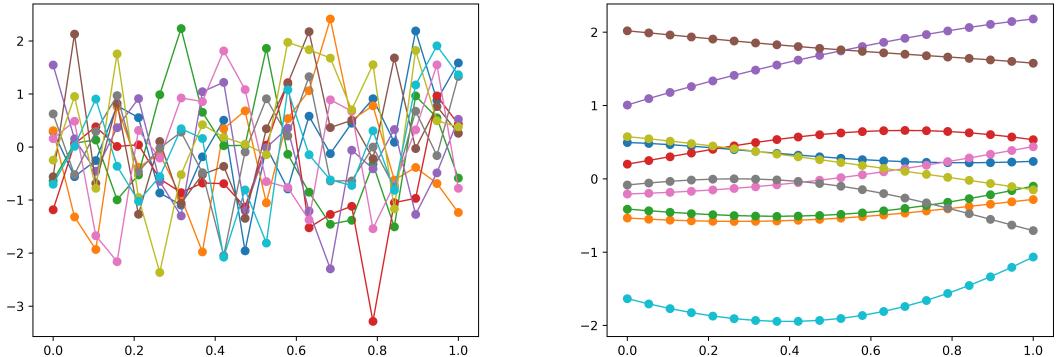
đơn giản được biểu diễn bằng[32]:

$$k(x, x') = \text{cov}(x, x') = \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2}\right) \quad (2.16)$$

Hình 2.4b phác họa 20 vector Gauss độc lập, sau đó kết nối 10 điểm ngẫu nhiên của mỗi vector theo thứ tự bằng các đường thẳng. Ở phần này, thay vì vẽ 20 vector Gauss độc lập, ta lấy 10 mẫu từ phân phối chuẩn 20-chiều sử dụng nhân là hàm hiệp phương sai đồng nhất (hình 2.5a):

$$k(x, x') = \begin{cases} 1 & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases}$$

Kết quả cho thấy 2.5a giống với 2.4b do không có sự tương quan giữa các điểm dữ liệu ( $k(x, x') = 0$  khi  $x \neq x'$ ). Khi sử dụng hàm (2.16) làm nhân, ta nhận được các đường mượt hơn, hiển thị trong 2.5b. Bằng cách sử dụng nhân, ta thu được các



(a) Mười mẫu từ phân phối chuẩn 20-chiều sử dụng hàm hiệp phương sai đồng nhất làm nhân

(b) Mười mẫu từ phân phối chuẩn 20-chiều sử dụng hàm luỹ thừa bình phương đơn giản làm nhân

**Hình 2.5:** Các mẫu từ hai phân phối chuẩn nhiều chiều khác nhau

đường mịn hơn và chúng bắt đầu giống với các hàm hơn. Khi số chiều của phân phối tăng lên đến vô cùng, các đường mẫu trong 2.5b sẽ trở nên liên tục và ta có thể dùng hồi quy trên bất kỳ điểm toạ độ nào.

#### 2.4.4 Hàm trung bình

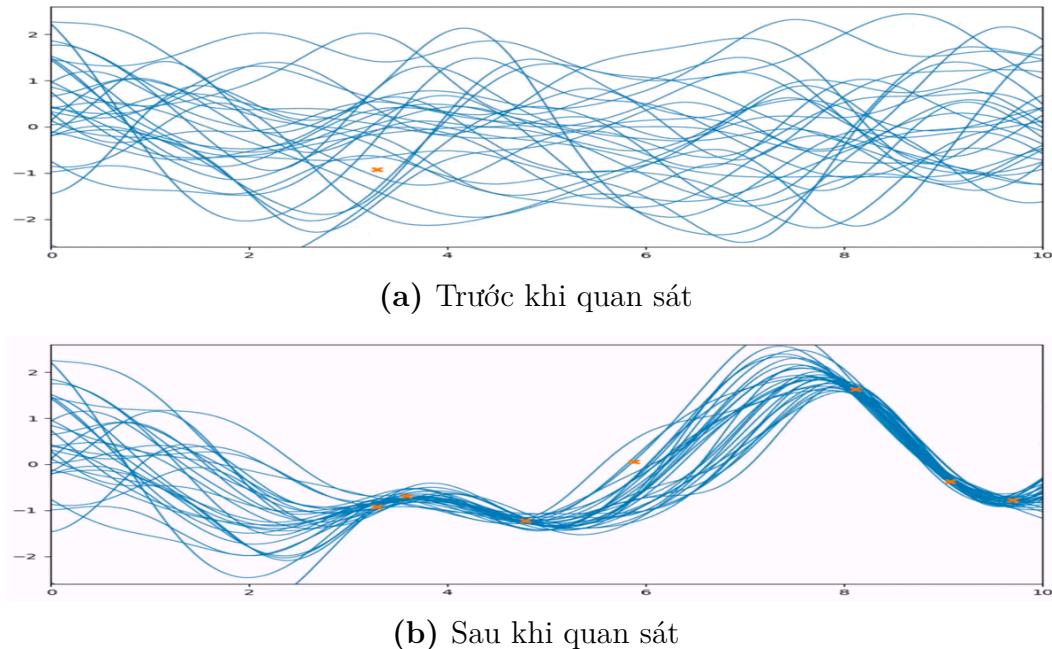
Hàm trung bình, hay còn gọi là hàm kỳ vọng, xác định giá trị kỳ vọng của mỗi thành phần trong  $\mathbf{f} = [f(x_1), \dots, f(x_n)]$ . Hàm trung bình có thể là bất kỳ hàm nào trong không gian thực, trong đó hàm phổ biến nhất thường là một hằng số  $m(x) = \mu_0$  hoặc một hàm tuyến tính.  $m$  thường được ước tính dựa trên dữ liệu trong quá trình huấn luyện. Điều này hoạt động tốt khi lượng dữ liệu đủ lớn.

#### 2.4.5 Quá trình Gauss

Quá trình Gauss có thể được ký hiệu như sau:

$$f \sim \mathcal{GP}(m, k)$$

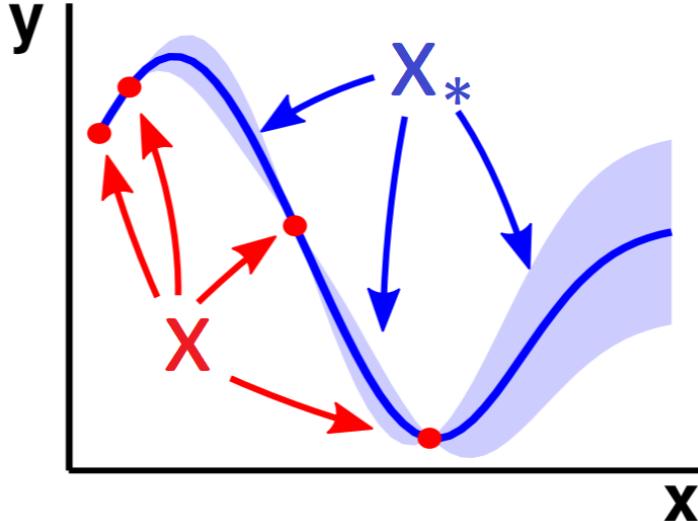
Quá trình Gaussian mô tả phân phối xác suất của các hàm phù hợp với một tập hợp các điểm cho trước: Khởi đầu với vô số hàm, ta chọn lọc ra những hàm khớp với các dữ liệu quan sát được. Hàm hồi quy được mô hình hóa bởi phân phối



**Hình 2.6:** Phân phối chuẩn nhiều chiều trước và sau khi quan sát được dữ liệu.  
Nguồn: Github

chuẩn nhiều chiều:

$$p(\mathbf{f}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{f}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{K})$$



**Hình 2.7:** Một minh họa về thực hiện hồi quy bằng quá trình Gauss. Các điểm màu đỏ là dữ liệu quan sát được, và việc dự đoán diễn ra tại các điểm màu xanh. Nguồn: Github

Trong đó  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{f} = [f(x_1), \dots, f(x_n)]$ ,  $\boldsymbol{\mu} = [m(x_1), \dots, m(x_n)]$  và  $\mathbf{K}_{ij} = k(x_i, x_j)$ .  $\mathbf{x}$  là tọa độ các điểm dữ liệu quan sát được,  $\mathbf{f}$  là giá trị quan sát được tại các tọa độ đó,  $m$  là hàm trung bình và  $k$  là nhân. Quá trình Gauss là một phân phối của các hàm có cấu trúc được xác định bởi  $\mathbf{K}$ . Nếu các điểm  $x_i$  và  $x_j$  được coi là tương tự nhau bởi nhân  $k$ , thì đầu ra hàm của hai điểm đó,  $f(x_i)$  và  $f(x_j)$ , là tương tự nhau. Việc thực hiện hồi quy bằng quá trình Gauss được minh họa bởi hình 2.7: cho dữ liệu quan sát được (điểm màu đỏ) và hàm trung bình  $f$  (đường màu xanh lam) được ước lượng bởi các điểm dữ liệu quan sát này, chúng ta thực hiện dự đoán giá trị của  $f(\mathbf{x}_*)$  tại các điểm mới  $\mathbf{x}_*$ . Phân phối kết hợp giữa  $\mathbf{f}$  và  $\mathbf{f}_*$  được biểu diễn bằng[32]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} m(\mathbf{x}) \\ m(\mathbf{x}_*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_* \\ \mathbf{K}_*^\top & \mathbf{K}_{**} \end{bmatrix} \right)$$

Trong đó  $\mathbf{K} = K(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{K}_* = K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)$  và  $\mathbf{K}_{**} = K(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*)$ . Đây là phân phối kết hợp  $p(\mathbf{f}, \mathbf{f}_* | \mathbf{x}, \mathbf{x}_*)$  đối với  $\mathbf{f}$  và  $\mathbf{f}_*$ , từ đây có thể suy ra được phân phối có điều kiện  $p(\mathbf{f}_* | \mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_*)$ [5]:

$$\mathbf{f}_* | \mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \sim \mathcal{N} (m(\mathbf{x}_*) + \mathbf{K}_*^\top \mathbf{K} (\mathbf{f} - m(\mathbf{x})), \mathbf{K}_{**} - \mathbf{K}_*^\top \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_*) \quad (2.17)$$

Như vậy để hoàn thiện quá trình Gauss, ta cần xác định được hàm trung bình  $m$

và nhân  $k$ . Việc này có thể đạt được nhờ vào phương pháp ước lượng hợp lý tối đa sử dụng hàm mục tiêu là logarit của hàm xác suất biên với  $\Theta$  là bộ các tham số của  $m$  và  $k$ [5]:

$$p(\mathbf{f} | \mathbf{x}, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{f} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{f} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

## 2.5 Nghiên cứu gần đây

Thời gian gần đây, với sự phát triển của lĩnh vực học máy nói chung, cũng như học sâu nói riêng, đã có rất nhiều nghiên cứu mới ra ra đời nhằm ứng dụng sức mạnh của trí tuệ nhân tạo vào bài toán định giá quyền chọn. Một trong số đó là nghiên cứu định giá quyền chọn của các tác giả đến từ đại học Stanford[18]: nghiên cứu này tìm hiểu về hiệu năng của các mô hình học sâu đối với bài toán định giá, bằng cách coi giá của quyền chọn là một hàm của các điều khoản hợp đồng ( $K, T$ ) và trạng thái tài chính ( $S, r, \sigma_S$ ). Từ đó họ sử dụng mạng nơ-ron để có thể học từ dữ liệu trong quá khứ bằng ba mô hình khác nhau là MLP1, MLP2 và LSTM.

Dữ liệu được sử dụng bao gồm 12,268,772 quyền chọn trong quá khứ từ Wharton Research Data Services[18], mỗi quyền chọn cung cấp thông tin về giá thực thi  $K$ , thời gian đáo hạn  $T$  cũng như giá của tài sản cơ sở  $S$ , ngoài ra còn có lãi suất phi rủi ro  $r$  được lấy từ US Treasury Resource Center[18]. Chỉ số biến động  $\sigma_S$  được tính bằng cách lấy độ lệch chuẩn của tỷ suất lợi nhuận trong vòng 20 ngày gần nhất[18].

### 2.5.1 MLP1

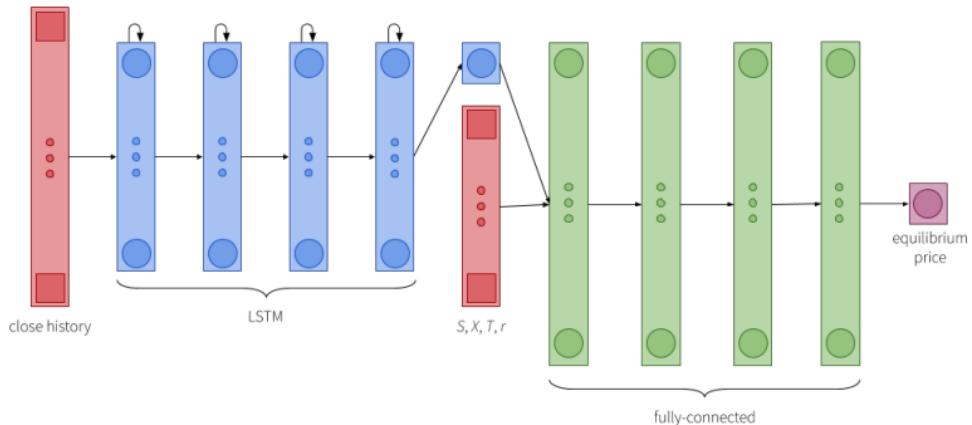
MLP1 sử dụng các chỉ số như  $S, K, T, r, \sigma_S$  làm đầu vào nhằm tìm ra giá hợp lý của quyền chọn với một mạng nơ-ron có 4 lớp: 3 lớp 400 nơ-ron và 1 lớp 1 nơ-ron. Lớp 400 nơ-ron có hàm kích hoạt là Leaky ReLU, và lớp còn lại sử dụng ReLU nhằm đảm bảo kết quả không âm. Các trọng số được khởi tạo bằng phương pháp Glorot. Việc chuẩn hóa hàng loạt (batch normalization) sẽ được thực hiện sau các lớp 400 nơ-ron[18].

## 2.5.2 MLP2

MLP2 có cấu trúc tương tự như MLP1, ngoại trừ việc tiếp cận bài toán bằng cách dự đoán giá chào mua (mức giá người mua sẵn sàng trả) và chào bán (mức giá người bán sẵn sàng nhận) của hợp đồng, thay vì mức giá lý thuyết của nó (trung bình cộng giá mua-bán). Vậy nên lớp đầu ra của mô hình sẽ có hai nơ-ron với hàm kích hoạt ReLU thay vì chỉ 1 như ở MLP1: một nơ-ron cho giá chào mua và một nơ-ron cho giá chào bán[18].

## 2.5.3 LSTM

Phương pháp này sử dụng kiến trúc RNN nhằm dự đoán độ biến động của tài sản. Một LSTM với 8 đơn vị lấy giá của tài sản cơ sở theo từng bước với tổng cộng 20 bước, tương ứng với 20 ngày giao dịch. Chuỗi đầu ra tiếp tục được cho vào 3 lớp LSTM 8 đơn vị, bước cuối cùng sẽ dự đoán độ biến động của thị trường  $\sigma_S$ , và cùng với  $S, K, T, r$ , được đưa vào mô hình MLP1 để xác định giá của quyền chọn[18].



Hình 2.8: Kiến trúc LSTM

## 2.5.4 Kết luận của nghiên cứu

Kết quả được báo cáo ở bảng 2.1 với train-MSE là trung bình sai số bình phương của tập dữ liệu huấn luyện. Các thông số khác được đo lường trên tập dữ liệu thử nghiệm. Bias là trung vị phần trăm sai số, AAPE là trung bình phần trăm sai số

tuyệt đối, MAPE là trung vị phần trăm sai số tuyệt đối, và PEX% là phần trăm của các quan sát trong vòng  $\pm X\%$  của mức giá thực.

	Model	train-MSE	MSE	Bias	AAPE	MAPE	PE5	PE10	PE20
Call	BS	322.95	321.37	0.05	78.79	4.81	50.52	59.33	67.43
	MLP1	23.71	24.00	0.01	24.49	2.12	61.04	68.39	74.33
	MLP2	7.70	15.21	0.09	23.45	1.73	63.03	70.10	75.54
	LSTM	30.61	30.97	0.13	26.58	2.33	58.94	66.35	72.42
Put	BS	543.48	533.25	97.37	68.00	97.46	12.87	18.22	23.58
	MLP1	15.65	15.66	5.03	43.73	18.48	30.46	40.51	51.13
	MLP2	2.03	8.84	3.85	39.59	14.32	33.74	44.25	55.01
	LSTM	22.81	23.15	6.01	48.32	26.05	27.45	36.24	46.17

**Bảng 2.1:** Biểu đồ sai số

Có thể thấy rằng việc sử dụng học sâu giúp đạt được hiệu suất tốt hơn hẳn so với công thức Black-Scholes. Bằng cách học từ dữ liệu của quyền chọn trong quá khứ, nghiên cứu cho thấy rằng có thể định giá quyền chọn với mạng một nơ-ron, và thậm chí hiệu suất còn tốt hơn khi dự đoán riêng biệt giá chào mua và chào bán, thay cho giá lý thuyết của quyền chọn.

Tuy nhiên, việc huấn luyện mạng nơ-ron cần rất nhiều dữ liệu về hợp đồng quyền chọn trong quá khứ, và không có một nguồn mở nào cho loại dữ liệu này[18]. Vậy nên việc tiếp cận dữ liệu sẽ là một thách thức đối với các cá nhân hoặc các tổ chức nhỏ. Ngược lại, Black-Scholes và GARCH là các phương pháp định giá sử dụng giá của tài sản trong quá khứ, mà không cần tham khảo đến giá quyền chọn. Đây là một ưu điểm đáng cân nhắc khi so sánh với các phương pháp dựa trên học sâu. Mô hình đề xuất của khóa luận cũng là một phương pháp như vậy. Do sự hạn chế về nguồn dữ liệu và sự khác biệt ở hướng tiếp cận nên ở chương 5, khóa luận sẽ chỉ so sánh kết quả với hai phương pháp là Black-Scholes và GARCH.

# Chương 3

## Mô hình đề xuất

### 3.1 Hạn chế của Black-Scholes và GARCH

Như đã đề cập ở các chương trước, việc xác định được biến động thị trường, hay  $\sigma_S$ , là yếu tố quan trọng nhất để xác định giá của một hợp đồng quyền chọn. Đối với Black-Scholes,  $\sigma_S$  là một hằng số, và điều này không phản ánh đúng thực tế khi thị trường luôn biến động. Còn GARCH định nghĩa  $h_t = \sigma_S^2$  tuân theo một hàm tuyến tính, mặc dù có sự linh hoạt hơn so với Black-Scholes, giả thuyết này cũng khó có thể mô phỏng được các dao động một cách chính xác khi chúng thường không tuân theo một quy luật cụ thể nào.

Việc áp đặt những giả thuyết cố định đối với  $\sigma_S$  có thể khiến các tính toán trở nên thiếu chính xác so với dữ liệu thực tế. Lúc này quá trình Gauss tỏ ra vượt trội khi là một mô hình phi tham số, và rất linh hoạt trong tác vụ hồi quy. Các nghiên cứu cũng chỉ ra rằng quá trình Gauss cho kết quả tốt hơn so với GARCH khi được ứng dụng để mô phỏng biến động của thị trường[22][26]. Tuy vậy các nghiên cứu này tính toán kết quả dựa trên  $\mathbb{P}$  là phương pháp đo lường thực tế, trong khi phương pháp định giá quyền chọn yêu cầu các tính toán dựa trên  $\mathbb{Q}$  với giả thuyết trung tính rủi ro. Trong chương này khoá luận đề xuất phương pháp định giá mới bằng quá trình Gauss và lý thuyết xác suất trung tính cục bộ (2.10) đã được giới thiệu ở chương 2.

### 3.2 Sử dụng quá trình Gauss để mô phỏng biến động thị trường

Ở chương trước ta đã biết, trong một miền thời gian rời rạc, tỷ suất lợi nhuận của tài sản có thể được biểu diễn bởi công thức (2.7):

$$\begin{aligned}\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} &= r_t + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, h_t)\end{aligned}$$

Vì  $h_t$  là phuong sai, nó không thê âm. Giả sử rằng  $h_t$  có thê biểu diễn bằng hàm softplus của  $f(x_t)$ . Hàm softplus thường được sử dụng để giới hạn đầu ra của một đại lượng sao cho nó luôn dương.:

$$\begin{aligned}h_t &= \ln(1 + e^{f(x_t)}) \\ f &\sim \mathcal{GP}(m, k)\end{aligned}$$

Dưới  $\mathbb{Q}$ , tỷ suất lợi nhuận của tài sản lúc này tương đương với (2.12) như đã trình bày ở chương 2:

$$\begin{aligned}\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} &= r_t - \frac{1}{2} h_t + \xi_t \\ \xi_t &\sim \mathcal{N}(0, h_t)\end{aligned}$$

Do phuong sai  $h_t$  là như nhau đối với  $\mathbb{P}$  và  $\mathbb{Q}$  (2.11) nên dưới  $\mathbb{Q}$  ta có:

$$h_t = \ln(1 + e^{f(x_t)})$$

Khi đó (2.12) có thê được viết lại thành:

$$\begin{aligned}\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} &= r_t - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{f(x_t)}) + \xi_t \\ \Leftrightarrow 2r_1 - 2\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} &= \ln(1 + e^{f(x_t)}) - 2\xi_t\end{aligned}$$

Đặt  $y_t = 2r_1 - 2\ell n \frac{S_t}{S_{t-1}}$  và  $\xi'_t = -2\xi_t$  ta có:

$$y_t = \ell n(1 + e^{f(x_t)}) + \xi'_t \quad (3.1)$$

$$\xi'_t \sim \mathcal{N}(0, 4\ell n(1 + e^{f(x_t)})) \quad (3.2)$$

Với  $y_t$  là các giá trị quan sát được, ta cần xác định hàm trung bình  $m$  và nhân  $k$  của  $f$ . Khoá luận đề xuất sử dụng hàm trung bình hằng số và nhân luỹ thừa bình phương, đây là các hàm phổ biến nhất trong quá trình Gauss khi chúng không quá phức tạp nhưng vẫn có độ hiệu quả cao:

$$m(x) = \mu_0$$

$$k(x, x') = \sigma_k^2 \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2l^2}\right)$$

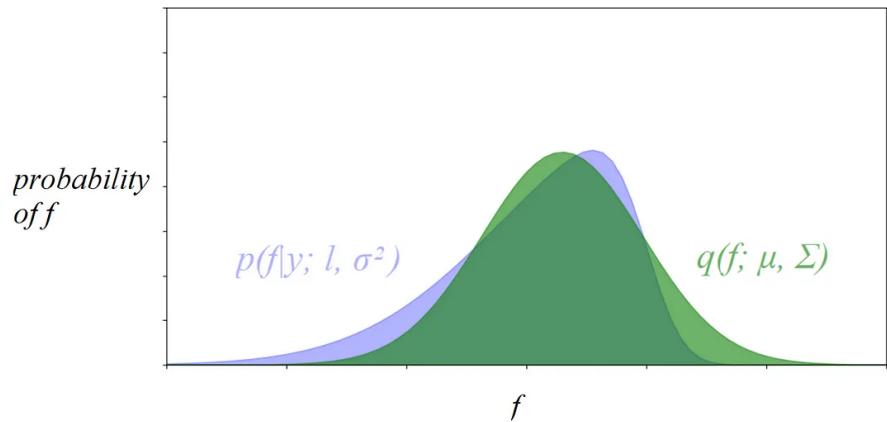
Ở chương 2 ta đã biết rằng có thể dùng ước lượng hợp lý tối đa để xác định  $m$  và  $k$  nếu có hàm mục tiêu thích hợp (có biểu thức cụ thể), ví dụ như hàm xác suất biên của  $f$ . Tuy nhiên ở công thức (3.1),  $f$  là một biến ẩn và không quan sát được. Còn  $y$  tuy là một biến quan sát được, tuy nhiên không thể xác định được kiểu phân phối cũng như hàm xác suất biên của  $y$ . Vậy nên cần một hướng giải quyết khác cho vấn đề này.

### 3.3 Quá trình Gauss biến thiên

Quay lại với bài toán ban đầu, bởi  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$  là các giá trị có thể quan sát được, ta cần xác định xác suất có điều kiện của  $\mathbf{f}_* = f(\mathbf{x}_*)$  dựa trên các giá trị đã biết của  $\mathbf{y}$ , tức là  $p(\mathbf{f}_* | \mathbf{y})$ . Xác suất này có thể được biểu diễn như sau [28]:

$$p(\mathbf{f}_* | \mathbf{y}) = \int p(\mathbf{f}_* | \mathbf{f})p(\mathbf{f} | \mathbf{y})d\mathbf{f}$$

Vì  $p(\mathbf{f}_* | \mathbf{f})$  có thể xác định được nhờ (2.17), nên cần tính xác suất hậu nghiệm  $p(\mathbf{f} | \mathbf{y})$ . Tuy vậy, không có công thức cho  $p(\mathbf{f} | \mathbf{y})$  bởi vì ta không biết được cấu trúc của nó. Một cách giải quyết đó là xấp xỉ xác suất hậu nghiệm bằng một phân phối khác mà cấu trúc của nó có thể kiểm soát được, nghĩa là công thức của hàm mật độ xác suất của phân phối mới này có thể phân tích được. Điều này có thể hiểu như sau:



**Hình 3.1:** Hàm mật độ của phân phối xác suất hậu nghiệm và phân phối biến thiên. Nguồn: towardsdatascience

- Hàm mật độ xác suất của phân phối mới này được tính trên cùng tập hợp các biến ngẫu nhiên  $f$  như xác suất hậu nghiệm. Vì vậy, phân phối mới này có thể được sử dụng để thay thế phân phối xác suất hậu nghiệm ở những vị trí mà nó xuất hiện.
- Phân phối mới hoạt động tương tự như phân phối xác suất hậu nghiệm. Điều này có nghĩa là đối với một giá trị  $f$ , phân phối mới trả về một xác suất tương tự với xác suất hậu nghiệm thực sự sẽ trả về. Như vậy, hình dạng của hàm mật độ xác suất của phân phối mới này tương tự với phân phối xác suất hậu nghiệm

Gọi phân phối được sử dụng để xấp xỉ phân phối xác suất hậu nghiệm là phân phối biến thiên và dùng  $q(f)$  để chỉ hàm mật độ xác suất của phân phối này. Vì ta không biết cấu trúc của  $p(f | y)$  nên giả sử rằng  $q(f)$  là một phân phối chuẩn nhiều chiều với vector kỳ vọng  $\mu$  và ma trận hiệp phương sai  $\Sigma$ . Từ đó điều chỉnh  $\mu$  và  $\Sigma$  sao cho  $q(f; \mu, \Sigma)$  và  $p(f | y)$  giống nhau nhất có thể,  $\mu$  và  $\Sigma$  lúc này được gọi là các tham số biến thiên.

### 3.4 Phân kỳ Kullback–Leibler và dấu hiệu cận dưới

Trong toán học thống kê, phân kỳ Kullback–Leibler (KL divergence) là một phép đo cách mà một phân phối xác suất khác biệt so với phân phối xác suất tham

chiều. Công thức của phân kỳ KL được sử dụng để định nghĩa sự tương đồng giữa  $q(\mathbf{f})$  và  $p(\mathbf{f} | \mathbf{y})$  là[3]:

$$KL(q(\mathbf{f} \| p(\mathbf{f} | \mathbf{y})) = \mathbb{E}_{f \sim q} [\ell n(q(\mathbf{f})) - \ell n(p(\mathbf{f} | \mathbf{y}))] \quad (3.3)$$

$$= \int \ell n \left( \frac{q(\mathbf{f})}{p(\mathbf{f} | \mathbf{y})} \right) q(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \quad (3.4)$$

Công thức (3.3) cho thấy ý nghĩa của phân kỳ Kullback-Leibler. Đó là kỳ vọng của khoảng cách logarit giữa hai phân phối. Giá trị này càng nhỏ thì hai phân phối càng giống nhau. Việc tối thiểu phân kỳ Kullback–Leibler cũng đồng nghĩa với tối đa dấu hiệu cận dưới. Dấu hiệu cận dưới có thể biểu diễn dưới dạng tổng giữa hàm hợp lý của dữ liệu và phân kỳ KL [30]:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_{f \sim q} [\ell n(p(\mathbf{y} | \mathbf{f}))] - KL(q(\mathbf{f}) \| p(\mathbf{f}))$$

Do  $q(\mathbf{f})$  và  $p(\mathbf{f})$  đều là phân phối chuẩn nhiều chiều, nên phân kỳ KL có thể tính được như sau [30]:

$$\begin{aligned} & KL(\mathcal{N}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \| \mathcal{N}(\mathbf{f}; \mathbf{m}, \mathbf{K})) \\ &= \frac{1}{2} ((\boldsymbol{\mu} - \mathbf{m})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{m}) + \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{K} + \ell n \boldsymbol{\Sigma} - \ell n \mathbf{K}) - n) \end{aligned}$$

Trong đó  $\mathbf{m} = m(\mathbf{X})$  và  $\mathbf{K} = K(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  là kỳ vọng và ma trận hiệp phương sai của  $p(f)$ . Tiếp theo ta cần tính  $\mathbb{E}_{f \sim q} [\ell n(p(\mathbf{y} | \mathbf{f}))]$ . Bởi vì không có công thức cụ thể để tính giá trị kỳ vọng của  $\ell np(\mathbf{y} | \mathbf{f})$ , nên ta sẽ xấp xỉ nó bằng phương pháp Gauss-Hermite. Đây là một cách tính gần đúng tích phân của một hàm toán học.

Trước hết ta cần biến đổi:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{f \sim q}[\ell n(p(\mathbf{y} | \mathbf{f}))] \\
&= \int \ell n(p(\mathbf{y} | \mathbf{f}))q(\mathbf{f})d\mathbf{f} \\
&= \int \ell n\left(\prod_{i=1}^n p(y_i | f_i)\right) q(\mathbf{f})d\mathbf{f} \\
&= \int \left(\sum_{i=1}^n \ell n(p(y_i | f_i))\right) q(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \int \ell n(p(y_i | f_i))q(\mathbf{f})d\mathbf{f} \right)
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất phân phối cận biên  $q(x) = \int q(x, x')dx'$  [31], xét vị trí thứ  $i$ :

$$\begin{aligned}
& \int \ell n(p(y_i | f_i))q(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \\
&= \int \cdots \int \ell n(p(y_i | f_i))q(f_1, f_2, \dots, f_n)df_1 \cdots df_n \\
&= \int \int \ell n(p(y_i | f_i))q(f_{-i}, f_i)df_{-i}df_i \\
&= \int \ell n(p(y_i | f_i)) \left( \int q(f_{-i}, f_i)df_{-i} \right) df_i \\
&= \int \ell n(p(y_i | f_i))q(f_i)df_i
\end{aligned}$$

Ở trên,  $f_{-i}$  tương đương với  $(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n)$  với mục đích rút gọn phương trình. Suy ra:

$$\mathbb{E}_{f \sim q}[\ell n(p(\mathbf{y} | \mathbf{f}))] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{f \sim q}[\ell n(p(y_i | f_i))]$$

Sử dụng cầu phương Gauss-Hermit [21]:

$$\mathbb{E}_{t \sim \phi}[h(t)] = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\sqrt{\pi}} h(\mu + \sqrt{2}\sigma g_i)$$

Ta có thể tìm được  $\mathbb{E}_{f \sim q}[\ell n(p(y_i | f_i))]$  khi đặt  $h(t) = \ell n(p(y_i | f_i))$ . Với  $m$  là số mẫu,  $g_i$  và  $w_i$  là các toạ độ và trọng số tương ứng. Các giá trị này có thể lấy được từ bảng Gauss-Hermite. Hình 3.1 là một ví dụ. Bây giờ chúng ta đã biết biểu thức

$m$	$g_i$	$w_i$
2	$\pm 0.7071067811$	0.8862269254
3	0	1.1816359006
	$\pm 0.1224744871$	0.2954089751
4	$\pm 0.5246476232$	0.8049140900
	$\pm 1.65068012380$	0.0813128354
5	0	0.9453087204
	$\pm 0.9585724646$	0.3936193231
	$\pm 2.0201828704$	0.0199532420

**Bảng 3.1:** Bảng Gauss-Hermite với 5 mẫu[34]

phân tích cho  $\mathcal{L}$ . Biểu thức này là một hàm với tất cả các tham số trong mô hình là các biến chưa biết - tham số của nhân  $l$ ,  $\sigma_k^2$  và các tham số biến thiên  $\mu$ ,  $\Sigma$ . Việc học các tham số sẽ sử dụng thuật toán suy giảm độ dốc (gradient descent) để tối đa hóa dấu hiệu cận dưới  $\mathcal{L}$ , qua đó tìm ra các giá trị tối ưu cho các tham số trong mô hình. Xem xét lại các tham số trong mô hình:

- Hàm trung bình có  $\mu_0$  là một đại lượng vô hướng.
- Nhân có  $l$  và  $\sigma_k^2$  là hai đại lượng vô hướng.
- $\mu$  là vector kỳ vọng của  $q(\mathbf{f})$ , có  $n$  đại lượng vô hướng.
- $\Sigma$  là ma trận hiệp phương sai của  $q(\mathbf{f})$  với kích thước  $n \times n$ , vì là ma trận đối xứng nên nó có  $\frac{n(n+1)}{2}$  đại lượng vô hướng.

Tổng cộng có  $3 + n + \frac{n(n+1)}{2}$  đại lượng cần tối ưu. Giả sử bộ dữ liệu quan sát được 1000 điểm từ quá khứ, thì mô hình này sẽ cần phải tối ưu bộ tham số với 501503 đại lượng khác nhau. Đây là một con số rất lớn và việc tối ưu sẽ gặp khó khăn khi lượng dữ liệu ngày càng tăng lên.

### 3.5 Lấy mẫu rải rác

Việc sử dụng bộ dữ liệu với kích thước lớn sẽ rất tốn kém về mặt tính toán khi có quá nhiều đại lượng tham số cần tối ưu. Một cách để giải quyết vấn đề này là cố gắng làm giảm kích thước của dữ liệu đầu vào bằng cách tổng hợp ra một lượng nhỏ những điểm dữ liệu có ý nghĩa nhất. Lấy một tập các biến ẩn mới  $\mathbf{f}_s = [f(\mathbf{x}_s)]$ , với kích thước nhỏ hơn rất nhiều so với  $\mathbf{f} = [f(\mathbf{x})]$ . Có thể coi  $\mathbf{x}_s$  và  $\mathbf{f}_s$  tương tự như

$\mathbf{x}$  và  $\mathbf{f}$  nhưng "thua" hơn. Theo [10], hàm dấu hiệu cận dưới lúc này có thể được viết lại thành:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{f \sim q} [\ell n(p(y_i | f_i))] - KL(q(\mathbf{f}_s) \| p(\mathbf{f}_s)) \quad (3.5)$$

Việc dự đoán  $\mathbf{f}_*$  cũng có thể được tính toán dựa trên  $\mathbf{f}_s$ :

$$p(\mathbf{f}_* | \mathbf{y}) = \int p(\mathbf{f}_* | \mathbf{f}_s) q(\mathbf{f}_s) d\mathbf{f}_s \quad (3.6)$$

Kích thước  $n_s$  của  $\mathbf{f}_s$  không phải là một tham số của mô hình và cần chỉ định từ trước. Dễ thấy rằng  $n_s$  càng lớn (gần  $n$ ) thì kết quả càng chính xác nhưng mô hình sẽ càng phức tạp, và ngược lại. Sau khi quyết định giá trị cho  $n_s$ , chúng ta sẽ có một vector  $\mathbf{x}_s$  có độ dài  $n_s$ , đại diện cho các vị trí của những giá trị cần tổng hợp đó. Những vị trí này là không biết được, chúng là các tham số mô hình, và sẽ được tối ưu trong quá trình huấn luyện cùng với các tham số khác. Xem xét lại mô hình:

- Hàm trung bình có  $\mu_0$  là một đại lượng vô hướng.
- Nhân có  $l$  và  $\sigma_k^2$  là hai đại lượng vô hướng.
- $\boldsymbol{\mu}_s$  là vector kỳ vọng của  $q(\mathbf{f}_s)$ , có  $n_s$  đại lượng vô hướng.
- $\boldsymbol{\Sigma}_s$  là ma trận hiệp phương sai của  $q(\mathbf{f}_s)$  với kích thước  $n_s \times n_s$ , vì là ma trận đối xứng nên nó có  $\frac{n_s(n_s+1)}{2}$  đại lượng vô hướng.

Như vậy ta cần lựa chọn  $n_s$  để có thể kiểm soát số đại lượng cần tối ưu,  $n_s$  phải đủ nhỏ để giảm sự phức tạp của mô hình so với  $n$ . Một ví dụ ở [10] với bộ dữ liệu MNIST có  $n = 60000$  cho thấy  $n_s = 200$  cho kết quả dự đoán chính xác 97.8%.

## 3.6 Tính giá quyền chọn

Quay lại bài toán định giá, trước tiên mô hình này cần các dữ liệu trong quá khứ của giá tài sản  $S$  và lãi suất phi rủi ro đơn kỳ  $r$ , từ đó tìm ra các giá trị  $\mathbf{y}$  tương ứng. Sau khi huấn luyện, từ công thức (3.6) và (3.1) có thể tìm được  $\mathbf{y}_*$ . Với giả thuyết lãi suất phi rủi ro không thay đổi trong tương lai  $T$ , ta có thể dự đoán được giá của  $S_T$  là:

$$\ell n S_T = \ell n S_0 + r_0 \times 365T - 0.5 \sum \mathbf{y}_*$$

Trong đó  $365T$  là số ngày đáo hạn. Từ đây có thể tính được giá quyền chọn bằng giả lập Monte-Carlo. Thuật toán cụ thể được mô tả ở 2.

---

### **Algorithm 2** Thuật toán đề xuất

---

**Input:** Giá hàng ngày của tài sản trong quá khứ cho đến hiện tại  $\mathbf{S} = [\dots, S_{-1}, S_0]$ , giá của lãi suất phi rủi ro trong quá khứ cho đến hiện tại  $\mathbf{r} = [\dots, r_{-1}, r_0]$ , thời gian đáo hạn  $T$  (ngày) và giá thực khi  $K$

**Output:** Giá của quyền chọn

- 1: Tính  $\mathbf{y}$  dựa trên  $\mathbf{S}$  và  $\mathbf{r}$ ;
  - 2: Xác định  $\sigma_k, l, \boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\Sigma}_S$  bằng cách tối đa dấu hiệu cận dưới  $\mathcal{L}$  ở (3.5);
  - 3:  $M = 10000$  ▷ Số mẫu cần lấy
  - 4: **for**  $i = 1 \dots M$  **do**
  - 5:     Sinh  $\mathbf{f}_* = [f_1, \dots, f_T]$  từ  $q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ;
  - 6:     Sinh  $\mathbf{y}_*$  từ  $\mathbf{f}_*$ ;
  - 7:     Tính  $S_T$  từ  $\mathbf{y}_*$ ;
  - 8:     Tính hàm hoàn trả dựa trên  $S_T$  và  $K$
  - 9: **end for**
  - 10: Tính giá quyền chọn  $C$  và  $P$  bằng cách lấy trung bình các hàm hoàn trả, và  
chiết khấu về thời điểm hiện tại;
  - 11: **return**  $C, P$ ;
-

# Chương 4

## Xây dựng sản phẩm thử nghiệm

### 4.1 Tổng quan về sản phẩm

Sản phẩm là một trang web giúp người dùng xác định giá của hợp đồng quyền chọn bằng ba phương pháp khác nhau: Black-Scholes, GARCH và quá trình Gauss. Trang web có hai thẻ khác nhau:

- Thẻ thứ nhất: Được sử dụng trong thực tế khi người dùng cần định giá một quyền chọn nào đó. Người dùng có thể định giá một quyền chọn của một chỉ số chứng khoán hoặc cổ phiếu ở thời điểm hiện tại, bằng cách chọn mã chứng khoán, giá thực thi  $K$  và thời gian đáo hạn  $T$ . Lúc này, hệ thống sẽ sử dụng các dữ liệu từ quá khứ của mã chứng khoán đó và thực hiện tính toán. Sau đó trả về ba kết quả của ba phương pháp tính khác nhau. Ngoài ra, nếu người dùng không chọn mã chứng khoán nào thì họ sẽ phải nhập thêm các thông tin như giá tài sản cơ sở  $S_0$ , thời gian giao dịch quyền chọn, lãi suất phi rủi ro  $r$  và độ biến động của thị trường  $\sigma$ . Lúc này hệ thống sẽ chỉ trả về giá của quyền chọn dựa trên mô hình Black-Scholes. Bởi vì hai mô hình còn lại cần có dữ liệu từ một mã chứng khoán cụ thể.
- Thẻ thứ hai: Được sử dụng với mục đích tham khảo. Ở thẻ này, trang web sẽ tính toán giá các quyền chọn trong quá khứ của chỉ số S&P 500 bằng ba

phương pháp, sau đó so sánh chúng với giá của thị trường.

## 4.2 Dữ liệu

Ngoài trừ trường hợp người dùng cung cấp đầy đủ thông tin để định giá bằng Black-Scholes, các trường hợp khác đều cần dữ liệu để phục vụ cho quá trình tính toán. Khoá luận sử dụng dữ liệu được lấy từ thị trường chứng khoán Mỹ, bao gồm:

- Giá của các mã cổ phiếu và chỉ số chứng khoán mà không chia cổ tức. Dữ liệu này được sử dụng như giá của tài sản cơ sở  $S$ , phục vụ cho việc tính toán giá hợp đồng quyền chọn. Dữ liệu được lấy từ Yahoo Finance với khoảng thời gian là 10 năm kể từ ngày giao dịch của quyền chọn. Đây là một nguồn uy tín và được sử dụng trong các nghiên cứu về thị trường chứng khoán như [24] [27]. Dữ liệu có dạng DataFrame với cấu trúc như sau:
  - **Date**: Ngày giao dịch.
  - **Open**: Giá mở cửa.
  - **High**: Giá cao nhất.
  - **Low**: Giá thấp nhất.
  - **Close**: Giá đóng cửa.
  - **Volume**: Khối lượng giao dịch.
  - **Dividends**: Cổ tức.
  - **Stock Splits**: Chia cổ phiếu (nếu có).

Tuy nhiên trong khoá luận chỉ sử dụng đến cột "Close" là mức giá lúc đóng cửa của mã đó. Ở bảng 4.1 là một ví dụ về giá của chỉ số S&P 500 từ ngày 2020-01-02 đến ngày 2020-01-09.

- Lãi suất phi rủi ro được lấy từ lãi suất tín phiếu kho bạc với thời gian đáo hạn là 3 tháng[1][9].
- Giá của các hợp đồng quyền chọn trong quá khứ: Khoá luận sử dụng các hợp đồng quyền chọn trong quá khứ để so sánh hiệu suất của các phương pháp định giá. Dữ liệu được lấy từ DeltaNeutral theo [20] và bao gồm nhiều cột dữ liệu. Khoá luận sử dụng các cột dữ liệu sau:

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Dividends	Splits
2020-01-02	3244.66	3258.13	3235.53	3257.85	345993e4	0	0
2020-01-03	3226.36	3246.14	3222.34	3234.85	34847e5	0	0
2020-01-06	3217.55	3246.84	3214.63	3246.28	370246e4	0	0
2020-01-07	3241.86	3244.90	3232.42	3237.17	343591e4	0	0
2020-01-08	3238.59	3267.07	3236.66	3253.05	372684e4	0	0
2020-01-09	3266.03	3275.58	3263.66	3274.69	364123e4	0	0

**Bảng 4.1:** Dữ liệu về giá của chỉ số S&P 500

- **Strike:** Giá thực thi của hợp đồng.
- **Quotedate:** Ngày giao dịch.
- **Expiration:** Ngày đáo hạn.
- **Volume:** Khối lượng giao dịch của hợp đồng.
- **Type:** Loại quyền chọn, mua hoặc bán.
- **Bid:** Giá chào mua của quyền chọn (mức giá người mua sẵn sàng trả).
- **Ask:** Giá chào bán của quyền chọn (mức giá người bán sẵn sàng nhận).

Giá của quyền chọn được tính bằng cách lấy trung bình giá chào mua và chào bán[2]. Dữ liệu về quyền chọn sẽ được lưu ở cơ sở dữ liệu MySQL. Bảng 4.2 là một ví dụ.

Type	Expiration	Quote Date	Strike	Bid	Ask	Volume
Put	2019-12-16	2019-12-04	2475.0	0.0	0.1	6
Put	2019-12-16	2019-12-04	2500.0	0.0	0.1	1
Put	2019-12-16	2019-12-04	2575.0	0.05	0.2	2
Put	2019-12-16	2019-12-04	2700.0	0.3	0.45	50
Put	2019-12-16	2019-12-04	2720.0	0.35	0.5	225
Put	2019-12-16	2019-12-04	2750.0	0.5	0.65	6
Put	2019-12-16	2019-12-04	2760.0	0.55	0.7	45
Put	2019-12-16	2019-12-04	2780.0	0.65	0.8	1
Put	2019-12-16	2019-12-04	2800.0	0.8	0.95	405
Put	2019-12-16	2019-12-04	2825.0	1.0	1.15	377

**Bảng 4.2:** Một số quyền chọn của chỉ số S&P 500

## 4.3 Phần mềm

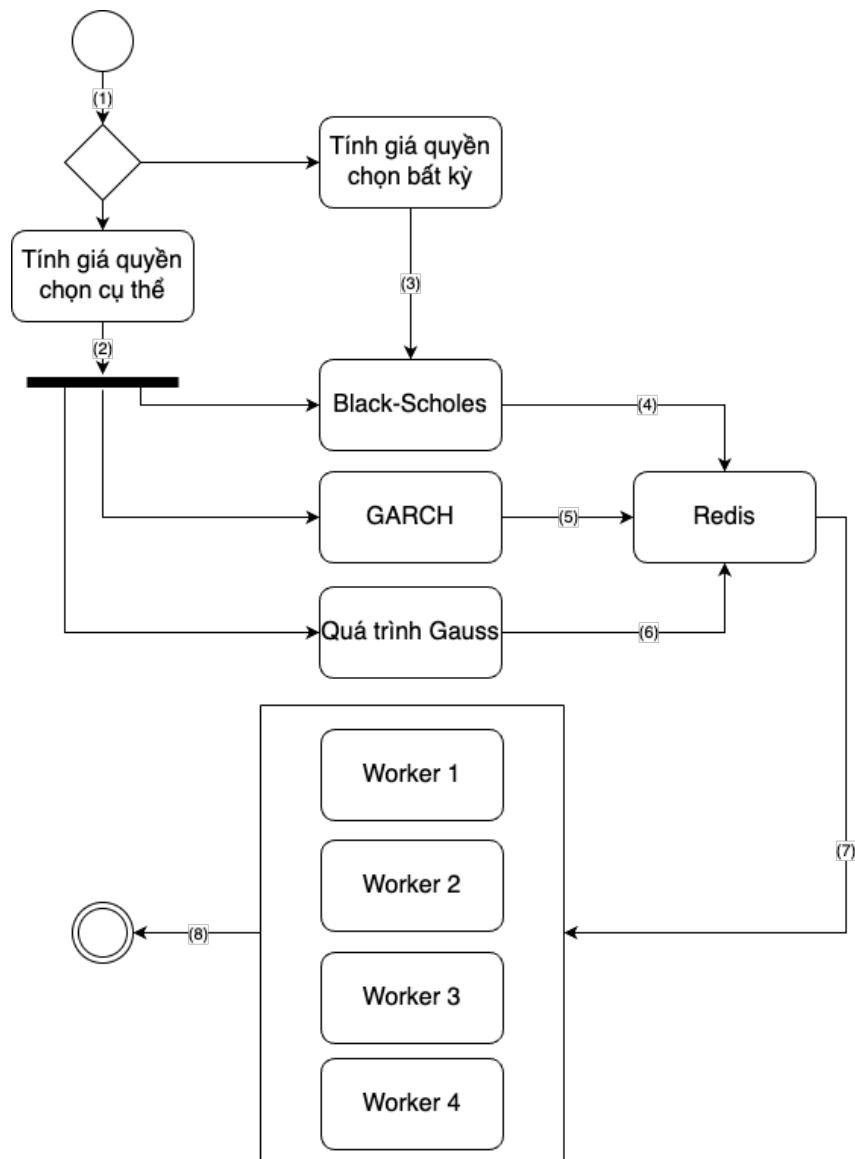
Trang web sử dụng các thành phần sau:

- **HTML, Javascript và CSS:** Ba ngôn ngữ phổ biến để xây dựng giao diện cho một trang web.
- **FastAPI:** Một khung thiết kế web hiện đại, nhanh chóng và dễ sử dụng được xây dựng trên nền tảng Python. Nó được thiết kế để giúp việc phát triển API trở nên đơn giản nhưng vẫn đạt hiệu quả cao.
- **Celery:** Hệ thống giám sát, lập lịch và thực thi các công việc đồng thời trong ứng dụng Python. Celery sử dụng cơ chế hàng chờ tin nhắn để truyền thông điệp tới các thành phần khác nhau của ứng dụng. Celery hoạt động bằng cách gửi các tác vụ đến các worker. Các worker là các tiến trình độc lập, khi nhận được một tác vụ, nó sẽ thực hiện tác vụ đó và trả về kết quả.
- **MySQL:** Hệ quản trị cơ sở dữ liệu quan hệ, dùng để lưu trữ các thông tin về quyền chọn.
- **Redis:** Bộ nhớ đệm lưu trữ dữ liệu dưới dạng khoá-giá trị. Được sử dụng trong Celery để lưu trữ trạng thái của các tác vụ.
- **yfinance:** Thư viện mã nguồn mở, cung cấp dữ liệu từ Yahoo Finance.
- **gpflow:** Cung cấp các hàm tính toán cho quá trình Gauss.
- **tensorflow:** Cung cấp các hàm tính toán cho các tác vụ tối ưu.
- **numpy:** Hỗ trợ tính toán hiệu quả.

## 4.4 Luồng hoạt động

### 4.4.1 Thẻ thứ nhất

Biểu đồ hoạt động của thẻ thứ nhất có thể biểu diễn bằng đồ thị UML như hình 4.1. Trong đó:



**Hình 4.1:** Biểu đồ hoạt động của thẻ thứ nhất

- **Bước 1:** Người dùng nhập các thông tin về quyền chọn cần định giá ở thời điểm hiện tại:
  - Mã cổ phiếu hoặc chỉ số chứng khoán.
  - Ngày đáo hạn.
  - Giá thực thi.

Hoặc nếu muốn định giá một quyền chọn bất kỳ, người dùng cần nhập:

- Ngày giao dịch.
- Ngày đáo hạn.

- Giá của tài sản.
  - Giá thực thi.
  - Lãi suất phi rủi ro.
  - Mức độ biến động.
- **Bước 2:** Nếu quyền chọn thuộc về một mã chứng khoán cụ thể nào đó, tức là có dữ liệu về tài sản đó trong quá khứ cũng như giá trị của lãi suất phi rủi ro từ thị trường, hệ thống sẽ đồng thời định giá quyền chọn bằng cả ba phương pháp là Black-Scholes, GARCH và quá trình Gauss.
  - **Bước 3:** Nếu quyền chọn không thuộc về một mã chứng khoán nào, nghĩa là người dùng phải cung cấp thêm thông tin về giá của tài sản, lãi suất phi rủi ro, mức độ biến động và ngày giao dịch. Lúc này hệ thống sẽ chỉ sử dụng mô hình Black-Scholes để tính toán giá trị của hợp đồng quyền chọn.
  - **Bước 4,5,6:** Hệ thống gửi các thông tin về các tác vụ vào hàng chờ trong Redis.
  - **Bước 7:** Cụm các worker liên tục kiểm tra hàng chờ trong Redis, nếu có tác vụ mới được đẩy lên, chúng sẽ được kéo về các worker để xử lý.
  - **Bước 8:** Trả về kết quả như ở hình 4.2.

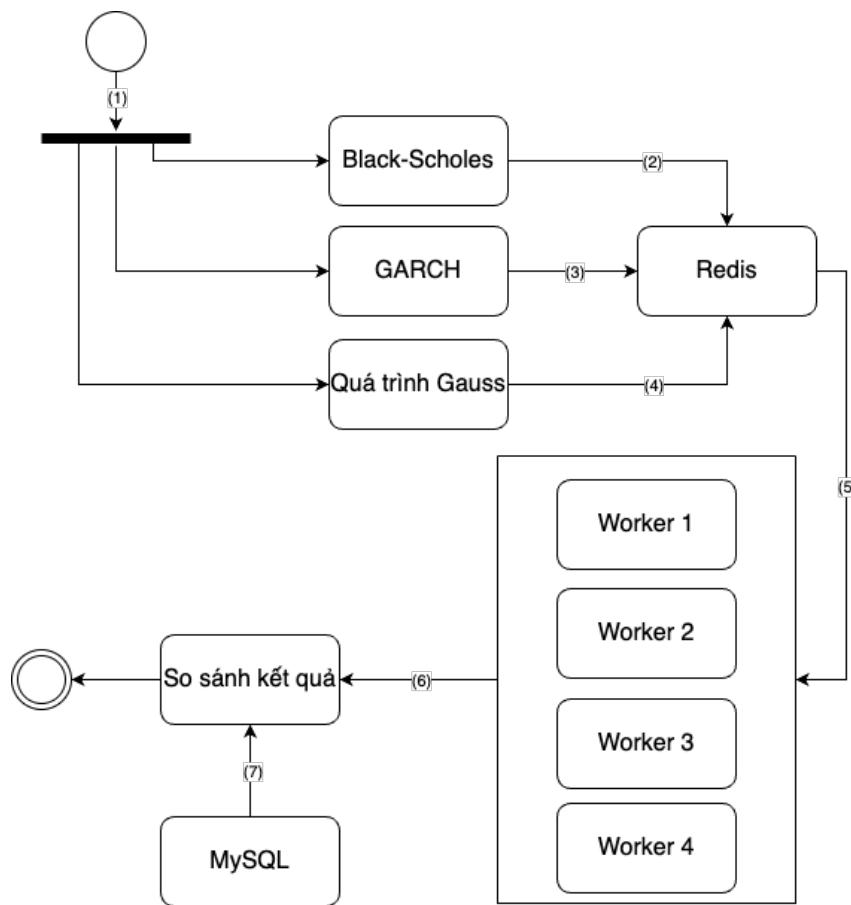
<b>Option Pricing</b>		<b>Option Pricing</b>	
<input type="radio"/> I <input type="radio"/> II	<input type="radio"/> I <input type="radio"/> II	<b>Choose an Option:</b> <input checked="" type="radio"/> Calculate today's option <input type="radio"/> Calculate specific option <b>Choose a type:</b> <input checked="" type="radio"/> Call <input type="radio"/> Put <b>Enter Symbol Ticker:</b> SPX <b>Select an Expiration Date:</b> 2023-12-22 <b>Enter Strike Price:</b> 4500 <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; margin-top: 5px;">           Submit            • bs "154.26825259061116"            • garch            • o 115.0954355475154            • gp            • o 135.15238754071063            • done true         </div>	<b>Choose an Option:</b> <input type="radio"/> Calculate today's option <input checked="" type="radio"/> Calculate specific option <b>Choose a type:</b> <input checked="" type="radio"/> Call <input type="radio"/> Put <b>Select a trading Date:</b> 2023-12-02 <b>Select an Expiration Date:</b> 2023-12-22 <b>Enter Spot Price:</b> 4000 <b>Enter Strike Price:</b> 4000 <b>Enter Risk-Free Rate:</b> 0.05 <b>Enter Volatility:</b> 0.2 <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; margin-top: 5px;">           Submit            • bs "80.19887804196924"            • done true         </div>

(a) Định giá với một mã cụ thể

(b) Định giá với thông số bất kỳ

**Hình 4.2:** Ảnh chụp kết quả ở thẻ thứ nhất

#### 4.4.2 Thẻ thứ hai

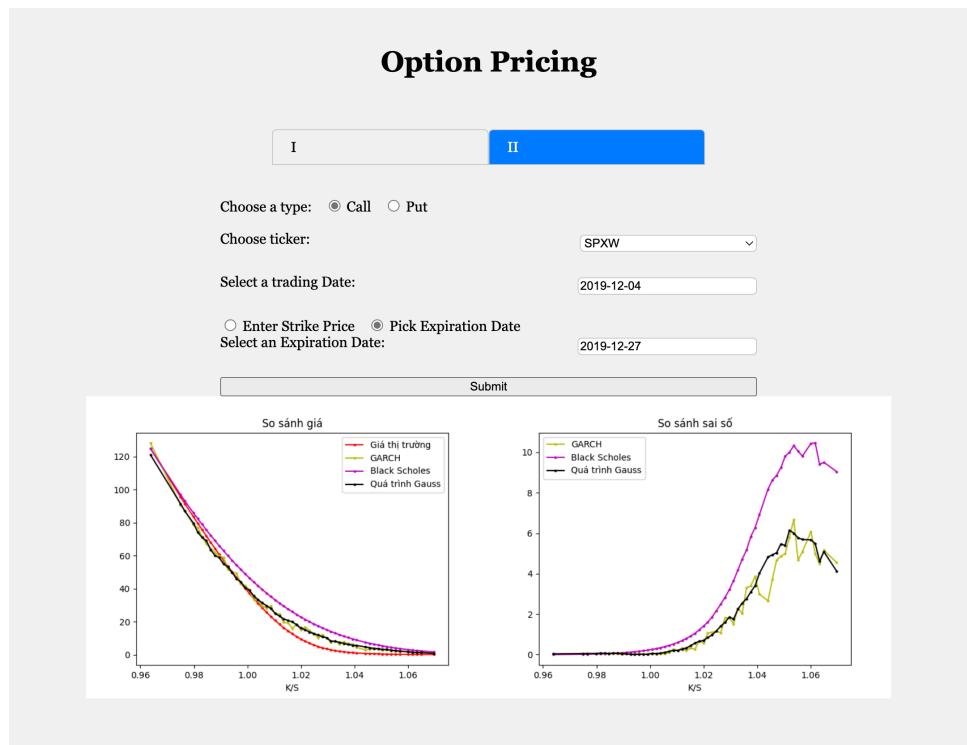


Hình 4.3: Biểu đồ hoạt động của thẻ thứ hai

Biểu đồ hoạt động của thẻ thứ hai có thể biểu diễn bằng đồ thị UML như hình 4.3. Trong đó:

- **Bước 1:** Người dùng nhập các thông tin về quyền chọn S&P 500: ngày giao dịch và giá thực thi hoặc ngày đáo hạn. Nếu cung cấp ngày giao dịch và giá thực thi, hệ thống sẽ so sánh các quyền chọn trong nhiều ngày đáo hạn khác nhau. Nếu cung cấp ngày giao dịch và ngày đáo hạn, hệ thống sẽ so sánh các quyền chọn với nhiều mức giá thực thi khác nhau.
- **Bước 2,3,4:** Hệ thống gửi các thông tin về các tác vụ của ba phương pháp định giá vào hàng chờ trong Redis.
- **Bước 5:** Cụm các worker liên tục kiểm tra hàng chờ trong Redis, nếu có tác vụ mới được đẩy lên, chúng sẽ được kéo về các worker để xử lý.

- **Bước 6,7:** Trích xuất giá quyền chọn trên thị trường từ cơ sở dữ liệu và so sánh với kết quả tính từ ba phương pháp Black-Scholes, GARCH và quá trình Gauss. Kết quả sẽ được trả về dưới dạng hai ảnh: ảnh thứ nhất biểu diễn mức giá từ các mô hình cũng như giá thị trường, ảnh thứ hai biểu diễn sai số tuyệt đối (Giá dự đoán - Giá thị trường)/(Giá thị trường). Hình 4.4 là một ví dụ.



**Hình 4.4:** Ảnh chụp kết quả ở thẻ thứ hai

# Chương 5

## Thực Nghiệm Và Kết Quả

### 5.1 Dữ liệu thực nghiệm

Khóa luận sử dụng giá của các quyền chọn trong quá khứ để đánh giá độ chính xác của các mô hình, nghĩa là kết quả các mô hình cho ra càng sát với giá thực tế càng tốt. Các quyền chọn được sử dụng là quyền chọn kiểu châu Âu của chỉ số S&P 500, được dùng trong nhiều nghiên cứu về mô hình định giá[1][2][9][11].

Vì dịch COVID-19 gây ra những cú sốc mạnh đối với nền kinh tế thế giới, nên khoá luận lựa chọn sử dụng các quyền chọn trong quý IV năm 2019, thời điểm trước bùng phát dịch, nhằm có sự đánh giá khách quan cho các mô hình. Nguồn và cấu trúc của dữ liệu đã được miêu tả ở chương 4.

Có 946,503 quyền chọn được giao dịch trong quý IV năm 2019. Để chọn ra các quyền chọn có ý nghĩa, khoá luận tham khảo các yếu tố từ các nghiên cứu trước:

- Ngày giao dịch là ngày thứ Tư hàng tuần[2][11] hoặc ngày thứ Tư đầu tiên của tháng[1].
- Khoảng thời gian từ ngày giao dịch đến ngày đáo hạn lớn hơn 6 ngày[11], hoặc từ 17 đến 248 ngày[1], hoặc từ 10 đến 360 ngày[2].
- Hợp đồng có giá lớn hơn 0.05\$[2].

Từ đó, khoá luận lựa chọn các hợp đồng được giao dịch trong thứ Tư hàng tuần và có thời gian đáo hạn từ 10 đến 360 ngày, loại trừ những hợp đồng có khối lượng

giao dịch là 0, hoặc có giá bé hơn 0.05\$. Từ các yếu tố trên chọn ra được 35,060 quyền chọn phù hợp. Giá của quyền chọn được xác định bằng cách lấy trung bình mức giá chào mua - chào bán của hợp đồng[2]:

- **Giá chào mua (bid):** Đây là giá mà nhà đầu tư sẵn lòng trả để mua một hợp đồng nào đó.
- **Giá chào bán (ask):** Đây là giá mà người bán sẵn lòng nhận để bán một hợp đồng nào đó.

Bộ dữ liệu được chia ra thành các tập con khác nhau, theo thời gian đáo hạn và giá thực thi[2]. Tỉ lệ giá thực thi trên giá cơ sở  $m_n = \frac{K}{S}$  được gọi là tình trạng tiền của quyền chọn. Một hợp đồng quyền chọn bán có lỗ lớn (deep out-of-the-money) nếu  $m_n < 0.85$ . Tức là khi giá thực thi thấp hơn nhiều so với giá tài sản ở thời điểm hiện tại, ví dụ  $K = 2500$  và  $S = 3000$ , thì khả năng nhà đầu tư bị lỗ khi kích hoạt hợp đồng là rất cao. Khi kích hoạt ở thời điểm đáo hạn, nhà đầu tư sẽ chỉ được bán tài sản với giá 2500\$ trong khi giá hiện tại lên đến 3000\$, vậy nên nhà đầu tư chỉ có thể lời khi giá tài sản ở thời điểm đáo hạn xuống dưới 2500\$, một điều khó xảy ra. Tương tự, quyền chọn bán được coi là có lỗ (out-of-the-money) nếu  $0.85 \leq m_n < 1$ , có lời (in-the-money) nếu  $1 \leq m_n < 1.15$  và có lời lớn (deep in-the-money) nếu  $m \geq 1.15$ . Ngược lại, một quyền chọn mua được coi là có lời lớn nếu  $m_n < 0.85$ , có lời nếu  $0.85 \leq m_n < 1$ , có lỗ nếu  $1 \leq m_n < 1.15$  và có lỗ lớn nếu  $m \geq 1.15$ . Dễ thấy rằng các hợp đồng càng lời thì có giá càng đắt và càng lỗ thì càng rẻ. Ngoài ra, các hợp đồng còn được chia theo thời gian đáo hạn: ngắn (<60 ngày), trung bình (60-160 ngày) và dài (>160 ngày).

Bảng 5.1 và 5.2 mô tả 35,060 hợp đồng quyền chọn, trong đó **TB** là giá trị trung bình và **ĐLC** là độ lệch chuẩn, Mua-Bán% được tính bằng (Giá chào bán - Giá chào mua)/Giá quyền chọn. Chỉ số này giúp đánh giá mức độ tham khảo của quyền chọn. Một hợp đồng quyền chọn có chỉ số Mua-Bán% thấp nghĩa là bên mua và bên bán có sự đồng thuận cao về mức giá của hợp đồng, và khiến giá của nó hội tụ về mức giá đúng. Vậy nên những quyền chọn có chỉ số Mua-Bán% thấp sẽ có ý nghĩa tham khảo hơn những quyền chọn khác. Từ bảng 5.1 và 5.2, dễ thấy những hợp đồng có lời lớn ( $m_n < 0.85$  đối với loại mua và  $m_n > 1.15$  đối với loại bán) là những hợp đồng có chỉ số Mua-Bán% thấp nhất, nên chúng là những quyền chọn có ý nghĩa tham khảo hơn so với phần còn lại.

$m_n = \frac{K}{S}$		Thời gian đáo hạn					
		<60 ngày		60-160 ngày		>160 ngày	
		TB	ĐLC	TB	ĐLC	TB	ĐLC
<0.85	Giá	997.24	590.57	949.48	466.12	931.36	372.39
	Mua-bán%	0.86	0.45	1.05	0.46	1.15	0.41
	Số lượng	121		102		36	
0.85-1.00	Giá	96.85	67.35	159.59	81.22	237.54	80.17
	Mua-bán%	1.81	1.51	1.20	1.16	1.65	1.99
	Số lượng	2909		654		165	
1.00-1.15	Giá	12.17	14.08	34.00	27.71	67.66	47.19
	Mua-bán%	13.82	27.23	4.37	6.29	4.11	6.25
	Số lượng	6310		1806		459	
>1.15	Giá	0.05	0.06	0.57	0.55	3.19	3.00
	Mua-bán%	184.66	41.38	69.65	59.93	32.56	39.16
	Số lượng	16		51		83	

Bảng 5.1: Thống kê quyền chọn mua chỉ số S&P 500

## 5.2 Cài đặt

### 5.2.1 Black-Scholes

Khoá luận sử dụng công thức tính giá quyền chọn đã được trình bày ở (2.5) và (2.6). Mã nguồn cho công thức này được tham khảo từ [23]. Độ biến động của tài sản  $\sigma_S$  được tính bằng cách lấy độ lệch chuẩn của chỉ số S&P 500 trong quá khứ, với thời gian là 10 năm trước ngày giao dịch đối với mỗi quyền chọn. Lãi suất phi rủi ro là lãi tín phiếu kho bạc với thời gian đáo hạn 3 tháng[1][9].

### 5.2.2 GARCH

Đối với mô hình định giá dựa trên GARCH, khoá luận sử dụng thuật toán 1 và dùng chỉ số S&P 500 trong vòng 10 năm trước ngày giao dịch của mỗi quyền chọn để tối ưu các tham số, thuật toán tối ưu được sử dụng là Basin-hopping kết hợp với L-BFGS-B nhằm tìm ra điểm tối ưu toàn cục. Lãi suất đơn kỳ được lấy bằng lãi tín phiếu kho bạc chia cho 365. Để tham khảo độ chính xác của phương thức cài đặt cũng như dữ liệu được sử dụng, khoá luận so sánh kết quả của các tham số

$m_n = \frac{K}{S}$		Thời gian đáo hạn					
		<60 ngày		60-160 ngày		>160 ngày	
		TB	ĐLC	TB	ĐLC	TB	ĐLC
<0.85	Giá	0.82	0.98	5.01	5.10	17.61	15.46
	Mua-bán%	47.07	54.73	16.44	30.73	8.53	12.39
	Số lượng	2588		1711		788	
0.85-1.00	Giá	13.67	13.37	41.86	23.92	91.99	37.15
	Mua-bán%	5.32	6.63	2.32	3.12	1.96	2.52
	Số lượng	11220		2834		626	
1.00-1.15	Giá	76.24	49.83	127.38	58.09	192.66	49.47
	Mua-bán%	3.37	2.94	2.40	2.48	1.87	2.098
	Số lượng	1934		524		101	
>1.15	Giá	832.88	171.74	802.88	262.51	945.12	243.72
	Mua-bán%	0.99	0.44	0.87	0.26	1.92	0.51
	Số lượng	15		4		3	

**Bảng 5.2:** Thông kê quyền chọn bán chỉ số S&P 500

trên cùng một bộ dữ liệu với [9], là chỉ số S&P 500 từ ngày 02-01-1990 đến ngày 10-08-1990. Bảng 5.3 cho thấy phương thức cài đặt ở khoá luận cho kết quả xấp xỉ với nghiên cứu trước đây.

	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
Giá trị tham khảo	7.2449e-7	0.0632	0.9312	0.0523
Độ lệch chuẩn	1.6103e-7	0.0064	0.0069	0.0139
Giá trị đo được	7.2369e-07	0.0638	0.9306	0.053

**Bảng 5.3:** So sánh phương thức cài đặt GARCH với giá trị tham khảo

### 5.2.3 Quá trình Gauss

Tương tự với GARCH, dữ liệu được sử dụng để tối ưu tham số là chỉ số S&P 500 trong vòng 10 năm trước ngày giao dịch và lãi suất đơn kỳ được lấy bằng lãi tín phiếu kho bạc chia cho 365. Vì phương pháp lấy lũy thừa thớt chỉ quan tâm đến một số nhỏ điểm dữ liệu có ý nghĩa nhất, vậy nên có thể chia dữ liệu thành nhiều lô nhỏ và áp dụng thuật toán giảm độ dốc ngẫu nhiên. Khoá luận sử dụng thuật

toán tối ưu Adam với các lô nhỏ ngẫu nhiên kích thước 100 để xác định bộ tham số cho mô hình. Các hàm tính toán liên quan đến dấu hiệu cận dưới và dự đoán được cung cấp bởi thư viện gpflow. Số điểm lấy mẫu trong một lô là  $n_s = 20$ . Thuật toán cài đặt đã được mô tả ở 2.

### 5.3 Các độ đo đánh giá

Khóa luận sử dụng các độ đo là căn bậc hai trung bình sai số bình phương RMSE, sai số trung bình tuyệt đối MAE[2] và trung vị sai số phần trăm tuyệt đối MdAPE[29]. Đây là các phép đo thống kê thường được sử dụng để đánh giá sự chênh lệch giữa các giá trị dự đoán và giá trị thực tế trong các mô hình thống kê và học máy:

- RMSE

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{a}_i - a_i)^2}{n}}$$

- MAE

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - \hat{a}_i|$$

- MdAPE

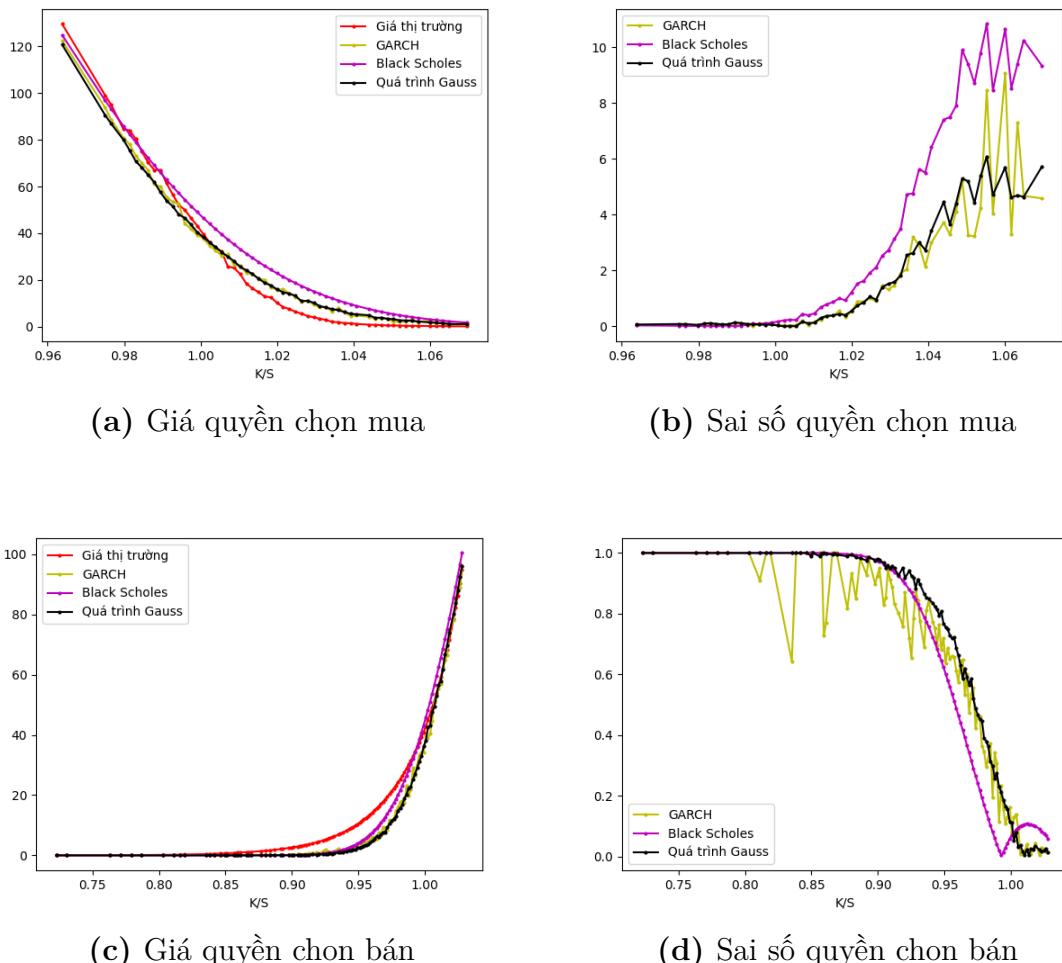
$$MdAPE = median \left( \sum_{i=1}^n \frac{|a_i - \hat{a}_i|}{a_i} . 100\% \right)$$

Trong các công thức trên,  $a_i$  là giá trị thực tế của quyền chọn và  $\hat{a}_i$  là các giá trị mà mô hình định giá đưa ra.

### 5.4 So sánh kết quả

Thử nghiệm cả ba mô hình Black-Scholes, GARCH và quá trình Gauss trên 35,060 quyền chọn cho kết quả ở bảng 5.4 với các cột điểm RMSE, MAE, MdAPE. Ngoài ra còn có cột Min thể hiện sai số nhỏ nhất và cột Max là sai số lớn nhất. Hình 5.1 là một ví dụ về 56 quyền chọn mua và 104 quyền chọn bán trong ngày 2019-12-04 có thời gian đáo hạn là 2019-12-27, với hình (a) và (c) so sánh giá, hình (b) và (d) so sánh sai số tuyệt đối  $(\hat{a}_i - a_i)/a_i$  trong đó  $\hat{a}_i$  là giá dự đoán,  $a_i$  là giá thực tế từ

thị trường. Ở hình (b) sai số trở nên lớn hơn khi  $\frac{K}{S}$  lớn, điều này là do  $a_i$  tiến gần về 0 nhanh hơn so với  $\hat{a}_i$ , dẫn đến  $(\hat{a}_i - a_i)/a_i$  có giá trị lớn. Còn ở hình (d), tại mức  $\frac{K}{S}$  thấp, các mô hình có kết quả dự đoán  $\hat{a}_i \approx 0$ , khiến cho  $(\hat{a}_i - a_i)/a_i \approx 1$ .



**Hình 5.1:** Ví dụ về so sánh các phương pháp

Dựa vào kết quả tổng quan từ bảng 5.4 mô hình định giá dựa trên GARCH có sai số thấp nhất, kế tiếp lần lượt là quá trình Gauss và Black-Scholes. Khoá luận cũng ghi lại kết quả đánh giá đối với từng tập dữ liệu khác nhau, thể hiện ở bảng 5.5 đối với các quyền chọn bán và bảng 5.6 đối với các quyền chọn mua (điểm số tốt nhất được bôi đen).

Có thể thấy rằng, dù có hiệu suất chung thấp hơn GARCH, tuy nhiên quá trình Gauss vẫn là mô hình tốt nhất trong một số trường hợp nhất định. Ví dụ như đối với các quyền chọn có tỉ lệ Mua-Bán% thấp, quá trình Gauss là phương pháp có

	RMSE	MAE	MdAPE%	Min	Max
Black-Scholes	12.74	9.17	65.13	-75.63	43.59
GARCH	10.14	6.98	55.06	-70.07	51.34
Gauss	12.49	9.08	61.43	-69.68	46.48

Bảng 5.4: Kết quả tổng quan giữa các mô hình

m <sub>n</sub> = $\frac{K}{S}$		Thời gian đáo hạn								
		<60 ngày			60-160 ngày			>160 ngày		
		BS	GARCH	Gauss	BS	GARCH	Gauss	BS	GARCH	Gauss
<0.85	RMSE	5.51	6.28	<b>5.05</b>	9.92	11.00	<b>8.90</b>	19.03	17.31	<b>14.43</b>
	MAE	4.96	5.14	<b>4.37</b>	8.57	8.77	<b>7.42</b>	16.37	14.00	<b>11.43</b>
	MdAPE%	0.52	0.49	<b>0.47</b>	0.88	0.80	<b>0.77</b>	1.66	1.19	<b>1.12</b>
0.85-1.00	RMSE	9.81	<b>5.99</b>	10.01	10.31	<b>8.67</b>	10.77	<b>10.97</b>	14.24	12.05
	MAE	8.27	<b>4.38</b>	8.39	8.63	<b>7.02</b>	9.09	<b>9.35</b>	11.36	10.08
	MdAPE%	10.22	<b>3.93</b>	10.34	6.06	<b>3.98</b>	5.74	<b>3.48</b>	4.12	3.76
1.00-1.15	RMSE	13.17	<b>7.34</b>	13.63	19.07	<b>14.11</b>	19.47	25.40	<b>24.40</b>	25.27
	MAE	11.16	<b>6.10</b>	11.62	17.49	<b>12.80</b>	17.85	23.08	<b>22.03</b>	22.86
	MdAPE%	184.56	<b>105.41</b>	208.87	81.20	<b>57.54</b>	82.97	48.98	<b>45.98</b>	50.15
>1.15	RMSE	<b>0.12</b>	0.46	0.26	<b>2.26</b>	3.38	2.85	<b>11.55</b>	12.72	12.21
	MAE	<b>0.07</b>	0.29	0.15	<b>1.59</b>	2.44	2.18	<b>8.41</b>	9.78	9.12
	MdAPE%	<b>95.53</b>	251.99	100.00	<b>287.06</b>	408.45	454.39	<b>232.02</b>	325.03	255.44

Bảng 5.5: Kết quả định giá quyền chọn mua của chỉ số S&P 500

sai số thấp nhất. Ngoài ra, quá trình Gauss còn thể hiện tốt khi định giá những quyền chọn mua có thời điểm đáo hạn lớn hơn 160 ngày. Đối với các tập mẫu còn lại, mô hình GARCH tỏ ra vượt trội khi dẫn đầu ở hầu hết trường hợp.

$m_n = \frac{K}{S}$		Thời gian đáo hạn								
		<60 ngày			60-160 ngày			>160 ngày		
		BS	GARCH	Gauss	BS	GARCH	Gauss	BS	GARCH	Gauss
<0.85	RMSE	1.27	<b>1.15</b>	1.25	6.77	<b>5.73</b>	6.59	20.46	<b>17.39</b>	19.74
	MAE	0.82	<b>0.75</b>	0.81	4.84	<b>4.14</b>	4.74	15.97	<b>13.65</b>	15.52
	MdAPE%	100.00	100.00	100.00	99.91	<b>91.55</b>	99.51	98.71	<b>84.55</b>	97.71
0.85-1.00	RMSE	7.34	<b>6.81</b>	7.18	16.82	15.51	<b>15.49</b>	39.43	<b>32.30</b>	35.48
	MAE	5.35	<b>4.95</b>	5.21	14.09	13.22	<b>12.91</b>	37.17	<b>30.14</b>	32.96
	MdAPE%	59.64	59.31	<b>54.65</b>	44.73	42.03	<b>39.81</b>	48.54	<b>39.52</b>	43.54
1.00-1.15	RMSE	11.91	<b>8.11</b>	12.67	13.52	<b>11.90</b>	14.52	26.38	21.40	<b>21.14</b>
	MAE	10.52	<b>6.42</b>	10.90	11.55	<b>9.41</b>	12.77	21.15	17.21	<b>16.96</b>
	MdAPE%	18.21	<b>7.88</b>	18.78	10.01	<b>6.52</b>	11.85	9.90	8.05	<b>7.55</b>
>1.15	RMSE	5.32	4.63	<b>4.31</b>	5.89	<b>0.78</b>	3.69	33.34	<b>11.83</b>	18.63
	MAE	4.95	<b>3.62</b>	3.78	5.85	<b>0.66</b>	3.52	32.68	<b>10.35</b>	18.60
	MdAPE%	0.62	<b>0.38</b>	0.41	0.70	<b>0.10</b>	0.59	3.72	<b>1.39</b>	1.87

Bảng 5.6: Kết quả định giá quyền chọn bán của chỉ số S&P 500

# Kết Luận

## Kết quả của khóa luận

Khóa luận này tập trung phát triển một mô hình định giá quyền chọn mới trong tài chính. Trong quá trình tìm tòi, nghiên cứu, thực nghiệm, khóa luận đã thu được kết quả như sau:

- Tìm hiểu hợp đồng quyền chọn trong thị trường tài chính và các phương pháp định giá kinh điển.
- Tìm hiểu về quá trình Gauss cũng như phân phối chuẩn nhiều chiều.
- Đề xuất mô hình mới sử dụng quá trình Gauss và lý thuyết đã được chứng minh ở GARCH.
- Xây dựng sản phẩm thử nghiệm và cài đặt các mô hình định giá cho sản phẩm.
- Tiến hành thực nghiệm theo các tập dữ liệu khác nhau để khảo sát hiệu quả của mô hình đề xuất.

Các kết quả thực nghiệm cho thấy rằng mô hình Black-Scholes dù đơn giản nhưng vẫn đạt hiệu quả tốt trong việc định giá các quyền chọn kiểu châu Âu. Tuy nhiên việc mô hình hóa biến động thị trường sẽ đưa ra kết quả định giá chính xác hơn so với giả thuyết coi nó là một hằng số. Kết quả thực nghiệm cũng chỉ ra rằng quá trình Gauss mặc dù có hiệu suất chung thấp hơn GARCH, nhưng lại có độ chính xác cao hơn đối với những tập dữ liệu có ý nghĩa. Từ đó chứng minh được rằng quá trình Gauss có thể ứng dụng tốt trong bài toán định giá quyền chọn.

## **Phương hướng nghiên cứu tương lai**

Việc sử dụng quá trình Gauss để định giá quyền chọn còn rất nhiều điểm có thể thử nghiệm và cải tiến. Ví dụ sử dụng một nhân khác so với luỹ thừa bình phương, hoặc thay đổi hàm trung bình bằng cách dùng hàm tuyến tính thay cho hằng số, hoặc thêm nhiều vào biểu thức phương sai,... Việc mô hình hoá lãi suất phi rủi ro thay cho giả thuyết nó không đổi trong tương lai cũng là một hướng đi tiềm năng. Ngoài ra, một hướng nghiên cứu khác có thể xem xét là mô hình hoá biến động thị trường một cách bất đối xứng[33].

# Tài liệu tham khảo

- [1] Alexandru M. Badescu and Reg J. Kulperger. Garch option pricing: A semi-parametric approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(1):69–84, 2008. doi: 10.1016/j.insmatheco.2007.09.011.
- [2] Giovanni Barone-Adesi, Robert F. Engle, and Loriano Mancini. A garch option pricing model with filtered historical simulation. *Review of Financial Studies*, 21(3):1223–1258, 2008. doi: 10.1093/rfs/hhn031.
- [3] Christopher M. BISHOP. *Relative entropy and mutual information*, page 55–58. Springer, 2006.
- [4] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973. doi: 10.1086/260062.
- [5] Chuong B Do. More on multivariate gaussians. URL [http://cs229.stanford.edu/section/more\\_on\\_gaussians.pdf](http://cs229.stanford.edu/section/more_on_gaussians.pdf). [Online], 2008.
- [6] Katherine Doherty, Isis Almeida, and Elena Popina. Global options trading has now overtaken futures volume, Oct 2023. URL <https://www.bloomberg.com/news/articles/2023-10-12/options-are-the-hottest-trade-on-wall-street-after-crypto-demise>.
- [7] Jin-Chuan Duan. The garch option pricing model. *Mathematical Finance*, 5(1):13–32, 1995. doi: 10.1111/j.1467-9965.1995.tb00099.x.
- [8] CBOE Exchange, 2023. URL <https://www.cboe.com/us/equities/market-share/>.
- [9] J. Hao and J. E. Zhang. Garch option pricing models, the cboe vix, and variance risk premium. *Journal of Financial Econometrics*, 11(3):556–580, 2013. doi: 10.1093/jjfinec/nbs026.
- [10] James Hensman, Alex Matthews, and Zoubin Ghahramani. Scalable variational gaussian process classification, 2014.
- [11] K. C. Hsieh and P. Ritchken. An empirical comparison of garch option pricing models. *Review of Derivatives Research*, 8(3):129–150, 2006. doi: 10.1007/s11147-006-9001-3.

- [12] John Hull and Sankarshan Basu. The black-scholes-merton model. In *Options, futures, and other derivatives*, page 316–348. Pearson, 2022.
- [13] John Hull and Sankarshan Basu. Introduction. In *Options, futures, and other derivatives*, page 1–23. Pearson, 2022.
- [14] John Hull and Sankarshan Basu. Wiener processes and itô’s lemma. In *Options, futures, and other derivatives*, page 294–315. Pearson, 2022.
- [15] John Hull and Sankarshan Basu. Mechanics of options markets. In *Options, futures, and other derivatives*, page 205–224. Pearson, 2022.
- [16] John Hull and Sankarshan Basu. Properties of stock option. In *Options, futures, and other derivatives*, page 225–245. Pearson, 2022.
- [17] John Hull and Sankarshan Basu. Risk-neutral valuation. In *Options, futures, and other derivatives*, page 270–272. Pearson, 2022.
- [18] Alexander Ke and Andrew Yang. Option pricing with deep learning. *Department of Computer Science, Standford University, In CS230: Deep learning*, 8: 1–8, 2019.
- [19] Will Kenton. What is a bloomberg terminal? functions, costs, and alternatives, 2022. URL [https://www.investopedia.com/terms/b/bloomberg\\_terminal.asp](https://www.investopedia.com/terms/b/bloomberg_terminal.asp).
- [20] Nitesh Kumar. *Modeling dependence in data: Options Pricing and random walks*. PhD thesis, eScholarship, University of California, 2013.
- [21] Qing Liu and Donald A. Pierce. A note on gauss-hermite quadrature. *Biometrika*, 81(3):624–629, 1994. ISSN 00063444. URL <http://www.jstor.org/stable/2337136>.
- [22] Miguel Lázaro-Gredilla and Michalis Titsias. Variational heteroscedastic gaussian process regression. pages 841–848, 01 2011.
- [23] Anton Malakhov. Composable multi-threading for python libraries. 08 2016. doi: 10.25080/Majora-629e541a-002.
- [24] Yuxin Mao, Wei Wei, Bing Wang, and Benyuan Liu. Correlating s&p 500 stocks with twitter data. *Proceedings of the First ACM International Workshop on Hot Topics on Interdisciplinary Social Networks Research*, 2012. doi: 10.1145/2392622.2392634.
- [25] Brian Olson, Irina Hashmi, Kevin Molloy, and Amarda Shehu. Basin hopping as a general and versatile optimization framework for the characterization of biological macromolecules. *Advances in Artificial Intelligence*, 2012:1–19, 2012. doi: 10.1155/2012/674832.

- [26] Emmanouil A. Platanios and Sotirios P. Chatzis. Gaussian process-mixture conditional heteroscedasticity. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 36(5):888–900, 2014. doi: 10.1109/tpami.2013.183.
- [27] Jiayu Qiu, Bin Wang, and Changjun Zhou. Forecasting stock prices with long-short term memory neural network based on attention mechanism. *PLOS ONE*, 15(1), 2020. doi: 10.1371/journal.pone.0227222.
- [28] Carl Edward Rasmussen and Williams Christopher K I. *Gaussian Process Classification*, page 39–41. MIT Press, 2006.
- [29] Kokoszczyński Ryszard, Sakowski Paweł, and Ślepaczuk Robert. Which option pricing model is the best? hf data for nikkei 225 index options. *Central European Economic Journal*, 4(51):18–39, 2017. doi: doi:10.1515/ceej-2018-0010. URL <https://doi.org/10.1515/ceej-2018-0010>.
- [30] Dustin Tran, Rajesh Ranganath, and David M. Blei. The variational gaussian process, 2016.
- [31] Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, and Keying Ye. *Joint Probability Distributions*, page 94–103. Pearson, 2017.
- [32] Jie Wang. An intuitive tutorial to gaussian processes regression, 2022.
- [33] Yue Wu, Jose Miguel Hernandez Lobato, and Zoubin Ghahramani. Gaussian process volatility model, 2014.
- [34] Daniel Zwillinger. *Gaussian quadrature*, page 172–174. CRC Press, 2003.