Метод опорных векторов в линейно-разделимом случае

Skillbox

Елена Кантонистова

Нормировка весов

- Запишем предсказание модели в виде

$$a(x) = sign(w_0 + (w, x))$$

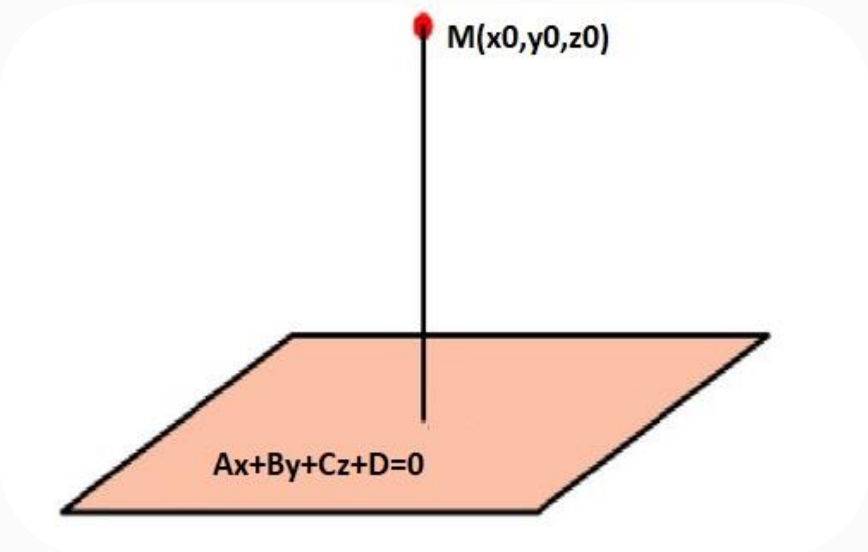
- Нормируем веса так, чтобы

$$min|w_0 + (w, x)| = 1$$

Расстояние от точки до плоскости

- Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле

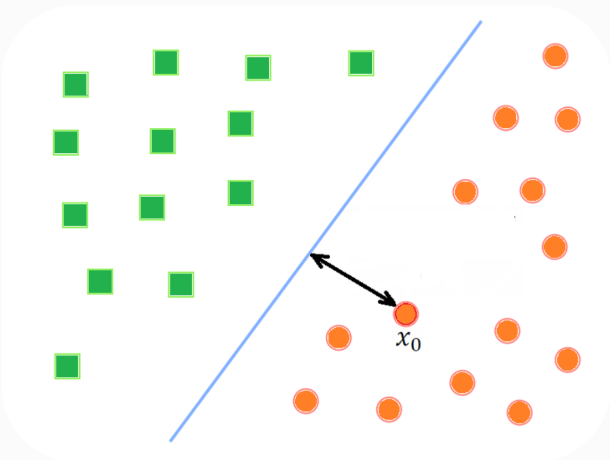
$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Расстояние от объекта до гиперплоскости

- Расстояние от объекта x_0 обучающей выборки до разделяющей поверхности, заданной уравнением $w_0 + w_1 x_1 + \dots + w_n x_n = w_0 + (w, x) = 0$, согласно формуле, равно

$$\rho = \frac{|w_0 + (w, x_0)|}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2}}$$



Норма вектора

- Выражение

$$||w|| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2}$$

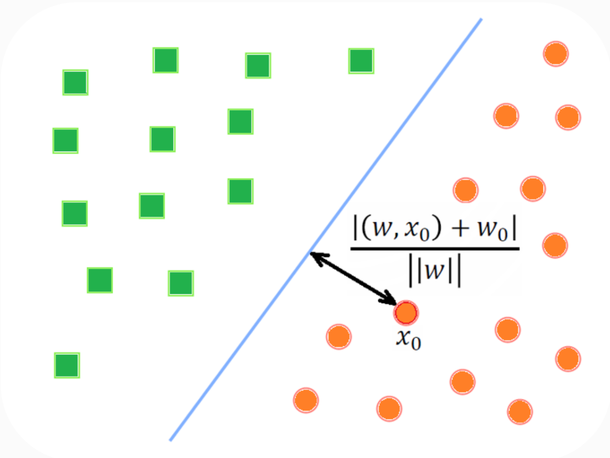
Называется Евклидовой нормой, или длиной вектора

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Расстояние от объекта до гиперплоскости

- Расстояние от объекта x_0 обучающей выборки до разделяющей поверхности, заданной уравнением $w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = w_0 + (w, x) = 0$, согласно формуле, равно

$$\rho = \frac{|w_0 + (w, x_0)|}{||w||}$$



Нормировка весов и отступ

- Отступ на i-м объекте вычисляется по формуле

$$M_i = y_i \cdot (w_0 + (w, x_i))$$

- Веса отнормированы так, чтобы

$$min|w_0 + (w, x)| = 1$$

В терминах отступа это означает, что

$$\min|M_i| = 1$$

Расстояние до ближайшего объекта

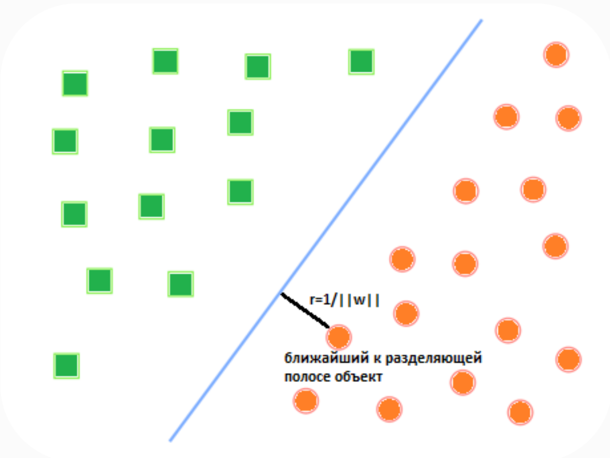
- Расстояние от i-го объекта обучающей выборки до разделяющей поверхности равно

$$\rho = \frac{|w_0 + (w, x_i)|}{||w||} = \frac{|M_i|}{||w||}$$

- Также имеем $\min|M_i| = 1$

Поэтому расстояние до ближайшего объекта выборки равно

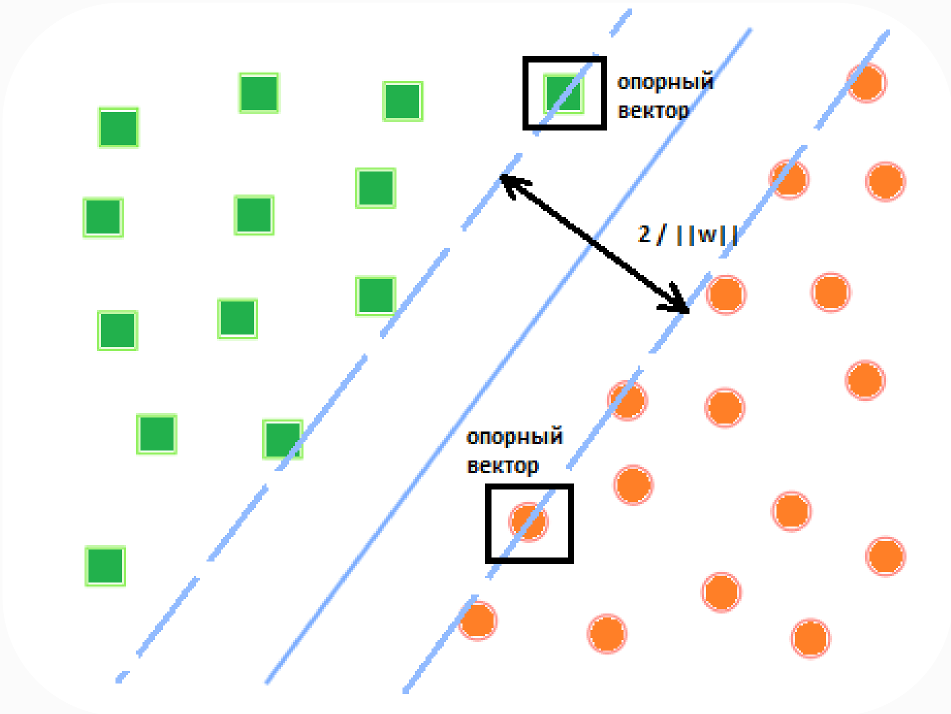
$$\rho = \frac{1}{||w||}$$



Разделяющая полоса

- Расстояние до ближайшего объекта выборки равно $\rho = \frac{1}{||w||}$, поэтому существует разделяющая полоса ширины

$$l = \frac{2}{||w||}$$



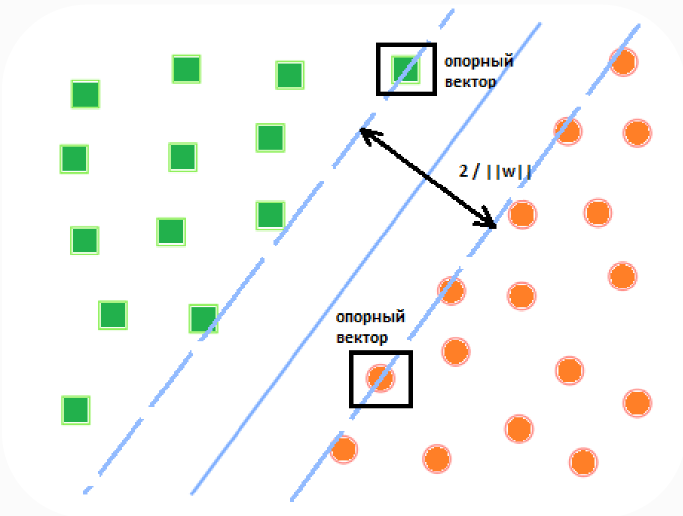
Обучение метода опорных векторов

- Цель метода — найти такие веса модели

$$a(x) = sign\left(w_0 + (w, x)\right),$$

чтобы разделяющая полоса была максимальной ширины, то есть решаем задачу

$$\frac{2}{||w||} \to \max_{w}$$



Переход к задаче минимизации

- Цель метода — максимизировать ширину разделяющей полосы

$$\frac{2}{||w||} \to \max_{w}$$

- Задача эквивалента

$$\frac{||w||}{2} \to \min_{w}$$

Квадрат нормы минимизировать гораздо проще, поэтому итоговая задача

$$\frac{||w||^2}{2} \to \min_{w}$$

Метод опорных векторов: резюме

- Цель метода опорных векторов в линейно-разделимом случае — максимизировать ширину разделяющей полосы
- При обучении метода решаем задачу

$$\frac{||w||^2}{2} \to \min_{w}.$$