

Campo elétrico de um quadrupolo cilíndrico: cálculos, computações e considerações

Franco Sauvisky, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte (MG), Brasil

Resumo Neste trabalho foi calculado o potencial elétrico interno de um cilindro condutor infinito, cortado em 4 partes longitudinais idênticas, com potenciais opostos $\pm V_0$ intercalados entre as cascas, formando um quadrupolo elétrico. Para isso, a equação de Laplace foi resolvida analiticamente em coordenadas cilíndricas com as condições de contorno necessárias. Além disso, foi realizado o cálculo numérico por meio do método dos elementos finitos do mesmo sistema. No final, realizamos uma comparação entre as soluções obtidas mostrando que os métodos utilizados são equivalentes, e discutimos rapidamente sobre os erros observados.

1 Introdução

Sistemas que geram quadrupolos elétricos possuem diversas aplicações tecnológicas, especialmente quando aplicados com campos variáveis no tempo. Dentre elas podemos citar seus usos em analisadores de massa, armadilhas de íons e aceleradores de partículas. Por isso, é interessante estudar como o campo elétrico se comporta neste tipo de sistema.

Como o quadrupolo elétrico é rigorosamente apenas um termo da expansão multipolar do campo elétrico de um sistema, existem diversas configurações que podem ser usadas para gerá-lo. Neste trabalho pretendemos estudar o potencial elétrico interno de um sistema conforme ilustrado pela figura 1, onde temos um cilindro oco condutor de raio R , cortado em 4 segmentos iguais. Nestes segmentos aplicamos um potencial elétrico de mesma magnitude mas polaridade oposta em segmentos adjacentes, de valor $\pm V_0$. Por ora iremos ignorar a descontinuidade do potencial entre as bordas destes segmentos, tratando eles como infinitesimalmente separados.

2 Desenvolvimento analítico

Para determinar o potencial no interior deste cilindro analiticamente, podemos começar a partir da equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$, pois não há cargas na nossa região de interesse. Dado o problema, é conveniente adotar um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) considerando o eixo z alinhado e passando pelo centro do cilindro condutor. Neste sistema de coordenadas, podemos

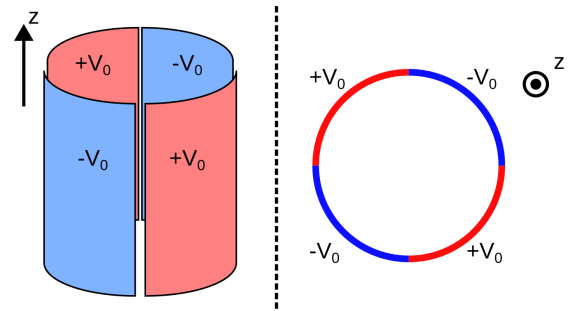


Figura 1: Representação do sistema a ser estudado. O cilindro possui comprimento infinito no eixo z e separação infinitesimal entre os condutores.

escrever a equação de Laplace como:

$$\nabla^2 V(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Para encontrar as possíveis soluções, vamos supor que a solução pode ser escrita como o produto de funções de cada coordenada $V(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$. Note que o problema tem simetria perfeita no eixo z , então já podemos concluir que $Z(z) = Z_0$, uma constante que podemos ignorar no cálculo. Aplicando isso na equação anterior e realizando a separações de variáveis, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= 0 \\ \therefore \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) &= -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = v^2 \end{aligned}$$

Onde podemos concluir que v^2 é uma constante numérica, pois os lados da equação dependem livremente de parâmetros diferentes, então não pode haver variação. Separando as equações, chegamos em:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - v^2 R &= 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + v^2 \Theta &= 0 \end{aligned}$$

A segunda equação, relacionado à coordenada θ , é mais direta de resolver, as soluções possíveis são da forma:

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= A_v \cos(v\theta) + B_v \sin(v\theta) & \text{se } k \neq 0 \\ \Theta(\theta) &= A_0 + B_0 \theta & \text{se } k = 0 \end{aligned}$$

Como $\Theta(\theta)$ necessita ser uma função periódica, com período 2π (ou seja, $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$), temos que v vai sempre assumir valores inteiros. Pelo mesmo motivo podemos ver que $B_0 = 0$.

A primeira equação é uma equação de Cauchy-Euler, um pouco mais complexa mas que possuem soluções bem documentadas. Nesta situação, as soluções podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} R(r) &= C_v r^v + D_v r^{-v} & \text{se } k \neq 0 \\ R(r) &= C_0 + D_0 \ln \frac{r}{r_0} & \text{se } k = 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que o campo não pode divergir dentro do interior do cilindro, então podemos concluir que $D_0 = D_v = 0$. Logo podemos escrever uma primeira solução genérica deste problema como:

$$V(r, \theta, z) = A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (A_v \cos(v\theta) + B_v \sin(v\theta)) r^v$$

Levando em conta que este resultado é apenas válido devido às simetrias do sistema e foram feitas simplificações para reduzir o número de constantes. Com isto em mãos, podemos começar analisar como se comportam as condições de contorno do problema.

No caso do cilindro condutor, precisamos apenas descrever o potencial em $r = R$, o que podemos fazer por meio de uma função definida em partes:

$$V(R, \theta, z) = \begin{cases} V_0, & \text{se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V_0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \\ V_0, & \text{se } \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ -V_0, & \text{se } \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Note que esta função descreve uma onda quadrada na variável θ , com período π e amplitude V_0 . Usando a série de Fourier de uma onda quadrada, que é um resultado conhecido, podemos escrever:

$$\begin{aligned} V(R, \theta, z) &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2(2l-1)\theta)}{2l-1} \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \left(\sin(2\theta) + \frac{\sin(6\theta)}{3} + \frac{\sin(10\theta)}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

Com essa condição de contorno e o resultado genérico obtido acima, podemos comparar as expressões a fim de determinar os coeficientes da solução geral. Temos que:

$$\begin{aligned} V(R, \theta, z) &= A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (A_v \cos(v\theta) + B_v \sin(v\theta)) R^v \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2(2l-1)\theta)}{2l-1} \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes das funções de θ dentro dos somatórios, obtemos:

$$\begin{aligned} A_v &= A_0 = 0 \\ B_v &= \begin{cases} 4V_0 (v\pi R^v)^{-1}, & \text{se } v = 2(2n-1) > 0, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Enfim, podemos expressar o potencial elétrico no interior do cilindro como:

$$V(r, \theta, z) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2(2n-1)\theta)}{(2n-1)R^{2(2n-1)}} r^{2(2n-1)}$$

3 Simulação computacional

Para realizar um estudo do campo elétrico diretamente a partir da equação de Laplace, podemos usar um método numérico chamado método dos elementos finitos (FEM), que consiste de dividir o espaço em uma malha de elementos discretos e resolver as equações (mais simples) para cada elemento da malha, que aproximará o resultado de um espaço contínuo.

Neste caso, podemos trabalhar em coordenadas retangulares e novamente ignorar o eixo z , então a

equação de Laplace permanece com a mesma expressão, mas podemos resolvê-la em duas dimensões, calculando o campo elétrico em um corte transversal do cilindro, assim simplificando o problema computacional.

O programa usado para realizar a simulação numérica é o FEMoctave, um pacote gratuito na linguagem de programação *open-source* Octave (compatível na sua maior parte com MATLAB) que permite resolver equações diferenciais parciais com condições de contorno de Dirichlet e Neumann em até duas dimensões, com finalidade principalmente educacional. O código que foi usado nestas simulações está disponibilizado em um repositório online¹.

Para os cálculos numéricos, podemos definir sem perda de generalidade que $R = V_0 = 1$. Então, como estamos trabalhando em coordenadas retangulares, nossa região de interesse é o interior de um círculo unitário e centrado na origem. Para realizar a computação, precisamos criar uma malha nessa região, para isso podemos definir a borda do sistema e usar funções fornecidas para criar uma malha com densidade de elementos ajustável. Em seguida precisamos definir o valor do potencial ao longo da borda do sistema, aplicando uma condição de contorno de Dirichlet unitária mas com o sinal alternando em função do quadrante cartesiano, criando assim o quadrupolo elétrico cilíndrico. O resultado obtido para o potencial neste sistema está representado nas figuras 2 e 3.

Para comparar o resultado calculado com a solução analítica obtida previamente, podemos fazer um gráfico dos potenciais em ambos os métodos ao longo de várias circunferências centradas na origem e internas ao cilindro, ou seja, um gráfico de $V(r_n, \theta, \cdot)$ com θ indo de 0 até 2π para diversos $r_n < R$. Para isso, foi feito o cálculo da solução analítica usando o somatório até $n = 100$, a fim de garantir uma solução precisa. Para um melhor entendimento dos erros, a simulação usando FEM foi realizada usando duas malhas com densidades dos elementos diferentes. A figura 4 mostra a malha com menor densidade utilizada (malha grossa) e os potenciais calculados neste sistema. Na figura 5 podemos ver a comparação dos resultados calculado e analítico, mostrando uma margem de erro não desprezível neste caso.

Contudo, aumentando a densidade de elementos da malha e realizando o mesmo gráfico, obtemos a figura 6, que mostra que a solução converge para os valores dos potenciais esperados conforme a teoria, embora essa precisão vem a custo de uma carga computacional maior.

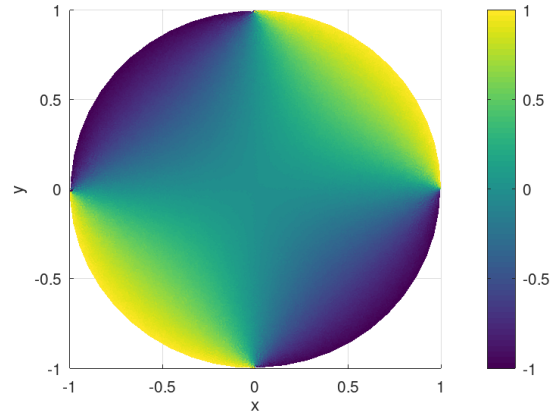


Figura 2: Potencial elétrico interno do sistema calculadas por meio do FEM

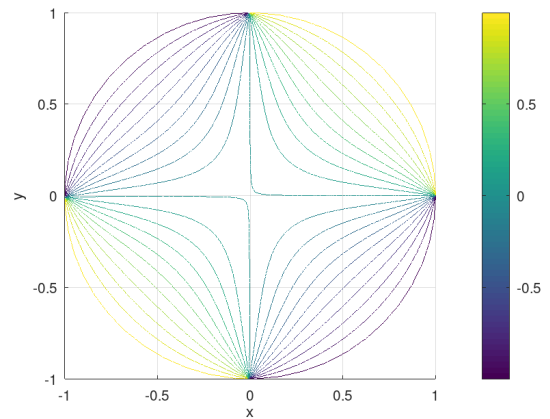


Figura 3: Curvas equipotenciais da solução calculada

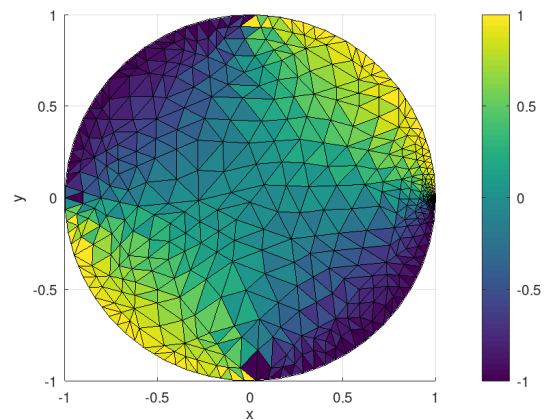


Figura 4: Potencial elétrico calculado no sistema usando a malha grossa

¹<https://gist.github.com/fsau/e7917ef3ba5696dc6ee938728ec2c760>

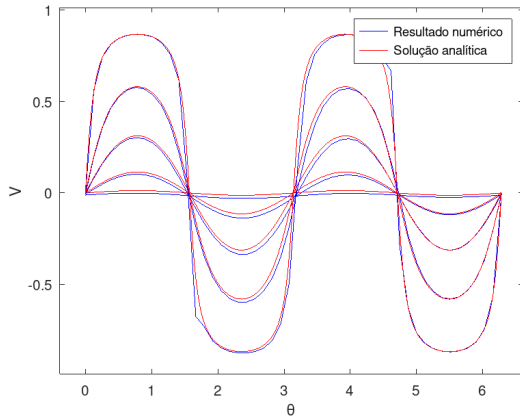


Figura 5: Potencial calculado usando a malha grossa e valores calculados com a solução analítica, ao longo de uma circunferência interna, onde $r_n = (0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9)R$

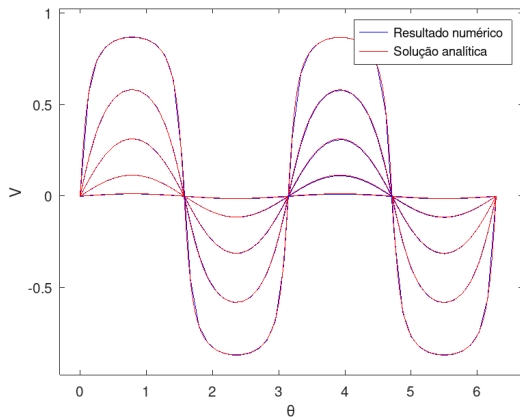


Figura 6: Potencial calculado usando a malha de maior densidade de elementos

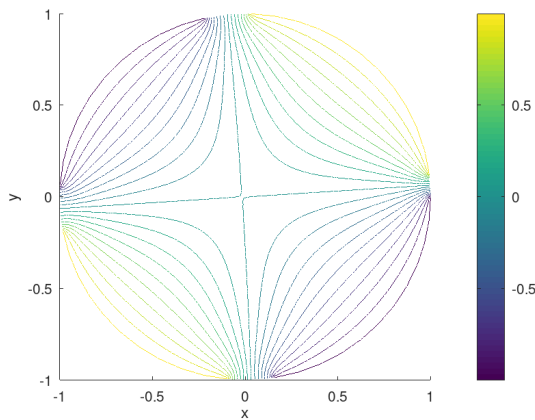


Figura 7: Curvas equipotenciais para o sistema usando uma condição de contorno de Neumann nula apenas entre as regiões condutoras

4 Conclusões

Neste trabalho conseguimos calcular o potencial elétrico interno de um quadrupolo cilíndrico usando diversos métodos. Inicialmente obtivemos a expressão analítica do potencial em coordenadas cilíndricas resolvendo a equação de Laplace, vale notar que este método também pode ser usado em outras configurações cilíndricas, por exemplo com um número arbitrário de segmentos ou uma variação contínua de potencial, bastando conhecer a expansão em série de Fourier da função desejada. Também conseguimos calcular o potencial pelo método dos elementos finitos em coordenadas retangulares e mostramos que a simulação converge para o resultado analítico esperado, quando a densidade de elementos da malha é suficiente. Este resultado também nos possibilita resolver sistemas mais complexos, um exemplo é para simular um afastamento entre os segmentos condutores a fim de remover a divergência do campo elétrico existente nas bordas destes, o que foi feito e representado na figura 7.

Para uma continuação do estudo, propomos realizar um estudo sistemático do erro em função das diferentes malhas que podemos adotar, para assim obtermos um melhor entendimento do custo-benefício que temos ao reduzir ou aumentar a densidade de elementos das malhas (e consequente demanda computacional). Também propomos investigar outros softwares open-source que podem ser usados para simulações mais complexas, por exemplo em sistemas tridimensionais e sem simetrias, tais como o MOOSE², FreeFEM³ e ElmerFEM⁴.

Agradecimentos

Agradeço aos autores e contribuidores dos softwares *open-source* Octave e FEMoctave que permitiu a realização dos métodos numéricos usados e sua análise. Este trabalho apenas foi possível graças ao apoio da Universidade Federal de Minas Gerais e FAPEMIG.

Referências

- Jackson, John David. 1999. *Classical electrodynamics*, 3rd ed. edition. Wiley, New York, NY.
- Machado, Kleber Daum. 2012. *Eletromagnetismo*, volume 1. Todapalavra Editora, Ponta Grossa, PR.
- Stahel, Andreas. 2023. Femoctave, finite element algorithms in octave. <https://github.com/AndreasStahel/FEMoctave/blob/master/doc/FEMdoc.pdf>. [Acessado em 20 de novembro de 2023].

²<https://mooseframework.inl.gov/>

³<https://freefem.org/>

⁴<http://www.elmerfem.org/>