UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 2^0 semestre de 2015 - 19/out/15

Nome: ______________________________ **Matrícula:**______________

Assinatura: ______________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, **FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR**.
- ATENÇÃO: informe a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
T20: EST 085 T1 2a=16-18 PVA102 - Monitor II - Leisa Lima
T20: EST 085 T2 5a=18:30-20:10 PVA310 - Monitor II
--------------------------------------------------------------
T1: 2a=10-12 e 5a=8-10     PVB310 - Paulo Cecon
--------------------------------------------------------------
T2: 2a=16-18 e 5a=14-16    PVB310 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T5: 3a=16-18 e 6a=14-16    PVB310 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T6: 2a=14-16 e 4a=16-18    PVB107 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T7: 4a=8-10 e 6a-10-12     PVB206 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T8: 2a=18:30-20:10 e 4a=20:30-22:10   PVB306 - Paulo Emiliano
--------------------------------------------------------------
T9: 3a=10-12  e 6a=8-10  PVB300/307 - Chos
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

$$\text{Leis de DeMorgan:} \quad P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c \quad \text{e} \quad P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\ dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

1.(4 pontos) Admita que todas as questões de uma prova de múltipla escolha tenham 5 alternativas de resposta e apenas uma delas é a correta. Admita também que um estudante sabe responder corretamente a 60% das questões desta prova. Pede-se: utilize o teorema, ou a regra, de Bayes para calcular a probabilidade condicional que informa o percentual das questões que este estudante respondeu corretamente (assinalou a resposta correta), porém de forma aleatória. Isto é, o percentual das questões que ele leu e constatou que não sabia a resposta, assinalou de forma completamente aleatória e acertou.

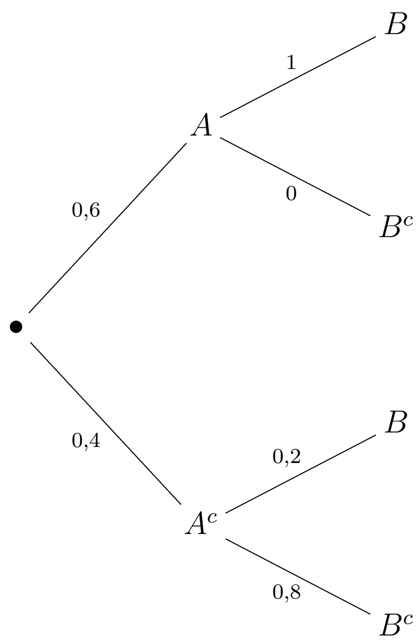
Sejam

- A : "ele não assinala a resposta aleatoriamente",
- B : "o aluno assinalou corretamente a resposta".

Do enunciado temos

$$\begin{array}{ccc} P(A) = 0,6 & \Rightarrow & P(A^c) = 0,4. \\ P(B|\,A) = 1 & \Rightarrow & P(B^c|A) = 0. \\ P(B|A^c) = 0,2 & \Rightarrow & P(B^c|\,A^c) = 0,8. \end{array}$$

Queremos determinar $P(A^c|\,B)$.



$$\begin{aligned} P(A^c|\,B) &= \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} = \frac{P(B|\,A^c)\,P(A^c)}{P(B|\,A)\,P(A) + P(B|\,A^c)\,P(A^c)} \\ &= \frac{0,2 \times 0,4}{1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4} = \frac{0,08}{0,68} = \frac{2}{17} = 0,1176 \end{aligned}$$

2.(6 pontos) Considere os seguintes três eventos quando um cliente visita o departamento de roupas masculinas de uma loja:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{o cliente compra um terno}\} \\ B &= \{\text{o cliente compra uma gravata}\} \\ C &= \{\text{o cliente compra uma camisa}\} \end{aligned}$$

Admita as seguintes probabilidades de compras associadas aos três eventos: compra um terno com probabilidade 2/5, uma gravata com probabilidade 5/12, uma camisa com probabilidade 1/2, um terno e uma gravata com probabilidade 2/15, um terno e uma camisa com probabilidade 17/60, uma gravata e uma camisa com probabilidade 1/4; compra os três itens com probabilidade 1/12. Pede-se:

a.(3 pts) Dado que o cliente não vai comprar uma gravata, qual é a probabilidade condicional de que ele compre um terno?

Do enunciado temos

$$\begin{array}{ccc} P(A) = \frac{2}{5}, & P(B) = \frac{5}{12}, & P(C) = \frac{1}{2}, \\ P(A \cap B) = \frac{2}{15} & P(A \cap C) = \frac{17}{60}, & P(B \cap C) = \frac{1}{4}, \\ & P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12}. & \end{array}$$

Desejamos determinar $P(A|\, B^c)$.

$$\begin{aligned} P(A|\, B^c) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{15}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{6-2}{15}}{\frac{12-5}{12}} = \frac{4}{15} \times \frac{12}{7} = \frac{16}{35} = 0,4571 \end{aligned}$$

b.(3 pts) Dado que o cliente vai comprar uma camisa, qual é a probabilidade condicional de que ele compre também uma gravata ou um terno.

$$\begin{aligned} P(A \cup B|\, C) &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{17}{60} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{17+15-5}{60}}{\frac{1}{2}} = \frac{27}{60} \times 2 = \frac{9}{10} = 0,9 \end{aligned}$$

3.(4 pontos) Considere que um livro é lido por três revisores e considere também os eventos mutuamente independentes: $A_i = \{\text{o i-ésimo revisor detecta um erro específico}\}$, com probabilidades $P(A_1) = 0,92$, $P(A_2) = 0,85$ e $P(A_3) = 0,95$. Pede-se: Calcule a probabilidade de que o erro seja percebido por exatamente dois dos revisores.

Sabemos que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$, então

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j \cap A_k^c) &= P(A_i \cap A_j) - P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\underset{\text{independentes}}{\overset{\text{mutuamente}}{=}} P(A_i)P(A_j) - P(A_i)P(A_j)P(A_k) \end{aligned}$$

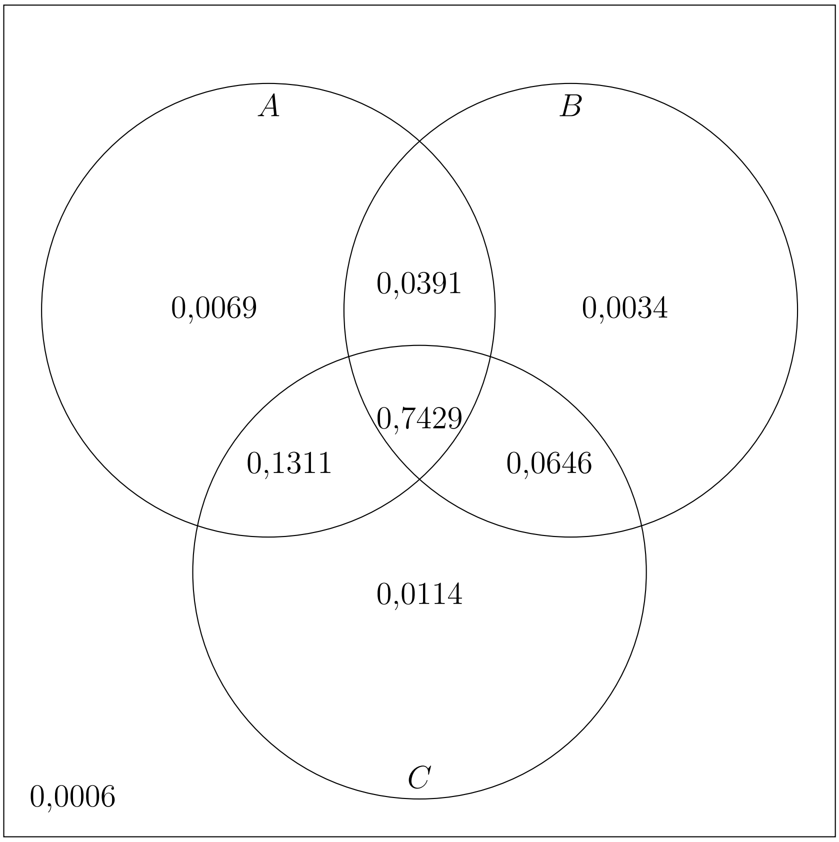
Assim se

$$A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$$

então

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) + P(A_2)P(A_3) - 3P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= 0,92 \times 0,85 + 0,92 \times 0,95 + 0,85 \times 0,95 - 3 \times 0,92 \times 0,85 \times 0,95 \\ &= 0,782 + 0,874 + 0,8075 - 3 \times 0,7429 \\ &= 2,4635 - 2,2287 = 0,2348 \end{aligned}$$

Solução pelos diagramas de Venn
O diagrama de Venn abaixo, ilustra todas as probabilidades.



Pelo diagrama pode-se obter diretamente o valor pedido:

$$\begin{aligned}
P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c\right) &= 0,92 \cdot 0,85 - 0,92 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,782 - 0,7429 = 0,0391 \\
P\left(A_1 \cap A_2^c \cap A_3\right) &= 0,92 \cdot 0,95 - 0,92 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,874 - 0,7429 = 0,1311 \\
P\left(A_1^c \cap A_2 \cap A_3\right) &= 0,85 \cdot 0,95 - 0,92 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,8075 - 0,7429 = 0,0646
\end{aligned}$$

Assim, se

$$A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P(A) = 0,0391 + 0,1311 + 0,0646 = 0,2348.$$

4.(8 pontos) Considere a seguinte distribuição de probabilidades,

	Y			
X	0	1	2	Total
6	0,08	0,10	0,12	0,30
4	0,10	0,04	0,06	0,20
2	0,10	0,20	0,20	0,50
Total	0,28	0,34	0,38	1,00

Seja a variável aleatória $W = X + 2Y - 1$, pede-se:

a.(4 pts) $E(W)$, o valor médio de W.

Temos que

$$E(W) = E(X + 2Y - 1) = E(X) + 2E(Y) - 1$$

e,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 6 \times 0,30 + 4 \times 0,20 + 2 \times 0,50 = 3,6 \\ E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = 0 \times 0,28 + 1 \times 0,34 + 2 \times 0,38 = 1,1 \end{aligned}$$

logo

$$E(W) = 3,6 + 2 \times 1,1 - 1 = 4,8$$

b.(4 pts) Sabendo-se que $E(XY) = 3,88$, calcule $V(W)$, a variância de W.

Temos que

$$\begin{aligned} V(W) &= V(X+2Y-1) = V(X+2Y) = V(X) + V(2Y) + 2Cov(X,2Y) \\ &= V(X) + 4V(Y) + 4Cov(X,Y) \end{aligned}$$

e,

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 6^2 \times 0,30 + 4^2 \times 0,20 + 2^2 \times 0,50 = 16$$

$$E\left(Y^2\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 p_i = 0^2 \times 0,28 + 1^2 \times 0,34 + 2^2 \times 0,38 = 1,86$$

Assim

$$V(X) = 16 - (3,6)^2 = 3,04$$
$$V(Y) = 1,86 - (1,1)^2 = 0,65$$

e,

$$Cov(X,Y) = 3,88 - 3,6 \times 1,1 = -0,08$$

Assim

$$V(W) = 3,04 + 4 \times 0,65 + 4 \times (-0,08) = 5,32.$$

Outra solução: Os possíveis valores para $W = X + 2Y - 1$ são dados na tabela a seguir:

Tabela 1: Quadro auxiliar para determinarmos os valores de $W = X + 2Y - 1$

	Y		
X	0	1	2
6	5	7	9
4	3	5	7
2	1	3	5

Vemos que W assume os valores 1, 3, 5, 7, 9 e,

$$\begin{aligned} P(W=1) &= P(X=2, Y=0) = 0,10 \\ P(W=3) &= P(X=4, Y=0) + P(X=2, Y=1) = 0,10 + 0,20 = 0,30 \\ P(W=5) &= P(X=6, Y=0) + P(X=4, Y=1) + P(X=2, Y=2) \\ &= 0,08 + 0,04 + 0,20 = 0,32 \\ P(W=7) &= P(X=6, Y=1) + P(X=4, Y=2) = 0,10 + 0,06 = 0,06 \\ P(W=9) &= P(X=6, Y=2) = 0,12 \end{aligned}$$

w	1	3	5	7	9	Total
$P(W=w)$	0,10	0,30	0,32	0,16	0,12	1,00

$$\begin{aligned} E(W) &= 1 \times 0,10 + 3 \times 0,30 + 5 \times 0,32 + 7 \times 0,16 + 9 \times 0,12 = 4,8 \\ E\left(W^2\right) &= 1^2 \times 0,10 + 3^2 \times 0,30 + 5^2 \times 0,32 + 7^2 \times 0,16 + 9^2 \times 0,12 = 28,36 \end{aligned}$$

Assim

$$V(W) = 28,36 - (4,8)^2 = 5,32$$

5.(8 pontos) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas cuja função densidade de probabilidade conjunta é dada por,

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & 0 < x < 1 \text{ e } 1 < y < 2 \\ 0, & \text{para outros valores } x, y \end{cases}$$

Pede-se: encontre o valor de k.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{1}^{2}\int_{0}^{1} kx^2ydxdy = k\int_{1}^{2} y\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{1} dy \\
&= k\int_{1}^{2} y\frac{(1^3-0^3)}{3}dy = \frac{k}{3}\int_{1}^{2} ydy = \frac{k}{3}\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=1}^{2} \\
&= \frac{k}{6}\left(2^2-1^2\right) = \frac{3k}{6} = \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

Assim $\frac{k}{2} = 1$, logo $k = 2$.