UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 1^0 semestre de 2014 - 31/mai/14

Nome: ________________________________ **Matrícula:**________________

Assinatura: _________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR. Serão 2h de prova, término as 12:00h.
- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os cálculos ou se apresentar valores incorretos utilizados nos cálculos.
- ATENÇÃO: Sua nota será divulgada no sistema SAPIENS: informe a seguir em qual turma está matriculado.

```
---------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
---------------------------------------------------
T20: EST 085 5e6=18:30-20:10 PVA102 - Gabi,Monitor II
---------------------------------------------------
T1: 3=08-10 e 5=10-12 PVB300 - Paulo Cecon
---------------------------------------------------
T2: 3=10-12 e 6=08-10 PVB109 - Ana Carolina
---------------------------------------------------
T3: 3=14-16 e 5=16-18 PVB109 - CHOS
---------------------------------------------------
T4: 2=14-16 e 4=16-18 PVB107 - Fernando
---------------------------------------------------
T5: 4=18:30-20:10 e 6=20:30-22:10 PVB208 - Camila
---------------------------------------------------
T6: 4=14-16 e 6=16-18 PVA361 - CHOS
---------------------------------------------------
T7: 2=16-18 e 5=14-16 PVB307 - Ana Carolina
---------------------------------------------------
T8: 2=16-18 e 5=14-16 PVB209 - Moysés
---------------------------------------------------
T10: 2=18:30-20:10 e 4=20:30-22:10 PVB104 - Camila
---------------------------------------------------
```

FORMULÁRIO

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i \qquad \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY}\frac{S_Y}{S_X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\displaystyle\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

$$\text{Leis de DeMorgan:} \quad P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c \quad \text{e} \quad P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\; dx = P(x_1 \le X \le x_2)$$

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\; dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\; dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

1.(8 pontos) A tabela seguinte mostra valores das vendas mensais (Y em R\$ $\times$ 1000) e os respectivos valores dos gastos mensais com propaganda (X em R\$ $\times$ 1000), de uma empresa que comercializa produtos eletrônicos.

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Y	100	110	112	115	117	116	118	120	121	120	117	123
X	5,5	5,8	6	5,9	6,2	6,3	6,5	6,6	6,4	6,5	6,7	6,8

Algumas estatísticas úteis:

$$n = 12 \qquad \sum X = 75,2 \qquad \sum Y = 1389$$

$$SQD_X = 1,7267 \qquad SQD_Y = 420,25 \qquad SPD_{XY} = 24$$

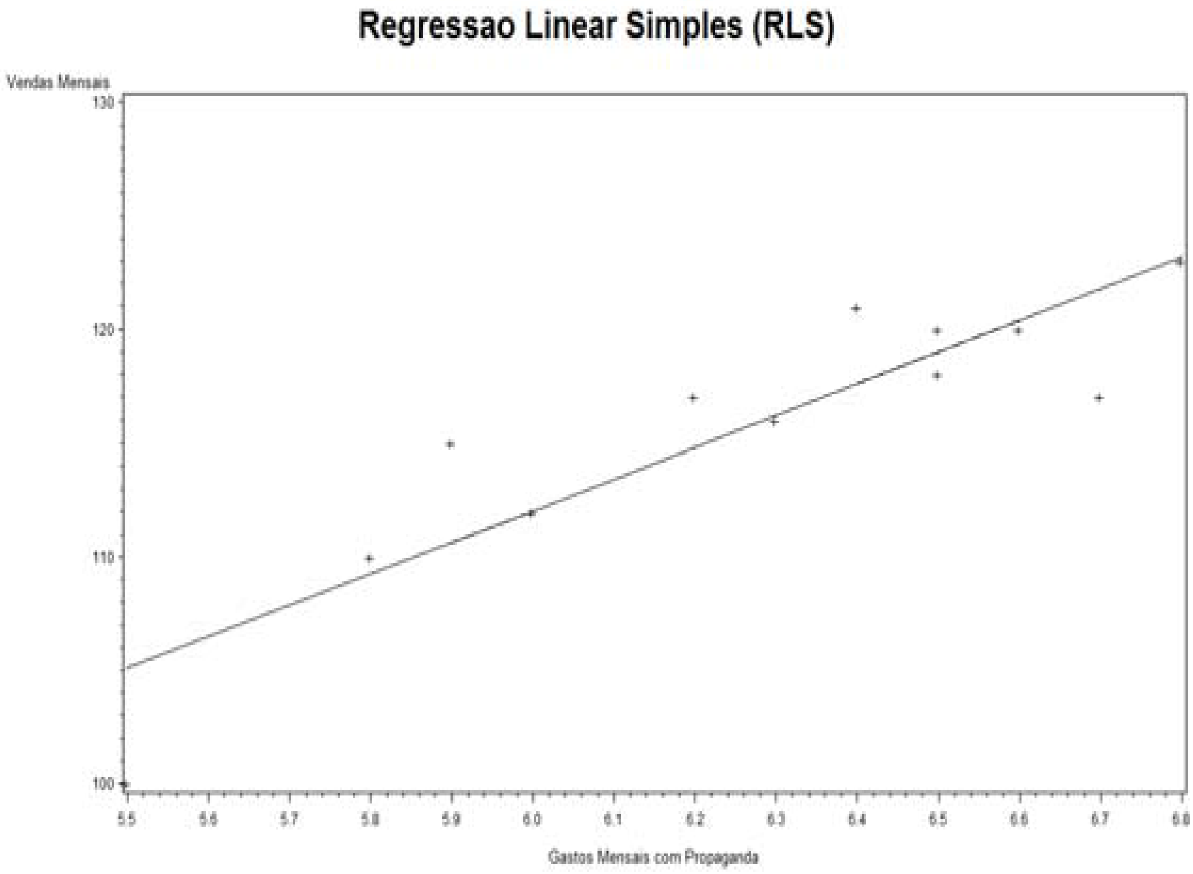


Figura 1: **RLS dos valores das vendas mensais (Y) nos gastos mensais com propaganda(X)**

Pede-se:

a.(2 **pts)** Determine a equação de regressão linear simples que permita estimar o valor médio das vendas mensais em função do gasto mensal com propaganda.

Temos que
$$b_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = \frac{24}{1,7267} \cong 13,89935 \cong 13,8994$$
e
$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X} = \frac{1389}{12} - 13,8994 \times \frac{75,2}{12} \cong 28,646 \cong 28,65.$$
Assim
$$\widehat{Y}_i = 28,65 + 13,8994X_i.$$

b.(2 **pts)** Interprete o valor estimado para o **coeficiente** da regressão (em termos do problema enunciado).

Temos que $b_1 \cong 13,89$ (R\$13899,60 $\rightarrow$ valor da calculadora). Este é o acréscimo médio estimado nas vendas mensais para cada $R\$1000,00$ de acréscimo no gasto mensal com propagandas.

c.(2 **pts)** Calcule o coeficiente de determinação e interprete o valor calculado.

$$SQ_{REG} \cong 333,5972 \qquad SQ_{TOT} = 420,25$$
$$r^2\,(\%) = \frac{SQ_{REG}}{SQ_{TOT}} = \frac{333,5972}{420,25} \times 100\% \cong 79,4\%$$
ou
$$r^2\,(\%) = \text{correlação}^2 \times 100\% = 0,891^2 \times 100\% = 79,4\%$$

Interpretação: percentual da variabilidade observada nos valores das vendas mensais explicado pela RLS nos valores dos gastos mensais com propaganda.

d.(2 **pts)** Obtenha uma estimativa do valor médio das vendas mensais para um mês em que o gasto mensal com propaganda foi de R\$ 6.500,00.

Para $X_i = 6,5$ temos
$$\widehat{Y}_i = 28,646 + 13,899 \times 6,5 \cong 118,9895.$$

Desta forma estima-se que as vendas mensais para um mês em que o gasto mensal com propaganda foi de R\$ 6.500,00 seja de R\$ 118989,50.

Na calculadora pode-se obter o valor
$$\widehat{Y}_i \cong 118,99324.$$

Desta forma estima-se que as vendas mensais para um mês em que o gasto mensal com propaganda foi de R\$ 6.500,00 seja de R\$ 118993,24.

2.(6 pontos) Uma análise de riscos apontou os seguintes três riscos para um empreendimento financeiro (descritos resumidamente): $A_1 = \{$cotação do dólar superior a R\$ 3,10 $\}$; $A_2 = \{$estimativa do IPCA superior a 7,5%$\}$ e $A_3 = \{$estimativa do crescimento do PIB Brasileiro inferior a 2,5%$\}$. Admita que os eventos A_1, A_2 e A_3 sejam mutuamente independentes com probabilidades: $P(A_1) = 0,15$, $P(A_2) = 0,08$ e $P(A_3) = 0,05$. Pede-se:

a.(3 pts) Calcule a probabilidade de exatamente dois (somente dois) destes eventos ocorrerem.

Sabemos que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$, então

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j \cap A_k^c) &= P(A_i \cap A_j) - P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\underset{\text{independentes}}{\overset{\text{mutuamente}}{=}} P(A_i)\, P(A_j) - P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k) \end{aligned}$$

Assim se

$$A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$$

então

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)\, P(A_2) + P(A_1)\, P(A_3) + P(A_2)\, P(A_3) - 3P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \\ &= 0,15 \times 0,08 + 0,15 \times 0,05 + 0,08 \times 0,05 - 3 \times 0,15 \times 0,08 \times 0,05 \\ &= 0,012 + 0,0075 + 0,004 - 3 \times 0,0006 \\ &= 0,0235 - 0,0018 = 0,0217 \end{aligned}$$

b.(3 pts) Calcule a probabilidade de pelo menos um destes três eventos ocorrer.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ &= 1 - P(A_1^c)\, P(A_2^c)\, P(A_3^c) \\ &= 1 - 0,85 \times 0,92 \times 0,95 \\ &= 1 - 0,7429 = 0,2571 \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\ &- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 0,15 + 0,08 + 0,05 - 0,012 - 0,0075 - 0,004 + 0,0064 \\ &= 0,28 - 0,0235 + 0,0006 = 0,2571 \end{aligned}$$

3.(6 pontos) Suponha que um site especializado tenha previsto os seguintes finalistas para a copa do mundo de 2014: Brasil(BRA), Espanha(ESP), França(FRA) e Argentina(ARG), portanto a seguinte partição do espaço amostral para o jogo final com as seguintes probabilidades:
P(BRA x ESP)=0,40, P(BRA x ARG)=0,20, P(FRA x ESP)=0,10 e P(FRA x ARG)=0,30. Admita também que o Brasil vença o jogo final contra a Espanha com probabilidade $0,8$ e contra a Argentina com probabilidade 0,70. Nos demais jogos finais admita probabilidade 0,50 de vitória para qualquer um dos dois times. Com base apenas nestas informações, pede-se:

a.(3 pts) A probabilidade condicional do Brasil ser o campeão, dado que a Argentina estará na final.

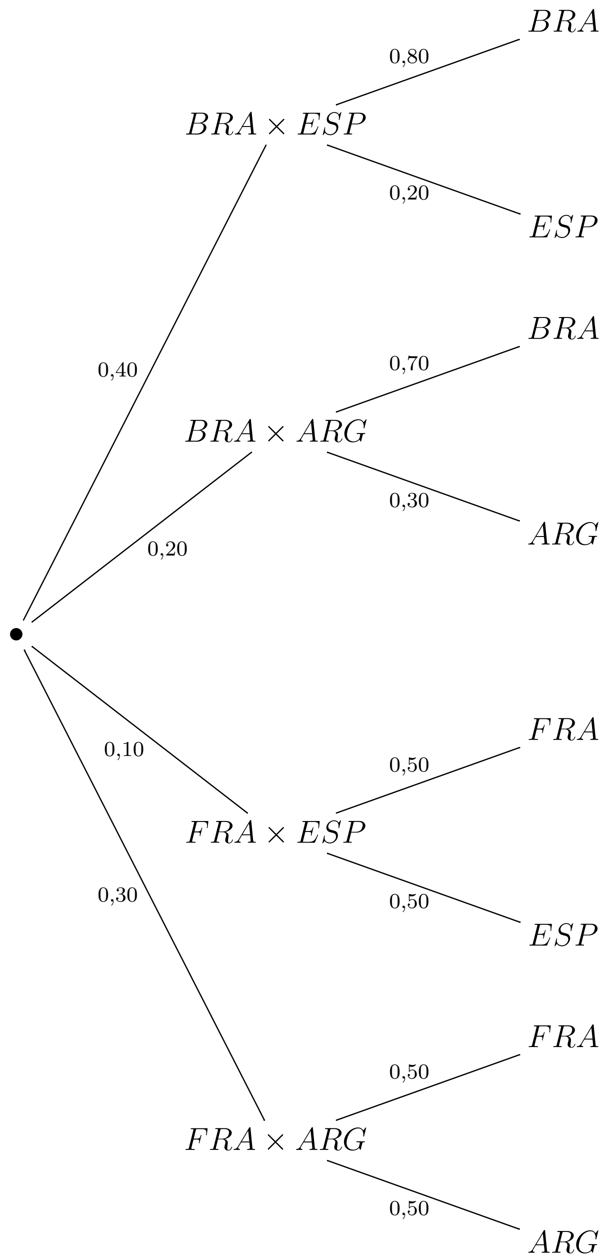
$$P\left(\text{BRA campeão}|\text{ ARG final}\right) = \frac{P\left(\text{BRA campeão} \cap \text{ARG final}\right)}{P\left(\text{ARG final}\right)} = \frac{0,14}{0,50} = 0,28$$

$$\begin{aligned} P\left(\text{BRA campeão} \cap \text{ARG final}\right) &= P\left(\text{final BRA} \times \text{ARG}\right) P\left(\text{BRA vencer ARG final}\right) \\ &= 0,20 \times 0,70 = 0,14 \end{aligned}$$

$$P\left(\text{ARG final}\right) = P\left(\text{BRA} \times \text{ARG}\right) + P\left(\text{FRA} \times \text{ARG}\right) = 0,20 + 0,30 = 0,50$$

b.(3 pts) A probabilidade do Brasil ser o campeão (Dica: faça um diagrama em árvore).
Seja B : "O Brasil é campeão", assim

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\text{BRA campeão}\right) \\ &= P\left(\text{final BRA} \times \text{ESP}\right) P\left(\text{BRA vence ESP}\right) + P\left(\text{final BRA} \times \text{ARG}\right) P\left(\text{BRA vence ARG}\right) \\ &= 0,40 \times 0,80 + 0,20 \times 0,70 \\ &= 0,32 + 0,14 = 0,46 \end{aligned}$$


0,40
0,20
0,10
0,30
$BRA \times ESP$
$BRA \times ARG$
$FRA \times ESP$
$FRA \times ARG$
0,80
0,20
0,70
0,30
0,50
0,50
0,50
0,50
BRA
ESP
BRA
ARG
FRA
ESP
FRA
ARG

4.(6 pontos) Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte distribuição de probabilidades,

X	Y: 1	3	8	$P(x)$
0	0,18	0,12	0,30	0,60
5	0,12	0,08	0,20	0,40
$P(y)$	0,30	0,20	0,50	1,00

Pede-se:

a.(2 pts) Aplique a definição de probabilidade condicional e calcule: $P(X = 5|Y \geq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X = 5|\, Y \geq 3) &= \frac{P(X = 5, Y \geq 3)}{P(Y \geq 3)} = \frac{P(X = 5, Y = 3) + P(X = 5, Y = 8)}{P(Y = 3) + P(Y = 8)} \\ &= \frac{0,08 + 0,20}{0,20 + 0,50} = \frac{0,28}{0,70} = 0,40 = P(X = 5) \end{aligned}$$

b.(2 pts) A probabilidade encontrada no item **a.** é igual a $P(X = 5)$? responda SIM ou NÃO e justifique sua resposta com o conceito de variáveis aleatórias independentes. Sim, pois X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes, haja vista que

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)\,, \ \ \forall x \text{ e } y.$$

c.(2 pts) Se $W = X + Y$, calcule $P(W > 3)$.

$$P(W > 3) = \sum_{x}\sum_{\substack{y \\ x+y>3}} P(x, y) = 0,30 + 0,12 + 0,08 + 0,20 = 0,70$$

ou

$$P(W > 3) = 1 - P(W \leq 3) = 1 - \sum_{x}\sum_{\substack{y \\ x+y\leq 3}} P(x, y) = 1 - 0,18 - 0,12 = 0,70$$

5.(4 pontos) Seja (X, Y) uma variável aleatória (v.a.) contínua bidimensional com a seguinte função densidade de probabilidade conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 0, & \text{para outros valores } x \text{ e } y \end{cases}$$

Pede-se:

a.(2 pts) Calcule o valor k.

Para que $f(x, y)$ seja uma função densidade de probabilidade conjunta devemos ter:

i) $f(x, y) \geq 0$, $\forall$ x e y;

ii) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} kx^2ydxdy = 1$.

De ii) temos:

$$\begin{aligned} 1 &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^3 kx^2ydxdy = k\int_0^1 \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{3} ydy = \frac{k}{3}\int_0^1 \left(3^3 - 0^3\right) ydy = \frac{27k}{3}\int_0^1 ydy \\ &= 9k \times \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{1} = 9k \times \frac{(1^2 - 0^2)}{2} = \frac{9k}{2}. \end{aligned}$$

Assim $\frac{9k}{2} = 1$, logo $k = \frac{2}{9}$.

b.(2 pts) Verifique se X e Y são v.a. contínuas independentes. Responda SIM ou NÃO e justifique sua resposta. Atenção: se não souber o valor de k do item **a.**, indique os cálculos.

Temos que

$$g(x) = \int_0^1 \frac{2}{9}x^2ydy = \frac{2}{9}x^2 \times \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{1} = \frac{2}{9}x^2 \times \frac{(1^2 - 0^2)}{2} = \frac{x^2}{9}$$

e

$$h(y) = \int_0^3 \frac{2}{9}x^2ydx = \frac{2}{9}y \times \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{3} = \frac{2}{9}y \times \frac{(3^3 - 0^3)}{3} = \frac{2 \times 27}{27}y = 2y$$

Assim

$$g(x)\,h(y) = \frac{x^2}{9} \times 2y = \frac{2}{9}x^2y = f(x,y),$$

logo X e Y são variáveis aleatórias independentes.