UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 1^0 semestre de 2017 - 1/abr/17

Nome: ____________________________________ **Matrícula:**____________________

Assinatura: ______________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: Assinale (X) em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
-------------------------------------------------------------------------
      TURMA    HORÁRIO         SALA   PROFESSOR
-------------------------------------------------------------------------
(   )   T1 3ª 8-10   5ª 10-12  PVB300 Cecon
(   )   T2 3ª 10-12 6ª 8-10    PVB109 Moysés
(   )   T3 3ª 14-16 5ª 16-18  PVB109 Camila/Carol
(   )   T4 2ª 14-16 4ª 16-18  PVB107 Carol
(   )   T5 3ª 20:30-22:10  6ª 18:30-20:10  PVB204 Eduardo
(   )   T6 4ª 14-16 6ª 16-18  PVA361  CHOS - coordenador
(   )   T7 2ª 16-18 5ª 14-16 PVB307 Camila
(   )   T10 2ª 18:30-20:10 4ª 20:30-22:10 PVA361 Eduardo
(   )   T20=EST085 T1 2ª 16 PVA134,T2 2ª 18:30 PVA348(Leísa, monitor II)
-------------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md_X = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md_X = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i = b_0 + b_1 X_i \qquad b_1 = \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY}\frac{S_Y}{S_X} \qquad b_0 = \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(4 pontos) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

utilize as propriedades de somatório e calcule: $\displaystyle\sum_{i=20}^{60} (i-2)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=20}^{60} (i-2)^2 &= \sum_{i=20}^{60} \left(i^2 - 4i + 4\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{60} i^2 - \sum_{i=1}^{19} i^2\right) - 4\left(\sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{19} i\right) + [(60-20)+1] \times 4 \\
&= \left(\frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}\right) - 4\left(\frac{60 \cdot 61}{2} - \frac{19 \cdot 20}{2}\right) + 164 \\
&= (73810 - 2470) - 4\,(1830 - 190) + 164 \\
&= 71340 - 6560 + 164 = 64944
\end{aligned}$$

Ou

Fazendo-se $k = i - 2$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=20}^{60} (i-2)^2 &= \sum_{k=18}^{58} k^2 = \sum_{k=1}^{58} k^2 - \sum_{k=1}^{17} k^2 = \frac{58 \cdot 59 \cdot 117}{6} - \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} \\
&= 66729 - 1785 = 64944
\end{aligned}$$

2.(4 pontos) Dado que T_x, T_y e T_z são os totais dos somatórios dos valores X_i, Y_j e Z_k respectivamente,

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 10,30,50}}^{200} X_i = T_x, \qquad \sum_{j=1}^{50} Y_j = T_y \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=5}^{35} Z_k = T_z,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule (resposta dependerá de T_x, T_y e T_z):

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 10,30,50}}^{200} \sum_{j=1}^{50} \sum_{k=5}^{35} \left[(X_i - 2)(Y_j + 1) + Z_k\right].$$

Seja $A = \sum_i \sum_j \sum_k (X_iY_j + X_i - 2Y_j - 2 + Z_k)$

Número de termos dos somatórios:

$$\begin{aligned} NT_i &= (200-1)+1-3 = 197 \\ NT_j &= (50-1)+1 = 50 \\ NT_k &= (35-5)+1 = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \sum_j \sum_k (X_iY_j + X_i - 2Y_j - 2 + Z_k) \\ &= 31\sum X \sum Y + 50\cdot 31 \sum X - 2\cdot 197\cdot 31 \sum Y - 2\cdot 197\cdot 50\cdot 31 + 50\cdot 197 \sum Z \\ &= 31T_xT_y + 1550T_x - 12214T_y - 610700 + 9850T_z \end{aligned}$$

3.(8 pontos) A vacina contra a febre amarela (17DD) é elaborada com o vírus vivo atenuado e é aplicada por via subcutânea na região deltóidea (braço), pelo menos, dez dias antes de qualquer viagem para áreas de risco, no Brasil ou no exterior. Em 95% das pessoas o efeito protetor (imunidade) ocorre uma semana após a aplicação e confere imunidade por, pelo menos, 10 anos. Na tabela abaixo são informados o número de pessoas vacinadas por data , nas últimas 8 datas em que a vacina foi oferecida, no mês de março de 2017, na sala de imunizações da Policlínica do Centro (PCC) e no Posto de Saúde da Família do bairro João Braz (PSF).

	Número de pessoas vacinadas por data							
Data da Vacinação	6/3	10/3	13/3	17/3	20/3	24/3	27/3	31/3
Número na PCC	25	18	30	12	15	90	20	43
Número na PSF	15	10	40	32	18	70	10	23

a.(2 pts) O número médio de vacinados na PCC.

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{253}{8} = 31,625 \cong 31,6 \cong 32$ pessoas por data.

b.(2 pts) O número mediano de vacinados na PSF.

$X_{(i)} = \{10; 10; 15; 18; 23; 32; 40; 70\}$, então $n = 8$.

$$Md_X = \frac{X_{(4)} + X_{(5)}}{2} = \frac{18 + 23}{2} = 20,5$$

c.(4 pts) Qual amostra, PCC ou PSF, é a mais homogênea? Justifique.

$$S_{\text{PCC}} = \sqrt{\frac{12567 - \frac{253^2}{8}}{8 - 1}} \cong 25,54$$

$$\bar{X}_{\text{PCC}} \cong 31,6$$

Assim $\text{CV}_{\text{PCC}}\,(\%) \cong 80,7\%$

$$S_{\text{PSF}} = \sqrt{\frac{8802 - \frac{218^2}{8}}{8 - 1}} \cong 20,22$$

$$\bar{X}_{\text{PSF}} = \frac{218}{8} \cong 27,3$$

Logo $\text{CV}_{\text{PSF}}\,(\%) \cong 74,2\%$

Desta maneira a amostra PSF é mais homogênea por apresentar menor coeficiente de variação.

4.(10 pontos) Frutos de pepino para produção de pickles são conservados com uma fermentação inicial em uma salmoura com uma concentração baixa de cloreto de sódio (6 a 9%) e posteriormente são utilizados para a produção de pickles. A tabela a seguir apresenta valores da firmeza dos pickles (Y, em libras) em função do número de semanas (X, número de semanas) que os frutos de pepino são estocados na salmoura. (Fonte: Arkansas Farm Research 30(4), 1981 - apresentado em Mathematical Statistics with Applications, 7^{th} ed., Wackerly, Mendenhall e Schaeffer, 2008.)

i	1	2	3	4	5
X_i	0	5	15	30	50
Y_i	19.8	16.5	12.8	8.1	7.5

Pede-se:

a.(1 pt) A equação de regressão linear simples (RLS) ajustada.

$\sum X = 100 \quad \sum X^2 = 3650 \quad \sum Y = 64,7 \quad \sum Y^2 = 949,99 \quad \sum XY = 892,5$

$$b_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = \frac{892,5 - \frac{100 \cdot 64,7}{5}}{3650 - \frac{100^2}{5}} = -\frac{401,50}{1650} \cong -0,243$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X} = \frac{64,7}{5} - (-0,243) \cdot \frac{100}{5} \cong 17,80$$

$\widehat{Y}_i = 17,8 - 0,243X_i$ (Na calculadora direto obterá $\widehat{Y}_i = 17,81 - 0,243X_i$)

b.(2 pts) Interprete a estimativa da constante do modelo de regressão (coeficiente linear da reta).

$b_0 = 17,80$ é uma estimativa da firmeza média dos pickles (libras) para os pepinos não estocados na salmoura ($X = 0$ semanas).

c.(2 pts) Interprete a estimativa do coeficiente do modelo de regressão (coeficiente angular da reta).

$b_1 = -0,243$ é a redução média estimada na firmeza para cada uma semana de estocagem na salmoura.

d.(2 pt) Estime a firmeza média dos pickles estocados por 15 semanas na salmoura e também calcule o respectivo desvio da regressão.

$\widehat{Y}_{15} = 17,8 - 0,243 \cdot 15 \cong 14,16$ (função $\widehat{Y}$ da calculadora)

$\widehat{\varepsilon}_{15} = Y_{15} - \widehat{Y}_{15} = 12,8 - 14,16 \cong -1,36$ libras é o desvio.

e.(1 pt) Calcule o coeficiente de correlação entre as duas variáveis.

$r_{XY} = -0,9308$ (direto na calculadora).

f.(2 pts) Calcule e interprete o coeficiente de determinação do modelo de RLS ajustado, apresentado no item **a.**.

$r^2\,(\%) = (r_{XY})^2 \times 100\% \cong 86,6\%$ é o percentual da variabilidade observada nos valores da firmeza dos pickles que foram "explicadas" pela regressão linear simples nos valores dos números de semanas de estocagem na salmoura.

5.(4 pontos) Pede-se:

a.(2 pts) Calcule a média harmônica dos seguintes valores: $\{40, 60, 90\}$.

$$\bar{X}_H = \frac{3}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90}} \cong 56,84$$

b.(2 pts) Calcule a média geométrica dos seguintes valores: $\{2, 2, 2, 8, 8, 12\}$.

$$\bar{X}_G = \sqrt[6]{2^3 \cdot 8^2 \cdot 12^1} \cong 4,28$$