

UFV- CCE - DET
EST 105 - 3ª avaliação (UPI) - 1º/2022 - 30/7/22

Nome: _____ Matrícula: _____

Assinatura: _____. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões, formulário e tabelas em páginas numeradas de 1 a 9, total de 40 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir, assinale (X), em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

TURMA	HORÁRIO e SALA	PROFESSOR

() T1	- 3ª 8-10 e 5ª 10-12 PVB 300	- Paulo Cecon
() T2	- 3ª 10-12 e 6ª 8-10 PVB 104	- Carlos Henrique(chos)
() T3	- 3ª 14-16 e 5ª 16-18 PVB 100	- Ana Carolina
() T4	- 2ª 14-16 PVB 102 e 4ª 16-18 PVB 106	- Moysés
() T5	- 3ª 20:30-22:10 e 6ª 18:30-20:10 PVB 203	- Eduardo
() T6	- 4ª 14-16 e 6ª 16-18 PVA 361	- Camila/Ana Carolina
() T7	- 2ª 16-18 e 5ª 14-16 PVB 307	- Camila
() T8	- 2ª 18:30-20:10 e 20:30-22:10 PVA 361	- Eduardo
() T9	- 2ª 16-18 e 5ª 14-16 PVA 353	- Antônio Policarpo

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão. Recomenda-se apresentar as fórmulas e os respectivos valores utilizados nos cálculos.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!

FORMULÁRIO

Para $k = 1, 2, \dots, n < \infty$ $E(X^k) = \sum_x x^k P(x)$ ou $E(X^k) = \int x^k f(x) dx$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy P(x, y) \quad \text{ou} \quad E(XY) = \int \int xy f(x, y) dx dy$$

$$COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y), \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para a, b e c constantes finitas, X, Y e Z variáveis aleatórias,

$$\begin{aligned} E(aX \pm bY \pm c) &= aE(X) \pm bE(Y) \pm c \\ V(aX \pm bY \pm c) &= a^2V(X) + b^2V(Y) \pm 2abCOV(X, Y) \\ COV(aX, bY) &= abCOV(X, Y) \\ COV(X \pm Y, Z) &= COV(X, Z) \pm COV(Y, Z) \end{aligned}$$

$$P(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \quad E(X) = Np \quad V(X) = Np(1-p) \quad \binom{N}{x} = \frac{N!}{x!(N-x)!}$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \quad E(X) = V(X) = m$$

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \implies Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \implies Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\chi^2_\nu = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad E_{ij} = \frac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{n_{..}} \quad \nu = (h-1)(k-1)$$

Tabela 1: Áreas de uma distribuição normal padrão entre $z=0$ e um valor positivo de z .
As áreas para os valores de z negativos são obtidas por simetria.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4006	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Adaptada de Costa Neto, P. L. O. Estatística, Editora Edgard Blucher.

Tabela 2: Valores χ^2 na distribuição de qui-quadrado com n graus de liberdade tais que $P(\chi_n^2 \geq \chi^2) = p \times 100\%$.

n	p=99%	98%	97,5%	95%	90%	80%	70%	50%	30%	20%	10%	5%	4%	2,5%	2%	1%	0,2%	0,1%	n
1	0,0 ³ 16	0,0 ³ 63	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	4,218	5,024	5,412	6,635	9,550	10,827	1
2	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	6,438	7,378	7,824	9,210	12,429	13,815	2
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	8,311	9,348	9,837	11,345	14,796	16,266	3
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	10,026	11,143	11,668	13,277	16,924	18,467	4
5	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	11,644	12,832	13,388	15,086	18,907	20,515	5
6	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	13,198	14,449	15,033	16,812	20,791	22,457	6
7	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	14,703	16,013	16,622	18,475	22,601	24,322	7
8	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	16,171	17,534	18,168	20,090	24,352	26,125	8
9	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	17,608	19,023	19,679	21,666	26,056	27,877	9
10	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	19,021	20,483	21,161	23,209	27,722	29,588	10
11	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	20,412	21,920	22,618	24,725	29,354	31,264	11
12	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	21,785	23,337	24,054	26,217	30,957	32,909	12
13	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	23,142	24,736	25,472	27,688	32,535	34,528	13
14	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	24,485	26,119	26,873	29,141	34,091	36,123	14
15	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	25,816	27,488	28,259	30,578	35,628	37,697	15
16	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	27,136	28,845	29,633	32,000	37,146	39,252	16
17	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	28,445	30,191	30,995	33,409	38,648	40,790	17
18	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	29,745	31,526	32,346	34,805	40,136	42,312	18
19	7,633	8,567	8,906	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	31,037	32,852	33,687	36,191	41,610	43,820	19
20	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	32,321	34,170	35,020	37,566	43,072	45,315	20
21	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	33,597	35,479	36,343	38,932	44,522	46,797	21
22	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	34,867	36,781	37,659	40,289	45,962	48,268	22
23	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	36,131	38,076	38,968	41,638	47,391	49,728	23
24	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	37,389	39,364	40,270	42,980	48,812	51,179	24
25	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	38,642	40,646	41,566	44,314	50,223	52,620	25
26	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	39,889	41,923	42,856	45,642	51,627	54,052	26
27	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	41,132	43,194	44,140	46,963	53,022	55,476	27
28	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,319	34,027	37,916	41,337	42,370	44,461	45,419	48,278	54,411	56,893	28
29	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	43,604	45,722	46,693	49,588	55,792	58,302	29
30	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	44,834	46,979	47,962	50,892	57,167	59,703	30
n	p=99%	98%	97,5%	95%	90%	80%	70%	50%	30%	20%	10%	5%	4%	2,5%	2%	1%	0,2%	0,1%	n

Adaptada de Bussab, W. O. e Morettin, P. A. Estatística Básica - Métodos Quantitativos, Editora Atual.

1.(6 pts) Sejam X, Y, Z e W variáveis aleatórias tais que,

$$E(X) = 1,2 \quad E(Y) = 2,2 \quad E(Z) = 0,75 \quad E(W) = 1,1$$

$$V(X) = 3,36 \quad V(Y) = 0,96 \quad V(Z) = 0,1875 \quad V(W) = 0,99$$

$$COV(X, Y) = 0,16 \quad COV(Z, W) = 0,175$$

$$COV(X, W) = COV(X, Z) = COV(Y, W) = COV(Y, Z) = 0$$

Utilize as propriedades do valor esperado, da variância e da covariância para calcular:

a.(2 pts) $COV(X + Z, Y + W)$.

$$\begin{aligned} &= COV(X, Y) + COV(X, W) + COV(Z, Y) + COV(Z, W) \\ &= 0,16 + 0 + 0 + 0,175 \\ &= 0,335 \end{aligned}$$

b.(2 pts) $COV(2X, -3Y)$.

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot (-3)COV(X, Y) \\ &= -6 \cdot 0,16 \\ &= -0,96 \end{aligned}$$

c.(2 pts) $V(5W - 6Z + 2)$.

$$\begin{aligned} &= 5^2V(W) + (-6)^2V(Z) + 2 \cdot 5 \cdot (-6)COV(W, Z) \\ &= 25 \cdot 0,99 + 36 \cdot 0,1875 - 60 \cdot 0,175 \\ &= 24,75 + 6,75 - 10,50 \\ &= 21 \end{aligned}$$

2.(4 pts) Um elevador possui o seguinte aviso: Capacidade máxima de 9 pessoas ou 630 kg de carga. Admita que os pesos das pessoas que entram no elevador sejam variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média $\mu = 62,8$ kg e desvio padrão $\sigma = 9$ kg. Pede-se: Utilize o teorema da combinação linear para calcular a probabilidade de haver sobrecarga (carga exceder 630 kg), quando uma amostra aleatória de 9 pessoas está no elevador.

Seja $W = \text{Carga (Peso total)}$, então:

$$W = \sum_{i=1}^9 X_i \quad \therefore X_i \sim N(\mu = 62,8; \sigma^2 = 9^2)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{i=1}^9 E(X_i) = 9 \cdot 62,8 = 565,2 \\ V(W) &= \sum_{i=1}^9 V(X_i) = 9 \cdot 9^2 = 729 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(\text{Sobrecarga}) &= P(W \geq 630) \\ &= P\left(Z \geq \frac{630 - 565,20}{\sqrt{729}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{64,8}{27} \cong 2,40 \cong 2,44\right) \\ &= 0,5 - 0,4927 = 0,0073 \end{aligned}$$

3.(10 pts) Admita que com probabilidade $p = 0,01$ uma tempestade que se aproxima será um evento com severas inundações, equivalente a um evento que ocorre em média uma vez a cada 100 anos, evento denominado de *one-hundred-year flood (100YF)* em inglês, ou simplesmente evento 100YF, um conceito importante utilizado na engenharia de rios para definir medidas a serem tomadas no controle de inundações. Considere que N tempestades serão monitoradas num período de tempo, pede-se: Calcule a probabilidade de ocorrerem 3 ou mais eventos 100YF quando $N = 300$.

a.(5 pts) Utilize o modelo binomial.

Sendo $X = \text{n}^\circ \text{ eventos } 100 > F \sim \text{Binomial } (N = 300, p = 0,01)$, então:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - \binom{300}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^{300} - \binom{300}{1} \cdot 0,01^1 \cdot 0,99^{299} \\ &\quad - \binom{300}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{298} \\ &= 1 - 0,0490 - 0,1486 - 0,2244 \\ &\cong 0,578 \end{aligned}$$

b.(5 pts) Utilize o modelo Poisson.

Sendo $X \sim \text{Poisson } (m = Np = 3)$, então:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - e^{-m} \left(\frac{m^0}{0!} + \frac{m^1}{1!} + \frac{m^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-3} \cdot \frac{17}{2} \cong 1 - 0,4232 \cong 0,577 \end{aligned}$$

4.(10 pts) Um fabricante informa que o peso médio de um rolo de papel é $\mu = 300$ kg, com desvio padrão $\sigma = 12$ kg. Suspeita-se que o peso médio informado pelo fabricante não esteja correto, e, para testar esta hipótese tomou-se uma amostra aleatória de $n = 36$ rolos que forneceu peso médio $\bar{X} = 296,48$ kg. Pede-se: Realize um teste de hipóteses **bilateral** conforme os itens a seguir:

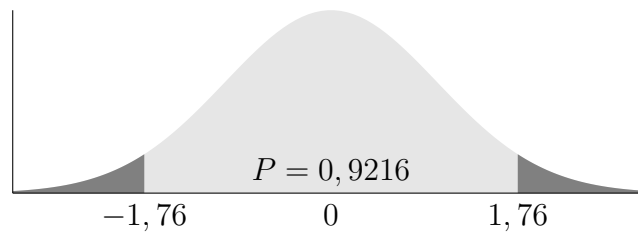
a. (2 pts) Hipóteses estatísticas.

$$H_0 : \mu = 300 \text{ e } H_1 : \mu \neq 300.$$

b. (2 pts) Valor calculado.

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{296,48 - 300}{\frac{12}{\sqrt{36}}} = \frac{-3,52}{2} = -1,76$$

c. (3 pts) Valor- p , **faça um desenho ilustrativo.**



Sendo $P(0 \leq Z \leq 1,76) = 0,4608$, então:

$$\begin{aligned} \text{valor} - p &= 2 \cdot (0,5 - 0,4608) = 2 \cdot 0,0392 \\ &= 0,0784 \end{aligned}$$

d. (3 pts) Decisão e interpretação prática para os níveis de significância 5% e 10%.

Se $\alpha = 0,05$: então $p - \text{valor} > \alpha$ e deve-se não rejeitar a hipótese nula e admitir que a informação do fabricante como correta.

Se $\alpha = 0,10$: então $p - \text{valor} < \alpha$ e deve-se rejeitar a hipótese nula e admitir que a informação do fabricante como incorreta.

5.(10 pts) Um estudo foi realizado com 200 jogadores de video games (jogos de computador) para se avaliar diversos fatores que motivam o jogador a comprar novos jogos e/ou novas versões do mesmo jogo. Dentre as perguntas realizadas, uma delas era a seguinte afirmação: *Eu adquiro um novo jogo ou uma nova versão do jogo quando o meu score no jogo não melhora*. Os respondentes foram classificados em jogadores frequentes (jogam 5 vezes ou mais por semana) e não frequentes (jogam menos do que 2 vezes por semana); sendo as respostas classificadas em concorda com a afirmação ou não concorda. Os dados estão sumarizados na tabela a seguir.

Tipo de jogador	Classificação da resposta		
	Concorda	Não concorda	Total
Frequente	81/71,5	19/28,5	100
Não frequente	62/71,5	38/28,5	100
Total	143	57	200

Pede-se: adote 5% como nível de significância e realize um teste de qui-quadrado conforme os itens a seguir.

a.(2 pts) Hipóteses estatísticas.

H_0 : tipo de jogador e classificação da resposta são independentes.

H_1 : tipo de jogador e classificação da resposta não são independentes.

b.(2 pts) Valor tabelado.

$$\chi^2_{(5\%;1)} = 3,841$$

c.(4 pts) Valor Calculado.

$$\begin{aligned}
 \chi^2_0 &= \frac{(81 - 71,5)^2}{71,5} + \frac{(19 - 28,5)^2}{28,5} + \frac{(62 - 71,5)^2}{71,5} + \frac{(38 - 28,5)^2}{28,5} \\
 &= 1,262 + 3,167 + 1,262 + 3,167 \\
 &\cong 8,858
 \end{aligned}$$

d.(2 pts) Decisão do teste e interpretação prática.

Rejeitar H_0 . Considerar que tipo de jogador e classificação da resposta não são independentes.