UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 2^0 semestre de 2013 - 30/nov/13

Nome: ________________________________ **Matrícula:**________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões, em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, **FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR**.
- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se assinalar a resposta correta nas questões de múltipla escolha e não apresentar os cálculos ou se apresentar valores incorretos utilizados nos cálculos.
- ATENÇÃO: Sua nota será divulgada no sistema SAPIENS: informe a seguir em qual turma está matriculado.

```
---------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
---------------------------------------------------
T1 2ª 10-12 5ª 08-10 PVB310 Ana Carolina
---------------------------------------------------
T2 2ª 16-18 5ª 14-16 PVB310 Ana Carolina
---------------------------------------------------
T3 2ª 08-10 4ª 10-12 PVB310 Moyses
---------------------------------------------------
T4 3ª 10-12 6ª 08-10 PVB310 Paulo Cecon
---------------------------------------------------
T5 3ª  16-18 6ª  14-16 PVB310 Policarpo
---------------------------------------------------
T7 4ª 08-10 6ª 10-12 PVB206 Moyses
---------------------------------------------------
T8 4ª 18:30-20:10 6ª 20:30-22:10 PVB306 Paulo Emiliano
---------------------------------------------------
T9 3ª 14-16 5ª 16-18 PVB310 CHOS (coordenador)
---------------------------------------------------
T10 4ª 14-16 6ª 16-18 PVB107 CHOS
---------------------------------------------------
T20 -  Tutoria Especial  - Janeo (monitor II)
---------------------------------------------------
```

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{e} \quad P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\ dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n < \infty$ $\quad E(X^k) = \sum_x x^k P(x)$ ou $E(X^k) = \int x^k f(x) dx$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(x,y) \quad \text{ou} \quad E(XY) = \int \int xyf(x,y)dxdy$$

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y), \qquad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

1.(6 pontos) Cinco pessoas $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ e A_5 participam de um torneio de Poker que premiará uma única pessoa como campeã. Quanto às probabilidades de cada pessoa ser a campeã: $P(A_i) = \dfrac{2 \times i}{30}$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Pede-se: qual é a probabilidade de que A_1 ou A_2 ou A_3 sejam campeãs?

a.( ) $0,25$

b.( ) $0,20$

c.( ) $0,30$

d.( ) $0,60$

e.( ) n.d.r.a. (nenhuma das respostas anteriores)

Solução: $P\left[A_1 \cup A_2 \cup A_3\right] =?$
Temos que os eventos A_1, A_2 e A_3 são mutuamente exclusivos, assim

$$\begin{aligned} P\left[A_1 \cup A_2 \cup A_3\right] &= P\left[A_1\right] + P\left[A_2\right] + P\left[A_3\right] \\ &= \frac{2}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} \\ &= \frac{12}{30} = 0,40 \end{aligned}$$

Desta forma a resposta correta é a letra **e**, isto é, n.d.r.a. (nenhuma das respostas anteriores).

2.(6 pontos) No site globoesporte.com (acessado em 25/11/2013 as 18:15h) foram informadas as probabilidades de rebaixamento (PROB) para a Série B em 2014, para três times da Série A do Campeonato Brasileiro de 2013. Os cálculos foram realizados pelo matemático Oswald de Souza.

PROB	33%	49%	67%
Times	Fluminense	Coritiba	Vasco (✠)

Admita que o rebaixamento de cada um destes três times sejam **eventos mutuamente independentes**. Pede-se: qual é a probabilidade de rebaixamento de exatamente dois (dois e somente dois) destes times?

a.( ) $\approx 38,61\%$

b.( ) $\approx 10,83\%$

c.( ) $\approx 71,64\%$

d.( ) $\approx 60,81\%$

e.( ) n.d.r.a.

Solução: Sejam
F :"A equipe do Fluminense é rebaixada"
C :"A equipe do Coritiba é rebaixada"
V :"A equipe do Vasco é rebaixada"

Temos que $P[F] = 0,33$, $P[C] = 0,49$, $P[V] = 0,67$ e queremos determinar

$$P\left[\left(F \cap C \cap \overline{V}\right) \cup \left(F \cap \overline{C} \cap V\right) \cup \left(\overline{F} \cap C \cap V\right)\right] = ?$$

Os eventos $\left(F \cap C \cap \overline{V}\right)$, $\left(F \cap \overline{C} \cap V\right)$ e $\left(\overline{F} \cap C \cap V\right)$ são mutuamente excludentes, e assim se $A = \left(F \cap C \cap \overline{V}\right) \cup \left(F \cap \overline{C} \cap V\right) \cup \left(\overline{F} \cap C \cap V\right)$ então:

$$\begin{aligned}
P[A] &= P\left[F \cap C \cap \overline{V}\right] + P\left[F \cap \overline{C} \cap V\right] + P\left[\overline{F} \cap C \cap V\right] \\
&= P[F \cap C] - P[F \cap C \cap V] + P[F \cap V] - P[F \cap C \cap V] + P[C \cap V] - P[F \cap C \cap V] \\
&= P[F \cap C] + P[F \cap V] + P[C \cap V] - 3P[F \cap C \cap V] \\
&= 0,33 \times 0,49 + 0,33 \times 0,67 + 0,49 \times 0,67 - 3 \times 0,33 \times 0,49 \times 0,67 \\
&= \underbrace{0,1617 + 0,2211 + 0,3286}_{0,7111} - 3 \times 0,108339 \\
&= 0,7111 - 0,325017 \\
&= 0,386083 (\cong 38,61\%)
\end{aligned}$$

Desta forma a resposta correta é a letra **a**.

3.(6 pontos) Considere o seguinte jogo de azar: o jogador paga R\$ X (valor que não é devolvido) e depois aleatoriamente escolhe uma dentre três moedas idênticas, sendo uma delas viciada. A moeda escolhida é então lançada, e, se mostrar a face cara, o jogador não recebe nenhum prêmio; se mostrar a face coroa, ele recebe um prêmio de R\$ 24. Admita que a moeda viciada mostre a face cara com probabilidade igual a 0,75 (ou 3/4). Pede-se:

3.a.(3 pts) se a moeda mostrou a face cara, qual é a probabilidade condicional de que a moeda lançada tenha sido a viciada?

a.( ) $\frac{4}{7}$

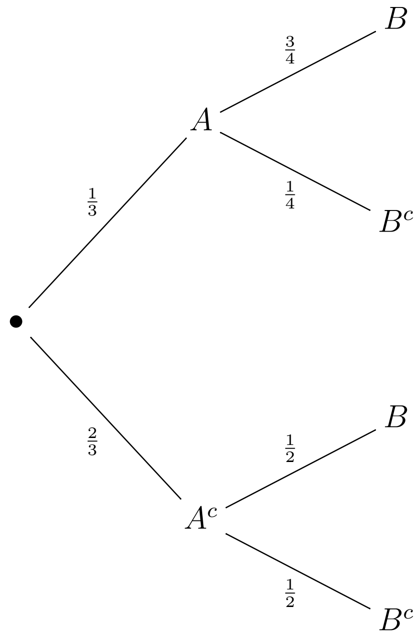
b.( ) $\frac{7}{12}$

c.( ) $\frac{1}{4}$

d.( ) $\frac{3}{7}$

e.( ) n.d.r.a.

Solução: Sejam A:"A moeda é viciada" e B:"A face mostrada é cara". Temos que $P[A] = \frac{1}{3}$, $P[A^c] = \frac{2}{3}$, $P[B|A] = \frac{3}{4}$, $P[B^c|A] = \frac{1}{4}$, $P[B|A^c] = \frac{1}{2}$, $P[B^c|A^c] = \frac{1}{2}$, conforme mostrado no diagrama de árvore abaixo:



$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B|A]\,P[A]}{P[B|A]\,P[A] + P[B|A^c]\,P[A^c]} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

Desta forma a resposta correta é a letra **d**.

3.b.(3 pts) qual deve ser o valor pago pelo jogador para que este jogo seja justo? isto é, para que o valor esperado (recebido pelo jogador ou pelo organizador do jogo) seja igual a zero.

a.( ) $\approx$ R\$ 17,143

b.( ) R\$ 10

c.( ) R\$ 14

d.( ) $\approx$ R\$ 12,35

e.( ) n.d.r.a.

Solução: Seja X o valor recebido pelo jogador. Então

Face	B	B^c	Total
$P[X=x]$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	1
x	0	24	

$$E(X) = \sum_x xP(X=x) = 0 \times \frac{7}{12} + 24 \times \frac{5}{12} = \frac{120}{12} = 10$$

Desta forma o valor médio recebido é de R\$10,00 e, assim sendo, o jogador deve pagar R\$10,00 para que o jogo seja justo, sendo a resposta correta a letra **b**.

4.(6 pontos) Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{c} & , \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{outros valores } x \end{cases}$$

Pede-se: O valor de c é igual a,

a.( ) 27

b.( ) 81

c.( ) 26

d.( ) 9

e.( ) n.d.r.a.

Solução: Para que f seja uma função densidade de probabilidade devemos ter

i) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Assim

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{3} \frac{3}{c}x^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx \\ &= 0 + \frac{3}{c}\int_{1}^{3} x^2dx + 0 = \frac{3}{c}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{3} \\ &= \frac{1}{c}\left(3^3 - 1^3\right) = \frac{26}{c} \end{aligned}$$

Assim $1 = \dfrac{26}{c}$, logo $c = 26$.

Desta forma a resposta correta é a letra **c**.

5.(6 pontos) Considere a distribuição conjunta de probabilidades a seguir.

X \ Y	2	4	
0	0,32	0,08	
1	0,48	0,12	

Pede-se:

5.a.(3 pts) X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes? justifique.

Solução:

$$\begin{aligned}
P\left[X=0;Y=2\right] &= 0,32 = 0,40 \times 0,80 = P\left[X=0\right]P\left[Y=2\right]\\
P\left[X=0;Y=4\right] &= 0,08 = 0,40 \times 0,20 = P\left[X=0\right]P\left[Y=4\right]\\
P\left[X=1;Y=2\right] &= 0,48 = 0,60 \times 0,80 = P\left[X=1\right]P\left[Y=2\right]\\
P\left[X=1;Y=4\right] &= 0,12 = 0,60 \times 0,20 = P\left[X=1\right]P\left[Y=4\right]
\end{aligned}$$

Desta forma, como $P\left[X=x;Y=y\right] = P\left[X=x\right]P\left[Y=y\right]$, $\forall\,(x,y)$ temos que X e Y são independentes.

5.b.(3 pts) Seja $W = X+Y$, calcule $V(W)$.

a.( ) $0,88$

b.( ) $0,24$

c.( ) $0,72$

d.( ) $0,64$

e.( ) n.d.r.a.

Solução:

w	2	3	4	5	Total
$P[W=w]$	0,32	0,48	0,08	0,12	1,00

$P(W=w) = \sum_x \sum_y P(x,y)$, $w = x+y$.

$$E(W) = \sum_w wP(w) = 2\times 0,32 + 3\times 0,48 + 4\times 0,08 + 5\times 0,12 = 3$$

$$E(W^2) = \sum_w wP(w) = 2^2\times 0,32 + 3^2\times 0,48 + 4^2\times 0,08 + 5^2\times 0,12 = 9,88$$

$$V(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = 9,88 - 3^2 = 0,88$$

Ou

$E[X] = 0,60,$ $E[X^2] = 0,60,$ $V[X] = 0,60 - 0,36 = 0,24,$

$E[Y] = 2,40,$ $E[Y^2] = 6,40,$ $V[Y] = 6,40 - 5,76 = 0,64,$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) - 2\underbrace{Cov(X,Y)}_{0} = 0,24 + 0,68 = 0,88$$

Desta forma a resposta correta é a letra **a**.