UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 2^0 semestre de 2018 - 15/set/18

Nome: ______________________________ **Matrícula:**______________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 9, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: Assinale (X) em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
---------------------------------------------------------------------
     TURMA       HORÁRIO               SALA    PROFESSOR
---------------------------------------------------------------------
(   ) T1 2ª 10-12      5ª 8-10         PVB310  Moysés
(   ) T2 2ª 16-18      5ª 14-16        PVB310  Eduardo
(   ) T3 2ª 8-10 PVB109  4ª 10-12      PVB208  Paulo Emiliano
(   ) T4 3ª 10-12PVB109  6ª 8-10       PVB207  Roberta
(   ) T5 3ª 16-18    6ª 14-16          PVB310  Camila
(   ) T6 2ª 14-16    4ª 16-18          PVB107  Roberta
(   ) T7 4ª  8-10     6ª 10-12         PVB206  CHOS - coordenador
(   ) T8 4ª 18:30-20:10 6ª 20:30-22:10 PVB210  Roberta
(   ) T9 3ª 10-12 PVB300 6ª 8-10       PVB307  Paulo Cecon
(   ) T10 4ª  14-16 6ª 16-18           PVB107  Leísa
(   ) T20 = EST085 T1 2ª 14-16 PVA284 T2 2ª 18:30-20:10 PVA388 Leísa
---------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md_X = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md_X = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \ SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i = b_0 + b_1 X_i \qquad b_1 = \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad b_0 = \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(3 pontos) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

utilize as propriedades de somatório e calcule:

$$\sum_{k=4}^{20} \frac{k^3}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} (k+2)^2$$

Seja $\sum_{k=4}^{20} \frac{k^3}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} (k+2)^2$. Temos que $\mathrm{NT}_2 = 10 - 1 + 1 - 1 = 9$, assim

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{20} k^3 - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} \left(k^2 + 2\cdot k\cdot 2 + 2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=4}^{20} k^3 + \sum_{k=1}^{3} k^3 - \sum_{k=1}^{3} k^3\right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} k^2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} 4k - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} 4 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{3} k^3\right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} k^2 - 3^2 + 3^2 - 4\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{10} k - 3 + 3\right) - 9\cdot 4 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{3} k^3\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2 + 3^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{10} k - 3\right) - 36 \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{20\,(20+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\,(3+1)}{2}\right)^2\right) - \frac{10\,(10+1)\,(2\cdot 10+1)}{6} \\
&+ 9 - 4\left(\frac{10\,(10+1)}{2} - 3\right) - 36 \\
&= \frac{1}{2}(44100 - 36) - 385 + 9 - 4\,(55-3) - 36 \\
&= \frac{1}{2}(44064) - 376 - 4\,(52) - 36 = 22032 - 376 - 208 - 36 \\
&= 21412
\end{aligned}$$

2.(3 pontos) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{10} Z_k = 60 \qquad \sum_{j=5}^{40} Y_j = 150 \qquad \sum_{j=5}^{40} Y_j^2 = 425 \qquad \sum_{i=1}^{50} X_i = 120 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{50} X_i^2 = 650,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule:

$$\sum_{k=1}^{10}\sum_{j=5}^{40}\sum_{i=1}^{50}\left(X_iY_jZ_k - X_i^2 + Y_j^2\right).$$

$$\mathrm{NT}_k = 10 - 1 + 1 - 0 = 10$$
$$\mathrm{NT}_j = 40 - 5 + 1 - 0 = 36$$
$$\mathrm{NT}_i = 50 - 1 + 1 - 0 = 50$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10}\sum_{j=5}^{40}\sum_{i=1}^{50}\left(X_iY_jZ_k - X_i^2 + Y_j^2\right) &= \sum_{k=1}^{10}\sum_{j=5}^{40}\sum_{i=1}^{50} X_iY_jZ_k - \sum_{k=1}^{10}\sum_{j=5}^{40}\sum_{i=1}^{50} X_i^2 + \sum_{k=1}^{10}\sum_{j=5}^{40}\sum_{i=1}^{50} Y_j^2 \\
&= \sum_{k=1}^{10} Z_k \sum_{j=5}^{40} Y_j \sum_{i=1}^{50} X_i - 10 \cdot 36 \sum_{i=1}^{50} X_i^2 + 10 \cdot 50 \sum_{j=5}^{40} Y_j^2 \\
&= 60 \cdot 150 \cdot 120 - 360 \cdot 650 + 500 \cdot 425 \\
&= 1080000 - 234000 + 212500 \\
&= 1058500
\end{aligned}$$

3.(2 pontos) Calcule

a.(1 pt) $\prod_{i=1}^{3} \frac{(i+1)^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{3} \frac{(i+1)^2}{2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \prod_{i=1}^{3} (i+1)^2 = \frac{1}{8} \cdot (1+1)^2 \cdot (2+1)^2 \cdot (3+1)^2 = \frac{1}{8} \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \\
&= \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 = \frac{576}{8} \\
&= 72.
\end{aligned}$$

2.(1 pt) $\prod_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=2}^{4} k\right)^i$

$$\prod_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=2}^{4} k\right)^i = \prod_{i=1}^{3} (2+3+4)^i = \prod_{i=1}^{3} 9^i = 9^1 \cdot 9^2 \cdot 9^3 = 9 \cdot 81 \cdot 729 = 531441.$$

4.(12 pontos) Duas metodologias de ensino, A e B, foram aplicadas a um grupo homogêneo de 129 alunos. Foram 69 alunos na turma que utilizou a metodologia A e os restantes 60 a metodologia B. Após um período adequado, os alunos foram submetidos a uma avaliação cuja nota mínima era 1 e a nota máxima 10. A tabela a seguir apresenta os resultados (o número de alunos e as notas), por metodologia.

Número de alunos com notas de 1 a 10 por metodologia										
	Nota									
Metodologia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	1	4	2	3	7	4	12	16	20
B	1	2	5	2	4	0	0	15	17	14

Pede-se:

a.(2 pt) A nota média por metodologia.

$$\bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_{Ai}}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 3 + \cdots + 16\cdot 9 + 20\cdot 10}{0 + 1 + \cdots + 16 + 20} = \frac{547}{69} = 7,9275,$$

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_{Ai}}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 5\cdot 3 + \cdots + 17\cdot 9 + 14\cdot 10}{1 + 2 + \cdots + 17 + 14} = \frac{461}{60} = 7,6833.$$

b.(2 pt) A nota mediana por metodologia.

Como $n_{X_A} = 69$ é ímpar quando os dados estão organizados em rol, a mediana é dada pelo elemento que ocupa a posição $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, isto é:

$$\mathrm{Md}(X_A) = X_{A\left(\frac{69+1}{2}\right)} = X_{A(35)} = 9.$$

Como $n_{X_B} = 60$ é par quando os dados estão organizados em rol, a mediana é dada pela média dos elementos que ocupam as posições $\left(\frac{n}{2}\right)$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$, isto é:

$$\mathrm{Md}(X_B) = \frac{X_{B\left(\frac{60}{2}\right)} + X_{B\left(\frac{60}{2}+1\right)}}{2} = \frac{X_{B(30)} + X_{B(31)}}{2} = \frac{9+9}{2} = 9.$$

c.(2 pt) A nota modal por metodologia.

A moda é $\mathrm{Mo}_1(X_A) = 10$, sendo o conjunto unimodal.

A moda é $\mathrm{Mo}_1(X_B) = 9$, sendo o conjunto unimodal.

d.(2 pt) O desvio padrão das notas por metodologia.

$$\begin{aligned}
S\left(X_A\right) &= \sqrt{S^2\left(X_A\right)} = \sqrt{\frac{4659 - \frac{(547)^2}{69}}{69-1}} \\
&= \sqrt{\frac{322,6377}{68}} = \sqrt{4,7447} \\
&= 2,1782, \\
S\left(X_B\right) &= \sqrt{S^2\left(X_B\right)} = \sqrt{\frac{3923 - \frac{(461)^2}{60}}{60-1}} \\
&= \sqrt{\frac{380,9833}{59}} = \sqrt{6,4573} \\
&= 2,5411,
\end{aligned}$$

e.(2 pt) Qual das duas amostras é mais homogênea (A ou B)? Justifique sua resposta.

$$\begin{aligned}
CV(X_A)\% &= \frac{S\left(X_A\right)}{\bar{X_A}} \times 100\% = \frac{2,1782}{7,9275} \times 100\% = 27,48\%. \\
CV(X_B)\% &= \frac{S\left(X_B\right)}{\bar{X_B}} \times 100\% = \frac{2,5411}{7,6833} \times 100\% = 33,07\%.
\end{aligned}$$

Como $27,48\% = CV(X_A)\% < CV(X_B)\% = 33,07\%$ temos que a amostra X_A é mais homogênea que a amostra X_B.

f.(2 pt) Qual nota média foi estimada com uma maior precisão ? Justifique sua resposta.

$$\begin{aligned}
S\left(\bar{X_A}\right) &= \frac{S\left(X_A\right)}{\sqrt{n_{X_A}}} = \frac{2,1782}{\sqrt{69}} = 0,2622, \\
S\left(\bar{X_B}\right) &= \frac{S\left(X_B\right)}{\sqrt{n_{X_B}}} = \frac{2,5411}{\sqrt{60}} = 0,3281.
\end{aligned}$$

A nota média da metodologia A foi estimada com maior precisão pois possui menor erro padrão da média.

5.(10 pontos) Um Zootecnista estudou por Regressão Linear Simples (RLS), o efeito do peso vivo dos cordeiros (X em kg) da raça Hampshire, no rendimento da carcaça (Y em kg). Uma amostra aleatória de $n = 10$ cordeiros foi avaliada e os resultados obtidos são informados abaixo:

X	49,0	65,0	45,0	40,0	55,0	45,0	44,0	47,0	50,0	56,0
Y	24,0	40,0	25,0	23,5	33,5	22,0	22,5	23,5	25,0	35,0

a.(2 pt) Obtenha a equação de RLS ajustada.

$$n = 10; \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = 496; \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 25082;$$
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 274; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 7868; \quad \sum_{i=1}^{n} X_iY_i = 13978.$$

$$\begin{aligned}
\text{SPD}_{XY} &= 13978 - \frac{(496)\,(274)}{10} = 387,6 \\
\text{SQD}_{X} &= 25082 - \frac{(496)^2}{10} = 480,4 \\
\text{SQD}_{Y} &= 7868 - \frac{(274)^2}{10} = 360,4 \\
\widehat{\beta}_1 &= \frac{\text{SPD}_{XY}}{\text{SQD}_{X}} = \frac{387,6}{480,4} = 0,8068
\end{aligned}$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1\bar{X} = \frac{274}{10} - (0,8068) \times \frac{496}{10} = -12,6187$$
$$\widehat{Y}_i = -12,6187 + 0,8068X_i.$$

b.(2 pt) A estimativa da constante da regressão permite uma interpretação prática do problema estudado? Comente.

Neste caso, a constante de regressão $\widehat{\beta}_0$ não tem interpretação prática, pois $X = 0$ não pertence ao intervalo estudado. Caso isto ocorresse teríamos uma extrapolação.

c.(2 pt) Estime o que ocorrerá com o rendimento médio da carcaça se o peso de um cordeiro reduzir em 3 kg.

Para um decréscimo de uma unidade no peso vivo dos cordeiros, ocorre uma variação de $-0,8068$ unidades no rendimento da carcaça. Obteremos o decréscimo que ocorre para um decréscimo de 3 unidades no peso vivo dos cordeiros através de uma regra de três, assim $\lambda = \frac{3\times 0,8068}{1} = 2,4204$.

peso vivo dos cordeiros		rendimento da carcaça
1	———	0,8068
3	———	λ

d.(2 pt) Obtenha uma estimativa do rendimento médio da carcaça e do respectivo desvio da regressão para cordeiros com 44 kg de peso vivo.

Para $X_7 = 44 \Rightarrow \widehat{Y}_7 =?$

$$\widehat{Y}_7 = -12,6187 + 0,8068 \times 44 = 22,8805.$$

O desvio da regressão é $\widehat{\epsilon}_7 = Y_7 - \widehat{Y}_7 = 22,5 - 22,8805 = -0,3805$.

e.(2 pt) Calcule e interprete o coeficiente de determinação do modelo (ou da equação) de RLS ajustado(a).

Temos que

$$\begin{aligned} \text{SQ}_{\text{Regressão}} &= \frac{(\text{SPD}_{XY})^2}{\text{SQD}_X} = \frac{(387,6)^2}{480,4} = 312,7264, \\ \text{SQ}_{\text{Total}} &= \text{SQD}_Y = 360,4, \\ r^2(\%) &= \frac{\text{SQ}_{\text{Regressão}}}{\text{SQ}_{\text{Total}}} \times 100\% = \frac{312,7264}{360,4} \times 100\% \\ &= 86,77\%. \end{aligned}$$

O coeficiente de determinaçõo $r^2(\%)$ foi de 86,77%, desta forma, o percentual da variabilidade observada do rendimento da carcaça, explicado pela regressão linear simples, nos valores do peso vivo dos cordeiros é 86,77%.