UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 2^0 semestre de 2018 - 27/out/18

Nome: ______________________________ **Matrícula:**________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 4 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 6, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.

- ATENÇÃO: Assinale (X) em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
-----------------------------------------------------------------------
    TURMA    HORÁRIO                        SALA  PROFESSOR
-----------------------------------------------------------------------
(  )  T1 2ª 10-12   5ª 8-10                PVB310 Moysés
(  )  T2 2ª 16-18   5ª 14-16               PVB310 Eduardo
(  )  T3 2ª 8-10 PVB109 4ª 10-12           PVB208 Paulo Emiliano
(  )  T4 3ª 10-12PVB109 6ª 8-10            PVB207 Roberta
(  )  T5 3ª 16-18  6ª 14-16                PVB310 Camila
(  )  T6 2ª 14-16  4ª 16-18                PVB107 Roberta
(  )  T7 4ª 8-10   6ª 10-12                PVB206 CHOS - coordenador
(  )  T8 4ª 18:30-20:10 6ª 20:30-22:10  PVB210 Roberta
(  )  T9 3ª 10-12 PVB300 6ª 8-10           PVB307 Paulo Cecon
(  )  T10 4ª 14-16 6ª 16-18                PVB107 Leísa
(  )  T20 = EST085 T1 2ª 14-16 PVA284 T2 2ª 18:30-20:10 PVA388 Leísa
-----------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !

- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.

- PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.

- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

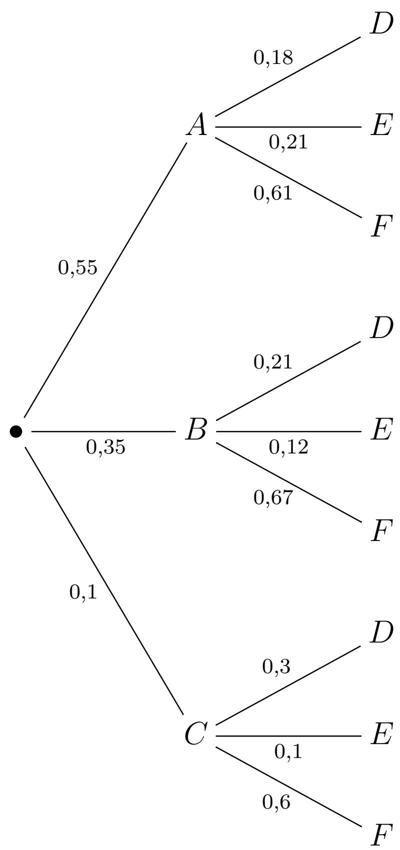
$$F(x) = P(X \leq x)$$

1.(8 pontos) O Tribunal Superior Eleitoral (TSE) informa que 55% do total de eleitores são da região A, 35% da B e os restantes da região C. Uma empresa que realiza pesquisas eleitorais calculou que na região A, a intenção de votos para os candidatos JB e FH, são respectivamente 18% e 21%, já na região B estas intenções são 21% para JB e 12% para FH, finalmente, na região C as intenções de voto são 30% para JB e 10% para FH. Pede-se:

a.(4 pts) Utilize o teorema da probabilidade total para estimar a intenção de votos para os dois candidatos, JB e FH.

Sejam

- A "O eleitor é da região A";
- B "O eleitor é da região B";
- C "O eleitor é da região C";
- D "O eleitor votará em JB";
- E "O eleitor votará em FH";
- F "O eleitor não votará em FH ou JB".



$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) \\
&= 0,18 \cdot 0,55 + 0,21 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,1 \\
&= 0,099 + 0,0735 + 0,03 \\
&= 0,2025
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(E \mid A)\, P(A) + P(E \mid B)\, P(B) + P(E \mid C)\, P(C) \\
&= 0,21 \cdot 0,55 + 0,12 \cdot 0,35 + 0,1 \cdot 0,1 \\
&= 0,1155 + 0,042 + 0,01 \\
&= 0,1675
\end{aligned}
$$

b.(4 pts) Utilize a regra de Bayes para calcular a probabilidade condicional de um voto, aleatoriamente selecionado, apurado para o candidato FH, ter sido realizado na região C.

Temos que $P(E) = 0,1675$ e $P(C \cap E) = P(E \mid C)\, P(C) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$. logo

$$
P(C \mid E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{0,01}{0,1675} = 0,0597
$$

2.(8 pontos) Considere que os eventos A, B e C, descritos a seguir, sejam mutuamente independentes e representem cada um, um risco para os investimentos de uma empresa.

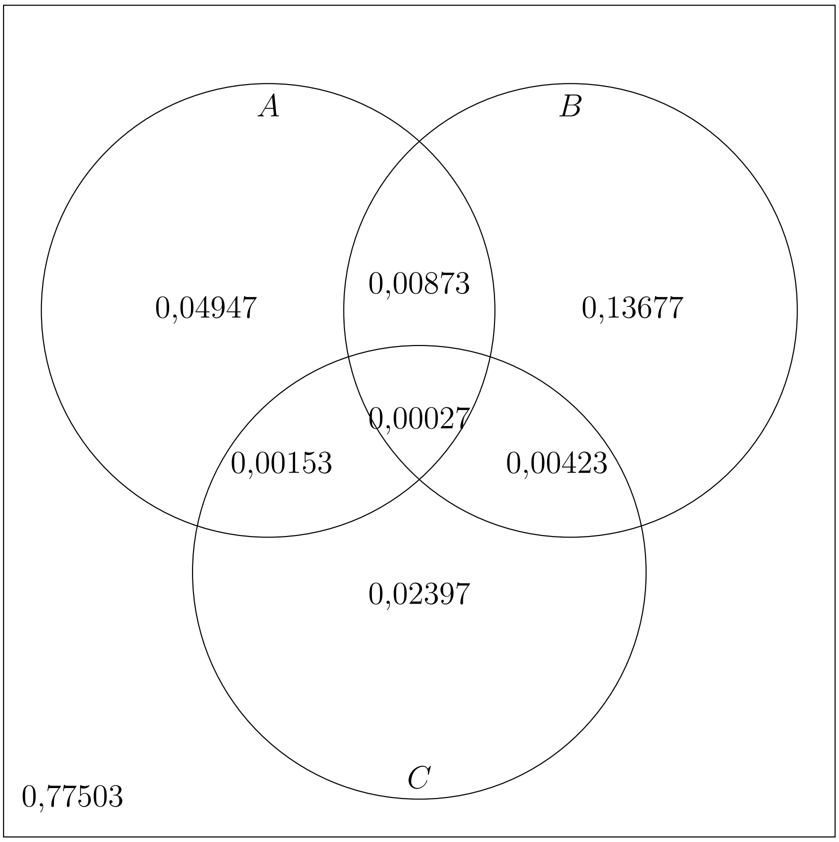
- $A = \{$ A cotação do dólar americano supera R\$ 5,00 $\}$;
- $B = \{$ O barril de petróleo no mercado internacional supera US\$ 100,00 $\}$;
- $C = \{$ A inflação mensal medida pelo IGPM supera 8% $\}$.

Uma análise de riscos informou as seguintes probabilidades: $P(A) = 0,06$; $P(B) = 0,15$ e $P(C) = 0,03$. Pede-se:

a.(4 pts) Calcule a probabilidade de exatamente um dos eventos ocorrer.

$$p = P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)\right] = ?$$

$$\begin{aligned}
p &= P\left(A \cap B^c \cap C^c\right) + P\left(A^c \cap B \cap C^c\right) + P\left(A^c \cap B^c \cap C\right) \\
&- P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B \cap C^c)\right] - P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C)\right] \\
&- P\left[(A^c \cap B \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C)\right] \\
&+ P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C)\right] \\
&= P\left(A \cap (B \cup C)^c\right) + P\left(B \cap (A \cup C)^c\right) + P\left(C \cap (A \cup B)^c\right) - 0 - 0 - 0 + 0 \\
&= P(A) - P\left(A \cap (B \cup C)\right) + P(B) - P\left(B \cap (A \cup C)\right) + P(C) - P\left(C \cap (A \cup B)\right) \\
&= P(A) - P\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] + P(B) - P\left[(B \cap A) \cup (B \cap C)\right] + P(C) \\
&- P\left[(C \cap A) \cup (C \cap B)\right] \\
&= P(A) - \left(P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\left[(A \cap B) \cap (A \cap C)\right]\right) + P(B) \\
&- \left(P(B \cap A) + P(B \cap C) - P\left[(B \cap A) \cap (B \cap C)\right]\right) + P(C) \\
&- \left(P(C \cap A) + P(C \cap B) - P\left[(C \cap A) \cap (C \cap B)\right]\right) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - 2\left(P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)\right) \\
&+ 3P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - 2\left(P(A)P(B) + P(A)P(C) + P(B)P(C)\right) \\
&+ 3P(A)P(B)P(C) \\
&= 0,06 + 0,15 + 0,03 - 2\left(0,06 \cdot 0,15 + 0,06 \cdot 0,03 + 0,15 \cdot 0,03\right) \\
&+ 3 \cdot 0,06 \cdot 0,15 \cdot 0,03 \\
&= 0,24 - 2\left(0,009 + 0,0018 + 0,0045\right) + 3 \cdot 0,00027 \\
&= 0,24 - 2\left(0,0153\right) + 0,00081 \\
&= 0,24 - 0,0306 + 0,00081 \\
&= 0,21021
\end{aligned}$$



b.(4 pts) Calcule a probabilidade de nenhum dos eventos ocorrer.

Seja $q = P\left(A^c \cap B^c \cap C^c\right)$, então

$$
\begin{aligned}
q &= P\left(A^c \cap B^c \cap C^c\right) = P\left[(A \cup B \cup C)^c\right] = 1 - P\left(A \cup B \cup C\right) \\
&= 1 - \left[P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(A \cap B\right) - P\left(B \cap C\right)\right. \\
&- \left. P\left(A \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right)\right] \\
&= 1 - \left[P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(A\right)P\left(B\right) - P\left(A\right)P\left(C\right)\right. \\
&- \left. P\left(B\right)P\left(C\right) + P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)\right] \\
&= 1 - (0,06 + 0,15 + 0,03 - 0,06 \cdot 0,15 - 0,06 \cdot 0,03 - 0,15 \cdot 0,03 \\
&+ 0,06 \cdot 0,15 \cdot 0,03) \\
&= 1 - (0,24 - 0,009 - 0,0018 - 0,0045 + 0,00027) \\
&= 1 - 0,22497 \\
&= 0,77503
\end{aligned}
$$

3.(8 pontos) Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad \text{se } 0 \leq x < \infty; \\ 0 & , \quad \text{para outros valores de } x \end{cases}$$

a.(4 pts) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$. Dica: $\int_a^b e^{-cx}dx = -\frac{1}{c}e^{-cx}|_a^b$

Para $x < 0$, $F(x) = 0$;

Para $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x e^{-u}du = -e^{-u} \mid_{u=0}^{x} = -(e^{-x} - 1) = 1 - e^{-x}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

b.(4 pts) Calcule a seguinte probabilidade condicional $P(X > 20 \mid X > 16)$.

$$\begin{aligned} P(X > 20 \mid X > 16) &= \frac{P(\{X > 20\} \cap \{X > 16\})}{P(X > 16)} = \frac{P(X > 20)}{P(X > 16)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq 20)}{1 - P(X \leq 16)} = \frac{1 - F(20)}{1 - F(16)} = \frac{1 - (1 - e^{-20})}{1 - (1 - e^{-16})} \\ &= \frac{e^{-20}}{e^{-16}} = e^{-4} \\ &= 0,0183 \end{aligned}$$

4.(6 pontos) Sejam X uma variável aleatória discretas com a seguinte distribuição de probabilidades,

x	0	5	8	10	12
$P(x)$	4θ	6θ	3θ	5θ	2θ

a.(2 pts) Calcule o valor da constante θ e justifique seu cálculo.

Para que uma função seja uma função de probabilidade deve satisfazer:

i) $P(x) \geq 0$, para todo x;

ii) $\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i) = 1$.

Devemos ter

$$P(X = 0) + P(X = 5) + P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12) = 1$$

daí

$$\begin{aligned} 4\theta + 6\theta + 3\theta + 5\theta + 2\theta &= 1 \\ 20\theta &= 1 \\ \theta &= \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

b.(2 pts) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 4\theta, & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ 10\theta, & \text{se } 5 \leq x < 8 \\ 13\theta, & \text{se } 8 \leq x < 10 \\ 18\theta, & \text{se } 10 \leq x < 12 \\ 20\theta & \text{se } 12 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1/5, & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ 1/2, & \text{se } 5 \leq x < 8 \\ 13/20, & \text{se } 8 \leq x < 10 \\ 9/10, & \text{se } 10 \leq x < 12 \\ 1 & \text{se } 12 \leq x \end{cases}$$

c.(2 pts) Calcule a seguinte probabilidade condicional $P(X \leq 10 | X \geq 5)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 10 \,|\, X \geq 5) &= \frac{P(\{X \leq 10\} \cap \{X \geq 5\})}{P(X \geq 5)} = \frac{P(5 \leq X \leq 10)}{P(X \geq 5)} \\ &= \frac{14\theta}{16\theta} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P(X \leq 10 \,|\, X \geq 5) &= \frac{P(\{X \leq 10\} \cap \{X \geq 5\})}{P(X \geq 5)} = \frac{P(5 \leq X \leq 10)}{P(X \geq 5)} \\ &= \frac{F(10) - F(5) + P(X = 5)}{1 - F(5) + P(X = 5)} = \frac{18\theta - 10\theta + 6\theta}{20\theta - 10\theta + 6\theta} \\ &= \frac{14\theta}{16\theta} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$