UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a prova de EST 105 - 2^0 semestre de 2016 - 08/out/16

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

• São 6 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, **FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR**.

• ATENÇÃO: Assinale (X) a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

	TURMA	HORÁRIO	SALA	PROFESSOR
( )	T1	2^a 10-12 5^a 8-10	PVB310	Camila
( )	T2	2^a 16-18 5^a 14-16	PVB310	Camila
( )	T5	3^a 16-18 6^a 14-16	PVB310	Eduardo
( )	T6	2^a 14-16 4^a 16-18	PVB107	Paulo/CHOS
( )	T7	4^a 08-10 6^a 10-12	PVB206	CHOS - coordenador
( )	T8	2^a 18:30-20:10 4^a 20:30-22:10	PVB306	Eduardo
( )	T9	3^a 10-12 PVB300 6^a 8-10	PVB307	Gerson
( )	T20=EST085	T1 2^a 16-18 T2 2^a 18:30-20:10	PVA388	Leísa (monitora II)

• Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !

• É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.

• NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os cálculos ou o raciocínio utilizado.

• BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\ dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n < \infty$ $\quad E(X^k) = \sum_x x^k P(x)$ ou $E(X^k) = \int x^k f(x) dx$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(x,y) \quad \text{ou} \quad E(XY) = \int\int xyf(x,y)dxdy$$

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y), \quad \rho_{X,Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

1.(5 pontos) Do total de 11.560 estudantes matriculados na Graduação na UFV em 2015, 21% eram de cursos do CCA, 19% do CCB, 31% do CCE e 29% do CCH. Sabe-se que 5% dos estudantes do CCA, 8% do CCB, 3% do CCE e 2 % do CCH são estudantes que recebem atendimento educacional especializado pela Divisão Psicossocial e/ou Unidade Interdisciplinar de Políticas Inclusivas, respaldados na Lei Nº 13.146, de 6 de julho de 2015.
Pede-se: utilize a regra ou teorema de Bayes para calcular a probabilidade condicional de se selecionar aleatoriamente um estudante de um curso do CCH , dado que o estudante selecionado recebe este atendimento educacional especializado.

Considere os eventos

$$\begin{gathered}A = \text{"o curso do aluno é do CCA"}\\ B = \text{"o curso do aluno é do CCB"}\\ C = \text{"o curso do aluno é do CCE"}\\ D = \text{"o curso do aluno é do CCH"}\\ E = \text{"o aluno recebe atendimento educacional especializado pela Divisão Psicossocial"}\end{gathered}$$

$$\begin{array}{ll} P(A) = 0,21 & P(E|A) = 0,05 \\ P(B) = 0,19 & P(E|B) = 0,08 \\ P(C) = 0,31 & P(E|C) = 0,03 \\ P(D) = 0,29 & P(E|D) = 0,02 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) + P(E|D)P(D) \\ &= 0,05 \cdot 0,21 + 0,08 \cdot 0,19 + 0,03 \cdot 0,31 + 0,02 \cdot 0,29 \\ &= 0,0105 + 0,0152 + 0,0093 + 0,0058 \\ &= 0,0408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E)} \\ &= \frac{0,02 \cdot 0,29}{0,0408} = \frac{0,0058}{0,0408} \\ &= 0,1421 \end{aligned}$$

2.(5 pontos) Em um procedimento de controle da qualidade, selecionam-se aleatoriamente $n = 8$ componentes de uma linha de produção e cada um destes componentes é rigorosamente avaliado para verificar se ele possui algum defeito de fabricação. Admita que a linha de produção produza 2% de itens com algum defeito de fabricação. Pede-se: calcule a probabilidade de pelo menos 2 componentes (dois ou mais) possuírem algum defeito de fabricação .

Seja $D_i =$ "o $i-$ ésimo item é defeituoso" e $X =$"número de itens defeituoso".

$P(D_i) = 0,02$, para $i = 1, 2, \cdots, 8$. Sabemos que

$$P(D_i^c) = 1 - P(D_i) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(\text{nenhum item defeituoso}) \\
&= P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c \cap D_5^c \cap D_6^c \cap D_7^c \cap D_8^c) \\
&= P(D_1^c)\,P(D_2^c)\,P(D_3^c)\,P(D_4^c)\,P(D_5^c)\,P(D_6^c)\,P(D_7^c)\,P(D_8^c) \\
&= 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 = (0,98)^8 \\
&= 0,8507
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= P(\text{exatamente um item defeituoso}) \\
&= P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c \cap D_5^c \cap D_6^c \cap D_7^c \cap D_8^c) + \cdots \\
&+ P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c \cap D_5^c \cap D_6^c \cap D_7^c \cap D_8) \\
&= P(D_1)\,P(D_2^c)\,P(D_3^c)\,P(D_4^c)\,P(D_5^c)\,P(D_6^c)\,P(D_7^c)\,P(D_8^c) + \cdots \\
&+ P(D_1^c)\,P(D_2^c)\,P(D_3^c)\,P(D_4^c)\,P(D_5^c)\,P(D_6^c)\,P(D_7^c)\,P(D_8) \\
&= 0,02 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 + \cdots \\
&+ 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot 0,02 \\
&= 8 \cdot 0,02 \cdot (0,98)^7 \\
&= 0,1389
\end{aligned}$$

Assim

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,8507 + 0,1389) = 1 - 0,9898 = 0,0104.$$

3.(5 pontos) Uma caixa contém 10 itens (quase idênticos entre si) dos quais 5 são fabricados na China, 3 no Vietnã e 2 no Brasil. Considere que 3 itens serão aleatoriamente amostradas desta caixa. Pede-se: Qual é a probabilidade de serem amostradas exatamente dois itens fabricados na China quando se considera duas alternativas de amostragem:

a.(2,5 pts) Amostragem SEM reposição (equivale a amostrar os 3 itens simultaneamente).

Considere os eventos A_i = "o item i é produzido na China"

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) &= P(A_1)\,P(A_2\,|A_1)\,P(A_3^c\,|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{100}{720} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) &= P(A_1)\,P(A_2^c\,|A_1)\,P(A_3\,|A_1 \cap A_2^c) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{100}{720} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1^c)\,P(A_2\,|A_1^c)\,P(A_3\,|A_1^c \cap A_2)\,P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{100}{720} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) &+ P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= \frac{100}{720} + \frac{100}{720} + \frac{100}{720} = \frac{300}{720} = 0,4167 \end{aligned}$$

b.(2,5 pts) Amostragem COM reposição (neste caso um mesmo item pode ser amostrado mais do que uma vez)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) &= P(A_1)\,P(A_2\,|A_1)\,P(A_3^c\,|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) &= P(A_1)\,P(A_2^c\,|A_1)\,P(A_3\,|A_1 \cap A_2^c) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1^c)\,P(A_2\,|A_1^c)\,P(A_3\,|A_1^c \cap A_2) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) &+ P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= \frac{125}{1000} + \frac{125}{1000} + \frac{125}{1000} = \frac{375}{1000} = 0,375 \end{aligned}$$

4.(5 pontos) Uma variável aleatória (X, Y) tem a seguinte função densidade de probabilidade conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy + kx^2, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 1 \leq y \leq 2 \\ \\ 0, & \text{para outros valores } x \text{ e } y \end{cases}$$

Pede-se: determine o valor da constante k.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_1^2 \int_0^1 \left(xy + kx^2\right) dxdy = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} y + k\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x=0}^{1} dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{y}{2} + \frac{k}{3} \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} + \frac{k}{3} y \right)\Bigg|_{y=1}^{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{k}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow \frac{4k+9}{12} = 1 \Rightarrow 4k = 12 - 9 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

5.(5 pontos) Dadas as distribuições de probabilidades das variáveis X e Y nas tabelas apresentadas a seguir,

x	0	1	3	total
$P(x)$	0,2	0,7	0,1	1,00

e

y	5	8	total
$P(y)$	0,4	0,6	1,00

a.(3 pts) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, obtenha a tabela com a distribuição conjunta de probabilidades.

X \ Y	5	8	Totais
0	0,08	0,12	0,20
1	0,28	0,42	0,70
3	0,04	0,06	0,10
Totais	0,40	0,60	1,00

b.(2 pts) Obtenha a tabela com a distribuição de probabilidades de $W = X + Y$.

w	5	6	8	9	11	Total
$P(W = w)$	0,08	0,28	0,16	0,42	0,06	1,00

6.(5 pontos) Nos itens a seguir assinale (V) se estiver inteiramente correto ou assinale (F) caso contrário e **justifique ou corrija**. (1 ponto cada item)

a. (F) Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição acumulada $F(x)$. Para dois valores tais que $x_1 < x_2$, tem-se que $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$F(x_2) - F(x_1) + P(X = x_1) - P(X = x_2) = P(x_1 \leq X < x_2)$$

b. (V) Seja X uma variável aleatória contínua com $F(x) = 0$, se $x < 0$; $F(x) = x^3$, se $0 \leq x < 1$ e $F(x) = 1$, se $1 \leq x$. Então, $P(X \geq 0,80) = 1 - 0,80^3 = 0,488$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 0,80) &= 1 - P(X \leq 0,80) \\ &= 1 - F(0,80) \\ &= 1 - 0,80^3 \\ &= 0,488 \end{aligned}$$

c. (F) Se A, B e C são três eventos mutuamente independentes de um mesmo espaço amostral com $P(A) = P(B) = P(C) = 0,40$, então tem-se que a probabilidade de exatamente um destes três eventos ocorrer é igual a $0,144$.

$$\begin{aligned} P(\text{Exatamente um}) &= P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B) - 2P(A \cap C) \\ &- 2P(B \cap C) + 3P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A)P(B) - 2P(A)P(C) \\ &- 2P(B)P(C) + 3P(A)P(B)P(C) \\ &= 0,40 + 0,40 + 0,40 - 2 \cdot 0,40 \cdot 0,40 - 2 \cdot 0,40 \cdot 0,40 \\ &- 2 \cdot 0,40 \cdot 0,40 + 3 \cdot 0,40 \cdot 0,40 \cdot 0,40 \\ &= 3 \cdot 0,40 - 6 \cdot 0,40^2 + 3 \cdot 0,40^3 = 0,432 \end{aligned}$$

d. (V) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos de um mesmo espaço amostral com $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,20$, então tem-se que $P(A \cup B) = 0,50$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 0 \\ &= 0,30 + 0,20 = 0,50 \end{aligned}$$

e. (F) Se X é uma variável aleatória discreta então $P(x_1 \leq X \leq x_2)$, para quaisquer valores finitos $x_1 < x_2$ do domínio da função densidade de probabilidade $f(x)$, será calculado mediante a integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$.

Se X é uma variável aleatória contínua então $P(x_1 \leq X \leq x_2)$, para quaisquer valores finitos $x_1 < x_2$ do domínio da função densidade de probabilidade $f(x)$, será calculado mediante a integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$.