UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 2^0 semestre de 2017 - 21/out/17

Nome: ______________________________ **Matrícula:**____________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.

- ATENÇÃO: Assinale (X) em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
----------------------------------------------------------------------
      TURMA         HORÁRIO         SALA   PROFESSOR
----------------------------------------------------------------------
(   )   T1 2ª 10-12    5ª 8-10     PVB310 Moysés
(   )   T2 2ª 16-18    5ª 14-16    PVB310 Carol
(   )   T3 2ª 8-10     4ª 10-12    PVB109 Paulo
(   )   T5 3ª 16-18    6ª 14-16    PVB310 Camila
(   )   T6 2ª 14-16    4ª 16-18    PVB107 Carol/Moysés
(   )   T7 4ª  8-10    6ª 10-12   PVB206  CHOS - coordenador
(   )   T8 2ª 18:30-20:10  4ª 20:30-22:10  PVB210 Eduardo
(   )   T9 3ª 10-12   6ª 8-10      PVB300 Cecon
(   )   T20 = EST 085 T1 2ª14-16 PVA284 T2 2ª18:30-20:10 PVA388 Leísa
----------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !

- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.

- PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.

- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\, dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\, dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

1.(8 pontos) Admita que em uma blitz da polícia rodoviária,

- 15% dos veículos fiscalizados estão com o IPVA atrasado, $\Rightarrow P(A) = 0,15$;
- em 11% dos veículos fiscalizados o motorista está com a CNH irregular, $\Rightarrow P(C) = 0,11$;
- 17% dos veículos fiscalizados estão com algum problema elétrico, $\Rightarrow P(E) = 0,17$;
- em 5% dos veículos fiscalizados os motoristas estão com a CNH irregular e o carro NÃO apresenta problema elétrico, $\Rightarrow P(C \cap E^c) = 0,05$;
- em 41,18% dos veículos fiscalizados por terem um problema elétrico, também se constata IPVA atrasado, $\Rightarrow P(A \mid E) = 0,4118$.

Pede-se, se um veículo selecionado aleatoriamente for fiscalizado, calcule:

a.(4 pts) A probabilidade condicional do motorista estar com a CNH irregular, dado que foi constatado que há um problema elétrico.

$$\begin{aligned} P(C|E) &= \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C) - P(C \cap E^c)}{P(E)} = \frac{0,11 - 0,05}{0,17} = \frac{0,06}{0,17} \\ &= \frac{6}{17} = 0,3529 \end{aligned}$$

b.(4 pts) A probabilidade de se constatar IPVA atrasado ou um problema elétrico.

$$\begin{aligned} P(A \cup E) &= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \\ &= P(A) + P(E) - P(E)\, P(A|E) \\ &= 0,15 + 0,17 - 0,17 \cdot 0,4118 \\ &= 0,32 - 0,070006 \\ &= 0,2499 \end{aligned}$$

2.(5 pontos) Um jogo de azar oferece ao apostador três sequências, A, B e C, cada uma com os números de 1 a 10, conforme a tabela abaixo. O apostador participa deste jogo escolhendo 3 números dentro de cada uma das sequências. O jogo irá sortear dois números de forma completamente aleatória do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, sendo que o apostador ganhará um prêmio se ele acertar os dois números sorteados dentro de pelo menos uma das sequências.

Sequência	Dentro de cada sequência aposte em três números									
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Pede-se: Calcule a probabilidade de um apostador ganhar o prêmio neste jogo de azar, ou seja, $P(A \cup B \cup C)$, sendo A, B e C eventos mutuamente independentes.

$$\begin{aligned} P(\text{ganhar}) &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &- P(B \cup C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$p = P(A) = P(B) = P(C) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$ em que A_i é o evento acertar o $i-$ésimo número sorteado, ou equivalentemente

$$p = P(A) = P(B) = P(C) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15} = 0,0667$$

temos

$$\begin{aligned} P(\text{ganhar}) &= \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \\ &= \frac{3}{15} - 3 \cdot \frac{1}{15^2} + \frac{1}{15^3} = \frac{3}{15} - \frac{3}{225} + \frac{1}{3375} = \frac{631}{3375} = 0,1870 = 18,7\%. \end{aligned}$$

Outro modo de se resolver

$$\begin{aligned} P(\text{ganhar}) &= 1 - P(\text{perder}) = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{não acertar 2 números em nenhuma} \\ \text{das três sequências}\end{matrix}\right) \\ &= 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) \underset{\text{independentes}}{\overset{\text{mutuamente}}{=}} 1 - P(A^c)\, P(B^c)\, P(C^c) \end{aligned}$$

Como $P(A^c) = P(B^c) = P(C^c)$ temos que

$$P(\text{ganhar}) = 1 - [P(A^c)]^3.$$

Sejam $A_0 : \{\text{acertar zero número na sequência } A\}$ e $A_1 : \{\text{acertar um número na sequência } A\}$. Logo

$$\begin{aligned} P(\text{ganhar}) &= 1 - [P(A_0 \cup A_1)]^3 = 1 - [P(A_0) + P(A_1) - P(A_0 \cap A_1)]^3 \\ &= 1 - [P(A_0) + P(A_1)]^3 \end{aligned}$$

e, como

$$P(A_0) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{15} = 0,4666$$

$$P(A_0) = 3 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = 0,4666,$$

temos que

$$P(\text{ganhar}) = 1 - (0,4666 + 0,4666)^3 = 1 - (0,9332)^3 = 1 - 0,8126 = 0,1874 = 18,74\%.$$

3.(6 pontos) O desempenho diário, de um certo conjunto de ações, pode ser medido como a porcentagem de crescimento do preço de venda em relação ao dia anterior. Suponha que esse desempenho é uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{19}(x+4) & , \quad \text{se } -3 \leq x < 0; \\ \frac{2}{19}x & , \quad \text{se } 0 \leq x < 2; \\ 0 & , \quad \text{para outros valores de } x \end{cases}$$

a.(3 pts) Construa a função de distribuição acumulada $F(x)$.

Para $x < -3$ temos que $F(x) = P[X \leq x] = 0$;

Para $-3 \leq x < 0$ temos que

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = \int_{-3}^{x} \frac{2}{19}(u+4)\,du = \frac{2}{19}\left(\frac{u^2}{2} + 4u\right)\Big|_{u=-3}^{x} \\ &= \frac{2}{19}\left[\left(\frac{x^2}{2} + 4x\right) - \left(\frac{(-3)^2}{2} + 4(-3)\right)\right] = \frac{2}{19}\left(\frac{x^2}{2} + 4x + \frac{15}{2}\right); \end{aligned}$$

Para $0 \leq x < 2$ temos que

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = \frac{15}{19} + \int_0^x \frac{2u}{19}du = \frac{15}{19} + \frac{2}{19}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{u=0}^{x} = \frac{15}{19} + \frac{2}{19}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2+15}{19}; \end{aligned}$$

Para $2 \leq x$ temos que $F(x) = P[X \leq x] = 1$.

b.(3 pts) Calcule a probabilidade de um dia com desempenho excepcional (superior a $1,5$), dado que o dia teve desempenho positivo. Isto é, calcule a probabilidade condicional $P(X > 1,5 \mid X > 0)$.

$$P(X > 1,5 | X > 0) = \frac{P(X > 1,5; X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X > 1,5)}{P(X > 0)}.$$

Temos que

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{15}{19} = \frac{4}{19} = 0,2105,$$

e

$$P(X > 1,5) = 1 - P(X \leq 1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - \frac{15 + 1,5^2}{19} = 1 - 0,9079 = 0,0921.$$

Assim

$$P(X > 1,5 | X > 0) = \frac{0,0921}{0,2105} = 0,4375.$$

4.(6 pontos) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade bidimensional conjunta $P(x,y)$, dada por:

$$P(x,y)=\begin{cases} k\,(x+y)\,, & \text{se } x=1,2,3 \text{ e } y=1,2; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a.(2 pts) Determine o valor de k.

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_x\sum_y P(x;y)=\sum_x\sum_y k\,(x+y)=k\left(\sum_x\sum_y x+\sum_x\sum_y y\right)\\
&= k\left(\sum_x x\sum_y 1+\sum_x 1\sum_y y\right)\\
&= k\,(6\cdot 2+3\cdot 3)=21k\\
k &= \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

b.(2 pts) Determine a distribuição marginal de X.

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_x P(x,y)=\frac{1}{21}\sum_{y=1}^{2}(x+y)=\frac{1}{21}\left(\sum_{y=1}^{2}x+\sum_{y=1}^{2}y\right)=\frac{1}{21}\left(x\sum_{y=1}^{2}1+3\right)\\
&= \frac{1}{21}\,(2x+3)
\end{aligned}$$

x	1	2	3	Total
$P(x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{9}{21}$	1

c.(2 pts) Determine a distribuição condicional de Y dado que $X=1$.

$$P\left(Y=y|\,X=1\right)=\frac{P\left(Y=y;X=1\right)}{P\left(X=1\right)}.$$

Como $P\left(Y=y;X=1\right)=\frac{1}{21}\,(1+y)$ e $P\left(X=1\right)=\frac{5}{21}$ temos

$$P\left(Y=y|\,X=1\right)=\frac{\frac{1}{21}\,(1+y)}{\frac{5}{21}}=\frac{1}{21}\cdot\frac{21}{5}\,(1+y)=\frac{1+y}{5}.$$

y	1	2	Total
$P\left(Y=y\|\,X=1\right)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

5.(5 pontos) Informe se as afirmações apresentadas a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F), corrigindo-as quando assinalar que é falsa. (1,25 pontos cada item assinalado corretamente).

a.( ) Se A e B são dois eventos de um mesmo espaço amostral tais que $P(A) = 1/3$ e $P(B|A) = 3/5$, então A e B não podem ser eventos mutuamente exclusivos (ou disjuntos).

Verdadeiro. $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|\, A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \neq 0$, logo A e B não são mutuamente exclusivos, pois neste caso teríamos $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

b.( ) Se A e B são dois eventos independentes de um mesmo espaço amostral, tais que $P(A) = 1/5$ e $P(B) = 1/6$. Então, a probabilidade de que pelo menos um dos dois eventos ocorra é $1/30$.

Falso.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6+5-1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{30}$$

c.( ) Se A e B são dois eventos de um mesmo espaço amostral tais que $P(A) = 1/2$, $P(B|A) = 1$ e $P(A|B) = 1/2$ então A não pode estar contido em B.

Falso. $P(A|\, B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, logo $P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A|B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(A|B)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$, o que se verifica neste caso, pois $P(A) = \frac{1}{2} \leq 1 = P(B)$.

Outra solução - exibindo um contra exemplo, tal como:

Sejam , $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|\, A) = 1$ e $P(A|\, B) = \frac{1}{2}$, além disso, $A \subset B$, logo a afirmativa é falsa.

d.( ) A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X retorna a probabilidade acumulada até um determinado valor x, ou seja, $P(X \leq x)$.

Falso. A função que retorna a probabilidade acumulada até um determinado valor é a função de distribuição acumulada $F(x)$ e não a função densidade de probabilidade $f(x)$.