UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 2^0 semestre de 2015 - 24/ago/15

Nome: ______________________________ **Matrícula:**________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 9, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
T20: EST 085 T1 2a=16-18 PVA102 - Monitor II - Leisa Lima
T20: EST 085 T2 5a=18:30-20:10 PVA310 - Monitor II
--------------------------------------------------------------
T1: 2a=10-12 e 5a=8-10     PVB310 - Paulo Cecon
--------------------------------------------------------------
T2: 2a=16-18 e 5a=14-16    PVB310 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T5: 3a=16-18 e 6a=14-16    PVB310 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T6: 2a=14-16 e 4a=16-18    PVB107 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T7: 4a=8-10 e 6a-10-12     PVB206 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T8: 2a=18:30-20:10 e 4a=20:30-22:10   PVB306 - Paulo Emiliano
--------------------------------------------------------------
T9: 3a=10-12  e 6a=8-10  PVB300/307 - Chos
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \ SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i \qquad \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(3 pontos) Desenvolva e calcule o somatório a seguir,

$$\sum_{k=25}^{150}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)$$

Seja $A=\displaystyle\sum_{k=25}^{150}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)$, então:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{25+4}-\frac{1}{25+5}\right)+\left(\frac{1}{26+4}-\frac{1}{26+5}\right)+\left(\frac{1}{27+4}-\frac{1}{27+5}\right)+\cdots+\\
&+ \left(\frac{1}{149+4}-\frac{1}{149+5}\right)+\left(\frac{1}{150+4}-\frac{1}{150+5}\right)\\
&= \left(\frac{1}{29}-\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{32}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{153}-\frac{1}{154}\right)+\left(\frac{1}{154}-\frac{1}{155}\right)\\
&= \left(\frac{1}{29}-\cancel{\frac{1}{30}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{30}}-\cancel{\frac{1}{31}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{31}}-\cancel{\frac{1}{32}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{153}}-\cancel{\frac{1}{154}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{154}}-\frac{1}{155}\right)\\
&= \frac{1}{29}-\frac{1}{155}=\frac{155-29}{4495}=\frac{126}{4495}
\end{aligned}$$

2.(4 pontos) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

utilize estas fórmulas e as propriedades de somatório para calcular,

$$\sum_{k=10}^{80} \left(k^3 + k^2\right).$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=10}^{80} k^3 + \sum_{k=10}^{80} k^2 = \sum_{k=10}^{80} k^3 + \sum_{k=1}^{9} k^3 - \sum_{k=1}^{9} k^3 + \sum_{k=10}^{80} k^2 + \sum_{k=1}^{9} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2 \\
= \; & \sum_{k=1}^{80} k^3 - \sum_{k=1}^{9} k^3 + \sum_{k=1}^{80} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2 \\
= \; & \left(\frac{80\,(80+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{9\,(9+1)}{2}\right)^2 + \frac{80\,(80+1)\,(2\times 80+1)}{6} - \frac{9\,(9+1)\,(2\times 9+1)}{6} \\
= \; & 10497600 - 2025 + 173880 - 285 = 10669170
\end{aligned}$$

3.(3 pontos) Dado que,

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} X_i = 100, \qquad \sum_{j=5}^{50} Y_j = 200 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{10} Z_k = 80,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule,

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} \sum_{k=1}^{10} (2X_i - X_iY_j + Z_k)\,.$$

Seja $C = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} \sum_{k=1}^{10} (2X_i - X_iY_j + Z_k)$.

Solução 1:

Note que

$$\begin{aligned} NT_i &= (30-1)+1-3 = 27 \\ NT_j &= (50-5)+1-0 = 46 \\ NT_k &= (10-1)+1-0 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} \sum_{k=1}^{10} 2X_i - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} \sum_{k=1}^{10} X_iY_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} \sum_{k=1}^{10} Z_k \\ &= 2\times 46\times 10 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} X_i - 10 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} X_i \sum_{j=5}^{50} Y_j + 27\times 46 \sum_{k=1}^{10} Z_k \\ &= 920\times 100 - 10\times 100\times 200 + 1242\times 80 \\ &= 92000 - 200000 + 99360 = -8640 \end{aligned}$$

Solução 2:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} \left(\sum_{k=1}^{10} 2X_i - \sum_{k=1}^{10} X_iY_j + \sum_{k=1}^{10} Z_k \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \sum_{j=5}^{50} (20X_i - 10X_iY_j + 80) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \left(\sum_{j=5}^{50} 20X_i - \sum_{j=5}^{50} 10X_iY_j + \sum_{j=5}^{50} 80 \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} \left(920X_i - 10X_i \sum_{j=5}^{50} Y_j + 3680 \right) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} (920X_i - 2000X_i + 3680) \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} (-1080X_i + 3680) = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} 1080X_i + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 5,12,20}}^{30} 3680 \\ &= -108000 + 99360 = -8640 \end{aligned}$$

4.(12 pontos) A tabela seguinte mostra valores para o número de anos de experiência (X, em anos) e o valor anual de vendas em milhares de reais (Y, em R\$ $\times$ 1000).

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	0	1	2	4	5	8	10	12
Y_i	15	22	28	38	60	72	94	135

Pede-se:

a.(2 pts) Utilize sua calculadora para informar as seguintes somas:

$\sum X = 42$ $\sum X^2 = 354$ $\sum Y = 464$

$\sum Y^2 = 38782$ $\sum XY = 3666$

b.(2 pts) Apresente o modelo de regressão linear simples (RLS) ajustado que permita estimar o valor médio das vendas anuais como uma função do número de anos de experiência (aproxime a segunda casa após a vírgula, por ex: 0,925=0,93 ou 4,106=4,11).

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = \frac{3666 - \frac{42\times 464}{8}}{354 - \frac{(42)^2}{8}} = \frac{1230}{133,5} = 9,21,$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1\bar{X} = \frac{464}{8} - 9,21 \times \frac{42}{8} = 58 - 48,35 = 9,65,$$

logo a equação de regressão ajustada é

$$\boxed{\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i = 9,65 + 9,21X_i}.$$

c.(2 pts) Estime o valor médio das vendas anuais para um indivíduo com 10 anos de experiência e também para um com 15 anos de experiência. As duas estimativas são válidas ? Comente à respeito.

$$X_i = 10 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

Temos que $\widehat{Y}_i = 9,65 + 9,21X_i$, assim:

$$\widehat{Y}_i = 9,65 + 9,21 \times 10 = 101,75.$$

Para um indivíduo que teve 10 anos de experiência, estima-se que, em média, ele venderá anualmente 101,75 milhares de reais, ou seja, R\$ 101750.

$$X_i = 15 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

Temos que $\widehat{Y}_i = 9,65 + 9,21X_i$, assim:

$$\widehat{Y}_i = 9,65 + 9,21 \times 15 = 147,8.$$

Para um indivíduo que teve 15 anos de experiência, estima-se que, em média, ele venderá anualmente 147,8 milhares de reais, ou seja, R$ 147800.

Note que, no estudo em questão, o número de anos de experiência variou de 0 a 12 anos, desta forma, a estimativa para $X_i = 10$ é confiável por pertencer ao intervalo sob estudo, enquanto que a estimativa obtida para $X_i = 15$ trata-se de uma extrapolação, desta forma, esta estimativa poderá não ser válida.

d.(2 pts) Para cada acréscimo de **dois anos** na experiência, estime o acréscimo médio no valor das vendas anuais.

Sabemos que para cada aumento de uma unidade no número de anos de experiência, há um acréscimo médio de R$ 9210 no valor das vendas anuais. Assim em dois anos de acréscimo, teremos $2 \times 9210 = 18420$ reais de acréscimo médio no valor das vendas anuais.

e.(2 pts) Estime o valor médio das vendas anuais para um indivíduo com **menos de um ano de experiência** e também calcule e apresente o respectivo desvio da regressão.

Para um indivíduo com menos de um ano de experiência, isto é, com zero anos de experiência temos:

$$X_i = 0 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

Temos que $\widehat{Y}_i = 9,65 + 9,21X_i$, assim:

$$\widehat{Y}_i \quad = \quad 9,65 + 9,21 \times 0 = 9,65.$$

Para um indivíduo que teve 0 anos de experiência, estima-se que, em média, ele venderá anualmente 9,65 milhares de reais, ou seja, R$ 9650.

Sabemos que $\widehat{Y}_1 = 9,65$, assim o desvio da regressão é

$$\widehat{\varepsilon}_1 = Y_1 - \widehat{Y}_1 = 15 - 9,65 = 5,35.$$

f.(2 pts) Apresente a estimativa do coeficiente de determinação e interprete-a.

Temos que

$$\begin{aligned} SQ_{\text{Regressão}} &= \frac{(SPD_{XY})^2}{SQD_X} = \frac{\left(3666 - \frac{42\times464}{8}\right)^2}{354 - \frac{(42)^2}{8}} \\ &= \frac{(1230)^2}{133,5} = 11332,58, \\ SQ_{\text{Total}} &= SQD_Y = 38782 - \frac{(464)^2}{8} = 11870. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} r^2(\%) &= \frac{SQ_{\text{Regressão}}}{SQ_{\text{Total}}} \times 100\% = \frac{11332,58}{11870} \times 100\% \\ &= 95,47\%. \end{aligned}$$

O coeficiente de determinação r^2 foi de 95,47%, desta forma, o percentual da variabilidade observada das vendas em milhares de reais, explicado pela regressão linear simples, nos valores dos anos de experiência é 95,47%.

5.(8 pontos) O jacaré Açu (*Melanosuchus niger*) é o maior de todos os jacarés, podendo chegar até 6 metros de comprimento e até 300 quilos de peso. A reprodução ocorre uma vez por ano e sua média de vida é de 80 anos, mas pode chegar aos 100. O jacaré Açu está ameaçado de extinção, pois seu couro é muito cobiçado e sua carne muito saborosa. Na tabela abaixo são informados os comprimentos (em metros) de exemplares capturados, avaliados e depois devolvidos à natureza, em duas amostras, localidades A e B.

	Localidades									
Resumo das avaliações	A					B				
Comprimento (m)	1,5	2	3,5	4,4	5	1,8	2,3	3	4,5	6
Número de exemplares	3	5	2	3	1	4	5	2	3	1

Pede-se:

a.(2 pts) Os comprimentos médios dos exemplares de jacarés capturados nas duas localidades.

$$\bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_{Ai}X_{Ai}}{\sum_{i=1}^{5} f_{Ai}} = \frac{3\times 1,5+5\times 2+2\times 3,5+3\times 4,4+1\times 5}{3+5+2+3+1} = \frac{39,7}{14} = 2,8357$$

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_{Bi}X_{Bi}}{\sum_{i=1}^{5} f_{Bi}} = \frac{4\times 1,8+5\times 2,3+2\times 3+3\times 4,5+1\times 6}{4+5+2+3+1} = \frac{44,2}{15} = 2,9467$$

b.(2 pts) qual localidade apresentou uma estimativa de comprimento médio associada à uma maior precisão? Justifique sua resposta.

Temos que

$$S(X_A) = \sqrt{\frac{134,33-\frac{(39,7)^2}{14}}{14-1}} = 1,2935 \text{ e, } S(X_B) = \sqrt{\frac{154,16-\frac{(44,2)^2}{15}}{15-1}} = 1,3071.$$

Assim

$$S\left(\bar{X}_A\right) = \frac{S(X_A)}{\sqrt{n_A}} = \frac{1,2935}{\sqrt{14}} = 0,3457$$

e

$$S\left(\bar{X}_B\right) = \frac{S(X_B)}{\sqrt{n_B}} = \frac{1,3071}{\sqrt{15}} = 0,3375$$

Sabemos que o a estimativa mais precisa é aquela com menor erro padrão da média. Assim sendo, para a localidade B temos uma estimativa associada a uma maior precisão. Note porém que os valores são próximos.

c.(2 pts) Os comprimentos medianos e modais de cada localidade.

$$Md(X_A) = \frac{X_{(7)}+X_{(8)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$
$$Md(X_B) = X_{\left(\frac{15+1}{2}\right)} = X_{(8)} = 2,3$$

A amostra A é unimodal, sendo $Mo(X_A) = 2$. A amostra B também é unimodal, sendo $Mo(X_B) = 2,3$.

d.(2 pts) Qual das duas localidades, A ou B, apresentou uma amostra de comprimentos mais homogênea? Justifique sua resposta.

$$CV(X_A)\% \quad = \quad \frac{S(X)}{\bar{X}} \times 100\% = \frac{1,2935}{2,8357} \times 100\% = 45,62\%,$$

e,

$$CV(X_B)\% \quad = \quad \frac{S(Y)}{\bar{Y}} \times 100\% = \frac{1,3071}{2,9467} \times 100\% = 44,36\%.$$

Como $CV(X_B)\% = 44,36\% < 45,62\% = CV(X_A)\%$ temos que a amostra da localidade B é mais homogênea que a amostra da localidade A.