UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 1^o/2022 - 28/5/22

Nome: ____________________ **Matrícula:**____________

Assinatura: ____________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 4 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir, assinale (X), em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
-------------------------------------------------------------
 TURMA      HORÁRIO e  SALA               PROFESSOR
-------------------------------------------------------------
(   ) T1 - 3ª 8-10  e  5ª 10-12 PVB 300 - Paulo Cecon
(   ) T2 - 3ª 10-12  e  6ª 8-10 PVB 104 - Carlos Henrique(chos)
(   ) T3 - 3ª 14-16  e  5ª 16-18 PVB 100 - Ana Carolina
(   ) T4 - 2ª 14-16 PVB 102  e  4ª 16-18 PVB 106 - Moysés
(   ) T5 - 3ª 20:30-22:10  e  6ª 18:30-20:10 PVB 203 - Eduardo
(   ) T6 - 4ª 14-16  e  6ª 16-18 PVA 361 - Camila/Ana Carolina
(   ) T7 - 2ª 16-18 e 5ª 14-16 PVB 307 - Camila
(   ) T8 - 2ª 18:30-20:10  e  20:30-22:10 PVA 361 - Eduardo
(   ) T9 - 2ª 16-18  e  5ª 14-16 PVA 353 - Antônio Policarpo
-------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão. Recomenda-se apresentar as fórmulas e os respectivos valores utilizados nos cálculos.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i \qquad \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(4 pts) Dado que,

$$\sum_{i=1}^{40} X_i = 90, \quad \sum_{j=1}^{30} Y_j = 70, \quad \sum_{k=1}^{25} W_k = 40,$$

e também que,

$$\sum_{i=1}^{40} X_i^2 = 200, \quad \sum_{j=1}^{30} Y_j^2 = 100, \quad \sum_{k=1}^{25} W_k^2 = 85,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule,

$$\sum_{i=1}^{40}\sum_{j=1}^{30}\sum_{k=1}^{25}\left[(X_i - Y_j)^2 + 2W_k\right].$$

SOLUÇÃO:
Número de termos dos somatórios: $NT_i = 40$, $NT_j = 30$ e $NT_k = 25$.

$$\sum_{i=1}^{40}\sum_{j=1}^{30}\sum_{k=1}^{25}\left[(X_i - Y_j)^2 + 2W_k\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i\sum_j\sum_k \left(X_i^2 - 2X_iY_j + Y_j^2 + 2W_k\right) \\
&= (30 \times 25 \sum X^2) - (2 \times 25 \sum X \sum Y) + (40 \times 25 \sum Y^2) + (2 \times 40 \times 30 \sum W) \\
&= (750 \times 200) - (50 \times 90 \times 70) + (1.000 \times 100) + (2.400 \times 40) \\
&= 150.000 - 315.000 + 100.000 + 96.000 \\
&= 31.000
\end{aligned}$$

2.(4 pts) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule,

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 20,40}}^{60} (k-2)^3 .$$

SOLUÇÃO:

Número de termos do somatório: $NT_k = (60-1)+1-2 = 58$.

<u>1ª solução</u>

$$\begin{aligned}
&= \sum_k (k^3 - 3k^2\cdot 2 + 3k\cdot 2^2 - 2^3)\\
&= \sum_k (k^3 - 6k^2 + 12k - 8)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{60} k^3 - 20^3 - 40^3\right) - 6\left(\sum_{k=1}^{60} k^2 - 20^2 - 40^2\right) + 12\left(\sum_{k=1}^{60} k - 20 - 40\right) - (58\cdot 8)\\
&= \left(\frac{60\cdot 61}{2}\right)^2 - 72.000 - 6\left(\frac{60\cdot 61\cdot 121}{6} - 2.000\right) + 12\left(\frac{60\cdot 61}{2} - 60\right) - 464\\
&= (1.830^2 - 72.000) - 6(73.810 - 2.000) + 12(1.830 - 60) - 464\\
&= 3.276.900 - 430.860 + 21.240 - 464\\
&= 2.866.816
\end{aligned}$$

<u>2ª solução</u>

Faça

$$k - 2 = t \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow t = -1 & \quad k = 20 \Rightarrow t = 18\\ k = 60 \Rightarrow t = 58 & \quad k = 40 \Rightarrow t = 38 \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1\\k\neq 20,40}}^{60} (k-2)^3 &= \sum_{\substack{t=-1\\t\neq 18,38}}^{58} t^3 = \sum_{t=1}^{58} t^3 + (-1)^3 - 18^3 - 38^3\\
&= \left(\frac{58\cdot 59}{2}\right)^2 - 1 - 5.832 - 54.872\\
&= 2.927.521 - 1 - 5.832 - 54.872\\
&= 2.866.816
\end{aligned}$$

3.(10 pts) Na tabela abaixo são informadas as notas de intenção de compra atribuídas por duas amostras aleatórias de consumidores. Foram avaliadas duas versões alternativas de um produto, designados com A e B. Na escala de notas atribuídas nas avaliações, nota 1 = definitivamente não compraria e nota 5 = definitivamente compraria.

	Alternativas do produto									
Resumo das avaliações	A					B				
Notas atribuídas	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Número de avaliadores	5	3	4	8	10	8	1	6	6	12

Pede-se:

a.(2 pts) As notas médias, medianas e modais de cada alternativa do produto.

Pela calculadora obtemos $\sum X_A = 105$, $\sum X_A^2 = 431$ e $n_A = 30$.

$$\begin{aligned} \bar{X}_A &= 3,5 \\ Md_A &= \frac{X_{(15)+X_{(16)}}}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \\ Mo_A &= 5 \end{aligned}$$

Pela calculadora obtemos $\sum X_B = 112$, $\sum X_B^2 = 462$ e $n_B = 33$.

$$\begin{aligned} \bar{X}_B &\cong 3,394 \\ Md_B &= X_{(17)} = 4 \\ Mo_B &= 5 \end{aligned}$$

b.(2 pts) O desvio padrão das notas de cada alternativa do produto.

$$S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{\frac{431 - \frac{105^2}{30}}{29}} \cong 1,47975 \cong 1,48$$

$$S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{\frac{462 - \frac{112^2}{33}}{32}} \cong 1,59959 \cong 1,599$$

c.(3 pts) Qual das duas médias foi estimada com maior precisão, do produto A ou do B? Justifique sua resposta.

$$S(\bar{X}_A) = \frac{S_A}{\sqrt{n_A}} \cong 0,27016 \cong 0,27$$
$$S(\bar{X}_B) = \frac{S_B}{\sqrt{n_B}} \cong 0,27845 \cong 0,28$$

Foram estimados com a mesma precisão pois os erros padrão das médias foram iguais.

d.(3 pts) Qual dos dois produtos apresentou uma amostra de notas mais homogênea? Justifique sua resposta.

$$CV_A(\%) = \frac{S_A}{\bar{X}_A} \cdot 100\% \cong 42,2785\% \cong 42,28\%$$
$$CV_B(\%) = \frac{S_B}{\bar{X}_B} \cdot 100\% \cong 47,1309\% \cong 47,13\%$$

Produto A devido ao menor coeficiente de variação.

4.(12 pts) A tabela seguinte mostra valores, ambos em milhares de reais, das vendas mensais (Y, em R$ x 1000) e dos respectivos valores investidos em propaganda online (X, em R$ x 1000) para 8 lojas de *e-commerce*.
Exemplo adaptado de: https://www.intellspot.com/linear-regression-examples/.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	1,7	1,5	2,8	5,0	1,3	2,2	1,3	0,0
Y_i	368	340	665	954	331	556	376	250

Pede-se: Utilize notação adequada e responda aos itens a seguir.

a.(2 pts) Apresente os valores de: $\sum X$, $\sum Y$, $\sum X^2$, $\sum Y^2$ e $\sum XY$.

$$\sum X = 15,8 \quad \sum X^2 = 46,2 \quad \sum Y = 3.840 \quad \sum Y^2 = 2.225.938 \quad \sum XY = 9.909,9$$

b.(2 pts) Apresente o modelo de regressão linear simples ajustado (aproxime a segunda casa após a vírgula, por ex: 0,925=0,93 ou 4,106=4,11).

$$\hat{Y}_i = 173,65 + 155,11X_i$$

c.(2 pts) Interprete a estimativa do coeficiente de regressão.

$$b_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = \frac{2325,9}{14,995} = 155,11170 \cong 155,11$$

Aumento médio estimado para a venda mensal (R$ 155.111,70) para um aumento de uma unidade (R$ 1.000,00) nos investimentos com propaganda online.

d.(2 pts) Interprete a estimativa da constante de regressão.

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X} = 480 - 155,11 \cdot 1,975 \cong 173,65775$$

R$ 173.657,75 é o valor médio estimado das vendas mensais quando não se investe em propaganda online ($X = 0$).

e.(2 pt) Calcule e interprete o coeficiente de determinação.

$$r^2(\%) = \frac{SQ_{REG}}{SQ_{TOT}} \cdot 100\% = \frac{b_1 SPD_{XY}}{SQD_Y} \cdot 100\% = \frac{360.774,3121}{382.738} \cdot 100\% \cong 94,26\%$$

ou

$$r^2(\%) = (r_{XY})^2 \cdot 100\% = (0,9709)^2 \cdot 100\% = 94,26\%$$

é o % da variabilidade observada nos valores da vendas mensais que foi "explicado"pelo MRLS nos valores dos gastos mensais investidos com propaganda online.

f.(2 pt) Estime o valor médio das vendas mensais e também o correspondente desvio da regressão, quando se gasta 2,8 milhares de reais com propaganda online.

$$\hat{Y} = b_0 + b_1(2,8) \cong 607,97$$
$$\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} = 665 - 607,97 = 57,03$$