UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 2^0 semestre de 2014 - 18/out/14

Nome: ______________________________ **Matrícula:**________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
T20: EST 085 T1 3=18:30-20:10 PVA126 - Monitor II - Gabi Nunes
T20: EST 085 T3 5=16:00-18:00 PVA361 - Monitor II
--------------------------------------------------------------
T1: 2=10-12 e 5=8-10    PVB310 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T2: 2=16-18 e 5=14-16  PVB310 - CHOS (coordenador)
--------------------------------------------------------------
T5: 3=16-18 e 6=14-16  PVB310 - Ana Carolina e Moysés
--------------------------------------------------------------
T6: 2=14-16 e 4=16-18  PVB107 - Fernando
--------------------------------------------------------------
T7: 4=8-10 e 6=10-12   PVB206 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T8: 3=18:30-20:10 e 5=20:30-22:10 PVB306 - Paulo Emiliano
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, **portanto não é permitido questionamentos durante a prova** !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\, dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\, dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

1.(8 pontos) Existem fortes evidências de que um determinado time tem sido constantemente beneficiado pela arbitragem em jogos decisivos no estádio do Maracanã. Verificou-se que nos últimos anos este time venceu 50% dos jogos decisivos, empatou 30% e perdeu apenas 20%. Em termos de erros decisivos da arbitragem que foram favoráveis ao referido time, constatou-se as seguintes probabilidades condicionais: foi beneficiado em 95% das vezes que venceu o jogo, em 70% das vezes quando empatou e em 25% quando perdeu. Com base nestas informações, pede-se:

a.(3 pts) Calcule a probabilidade deste time ser beneficiado pela arbitragem em jogos decisivos no Maracanã.

Sejam:
A_1 : "O time venceu um jogo decisivo";
A_2 : "O time empatou um jogo decisivo";
A_3 : "O time perdeu um jogo decisivo";
B : "O time foi beneficiado por erros de arbitragem".

Temos que

$$\begin{array}{ll} P(A_1) = 0,50 & P(B|A_1) = 0,95 \\ P(A_2) = 0,30 & P(B|A_2) = 0,70 \\ P(A_3) = 0,20 & P(B|A_3) = 0,25 \end{array}$$

e pelo teorema da probabilidade total

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \\ &= 0,95 \times 0,50 + 0,70 \times 0,30 + 0,25 \times 0,20 \\ &= 0,475 + 0,21 + 0,05 \\ &= 0,735 \end{aligned}$$

b.(2 pts) Dado que este time venceu um jogo decisivo no Maracanã, calcule a probabilidade condicional dele **não** ter sido beneficiado pela arbitragem.
Sabemos que

$$P(B^c|A_1) = 1 - P(B|A_1),$$

assim

$$P(B^c|A_1) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

c.(3 pts) Dado que este time foi beneficiado pela arbitragem em um jogo decisivo no Maracanã, calcule a probabilidade condicional dele ter perdido (ter sido derrotado) o jogo.

$$\begin{aligned} P(A_3|B) &= \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0,25 \times 0,20}{0,95 \times 0,50 + 0,70 \times 0,30 + 0,25 \times 0,20} = \frac{0,05}{0,735} = 0,0680. \end{aligned}$$

2.(6 pontos) Sejam A, B e C eventos pertencentes a um mesmo espaço amostral, tais que: A e B são eventos independentes; A e C são eventos mutuamente exclusivos; $P(B \cap C) = 0,12$; $P(A) = 0,21$; a probabilidade condicional do evento B dado o evento C é igual a $0,40$ e também que a probabilidade de ocorrer pelo menos um dos dois eventos, B ou C, é igual a $0,60$. Pede-se:

a.(3 pts) A probabilidade de que **nenhum dos três eventos** ocorra.

Sabemos que

$$\begin{array}{cc} P(B \cap C) = 0,12 & P(A) = 0,21 \\ P(B|\, C) = 0,40 & P(B \cup C) = 0,60 \end{array}$$

Assim

$$\begin{aligned} P(B|\, C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0,40 \\ P(C) &= \frac{P(B \cap C)}{0,40} = \frac{0,12}{0,40} = 0,30 \\ P(C) &= 0,30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,60 = P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + 0,30 - 0,12 \\ 0,60 &= P(B) + 0,1 \\ P(B) &= 0,60 - 0,18 = 0,42 \\ P(B) &= 0,42 \end{aligned}$$

Como A e B são independentes,

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = 0,21 \times 0,42 = 0,0882$$

Como A e C são mutuamente exclusivos, $A \cap C = \emptyset$, e assim

$$P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned} P\left[(A \cup B \cup C)^c\right] &= 1 - P\left[A \cup B \cup C\right] \\ &= 1 - \left[P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)\right. \\ &- \left. P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\right] \\ &= 1 - [0,21 + 0,42 + 0,30 - 0,0882 - 0 - 0,12 + 0] \\ &= 1 - 0,7218 \\ &= 0,2782 \end{aligned}$$

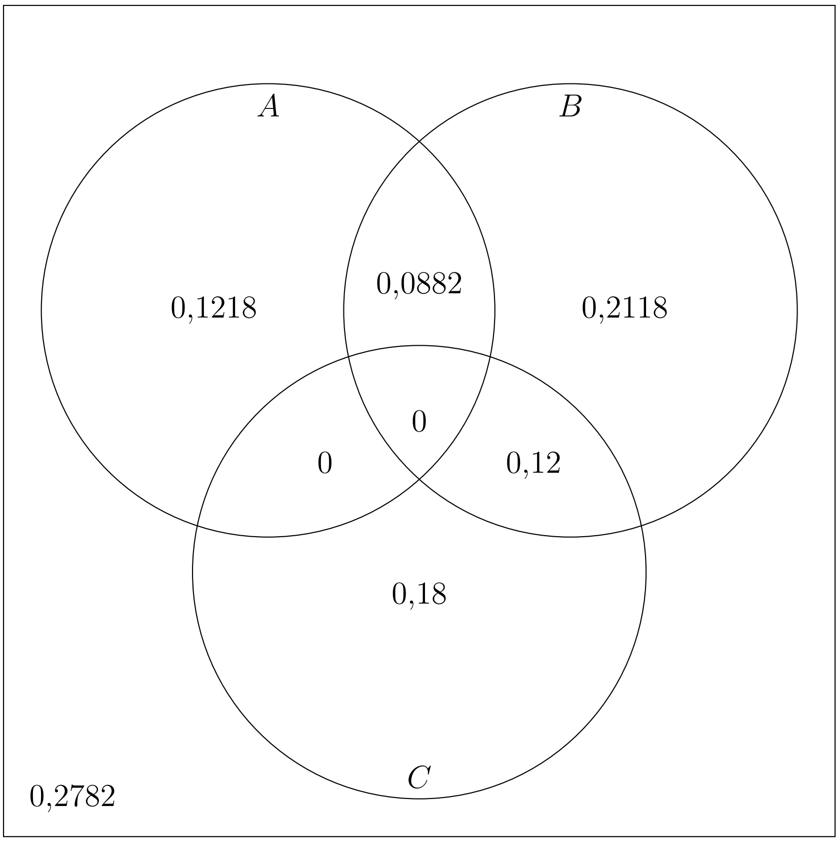
Assim

$$P\left[(A \cup B \cup C)^c\right] = 0,2782.$$

b.(3 pts) A probabilidade de **exatamente um** dos três eventos ocorrer.

$$p = P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)\right] =?$$

$$\begin{aligned}
p &= P\left(A \cap B^c \cap C^c\right) + P\left(A^c \cap B \cap C^c\right) + P\left(A^c \cap B^c \cap C\right) \\
&- P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B \cap C^c)\right] - P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C)\right] \\
&- P\left[(A^c \cap B \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C)\right] \\
&+ P\left[(A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C)\right] \\
&= P\left(A \cap (B \cup C)^c\right) + P\left(B \cap (A \cup C)^c\right) + P\left(C \cap (A \cup B)^c\right) - 0 - 0 - 0 + 0 \\
&= P(A) - P\left(A \cap (B \cup C)\right) + P(B) - P\left(B \cap (A \cup C)\right) + P(C) - P\left(C \cap (A \cup B)\right) \\
&= P(A) - P\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] + P(B) - P\left[(B \cap A) \cup (B \cap C)\right] + P(C) \\
&- P\left[(C \cap A) \cup (C \cap B)\right] \\
&= P(A) - \left(P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\left[(A \cap B) \cap (A \cap C)\right]\right) + P(B) \\
&- \left(P(B \cap A) + P(B \cap C) - P\left[(B \cap A) \cap (B \cap C)\right]\right) + P(C) \\
&- \left(P(C \cap A) + P(C \cap B) - P\left[(C \cap A) \cap (C \cap B)\right]\right) \\
&= 0,21 - (0,0882 + 0 - 0) + 0,42 - (0,0882 + 0,12 - 0) + 0,30 - (0 + 0,12 - 0) \\
&= 0,5136
\end{aligned}$$



3.(8 pontos) Considere a função de distribuição acumulada da variável aleatória discreta X dada a seguir,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0,60 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0,85 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,92 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,97 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se} \quad 4 \leq x \end{cases}$$

a.(4 pts) Apresente a tabela com a distribuição das probabilidades, $[x, P(x)]$.

x	0	1	2	3	4	Total
$P(X = x)$	0,60	0,25	0,07	0,05	0,03	1

b.(4 pts) Calcule $P(X > 3|X > 1)$.

$$\begin{aligned} P\left(X > 3|X > 1\right) &= \frac{P\left(\{X > 3\} \cap \{X > 1\}\right)}{P\left(X > 1\right)} = \frac{P\left(X > 3\right)}{P\left(X > 1\right)} \\ &= \frac{P\left(X = 4\right)}{P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right)} \\ &= \frac{0,03}{0,07 + 0,05 + 0,03} = \frac{0,03}{0,15} = \frac{1}{5} \\ &= 0,20 \end{aligned}$$

4.(3 pontos) Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade (f.d.p.),

$$f(x) = \begin{cases} k, & -5 \leq x < 0 \\ k - 3x, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{para outros valores } x \end{cases}$$

Pede-se: calcule o valor k.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-5} f(x)\,dx + \int_{-5}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-5} 0dx + \int_{-5}^{0} kdx + \int_{0}^{5} (k-3x)\,dx + \int_{5}^{+\infty} 0dx \\
&= 0 + kx|_{x=-5}^{0} + \left(kx - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{5} + 0 \\
&= k\,(0-(-5)) + \left[\left(5k - \frac{3\times 5^2}{2}\right) - \left(0k - \frac{3\times 0^2}{2}\right)\right] \\
&= 5k + 5k - \frac{75}{2} = 10k - \frac{75}{2}
\end{aligned}$$

Assim

$$10k - \tfrac{75}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad 10k = 1 + \tfrac{75}{2} \quad\Rightarrow\quad 10k = \tfrac{77}{2} \quad\Rightarrow\quad k = \tfrac{77}{20}$$

5.(5 pontos) Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(4xy+2x+2y+1)}{4}, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{para outros valores } x \text{ e } y \end{cases}$$

Pede-se: verifique se X e Y são variáveis aleatórias independentes. Responda SIM ou NÃO e justifique sua resposta.

Temos que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se a distribuição conjunta puder ser escrita como sendo o produto das distribuições marginais, isto é,

$$f(x,y) = g(x)\,h(y).$$

Vejamos se isto ocorre.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{4xy+2x+2y+1}{4}dy \\
&= \frac{1}{4}\left(4x\int_0^1 ydy + 2x\int_0^1 1dy + 2\int_0^1 ydy + \int_0^1 1dy\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4x\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} + 2xy|_{y=0}^{1} + 2\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} + y|_{y=0}^{1}\right) \\
&= \frac{x\left(1^2-0^2\right)}{2} + \frac{x(1-0)}{2} + \frac{1^2-0^2}{4} + \frac{1-0}{4} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2x+1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(y) &= \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{4xy+2x+2y+1}{4}dx \\
&= \frac{1}{4}\left(4y\int_0^1 xdx + 2\int_0^1 xdx + 2y\int_0^1 1dx + \int_0^1 1dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4y\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{1} + 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{1} + 2xy|_{x=0}^{1} + y|_{x=0}^{1}\right) \\
&= \frac{y\left(1^2-0^2\right)}{2} + \frac{1^2-0^2}{4} + \frac{y(1-0)}{2} + \frac{1-0}{4} \\
&= \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = y + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2y+1}{2}
\end{aligned}$$

$$g(x)\,h(y) = \frac{2x+1}{2} \times \frac{2y+1}{2} = \frac{4xy+2x+2y+1}{4} = f(x,y)$$

Desta forma X e Y são variáveis aleatórias independentes.