UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 1^0 semestre de 2015 - 28/mar/15

Nome: ______________________________ **Matrícula:**____________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 9, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
T20: EST 085 T1 5=18:30-20:10 PVA102 - Monitor II - Gabi Nunes
T20: EST 085 T2 6=18:30-20:10 PVA254 - Monitor II
--------------------------------------------------------------
T1: 3=8-10 e 5=10-12    PVB300 - Paulo Cecon
--------------------------------------------------------------
T2: 3=10-12 e 6=8-10    PVB109 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T3: 3=14-16 e 5=16-18   PVB109 - Chos e Policarpo
--------------------------------------------------------------
T4: 2=14-16 e 4=16-18   PVB107 - Fernando
--------------------------------------------------------------
T5: 3=18:30-20:10 e 5=20:30-22:10   PVB208 - Camila
--------------------------------------------------------------
T6: 4=14-16 e 6=16-18   PVA117 - Chos
--------------------------------------------------------------
T7: 2=16-18 e 5=14-16   PVB307 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T10: 2=18:30-20:10 e 4=20:30-22:10 PVA353 - Moysés
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i \qquad \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(4 pontos) Dado que,

$$\sum_{i=1}^{10} X_{1i} = 40, \quad \sum_{i=1}^{10} X_{2i} = 40, \quad \sum_{i=1}^{10} X_{3i} = 50,$$

e também que,

$$\sum_{i=1}^{10} X_{1i}^2 = 200, \quad \sum_{i=1}^{10} X_{2i}^2 = 300, \quad \sum_{i=1}^{10} X_{3i}^2 = 500,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule,

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} (X_{ki} - 3)^2 .$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} (X_{ki} - 3)^2 &= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} \left(X_{ki}^2 - 6X_{ki} + 9\right) \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10} \left(5X_{ki}^2 - 5 \times 6X_{ki} + 5 \times 9\right) \\
&= 5\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10} X_{ki}^2 - 30\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10} X_{ki} + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{10} 45 \\
&= 5\left(\sum_{i=1}^{10} X_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{10} X_{2i}^2 + \sum_{i=1}^{10} X_{3i}^2\right) - 30\left(\sum_{i=1}^{10} X_{1i} + \sum_{i=1}^{10} X_{2i} + \sum_{i=1}^{10} X_{3i}\right) + 3 \times 10 \times 45 \\
&= 5\,(200 + 300 + 500) - 30\,(40 + 40 + 50) + 1350 \\
&= 5 \times 1000 - 30 \times 130 + 1350 \\
&= 5000 - 3900 + 1350 \\
&= 2450
\end{aligned}$$

2.(4 pontos) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule,

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{10} \left(k^3 - k^2 + 2k\right).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{10} \left(k^3 - k^2 + 2k\right) &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{10} k^3 - \sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{10} k^2 + 2\sum_{\substack{k=1\\k\neq 5}}^{10} k \\
&= \left[\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 - 5^3\right] - \left[\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}\right) - 5^2\right] + 2\left[\frac{10\times 11}{2} - 5\right] \\
&= (3025 - 125) - (385 - 25) + 2\,(55 - 5) \\
&= 2900 - 360 + 100 \\
&= 2640
\end{aligned}$$

3.(6 pontos) Nos itens a seguir assinale (V) se estiver inteiramente correto, ou, assinale (F) caso contrário e **indique e corrija onde estiver errado** (2 pontos cada item).

a.( ) A média geométrica dos valores $\{5,\ 12,\ 25,\ 40\ \}$ é igual a $20,5$.

Falso. Temos que

$$\bar{X}_G = \sqrt[4]{5 \times 12 \times 25 \times 40} = \sqrt[4]{6000} \cong 15,65$$

Modo correto:

"A média geométrica dos valores $\{5,\ 12,\ 25,\ 40\ \}$ é igual a $15,65$"

b.( ) Para uma amostra de valores $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, admita que $\overline{X} = 20$ seja a média aritmética. Portanto, sabe-se que: **(i)** $f(a) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)$ é minimizada quando $a = \overline{X} = 20$, **(ii)** $\sum_{i=1}^{n} (X_i - 20)^2 = 0$.

Falso. Modo correto:

" Para uma amostra de valores $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, admita que $\bar{X} = 20$ seja a média aritmética. Portanto, sabe-se que:

i) $f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - a)^2$ é minimizada quando $a = \bar{X} = 20$;

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - 20) = 0$."

c.( ) A média harmônica dos valores 60 e 90 é igual a 75.

Falso. Temos que:

$$\bar{X}_H = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{90}} = \frac{2}{\frac{3+2}{180}} = \frac{2}{1} \times \frac{180}{5} = 72.$$

Modo correto:

"A média geométrica dos valores 60 e 90 é igual a 72."

4.(8 pontos) A tabela seguinte mostra valores hipotéticos para X e Y.

i	1	2	3	4	5
X_i	0	2	4	6	8
Y_i	15	12,5	9,8	7	5,3

Pede-se:

a.(1 pt) Utilize sua calculadora para informar as seguintes somas:

$$\sum X = 20 \qquad \sum X^2 = 120 \qquad \sum Y = 49,6$$

$$\sum Y^2 = 554,38 \qquad \sum XY = 148,8$$

b.(2 pts) Apresente o modelo de regressão linear simples (RLS) ajustado que permita estimar o valor médio de Y como uma função de X (aproxime a segunda casa após a vírgula, por ex: 0,925=0,93 ou 4,106=4,11).

$$\widehat{Y}_i = 14,9 - 1,25X_i$$

c.(2 pts) Copie a tabela acima e com base no modelo de RLS ajustado, inclua os valores estimados e os desvios da regressão.

X_i	0	2	4	6	8
Y_i	15	12,5	9,8	7	5,3
$\widehat{Y}_i$	14,9	12,41	9,92	7,43	4,94
$\widehat{\varepsilon}_i$	0,1	0,09	-0,12	-0,43	0,36

$$\sum_{i=1}^{5} \widehat{\varepsilon}_i = 0,00$$

d.(2 pts) Interprete as duas estimativas dos parâmetros do modelo ajustado.

- $b_0 = 14,9$ é uma estimativa do valor médio de Y quando $X = 0$.
- $b_1 = -1,25$ é o decréscimo médio estimado para Y quando X é acrescido de uma unidade.

e.(1 pt) Apresente a estimativa do coeficiente de correlação linear simples.

$$r_{XY} \cong -0,997$$

5.(8 pontos) Na tabela abaixo são informadas as notas de intenção de compra atribuídas por avaliadores treinados, para três versões alternativas de um produto, designados com A, B e C. Na escala de notas atribuídas nas avaliações, nota 1 = definitivamente não compraria e nota 5 = definitivamente compraria.

	Alternativas do produto														
Resumo das avaliações	A					B					C				
Notas atribuídas	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Número de avaliadores	0	0	10	15	5	2	5	20	3	0	4	6	10	6	4

Pede-se:

a.(2 pts) as notas médias de cada alternativa do produto.

$$\bar{X}_A = \frac{\sum X_A}{n_A} = \frac{115}{30} \cong 3,83$$
$$\bar{X}_B = \frac{\sum X_B}{n_B} = \frac{84}{30} = 2,8$$
$$\bar{X}_C = \frac{\sum X_C}{n_C} = \frac{90}{30} = 3,0$$

b.(2 pts) qual alternativa do produto apresentou uma estimativa de nota média associada à uma maior precisão? Justifique sua resposta.

$$S\left(\bar{X}_A\right) = \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}} = \frac{S_A}{\sqrt{n_A}} \cong \frac{0,69893}{\sqrt{30}} \cong 0,12761 \text{ (maior precisão)}$$
$$S\left(\bar{X}_B\right) = \sqrt{\frac{S_B^2}{n_B}} = \frac{S_B}{\sqrt{n_B}} \cong \frac{0,7144}{\sqrt{30}} \cong 0,13043$$
$$S\left(\bar{X}_C\right) = \sqrt{\frac{S_C^2}{n_C}} = \frac{S_C}{\sqrt{n_C}} \cong \frac{1,23176}{\sqrt{30}} \cong 0,225$$

A variável de menor $S\left(\bar{X}\right)$ está associada à maior precisão.

c.(2 pts) as notas medianas e modais de cada alternativa do produto.

$$\text{Md}_A = \frac{X_{A(15)} + X_{A(16)}}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \quad \text{e} \quad \text{Mo}_A = 4$$

$$\text{Md}_B = \frac{X_{B(15)} + X_{B(16)}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \quad \text{e} \quad \text{Mo}_B = 3$$

$$\text{Md}_C = \frac{X_{C(15)} + X_{C(16)}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \quad \text{e} \quad \text{Mo}_C = 3$$

d.(2 pts) qual dos três produtos apresentou uma amostra de notas mais homogênea? Justifique sua resposta.

$$CV_A\,(\%) = \frac{S_A}{\bar{X}_A} \times 100\% \cong \frac{0,69893}{3,8333} \times 100\% \cong 18,23\%$$

$$CV_B\,(\%) = \frac{S_B}{\bar{X}_B} \times 100\% \cong \frac{0,71438}{2,8} \times 100\% \cong 25,51\%$$

$$CV_C\,(\%) = \frac{S_C}{\bar{X}_C} \times 100\% \cong \frac{1,2317}{3} \times 100\% \cong 41,06\%$$

A amostra A é a mais homogênea por possuir menor coeficiente de variação.