UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 2^0 semestre de 2013 - 19/out/13

Nome: ____________________________________ **Matrícula:** ____________________

Assinatura: ______________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 4 questões em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os cálculos ou se apresentar valores incorretos utilizados nos cálculos.
- ATENÇÃO: Sua nota será divulgada no sistema SAPIENS: informe a seguir em qual turma está matriculado.

```
---------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
---------------------------------------------------
T1 2ª 10-12 5ª 08-10 PVB310 Ana Carolina
---------------------------------------------------
T2 2ª 16-18 5ª 14-16 PVB310 Ana Carolina
---------------------------------------------------
T3 2ª 08-10 4ª 10-12 PVB310 Moyses
---------------------------------------------------
T4 3ª 10-12 6ª 08-10 PVB310 Paulo Cecon
---------------------------------------------------
T5 3ª  16-18 6ª  14-16 PVB310 Policarpo
---------------------------------------------------
T7 4ª 08-10 6ª 10-12 PVB206 Moyses
---------------------------------------------------
T8 4ª 18:30-20:10 6ª 20:30-22:10 PVB306 Paulo Emiliano
---------------------------------------------------
T9 3ª 14-16 5ª 16-18 PVB310 CHOS (coordenador)
---------------------------------------------------
T10 4ª 14-16 6ª 16-18 PVB107 CHOS
---------------------------------------------------
T20 -  Tutoria Especial  - Janeo (monitor II)
---------------------------------------------------
```

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i \qquad \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(5 pontos) Dado que,

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 100, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 250, \quad \sum_{j=1}^{10} Y_j = 40, \quad \sum_{j=1}^{10} Y_j^2 = 65, \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} Z_k = 12 \text{ e } \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} Z_k^2 = 32,$$

Utilize as propriedades de somatório e calcule:

$$\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{10}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} (X_i - Y_j + Z_k)^2$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{10}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} (X_i - Y_j + Z_k)^2 &= \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{10}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} \left(X_i^2 - 2X_iY_j + Y_j^2 + 2X_iZ_k - 2Y_jZ_k + Z_k^2\right) \\
&= 130\sum_{i=1}^{20} X_i^2 - 2\times 13\sum_{i=1}^{20} X_i \sum_{j=1}^{10} Y_j + 20\times 13\sum_{j=1}^{10} Y_j^2 + \\
&+ 2\times 10\sum_{i=1}^{20} X_i \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} Z_k - 2\times 20\sum_{j=1}^{10} Y_j \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} Z_k + 20\times 10 \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4,7}}^{15} Z_k^2 \\
&= 32500 - 104000 + 16900 + 24000 - 19200 + 6400 \\
&= -43400
\end{aligned}$$

2.(5 pontos) Dado que,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

Utilize as propriedades de somatório e calcule:

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{(2k-1)^3}{5}$$

Solução: Sabemos que

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) = \left(a^2 - 2ab + b^2\right)(a-b)\\ &= \left(a^2 - 2ab + b^2\right)(a-b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Em nosso problema $a = 2k$ e $b = 1$, assim

$$(2k-1)^3 = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{30} \frac{(2k-1)^3}{5} &= \sum_{i=1}^{30} \frac{(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)}{5} = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{30} 8k^3 - \sum_{i=1}^{30} 12k^2 + \sum_{i=1}^{30} 6k - \sum_{i=1}^{30} 1\right)\\ &= \frac{1}{5}\left(8\sum_{i=1}^{30} k^3 - 12\sum_{i=1}^{30} k^2 + 6\sum_{i=1}^{30} k - 30\right)\\ &= \frac{1}{5}(8 \times 216225 - 12 \times 9455 + 6 \times 465 - 30)\\ &= \frac{1619100}{5}\\ &= 323820\end{aligned}$$

3.(10 pontos) Duas amostras aleatórias de 20 Lobos Guará, obtidas em duas localidades distintas (Serra do Caraça e Serra do Brigadeiro), foram examinadas por um grupo de veterinários da UFV, com o intuito de se estimar a prevalência de um certo tipo de parasita. Os resultados são apresentados na tabela a seguir,

número de	Serra do Caraça					Serra do Brigadeiro				
parasitas	0	2	3	5	7	0	1	3	6	8
lobos	5	3	3	6	3	8	3	5	2	2

Pede-se:

a.(3 pontos) O número médio de parasitas por amostra.

Solução: Consideremos A : "Serra do Caraça" e B : "Serra do Brigadeiro".

Para A temos que $\sum\limits_{i=1}^{5} X_i = 66$ e $\sum\limits_{i=1}^{5} X_i^2 = 336$.

Para B temos que $\sum\limits_{i=1}^{5} X_i = 46$ e $\sum\limits_{i=1}^{5} X_i^2 = 248$.

Desta forma as médias são: $\bar{X}_A = \frac{66}{20} = 3,3$ e $\bar{X}_B = \frac{46}{20} = 2,3$

b.(2 ponto) Qual das duas estimativas de média está associada a uma maior precisão? Justifique.

Solução: Temos que

$S\left(X_A\right) = \sqrt{\frac{1}{20-1}\left(336 - \frac{(66)^2}{20}\right)} \cong 2,4942$ e $S\left(X_B\right) = \sqrt{\frac{1}{20-1}\left(248 - \frac{(46)^2}{20}\right)} \cong 2,7357$,

daí $S\left(\bar{X}_A\right) = \frac{S(X_A)}{\sqrt{n}} = \frac{2,4942}{\sqrt{20}} \cong 0,5577$ e $S\left(\bar{X}_B\right) = \frac{S(X_B)}{\sqrt{n}} = \frac{2,7357}{\sqrt{20}} \cong 0,6117$.

Como $S\left(\bar{X}_A\right) < S\left(\bar{X}_B\right)$, a estimativa da média $\bar{X}_A$ está associada a uma maior precisão.

c.(2 ponto) Os números mediano e modal de parasitas por amostra.

Solução: Para o conjunto A temos que o conjunto é unimodal e $Mo_A = 5$, além disso,

$$Md_A = \frac{X_{(10)} + X_{(11)}}{2} = 3.$$

Para o conjunto B temos que o conjunto é unimodal e $Mo_B = 0$, além disso,

$$Md_B = \frac{X_{(10)} + X_{(11)}}{2} = 1.$$

d.(3 pontos) Qual amostra é mais homogênea? Justifique.

Solução:

$$CV_A\,(\%) = \frac{S\left(X_A\right)}{\bar{X}} 100\% = \frac{2,4942}{3,3} 100\% = 75,582\%$$

$$CV_B\,(\%) = \frac{S\left(X_B\right)}{\bar{X}} 100\% = \frac{2,7357}{2,3} 100\% = 118,94\%$$

Como $CV_A\,(\%) < CV_B\,(\%)$, a amostra A é mais homogênea que a amostra B.

4.(10 pontos) A tabela seguinte mostra valores da renda familiar extra mensal ($X =$ R\$ $\times$ 100) e os respectivos valores dos gastos mensais com produtos supérfluos (Y em R\$ $\times$ 100). A renda familiar extra é o montante que sobra após os pagamentos de todas as despesas da família, e, os produtos supérfluos são aqueles que não compõem a cesta básica e não são considerados essenciais (bebidas alcoólicas, doces, etc).

X	0	3,5	5	12	35
Y	1	2	3,5	8	20

a.(2 **pontos)** Determine a equação de regressão linear simples que permita estimar o gasto médio com produtos supérfluos em função da renda extra.
Solução:

$$\widehat{Y_i} = 0,7537 + 0,5537X_i$$

b.(2 **pontos)** Interprete o valor estimado para o **coeficiente** da regressão.
Solução: Estima-se um aumento de R\$ 55,37 dos gastos com produtos supérfluos para cada aumento de R\$ 100,00 na renda familiar extra.

c.(2 **pontos)** Interprete o valor estimado para a **constante** da regressão.
Solução: Estima-se um gasto de R\$ 75,37 com produtos supérfluos para uma família que não possui renda extra.

d.(2 **pontos)** Calcule o coeficiente de determinação e interprete o valor calculado. Informe os seguintes valores:

$$SQ\text{regressão} = 242,28 \qquad SQ\text{total} = 243,20$$

Solução:

$$\text{SQ}_{\text{regressão}} = b_1^2\text{SQD}_X = (0,5537)^2\left(1406,25 - \frac{(55,5)^2}{5}\right) \cong 242,28$$

$$\text{SQ}_{\text{total}} = \left(481,25 - \frac{(34,5)^2}{5}\right) \cong 243,20$$

$$r^2\,(\%) = (0,9981)^2\% \cong 99,62\%$$

interpretação: percentual da variabilidade observada nos gastos com supérfluos explicado pela RLS nos valores de renda extra.

e.(2 **ponto)** Obtenha uma estimativa do gasto médio mensal com produtos supérfluos para uma família cuja renda mensal extra é de quatro mil reais (R\$ 4000). Comente à respeito desta estimativa.
Solução: Para $X = 40$ temos

$$\widehat{Y} = 0,7537 + 0,5537 \times 40 = 22,903.$$

Estima-se um gasto de R\$ 2290 com produtos supérfluos para uma família cuja renda extra é de R\$ 4000. Este resultado trata-se de uma extrapolação pois o intervalo pesquisado foi para famílias que ganhavam de zero a R\$3500 de renda extra.