UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 1^0 semestre de 2017 - 13/maio/17

Nome: ______________________________ **Matrícula:**____________________

Assinatura: ____________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: Assinale (X) em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
------------------------------------------------------------------------
      TURMA    HORÁRIO         SALA   PROFESSOR
------------------------------------------------------------------------
(   ) T1 3ª 08-10 5ª 10-12  PVB300 Cecon
(   ) T2 3ª 10-12 6ª 8-10   PVB109 Moysés
(   ) T3 3ª 14-16 5ª 16-18  PVB109 Camila/Carol
(   ) T4 2ª 14-16 4ª 16-18  PVB107 Carol
(   ) T5 3ª 20:30-22:10 6ª 18:30-20:10  PVB204 Eduardo
(   ) T6 4ª 14-16 6ª 16-18  PVA361  CHOS - coordenador
(   ) T7 2ª 16-18 5ª 14-16  PVB307 Camila
(   ) T10 2ª 18:30-20:10 4ª 20:30-22:10 PVA361 Eduardo
(   ) T20=EST085 T1 2ª 16   PVA134,T2 2ª 18:30 PVA348(Leísa, monitor II)
------------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c$ é o evento complementar

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

1.(8 pontos) Sabe-se que, em uma certa população, 50% dos indivíduos possuem casa própria e 80% possuem **casa própria ou automóvel**. Com base nestas informações, pede-se:

a.(5 pontos) Determine a probabilidade de um indivíduo sorteado ao acaso possuir automóvel, quando:

a1.(2,5 pts) Possuir casa própria e possuir automóvel são eventos mutuamente exclusivos.
Sejam A: "possuir casa própria" e B: "Possuir automóvel". Sabemos que $P(A) = 0,50$ e $P(A \cup B) = 0,80$.
Como os eventos são mutuamente exclusivos sabemos que $P(A \cap B) = 0$, assim

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0,80 &= 0,50 + P(B) - 0 \\ P(B) &= 0,30 \end{aligned}$$

a2.(2,5 pts) Se admite que 5% dos indivíduos possuem casa própria e automóvel.
Sabemos que $P(A \cap B) = 0,05$, assim

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0,80 &= 0,50 + P(B) - 0,05 \\ P(B) &= 0,35 \end{aligned}$$

b.(3 pontos) Admita que possuir casa própria e possuir automóvel são eventos independentes e calcule a **probabilidade condicional** de um indivíduo sorteado ao acaso possuir automóvel, dado que o mesmo **não possui casa própria**.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) = 0,50P(B) && (1) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). && (2) \end{aligned}$$

Utilizando (1) em (2) temos

$$\begin{aligned} 0,80 &= 0,50 + P(B) - 0,50P(B) \\ 0,50P(B) &= 0,30 \\ P(B) &= 0,60. \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,60 - 0,50P(B) = 0,60 - 0,50 \cdot 0,60 = 0,60 - 0,30 = 0,30 \end{aligned}$$

Assim

$$P(B|\, A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{0,30}{1 - 0,50} = 0,60.$$

2.(5 pontos) Admita que seis softwares disponíveis no mercado, para resolver um problema de programação linear, tenham sido rankeados de 1^o ao 6^o (melhor até pior). Uma firma que não sabia deste rankeamento adquiriu **aleatoriamente dois destes softwares**. Pede-se, calcule a probabilidade da firma ter adquirido:

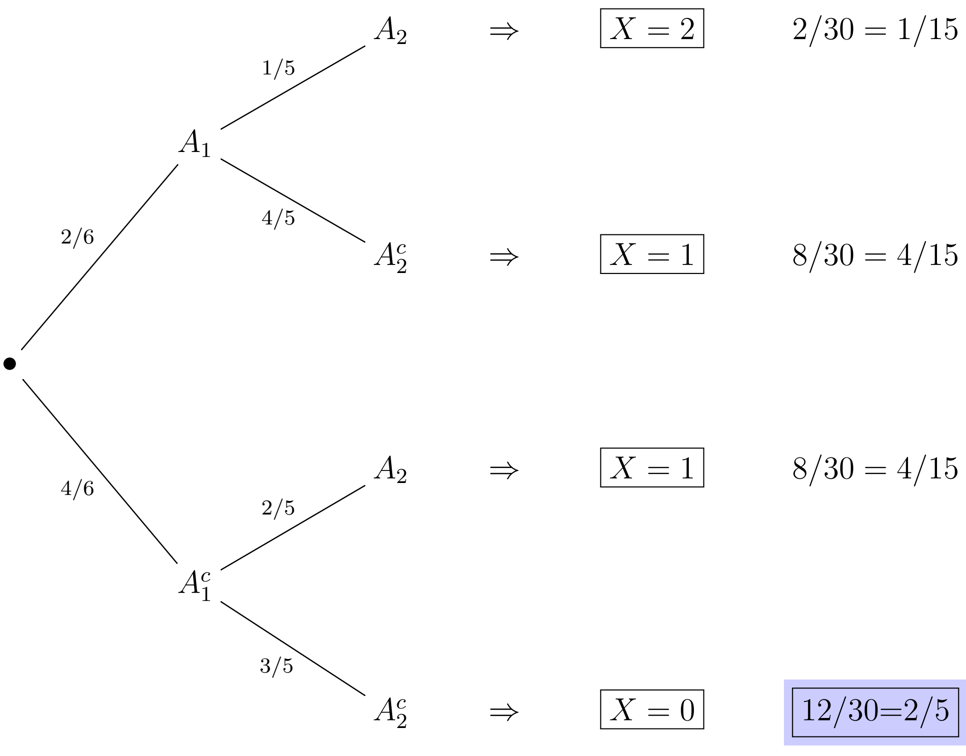
a.(2,5 pts) Apenas os softwares rankeados de 3^o ao 6^o.

Sejam $A_1 = \{$O primeiro software comprado está entre os dois primeiros ranqueados$\}$, $A_2 = \{$O segundo software comprado está entre os dois primeiros ranqueados$\}$ e X: "número de softwares de $A_1 \cup A_2$ que foram adquiridos" e note que a compra é feita sem reposição. Assim

Pelo conceito clássico temos:

$$P\left(X=0\right) = \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1\cdot 6}{15} = 0,40.$$

ou pelo diagrama em árvore:



$$P\left(A_1^c \cap A_2^c\right) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

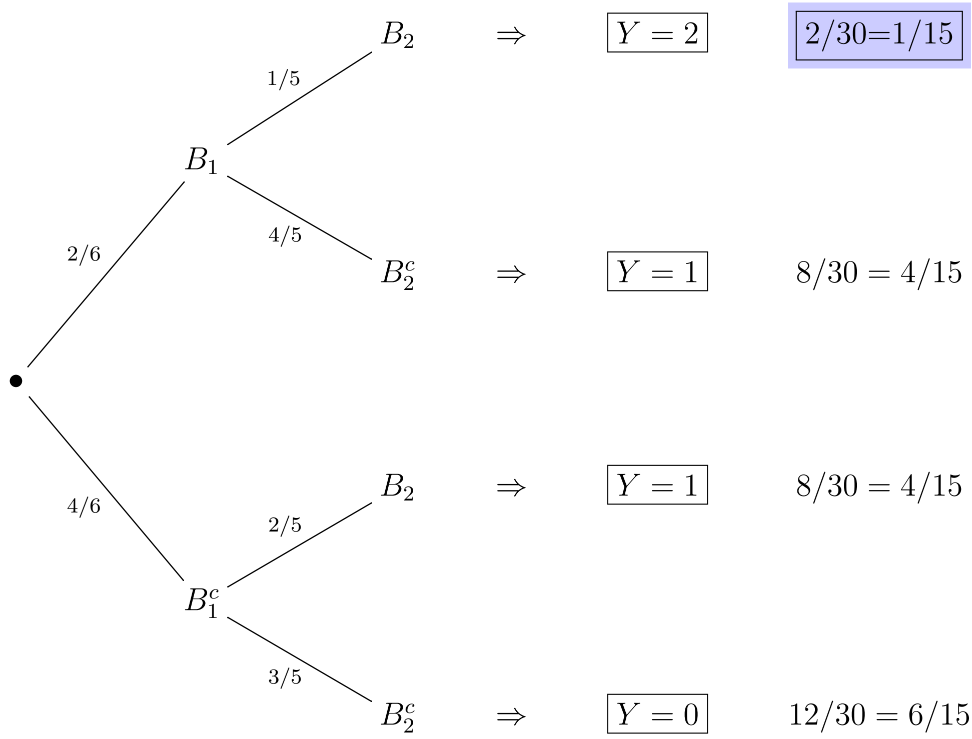
b.(2,5 pts) Os softwares rankeados 1^o e 6^o.

Sejam $B_1 = \{$ O primeiro software comprado é o 1^o ou o 6^o ranqueados$\}$, $B_2 = \{$O segundo software comprado é o 1^o ou o 6^o ranqueados$\}$ e Y: "número de softwares de $B_1 \cup B_2$ que foram adquiridos" e note que a compra é feita sem reposição. Assim

Pelo conceito clássico temos:

$$P\left(Y=2\right) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1\cdot 1}{15} \approx 0,0667$$

ou pelo diagrama em árvore:



$$P\left(Y=2\right)=P\left(B_1\cap B_2\right)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}\approx 0,0667$$

$$P\left(Y=1\right)=P\left(B_1\cap B_2^c\right)+P\left(B_1^c\cap B_2\right)=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{30}+\frac{8}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}\approx 0,5333$$

$$P\left(Y=0\right)=P\left(B_1^c\cap B_2^c\right)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=0,4$$

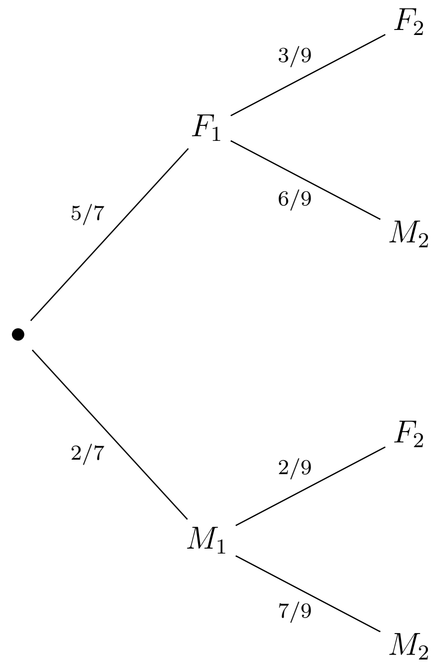
3.(6 pontos) O diretor de Recursos Humanos de uma empresa possui duas listas com nomes de candidatos; a lista 1 contém cinco mulheres e dois homens, já a lista 2 contém duas mulheres e seis homens. Se um nome foi aleatoriamente selecionado da lista 1 e adicionado na lista 2 e em seguida um nome foi aleatoriamente selecionado da lista 2 aumentada, pede-se:

a.(3 pts) Calcule a probabilidade de se selecionar uma mulher da lista 2 aumentada.

Sejam os seguintes eventos:

- $F_i = \{$selecionar um candidato do sexo feminino da i-ésima lista$\}$ e
- $M_i = \{$selecionar um candidato do sexo masculino da i-ésima lista$\}$;

Pelo diagrama em árvore tem-se o espaço amostral



$$
\begin{aligned}
P(F_2) &= P(F_1 \cap F_2) + P(M_1 \cap F_2) \\
&= \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \\
&= \frac{15}{63} + \frac{4}{63} = \frac{19}{63} \cong 0,3016 \text{ ou } 30,16\%.
\end{aligned}
$$

b.(3 pts) Se o nome selecionado da lista 2 aumentada é de um homem, calcule a probabilidade condicional de que a primeira seleção da lista 1 tenha sido uma mulher.

$$
\begin{aligned}
P(F_1 | M_2) &= \frac{P(F_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2 | F_1)\, P(F_1)}{1 - P(F_2)} \\
&= \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{9}}{1 - \frac{19}{63}} = \frac{\frac{30}{63}}{\frac{44}{63}} = \frac{30}{44} = \frac{15}{22} \cong 0,6818 \text{ ou } 68,18\%.
\end{aligned}
$$

4.(6 pontos) Suponha que o tempo, em meses, para a recuperação de pacientes submetidos a um determinado tipo de cirurgia do coração pode ser modelado por uma variável aleatória contínua X, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{12}(5-x), & \text{para } 1 \leq x \leq 5 \\ \\ 0, & \text{para outros valores de } x \end{cases}$$

Pede-se:

a.(2 pts) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$.

- Para $x < 0$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
- Para $0 \leq x < 1$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\, t|_{t=0}^{x} = \frac{1}{3}x$$

- Para $1 \leq x < 5$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{3}dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{12}(5-t)\,dt = \frac{1}{3} + \left.\left(\frac{5}{12}t - \frac{t^2}{24}\right)\right|_{t=1}^{x} \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{12}x - \frac{x^2}{24}\right) - \left(\frac{5}{12}\cdot 1 - \frac{1^2}{24}\right) = \frac{5}{12}x - \frac{x^2}{24} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{24}\left(-x^2 + 10x - 1\right) \end{aligned}$$

- Para $x \geq 5$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{3}dt + \int_{1}^{5} \frac{1}{12}(5-t)\,dt + \int_{5}^{x} 0dt = 1$$

Desta maneira

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{24}\left(-x^2 + 10x - 1\right), & 1 \leq x < 5 \\ 1, & 5 \leq x. \end{cases}$$

b.(2 pts) Calcule $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 3)$ usando a $f(x)$. ATENÇÃO: utilize a $f(x)$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 3\right) &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{12}(5-x)\, dx \\ &= \frac{1}{3}\, x\Big|_{x=1/2}^{1} + \left(\frac{5}{12}x - \frac{x^2}{24}\right)\Bigg|_{x=1}^{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{15}{12} - \frac{9}{24} - \frac{5}{12} + \frac{1}{24} \\ &= \frac{8-4+30-9-10+1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c.(2 pts) Calcule $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 3)$ usando a $F(x)$. ATENÇÃO: utilize a $F(x)$.

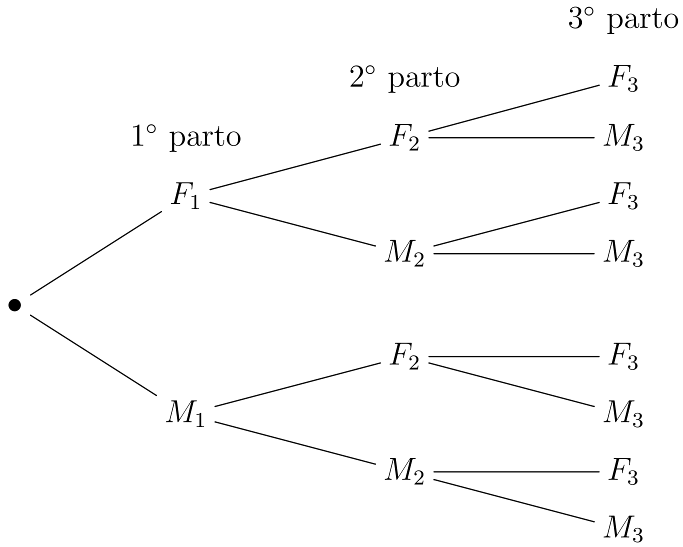
$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 3\right) &= F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}\left(-3^2 + 10 \cdot 3 - 1\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{24}(-9+30-1) - \frac{1}{6} = \frac{20}{24} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5.(5 pontos) Considere o espaço amostral do seguinte experimento aleatório: observar o sexo (masculino ou feminino) de três crianças em três partos de mães distintas, escolhidos aleatoriamente. Seja X a variável aleatória discreta que representa o número de crianças do sexo masculino que nasceram, pede-se:

a.(3 pts) Determine a tabela com a distribuição das probabilidades para X. Admita que o nascimento de bebês do sexo masculino ou feminino sejam eventos equiprováveis.

Sejam os eventos $F_i = \{$bebê do i-ésimo parto é do sexo feminino$\}$, $M_i = \{$bebê do i-ésimo parto é do sexo masculino$\}$ e X: "número de bebês do sexo masculino".

Pelo diagrama em árvore temos:



basta examinar os caminhos da árvore para se obter que:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1)\,P(F_2)\,P(F_3) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
P(X=1) &= P(F_1 \cap F_2 \cap M_3) + P(F_1 \cap M_2 \cap F_3) + P(M_1 \cap F_2 \cap F_3) \\
&= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
P(X=2) &= P(F_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap F_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap F_3) \\
&= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
P(X=3) &= P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = P(M_1)\,P(M_2)\,P(M_3) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

x	0	1	2	3	Total
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

b.(2 pts) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$.

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{8}, & 0\leq x<1\\ \frac{4}{8}, & 1\leq x<2\\ \frac{7}{8}, & 2\leq x<3\\ 1, & 3\leq x\end{cases}$$