# UFV- CCE - DET

## EST 105 - $3^a$ avaliação - $2^0$ semestre de 2016 - 19/nov/2016

**Nome:** ______________________________ **Matrícula:** ________________

**Assinatura:** ________________________. Favor apresentar documento com foto.

• São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 40 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.

• ATENÇÃO: Assinale (X) a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

| | TURMA | HORÁRIO | SALA | PROFESSOR |
|---|---|---|---|---|
| ( ) | T1 | $2^a$ 10-12 $5^a$ 8-10 | PVB310 | Camila |
| ( ) | T2 | $2^a$ 16-18 $5^a$ 14-16 | PVB310 | Camila |
| ( ) | T5 | $3^a$ 16-18 $6^a$ 14-16 | PVB310 | Eduardo |
| ( ) | T6 | $2^a$ 14-16 $4^a$ 16-18 | PVB107 | Paulo/CHOS |
| ( ) | T7 | $4^a$ 08-10 $6^a$ 10-12 | PVB206 | CHOS - coordenador |
| ( ) | T8 | $2^a$ 18:30-20:10<br>$4^a$ 20:30-22:10 | PVB306 | Eduardo |
| ( ) | T9 | $3^a$ 10-12 PVB300 $6^a$ 8-10 | PVB307 | Gerson |
| ( ) | T20=EST085 | T1 $2^a$ 16-18<br>T2 $2^a$ 18:30-20:10 | PVA388 | Leísa (monitora II) |

• Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !

• É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.

• PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.

• BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

## FORMULÁRIO & TABELAS

TABELA 1. Área na curva normal padrão entre $Z = 0$ e um valor positivo $Z = z$, $P(0 \leq Z \leq z)$.

| $z$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,425 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 |

TABELA 2. Valores de $\chi^2_\alpha$ tais que, $P(\chi^2\ \text{(GL)} \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$, GL é o número de graus de liberdade.

| Graus de | $\chi^2_\alpha$ | | |
|---|---|---|---|
| Liberdade | $\alpha = 0,050$ | $\alpha = 0,025$ | $\alpha = 0,010$ |
| 4 | 9,488 | 11,143 | 13,277 |
| 6 | 12,592 | 14,449 | 16,812 |
| 9 | 16,919 | 19,023 | 21,665 |

## FORMULÁRIO

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$COV(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$P(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \quad E(X) = Np \quad V(X) = Np(1-p) \quad \binom{N}{x} = \frac{N!}{x!(N-x)!}$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \qquad E(X) = V(X) = m \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \frac{(FO_{ij} - FE_{ij})^2}{FE_{ij}} \qquad n = (h-1)(k-1)$$

1.(8 pontos) Seja $W = 3X - 5Y + 2$, dado que,

$$V(X) = E(X^2) = 2,5 \quad E(Y) = 1,5 \quad E(Y^2) = 16,65 \quad \text{e} \quad E(XY) = -4,2.$$

Pede-se: utilize as propriedades do valor esperado, da variância e da covariância para calcular:

**a.(3 pts)** $E(W)$.

$$\begin{aligned} E(W) &= E(3X - 5Y + 2) = E(3X) - E(5Y) + E(2) \\ &= 3E(X) - 5E(Y) + 2 = 3 \times 0 - 5 \times 1,5 + 2 \\ &= -5,5 \end{aligned}$$

Note que

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

$$2,5 = 2,5 - (E(X))^2$$

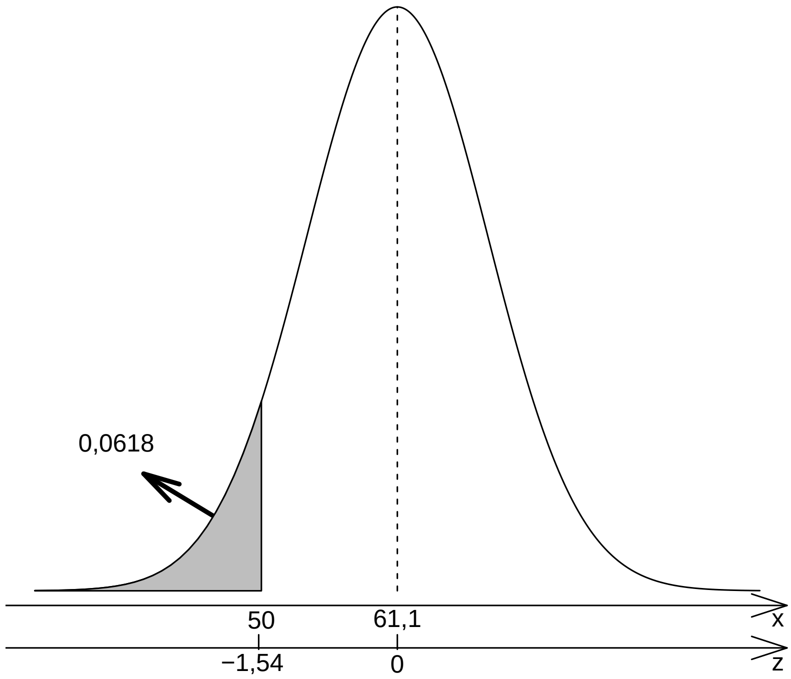
$$E(X) = 0$$

**b.(5 pts)** $V(W)$.

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = 16,65 - 1,5^2 \\ &= 14,4 \\ Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = -4,2 - 0 \times 1,5 \\ &= -4,2 \\ V(W) &= V(3X - 5Y + 2) = V(3X - 5Y) \\ &= V(3X) + V(5Y) - 2Cov(3X, 5Y) \\ &= 9V(X) + 25V(Y) - 2 \times 3 \times 5COV(X,Y) \\ &= 9 \times 2,5 + 25 \times 14,4 - 30 \times (-4,2) = 22,5 + 360 + 126 \\ &= 508,5 \end{aligned}$$

2.(8 pontos) O tempo total ($X$, em minutos) para a montagem de uma peça é a soma do tempo de montagem da primeira etapa ($X_1$) com o tempo de montagem da segunda etapa ($X_2$), portanto, $X = X_1 + X_2$. Se $X_1 \sim$N$(\mu_1 = 21,1; \sigma_1^2 = 15,6)$ e $X_2 \sim$N$(\mu_2 = 40; \sigma_2^2 = 36,24)$ são duas variáveis independentes, pede-se: utilize o teorema da combinação linear para calcular a probabilidade de que o tempo total para a montagem de uma peça seja inferior a 50 minutos. Faça um desenho ilustrativo dos cálculos.

$$
\begin{aligned}
\mu &= E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \mu_1 + \mu_2 \\
&= 21,1 + 40 = 61,1 \\
\sigma^2 &= V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X,Y) \\
&= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \times 0 = 15,6 + 36,24 = 51,84 \\
\sigma &= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{51,84} = 7,2 \\
P(X < 50) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50 - 61,1}{\sqrt{51,84}}\right) \approx P(Z < -1,54) \\
&= P(Z > 1,54) = 0,5 - P(0 \leq Z < 1,54) = 0,5 - 0,4382 \\
&= 0,0618
\end{aligned}
$$



3.(8 pontos) Seja $X$ a variável aleatória que represente o número de homens com mais de 40 anos de idade, diagnosticados com câncer de próstata, que sobrevivam por 10 anos ou mais. Admita também que a taxa de sobrevivencia seja de apenas $1,5\%$. Pede-se: em uma amostra aleatória de 400 homens com mais de 40 anos de idade, diagnosticados com câncer de próstata, calcule a probabilidade de que pelo menos 2 homens sobrevivam.

**a.(4 pts)** Admita $X \sim \text{Binomial}(N, p)$.

$N = 400$, $p = 0,015$ e $P(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$. Temos pelo complemento que

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\
&= 1 - \left[ \binom{400}{0} \times 0,015^0 \times 0,985^{400} + \binom{400}{1} \times 0,015^1 \times 0,985^{399} \right] \\
&= 1 - (0,0024 + 0,0144) \\
&= 0,9832
\end{aligned}$$

**b.(4 pts)** Admita $X \sim \text{Poisson}(m)$

$m = Np = 400 \times 0,015 = 6$ e $P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$. Temos pelo complemento que

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\
&= 1 - \left( \frac{e^{-6} 6^0}{0!} + \frac{e^{-6} 6^1}{1!} \right) = 1 - \left( e^{-6} + 6e^{-6} \right) = 1 - 7e^{-6} \\
&= 1 - 0,0174 = 0,9826
\end{aligned}$$

De outra forma:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - e^{-m} \left( \frac{m^0}{0!} + \frac{m^1}{1!} \right) \\
&= 1 - e^{-6} (1 + 6) = 1 - 7e^{-6} \\
&= 1 - 0,0174 = 0,9826
\end{aligned}$$

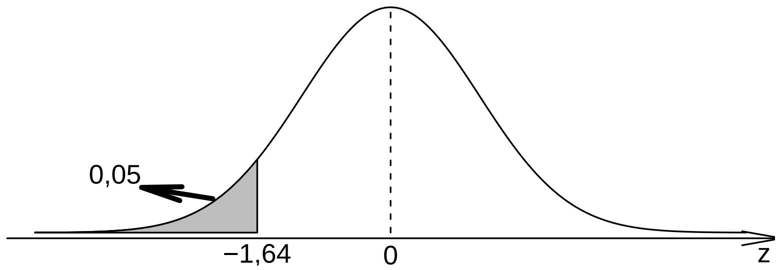
4. (8 pontos) Um fabricante informa que a durabilidade média de uma bateria recarregável é 300 horas com desvio-padrão 20 horas. Suspeita-se que a durabilidade média seja inferior ao valor informado pelo fabricante, e, para testar esta hipótese tomou-se uma amostra aleatória de 49 baterias que forneceu durabilidade média igual a 295 horas. Pede-se: realize um teste de hipótese a 5% conforme os itens a seguir:
(**ATENÇÃO, indique suas respostas nos espaços apropriados.**)

**a.(2 pts)** Hipóteses estatísticas

$\mathbf{H_0}$**:** $\mu = 300$

$\mathbf{H_1}$**:** $\mu < 300$

**b.(2 pts)** Valor tabelado = $\boxed{-1,64}$ olhando-se 0,0495 na tabela.
$\boxed{-1,65}$ olhando-se 0,0505 na tabela.




**c.(2 pts)** Valor calculado = $\boxed{-1,75}$

**d.(2 pts)** Decisão e interpretação,

( X ) Rejeitar $H_0 : \mu = 300$ e considerar que a informação do fabricante está incorreta.

(   ) Não rejeitar $H_0 : \mu < 300$ e considerar que a informação do fabricante está correta.

(   ) Não rejeitar $H_0 : \mu = 300$ e considerar que a informação do fabricante está correta.

(   ) Rejeitar $H_0 : \mu < 300$ e considerar que a informação do fabricante está incorreta.

**Mostre os cálculos abaixo (utilize duas casas decimais)**

$$z_{\text{cal}} = z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{295 - 300}{\sqrt{\frac{20^2}{49}}} = \frac{-5}{\frac{20}{7}} = -\frac{35}{20} = -1,75$$

5.(8 pontos) O Poder Executivo apresentou ao Congresso Nacional, no último dia 15 de junho, a PEC 241/2016, Proposta de Emenda à Constituição cujo objetivo é o de instituir um novo regime fiscal para o país. A PEC limita as despesas primárias da União aos gastos do ano anterior corrigidos pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Os dados apresentados na tabela a seguir foram obtidos em um estudo conduzido para se avaliar a opinião quanto à referida PEC. Considere o teste de qui-quadrado para independência com a seguinte hipótese de nulidade: $H_0$ : opinião e ocupação são duas variáveis aleatórias independentes. Adote o nível de significância igual a $2,5\%$ e responda os itens abaixo. (**ATENÇÃO, indique suas respostas nos espaços apropriados.**)

| | Ocupação | | | |
|---|---|---|---|---|
| Opinião | Estudante | Profissional liberal | Prof. universitário | Total |
| Contrário | 80 (53,33) | 20 (53,33) | 60 (53,33) | (160) |
| Indiferente | 10 (20) | 30 (20) | 20 (20) | (60) |
| A favor | 10 (26,67) | 50 (26,67) | 20 (26,67) | (80) |
| Total | (100) | (100) | (100) | (300) |

**a.(2 pt)** Complete a tabela com as frequências esperadas sob $H_0$.

**b.(4 pts)** Valor calculado: $\boxed{77,5} \approx 77,50$

**c.(1 pt)** Valor tabelado: $\boxed{11,143}$

**d.(1 pts)** Decisão: Rejeita-se $H_0$ a 2,5% de significância, portanto opinião e ocupação não são independentes..

**Mostre os cálculos abaixo (utilize duas casas decimais)**

G.L.$=n = (3-1)(3-1) = 2 \times 2 = 4$ e $\chi^2_{(4;2,5\%)} = 11,143$.

$$
\begin{aligned}
\chi^2_{\text{cal}} &= \frac{(80-53,33)^2}{53,33} + \frac{(20-53,33)^2}{53,33} + \frac{(60-53,33)^2}{53,33} + \\
&+ \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} \\
&+ \frac{(10-26,67)^2}{26,67} + \frac{(50-26,67)^2}{26,67} + \frac{(20-26,67)^2}{26,67} \\
&\cong 13,33 + 20,83 + 0,83 + 5 + 5 + 0 + 10,42 + 20,42 + 1,67 \\
&= 77,5 \approx 77,50
\end{aligned}
$$