UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 1^0 semestre de 2015 - 9/maio/15

Nome: ______________________ **Matrícula:** ______________

Assinatura: ____________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
EST 085 T1 5=18:30-20:10 PVA102 - Monitor II - Gabi Nunes
--------------------------------------------------------------
EST 085 T2 6=18:30-20:10 PVA254 - Monitor II - Gabi Nunes
--------------------------------------------------------------
T1: 3=8-10 e 5=10-12    PVB300 - Paulo Cecon
--------------------------------------------------------------
T2: 3=10-12 e 6=8-10    PVB109 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T3: 3=14-16 e 5=16-18   PVB109 - Chos e Policarpo
--------------------------------------------------------------
T4: 2=14-16 e 4=16-18   PVB107 - Fernando
--------------------------------------------------------------
T5: 3=18:30-20:10 e 5=20:30-22:10   PVB208 - Camila
--------------------------------------------------------------
T6: 4=14-16 e 6=16-18   PVA117 - Chos
--------------------------------------------------------------
T7: 2=16-18 e 5=14-16   PVB307 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T10: 2=18:30-20:10 e 4=20:30-22:10 PVA353 - Moysés
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão. NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os cálculos.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\ dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

1.(6 pontos) Considere o lançamento de dois dados perfeitamente simétricos, portanto o espaço amostral pode ser indicado por $S = \{(x_1, x_2) : x_i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6),\ i = 1, 2\}$, em que x_1 é o número da face superior do dado 1 e x_2 é o número da face superior do dado 2. Sejam os eventos A, B e C dados por:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{o dado 1 mostra um número par na face superior}\} \\ B &= \{\text{o dado 2 mostra um número ímpar na face superior}\} \\ C &= \{\text{os dois dados mostram números iguais na face superior}\} \end{aligned}$$

Pede-se: Os eventos A, B e C são mutuamente independentes? Justifique sua resposta.

Temos que

$$\begin{aligned} A = \{&(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(4,1);(4,2);(4,3); \\ &(4,4);(4,5);(4,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\} \end{aligned}$$

logo $P[A] = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} B = \{&(1,1);(2,1);(3,1);(4,1);(5,1);(6,1);(1,3);(2,3);(3,3); \\ &(4,3);(5,3);(6,3);(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(5,5);(6,5)\} \end{aligned}$$

logo $P[B] = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

$$C = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$

logo $P[C] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(2,1);(2,3);(2,5);(4,1);(4,3);(4,5);(6,1);(6,3);(6,5)\}, \\ A \cap C &= \{(2,2);(4,4);(6,6)\}, \\ B \cap C &= \{(1,1);(3,3);(5,5)\}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} P[A \cap B] &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P[A]\,P[B], \\ P[A \cap C] &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P[A]\,P[C], \\ P[B \cap C] &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P[B]\,P[C]. \end{aligned}$$

Logo os eventos são dois a dois independentes.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Porém não são mutuamente independentes, pois} \\ A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P[A \cap B \cap C] = 0 \neq P[A]\,P[B]\,P[C] \end{array}}$$

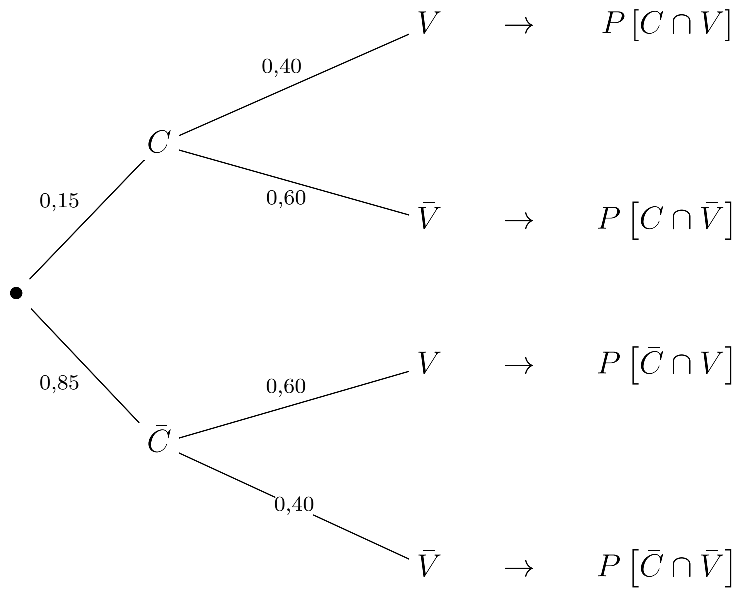
Basta a justificativa dentro do retângulo acima, não sendo necessário calcular $P[A]$, $P[B]$, $P[C]$, etc.

2.(5 pontos) Admita que a probabilidade de chover durante os jogos de um time no campeonato seja igual a $0,15$. Admita também que a probabilidade condicional deste time vencer um jogo, dado que é um dia de chuva, seja igual a $0,40$, mas, dado que é um dia sem chuva, seja igual a $0,60$. Pede-se: Tendo este time vencido um jogo no campeonato, qual é a probabilidade condicional de que tenha chovido no dia do jogo?

Sejam

$$C = \{\text{chover durante o jogo}\}$$

$$V = \{\text{time vencer o jogo}\}$$



$$\begin{aligned} P[C|\, V] &= \frac{P[C \cap V]}{P[V]} = \frac{0,15 \times 0,40}{0,15 \times 0,40 + 0,85 \times 0,60} \\ &= \frac{0,06}{0,06 + 0,51} = \frac{0,06}{0,57} \\ &\cong 0,1053. \end{aligned}$$

3.(5 pontos) Nos itens a seguir assinale verdadeiro (V) se estiver inteiramente correto, ou, assinale (F) e **indique e corrija onde for falso** (1 ponto cada item).

a.(F) Se A e B são eventos independentes de um mesmo espaço amostral, com $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,25$, então a probabilidade de **exatamente um** deles ocorrer é igual a $0,475$.

Temos que

$$\begin{aligned} P\left[\text{Pelo menos um}\right] &= P\left[A \cup B\right] = P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[A \cap B\right] = 0,475 \\ P\left[\text{Exatamente menos um}\right] &= P\left[A \cap B^c\right] + P\left[A^c \cap B\right] \\ &= P\left[A\right] + P\left[B\right] - 2P\left[A \cap B\right] = 0,40, \end{aligned}$$

Desta maneira a forma correta é: "Se A e B são eventos independentes de um mesmo espaço amostral, com $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,25$, então a probabilidade de **exatamente um** deles ocorrer é igual a $0,40$." Ou equivalentemente "Se A e B são eventos independentes de um mesmo espaço amostral, com $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,25$, então a probabilidade de **pelo menos um** deles ocorrer é igual a $0,475$."

b.(F) Em um ensaio clínico dois mil (2000) indivíduos foram vacinados contra a gripe e posteriormente verificou-se que apenas vinte (20) ficaram gripados. Pelo **conceito clássico de probabilidade** pode-se afirmar que a eficácia desta vacina é de 99%, ou seja, $P\left(\text{gripar após receber a vacina}\right) = 0,01$ ou 1%.

Em um ensaio clínico dois mil (2000) indivíduos foram vacinados contra a gripe e posteriormente verificou-se que apenas vinte (20) ficaram gripados. Pelo **conceito "a posteriori" ou frequência relativa** pode-se afirmar que a eficácia desta vacina é de 99%, ou seja, $P\left(\text{gripar após receber a vacina}\right) = 0,01$ ou 1%.

c.(F) Se X é uma variável aleatória discreta com função de distribuição acumulada $F(x)$, então para dois valores a e b pertencentes ao domínio de $F(x)$, tais que $a < b$, tem-se que: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

$$F\left(b\right) - F\left(a\right) = P\left[a < X \leq b\right].$$

Ou

$$P\left[a \leq X \leq b\right] = F\left(b\right) - F\left(a\right) + P\left[X = a\right].$$

d.(F) Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x) = k$ para $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = kx^2$ para $1 \leq x \leq 2$ e $f(x) = 0$ para outros valores x, então $k = 3/8$.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) dx = kx|_{x=0}^{1} + k\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=1}^{2} = k + \frac{7k}{3} = \frac{10k}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{10}.$$

e.(V) O **conceito moderno** de probabilidade é fundamentado nos seguintes axiomas: (i) $P(A) \geq 0$ para todo evento A contido no espaço amostral, (ii) $P(S) = 1$ e (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B são dois eventos do espaço amostral tais que $A \cap B = \emptyset$.

4.(6 pontos) Considere a variável aleatória discreta bidimensional (X, Y), com a seguinte distribuição de probabilidades,

	y				
x	1	2	3	4	$P(x)$
0	0,04	0,12	0,10	0,16	0,42
1	0,02	0,12	0,05	0,10	0,29
2	0,04	0,16	0,05	0,04	0,29
$P(y)$	0,10	0,40	0,20	0,30	1,00

a.(3 pts) X e Y são duas variáveis aleatórias independentes? Justifique.

Não, pois $P(x, y) \neq P(x)\, P(y)\,, \forall\ x$ e y.

Por exemplo,

$$P_{XY}(0,1) = 0,04 \neq P_X(0)\, P_Y(1) = 0,42 \times 0,10 = 0,042.$$

Desta forma, como não vale $P(x, y) = P(x)\, P(y)\,, \forall\ x$ e y, temos assim que X e Y não são independentes.

b.(3 pts) Calcule a seguinte probabilidade condicional: $P(1 \leq Y < 3 \mid X \geq 1)$.

Sejam

$$A = \{1 \leq Y \leq 3\} \text{ e } B = \{X \geq 1\}$$

Como

$$\begin{aligned}
P[A|\, B] &= \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \\
P[A|\, B] &= \frac{P[X \geq 1, 1 \leq Y \leq 3]}{P[X \geq 1]} \\
&= \frac{P_{XY}(1,1) + P_{XY}(1,2) + P_{XY}(2,1) + P_{XY}(2,2)}{P_X(1) + P_X(2)} \\
&= \frac{0,02 + 0,12 + 0,04 + 0,16}{0,29 + 0,29} = \frac{0,34}{0,58} \\
&\cong 0,5862
\end{aligned}$$

5.(8 pontos) Seja $f(x,y)$ uma função densidade de probabilidade conjunta dada por,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{33}\left(x^2+y^2x\right) & , \quad 0 \le x \le 1 \;\text{ e }\; 0 \le y \le 3 \\ 0 & , \quad \text{outros valores} \end{cases}$$

a.(4 pts) Calcule a seguinte probabilidade conjunta: $P\left(X \ge \frac{1}{2}\,,\; Y < 1\right)$.

$$\begin{aligned}
P\left[X \ge \frac{1}{2}, Y < 1\right] &= \int_0^1 \int_{1/2}^1 \frac{6}{33}\left(x^2+y^2x\right) dxdy = \int_0^1 \frac{6}{33}\left(\frac{x^3}{3}+y^2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}^1 dy \\
&= \frac{6}{33}\int_0^1 \left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)+\frac{y^2}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)\right] dy \\
&= \frac{6}{33}\int_0^1 \left(\frac{7}{24}+\frac{3y^2}{8}\right) dy = \frac{6}{33}\left(\frac{7}{24}y+\frac{y^3}{8}\right)\Bigg|_{y=0}^1 \\
&= \frac{6}{33}\left(\frac{7}{24}+\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{33}\times\frac{10}{24} = \frac{10}{132} \cong 0,076
\end{aligned}$$

b.(4 pts) X e Y são duas variáveis aleatórias independentes? Justifique.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^3 \frac{6}{33}\left(x^2+y^2x\right) dy = \frac{6}{33}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}x\right)\Bigg|_{y=0}^3 \\
&= \frac{6}{33}\left(3x^2+9x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{33}\left(x^2+y^2x\right) dx = \frac{6}{33}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^2x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^1 \\
&= \frac{6}{33}\left(\frac{1}{3}+\frac{y^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Como $g(x)\,h(y) \neq f(x,y)$, as variáveis X e Y não são independentes.