UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 1^0 semestre de 2014 - 5/abr/14

Nome: ________________________________ **Matrícula:** ________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 4 questões em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os valores utilizados na fórmula.
- ATENÇÃO: Sua nota será divulgada no sistema SAPIENS: informe a seguir em qual turma está matriculado.

```
---------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
---------------------------------------------------
T20: EST 085 5e6=18:30-20:10 PVA102 - Gabi,Monitor II
---------------------------------------------------
T1: 3=08-10 e 5=10-12 PVB300 - Paulo Cecon
---------------------------------------------------
T2: 3=10-12 e 6=08-10 PVB109 - Ana Carolina
---------------------------------------------------
T3: 3=14-16 e 5=16-18 PVB109 - CHOS
---------------------------------------------------
T4: 2=14-16 e 4=16-18 PVB107 - Fernando
---------------------------------------------------
T5: 4=18:30-20:10 e 6=20:30-22:10 PVB208 - Camila
---------------------------------------------------
T6: 4=14-16 e 6=16-18 PVA361 - CHOS
---------------------------------------------------
T7: 2=16-18 e 5=14-16 PVB307 - Ana Carolina
---------------------------------------------------
T8: 2=16-18 e 5=14-16 PVB209 - Moysés
---------------------------------------------------
T10: 2=18:30-20:10 e 4=20:30-22:10 PVB104 - Camila
---------------------------------------------------
```

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{X_i}} \qquad \overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \quad \text{ou} \quad \overline{X}_G = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \qquad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \qquad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i \qquad \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(6 pontos) Considere os seguintes pares de valores (X_i, Y_i),

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	2	4	6	8	3	5	8	2	9	3
Y_i	1	3	7	5	9	2	3	4	6	4

Utilize sua calculadora e as propriedades de somatório para calcular:

a.(3 pts) $\sum_{i=1}^{10}\left[\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\right]$.

Na calculadora:

$$n=10,\quad \sum X_i=50,\quad \sum Y_i=44,\quad \sum X_i^2=312,\quad \sum Y_i^2=246,\quad \sum X_iY_i=231$$

$$\begin{aligned}
SPD_{XY} &= \sum_{i=1}^{10}\left[\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)\right]=\sum_{i=1}^{10}\left(X_iY_i-X_i\bar{Y}-\bar{X}Y_i+\bar{X}\bar{Y}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{10}X_iY_i-\sum_{i=1}^{10}X_i\bar{Y}-\sum_{i=1}^{10}\bar{X}Y_i+\sum_{i=1}^{10}\bar{X}\bar{Y}\\
&= \sum_{i=1}^{10}X_iY_i-\bar{Y}\sum_{i=1}^{10}X_i-\bar{X}\sum_{i=1}^{10}Y_i+10\bar{X}\bar{Y}\\
&= \sum_{i=1}^{10}X_iY_i-\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i\sum_{i=1}^{10}Y_i}{10}\quad\text{(Pode iniciar direto daqui).}\\
&= 231-\frac{50\times 44}{10}=231-220=11
\end{aligned}$$

b.(3 pts) $\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.

$$\begin{aligned}
SQD_X &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}{n}\\
&= 312-\frac{50^2}{10}\\
&= 312-250=62
\end{aligned}$$

2.(4 pontos) Dado que,

$$\sum_{i=5}^{30} X_i = 200, \quad \sum_{j=8}^{15} Y_j = 150 \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3,5,8}}^{10} Z_k = 30,$$

Utilize as propriedades de somatório e calcule:

$$\sum_{i=5}^{30}\sum_{j=8}^{15}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3,5,8}}^{10} \left(2X_i + Y_j - 5Z_k\right).$$

$$NT_i = (30-5)+1-0 = 26$$
$$NT_j = (15-8)+1-0 = 8$$
$$NT_k = (10-1)+1-3 = 7$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=5}^{30}\sum_{j=8}^{15}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3,5,8}}^{10} \left(2X_i + Y_j - 5Z_k\right) &= 2\sum_{j}\sum_{k}\left(\sum_{i} X_i\right) + \sum_{i}\sum_{k}\left(\sum_{j} Y_j\right) - 5\sum_{i}\sum_{j}\left(\sum_{k} Z_k\right) \\
&= 2\times 8\times 7\times 200 + 26\times 7\times 150 - 5\times 26\times 8\times 30 \\
&= 22400 + 27300 - 31200 \\
&= 18500
\end{aligned}$$

3.(10 pontos) A distribuição de frequências dos funcionários de duas empresas (A e B), segundo o número de filhos, é apresentada na tabela a seguir,

número de	Empresa A						Empresa B					
filhos	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
funcionários	15	20	12	6	2	1	22	30	15	9	6	0

Pede-se:

a.(3 pts) O número médio de filhos por funcionário em cada uma das empresas.

$$\bar{X}_A = \frac{\sum X_{iA}}{n_A} = \frac{75}{56} \cong 1,3393 \text{ filhos por funcionário.}$$

$$\bar{X}_B = \frac{\sum X_{iB}}{n_B} = \frac{111}{82} \cong 1,3537 \text{ filhos por funcionário.}$$

b.(2 pts) Com base no erro padrão da média, verifique qual das duas estimativas das médias está associada a uma maior precisão e justifique sua resposta.

$$S\left(\bar{X}_A\right) = \frac{S_A}{\sqrt{n_A}} \cong \frac{1,1951}{\sqrt{56}} \cong 0,1597 \text{ filhos.}$$

$$S\left(\bar{X}_B\right) = \frac{S_B}{\sqrt{n_B}} \cong \frac{1,2005}{\sqrt{82}} \cong 0,1326 \text{ filhos.}$$

A empresa B tem maior precisão, devido ao menor valor de $S\left(\bar{X}\right)$.

c.(3 pts) Qual empresa apresenta uma distribuição mais homogênea? Justifique.

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{X}_A} \times 100\% \cong \frac{1,1951}{1,3393} \times 100\% \cong 89,23\%$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{X}_B} \times 100\% \cong \frac{1,2005}{1,3537} \times 100\% \cong 88,69\%$$

A empresa B tem distribuição mais homogênea, devido ao menor valor de CV (%).

d.(2 pts) A amplitude total em cada empresa.

$$AT_A = X_{A(56)} - X_{A(1)} = 5 - 0 = 5$$

$$AT_B = X_{B(82)} - X_{B(1)} = 4 - 0 = 4$$

4.(10 pontos) A tabela seguinte mostra valores das vendas mensais (Y em R\$ $\times$ 1000) e os respectivos valores dos gastos mensais com propaganda (X em R\$ $\times$ 1000), de uma empresa que comercializa produtos eletrônicos.

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Y	100	110	112	115	117	116	118	120	121	120	117	123
X	5,5	5,8	6	5,9	6,2	6,3	6,5	6,6	6,4	6,5	6,7	6,8

Na tabela a seguir algumas estatísticas úteis.

Variável	n	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
X	12	6,2667	0,3962	5,5	6,8
Y	12	115,7500	6,1809	100	123
XY	12	727,3667	80,1869	550	836,4

a.(3 pts) Calcule o coeficiente de correlação linear simples.

$$\begin{aligned} SPD_{XY} &= \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n} = n\overline{XY} - \frac{n\bar{X}n\bar{Y}}{n} = n\left(\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}\right) \\ &= 23,9541 \end{aligned}$$

$SPD_{XY} = 24$, se jogar os dados na calculadora.

$$\begin{aligned} SQD_X &= \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n} = S_X^2\,(n-1) \\ &= 0,3962^2 \times 11 \cong 1,7267 \text{ (Valor da calculadora)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SQD_Y &= \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{n} = S_Y^2\,(n-1) \\ &= 6,1809^2 \times 11 \cong 420,2388 \end{aligned}$$

$SQD_Y = 420,25$ (Valor da calculadora)

$$r_{XY} = \frac{23,9541}{\sqrt{1,7267 \times 420,2388}} \cong 0,8892 \text{ (Com os valores informados).}$$

$$r_{XY} = \frac{24}{\sqrt{1,7267 \times 420,25}} \cong 0,8909 \text{ (Valor da calculadora).}$$

b.(2 pts) Calcule os valores modais e medianos das vendas e dos gastos com propaganda.
$Mo_X = 6,5$ (Unimodal)
$Mo_Y = 117$, $Mo_Y = 120$ (Bimodal)

$$Md_X = \frac{X_{(6)} + X_{(7)}}{2} = \frac{6,3 + 6,4}{2} = 6,35$$

$$Md_Y = \frac{Y_{(6)} + Y_{(7)}}{2} = \frac{117 + 117}{2} = 117$$

c.(5 **pts)** Considere que os valores das vendas mensais (Y_i) sofrerão um reajuste e serão multiplicados por uma constante a e somados a outra constante b, criando-se uma nova escala de valores $W_i = aY_i + b$. Diante desse fato, justifique por meio das fórmulas e por propriedades de somatório:

c1.(2 pts) qual será o novo valor da média $\overline{W}$,

$$\overline{W} = \frac{\sum W_i}{n} = \frac{\sum (aY_i + b)}{n} = a\frac{\sum Y_i}{n} + \frac{nb}{n}$$

$$\overline{W} = a\bar{Y} + b$$

c2.(3 pts) qual será o novo valor da variância $S_W^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(W_i - \overline{W}\right)^2}{n-1}$.

$$\begin{aligned}
S_W^2 &= \frac{\sum \left(W_i - \overline{W}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum \left[(aY_i + b) - \left(a\bar{Y} + b\right)\right]^2}{n-1} \\
&= \frac{\sum \left[aY_i + b - a\bar{Y} - b\right]^2}{n-1} = \frac{\sum \left[a\left(Y_i - \bar{Y}\right)\right]^2}{n-1} \\
&= \frac{a^2 \sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{n-1} = a^2 S_Y^2
\end{aligned}$$