UFV- CCE - DET

EST 105 - 3^a avaliação - 2^0 semestre de 2015 - 23/nov/15

Nome: ______________________________ **Matrícula:**__________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- **FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR**. São 5 questões (uma página não numerada com tabelas) e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 40 pontos.
- ATENÇÃO: informe a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
TURMA         HORÁRIO   SALA    PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
T20: EST 085 T1 2a=16-18 PVA102 - Monitor II - Leisa Lima
T20: EST 085 T2 5a=18:30-20:10 PVA310 - Monitor II
--------------------------------------------------------------
T1: 2a=10-12 e 5a=8-10     PVB310 - Paulo Cecon
--------------------------------------------------------------
T2: 2a=16-18 e 5a=14-16    PVB310 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T5: 3a=16-18 e 6a=14-16    PVB310 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T6: 2a=14-16 e 4a=16-18    PVB107 - Ana Carolina
--------------------------------------------------------------
T7: 4a=8-10 e 6a-10-12     PVB206 - Moysés
--------------------------------------------------------------
T8: 2a=18:30-20:10 e 4a=20:30-22:10   PVB306 - Paulo Emiliano
--------------------------------------------------------------
T9: 3a=10-12  e 6a=8-10  PVB300/307 - Chos
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os valores utilizados na fórmula.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

Para a, b e c constantes finitas, X e Y variáveis aleatórias,

$$
\begin{aligned}
E(aX - bY + c) &= aE(X) - bE(Y) + c \\
V(aX - bY + c) &= a^2V(X) + b^2V(Y) - 2abCOV(X,Y)
\end{aligned}
$$

$$P(X = x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \quad E(X) = Np \quad V(X) = Np(1-p) \quad \binom{N}{x} = \frac{N!}{x!(N-x)!}$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \qquad E(X) = V(X) = m$$

$$X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right) \implies Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \implies Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\chi^2_\nu = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \qquad \nu = D.F. = (h-1)(k-1)$$

$$t_\nu = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\nu = \text{ Graus de liberdade} = n_1 + n_2 - 2$$

1.(8 pts) Admita que em uma população 1% das pessoas sejam portadoras de um gene para uma certa doença. Calcule a probabilidade de que no máximo 3 portadores sejam encontrados em uma amostra aleatória de 300 pessoas desta população.

a.(4 pts) Pelo modelo Binomial.

Seja X : "número de pessoas portadoras do gene". Temos que $X \sim \text{Bin}\,(300; 0,01)$, assim

$$\begin{aligned}
P\,(X \leq 3) &= \sum_{x=0}^{3} \binom{300}{x} 0,01^{x} \times 0,99^{300-x} \\
&= \binom{300}{0} 0,01^{0} \times 0,99^{300} + \binom{300}{1} 0,01^{1} \times 0,99^{299} + \\
&+ \binom{300}{2} 0,01^{2} \times 0,99^{298} + \binom{300}{3} 0,01^{3} \times 0,99^{297} \\
&\cong 0,049 + 0,1486 + 0,2244 + 0,2252 \\
&= 0,6472
\end{aligned}$$

b.(4 pts) Pelo modelo Poisson.

Temos que $m = Np = 300 \times 0,01 = 3$.

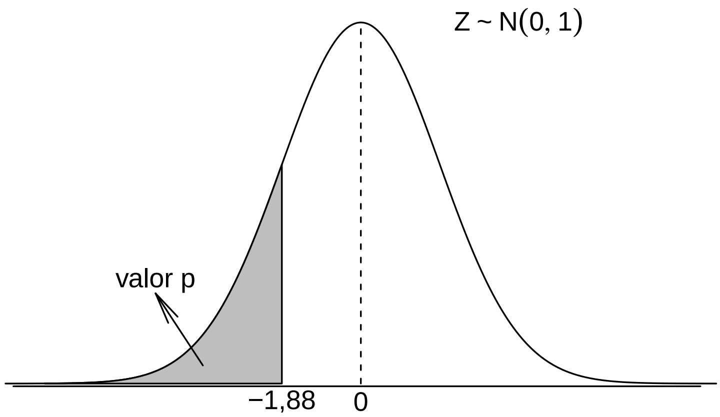
$$\begin{aligned}
P\,(X \leq 3) &= \sum_{x=0}^{3} \frac{\mathrm{e}^{-3} 3^{x}}{x!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-3} 3^{0}}{0!} + \frac{\mathrm{e}^{-3} 3^{1}}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{-3} 3^{2}}{2!} + \frac{\mathrm{e}^{-3} 3^{3}}{3!} \\
&= \mathrm{e}^{-3} \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-3} \times \frac{78}{6} = \mathrm{e}^{-3} \times 13 \\
&\cong 0,6472
\end{aligned}$$

2.(8 pts) Poluentes de indústrias, resíduos de mineração, esgoto residencial não tratado e outras formas de poluição, quando despejados nos rios, reduzem a quantidade de oxigênio dissolvido na água e podem torná-la inadequada para sustentar a vida aquática (peixes e anfíbios) devido à quantidade insuficiente de oxigênio. Uma agência que monitora a qualidade da água, afirma que 5 partes por milhão é o conteúdo mínimo de oxigênio dissolvido na água, para que esta seja apropriada para a vida aquática. Considere que uma amostra aleatória de 25 medidas do conteúdo de oxigênio em um rio forneceu um valor médio igual a $4,94$ partes por milhão. Pede-se: Utilize como desvio padrão o valor 0,16 e teste a hipótese de que este rio está adequado ($H_0 : \mu = 5$), contra uma hipótese alternativa unilateral de que não está adequado ($H_1 : \mu < 5$). Responda aos itens a seguir.

a.(4 pts) Valor calculado.

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{4,94 - 5}{\frac{0,16}{\sqrt{25}}} = -1,875 \cong -1,88$$

b.(2 pts) Valor-p (**faça um desenho ilustrativo**).



$$\begin{aligned} \text{valor p} &= P\left(Z \leq -1,88\right) = 0,5 - P\left(0 \leq Z \leq 1,88\right) = 0,5 - 0,4699 \\ &= 0,0301 \quad (3,01\%) \end{aligned}$$

c.(2 pts) Informe a decisão do teste **com base no valor-p**, para os níveis de significância de 5% e também 1%. Atenção: NÃO apresente valores tabelados para informar a decisão.

Decisão: Se valor p $\leq \alpha$ então rejeita-se H_0. Portanto:

- Para $\alpha = 0,05$ rejeita-se H_0;
- Para $\alpha = 0,01$ não rejeita-se H_0.

3.(8 pts) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas tais que,

$$X \sim \mathrm{N}(\mu_X = 20, \sigma_X^2 = 4) \quad \text{e} \quad Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y = 80, \sigma_Y^2 = 45).$$

Seja W uma variável aleatória dada pela seguinte combinação linear,

$$W = Y - X + 2.$$

Pede-se:

a. (6 pts) Calcule o valor w_0 tal que $P(W \leq w_0) = 0,0122$.

Solução: Temos que $W = Y - X + 2$ e, $Cov(X, Y) = 0$. Assim

$$E(W) = E(Y - X + 2) = E(Y) - E(X) + E(2) = 80 - 20 + 2 = 62 = \mu_W$$

$$V(W) = V(Y - X + 2) \overset{iid}{=} V(X) + V(Y) + V(2) = 4 + 45 = 49 = \sigma_W^2$$

Assim, pelo teorema da combinação linear $W \sim N(62; 49)$.

$$P(W \leq w) = P\left(Z \leq \frac{w - 62}{\sqrt{49}}\right) = 0,0122.$$

Probabilidade tabelada:

$$P(0 \leq Z \leq z) \ = \ 0,5 - 0,0122 = 0,4878$$

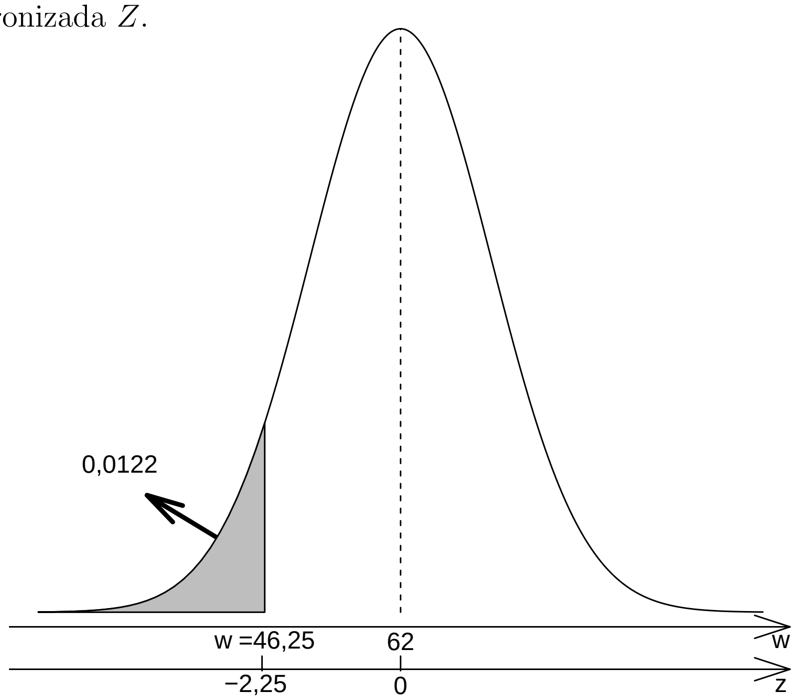
Da tabela da normal padrão, temos então que:

$$z_{\text{tabelado}} = 2,25$$

Como w está a esquerda de μ_W, então $-2,25$ é o valor padronizado para w. Portanto

$$\frac{w - \mu_W}{\sigma_W} = -2,25 \qquad \therefore w_0 = 46,25.$$

b. (2 pts) Faça um desenho ilustrativo da curva normal com a indicação do valor w_0 na escala padronizada Z.



4.(8 pts) O peso médio ao nascer de bebês (μ) de mulheres pobres que participaram de um programa de acompanhamento da gravidez por médicos e nutricionistas - Grupo Tratamento (T), deve ser comparado ao peso médio de bebês de mulheres em iguais condições, mas que não participaram deste programa - Grupo Controle (C). Pede-se: com base em duas amostras aleatórias (total de 15 mulheres avaliadas), cujos resultados são apresentados na tabela a seguir, teste a hipótese de que o programa de acompanhamento da gravidez propicia bebês com pesos médios iguais ao das mulheres que não participam do programa ($\mu_T = \mu_C$), contra uma hipótese alternativa unilateral de que propicia bebês com peso médio maior ($\mu_T > \mu_C$). Utilize 5% como nível de significância e responda os itens a seguir (admita todas as pressuposições necessárias para validar o teste).

Peso dos bebês (em Kg)	Grupos	
	Tratamento	Controle
Peso médio ($\overline{X}$)	2,93	2,30
Desvio padrão (S_X)	0,25	0,21
Tamanho da amostra (n)	8	7

a.(2 pt) Valor tabelado.

G.L.$= \nu = 8 + 7 - 2 = 13.$

$$t_{\text{tab}} = t_{(\nu;\ \alpha)} = t_{(13;\ 5\%)} = 1,77. \quad \text{(Olhar 10\% na tabela bilateral)}$$

b.(4 pts) Valor calculado.

$$S_c^2 = \frac{(8-1)\,0,25^2 + (7-1)\,0,21^2}{8+7-2} = \frac{0,7021}{13} \cong 0,054, \qquad \text{variância combinada.}$$

$$t_{\text{cal}} = \frac{2,93 - 2,3}{\sqrt{0,054\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right)}} \cong \frac{0,63}{0,1203} \cong 5,2.$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu_T = \mu_C \\ H_1: & \mu_T > \mu_C \end{cases}$$

c.(2 pts) Decisão do teste e conclusão (assinale uma opção).

(   ) Não rejeitar H_0 e concluir que o programa não propicia bebês mais pesados.

(X) Rejeitar H_0 e concluir que o programa propicia bebês mais pesados.

(   ) Não rejeitar H_0 e concluir que o programa propicia bebês mais pesados.

(   ) Rejeitar H_0 e concluir que o programa não propicia bebês mais pesados.

(   ) Outro (indicar) ______________________________

5.(8 pts) A tabela a seguir apresenta os resultados de uma pesquisa realizada com 500 pessoas ligadas aos partidos políticos (Governistas e Oposicionistas). Avaliou-se a opinião destas pessoas quanto ao retorno da cobrança da CPMF (Contribuição Provisória sobre Movimentações Financeiras) para cobrir gastos da Previdência Social e tentar equilibrar as contas públicas em 2016. Pede-se: Teste a hipótese de independência entre Opinião e Posição Partidária a 1% de significância.

	Opinião			
Posição partidária	Contrário	Indiferente	Favorável	Total
Governista	138 (115,14)	83 (85,5)	64 (84,36)	(285)
Oposicionista	64 (86,86)	67 (64,5)	84 (63,64)	(215)
Total	(202)	(150)	(148)	(500)

a.(2 pt) Valor tabelado.

G.L.=$\nu = (2-1)(3-1) = 1 \times 2 = 2$ e $\chi^2_{(2;1\%)} = 9,21$.

b.(4 pts) Valor calculado (complete a tabela).

$$\begin{aligned}
\chi^2_{\text{cal}} &= \frac{(138-115,14)^2}{115,14} + \frac{(83-85,5)^2}{85,5} + \frac{(64-84,36)^2}{84,36} + \\
&+ \frac{(64-86,86)^2}{86,86} + \frac{(67-64,5)^2}{64,5} + \frac{(84-63,64)^2}{63,64} \\
&\cong 4,5386 + 0,0731 + 4,9138 + 6,0163 + 0,0969 + 6,5137 \\
&= 22,1524
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_0: & \text{Posição partidária e Opinião são independentes} \\ H_1: & \text{Posição partidária e Opinião não são independentes} \end{cases}$$

c.(2 pts) Decisão do teste e conclusão (assinale uma opção).

( ) Não rejeitar H_0 e concluir que a opinião depende da posição partidária.

( ) Rejeitar H_0 e concluir que opinião e posição partidária são independentes.

( ) Não rejeitar H_0 e concluir que opinião e posição partidária são independentes.

(X) Rejeitar H_0 e concluir que opinião e posição partidária não são independentes.

( ) Outro (indicar) ______________________________