UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - $1^o/2022$ - 9/7/22

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ____________________

Assinatura: ________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 6 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 8, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: informe a seguir, assinale (X), em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
--------------------------------------------------------------
 TURMA      HORÁRIO e  SALA                 PROFESSOR
--------------------------------------------------------------
(   ) T1 - 3ª 8-10  e  5ª 10-12 PVB 300 - Paulo Cecon
(   ) T2 - 3ª 10-12  e  6ª 8-10 PVB 104 - Carlos Henrique(chos)
(   ) T3 - 3ª 14-16  e  5ª 16-18 PVB 100 - Ana Carolina
(   ) T4 - 2ª 14-16 PVB 102  e  4ª 16-18 PVB 106 - Moysés
(   ) T5 - 3ª 20:30-22:10  e  6ª 18:30-20:10 PVB 203 - Eduardo
(   ) T6 - 4ª 14-16  e  6ª 16-18 PVA 361 - Camila/Ana Carolina
(   ) T7 - 2ª 16-18 e 5ª 14-16 PVB 307 - Camila
(   ) T8 - 2ª 18:30-20:10  e  20:30-22:10 PVA 361 - Eduardo
(   ) T9 - 2ª 16-18  e  5ª 14-16 PVA 353 - Antônio Policarpo
--------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão. Recomenda-se apresentar as fórmulas e os respectivos valores utilizados nos cálculos.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Regra de Bayes: $$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c$ é o evento complementar

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\ dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

1.(5 pontos) Conceito clássico de probabilidade.

a.(2 pts) Considere o lançamento simultâneo de 4 moedas perfeitamente honestas. Calcule a probabilidade de sair a face cara em exatamente uma, e somente uma, das moedas.

Considere:

$k_i = \{$ face cara na i-ésima moeda $\}$ e $o_i = \{$ face coroa na i-ésima moeda $\}$

$A = \{(k_1, o_2, o_3, o_4), (o_1, k_2, o_3, o_4), (o_1, o_2, k_3, o_4), (o_1, o_2, o_3, k_4)\} \Rightarrow n_A = 4.$

$S = \{(F_1, F_2, F_3, F_4) : F_i = k_i$ ou $o_i\}, \Rightarrow n = 2^4 = 16$ pontos amostrais equiprováveis.

Portanto,

$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$ ou 25%.

b.(3 pts) Um casal irá adotar 2 cachorrinhos em uma stand de exposição que possui 5 cahorrinhos para adoção: Belinha, Mickey, Thor, Pretinha e Roger. Se a escolha dos dois cachorrinhos for inteiramente ao acaso, calcule a probabilidade de que Mickey e Belinha sejam adotados pelo casal.

Sejam: Belinha (B), Mickey (M), Thor (T), Pretinha (P) e Roger (R).

$A = \{(B, M)\}$, a ordem não interessa, então $n_A = 1$.

Há 10 alternativas para a escolha dos dois cachorrinhos por combinação (espaço amostral).

$S = \{(B, M), (B, T), ..., (P, R)\}, \Rightarrow n = \binom{5}{2} = 10$ pontos amostrais equiprováveis.

Portanto,

$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{10} = 0,10$ ou 10%.

2.(5 pontos) Considere o lançamento simultâneo de 2 dados perfeitamente simétricos (cada dado possui 6 faces com um número de 1 a 6 na face). Pede-se: Calcule a probabilidade de que a soma dos pontos nas faces superiores dos dois dados seja igual a 10.

$A = \{(6, 4), (4, 6), (5, 5)\} \Rightarrow n_A = 3.$

$S = \{(D_1, D_2) : D_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}, \Rightarrow n = 6^2 = 36$ pontos amostrais equiprováveis.

Portanto,

$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0,083$ ou $8,3\%$.

3.(5 pontos) Em um colégio 50% dos estudantes falam inglês, 40% falam espanhol e 25% não falam inglês e nem espanhol. Se aleatoriamente for escolhido um aluno e constatado que ele não fala inglês, qual é a probabilidade condicional de que este aluno fale espanhol?

$P(I) = 0,50 \ \Rightarrow P(I^c) = 0,50$
$P(E) = 0,40$
$P(I^c \cap E^c) = 0,25.$

Pela Lei de DeMorgan,

$$P(I^c \cap E^c) = P(I \cup E)^c.$$

Mas,

$$P(I \cup E)^c = 1 - P(I \cup E) = 1 - [P(I) + P(E) - P(I \cap E)].$$

Portanto,

$$0,25 = 1 - [0,5 + 0,4 - P(I \cap E)] \quad \Rightarrow \quad P(I \cap E) = 0,15.$$

Então,

$$P(E|I^c) = \frac{P(E \cap I^c)}{P(I^c)} = \frac{P(E) - P(I \cap E)}{P(I^c)} = \frac{0,25}{0,50} = 0,50.$$

4.(5 pontos) Um paciente está doente de uma entre 3 alternativas de doenças, A, B ou C, com probabilidades respectivamente iguais a 0,60; 0,30 e 0,10. Um exame laboratorial fornece resultado positivo (+) para indicar paciente doente ou negativo (-) para não doente, de acordo com as seguintes probabilidades condicionais: Resultado positivo para 25% dos doentes com A, positivo para 70% dos doentes com B e positivo para 85% dos doentes com C. Pede-se:

a.(2 pts) Se o paciente realizar o exame laboratorial, qual é a probabilidade do teste resultar em positivo (+)?

$$\begin{aligned}
P(+) &= P(+\cap A) \;+\; P(+\cap B) \;+\; P(+\cap C) \\
&= P(A)P(+|A) \;+\; P(B)P(+|B) \;+\; P(C)P(+|C) \\
&= 0,60\ 0,25 + 0,30\ 0,70 + 0,10\ 0,85 \\
&= 0,15 + 0,21 + 0,085 \\
&= 0,445 \quad \text{ou} \quad 44,5\%
\end{aligned}$$

b.(3 pts) Qual é a probabilidade condicional do paciente estar com a doença C, dado que o resultado do exame laboratorial foi negativo (-)?

$$\begin{aligned}
P(C|-) &= \frac{P(-\cap C)}{P(-)} = \frac{P(C)P(-|C)}{1-P(+)} \\
&= \frac{P(C)\,[1-P(+|C)]}{1-P(+)} \\
&= \frac{0,10\ 0,15}{0,555} \\
&= \frac{0,015}{0,555} \approx 0,027 \quad \text{ou} \quad 2,7\%
\end{aligned}$$

5.(5 pontos) Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte distribuição de probabilidades,

	Y			
X	1	3	8	$P(x)$
0	0,18	0,12	0,30	0,60
5	0,06	0,05	0,12	0,23
10	0,06	0,03	0,08	0,17
$P(y)$	0,30	0,20	0,50	1,00

Pede-se:

a.(2 pts) Calcule a seguinte probabilidade condicional: $P(X = 5 \mid Y \geq 3)$.

$$\begin{aligned} \frac{P(X = 5\ ,\ Y \geq 3)}{P(Y \geq 3)} &= \frac{P_{XY}(5,3)\ +\ P_{XY}(5,8)}{P_Y(3)\ +\ P_Y(8)} \\ &= \frac{0,05\ +\ 0,12}{0,20\ +\ 0,50} \\ &= \frac{0,17}{0,70} \\ &\approx 0,243 \quad \text{ou} \quad 24,3\% \end{aligned}$$

b.(3 pts) Se $W = XY$, Calcule $P(W \geq 10)$.

Tabela auxiliar

$x\ .\ y$	0 . 1	0 . 3	0 . 8	5 . 1	5 . 3	5 . 8	10 . 1	10 . 3	10 . 8
w	0	0	0	5	15	40	10	30	80
$P(w)$	0,18	0,12	0,30	0,06	0,05	0,12	0,06	0,03	0,08

Distribuição de W

w	0	5	10	15	30	40	80	Total
$P(w)$	0,60	0,06	0,06	0,05	0,03	0,12	0,08	1,00

$$\begin{aligned} P(W \geq 10) &= P_W(10)\ +\ P_W(15)\ +\ P_W(30)\ +\ P_W(40)\ +\ P_W(80) \\ &= 1 - P(W < 10) \\ &= 1 - P_W(0)\ +\ P_W(5) \\ &= 0,34 \quad \text{ou} \quad 34\% \end{aligned}$$

6.(5 pontos) Seja $f(x,y)$ uma função densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta dada por,

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & , \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{outros valores } x \text{ e } y \end{cases}$$

Pede-se:

a.(2 pts) Obtenha a f.d.p. condicional para X dado $Y = y$.

A f.d.p. marginal de Y é dada por:

$h(y) = \int f(x,y)\ dx = \int_0^1 4xy\ dx = 2x^2y|_0^1 = 2y, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1$

A f.d.p. condicional para X dado $Y = y$ é dada por

$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{4xy}{2y} = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1$
$f(x|y) = 0$, para outros valores x e y.

b.(3 pts) Calcule a seguinte probabilidade condicional: $P(X \leq 3/4 \mid Y = 1/2)$.

A f.d.p. marginal de X é dada por:

$g(x) = \int f(x,y)\ dy = \int_0^1 4xy\ dy = 2xy^2|_0^1 = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1$

Portanto X e Y são variáveis aleatórias independentes pois $f(x,y) = g(x)\ h(y)$. Então,

$$P(X \leq 3/4 \mid Y = 1/2) = P(X \leq 3/4) = \int_0^{3/4} 2x\ dx = 9/16 = 0,5625 \text{ ou } 56,25\%$$