UFV- CCE - DET

EST 105 - 1^a avaliação - 2^0 semestre de 2016 - 27/ago/16

Nome: ______________________ **Matrícula:**______________

Assinatura: ______________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 4 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.

- ATENÇÃO: Assinale (X) a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
-----------------------------------------------------------------------
      TURMA    HORÁRIO         SALA   PROFESSOR
-----------------------------------------------------------------------
(   ) T1 2ª 10-12 5ª 8-10    PVB310 Camila
(   ) T2 2ª 16-18 5ª 14-16   PVB310 Camila
(   ) T5 3ª 16-18 6ª 14-16   PVB310 Eduardo
(   ) T6 2ª 14-16 4ª 16-18   PVB107 Paulo/CHOS
(   ) T7 4ª  8-10  6ª 10-12  PVB206 CHOS - coordenador
(   ) T8 2ª 18:30-20:10 4ª 20:30-22:10  PVB306  Eduardo
(   ) T9 3ª 10-12 PVB300 6ª 8-10 PVB307 Gerson
(   ) T20=EST085 T1 2ª16-18  T2 2ª18:30-20:10 PVA388 Leísa (monitora II)
------------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !

- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.

- PODE UTILIZAR A CALCULADORA, porém mostre os valores utilizados na fórmula.

- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad Md_X = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{ou} \quad Md_X = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$SQD_X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} \quad \text{ou} \quad SQD_X = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$S_X^2 = \frac{SQD_X}{n-1} \quad \text{ou} \quad S_X^2 = \frac{SQD_X}{\sum_{i=1}^{k} f_i - 1}$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} \quad S(\overline{X}) = \frac{S_X}{\sqrt{n}} \quad CV_X(\%) = \frac{S_X}{\overline{X}} 100\%$$

$$\widehat{\rho}_{XY} = r_{XY} = \frac{SPD_{XY}}{\sqrt{SQD_X \; SQD_Y}} \qquad SPD_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i = b_0 + b_1 X_i \qquad b_1 = \widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X} \qquad b_0 = \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$r^2(\%) = \frac{SQ\text{regressão}}{SQ\text{total}} 100\%$$

$$SQ\text{regressão} = \widehat{\beta}_1^2 SQD_X = \widehat{\beta}_1 SPD_{XY} = (SPD_{XY})^2 / SQD_X \qquad SQ\text{total} = SQD_Y$$

1.(5 pontos) Dado que,

$$\sum_{j=1}^{50} Y_j = 1275, \quad \sum_{j=1}^{50} Y_j^2 = 42925, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 210 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2870,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule: $\displaystyle\sum_{j=1}^{50}\sum_{i=1}^{20}(X_i - Y_j + 1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{50}\sum_{i=1}^{20}(X_i - Y_j + 1)^2 &= \sum_{j=1}^{50}\sum_{i=1}^{20}(X_i - Y_j + 1)(X_i - Y_j + 1) \\
&= \sum_{j=1}^{50}\sum_{i=1}^{20}\big(X_i^2 - X_iY_j + X_i - X_iY_j + Y_i^2 - Y_j + X_i - Y_j + 1\big) \\
&= \sum_{j=1}^{50}\sum_{i=1}^{20}\big(X_i^2 - 2X_iY_j + 2X_i - 2Y_j + Y_i^2 + 1\big) \\
&= 50\sum_{i=1}^{20} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{20} X_i \sum_{j=1}^{50} Y_j + 2\cdot 50\sum_{i=1}^{20} X_i - 2\cdot 20\sum_{j=1}^{50} Y_j \\
&+ 20\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 + 20\cdot 50 \\
&= 50\cdot 2870 - 2\cdot 210\cdot 1275 + 100\cdot 210 - 40\cdot 1275 \\
&+ 20\cdot 42925 + 1000 \\
&= 143500 - 535500 + 21000 - 51000 + 858500 + 1000 \\
&= 437500
\end{aligned}$$

2.(5 pontos) Dado que,

$$\sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} X_i = 427, \qquad \sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} X_i^2 = 8891 \qquad \text{e} \qquad \sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} X_i^3 = 206713,$$

utilize as propriedades de somatório e calcule: $\displaystyle\sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} (X_i - 1)^3$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} (X_i - 1)^3 &= \sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} \left(X_i^3 - 3\cdot X_i^2\cdot 1 + 3\cdot X_i\cdot 1^2 - 1^3\right)\\
&= \sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} X_i^3 - 3\sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} X_i^2 + 3\sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} X_i - \sum_{\substack{i=5\\ i\neq 8,10,20}}^{30} 1\\
&= 206713 - 3\cdot 8891 + 3\cdot 427 - (30 - 5 + 1 - 3)\\
&= 206713 - 26673 + 1281 - 23\\
&= 181298
\end{aligned}$$

3.(10 pontos) Na tabela abaixo são informados o número de itens com algum defeito de fabricação (itens defeituosos), obtidos para um total de 50 lotes.

Número de lotes	20	10	6	7	4	3
Número de itens defeituosos	0	1	2	3	5	12

Pede-se:

a.(3 pts) O número médio de itens defeituosos.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{20 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 12}{0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 12} = \frac{99}{50} = 1,98$$

b.(2 pts) Os números medianos e modal de itens defeituosos.

Como $n = 50$ é par temos

$$Md_X = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{X_{(25)} + X_{(26)}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

O conjunto é unimodal e $Mo = 0$.

c.(2 pts) O erro-padrão da média.

$$S\left(X\right) = \sqrt{\frac{1}{50-1}\left(629 - \frac{(99)^2}{50}\right)} = \sqrt{8,8363} = 2,9726$$

$$S\left(\bar{X}\right) = \frac{S\left(X\right)}{\sqrt{n}} = \frac{2,9726}{\sqrt{50}} = 0,4204$$

d.(3 pts) O coeficiente de variação.

$$CV\left(X\right)\% = \frac{S\left(X\right)}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{2,9726}{1,98} \cdot 100\% = 150,13\%$$

4.(10 pontos) Pesquisas experimentais desenvolvidas com animais demonstram que a exposição a níveis elevados de ruído pode desencadear o aumento da pressão arterial. Para estudar essa relação em seres humanos, pesquisadores decidiram aplicar a análise de Regressão Linear Simples (RLS), avaliando uma amostra composta por n = 10 trabalhadores industriais. A seguir são apresentados valores referentes ao AUMENTO DA PRESSÃO ARTERIAL (Y), em milímetros de mercúrio (mmHg), quando os trabalhadores foram expostos a determinados NÍVEIS DE RUÍDO (X), em decibéis (dB).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i(dB)	60	63	65	70	80	85	89	90	94	100
Y_i(mmHg)	1	0	1	5	4	5	4	6	7	9

Considere duas casas decimais nos cálculos, por exemplo: 0,193≈0,19; 12,478≈12,48; 0,595≈0,60 etc., e responda:

a.(1 pt) Utilize sua calculadora para informar as seguintes somas:

$$\sum X = 796 \qquad \sum X^2 = 65176 \qquad \sum Y = 42$$

$$\sum Y^2 = 250 \qquad \sum XY = 3674$$

b.(1 pt) Apresente o modelo de regressão linear simples (RLS) ajustado, que permita estimar o valor médio do aumento da pressão arterial como uma função do nível de ruído ao qual os trabalhadores foram expostos.

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{SPD_{XY}}{SQD_X} = \frac{3674 - \frac{796\times 42}{10}}{65176 - \frac{(796)^2}{10}} = \frac{330,8}{1814,4} = 0,18,$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1\bar{X} = \frac{42}{10} - 0,18 \times \frac{796}{10} = 4,2 - 14,33 = -10,13,$$

logo a equação de regressão ajustada é

$$\boxed{\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i = -10,13 + 0,18X_i}.$$

Olhando-se direto na calculadora obtém-se:

$$\boxed{\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i = -10,31 + 0,18X_i}.$$

c.(2 pts) Interprete o valor obtido para o coeficiente da regressão em termos do problema exposto.

$b_1 = \widehat{\beta}_1 = 0,18$. Para cada acréscimo de 1db no nível de ruído ao qual o trabalhador é exposto, estima-se um acréscimo médio de $0,18$ mmHg na pressão arterial.

d.(2 pts) Determine o valor estimado para o aumento médio da pressão arterial e o desvio da regressão, para um trabalhador exposto a um nível de ruído de 70 dB.

$$X_i = 70 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

$$\widehat{Y}_i = -10,13 + 0,18 \times 70 = 2,47.$$

Sabemos que $\widehat{Y}_4 = 2,47$, assim o desvio da regressão é

$$\widehat{\varepsilon}_4 = Y_4 - \widehat{Y}_1 = 5 - 2,47 = 2,53.$$

Olhando-se direto na calculadora teremos

$$X_i = 70 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

$$\widehat{Y}_i = -10,31 + 0,18 \times 70 = 2,29.$$

Sabemos que $\widehat{Y}_4 = 2,29$, assim o desvio da regressão é

$$\widehat{\varepsilon}_4 = Y_4 - \widehat{Y}_1 = 5 - 2,29 = 2,71.$$

e.(2 pts) Para um trabalhador exposto a um nível de ruído igual a 120 dB, estime o aumento médio da pressão arterial do mesmo. Comente acerca do valor obtido.

$$X_i = 120 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

$$\widehat{Y}_i = -10,13 + 0,18 \times 120 = 11,47.$$

Olhando-se direto na calculadora teremos

$$X_i = 120 \Rightarrow \widehat{Y}_i = ?$$

$$\widehat{Y}_i = -10,31 + 0,18 \times 120 = 11,29.$$

Note que, no estudo em questão, os níveis de ruído variaram de 60 a 100 decibéis, desta forma, a estimativa para $X_i = 120$ trata-se de uma extrapolação, não sendo uma estimativa confiável.

f.(2 pts) Determine e interprete o coeficiente de determinação em termos do problema exposto.

Temos que

$$\begin{aligned} SQ_{\text{Regressão}} &= \frac{(SPD_{XY})^2}{SQD_X} = \frac{\left(3674 - \frac{796 \times 42}{10}\right)^2}{65176 - \frac{(796)^2}{10}} \\ &= \frac{(330,8)^2}{1814,4} = 60,31, \\ SQ_{\text{Total}} &= SQD_Y = 250 - \frac{(42)^2}{10} = 73,6. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} r^2(\%) &= \frac{SQ_{\text{Regressão}}}{SQ_{\text{Total}}} \times 100\% = \frac{60,31}{73,6} \times 100\% \\ &= 81,94\%. \end{aligned}$$

Olhando-se direto na calculadora temos

$$r^2(\%) = (r_{XY})^2 \cdot 100\% = (0,9052)^2 \cdot 100\% = 81,94\%$$

O coeficiente de determinação r^2 foi de 81,94%, desta forma, o percentual da variabilidade observada da pressão arterial, explicado pela regressão linear simples, nos valores dos níveis de ruído é 81,94%.