UFV- CCE - DET

EST 105 - 2^a avaliação - 1^0 semestre de 2016 - 21/mai/16

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

Assinatura: ______________________________. Favor apresentar documento com foto.

- São 5 questões e formulário em páginas numeradas de 1 a 7, total de 30 pontos, FAVOR CONFERIR ANTES DE INICIAR.
- ATENÇÃO: Assinale (X) a seguir em qual turma está matriculado (sua nota será divulgada no sistema SAPIENS).

```
---------------------------------------------------------------------
   TURMA  HORÁRIO   SALA  PROFESSOR
---------------------------------------------------------------------
(  ) T1 3ª 08-10 5ª 10-12 PVB300 Sebastião
(  ) T2 3ª 10-12 6ª 08-10 PVB109 Sebastião
(  ) T3 3ª 14-16 5ª 16-18 PVB109 CHOS
(  ) T4 2ª 14-16 4ª 16-18 PVB107 Policarpo
(  ) T5 2ª 18:30-20:10 4ª 20:30-22:10 PVB208 Camila
(  ) T6 4ª 14-16 6ª 16-18 PVA361 CHOS
(  ) T7 2ª 16-18 5ª 14-16 PVB307 Sebast/Policarpo
(  ) T10 3ª 18:30-20:10 5ª 20:30-22:10 PVA361 Camila
(  ) T20 = EST085 T1 2ª16 PVA134 e T2 5ª 18:30 PVA126 Leísa(monitor II)
----------------------------------------------------------------------
```

- Interpretar corretamente as questões é parte da avaliação, portanto não é permitido questionamentos durante a prova !
- É OBRIGATÓRIO APRESENTAR OS CÁLCULOS organizadamente, para ter direito à revisão.
- NOTA ZERO se mostrar a resposta correta e não apresentar os cálculos ou o raciocínio utilizado.
- BOA SORTE e BOA PROVA !!!.

FORMULÁRIO

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_j P(A_j)P(B|A_j)}, \quad P(B) > 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \qquad P(A) = 1 - P(A^c), \quad A^c \quad \text{é o evento complementar}$$

Leis de DeMorgan: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$ e $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c$

$$X \quad v.a.d. \Rightarrow \quad f(x) = P(X = x)$$

$$X \quad v.a.c. \Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) = \int f(x,y)\ dx, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}, \quad P(y) = \sum_x P(x,y), \qquad P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}, \quad P(x) = \sum_y P(x,y)$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n < \infty$ $\quad E(X^k) = \sum\limits_x x^k P(x)$ ou $E(X^k) = \int x^k f(x) dx$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(x,y) \quad \text{ou} \quad E(XY) = \int\int xyf(x,y)dxdy$$

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y), \quad \rho_{X,Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}, \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

1.(5 pontos) Admita que 1% dos homens tenham problemas circulatórios. Admita também que entre os homens com problemas circulatórios a probabilidade condicional de ser um fumante é o dobro da probabilidade de ser não fumante. Por outro lado, entre os homens que não têm problemas circulatórios, a probabilidade condicional de ser um fumante é de apenas 20%. Pede-se: utilize a regra ou teorema de Bayes para calcular a probabilidade condicional de se selecionar aleatoriamente um homem com problemas circulatórios, dado que o homem selecionado é um fumante. Utilize a seguinte notação:

$$P = \{\text{homem com problemas circulatórios}\} \quad \text{e} \quad F = \{\text{homem fumante}\}$$

Dados

$$P(P) = 0,01 \Rightarrow P(P^c) = 0,99$$

$$\begin{aligned}
P(F|P) &= 2P(F^c|P) \Rightarrow P(F|P) = 2(1 - P(F|P)) \\
P(F|P) &= 2 - 2P(F|P) \Rightarrow 3P(F|P) = 2 \Rightarrow P(F|P) = \frac{2}{3} \\
P(F^c|P) &= 1 - P(F|P) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
P(F|P^c) &= 0,20
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
P(P|F) &= \frac{P(F|P)P(P)}{P(F|P)P(P) + P(F|P^c)P(P^c)} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times 0,01}{\frac{2}{3} \times 0,01 + 0,20 \times 0,99} \\
&= \frac{0,0067}{0,0067 + 0,198} = 0,0327
\end{aligned}$$

2.(4 pontos) Uma variável aleatória X tem a seguinte função densidade de probabilidade,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ \dfrac{1}{25}x, & \text{para } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1}{25}(10-x), & \text{para } 5 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{para } x > 10 \end{cases}$$

Pede-se: Calcule $P(\frac{5}{2} \leq X \leq 7)$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq 7\right) &= \int_{5/2}^{5} \frac{1}{25} x dx + \int_{5}^{7} \frac{1}{25}(10-x)\, dx \\ &= \frac{1}{50}\, x^2\Big|_{x=5/2}^{5} + \left(\frac{10}{25}x - \frac{1}{50}x^2\right)\Big|_{x=5}^{7} \\ &= \frac{25}{50} - \frac{25}{200} + \frac{70}{25} - \frac{49}{50} - \frac{50}{25} + \frac{25}{50} \\ &= \frac{100 - 25 + 560 - 196 - 400 + 100}{200} = \frac{139}{200} = 0,695 \end{aligned}$$

3.(5 pontos) Dada a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) na tabela abaixo,

	Y		
X	-2	1	2
0	0,10	0,20	0,10
1	0,04	0,08	0,28
2	0,05	0,06	0,09

a.(3 pts) X e Y são variáveis aleatórias independentes? Justifique sua resposta.

Como

$$P\left(X=0\right)\cdot P\left(Y=-2\right)=0,40\cdot 0,19=0,076\neq 0,10=P\left(X=0,Y=-2\right)$$

temos então que X e Y não são variáveis aleatórias independentes.

b.(2 pts) Calcule a seguinte probabilidade condicional: $P(X \leq 1 \mid Y \geq 1)$.

$$\begin{aligned}
P\left(X\leq 1|\,Y\geq 1\right) &= \frac{P\left(X\leq 1, Y\geq 1\right)}{P\left(Y\geq 1\right)} \\
&= \frac{P\left(X=0,Y=1\right)+P\left(X=0,Y=2\right)+P\left(X=1,Y=1\right)+P\left(X=1,Y=2\right)}{P\left(Y=1\right)+P\left(Y=2\right)} \\
&= \frac{0,20+0,10+0,04+0,28}{0,34+0,47}=\frac{0,66}{0,81}=0,8148
\end{aligned}$$

4.(10 pontos) Nos itens a seguir assinale (V) se estiver inteiramente correto ou assinale (F) caso contrário e **justifique ou corrija**. (2 pontos cada item)

a. (F) Seja X uma variável aleatória discreta com $F(5) = 0,61$ e $F(0) = 0,12$. Então, $P(0 \leq X \leq 5) = 0,61 - 0,12 = 0,49$.

Falso.

$$F(5) - F(0) = P(X \leq 5) - P(X \leq 0) = P(0 < X \leq 5) \Longrightarrow$$
$$F(5) - F(0) + P(X = 0) = P(0 < X \leq 5) + P(X = 0) \Longrightarrow$$
$$P(0 \leq X \leq 5) = F(5) - F(0) + P(X = 0)$$

b. (F) Seja X uma variável aleatória contínua com $F(x) = 0$, se $x < 0$; $F(x) = x^2$, se $0 \leq x < 1$ e $F(x) = 1$, se $1 \leq x$. Então, $P(X \geq 0,80) = 0,80^2 = 0,64$.

Falso.

$$\begin{aligned} P(X \geq 0,80) &= 1 - P(X \leq 0,80) \\ &= 1 - F(0,80) \\ &= 1 - 0,80^2 = 0,36 \end{aligned}$$

c. (V) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos de um mesmo espaço amostral com $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,20$, então tem-se que $P(A \cup B) = 0,50$.

Verdadeiro.
Tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Mas $P(A \cap B) = 0$. Logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,30 + 0,20 = 0,50$.

d. (V) Se A e B são eventos independentes de um mesmo espaço amostral com $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,20$, então tem-se que $P(A \cup B) = 0,44$.

Verdadeiro.
Tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Mas

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,30 \cdot 0,20 = 0,06$$

Logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,30 + 0,20 - 0,06 = 0,44$.

e. (F) Seja uma função densidade de probabilidade dada por: $f(x,y) = kxy$ para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, $f(x,y) = 0$ para outros valores x e y. Então $k = \dfrac{1}{4}$.

i) $k \geq 0$;

ii)

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 kxydxdy = \int_0^1 ky \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{1} dy = \frac{k}{2}\int_0^1 ydy = \frac{k}{2}\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{1} = \frac{k}{4}$$

$$\frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$$

5.(6 pontos) Contaminações tipo A, B e C são as mais comumente encontradas em amostras de água provenientes de rios e lagos localizados num raio de 50km de indústrias de cimento. Assuma que 30% das amostras estão contaminadas com A, 20% com B e 8% com C. Estar contaminado com A e estar contaminado com B são eventos independentes, enquanto que as probabilidades condicionais de estar contaminado com C são: dado A é igual a $0,10$, dado B é igual a $0,05$ e dados A e B é igual a 0,15. Seja X a variável aleatória que represente o número de tipos de contaminações encontradas numa amostra, pede-se: Obtenha a tabela com a distribuição das probabilidades de X. DICA 1: calcule inicialmente as interseções. DICA 2: por exemplo, $P_X(X=0) = P_S(A^c \cap B^c \cap C^c)$.

Dados:

$$\begin{array}{lll} P(A) = 0,30; & P(B) = 0,20; & P(C) = 0,08; \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,06; & P(C|\,A) = 0,10; & P(C|\,B) = 0,05; \\ P(C\,|A \cap B\,) = 0,15 & & \end{array}$$

Interseções:

$$\begin{array}{ll} P(A \cap B) = 0,06; & P(A \cap C) = P(C\,|A) \cdot P(A) = 0,03 \\ P(B \cap C) = P(C\,|B\,) \cdot P(B) = 0,01; & P(C \cap A \cap B) = P(C\,|A \cap B\,) \cdot P(A \cap B) = 0,009 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P[(A \cup B \cup C)^c] = 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)] \\ &= 1 - (0,30 + 0,20 + 0,08 - 0,06 - 0,03 - 0,01 + 0,009) \\ &= 1 - 0,489 = 0,511 \end{aligned}$$

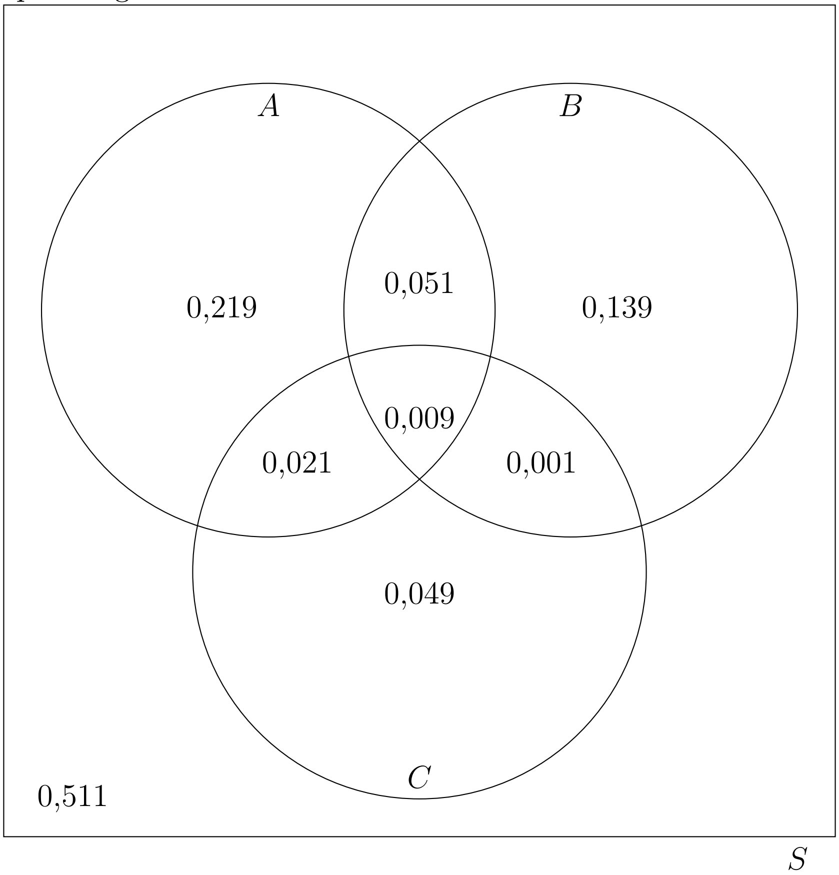
$$\begin{aligned} P(X=1) &= P[(A \cap B^c \cap C^c) \cup (\,A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)] \\ &= P[(A \cap (B \cup C)^c) \cup (\,B \cap (A \cup C)^c) \cup (C \cap (A \cup B)^c)] \\ &= P(A) - P[A \cap (B \cup C)] + P(B) - P[B \cap (A \cup C)] + P(C) - P[C \cap (A \cup B)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) + P(B) - P(B \cap A) \\ &- P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C) + P(C) - P(C \cap A) - P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B) - 2P(B \cap C) - 2P(A \cap C) + 3P(A \cap B \cap C) \\ &= 0,30 + 0,20 + 0,08 - 2 \cdot 0,06 - 2 \cdot 0,01 - 2 \cdot 0,03 + 3 \cdot 0,009 \\ &= 0,407 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P[(A^c \cap B \cap C) \cup (\,A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)] \\ &= P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B) \\ &- P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C) - 3 \cdot P(A \cap B \cap C) \\ &= 0,06 + 0,01 + 0,03 - 3 \cdot 0,009 \\ &= 0,073 \end{aligned}$$

$$P(X=3) = P(A \cap B \cap C) = 0,009$$

x	0	1	2	3	Total
$P(X=x)$	0,511	0,407	0,073	0,009	1

Ou por diagrama de Venn



$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\text{nenhum dos eventos}) = 0,511 \\
P(X=1) &= P(\text{exatamente um dos eventos}) = 0,219 + 0,139 + 0,049 = 0,407 \\
P(X=2) &= P(\text{exatamente dois dos eventos}) = 0,021 + 0,051 + 0,001 = 0,073 \\
P(X=3) &= P(\text{exatamente três dos eventos}) = 0,009
\end{aligned}
$$