Estatística I

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Probabilidade

Introdução

Na primeira parte do curso, vimos que a análise de um conjunto de dados por meio de técnicas numéricas e gráficas permite que tenhamos uma boa ideia da distribuição desse conjunto. Em particular, a distribuição de frequências é um instrumento importante para avaliarmos a variabilidade das observações de um fenômeno aleatório.

A partir dessas frequências observadas podemos calcular medidas de posição e variabilidade, como média, mediana, desvio padrão etc. Em particular, as frequências (relativas) são estimativas de probabilidades de ocorrências de certos eventos de interesse.

Com suposições adequadas, e sem observarmos diretamente o fenômeno aleatório de interesse, podemos criar um modelo teórico que reproduza de maneira razoável a distribuição das frequências, quando o fenômeno é observado diretamente. Tais modelos são chamados modelos probabilísticos e serão objeto de estudo daqui para frente.

Quando queremos definir probabilidade precisamos nos atentar para o que são eventos aleatórios (do latim alea=sorte).

Exemplo 1

Queremos estudar as frequências de ocorrências das faces de um dado. Um procedimento a adotar seria lançar o dado certo número de vezes, n, e depois contar o número n_i de vezes em que ocorre a face $i, i = 1, 2, \cdots, 6$. As proporções n_i / n determinam a distribuição de frequências do experimento realizado. Lançando o dado um número $n'(n' \neq n)$ de vezes, teríamos outra distribuição de frequências, mas com um padrão que esperamos ser muito próximo do anterior.

Para trabalhar com eventos aleatórios precisamos definir modelos probabilísticos. O modelo probabilístico pode ser construído por meio de premissas, como se segue. Primeiro, observamos que só podem ocorrer seis faces; a segunda consideração que se faz é que o dado seja perfeitamente equilibrado, de modo a não favorecer alguma face em particular. Com essas suposições, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes quando o dado é lançado n vezes, e, portanto, a proporção de ocorrência de cada face deve ser 1/6. Nessas condições, o modelo teórico (ou probabilístico) para o experimento é dado na próxima Tabela.

tab	F1	F2	F3	F4	F5	F6	T
Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência Teórica	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Exemplo 2

De um grupo de duas mulheres (M) e três homens (H), uma pessoa será sorteada para presidir uma reunião. Queremos saber as probabilidades de o presidente ser do sexo masculino ou feminino. Observamos que: (i) só existem duas possibilidades: ou a pessoa sorteada é do sexo masculino (H) ou é do sexo feminino (M); (ii) supondo que o sorteio seja honesto e que cada pessoa tenha igual chance de ser sorteada, teremos o modelo probabilístico da próxima Tabela para o experimento.

Sexo	M	H	Total
Frequência Teórica	2/5	3/5	1

Dos exemplos acima, verificamos que todo experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

- Um espaço amostral, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

  (os elementos de Ω são os pontos amostrais ou eventos elementares);

Dos exemplos acima, verificamos que todo experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

- Um espaço amostral, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

  (os elementos de Ω são os pontos amostrais ou eventos elementares);

- Uma probabilidade, $P(\omega)$, para cada ponto amostral, de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer subconjunto A de Ω, isto é, a probabilidade do que chamaremos de um evento aleatório.

Exemplo 3

Lançamos uma moeda duas vezes. Se C indicar cara e K indicar coroa, então um espaço amostral será

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \}$$

em que $\omega_1 = (C, C), \omega_2 = (C, K), \omega_3 = (K, C), \omega_4 = (K, K)$.

Exemplo 4

Uma fábrica produz determinado artigo. Da linha de produção são retirados três artigos, e cada um é classificado como bom (B) ou defeituoso (D). Um espaço amostral do experimento é

$$\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, DDB, DBD, BDD, DDD\}.$$

Se A designar o evento que consiste em obter dois artigos defeituosos, então $A = \{DDB, DBD, BDD\}$.

Exemplo 5

Considere o experimento que consiste em retirar uma lâmpada de um lote e medir seu “tempo de vida"antes de se queimar. Um espaço amostral conveniente é

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$$

isto é, o conjunto de todos os números reais não negativos. Se A indicar o evento “o tempo de vida da lâmpada é inferior a 20 horas", então $A = \{t : 0 \leq t < 20\}$. Esse é um exemplo de um espaço amostral contínuo, contrastado com os anteriores, que são discretos.

Ω é o conjunto de todos resultados possíveis. Um evento A é qualquer subconjunto de Ω, portanto, um evento, é um conjunto de resultados possíveis. Lembre-se que o vazio $(\emptyset)$ é subconjunto de qualquer conjunto, em probabilidade, o vazio é conhecido como evento impossível e o espaço Ω é conhecido como evento certo. Se $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito elementar (ou simples).

- Do espaço $\Omega = \{cara, coroa\}$, temos os eventos

$$\emptyset, \; A = \{cara\}, \; B = \{coroa\}, \; \Omega.$$

- Do espaço $\Omega = \{cara, coroa\}$, temos os eventos

$$\emptyset,\ A = \{cara\},\ B = \{coroa\},\ \Omega.$$

- Em um lançamento de um dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos considerar os eventos

$$\emptyset, A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{5\}, \cdots \text{entre outros.}$$

Note que neste caso podemos ter até $2^6 = 64$ eventos distintos.

Eventos Mutuamente Excludentes

Dois eventos são eventos mutuamente exclusivos se eles não podem ocorrer ao mesmo tempo. Na teoria da probabilidade, eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são ditos mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles implica na não-ocorrência dos restantes $n-1$ eventos. Formalmente, a intersecção dos dois é vazia: $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Em consequência disso, dois eventos A e B mutuamente exclusivos tem a propriedade: $P(A \cap B) = 0$.

Relação entre evento e conjuntos

Um evento é essencialmente um conjunto, de forma que as relações e resultados da teoria de conjuntos podem ser usados para o estudo dos eventos.

- A **união** de dois eventos A e B, representada por $A \cup B$ e lida “A união B", é o evento que consiste em todos os resultados que estão no evento A ou no B ou em ambos.

Relação entre evento e conjuntos

Um evento é essencialmente um conjunto, de forma que as relações e resultados da teoria de conjuntos podem ser usados para o estudo dos eventos.

- A **união** de dois eventos A e B, representada por $A \cup B$ e lida “A união B", é o evento que consiste em todos os resultados que estão no evento A ou no B ou em ambos.
- A **interseção** dos dois eventos A e B, representada por $A \cap B$ e lida “A interseção B", é o evento que consiste de todos os resultados que estão em ambos A e B.

- $A \subset B$ significa: A ocorrência do evento A implica a ocorrência do evento B.

- $A \subset B$ significa: A ocorrência do evento A implica a ocorrência do evento B.
- $A \cap B = \emptyset$ significa: A e B são mutuamente exclusivos ou incompatíveis.

- $A \subset B$ significa: A ocorrência do evento A implica a ocorrência do evento B.
- $A \cap B = \emptyset$ significa: A e B são mutuamente exclusivos ou incompatíveis.
- O complemento de um evento A, representado por A^c, é o conjunto de todos os resultados em Ω que não estão contidos em A.

Exemplo

Sejam A, B e C eventos aleatórios. Identifique as seguintes equações e frases.

(a)$A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$
(b)$A \cap B \cap C = A$
(c)$A \cup B \cup C = A$
(d)$(A \cup B \cup C) - (B \cup C) = A$

(i) A e "B ou C" são incompatíveis.
(ii) Os eventos A, B, C são idênticos.
(iii) A ocorrência de A implica a de "B e C"
(iv) A ocorrência de A decorre de "B ou C"

Axiomas

Dados um experimento e um espaço amostral Ω, o objetivo da probabilidade é atribuir a cada evento A um número $P(A)$, denominado probabilidade do evento A, que fornecerá uma medida precisa da chance de ocorrência de A. Para assegurar que as atribuições de probabilidade sejam consistentes com nossas noções intuitivas de probabilidade, todas as atribuições devem satisfazer os axiomas a seguir (propriedades básicas) de probabilidade. Eles são chamados axiomas de Kolmogorov.

- **Axioma 1:** Para qualquer evento, A, $P(A) \geq 0$.

- **Axioma 1:** Para qualquer evento, A, $P(A) \geq 0$.
- **Axioma 2:** $P(\Omega) = 1$.

- **Axioma 1:** Para qualquer evento, A, $P(A) \geq 0$.
- **Axioma 2:** $P(\Omega) = 1$.
- **Axioma 3:** Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ for um conjunto finito de eventos mutuamente exclusivos, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- **Axioma 1:** Para qualquer evento, A, $P(A) \geq 0$.
- **Axioma 2:** $P(\Omega) = 1$.
- **Axioma 3:** Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ for um conjunto finito de eventos mutuamente exclusivos, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- **Axioma** $3^{'}$: Se $A_1, A_2, A_3, \cdots$ for um conjunto infinito de eventos mutuamente exclusivos, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Resultados igualmente prováveis

Em muitos experimentos que consistem em N resultados, é razoável atribuir probabilidades iguais a todos os N eventos simples. Tais eventos incluem exemplos óbvios, como lançamento de uma moeda; ou um dado não viciado uma ou duas vezes (ou qualquer número fixo de vezes); ou selecionar uma ou diversas cartas de um baralho de 52 cartas bem embaralhado. Com $p = P(E_i)$ para cada i,

$$1 = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) = \sum_{i=1}^{N} p = N * p \Rightarrow \ p = \frac{1}{N}$$

Isto é, se houver N resultados possíveis, a probabilidade atribuída a cada um será $1/N$.

Consideremos um evento A, com $N(A)$ representando o número de resultados contidos em A. Então

$$P(A) = \sum_{E_i \text{ em } A} P(E_i) = \sum_{E_i \text{ em } A} \frac{1}{N} = \frac{N(A)}{N}.$$

Exemplo

Quando dois dados são lançados separadamente, há $N = 36$ resultados. Se os dois dados forem justos, todos os 36 resultados serão igualmente prováveis, então $P(E_i) = \frac{1}{36}$. Dessa forma, o evento $A = \{\text{soma dos dois números} = 7\}$ consistirá em seis resultados $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)$ e $(6, 1)$. Assim,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exemplo

Qual a probabilidade de, em um grupo de 4 pessoas, haver alguma coincidência de signos?

Exemplo

Qual a probabilidade de, em um grupo de 4 pessoas, haver alguma coincidência de signos?

$$P(Nao\ coincidencia) = \frac{Favoraveis}{Possiveis} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12 \times 12} \approx 0.57$$

Logo,

$$P(coincidencia) = 0.43$$

Coincidência dos aniversários!

Considerando o ano com 365 dias, podemos assumir que $n < 365$ primeiramente devemos definir o espaço amostral Ω que será o conjunto de todas as sequências formadas com as datas dos aniversários (associamos cada data a um dos 365 dias do ano):

$$\Omega = \{(1, 1, \cdots, 1), (1, 5, 6, 7, \cdots, 100), \cdots\}$$

sua cardinalidade será:

$$\#\Omega = 365^n$$

Definindo o evento:

$$A = \text{pelo menos 2 alunos fazendo aniversário no mesmo dia em uma turma de tamanho n}$$

Observa-se que é um evento complicado de se calcular. Uma prática muito comum na teoria das probabilidades é estudar o complementar do evento de interesse, ou seja:

$$A^c = \text{nenhum dos alunos fazendo aniversário no mesmo dia em uma turma de tamanho n}$$

Assim,

$$P(A^c) = \frac{\#A^c}{\#\Omega} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n(365 - n)!}$$

e a probabilidade de haver pelo menos dois alunos fazendo aniversário no mesmo dia em uma turma de tamanho n é:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

```
birthday=function(x){
   a=1-exp(-(x^2)/(2*365))
   return(a)
}
birthday(23)
0.5155095
```

```
birthday=function(x){
   a=1-exp(-(x^2)/(2*365))
   return(a)
}
birthday(23)
0.5155095

birthday(50)
0.9674396
```

```
birthday=function(x){
   a=1-exp(-(x^2)/(2*365))
   return(a)
}
birthday(23)
0.5155095

birthday(50)
0.9674396
```

Para outros valores de *n* clique aqui!

Propriedades básicas

- $P(\emptyset) = 0$, prove!

Propriedades básicas

- $P(\emptyset) = 0$, prove!
- $P(A^c) = 1 - P(A)$, prove!

Propriedades básicas

- $P(\emptyset) = 0$, prove!
- $P(A^c) = 1 - P(A)$, prove!
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, prove!

Propriedades básicas

- $P(\emptyset) = 0$, prove!
- $P(A^c) = 1 - P(A)$, prove!
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, prove!
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, prove!

Referências

- Bastos, Fernando de Souza (2025). ***Apostila Interativa.*** Disponível online: https://ufvest.shinyapps.io/ApostilaInterativa/.
- Ferreira, Eric Batista e Marcelo Silva de Oliveira (2020). ***Introdução à Estatística com R.*** Editora Universidade Federal de Alfenas. URL: https://www.unifal-mg.edu.br/bibliotecas/wp-content/uploads/sites/125/2021/12/32-EBR_Unifal.pdf.
- Meyer, Paul L (1982). ***Probabilidade: aplicações à estatística.*** Livros Técnicos e Científicos.

Referências ii

- Montgomery, D. C. e G. C Runger (2016). ***Estatística Aplicada E Probabilidade Para Engenheiros.*** 6ª ed. São Paulo: Grupo Gen-LTC.
- Morettin, P.A. e W.O Bussab (2023). ***Estatística básica.*** 10ª ed. São Paulo: Editora Saraiva.
- Peternelli, Luiz Alexandre (s.d.). ***Apostila (EST 106).*** Formato slide Disponível no PVANet - Moodle.