Estatística I

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Somatórios

Somatório

O somatório é uma forma abreviada para representação de somas. Podemos defini-lo como o operador matemático para a soma dos termos de uma sequência. Usualmente, um somatório é representado pela letra grega sigma maiúscula ($\sum$) e é definido por:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n. \tag{1}$$

em que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência dada, i é o índice do somatório, m denota o limite inferior e n o limite superior.

Somatório

Como exemplo note que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (2)$$

Se lê: “Soma de i, para $i = 1$ até n.”

Somatório

Como exemplo note que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (2)$$

Se lê: "Soma de i, para $i = 1$ até n."

ou,

$$\sum_{i=0}^{k} (2i+1) = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) \qquad (3)$$

que se lê: "Soma de $(2i+1)$, para $i = 0$ até k."

Propriedades

1. $\sum_{i=m}^{n} ax_i = a\sum_{i=m}^{n} x_i \ \forall a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}.$
2. $\sum_{i=m}^{n} K = [(n-m)+1]K$, K constante real qualquer.

   Em particular para $m = 1$, temos $\sum_{i=1}^{n} K = nK$.

Propriedades

3. $\sum_{i=m}^{n}(a_i x_i + b_i z_i) = \sum_{i=m}^{n}(a_i x_i) + \sum_{i=m}^{n}(b_i z_i), \; \forall m, n \in \mathbb{Z}.$

4. $\sum_{i=k}^{n}(x_i - x_{i+1}) = x_k - x_{n+1}$

5. $\sum_{k=0}^{n} K = \sum_{k=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$ (Soma de Gauss)

Soma de Gauss

Figura 1: Imagem retirada do Wikipédia (2021). Visitado em 28/06/2021.

Considere $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. A fórmula abaixo foi obtida por Johann Carl Friedrich Gauss ("O principe da Matemática").

$$S_N = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Cuidado!

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$

Cuidado!

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$
2. $\sum_{i=m}^{n} a(x_i + k) \neq \sum_{i=m}^{n} ax_i + k$

Cuidado!

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$
2. $\sum_{i=m}^{n} a(x_i + k) \neq \sum_{i=m}^{n} a x_i + k$
3. $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

Soma infinita: é a soma de infinitos termos, a qual, espera-se que convirja para um determinado valor. É muito aplicada na teoria da probabilidade na definição de modelos em espaços infinitos discretos.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \cdots$$

Exemplo: Qual é a fração geradora da dizima $3.55555\cdots$?

$$\begin{aligned}
3.55555\cdots &= 3 + 0.5 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + 0.00005 + \cdots \\
&= 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \cdots \\
&= 3 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{10^i} \\
&= 3 + \frac{5/10}{1 - 1/10} \\
&= 3 + \frac{5}{9} = \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

Somatório Duplo

Somatório Duplo

	1	2	...	j	...	s	
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1s}	$\sum_{j=1}^{s} X_{1j}$
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2s}	$\sum_{j=1}^{s} X_{2j}$
...	...	...	...	...	...	...	...
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{3j}	...	X_{is}	$\sum_{j=1}^{s} X_{ij}$
...	...	...	...	...	...	...	...
r	X_{r1}	X_{r2}	...	X_{rj}	...	X_{rs}	$\sum_{j=1}^{s} X_{rj}$

Somatório Duplo

$X_{ij} \to i = 1, 2, \cdots, r$ é o índice da linha
$X_{ij} \to j = 1, 2, \cdots, s$ é o índice da coluna
G é o total geral:

$$
\begin{aligned}
G &= \sum_{i=1}^{r} X_{i1} + \sum_{i=1}^{r} X_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{r} X_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^{r} X_{is} \\
&= \sum_{i=1}^{r} (X_{i1} + X_{i2} + \cdots + X_{ij} + \cdots + X_{is}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} X_{ij} \\
&= \sum_{i=1, j=1}^{r, s} X_{ij}
\end{aligned}
$$

Somatório Duplo

Total da i-ésima linha: $\sum_{j=1}^{s} X_{ij} = X_{i.}$

Total da j-ésima coluna: $\sum_{i=1}^{r} X_{ij} = X_{.j}$

Produtório

Produtório

De forma alternativa, como na adição, o produto pode ser escrito usando-se um símbolo de produto, chamado produtório $\prod$ que é a letra pi maíuscula no alfabeto grego.

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$$