Estatística I

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Variáveis Aleatórias

Informalmente, uma variável aleatória (v.a.) é uma variável que tem um único valor numérico, determinado pelo acaso, para cada resultado de um experimento. Em outras palavras, uma v.a. pode ser considerada uma regra ou função que associa um único número real a cada resultado de um experimento aleatório, ou seja, transforma um conjunto não-numérico em um conjunto numérico.

Exemplos

- Lançar uma moeda 2 vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Podemos definir:

$$\Omega = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\}.$$

Uma variável aleatória associada a esse experimento pode ser, por exemplo, o número de caras obtidas, o espaço amostral associado a essa v.a. é definido e denotado por,

$$\Omega_X = \{0, 1, 2\};$$

Observação 1: Utilizaremos letras maiúsculas ($X, Y, Z, \ldots$ e etc.) para representar uma v.a. e a correspondente letra minúscula ($x, y, z, \ldots$ etc.) para representar um de seus valores.

Observação 2: Cada possível valor x_i de X representa um evento que é um subconjunto do espaço amostral.

- Lançar uma moeda 2 vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Uma variável aleatória associada a esse experimento pode ser: $X =$ “o número de caras obtidas", de onde: $X = \{0, 1, 2\}$. Fazendo uma correspondência entre Ω e X, temos:

Eventos	$X = x$
(c,c)	2
(c,k)	1
(k,c)	1
(k,k)	0

Variáveis Aleatórias Discretas

Variáveis Aleatórias Discretas

Definição: Uma variável aleatória é classificada como discreta (v.a.d) se assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito).

Exemplos:

- Lançar uma moeda 2 vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. O número de caras obtidas é uma variável aleatória discreta, pois pode assumir uma quantidade finita de valores;

- A contagem do número de alunos presentes a uma aula é uma variável aleatória discreta;

- A contagem do número de alunos presentes a uma aula é uma variável aleatória discreta;
- O número de vitórias do Corinthians no ano;

- A contagem do número de alunos presentes a uma aula é uma variável aleatória discreta;
- O número de vitórias do Corinthians no ano;
- O número de crianças que nascem por dia em uma cidade;

- A contagem do número de alunos presentes a uma aula é uma variável aleatória discreta;
- O número de vitórias do Corinthians no ano;
- O número de crianças que nascem por dia em uma cidade;
- O número de pessoas que morrem por dia em uma cidade;

- A contagem do número de alunos presentes a uma aula é uma variável aleatória discreta;
- O número de vitórias do Corinthians no ano;
- O número de crianças que nascem por dia em uma cidade;
- O número de pessoas que morrem por dia em uma cidade;
- O número de ovos que uma galinha bota em um dia.

Função de Probabilidade

Função de Probabilidade

Definição: A função de probabilidade de uma v.a.d. é uma função que atribue probabilidade a cada um dos possíveis valores assumidos pela variável, isto é, sendo X uma variável com valores $x_1, x_2, \ldots,$ temos para $i = 1, 2, \ldots,$

$$p(x_i) = P(X = x_i).$$

Propriedades da Função de Probabilidade

A função de probabilidade de X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisfaz:

1. $0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots;$

Propriedades da Função de Probabilidade

A função de probabilidade de X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisfaz:

1. $0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots;$
2. $\sum_i p(x_i) = 1$; com a soma percorrendo todos os possíveis valores (eventualmente infinitos).

Exemplo

a) Considere dois lançamentos independentes de uma moeda equilibrada. Com o espaço de probabilidade sendo o usual, defina X como sendo o número de caras nos dois lançamentos. A variável X será discreta e sua função de probabilidade será dada por:

X	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b) Suponha que no lançamento de um dado viciado a probabilidade é proporcional ao valor obtido no lançamento. Considere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suponhamos que estamos interessados na avaliação da variável aleatória $X = \{\text{resultado obtido}\}$. Assim, os possíveis valores que X pode assumir são $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com as respectivas probabilidades:

$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1,$$

de onde,

$$p = \frac{1}{21}$$

Observação: A coleção de pares $(x_i, p(x_i)), \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$ denominaremos distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta X. O comportamento de uma v.a. é descrito por sua distribuição de probabilidade.

Variaveis Aleatórias Contínuas

Variaveis Aleatórias Contínuas

Definição: Uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é contínua (v.a.c) se pode assumir infinitos valores e esses valores podem ser associados com medidas em uma escala contínua.

Exemplos:

- Seja $X =$ a quantidade de leite que uma vaca produz em um dia. Essa é uma variável aleatória contínua pois pode assumir qualquer valor em um intervalo contínuo.

Exemplos:

- Seja $X =$ a quantidade de leite que uma vaca produz em um dia. Essa é uma variável aleatória contínua pois pode assumir qualquer valor em um intervalo contínuo.
- A medida de tensão de uma bateria de carro é uma variável contínua.

Exemplos:

- Seja $X =$ a quantidade de leite que uma vaca produz em um dia. Essa é uma variável aleatória contínua pois pode assumir qualquer valor em um intervalo contínuo.
- A medida de tensão de uma bateria de carro é uma variável contínua.
- A vazão da torneira da cozinha de uma casa é uma v.a.c.

Função Densidade de Probabilidade

Definição: Chama-se função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma v.a.c. X, a função $f(x)$ que obedece as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall \quad a < x < b$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 1.$

Observações:

1) Para um valor fixo de X, por exemplo, $X = x_0$, temos que

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0.$$

Logo, as probabilidades abaixo são todas iguais, se X for uma v.a.c.:

$$P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d)$$

2) Para $c < d$,

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx.$$

2) Para $c < d$,

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx.$$

3) A função densidade de probabilidade $f(x)$, não representa uma probabilidade. Somente quando for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade, que será a área sob a curva da função entre os valores considerados.

Exemplo: Uma v.a.c. X possui a seguinte função associada:

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ k(2-x), & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{para outros valores de} \quad \text{x} \end{cases}$$

Pede-se:

1. A constante k para que $f(x)$ seja uma f.d.p.;
2. O gráfico da $f(x)$;
3. $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right)$; $\quad P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$; $\quad P(X > 2)$ e $P(X = 1)$;

Função de Distribuição Acumulada

Definição: Sendo X uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sua função de distribuição é definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

com x percorrendo todos os reais.

O conhecimento da função de distribuição permite obter qualquer informação sobre a variável. Mesmo que a variável só assuma valores num subconjunto dos reais, a função de distribuição é definida em toda reta. Se não houver possibilidade de confusão sobre qual variável a função de distribuição se refere, o subescrito X pode ser omitido e escrevemos F ao invés de F_X.

Propriedades da Função de Distribuição:

Uma função de distribuição de uma variável X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ obedece às seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

Propriedades da Função de Distribuição:

Uma função de distribuição de uma variável X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ obedece às seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
2. F é contínua à direita;

Propriedades da Função de Distribuição:

Uma função de distribuição de uma variável X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ obedece às seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
2. F é contínua à direita;
3. F é não decrescente, isto é, $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

O comportamento da variável e toda a informação sobre ela pode ser obtida da função de distribuição. Por isso, quando desejamos conhecer a variável, estamos querendo saber qual é a sua função de distribuição.

Exemplo

1. No lançamento de uma moeda, seja $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$, $\mathcal{F}$ o conjunto das partes de Ω e P dada por $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$. Defina uma função X de Ω em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \omega = \text{cara}; \\ 0, & \text{se} \quad \omega = \text{coroa}. \end{cases}$$

Assumindo que X é uma variável aleatória, vamos obter sua função de distribuição. Para $x < 0$, $\quad P(X \leq x) = 0$, uma vez que o menor valor assumido pela variável é zero. No intervalo $0 \leq x < 1$, temos $P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$. E, para $x \geq 1$, vem $P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1$. Dessa forma, $F(x) = P(X \leq x)$ foi definida para todo x real. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Note que as propriedades de função distribuição são facilmente verificadas, a propriedade 1 é imediata, para a propriedade 2 observe que F é continua nos reais, exceto, nos pontos 0 e 1, nestes temos continuidade à direita, isto é,

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) \quad \text{e} \quad F(1) = \lim_{x \to 1^+} F(x).$$

Além disso, observe que $F(x)$ é não decrescente para todo x real e, assim a propriedade 3 fica provada.

Para as variáveis discretas, a função de distribuição acumulada pode ser definida como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \in A_x} P(x_i), \text{com} \quad A_x = \{i; x_i \leq x\};$$

Para as variáveis contínuas, a função de distribuição acumulada pode ser definida como:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Notem que

$$P(c < X \leq d) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)dx.$$

Notem também que $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ em todos os pontos de continuidade de $f(x)$, isto é, a derivada da função de distribuição é a função densidade de probabilidade.

Referências

- Bastos, Fernando de Souza (2025). ***Apostila Interativa.*** Disponível online: https://ufvest.shinyapps.io/ApostilaInterativa/.
- Ferreira, Eric Batista e Marcelo Silva de Oliveira (2020). ***Introdução à Estatística com R.*** Editora Universidade Federal de Alfenas. URL: https://www.unifal-mg.edu.br/bibliotecas/wp-content/uploads/sites/125/2021/12/32-EBR_Unifal.pdf.
- Meyer, Paul L (1982). ***Probabilidade: aplicações à estatística.*** Livros Técnicos e Científicos.

Referências ii

- Montgomery, D. C. e G. C Runger (2016). ***Estatística Aplicada E Probabilidade Para Engenheiros.*** 6ª ed. São Paulo: Grupo Gen-LTC.
- Morettin, P.A. e W.O Bussab (2023). ***Estatística básica.*** 10ª ed. São Paulo: Editora Saraiva.
- Peternelli, Luiz Alexandre (s.d.). ***Apostila (EST 106).*** Formato slide Disponível no PVANet - Moodle.