Estatística I

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Valor Médio - Esperança - Expectância

Definição para v.a.d.: Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(x_i)$. A esperança de X é definida por:

$$E(X) = \mu_X = \mu = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

A esperança de X também é chamada média de X, ou valor esperado de X. Notemos que $E(X)$ é uma média ponderada, onde os pesos são as probabilidades $p(x_i)$.

Observação: Se X é uma v.a.d. com função de probabilidade $p(x_i)$, então para qualquer função $g(X)$ temos:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p(x_i).$$

Exemplo

Um jogador erra 10% dos seus chutes a gol e acerta 90% deles. Cada erro é punido com R$ 100 enquanto cada acerto é premiado com R$ 500 no salário. Considere a v.a. $X = \{\text{lucro líquido por chute}\}$. Calcular a média de lucro líquido por chute a gol.

Exemplo

Um jogador erra 10% dos seus chutes a gol e acerta 90% deles. Cada erro é punido com R$ 100 enquanto cada acerto é premiado com R$ 500 no salário. Considere a v.a. $X = \{\text{lucro líquido por chute}\}$. Calcular a média de lucro líquido por chute a gol.

Em média, você pode esperar ganhar R$ 440 por chute a longo prazo.

Definição para v.a.c.: Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$. A esperança de X é definida por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Exemplo: Uma v.a.c. X possui a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0; \\ \dfrac{x}{2}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

Calcular $E(X)$.

Propriedades da Esperança Matemática:

1. $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$

Propriedades da Esperança Matemática:

1. $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$

Propriedades da Esperança Matemática:

1. $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$
3. $E[X - E(X)] = 0$

Propriedades da Esperança Matemática:

1. $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$
3. $E[X - E(X)] = 0$
4. $E[X \pm k] = E[X] \pm k$

Propriedades da Esperança Matemática:

1. $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$
3. $E[X - E(X)] = 0$
4. $E[X \pm k] = E[X] \pm k$
5. Se X e Y são v.a. independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$

Observação: Se $E(XY) = E(X)E(Y)$, não podemos afirmar que X e Y são v.a. independentes. Vejamos:

Suponha que $X = 0$ ou $X = \frac{\pi}{2}$ ou $X = \pi$, em que $P(X = 0) = P(\frac{\pi}{2}) = P(\pi) = \frac{1}{3}$, considere $Y = senX, \quad Z = cosX$.

Obviamente Y e Z não são independentes, uma vez que, $Y^2 + Z^2 = 1$.

Porém, $E(Y) = \frac{1}{3}, \quad E(Z) = 0, \quad E(YZ) = 0$, logo $E(YZ) = E(Y)E(Z)$.

Variância e Covariância

Definição:

1. Sejam X e Y v.a., definimos a covariância entre X e Y,

   $$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))$$

   A covariância mede o grau de dispersão conjunta de duas variáveis aleatórias.

Variância e Covariância

Definição:

1. Sejam X e Y v.a., definimos a covariância entre X e Y,

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))$$

A covariância mede o grau de dispersão conjunta de duas variáveis aleatórias.

2. Seja X v.a., definimos a variância de X como,

$$var(X) = cov(X,X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X - \mu]^2.$$

Observações:

1. $var(X) = V(X) = \sigma_X^2$;

Observações:

1. $var(X) = V(X) = \sigma_X^2$;
2. Desvio padrão de X é a raiz quadrada da variância de X, denotada por:

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)}.$$

Propriedades:

1. $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$

Propriedades:

1. $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $V(aX) = a^2 V(X), \forall a \in \mathbb{R}$

Propriedades:

1. $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $V(aX) = a^2 V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
3. $V(X \pm a) = V(X), \forall a \in \mathbb{R}$

Propriedades:

1. $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $V(aX) = a^2 V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
3. $V(X \pm a) = V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
4. $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$, se X e Y forem independentes.

Propriedades:

1. $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $V(aX) = a^2 V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
3. $V(X \pm a) = V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
4. $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$, se X e Y forem independentes.
5. $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm cov(X, Y)$, para quaisquer duas variáveis aleatórias X e Y.

Definição: O coeficiente de correlação entre as v.a. X e Y é definido como:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Referências

- Bastos, Fernando de Souza (2025). ***Apostila Interativa.*** Disponível online: https://ufvest.shinyapps.io/ApostilaInterativa/.
- Ferreira, Eric Batista e Marcelo Silva de Oliveira (2020). ***Introdução à Estatística com R.*** Editora Universidade Federal de Alfenas. URL: https://www.unifal-mg.edu.br/bibliotecas/wp-content/uploads/sites/125/2021/12/32-EBR_Unifal.pdf.
- Meyer, Paul L (1982). ***Probabilidade: aplicações à estatística.*** Livros Técnicos e Científicos.

Referências ii

- Montgomery, D. C. e G. C Runger (2016). ***Estatística Aplicada E Probabilidade Para Engenheiros.*** 6ª ed. São Paulo: Grupo Gen-LTC.
- Morettin, P.A. e W.O Bussab (2023). ***Estatística básica.*** 10ª ed. São Paulo: Editora Saraiva.
- Peternelli, Luiz Alexandre (s.d.). ***Apostila (EST 106).*** Formato slide Disponível no PVANet - Moodle.