Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

1. Exemplo 1: Teste unilateral a direita para a Média Baseado em Grandes Amostras
2. Exemplo 2: Teste unilateral a esquerda para a Média Baseado em Grandes Amostras
3. Exemplo 3: Teste unilateral para a Proporção Binomial
4. Exemplo 4: Teste Bilateral para a Média

Teste unilateral para a Média Baseado em Grandes Amostras

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Em que $\mu_0 = 100$ e μ é a média populacional desconhecida. Suponha que temos uma amostra de tamanho $n = 36$, com desvio padrão populacional conhecido $\sigma = 12$, e o nível de significância $\alpha = 0,05$.

Teste unilateral para a Média Baseado em Grandes Amostras

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Em que $\mu_0 = 100$ e μ é a média populacional desconhecida. Suponha que temos uma amostra de tamanho $n = 36$, com desvio padrão populacional conhecido $\sigma = 12$, e o nível de significância $\alpha = 0,05$.

Vamos rejeitar H_0 se $\bar{X} > x_c > 100$, tal que $\alpha = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > x_c)$

$$Z_\alpha = 1,645$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0

$$0,05 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > x_c) = P(Z > \frac{(x_c - 100) \times 6}{12})$$
$$\Rightarrow \frac{(x_c - 100) \times 6}{12} = 1,645$$
$$\Rightarrow x_c = 103,29$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0

$$
\begin{aligned}
0,05 &= P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > x_c) = P(Z > \frac{(x_c - 100) \times 6}{12}) \\
&\Rightarrow \frac{(x_c - 100) \times 6}{12} = 1,645 \\
&\Rightarrow x_c = 103,29
\end{aligned}
$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de rejeitar H_0 quando a verdadeira média μ é maior que μ_0. Assumindo que a verdadeira média é $\mu = 105$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(\mu = 105) &= P_{\mu=105}(\bar{X} > x_c) = P(\bar{X} > 103,29) \\
&= P(Z > \frac{(103,29 - 105) \times 6}{12}) = P(Z > -0,855) \\
&= 0,804
\end{aligned}
$$

Vejam os gráficos de poder cliquem aqui!

Teste unilateral para a Média Baseado em Grandes Amostras

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 50 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 50$$

Em que $\mu_0 = 50$ é a média sob H_0, e μ é a média populacional desconhecida. Temos uma amostra de tamanho $n = 36$, com desvio padrão populacional $\sigma = 8$, e o nível de significância $\alpha = 0.05$.

Teste unilateral para a Média Baseado em Grandes Amostras

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 50 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 50$$

Em que $\mu_0 = 50$ é a média sob H_0, e μ é a média populacional desconhecida. Temos uma amostra de tamanho $n = 36$, com desvio padrão populacional $\sigma = 8$, e o nível de significância $\alpha = 0.05$.

Vamos rejeitar H_0 se $\bar{X} < x_c < 50$, tal que $\alpha = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} < x_c)$

$$Z_\alpha = -1,645$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0

$$0,05 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} < x_c) = P\left(Z < \frac{(x_c - 50) \times 6}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(x_c - 50) \times 6}{8} = -1,645$$

$$\Rightarrow x_c = 47,81$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0

$$
\begin{aligned}
0,05 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} < x_c) &= P(Z < \frac{(x_c - 50) \times 6}{8}) \\
\Rightarrow \frac{(x_c - 50) \times 6}{8} &= -1,645 \\
\Rightarrow x_c &= 47,81
\end{aligned}
$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de rejeitar H_0 quando a verdadeira média μ é menor que μ_0. Vamos assumir que a verdadeira média é $\mu = 47$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(47) &= P_{\mu=47}(\bar{X} < x_c) = P(\bar{X} < 47,81) \\
&= P(Z < \frac{(47,81 - 47) \times 6}{8}) = P(Z < 0,6075) \\
&= 0,728
\end{aligned}
$$

Vejam os gráficos de poder cliquem aqui!

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : p = p_0 = 0,4 \quad \text{contra} \quad H_1 : p > 0,4$$

O tamanho da amostra é $n = 100$, o nível de significância é $\alpha = 0,01$, e assumimos que a proporção real sob H_1 é $p = 0,55$.

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : p = p_0 = 0,4 \quad \text{contra} \quad H_1 : p > 0,4$$

O tamanho da amostra é $n = 100$, o nível de significância é $\alpha = 0,01$, e assumimos que a proporção real sob H_1 é $p = 0,55$.

Vamos rejeitar H_0 se $\bar{p} > p_c > 0,4$, tal que $\alpha = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{p} > p_c)$

$$Z_\alpha = 2,33$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0

$$0,01 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{p} > p_c) = P(Z > \frac{(p_c - 0,4) \times 10}{\sqrt{0,04 \times (1 - 0,04)}})$$

$$\Rightarrow \frac{(p_c - 0,4) \times 10}{\sqrt{0,4 \times (1 - 0,4)}} = 2,33 \Rightarrow p_c = 0,5141$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0

$$0,01 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{p} > p_c) = P(Z > \frac{(p_c - 0,4) \times 10}{\sqrt{0,04 \times (1 - 0,04)}})$$

$$\Rightarrow \frac{(p_c - 0,4) \times 10}{\sqrt{0,4 \times (1 - 0,4)}} = 2,33 \Rightarrow p_c = 0,5141$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de rejeitar H_0 quando a verdadeira proporção p é maior que $0,4$. Assumindo que a verdadeira proporção é $p = 0,55$:

$$\begin{aligned}\gamma(p = 0,55) &= P_{p=0,55}(\bar{p} > p_c) = P(\bar{p} > 0,5141) \\ &= P(Z > \frac{(0,5141 - 0,55) \times 10}{\sqrt{0,55 \times (1 - 0,55)}}) = P(Z > -0,722) \\ &= 0,7648\end{aligned}$$

Vejam os gráficos de poder cliquem aqui!

Teste Bilateral para a Média Baseado em Grandes Amostras

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 50 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 50$$

Onde $\mu_0 = 50$ é a média sob H_0 e μ é a média populacional desconhecida. Temos uma amostra de tamanho $n = 36$, com desvio padrão populacional $\sigma = 10$, e o nível de significância $\alpha = 0.05$.

Teste Bilateral para a Média Baseado em Grandes Amostras

Vamos testar a seguinte hipótese nula e alternativa:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 50 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 50$$

Onde $\mu_0 = 50$ é a média sob H_0 e μ é a média populacional desconhecida. Temos uma amostra de tamanho $n = 36$, com desvio padrão populacional $\sigma = 10$, e o nível de significância $\alpha = 0.05$.

Vamos rejeitar H_0 se $\bar{X} > k > 50$, ou se $\bar{X} < h < 50$, tal que $\alpha = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > k) + P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} < h)$, assim,

$$\frac{\alpha}{2} = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > k) = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} < h) \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0 para o lado direito

$$
\begin{aligned}
0,025 &= P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > k) = P\left(Z > \frac{(k-50)\times 6}{10}\right) \\
&\Rightarrow \frac{(k-50)\times 6}{10} = 1,96 \\
&\Rightarrow x_c = 53,27
\end{aligned}
$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0 para o lado direito

$$0,025 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} > k) = P(Z > \frac{(k-50)\times 6}{10})$$
$$\Rightarrow \frac{(k-50)\times 6}{10} = 1,96$$
$$\Rightarrow x_c = 53,27$$

Cálculo do Valor Crítico sob H_0 para o lado esquerdo

$$0,025 = P_{\text{Sob } H_0}(\bar{X} < h) = P(Z < \frac{(h-50)\times 6}{10})$$
$$\Rightarrow \frac{(h-50)\times 6}{10} = -1,96$$
$$\Rightarrow x_c = 46,73$$

Cálculo do Poder do Teste

A função poder é a probabilidade de rejeitar H_0 para $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\gamma(\mu) = P_\mu(\bar{X} > 53,27) = P_\mu(\bar{X} < 46,73)$$

Cálculo do Poder do Teste

A função poder é a probabilidade de rejeitar H_0 para $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\gamma(\mu) = P_\mu(\bar{X} > 53,27) = P_\mu(\bar{X} < 46,73)$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do Teste é a probabilidade de rejeitar H_0 quando a média verdadeira não é 50. Se $\mu = 54$, o poder do teste é:

$$\begin{aligned} \gamma(\mu) &= P_{\mu=54}(\bar{X} > 53,27) = P_{\mu=54}(\bar{X} < 46,73) \\ &= P(Z < -4,36) + P(Z > -0,438) \\ &\approx P(Z > -0,438) = 0,67 \end{aligned}$$

Vejam os gráficos de poder cliquem aqui!

Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.