Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Teste Qui-Quadrado

Testes qui-quadrado foram originalmente proposto por Karl Pearson em 1900, este teste representou um dos primeiros métodos de inferência estatística. Considere a variável aleatória X_i distribuída como $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, em que $i = 1, 2, \ldots, n$, e as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mutuamente independentes. A função de densidade conjunta dessas variáveis é dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right)}, -\infty < x_i < \infty$$

A variável aleatória definida pelo expoente (exceto o coeficiente -1/2) é a soma $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$, essa variável aleatória segue uma distribuição Qui-Quadrado com n graus de liberdade, denotada como $\chi^2(n)$.

Prove que $Z^2 \sim \chi^2(1)$

Considere $V = Z^2$. Quero mostrar que a densidade de V é a densidade de uma variável qui-quadrado com 1 grau de liberdade, dada por:

$$g(v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \ \ v > 0$$

Prove que $Z^2 \sim \chi^2(1)$

Considere $V = Z^2$. Quero mostrar que a densidade de V é a densidade de uma variável qui-quadrado com 1 grau de liberdade, dada por:

$$g(v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \; v > 0$$

Para mostrar tal resultado, notem que

$$\begin{aligned}
G(v) &= P(V \leq v) = P(Z^2 \leq v) \\
&= P(-\sqrt{v} \leq Z \leq \sqrt{v}) \\
&= 2P(0 \leq Z \leq \sqrt{v}), \; Z \text{ é simétrica em relação a origem!} \\
&= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz
\end{aligned}$$

Considere $z = \sqrt{y} \Rightarrow \; dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$, nesse caso, $z = 0 \Rightarrow \; y = 0, \; z^2 \Rightarrow \; y = v$, logo, Considere $z = \sqrt{y} \Rightarrow \; dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, nesse caso, $z = 0 \Rightarrow \; y = 0, \; z^2 \Rightarrow \; y = v$, logo,

$$\begin{aligned}
G(v) &= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= 2\int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
&= 2\int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy, \;\; v > 0
\end{aligned}$$

Considere $z = \sqrt{y} \Rightarrow \; dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, nesse caso, $z = 0 \Rightarrow \; y = 0$, $z^2 \Rightarrow \; y = v$, logo,

$$
\begin{aligned}
G(v) &= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= 2\int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
&= 2\int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy, \;\; v > 0
\end{aligned}
$$

Segue que,

$$G^{'}(v) = g(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} dy, \;\; v > 0$$

Usando o fato de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, temos que,

$$g(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} dy, \;\; v > 0 \text{ cqd } \blacksquare$$

Teorema 1

Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão, onde ν é um inteiro positivo. Então, a variável aleatória $\chi^2(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade.

Teorema 1

Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão, onde ν é um inteiro positivo. Então, a variável aleatória $\chi^2(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade.

Observação:

A soma de duas variáveis qui-quadrado independentes, $\chi^2(\nu_1)+\chi^2(\nu_2)$, segue uma distribuição qui-quadrado com $\nu_1 + \nu_2$ graus de liberdade.

Devido aos resultados anteriores, se X_1 segue uma distribuição binomial $b(n, p_1)$, considere a variável aleatória:

$$Y = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}$$

Devido aos resultados anteriores, se X_1 segue uma distribuição binomial $b(n, p_1)$, considere a variável aleatória:

$$Y = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}$$

Conforme n se aproxima do infinito, a variável Y tem uma distribuição aproximada $N(0, 1)$. Além disso, a distribuição de Y^2 é aproximadamente $\chi^2(1)$.

Seja $X_2 = n - X_1$ e $p_2 = 1 - p_1$. Defina $Q_1 = Y^2$, então

$$Q_1 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1 - p_1)} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2}$$

Isso ocorre porque $(X_1 - np_1)^2 = (n - X_2 - n + np_2)^2 = (X_2 - np_2)^2$.

Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira. Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ tenham uma distribuição multinomial com os parâmetros n e $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$. Defina $X_k = n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-1})$ e $p_k = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1})$. Defina Q_{k-1} por:

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

À medida que n se aproxima do infinito, Q_{k-1} possui uma distribuição aproximada $\chi^2(k-1)$. Para usar essa aproximação, é importante garantir que n seja grande o suficiente para que cada np_i, onde $i = 1, 2, \ldots, k$, seja pelo menos igual a 5.

Teste Qui-Quadrado

Considere um espaço amostral A de um experimento aleatório que seja a união de k conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Suponha que $P(A_i) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots, k$, e $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{k-1}$. Em que p_i é a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório seja um elemento do conjunto A_i.

Teste Qui-Quadrado

Considere um espaço amostral A de um experimento aleatório que seja a união de k conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Suponha que $P(A_i) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots, k$, e $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{k-1}$. Em que p_i é a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório seja um elemento do conjunto A_i.

Repita um experimento aleatório n vezes de forma independente, e considere X_i como o número de vezes que o resultado do experimento é um elemento do conjunto A_i. Ou seja, $X_1, X_2, \ldots, X_k = n - X_1 - X_2 - \ldots - X_{k-1}$ representam as frequências com as quais o resultado é, respectivamente, um elemento de $A_1, A_2, \ldots, A_k$. A função de massa de probabilidade conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ é a função de massa de probabilidade multinomial com os parâmetros $n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Considere a hipótese simples:

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_{k-1} = p_{k-1,0}$$
$$(p_k = p_{k0} = 1 - p_{10} - p_{20} - \ldots - p_{k-1,0})$$

Em que $p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{k-1,0}$ são valores especificados. Deseja-se testar H_0 em relação a todas as alternativas.

Considere a hipótese simples:

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_{k-1} = p_{k-1,0}$$
$$(p_k = p_{k0} = 1 - p_{10} - p_{20} - \ldots - p_{k-1,0})$$

Em que $p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{k-1,0}$ são valores especificados. Deseja-se testar H_0 em relação a todas as alternativas.

Se a hipótese H_0 for verdadeira, a variável aleatória

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

tem uma distribuição aproximada qui-quadrado com $k-1$ graus de liberdade. Pois, se H_0 é verdadeira, np_{i0} é o valor esperado de X_i. Os valores observados de Q_{k-1} não devem ser muito grandes se H_0 for verdadeira.

Podemos, portanto, considerar o teste com nível de significância α que rejeita H_0 quando $Q_{k-1} \geq c$. Usando o software R, calculamos o valor crítico c por meio da função `qchisq(1 - α, k - 1)`. Se a hipótese H_0 for rejeitada quando o valor observado de Q_{k-1} for pelo menos igual a c, o teste de H_0 terá um nível de significância aproximadamente igual a α. Além disso, se q for o valor realizado da estatística do teste Q_{k-1}, o nível de significância observado do teste pode ser calculado em R pela função `1-pchisq(q, k - 1)`. Isso é frequentemente chamado de teste de bondade de ajuste.

Exemplo 1

Escolher um dos seis primeiros números inteiros positivos por meio de um experimento aleatório (por exemplo, lançamento de um dado). Seja $A_i = \{x : x = i\}$, onde $i = 1, 2, \ldots, 6$.

$$H_0 : P(A_i) = p_{i0} = \frac{1}{6}, \; i = 1, 2, \ldots, 6,$$

$\alpha = 5\%$. Para realizar o teste, o experimento aleatório é repetido sob as mesmas condições, 60 vezes de forma independente. Ou seja, $k = 6$ e $n \cdot p_{i0} = 60 \cdot \frac{1}{6} = 10, \; i = 1, 2, \ldots, 6$. Seja X_i a frequência com que o experimento aleatório termina com o resultado em $A_i, \; i = 1, 2, \ldots, 6$. Defina Q_5 como:

$$Q_5 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(X_i - 10)^2}{10}$$

Uma vez que existem $6 - 1 = 5$ graus de liberdade, o valor crítico para um teste com nível $\alpha = 0.05$ é $qchisq(0.95, 5) = 11.0705$. Suponha agora que as frequências experimentais de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sejam, respectivamente, 13, 19, 11, 8, 5 e 4. O valor observado de Q_5 é calculado como:

$$\begin{aligned} Q_{5,cal} &= \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(19-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} \\ &+ \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(4-10)^2}{10} \\ &= 15.6 \end{aligned}$$

Como $15.6 > 11.0705$, a hipótese $P(A_i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, é rejeitada a um nível de significância (aproximado) de 5%.

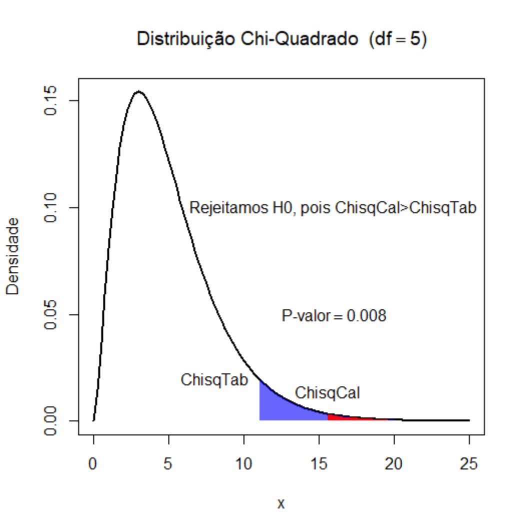

Figura: Gráfico com Resultados do Teste Qui-Quadrado

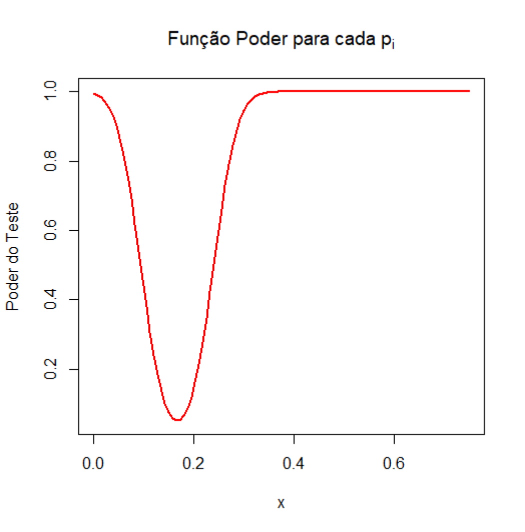

Figura: Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 1)

Exemplo 2

Neste exemplo, um ponto deve ser selecionado a partir do intervalo unitário $\{x : 0 < x < 1\}$ por meio de um processo aleatório. Definimos os conjuntos $A_1 = \{x : 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$, $A_2 = \{x : \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}\}$, $A_3 = \{x : \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}\}$ e $A_4 = \{x : \frac{3}{4} < x < 1\}$. As probabilidades p_i, onde $i = 1, 2, 3, 4$, atribuídas a esses conjuntos sob a hipótese são determinadas pela função de densidade de probabilidade $2x$, em que $0 < x < 1$, e zero caso contrário. Essas probabilidades são:

$$p_{10} = \int_0^{\frac{1}{4}} 2x\, dx = \frac{1}{16}, \quad p_{20} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2x\, dx = \frac{3}{16}$$

$$p_{30} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x\, dx = \frac{5}{16} \quad p_{40} = \int_{\frac{3}{4}}^{1} 2x\, dx = \frac{7}{16}$$

Portanto, a hipótese a ser testada é que p_1, p_2, p_3 e $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$ possuem os valores anteriores em uma distribuição multinomial com $k = 4$. Considere $\alpha = 0.025$, repetindo o experimento aleatório $n = 80$ vezes de forma independente sob as mesmas condições, temos $n \cdot p_{i0}$, $i = 1, 2, 3, 4$ são, respectivamente, $5, 15, 25$ e 35.

Portanto, a hipótese a ser testada é que p_1, p_2, p_3 e $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$ possuem os valores anteriores em uma distribuição multinomial com $k = 4$. Considere $\alpha = 0.025$, repetindo o experimento aleatório $n = 80$ vezes de forma independente sob as mesmas condições, temos $n \cdot p_{i0},\ i = 1, 2, 3, 4$ são, respectivamente, $5, 15, 25$ e 35.

Suponha que as frequências observadas de A_1, A_2, A_3 e A_4 sejam 6, 18, 20 e 36, respectivamente. Assim,

$$Q_{3,cal} = \frac{(6-5)^2}{5} + \frac{(18-15)^2}{15} + \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(36-35)^2}{35} = \frac{64}{35} \approx 1.83.$$

Ou seja, falhamos em rejeitar H_0, pois $\chi^2_{tab} = qchisq(0.975, 3) = 9.34$.

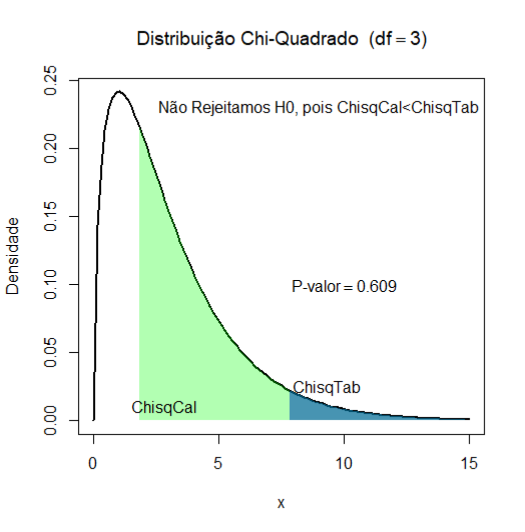

Figura: Gráfico com Resultados do Teste Qui-Quadrado

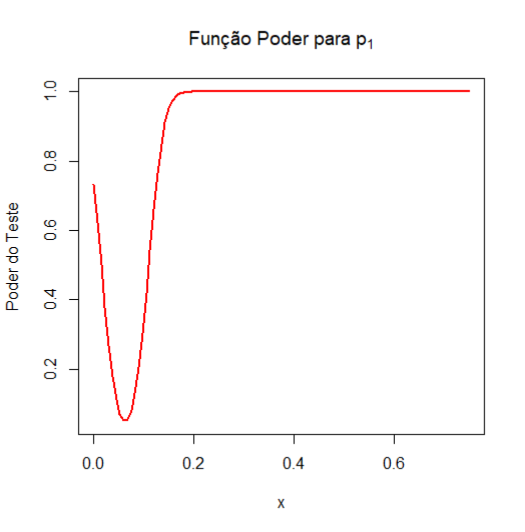

Figura: Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

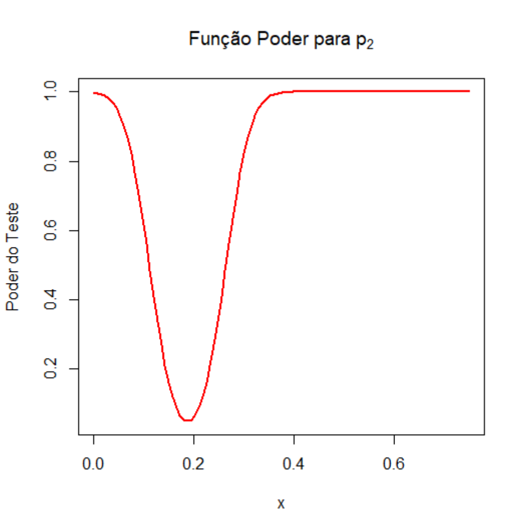

Figura: Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

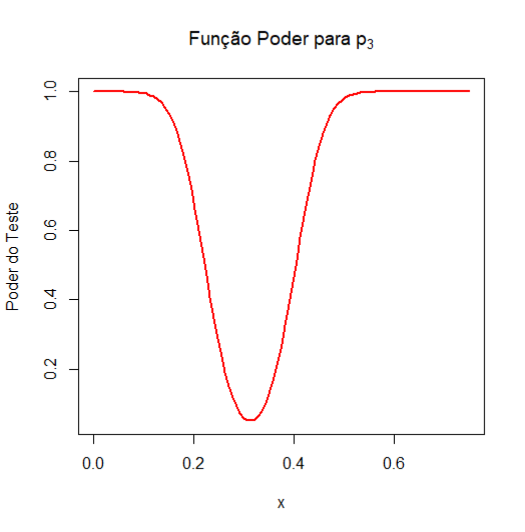

Figura: Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

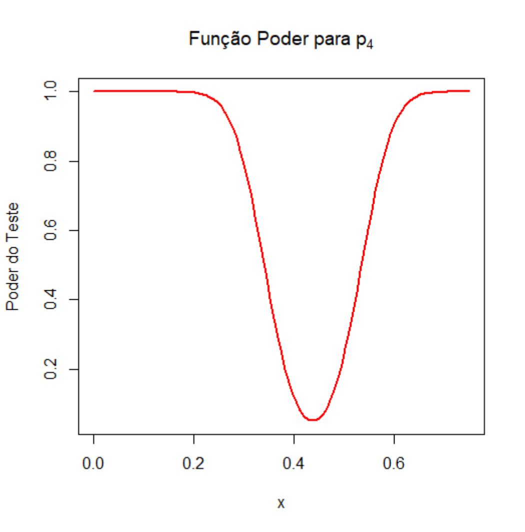

Figura: Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

Para 🏠

- **Exercícios da seção 4.7:** 1, 4 e 9.

Distribuição F

Definição 1

Sejam Y e W variáveis aleatórias independentes, em que Y segue uma distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade e W segue uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade, m e n inteiros positivos dados. Defina uma nova variável aleatória X da seguinte forma:

$$X = \frac{Y/m}{W/n} = \frac{nY}{mW}.$$

Então, a distribuição de X é chamada de distribuição F com m e n graus de liberdade. A função de densidade de probabilidade da distribuição F é apresentada no próximo slide.

Seja X uma variável aleatória com distribuição F com m e n graus de liberdade. Então, sua função de densidade de probabilidade $f(x)$ é a seguinte, para $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+n)\right] m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left[\frac{1}{2}m\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{x^{m/2} - 1}{(mx+n)^{(m+n)/2}},$$

e $f(x) = 0$ para $x \geq 0$.

Suponha que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_m$ formem uma amostra aleatória de m observações de uma distribuição normal para a qual tanto a média μ_1 quanto a variância σ_1^2 são desconhecidas. Suponha também que as variáveis aleatórias $Y_1, \ldots, Y_n$ formem uma amostra aleatória independente de n observações de outra distribuição normal para a qual tanto a média μ_2 quanto a variância σ_2^2 são desconhecidas. Por fim, suponha que as seguintes hipóteses devam ser testadas a um nível de significância especificado α_0 $(0 < \alpha_0 < 1)$:

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Definimos S_X^2 e S_Y^2 como as variâncias amostrais de X e Y, respectivamente. Então, $S_X^2/(m-1)$ e $S_Y^2/(n-1)$ são estimadores de σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente. Faz sentido intuitivo rejeitar H_0 se a razão desses dois estimadores for grande. Ou seja, definimos

$$V = \frac{S_X^2}{m-1}\bigg/\frac{S_Y^2}{n-1},$$

e rejeitamos H_0 se $V \geq c$, onde c é escolhido para que o teste tenha um nível de significância desejado.

Exemplo 1

Suponha que seis observações $X_1, \ldots, X_6$ sejam selecionadas aleatoriamente de uma distribuição normal para a qual tanto a média μ_1 quanto a variância σ_1^2 são desconhecidas, e é encontrado que $S_X^2 = 30$. Suponha também que 21 observações, $Y_1, \ldots, Y_{21}$, sejam selecionadas aleatoriamente de outra distribuição normal para a qual tanto a média μ_2 quanto a variância σ_2^2 são desconhecidas, e é encontrado que $S_Y^2 = 40$. Realize um teste F das hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

.

Neste exemplo, temos $m = 6$ e $n = 21$. Portanto, quando H_0 é verdadeira, a estatística V, seguirá a distribuição F com 5 e 20 graus de liberdade. Segue que o valor de V para as amostras dadas é $V = \frac{30/5}{40/20} = 3$.
O valor-p do teste, pode ser calculado no R por:

$$
\begin{aligned}
Pvalor &= P(F > Tcal) \\
&= pf(Fcal, nx - 1, ny - 1, lower.tail = FALSE) = 0.035
\end{aligned}
$$

A hipótese H_0 de que $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ seria, portanto, rejeitada no nível de significância $\alpha_0 = 0.05$, e H_0 não seria rejeitada no nível de significância $\alpha_0 = 0.025$.

É possível mostrar que o poder deste teste pode ser escrito como:

$$\gamma_d(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = 1 - F_{m-1,n-1}(C * \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}), C = F_{tab}$$

Suponha, assim, que seja importante rejeitar H_0 se σ_1^2 for três vezes maior que σ_2^2. Nesse caso, gostaríamos que a função poder fosse alta quando $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$. Nesse caso, $1 - F_{5,20}(2.71 \times 1/3) \approx 0.5$. Logo, se σ_1^2 for três vezes maior que σ_2^2, o teste com nível de 0.05 tem cerca de 50% de chance de rejeitar H_0.

Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.