

# Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos  
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria  
Universidade Federal de Viçosa  
Campus UFV - Viçosa



# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Resultado Importante
- 3 Teorema
- 4 Teste Qui-Quadrado
- 5 Exemplo 1
- 6 Exemplo 2
- 7 Distribuição F
- 8 Teste F
  - Exemplo 1

# Teste Qui-Quadrado

Testes qui-quadrado foram originalmente proposto por Karl Pearson em 1900, este teste representou um dos primeiros métodos de inferência estatística. Considere a variável aleatória  $X_i$  distribuída como  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , em que  $i = 1, 2, \dots, n$ , e as variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mutuamente independentes. A função de densidade conjunta dessas variáveis é dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} e^{\left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right)}, -\infty < x_i < \infty$$

A variável aleatória definida pelo expoente (exceto o coeficiente  $-1/2$ ) é a soma  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$ , essa variável aleatória segue uma distribuição Qui-Quadrado com  $n$  graus de liberdade, denotada como  $\chi^2(n)$ .

# Prove que $Z^2 \sim \chi^2(1)$

Considere  $V = Z^2$ . Quero mostrar que a densidade de  $V$  é a densidade de uma variável qui-quadrado com 1 grau de liberdade, dada por:

$$g(v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v > 0$$

# Prove que $Z^2 \sim \chi^2(1)$

Considere  $V = Z^2$ . Quero mostrar que a densidade de  $V$  é a densidade de uma variável qui-quadrado com 1 grau de liberdade, dada por:

$$g(v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v > 0$$

Para mostrar tal resultado, notem que

$$\begin{aligned} G(v) &= P(V \leq v) = P(Z^2 \leq v) \\ &= P(-\sqrt{v} \leq Z \leq \sqrt{v}) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq \sqrt{v}), \quad Z \text{ é simétrica em relação a origem!} \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

Considere  $z = \sqrt{y} \Rightarrow dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ , nesse caso,  $z = 0 \Rightarrow y = 0$ ,  $z^2 \Rightarrow y = v$ , logo,

Considere  $z = \sqrt{y} \Rightarrow dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ , nesse caso,  $z = 0 \Rightarrow y = 0$ ,  $z^2 \Rightarrow y = v$ , logo,

$$\begin{aligned} G(v) &= 2 \int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2 \int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^v \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy, \quad v > 0 \end{aligned}$$



Considere  $z = \sqrt{y} \Rightarrow dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ , nesse caso,  $z = 0 \Rightarrow y = 0$ ,  $z^2 \Rightarrow y = v$ , logo,

$$\begin{aligned} G(v) &= 2 \int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2 \int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^v \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy, \quad v > 0 \end{aligned}$$

Segue que,

$$G'(v) = g(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v > 0$$

Usando o fato de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , temos que,

$$g(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v > 0 \text{ cqd} \blacksquare$$

## Teorema 1

Sejam  $Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu$  variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão, onde  $\nu$  é um inteiro positivo. Então, a variável aleatória  $\chi^2(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$  segue uma distribuição qui-quadrado com  $\nu$  graus de liberdade.

# Demonstração:

1.  $Z_i \sim N(0, 1)$ , então  $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$ , como acabamos de demonstrar.

# Demonstração:

1.  $Z_i \sim N(0, 1)$ , então  $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$ , como acabamos de demonstrar.
2. A FGM de uma variável qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade é dada por:

$$M_Y(t) = (1 - 2t)^{-n/2} \quad \text{para } t < \frac{1}{2}.$$

# Demonstração:

1.  $Z_i \sim N(0, 1)$ , então  $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$ , como acabamos de demonstrar.
2. A FGM de uma variável qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade é dada por:

$$M_Y(t) = (1 - 2t)^{-n/2} \quad \text{para } t < \frac{1}{2}.$$

3. A FGM de  $Y$  é o produto das FGMs de  $V_1, V_2, \dots, V_\nu$  porque elas são independentes:

$$M_Y(t) = M_{V_1}(t) \cdot M_{V_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{V_\nu}(t).$$

Como  $V_i \sim \chi^2(1)$ , temos que  $M_{V_i}(t) = (1 - 2t)^{-1/2}$ .

4. Então:

$$M_Y(t) = [(1 - 2t)^{-1/2}]^\nu = (1 - 2t)^{-\nu/2}.$$

4. Então:

$$M_Y(t) = [(1 - 2t)^{-1/2}]^\nu = (1 - 2t)^{-\nu/2}.$$

5. Portanto:

$$Y \sim \chi^2(\nu).$$



Antes de entender o teste qui-quadrado de aderência, entenda a observação seguinte:

Antes de entender o teste qui-quadrado de aderência, entenda a observação seguinte:

## Observação:

Devido aos resultados anteriores, se  $X_1$  segue uma distribuição binomial  $b(n, p_1)$ , considere a variável aleatória:

$$Y = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}$$

Antes de entender o teste qui-quadrado de aderência, entenda a observação seguinte:

### Observação:

Devido aos resultados anteriores, se  $X_1$  segue uma distribuição binomial  $b(n, p_1)$ , considere a variável aleatória:

$$Y = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}$$

### Observação:

Conforme  $n$  se aproxima do infinito, a variável  $Y$  tem uma distribuição aproximada  $N(0, 1)$ . Além disso, a distribuição de  $Y^2$  é aproximadamente  $\chi^2(1)$ .

## Observação:

Seja  $X_2 = n - X_1$  e  $p_2 = 1 - p_1$ . Defina  $Q_1 = Y^2$ , então

$$Q_1 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1 - p_1)} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2}$$

Isso ocorre porque  $(X_1 - np_1)^2 = (n - X_2 - n + np_2)^2 = (X_2 - np_2)^2$ .

## Observação:

Seja  $X_2 = n - X_1$  e  $p_2 = 1 - p_1$ . Defina  $Q_1 = Y^2$ , então

$$Q_1 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1 - p_1)} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2}$$

Isso ocorre porque  $(X_1 - np_1)^2 = (n - X_2 - n + np_2)^2 = (X_2 - np_2)^2$ .

## Observação:

Notem que se  $(X_1 - np_1)^2 = (X_2 - np_2)^2$  e  $p_2 = 1 - p_1$ , então

$$\frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{np_2(X_1 - np_1)^2 + np_1(X_1 - np_1)^2}{n^2 p_1 p_2}$$

Usa-se o fato de  $p_1 + p_2 = 1$ .

## Observação:

Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira. Suponha que  $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$  tenham uma distribuição multinomial com os parâmetros  $n$  e  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ . Defina  $X_k = n - (X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1})$  e  $p_k = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1})$ . Defina  $Q_{k-1}$  por:

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

À medida que  $n$  se aproxima do infinito,  $Q_{k-1}$  possui uma distribuição aproximada  $\chi^2(k-1)$ . Para usar essa aproximação, é importante garantir que  $n$  seja grande o suficiente para que cada  $np_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, k$ , seja pelo menos igual a 5.

# Teste Qui-Quadrado

Considere um espaço amostral  $A$  de um experimento aleatório que seja a união de  $k$  conjuntos mutuamente disjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Suponha que  $P(A_i) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , e  $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{k-1}$ . Em que  $p_i$  é a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório seja um elemento do conjunto  $A_i$ .

# Teste Qui-Quadrado

Considere um espaço amostral  $A$  de um experimento aleatório que seja a união de  $k$  conjuntos mutuamente disjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Suponha que  $P(A_i) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , e  $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{k-1}$ . Em que  $p_i$  é a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório seja um elemento do conjunto  $A_i$ .

Repita um experimento aleatório  $n$  vezes de forma independente, e considere  $X_i$  como o número de vezes que o resultado do experimento é um elemento do conjunto  $A_i$ . Ou seja,  $X_1, X_2, \dots, X_k = n - X_1 - X_2 - \dots - X_{k-1}$  representam as frequências com as quais o resultado é, respectivamente, um elemento de  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Assuma que a função de massa de probabilidade conjunta de  $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$  é a função de massa de probabilidade multinomial com os parâmetros  $n, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ .



Considere a hipótese simples:

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \dots, p_{k-1} = p_{k-1,0} \\ (p_k = p_{k0} = 1 - p_{10} - p_{20} - \dots - p_{k-1,0})$$

Em que  $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{k-1,0}$  são valores especificados. Deseja-se testar  $H_0$  em relação a todas as alternativas.

Considere a hipótese simples:

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \dots, p_{k-1} = p_{k-1,0} \\ (p_k = p_{k0} = 1 - p_{10} - p_{20} - \dots - p_{k-1,0})$$

Em que  $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{k-1,0}$  são valores especificados. Deseja-se testar  $H_0$  em relação a todas as alternativas.

Se a hipótese  $H_0$  for verdadeira, a variável aleatória

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

tem uma distribuição aproximada qui-quadrado com  $k - 1$  graus de liberdade. Pois, se  $H_0$  é verdadeira,  $np_{i0}$  é o valor esperado de  $X_i$ . Os valores observados de  $Q_{k-1}$  não devem ser muito grandes se  $H_0$  for verdadeira.

Podemos, portanto, considerar o teste com nível de significância  $\alpha$  que rejeita  $H_0$  quando  $Q_{k-1} \geq c$ . Usando o software R, calculamos o valor crítico  $c$  por meio da função `qchisq(1 -  $\alpha$ , k - 1)`. Se a hipótese  $H_0$  for rejeitada quando o valor observado de  $Q_{k-1}$  for pelo menos igual a  $c$ , o teste de  $H_0$  terá um nível de significância aproximadamente igual a  $\alpha$ . Além disso, se  $q$  for o valor realizado da estatística do teste  $Q_{k-1}$ , o nível de significância observado do teste pode ser calculado em R pela função `1-pchisq(q, k - 1)`. Isso é frequentemente chamado de teste de bondade de ajuste ou de teste qui-quadrado para aderência.

# Exemplo 1

Escolher um dos seis primeiros números inteiros positivos por meio de um experimento aleatório (por exemplo, lançamento de um dado). Seja  $A_i = \{x : x = i\}$ , onde  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

$$H_0 : P(A_i) = p_{i0} = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

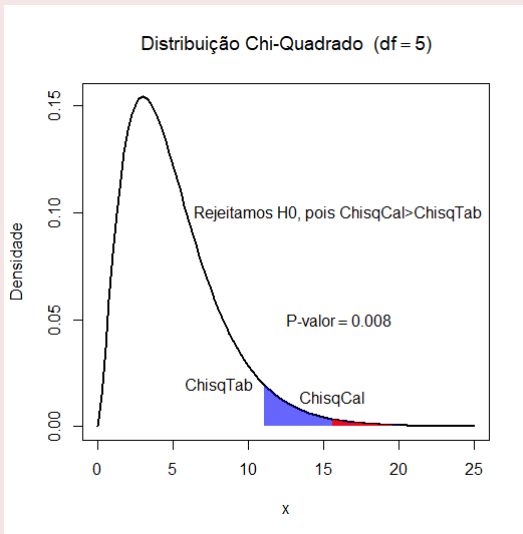
$\alpha = 5\%$ . Para realizar o teste, o experimento aleatório é repetido sob as mesmas condições, 60 vezes de forma independente. Ou seja,  $k = 6$  e  $n \cdot p_{i0} = 60 \cdot \frac{1}{6} = 10$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Seja  $X_i$  a frequência com que o experimento aleatório termina com o resultado em  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Defina  $Q_5$  como:

$$Q_5 = \sum_{i=1}^6 \frac{(X_i - 10)^2}{10}$$

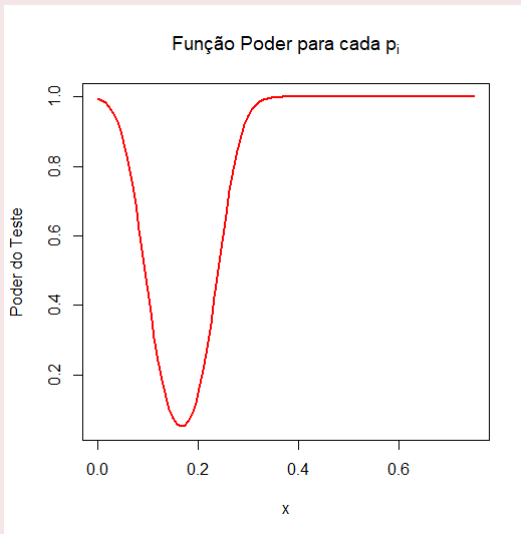
Uma vez que existem  $6 - 1 = 5$  graus de liberdade, o valor crítico para um teste com nível  $\alpha = 0.05$  é  $qchisq(0.95, 5) = 11.0705$ . Suponha agora que as frequências experimentais de  $A_1, A_2, \dots, A_6$  sejam, respectivamente, 13, 19, 11, 8, 5 e 4. O valor observado de  $Q_5$  é calculado como:

$$\begin{aligned} Q_{5,cal} &= \frac{(13 - 10)^2}{10} + \frac{(19 - 10)^2}{10} + \frac{(11 - 10)^2}{10} \\ &\quad + \frac{(8 - 10)^2}{10} + \frac{(5 - 10)^2}{10} + \frac{(4 - 10)^2}{10} \\ &= 15.6 \end{aligned}$$

Como  $15.6 > 11.0705$ , a hipótese  $P(A_i) = \frac{1}{6}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , é rejeitada a um nível de significância (aproximado) de 5%.



**Figura:** Gráfico com Resultados do Teste Qui-Quadrado



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 1)

## Exemplo 2

Neste exemplo, um ponto deve ser selecionado a partir do intervalo unitário  $\{x : 0 < x < 1\}$  por meio de um processo aleatório. Definimos os conjuntos  $A_1 = \{x : 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$ ,  $A_2 = \{x : \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $A_3 = \{x : \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}\}$  e  $A_4 = \{x : \frac{3}{4} < x < 1\}$ . As probabilidades  $p_i$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4$ , atribuídas a esses conjuntos sob a hipótese são determinadas pela função de densidade de probabilidade  $2x$ , em que  $0 < x < 1$ , e zero caso contrário. Essas probabilidades são:

$$\begin{aligned} p_{10} &= \int_0^{\frac{1}{4}} 2x \, dx = \frac{1}{16}, & p_{20} &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2x \, dx = \frac{3}{16} \\ p_{30} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x \, dx = \frac{5}{16}, & p_{40} &= \int_{\frac{3}{4}}^1 2x \, dx = \frac{7}{16} \end{aligned}$$



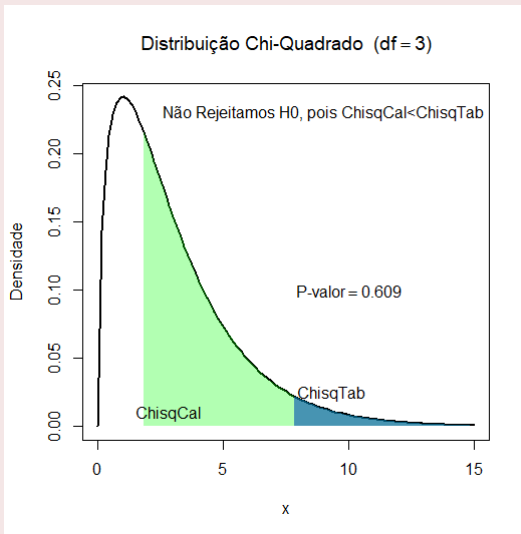
Portanto, a hipótese a ser testada é que  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$  possuem os valores anteriores em uma distribuição multinomial com  $k = 4$ . Considere  $\alpha = 0.025$ , repetindo o experimento aleatório  $n = 80$  vezes de forma independente sob as mesmas condições, temos  $n \cdot p_{i0}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  são, respectivamente, 5, 15, 25 e 35.

Portanto, a hipótese a ser testada é que  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$  possuem os valores anteriores em uma distribuição multinomial com  $k = 4$ . Considere  $\alpha = 0.025$ , repetindo o experimento aleatório  $n = 80$  vezes de forma independente sob as mesmas condições, temos  $n \cdot p_{i0}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  são, respectivamente, 5, 15, 25 e 35.

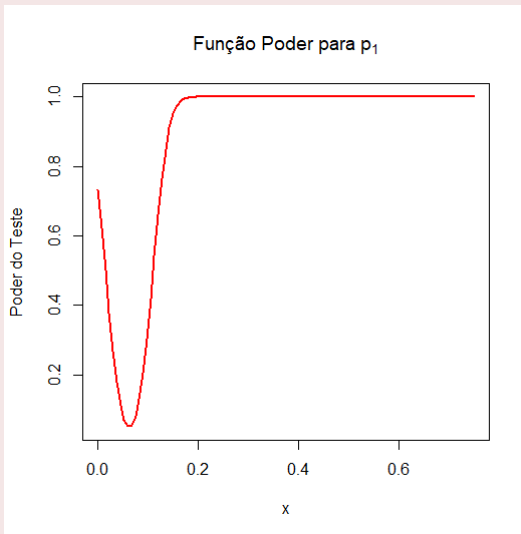
Suponha que as frequências observadas de  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  sejam 6, 18, 20 e 36, respectivamente. Assim,

$$Q_{3,cal} = \frac{(6 - 5)^2}{5} + \frac{(18 - 15)^2}{15} + \frac{(20 - 25)^2}{25} + \frac{(36 - 35)^2}{35} = \frac{64}{35} \approx 1.83.$$

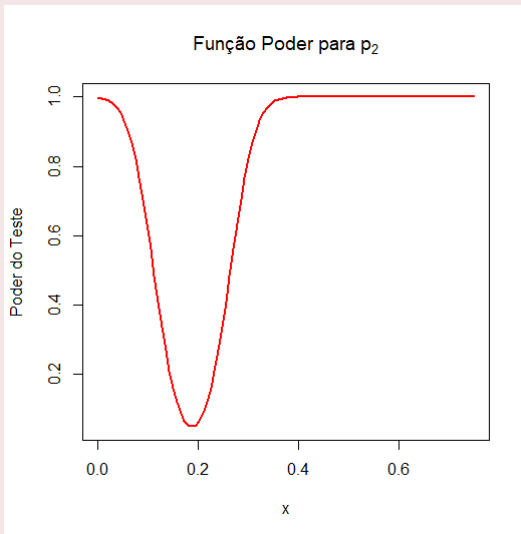
Ou seja, falhamos em rejeitar  $H_0$ , pois  $\chi_{tab}^2 = qchisq(0.975, 3) = 9.34$ .



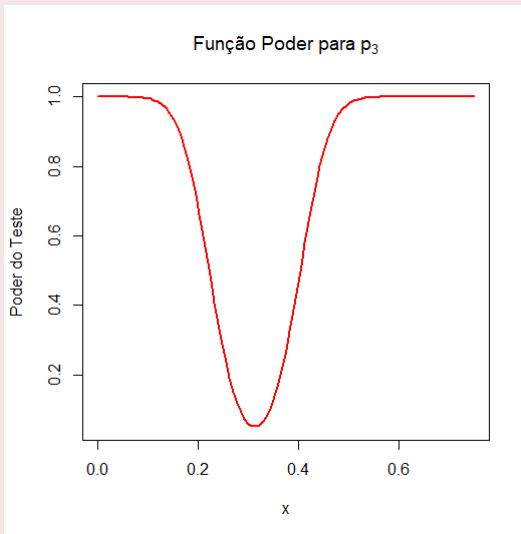
**Figura:** Gráfico com Resultados do Teste Qui-Quadrado



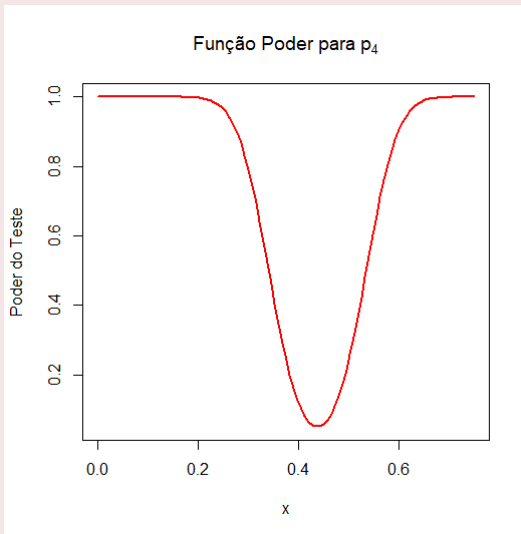
**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

# Para

- Exercícios da seção 4.7: 1, 4 e 9.



## Definição 1

*Sejam  $Y$  e  $W$  variáveis aleatórias independentes, em que  $Y$  segue uma distribuição qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade e  $W$  segue uma distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade,  $m$  e  $n$  inteiros positivos dados. Defina uma nova variável aleatória  $X$  da seguinte forma:*

$$X = \frac{Y/m}{W/n} = \frac{nY}{mW}.$$

*Então, a distribuição de  $X$  é chamada de distribuição  $F$  com  $m$  e  $n$  graus de liberdade. A função de densidade de probabilidade da distribuição  $F$  é apresentada no próximo slide.*

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição  $F$  com  $m$  e  $n$  graus de liberdade. Então, sua função de densidade de probabilidade  $f(x)$  é a seguinte, para  $x > 0$  :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+n)\right] m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left[\frac{1}{2}m\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{x^{m/2} - 1}{(mx + n)^{(m+n)/2}},$$

e  $f(x) = 0$  para  $x \leq 0$ .

Suponha que as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_m$  formem uma amostra aleatória de  $m$  observações de uma distribuição normal para a qual tanto a média  $\mu_1$  quanto a variância  $\sigma_1^2$  são desconhecidas. Suponha também que as variáveis aleatórias  $Y_1, \dots, Y_n$  formem uma amostra aleatória independente de  $n$  observações de outra distribuição normal para a qual tanto a média  $\mu_2$  quanto a variância  $\sigma_2^2$  são desconhecidas. Por fim, suponha que as seguintes hipóteses devam ser testadas a um nível de significância especificado  $\alpha_0$  ( $0 < \alpha_0 < 1$ ):

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Definimos  $S_X^2$  e  $S_Y^2$  como as variâncias amostrais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então,  $\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$  e  $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$ . Faz sentido intuitivo rejeitar  $H_0$  se a razão desses dois estimadores for grande. Ou seja, definimos

$$V = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \underset{\text{sob } H_0}{=} \frac{\frac{(m-1)S_X^2}{(m-1)\sigma_X^2}}{\frac{(n-1)S_Y^2}{(n-1)\sigma_Y^2}} \sim F(m-1, n-1),$$

e rejeitamos  $H_0$  se  $V \geq c$ , em que  $c$  é escolhido para que o teste tenha um nível de significância desejado.

# Exemplo 1

Suponha que seis observações  $X_1, \dots, X_6$  sejam selecionadas aleatoriamente de uma distribuição normal para a qual tanto a média  $\mu_1$  quanto a variância  $\sigma_1^2$  são desconhecidas, e é encontrado que  $S_X^2 = 30$ . Suponha também que 21 observações,  $Y_1, \dots, Y_{21}$ , sejam selecionadas aleatoriamente de outra distribuição normal para a qual tanto a média  $\mu_2$  quanto a variância  $\sigma_2^2$  são desconhecidas, e é encontrado que  $S_Y^2 = 40$ . Realize um teste F das hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Neste exemplo, temos  $m = 6$  e  $n = 21$ . Portanto, quando  $H_0$  é verdadeira, a estatística  $V$ , seguirá a distribuição  $F$  com 5 e 20 graus de liberdade. Segue que o valor de  $V$  para as amostras dadas é  $V = \frac{30}{40} = 0,75$ .

O valor-p do teste, pode ser calculado no R por:

$$\begin{aligned} P_{\text{valor}} &= P(F > F_{\text{cal}}) \\ &= \text{pf}(F_{\text{cal}}, nx - 1, ny - 1, \text{lower.tail} = \text{FALSE}) = 0.596 \end{aligned}$$

A hipótese  $H_0$  de que  $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$  seria, portanto, não rejeitada no nível de significância  $\alpha_0 = 0.05$ .

É possível mostrar que o poder deste teste pode ser escrito como:

$$\gamma_d(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = 1 - F_{m-1, n-1}\left(C * \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right), C = F_{tab}$$

Suponha, assim, que seja importante rejeitar  $H_0$  se  $\sigma_1^2$  for três vezes maior que  $\sigma_2^2$ . Nesse caso, gostaríamos que a função poder fosse alta quando  $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$ . Nesse caso,  $1 - pf(qf(0.95, 5, 20) * (1/3), 5, 20) = 1 - F_{5,20}(2.71 \times 1/3) \approx 0.5$ . Logo, se  $\sigma_1^2$  for três vezes maior que  $\sigma_2^2$ , o teste com nível de 0.05 tem cerca de 50% de chance de rejeitar  $H_0$ .

# Referências I



Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.