Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

1. Preliminares
2. Revisão Sobre Estimação Pontual
3. Estimadores Pontuais
   - Estimadores Não Viesados
4. Consistência e Distribuições Limites
   - Convergência em Probabilidade
   - Desigualdades de Markov e Tchebychev
   - Lei Fraca dos Grandes Números
   - Propriedades de Convergência em Probabilidades
   - Consistência
   - Convergência em Distribuição

A Inferência Estatística é um ramo da Estatística que se dedica a tirar conclusões sobre uma população com base em uma amostra representativa dessa população. Surgida no início do século XX, essa área se desenvolveu como uma resposta à necessidade de generalizar os resultados obtidos a partir de dados amostrais, permitindo a extrapolação de informações de forma rigorosa e fundamentada.

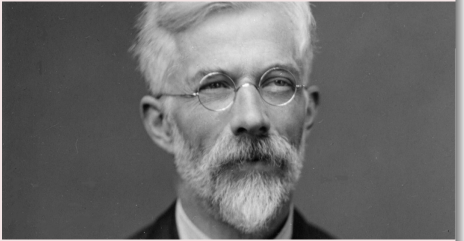
Dentre os principais pesquisadores, destacam-se Ronald Fisher, Jerzy Neyman e Egon Pearson, que foram responsáveis por desenvolver a Teoria da Estimação e a Teoria dos Testes de Hipóteses. Além desses, outros autores importantes incluem William Gosset (conhecido como Student), que criou o teste t de Student, e Harold Hotelling, que desenvolveu a Teoria da Distribuição Multivariada.

Dentre os principais pesquisadores, destacam-se Ronald Fisher, Jerzy Neyman e Egon Pearson, que foram responsáveis por desenvolver a Teoria da Estimação e a Teoria dos Testes de Hipóteses. Além desses, outros autores importantes incluem William Gosset (conhecido como Student), que criou o teste t de Student, e Harold Hotelling, que desenvolveu a Teoria da Distribuição Multivariada.

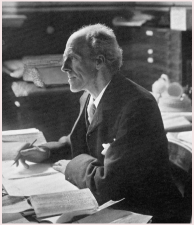
Sugestão de Leitura:

Uma Senhora Toma Chá...: Como a Estatística Revolucionou a Ciência no Século XX.(SALSBURG, 2009)

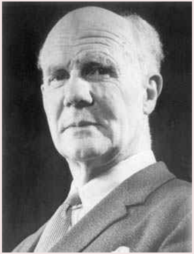
Ronald A. Fisher (1890-1962) estatístico e geneticista britânico, desenvolveu a análise de variância (ANOVA) e o teste de significância, e foi um pioneiro no uso de experimentos controlados para validar hipóteses científicas.



Karl Pearson (1857-1936) foi um estatístico e biométrico britânico, conhecido por desenvolver o conceito de correlação e regressão, além de fundar o campo da biometria. Ele também fez importantes contribuições para a teoria da probabilidade e a inferência estatística.



Egon Pearson (1895-1980) foi um estatístico britânico e filho de Karl Pearson. Ele é mais conhecido por suas contribuições à teoria estatística, especialmente no desenvolvimento da teoria dos testes de hipóteses. Juntamente com Ronald A. Fisher, ele desenvolveu o conceito de erro tipo I e erro tipo II em testes de hipóteses.



Jerzy Neyman (1894-1981) polonês de renome internacional, conhecido por suas contribuições fundamentais à teoria estatística. Neyman é famoso pelo desenvolvimento do método de intervalos de confiança e pelo conceito de testes de hipóteses que incluem o teste de significância.Também desempenhou um papel crucial na fundação do campo da estatística matemática e na educação estatística.

William Sealy Gosset (1876-1937) foi um estatístico britânico que trabalhou sob o pseudônimo "Student". Gosset desenvolveu o teste t enquanto trabalhava para a cervejaria Guinness, onde lidava com amostras pequenas e necessitava de métodos estatísticos apropriados para análise de dados limitados.

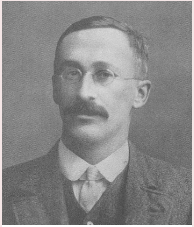
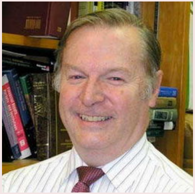


Fig. 1. "Student" (William Sealy Gosset) in 1908. (Reproduced

Harold Hotelling (1895-1973) foi um estatístico e economista americano, conhecido por suas contribuições significativas à estatística multivariada e à econometria. Entre suas realizações notáveis estão o desenvolvimento do teste de Hotelling, que é uma generalização do teste t para múltiplas variáveis. Suas ideias e métodos continuam a influenciar áreas como Análise Estatística, Economia e Ciência de dados.



Revisão de Estimação Pontual

Em um problema Estatístico típico, temos uma variável aleatória X de interesse, mas sua função de densidade de probabilidade $f(x)$ ou sua função de massa de probabilidade $p(x)$ não é conhecida. Nossa ignorância pode ser classificada de maneira geral de duas formas:

Revisão de Estimação Pontual

Em um problema Estatístico típico, temos uma variável aleatória X de interesse, mas sua função de densidade de probabilidade $f(x)$ ou sua função de massa de probabilidade $p(x)$ não é conhecida. Nossa ignorância pode ser classificada de maneira geral de duas formas:

Classificações da Ignorância

1. $f(x)$ ou $p(x)$ é completamente desconhecida.
2. A forma de $f(x)$ ou $p(x)$ é conhecida, mas um parâmetro θ é desconhecido, onde θ pode ser um vetor.

Vamos trabalhar, em especial, com a segunda classificação, embora algumas de nossas discussões se apliquem também à primeira classificação.

Alguns exemplos são os seguintes:

(a) X tem uma distribuição exponencial, $Exp(\theta)$, onde θ é desconhecido.

Alguns exemplos são os seguintes:

(a) X tem uma distribuição exponencial, $Exp(\theta)$, onde θ é desconhecido.

(b) X tem uma distribuição binomial $b(n, p)$, onde n é conhecido, mas p é desconhecido.

Alguns exemplos são os seguintes:

(a) X tem uma distribuição exponencial, $Exp(\theta)$, onde θ é desconhecido.

(b) X tem uma distribuição binomial $b(n, p)$, onde n é conhecido, mas p é desconhecido.

(c) X tem uma distribuição gama $\Gamma(\alpha, \beta)$, onde tanto α quanto β são desconhecidos.

Alguns exemplos são os seguintes:

(a) X tem uma distribuição exponencial, $Exp(\theta)$, onde θ é desconhecido.

(b) X tem uma distribuição binomial $b(n, p)$, onde n é conhecido, mas p é desconhecido.

(c) X tem uma distribuição gama $\Gamma(\alpha, \beta)$, onde tanto α quanto β são desconhecidos.

(d) X tem uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, onde tanto a média μ quanto a variância σ^2 de X são desconhecidas.

Alguns exemplos são os seguintes:

(a) X tem uma distribuição exponencial, $Exp(\theta)$, onde θ é desconhecido.

(b) X tem uma distribuição binomial $b(n, p)$, onde n é conhecido, mas p é desconhecido.

(c) X tem uma distribuição gama $\Gamma(\alpha, \beta)$, onde tanto α quanto β são desconhecidos.

(d) X tem uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, onde tanto a média μ quanto a variância σ^2 de X são desconhecidas.

(e) Se a variável X segue uma distribuição normal com média μ desconhecida e variância σ^2 conhecida, a média amostral $\bar{X}$ é uma estimativa pontual para μ.

Função de Densidade e Parâmetros

Descrição

Muitas vezes denotamos este problema dizendo que a variável aleatória X tem uma função de densidade ou massa da forma $f(x;\theta)$ ou $p(x;\theta)$, onde $\theta \in \Omega$ para um conjunto especificado Ω. Por exemplo, se $\Omega = \{\theta \mid \theta > 0\}$, então θ é um parâmetro positivo da distribuição. Queremos estimar θ com base em uma amostra.

Função de Densidade e Parâmetros

Descrição

Muitas vezes denotamos este problema dizendo que a variável aleatória X tem uma função de densidade ou massa da forma $f(x;\theta)$ ou $p(x;\theta)$, onde $\theta \in \Omega$ para um conjunto especificado Ω. Por exemplo, se $\Omega = \{\theta \mid \theta > 0\}$, então θ é um parâmetro positivo da distribuição. Queremos estimar θ com base em uma amostra.

As observações da amostra têm a mesma distribuição que X e as denotamos como as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$, onde n denota o tamanho da amostra. Quando a amostra é realmente retirada, usamos letras minúsculas $x_1, x_2, ..., x_n$ como os valores ou realizações da amostra. Muitas vezes, assumimos que as observações da amostra $X_1, X_2, ..., X_n$ também são mutuamente independentes, caso em que chamamos a amostra de amostra aleatória.

Definições de Amostra e Estatística

Definição 1

Se as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são independentes e identicamente distribuídas (iid), então essas variáveis constituem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição comum.*

Definições de Amostra e Estatística

Definição 1

Se as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ *são independentes e identicamente distribuídas (iid), então essas variáveis constituem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição comum.*

Definição 2

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ *uma amostra de uma variável aleatória* X. *Seja* $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *uma função da amostra. Então* T *é chamado de Estatística. Uma vez que a amostra é retirada, então* t *é chamado de realização de* T, *onde* $t = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *e* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *são as realizações da amostra.*

Exemplos

- A média amostral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística que estima a média populacional.
- A variância amostral é uma função dos dados da amostra que estima a variância populacional.

Estimadores Não Viesados

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com uma função de densidade ou massa da forma $f(x;\theta)$ ou $p(x;\theta)$, onde $\theta \in \Omega$ para um conjunto especificado Ω. Nessa situação, faz sentido considerar uma estatística T, como um estimador de θ. Mais formalmente, T é chamado de estimador pontual de θ. Embora chamemos T de estimador de θ, chamamos sua realização t de estimativa de θ.

Estimadores Não Viesados

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com uma função de densidade ou massa da forma $f(x;\theta)$ ou $p(x;\theta)$, onde $\theta \in \Omega$ para um conjunto especificado Ω. Nessa situação, faz sentido considerar uma estatística T, como um estimador de θ. Mais formalmente, T é chamado de estimador pontual de θ. Embora chamemos T de estimador de θ, chamamos sua realização t de estimativa de θ.

Observem que para ser um estimador pontual basta ser uma Estatística. Não fazemos nenhuma menção a qualquer correspondência entre o estimador e o parâmetro a ser estimado. No entanto, existem várias propriedades dos estimadores pontuais que discutiremos e algumas técnicas úteis que ajudam a encontrar os melhores candidatos, tais como Viés, Consistência, Eficiência, entre outras.

Observações

Observações:

- Se $E(T) \neq \theta$, dizemos que T é um estimador viesado de θ.

Observações

Observações:

- Se $E(T) \neq \theta$, dizemos que T é um estimador viesado de θ.
- Se $\lim_{n \to \infty} E(T) = \theta$, dizemos que T é um estimador assintoticamente não viesado para θ.

Exemplos

Considere $X_1, \ldots, X_n$uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$.

- $\bar{X}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é um estimador não viesado para μ;
- Além disso, $Var\left(\bar{X}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \overset{n \to \infty}{\to} 0$;
- $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$ é um estimador não viesado para σ^2;

Exemplos

Considere $X_1, \ldots, X_n$uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$.

- $\bar{X}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é um estimador não viesado para μ;
- Além disso, $Var\left(\bar{X}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$;
- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ é um estimador não viesado para σ^2;

Vejam alguns exemplos práticos, c liquem aqui!

Exemplos

Distribuição do Máximo de uma Uniforme

Considere $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta), i = 1, \cdots, n$. Seja $Y_n = max(X_1, \cdots, X_n)$.

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(max(X_1, \cdots, X_n) \leq y)$$

Exemplos

Distribuição do Máximo de uma Uniforme

Considere $X_i \overset{iid}{\sim} U(0, \theta), i = 1, \cdots, n$. Seja $Y_n = max(X_1, \cdots, X_n)$.

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P(Y_n \leq y) = P(max(X_1, \cdots, X_n) \leq y) \\ &= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \cdots, X_n \leq y) \end{aligned}$$

Exemplos

Distribuição do Máximo de uma Uniforme

Considere $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta), i = 1, \cdots, n$. Seja $Y_n = max(X_1, \cdots, X_n)$.

$$
\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= P(Y_n \leq y) = P(max(X_1, \cdots, X_n) \leq y) \\
&= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \cdots, X_n \leq y) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) = [P(X_1 \leq y)]^n
\end{aligned}
$$

Exemplos

Distribuição do Máximo de uma Uniforme

Considere $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta), i = 1, \cdots, n$. Seja $Y_n = max(X_1, \cdots, X_n)$.

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= P(Y_n \leq y) = P(max(X_1, \cdots, X_n) \leq y) \\
&= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \cdots, X_n \leq y) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) = [P(X_1 \leq y)]^n \\
&= \left(\frac{y}{\theta}\right)^n, \text{ para } y \in (0, \theta).
\end{aligned}$$

Exemplos

Logo, a função densidade de Y_n é

$$f_{Y_n(y)} = \frac{dF_{Y_n}(y)}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}.$$

Segue que,

$$E(Y_n) = \int_0^\theta yf(y)dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{n+1}\theta$$

Exemplos

Logo, a função densidade de Y_n é

$$f_{Y_n(y)} = \frac{dF_{Y_n}(y)}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}.$$

Segue que,

$$E(Y_n) = \int_0^\theta yf(y)dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{n+1}\theta$$

Logo,

- Y_n é um estimador viesado para θ;

Exemplos

Logo, a função densidade de Y_n é

$$f_{Y_n(y)} = \frac{dF_{Y_n}(y)}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}.$$

Segue que,

$$E(Y_n) = \int_0^\theta yf(y)dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{n+1}\theta$$

Logo,

- Y_n é um estimador viesado para θ;
- Note que Y_n é assintoticamente não viesado para θ e que $\dfrac{n+1}{n}Y_n$ é um estimador não viesado para θ.

Convergência em Probabilidade

Definição 3

Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *converge para uma variável aleatória* X *se, para todo* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

Convergência em Probabilidade

Definição 3

Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *converge para uma variável aleatória* X *se, para todo* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1. \tag{2}$$

Se isso ocorrer, escrevemos $X_n \xrightarrow{P} X$.

Convergência em Probabilidade

Definição 3

Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *converge para uma variável aleatória* X *se, para todo* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1. \tag{2}$$

Se isso ocorrer, escrevemos $X_n \xrightarrow{P} X$.

Em muitas situações, X é uma v.a. degenerada, ou seja, X é igual a uma constante com probabilidade 1. Vejam alguns exemplos, Clique aqui!.

Exemplo

Suponha que X_n seja a média amostral de uma sequência de n lançamentos de uma moeda com probabilidade p de sair cara. Ou seja, para cada n, X_n é a fração de caras obtidas após n lançamentos. Por exemplo:

- Para $n = 1$, X_1 será 1 se o primeiro lançamento for cara, ou 0 se for coroa.
- Para $n = 10$, X_{10} será a fração de caras obtidas em 10 lançamentos.
- Para $n = 100$, X_{100} será a fração de caras obtidas em 100 lançamentos, e assim por diante.

Exemplo

Agora, suponha que a moeda seja justa, ou seja, $p = 0.5$. À medida que n aumenta, esperamos que a média X_n dos resultados dos lançamentos (fração de caras) se aproxime de $p = 0.5$, que é o valor esperado da proporção de caras.
Neste caso:

- X_n é a fração de caras nos n lançamentos (a variável aleatória dependente de n).
- X é o valor esperado $p = 0.5$, que é o valor ao qual X_n converge.

Exemplo

Conforme aumentamos o número de lançamentos n, a probabilidade de que a média X_n esteja muito distante de 0.5 (ou seja, $|X_n - 0.5| \geq \varepsilon$ para um $\varepsilon > 0$) diminui. Isso exemplifica que X_n converge em probabilidade para $X = 0.5$.
Ou seja:

$$X_n \xrightarrow{P} 0.5 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Neste exemplo, X_n representa a fração de caras nos n lançamentos, e X é o valor fixo 0.5, que é o valor esperado a longo prazo.

Desigualdades de Markov e Tchebychev

Desigualdade de Markov

A Desigualdade de Markov afirma que, para uma variável aleatória não negativa Y e um valor positivo a, temos:

$$P(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a}.$$

Desigualdades de Markov e Tchebychev

Desigualdade de Markov

A Desigualdade de Markov afirma que, para uma variável aleatória não negativa Y e um valor positivo a, temos:

$$P(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a}.$$

Desigualdade de Tchebychev

Seja X uma v.a. com média μ e variância σ^2. Então,

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \ t > 0$$

Desigualdades de Markov e Tchebychev

Desigualdade de Markov

A Desigualdade de Markov afirma que, para uma variável aleatória não negativa Y e um valor positivo a, temos:

$$P(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a}.$$

Desigualdade de Tchebychev

Seja X uma v.a. com média μ e variância σ^2. Então,

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \quad t > 0$$

Obs: O nome correto é Tchebychev no contexto de português, enquanto Chebyshev é a forma utilizada em inglês. Ambos se referem ao mesmo matemático russo, Pafnuty Chebyshev.

Lei Fraca dos Grandes Números

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de v.a. i.i.d, com média* μ *e variância* $\sigma^2 < \infty$. *Então,*

$$\bar{X}_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

Vejam alguns exemplos práticos, Clique aqui!.

Lei Fraca dos Grandes Números

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de v.a. i.i.d, com média* μ *e variância* $\sigma^2 < \infty$. *Então,*

$$\bar{X}_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

Vejam alguns exemplos práticos, Clique aqui!.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$. Temos que,

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tchebychev}}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{n}$$

Lei Fraca dos Grandes Números

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de v.a. i.i.d, com média* μ *e variância* $\sigma^2 < \infty$. *Então,*

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

Vejam alguns exemplos práticos, Clique aqui!.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$. Temos que,

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tchebychev}}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Teorema 2

Suponha que $X_n \xrightarrow{P} X$ *e* $Y_n \xrightarrow{P} Y$*. Então,* $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$*.*

Demonstração:

Para

Teorema 3

Suponha que X_n converge em probabilidade para X e a é uma constante. Então, aX_n converge em probabilidade para aX.

Demonstração:

Se $a = 0$, o resultado é imediato. Suponha $a \neq 0$. Seja $\varepsilon > 0$. O resultado segue das seguintes igualdades:

$$P[|aX_n - aX| \geq \varepsilon] = P[|a||X_n - X| \geq \varepsilon] \quad = P[|X_n - X| \geq \varepsilon/|a|].$$

E pelas hipóteses, o último termo converge para 0 conforme $n \to \infty$.

Teorema 4

Suponha que X_n converge em probabilidade para a e a função real g é contínua em a. Então, $g(X_n)$ converge em probabilidade para $g(a)$.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$, então $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. Assim,

$$|g(x) - g(a)| \geq \varepsilon \Rightarrow |x - a| \geq \delta.$$

Substituindo X_n por x na implicação acima, obtemos

$$P[|g(X_n) - g(a)| \geq \varepsilon] \leq P[|X_n - a| \geq \delta].$$

Pelas hipóteses, o último termo converge para 0 conforme $n \to \infty$, o que nos dá o resultado.

Este teorema nos fornece muitos resultados úteis. Por exemplo, se X_n converge em probabilidade para a, então:

- X_n^2 converge em probabilidade para a^2.
- $\frac{1}{X_n}$ converge em probabilidade para $\frac{1}{a}$, desde que $a \neq 0$.
- X_n converge em probabilidade para $\sqrt{a}$, desde que $a \geq 0$.

Teorema 5

Se X_n converge em probabilidade para X e g é uma função contínua, então $g(X_n)$ converge em probabilidade para $g(X)$.

Demonstração:

Página 104 de Tucker (1967).

Teorema 6

Suponha que X_n converge em probabilidade para X e Y_n converge em probabilidade para Y. Então, X_nY_n converge em probabilidade para XY.

Demonstração:

Utilizando os resultados anteriores, temos:

$$
\begin{aligned}
X_nY_n &= \frac{1}{2}X_n^2 + \frac{1}{2}Y_n^2 - \frac{1}{2}(X_n - Y_n)^2 \\
&\xrightarrow{P} \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}(X - Y)^2 \\
&= XY.
\end{aligned}
$$

Consistência

Definição 4

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição acumulada $F(x, \theta)$, $\theta \in \mathcal{A} \subseteq \Omega$. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra da distribuição de X e seja T_n uma estatística ($T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$). Dizemos que T_n é um estimador consistente para θ se $T_n \xrightarrow{P} \theta$.

Exemplo

Sejam $X_1, \dots, X_n, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias iid de uma distribuição com média finita μ e variância $\sigma^2 < +\infty$, então, pela Lei Fraca dos Grandes Números, temos que, $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$. Ou seja, $\bar{X}_n$ é um estimador consistente de μ.

Exemplo

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância $\sigma^2 < +\infty$. Suponha que $E[X_1^4] < +\infty$, de tal forma que $Var(S^2) < +\infty$.

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2\right) \\
&\xrightarrow{P} 1 \cdot [E(X_1^2) - \mu^2] = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a variância da amostra é um estimador consistente de σ^2. A partir da discussão acima, temos imediatamente que $S_n \xrightarrow{P} \sigma$; ou seja, o desvio padrão da amostra é um estimador consistente do desvio padrão populacional. Vejam estes exemplos anteriores na prática, Clique aqui!.

Exemplo

Considere $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e $Y_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Seja $\varepsilon > 0$, segue que:

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) &= P(\theta - Y_n \geq \varepsilon) \\ &= P(Y_n \leq \theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Exemplo

Considere $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e $Y_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Seja $\varepsilon > 0$, segue que:

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) &= P(\theta - Y_n \geq \varepsilon) \\ &= P(Y_n \leq \theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Se $\theta - \varepsilon \leq 0$, então $P(Y_n \leq \theta - \varepsilon) = 0$, pois $0 \leq Y_n \leq \theta$, com $P(0 \leq Y_n \leq \theta) = 1$.

Exemplo

Considere $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e $Y_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Seja $\varepsilon > 0$, segue que:

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) &= P(\theta - Y_n \geq \varepsilon) \\ &= P(Y_n \leq \theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Se $\theta - \varepsilon \leq 0$, então $P(Y_n \leq \theta - \varepsilon) = 0$, pois $0 \leq Y_n \leq \theta$, com $P(0 \leq Y_n \leq \theta) = 1$.

Se $0 < \varepsilon < \theta$ então,

$$P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq \theta - \varepsilon) = F_{Y_n}(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ou seja, $Y_n \xrightarrow{P} \theta$. Logo, Y_n é um estimador consistente para θ.

Para 🏠

Exercícios 2.8.18, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.7 e 5.1.9

Convergência em Distribuição

Definição 5

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias com função de distribuição* F_{X_n}, $n \geq 1$. *Seja* X *uma variável aleatória com função de distribuição* F_X. *Seja* $C(F_X)$ *o conjunto de todos os pontos de continuidade de* F_X. *Dizemos que* X_n *converge em distribuição para* X *se,*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \ \forall x \in C(F_X).$$

Denotamos essa convergência por $X_n \xrightarrow{D} X$ *ou* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Convergência em Distribuição

Definição 5

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias com função de distribuição* F_{X_n}, $n \geq 1$. *Seja* X *uma variável aleatória com função de distribuição* F_X. *Seja* $C(F_X)$ *o conjunto de todos os pontos de continuidade de* F_X. *Dizemos que* X_n *converge em distribuição para* X *se,*

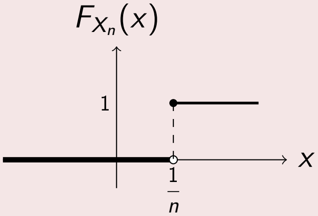
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \ \forall x \in C(F_X).$$

Denotamos essa convergência por $X_n \xrightarrow{D} X$ *ou* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

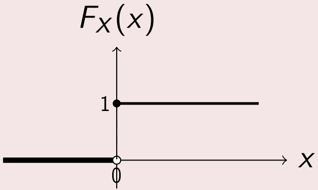
À medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição das médias amostrais se aproxima da distribuição normal, veja isso acontecendo na prática, Clique aqui!.

Exemplo

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1, \forall n \geq 1,\ \ P(X = 0) = 1, \mathcal{C}(F_X(x)) = \{x \in \mathbb{R}; \mathrm{x} \neq 0\}$$



(a) $P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1$



(b) $P(X = 0) = 1$

Figura: $\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),\ \forall x \neq 0,$ ou seja $X_n \xrightarrow{D} X$

Exemplo 2 (Convergência em Distribuição não Implica Convergência em Probabilidade)

Seja X uma variável aleatória contínua simétrica em torno do zero (ou seja, se f denota sua densidade, então $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Neste caso, X e $-X$ tem a mesma distribuição (Verifiquem!). Defina a sequência de variáveis aleatórias X_n como: $X_n = \begin{cases} X, & \text{se } n \text{ é par} \\ -X, & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$

Exemplo 2 (Convergência em Distribuição não Implica Convergência em Probabilidade)

Seja X uma variável aleatória contínua simétrica em torno do zero (ou seja, se f denota sua densidade, então $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Neste caso, X e $-X$ tem a mesma distribuição (Verifiquem!). Defina a sequência de variáveis aleatórias X_n como: $X_n = \begin{cases} X, & \text{se } n \text{ é par} \\ -X, & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$

É fácil ver que $F_{X_n}(x) = F_X(x)$. Logo, $X_n \xrightarrow{D} X$. Porém, $X_n \overset{P}{\not\to} X$, pois

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ P(2|X| \geq \varepsilon), & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Exemplo 3

Seja T_n uma variável aleatória com distribuição t-Student com n graus de liberdade, ou seja, a densidade de T_n é dada por:

$$f_{T_n}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \ y \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3

Seja T_n uma variável aleatória com distribuição t-Student com n graus de liberdade, ou seja, a densidade de T_n é dada por:

$$f_{T_n}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \ y \in \mathbb{R}$$

Temos que,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dy$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dy$$

$$\underset{\substack{\text{Teorema da}\\ \text{Convergência Dominada}}}{=} \int_{-\infty}^{t} \lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dy$$

$$= \star\star$$

Considere a seguinte aproximação de Stirling (Conhecida como fórmula de Stirling):

$$\Gamma(t+1) \approx \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^{t}$$

Ou seja,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2t\pi}\left(\frac{t}{e}\right)^{t}} = 1$$

Considere a seguinte aproximação de Stirling (Conhecida como fórmula de Stirling):

$$\Gamma(t+1) \approx \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t$$

Ou seja,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2t\pi}\left(\frac{t}{e}\right)^t} = 1$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}\left(\frac{n-2}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)}} \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \star \text{ (t da fórmula de Stirling será } \frac{n-1}{2})$$

$$
\begin{aligned}
\star &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)^{\frac{n}{2}}(n-2)^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

$$\star = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)^{\frac{n}{2}}(n-2)^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Portanto, substituindo em $\star\star$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Logo, $T_n \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Teorema 7

Se $X_n \xrightarrow{P} X$, *então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 8

Se $X_n \xrightarrow{D} a,$ *então* $X_n \xrightarrow{P} a,$ *a constante.*

Teorema 9

Se $X_n \xrightarrow{D} X$ *e* $Y_n \xrightarrow{P} 0$ *então* $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 10

Se $X_n \xrightarrow{D} X$ *e* g *é uma função contínua no suporte de* X, *então*

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X).$$

Teorema de Slutsky

Teorema 11

Sejam X_n, A_n *e* B_n, *variáveis aleatórias com* $X_n \xrightarrow{D} X$, $A_n \xrightarrow{P} a$ *e* $B_n \xrightarrow{P} b$, a, b *constantes reais. Então,*

$$A_n X_n + B_n \xrightarrow{D} aX + b.$$

Para 🏠

Exercícios 5.2.2, 5.2.3, 5.2.6, 5.2.12, 5.2.15, 5.2.17, 5.2.19 e 5.2.20

Referências I

CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. [S.l.]: Cengage Learning, 2021.

HOGG, RV; MCKEAN, J; CRAIG, AT. **Introduction to Mathematical Statistics**. Eighth Edition. [S.l.]: Pearson, 2019.

SALSBURG, David S. **Uma senhora toma chá... como a estatística revolucionou a ciência no século XX**. [S.l.]: Zahar Rio de Janeiro, 2009.