Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Considere a função densidade de probabilidade (pdf)

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{Caso Contrário} \end{cases}$$

Deseja-se testar a hipótese simples $H_0 : \theta = 2$ contra a hipótese alternativa composta $H_1 : \theta > 2$. Assim, $\Omega = \{\theta : \theta \geq 2\}$. Uma amostra aleatória, X_1, X_2, de tamanho $n = 2$ é utilizada, assumindo $\alpha = 0,05$ a região crítica é $C = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \geq k\}$ em que k é tal que $P_{\theta=2}(x_1 + x_2 \geq k) = 0,05$. Usando k=qgamma(0.95,2,1/2) obtemos $k \approx 9.5$. Observe que assumi que $T = X_1 + X_2$ segue uma distribuição gama com parâmetros $k = 2$ e taxa $\lambda = 1/\theta$.

Usando que $T \sim$ Gamma$(2, 1/\theta)$, a função poder é dada por:

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= P_\theta(T > 9.5) \\ &= 1 - F_T(9.5; 2, 1/\theta),\end{aligned}$$

onde $F_T(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da variável gama. Como

$$F_T(t; 2, 1/\theta) = 1 - e^{-t/\theta}\left(1 + \frac{t}{\theta}\right),$$

segue que

$$\boxed{\gamma(\theta) = e^{-9.5/\theta}\left(1 + \frac{9.5}{\theta}\right)}, \quad \theta \geq 2.$$

De outra forma:

A função poder $\gamma(\theta)$ do teste para todos os $\theta \geq 2$ é:

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= P_\theta(X_1 + X_2 > 9.5)\\ &= 1 - \int_0^{9.5}\int_0^{9.5-x_2} \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x_1+x_2}{\theta}} dx_1 dx_2\\ &= \left(\frac{\theta + 9.5}{\theta}\right) e^{-9.5/\theta}, \quad \theta \geq 2.\end{aligned}$$

Por exemplo, $\gamma(2) = 0.05$, $\gamma(4) = 0.31$ e $\gamma(9.5) = \frac{2}{e} \approx 0.74$. O conjunto $C = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \geq 9,5\}$ é uma melhor região crítica de tamanho 0.05 para testar a hipótese simples $H_0 : \theta = 2$ contra cada hipótese simples na hipótese composta $H_1 : \theta > 2$.

Mesmo Exemplo (variação com $\theta_1 = 6$)

Vamos considerar o problema de testar a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0 = 2$ contra a hipótese alternativa simples $H_1 : \theta = \theta_1 = 6$.

Mesmo Exemplo (variação com $\theta_1 = 6$)

Vamos considerar o problema de testar a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0 = 2$ contra a hipótese alternativa simples $H_1 : \theta = \theta_1 = 6$.

Razão de verossimilhança

A razão de verossimilhança é dada por:

$$\frac{L(\theta_0; X_1, X_2)}{L(\theta_1; X_1, X_2)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^2 e^{-(X_1+X_2)\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)}.$$

Substituindo $\theta_0 = 2$ e $\theta_1 = 6$, obtemos:

$$\frac{L(2)}{L(6)} = 9\, e^{-(X_1+X_2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} = 9\, e^{-(X_1+X_2)/3}.$$

Região crítica ótima

O teste de Neyman–Pearson rejeita H_0 quando a razão de verossimilhança é pequena, ou seja:

$$\frac{L(2)}{L(6)} \leq k \quad \Longleftrightarrow \quad 9e^{-(X_1+X_2)/3} \leq k.$$

Assim, a melhor região crítica de tamanho α é:

$$\boxed{C = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \geq c\}},$$

onde c é escolhido tal que $P_{\theta=2}(X_1 + X_2 \geq c) = \alpha$. Pelo mesmo motivo das hipóteses anteriores, se $\alpha = 0.05$ obtemos $c \approx 9{,}49$.

Exemplo numérico: $\theta_1 = 6$

Substituindo $\theta = 6$ na expressão da função poder, já calculada para todo $\theta \geq 2$, obtemos:

$$\gamma(6) = e^{-9.5/6}\left(1 + \frac{9.5}{6}\right) = e^{-1.5833}(2.5833)$$
$$\approx 0.2059 \times 2.5833 \approx 0.532.$$

Portanto, a probabilidade de rejeitar corretamente H_0 quando $\theta = 6$ é aproximadamente:

$$\boxed{\gamma(6) \approx 0.53.}$$

Em R, o mesmo resultado é obtido por: pgamma(9.5, shape $=$ 2, rate $=$ $1/6$, lower.tail $=$ FALSE) $=$ 0.532 Assim, o teste tem potência de aproximadamente 53% quando $\theta = 6$.

Justificativa: o poder em $\theta = 2$ é o supremo sob H_0

Por definição, o **nível de significância** α de um teste é o maior valor da probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira, ou seja:

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Omega_0} P_\theta(T \in C),$$

em que C é a região crítica e Ω_0 é o conjunto de parâmetros sob H_0. No problema em questão, temos:

$$H_0 : \theta = 2, \quad H_1 : \theta > 2,$$

portanto, $\Omega_0 = \{2\}$ e a função poder é:

$$\gamma(\theta) = e^{-9.5/\theta} \left(1 + \frac{9.5}{\theta}\right).$$

Como $\gamma(\theta)$ é **crescente** em θ (maior θ implica maior chance de rejeitar H_0), temos:

Interpretação prática

O valor $\gamma(2)$ representa a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira — isto é, o **erro tipo I**. Por construção da região crítica,

$$\gamma(2) = P_{\theta=2}(T > 9.5) = 0.05 = \alpha.$$

Portanto, o poder em $\theta = 2$ é o **supremo da função poder sob H_0**, e o teste é dito ter **tamanho 0.05**.
Essa propriedade garante que o teste é válido, isto é, não ultrapassa o nível de significância especificado, sendo também o mais poderoso entre todos os testes com esse mesmo tamanho.

- **Resumo do exemplo anterior:**
  - exemplo anterior ilustra um teste de uma hipótese simples H_0 que é o melhor teste de H_0 contra todas as hipóteses simples na hipótese alternativa composta H_1.
- **Queremos agora definir uma Região Crítica para uma hipótese composta que:**
  - Seja a "melhor" para testar H_0 contra H_1.

- **Resumo do exemplo anterior:**
  - exemplo anterior ilustra um teste de uma hipótese simples H_0 que é o melhor teste de H_0 contra todas as hipóteses simples na hipótese alternativa composta H_1.
- **Queremos agora definir uma Região Crítica para uma hipótese composta que:**
  - Seja a "melhor" para testar H_0 contra H_1.
  - Melhor região crítica significa:
    - A função poder do teste deve ser **maior ou igual** à de qualquer outro teste para cada hipótese simples em H_1.

- **Resumo do exemplo anterior:**
  - exemplo anterior ilustra um teste de uma hipótese simples H_0 que é o melhor teste de H_0 contra todas as hipóteses simples na hipótese alternativa composta H_1.
- **Queremos agora definir uma Região Crítica para uma hipótese composta que:**
  - Seja a "melhor" para testar H_0 contra H_1.
  - Melhor região crítica significa:
    - A função poder do teste deve ser **maior ou igual** à de qualquer outro teste para cada hipótese simples em H_1.
    - Deve ter o **mesmo nível de significância**.

Definição 1

A região crítica C é uma região crítica uniformemente mais poderosa (UMP) de tamanho α para testar a hipótese simples H_0 contra uma hipótese alternativa composta H_1 se o conjunto C é a melhor região crítica de tamanho α para testar H_0 contra cada hipótese simples em H_1. Um teste definido por essa região crítica C é chamado de teste uniformemente mais poderoso (UMP), com nível de significância α, para testar a hipótese simples H_0 contra a hipótese alternativa composta H_1.

Como será visto posteriormente, testes uniformemente mais poderosos nem sempre existem. No entanto, quando existem, o teorema de Neyman-Pearson fornece uma técnica para encontrá-los. Alguns exemplos ilustrativos são dados aqui.

Exemplo

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal $N(0, \theta)$, onde a variância θ é um número positivo desconhecido. Será demonstrado que existe um teste uniformemente mais poderoso com nível de significância α para testar a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$, onde θ_0 é um número positivo fixo, em oposição à hipótese alternativa composta $H_1 : \theta > \theta_0$. Assim, $\Omega = \{\theta : \theta \geq \theta_0\}$.
A função de densidade conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é dada por

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi\theta)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right). \tag{1}$$

Seja θ_1 representando um número maior que θ_0, e k denote um número positivo. Seja C o conjunto de pontos onde

$$\frac{L(\theta_0; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{L(\theta_1; x_1, x_2, \ldots, x_n)} \leq k, \tag{2}$$

isto é, o conjunto de pontos onde

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2\theta_0}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\theta_1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)} \leq k, \tag{3}$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{2\theta_1\theta_0}{\theta_1 - \theta_0}\left(\frac{n}{2}\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) - \log k\right) = c$$

O conjunto $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq c\}$ é então uma melhor região crítica para testar a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$ em oposição à hipótese simples $\theta = \theta_1$. Resta determinar c de forma que esta região crítica tenha o tamanho desejado α. Se H_0 for verdadeira, a variável aleatória

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\theta_0} \tag{4}$$

tem uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Uma vez que $\alpha = P_{\theta_0}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\theta_0} \geq \frac{c}{\theta_0}\right)$, c/θ_0 pode ser calculado, por exemplo, usando o código R

$$\text{q}chisq(1-\alpha, n).$$

Então, $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq c\}$ é uma melhor região crítica de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ em oposição à hipótese $\theta = \theta_1$.

Além disso, para cada número θ_1 maior que θ_0, o argumento anterior se mantém. Ou seja, $C = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq c\}$ é uma região crítica uniformemente mais poderosa de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ em oposição a $H_1 : \theta > \theta_0$. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotam os valores experimentais de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, então $H_0 : \theta = \theta_0$ é rejeitada ao nível de significância α, e $H_1 : \theta > \theta_0$ é aceita se $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq c$; caso contrário, $H_0 : \theta = \theta_0$ é aceita.
Se, na discussão anterior, tomarmos $n = 15$, $\alpha = 0,05$ e $\theta_0 = 3$, então as duas hipóteses são $H_0 : \theta = 3$ e $H_1 : \theta > 3$. Usando R, $c/3$ é calculado por `qchisq(0.95, 15)` $= 24,996$. Portanto, $c = 74,988$.

Exemplo 2

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal $N(\theta, 1)$, onde θ é desconhecido. Será demonstrado que não existe um teste uniformemente mais poderoso para a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$, onde θ_0 é um número fixo, em oposição à hipótese alternativa composta $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Assim, $\Omega = \{\theta : -\infty < \theta < \infty\}$.

Exemplo 2

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal $N(\theta, 1)$, onde θ é desconhecido. Será demonstrado que não existe um teste uniformemente mais poderoso para a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$, onde θ_0 é um número fixo, em oposição à hipótese alternativa composta $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Assim, $\Omega = \{\theta : -\infty < \theta < \infty\}$.

Seja θ_1 um número diferente de θ_0. Seja k um número positivo e considere

$$\frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_0)^2\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2\right)} \leq k.$$

A desigualdade anterior pode ser escrita como

$$(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{2 \log k - n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2}.$$

A desigualdade anterior pode ser escrita como

$$(\theta_0 - \theta_1)\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{2\log k - n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2}.$$

- Se $\theta_0 > \theta_1$ essa última desigualdade é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{2\log k - n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2(\theta_0 - \theta_1)},$$

A desigualdade anterior pode ser escrita como

$$(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{2 \log k - n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2}.$$

- Se $\theta_0 > \theta_1$ essa última desigualdade é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{2 \log k - n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2(\theta_0 - \theta_1)},$$

- Por outro lado, se $\theta_0 < \theta_1$, é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{2 \log k - n(\theta_1^2 - \theta_0^2)}{2(\theta_0 - \theta_1)}.$$

- **Definição de Melhor Região Crítica:**
  - **Primeira expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.

- **Definição de Melhor Região Crítica:**
  - **Primeira expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.
  - **Segunda expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$.

- **Definição de Melhor Região Crítica:**
  - **Primeira expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.
  - **Segunda expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$.
- **Limitações da Melhor Região Crítica:**
  - Uma melhor região crítica para $\theta = \theta_0 + 1$ não serve para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $\theta = \theta_0 - 1$.

- **Definição de Melhor Região Crítica:**
  - **Primeira expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.
  - **Segunda expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$.
- **Limitações da Melhor Região Crítica:**
  - Uma melhor região crítica para $\theta = \theta_0 + 1$ não serve para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $\theta = \theta_0 - 1$.
  - Portanto, não existe um teste uniformemente mais poderoso neste caso.

- **Definição de Melhor Região Crítica:**
  - **Primeira expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$.
  - **Segunda expressão:** Melhor região crítica para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$.
- **Limitações da Melhor Região Crítica:**
  - Uma melhor região crítica para $\theta = \theta_0 + 1$ não serve para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $\theta = \theta_0 - 1$.
  - Portanto, não existe um teste uniformemente mais poderoso neste caso.
- **Teste Uniformemente Mais Poderoso:**
  - Caso a hipótese alternativa fosse composta unidirecional:
    - $H_1 : \theta > \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$. Um teste uniformemente mais poderoso existiria para cada instância.

Para 🏠

- **Exercícios da seção 8.2:** 1,3,5,6,11,13.

Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.