# Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

# Sumário

# Teste Qui-Quadrado

Testes qui-quadrado foram originalmente proposto por Karl Pearson em 1900, este teste representou um dos primeiros métodos de inferência estatística. Considere a variável aleatória $X_i$ distribuída como $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, em que $i = 1, 2, \ldots, n$, e as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mutuamente independentes. A função de densidade conjunta dessas variáveis é dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right)}, -\infty < x_i < \infty$$

A variável aleatória definida pelo expoente (exceto o coeficiente -1/2) é a soma $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2$, essa variável aleatória segue uma distribuição Qui-Quadrado com $n$ graus de liberdade, denotada como $\chi^2(n)$.

# Prove que $Z^2 \sim \chi^2(1)$

Considere $V = Z^2$. Quero mostrar que a densidade de $V$ é a densidade de uma variável qui-quadrado com 1 grau de liberdade, dada por:

$$g(v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \ v > 0$$

# Prove que $Z^2 \sim \chi^2(1)$

Considere $V = Z^2$. Quero mostrar que a densidade de $V$ é a densidade de uma variável qui-quadrado com 1 grau de liberdade, dada por:

$$g(v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \ v > 0$$

Para mostrar tal resultado, notem que

$$\begin{aligned} G(v) &= P(V \leq v) = P(Z^2 \leq v) \\ &= P(-\sqrt{v} \leq Z \leq \sqrt{v}) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq \sqrt{v}), \ Z \text{ é simétrica em relação a origem!} \\ &= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

Considere $z = \sqrt{y} \Rightarrow \ dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, nesse caso, $z = 0 \Rightarrow \ y = 0, \ z^2 \Rightarrow \ y = v$, logo, Considere $z = \sqrt{y} \Rightarrow \; dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, nesse caso, $z = 0 \Rightarrow \; y = 0, \; z^2 \Rightarrow \; y = v$, logo,

$$
\begin{aligned}
G(v) &= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= 2\int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy, \; v > 0
\end{aligned}
$$

Considere $z = \sqrt{y} \Rightarrow \ dz = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}dy = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, nesse caso, $z = 0 \Rightarrow \ y = 0, \ z^2 \Rightarrow \ y = v$, logo,

$$\begin{aligned} G(v) &= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2\int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy, \ v > 0 \end{aligned}$$

Segue que,

$$G^{'}(v) = g(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \ v > 0$$

Usando o fato de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, temos que,

$$g(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, \ v > 0 \text{ cqd } \blacksquare$$

## Teorema 1

*Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão, onde $\nu$ é um inteiro positivo. Então, a variável aleatória $\chi^2(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com $\nu$ graus de liberdade.*

# Demonstração:

1. $Z_i \sim N(0,1)$, então $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, como acabamos de demonstrar.

# Demonstração:

1. $Z_i \sim N(0,1)$, então $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, como acabamos de demonstrar.
2. A FGM de uma variável qui-quadrado com $n$ graus de liberdade é dada por:

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-n/2} \quad \text{para } t < \frac{1}{2}.$$

# Demonstração:

1. $Z_i \sim N(0,1)$, então $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, como acabamos de demonstrar.
2. A FGM de uma variável qui-quadrado com $n$ graus de liberdade é dada por:

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-n/2} \quad \text{para } t < \frac{1}{2}.$$

3. A FGM de $Y$ é o produto das FGMs de $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ porque elas são independentes:

$$M_Y(t) = M_{V_1}(t) \cdot M_{V_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{V_\nu}(t).$$

Como $V_i \sim \chi^2(1)$, temos que $M_{V_i}(t) = (1-2t)^{-1/2}$.

4. Então:

$$M_Y(t) = \left[(1-2t)^{-1/2}\right]^{\nu} = (1-2t)^{-\nu/2}.$$

4. Então:

$$M_Y(t) = \left[(1-2t)^{-1/2}\right]^{\nu} = (1-2t)^{-\nu/2}.$$

5. Portanto:

$$Y \sim \chi^2(\nu).$$

Antes de entender o teste qui-quadrado de aderência, entenda a observação seguinte:

Antes de entender o teste qui-quadrado de aderência, entenda a observação seguinte:

## Observação:

Devido aos resultados anteriores, se $X_1$ segue uma distribuição binomial $b(n, p_1)$, considere a variável aleatória:

$$Y = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}$$

Antes de entender o teste qui-quadrado de aderência, entenda a observação seguinte:

## Observação:

Devido aos resultados anteriores, se $X_1$ segue uma distribuição binomial $b(n, p_1)$, considere a variável aleatória:

$$Y = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}$$

## Observação:

Conforme $n$ se aproxima do infinito, a variável $Y$ tem uma distribuição aproximada $N(0, 1)$. Além disso, a distribuição de $Y^2$ é aproximadamente $\chi^2(1)$.

## Observação:

Seja $X_2 = n - X_1$ e $p_2 = 1 - p_1$. Defina $Q_1 = Y^2$, então

$$Q_1 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2}$$

Isso ocorre porque $(X_1 - np_1)^2 = (n - X_2 - n + np_2)^2 = (X_2 - np_2)^2$.

## Observação:

Seja $X_2 = n - X_1$ e $p_2 = 1 - p_1$. Defina $Q_1 = Y^2$, então

$$Q_1 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2}$$

Isso ocorre porque $(X_1 - np_1)^2 = (n - X_2 - n + np_2)^2 = (X_2 - np_2)^2$.

## Observação:

Notem que se $(X_1 - np_1)^2 = (X_2 - np_2)^2$ e $p_2 = 1 - p_1$, então

$$\frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{np_2(X_1 - np_1)^2 + np_1(X_1 - np_1)^2}{n^2 p_1 p_2}$$

Usa-se o fato de $p_1 + p_2 = 1$.

## Observação:

Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira. Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ tenham uma distribuição multinomial com os parâmetros $n$ e $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$. Defina $X_k = n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_{k-1})$ e $p_k = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1})$. Defina $Q_{k-1}$ por:

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

À medida que $n$ se aproxima do infinito, $Q_{k-1}$ possui uma distribuição aproximada $\chi^2(k-1)$. Para usar essa aproximação, é importante garantir que $n$ seja grande o suficiente para que cada $np_i$, onde $i = 1, 2, \ldots, k$, seja pelo menos igual a 5.

# Teste Qui-Quadrado

Considere um espaço amostral $A$ de um experimento aleatório que seja a união de $k$ conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Suponha que $P(A_i) = p_i, \ i = 1, 2, \ldots, k$, e $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{k-1}$. Em que $p_i$ é a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório seja um elemento do conjunto $A_i$.

# Teste Qui-Quadrado

Considere um espaço amostral $A$ de um experimento aleatório que seja a união de $k$ conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Suponha que $P(A_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$, e $p_k = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{k-1}$. Em que $p_i$ é a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório seja um elemento do conjunto $A_i$.

Repita um experimento aleatório $n$ vezes de forma independente, e considere $X_i$ como o número de vezes que o resultado do experimento é um elemento do conjunto $A_i$. Ou seja, $X_1, X_2, \ldots, X_k = n - X_1 - X_2 - \ldots - X_{k-1}$ representam as frequências com as quais o resultado é, respectivamente, um elemento de $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Assuma que a função de massa de probabilidade conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ é a função de massa de probabilidade multinomial com os parâmetros $n, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Considere a hipótese simples:

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_{k-1} = p_{k-1,0}$$
$$(p_k = p_{k0} = 1 - p_{10} - p_{20} - \ldots - p_{k-1,0})$$

Em que $p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{k-1,0}$ são valores especificados. Deseja-se testar $H_0$ em relação a todas as alternativas.

Considere a hipótese simples:

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_{k-1} = p_{k-1,0}$$
$$(p_k = p_{k0} = 1 - p_{10} - p_{20} - \ldots - p_{k-1,0})$$

Em que $p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{k-1,0}$ são valores especificados. Deseja-se testar $H_0$ em relação a todas as alternativas.

Se a hipótese $H_0$ for verdadeira, a variável aleatória

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

tem uma distribuição aproximada qui-quadrado com $k-1$ graus de liberdade. Pois, se $H_0$ é verdadeira, $np_{i0}$ é o valor esperado de $X_i$. Os valores observados de $Q_{k-1}$ não devem ser muito grandes se $H_0$ for verdadeira.

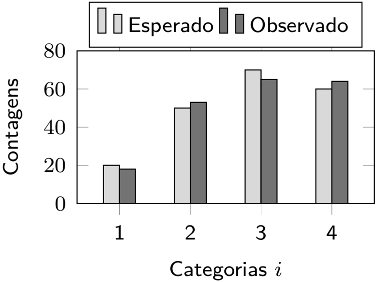
# Por que $Q_{k-1}$ não deve ser grande sob $H_0$?

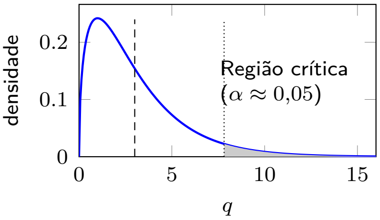
## Ideia central

$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$ agrega **desvios padronizados**. Sob $H_0$, os desvios tendem a ser pequenos $\Rightarrow$ soma moderada.

## Grande $n$

- $(X_1, \ldots, X_k) \approx$ normal com $\sum X_i = n$.
- $Q_{k-1} \dot{\sim} \chi^2_{k-1}$; $\mathbb{E} = k - 1$, $\mathrm{Var} = 2(k-1)$.
- Valores muito à direita indicam baixa plausibilidade de $H_0$.



Podemos, portanto, considerar o teste com nível de significância $\alpha$ que rejeita $H_0$ quando $Q_{k-1} \geq c$. Usando o software R, calculamos o valor crítico $c$ por meio da função `qchisq(1 - `$\alpha$`, k - 1)`. Se a hipótese $H_0$ for rejeitada quando o valor observado de $Q_{k-1}$ for pelo menos igual a $c$, o teste de $H_0$ terá um nível de significância aproximadamente igual a $\alpha$. Além disso, se $q$ for o valor realizado da estatística do teste $Q_{k-1}$, o nível de significância observado do teste pode ser calculado em R pela função `1-pchisq(q, k - 1)`. Isso é frequentemente chamado de teste de bondade de ajuste ou de teste qui-quadrado para aderência.

# Exemplo 1

Escolher um dos seis primeiros números inteiros positivos por meio de um experimento aleatório (por exemplo, lançamento de um dado). Seja $A_i = \{x : x = i\}$, onde $i = 1, 2, \dots, 6$.

$$H_0 : P(A_i) = p_{i0} = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, \dots, 6,$$

$\alpha = 5\%$. Para realizar o teste, o experimento aleatório é repetido sob as mesmas condições, 60 vezes de forma independente. Ou seja, $k = 6$ e $n \cdot p_{i0} = 60 \cdot \frac{1}{6} = 10,\ i = 1, 2, \dots, 6$. Seja $X_i$ a frequência com que o experimento aleatório termina com o resultado em $A_i,\ i = 1, 2, \dots, 6$. Defina $Q_5$ como:

$$Q_5 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(X_i - 10)^2}{10}$$

Uma vez que existem $6-1=5$ graus de liberdade, o valor crítico para um teste com nível $\alpha = 0.05$ é $qchisq(0.95, 5) = 11.0705$. Suponha agora que as frequências experimentais de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sejam, respectivamente, 13, 19, 11, 8, 5 e 4. O valor observado de $Q_5$ é calculado como:

$$
\begin{aligned}
Q_{5,cal} &= \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(19-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} \\
&+ \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(4-10)^2}{10} \\
&= 15.6
\end{aligned}
$$

Como $15.6 > 11.0705$, a hipótese $P(A_i) = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, \ldots, 6$, é rejeitada a um nível de significância (aproximado) de $5\%$.

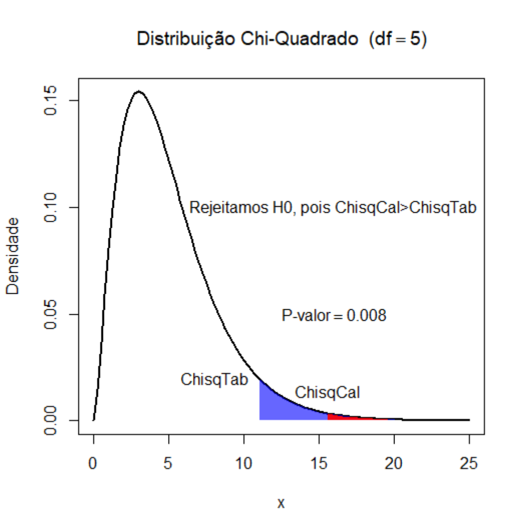



**Figura:** Gráfico com Resultados do Teste Qui-Quadrado

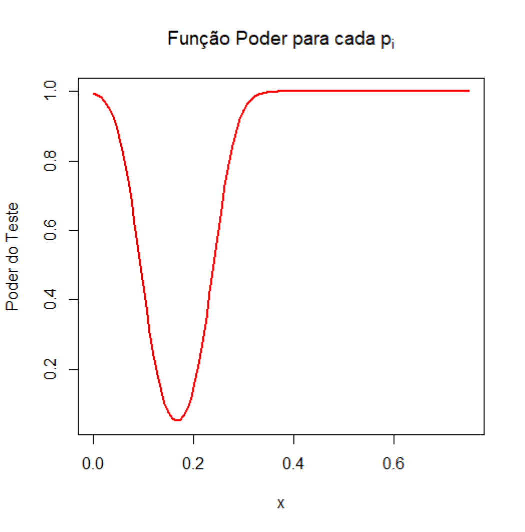



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 1)

# Exemplo 2

Neste exemplo, um ponto deve ser selecionado a partir do intervalo unitário $\{x : 0 < x < 1\}$ por meio de um processo aleatório. Definimos os conjuntos $A_1 = \{x : 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$, $A_2 = \{x : \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}\}$, $A_3 = \{x : \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}\}$ e $A_4 = \{x : \frac{3}{4} < x < 1\}$. As probabilidades $p_i$, onde $i = 1, 2, 3, 4$, atribuídas a esses conjuntos sob a hipótese são determinadas pela função de densidade de probabilidade $2x$, em que $0 < x < 1$, e zero caso contrário. Essas probabilidades são:

$$p_{10} = \int_0^{\frac{1}{4}} 2x\,dx = \frac{1}{16}, \quad p_{20} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx = \frac{3}{16}$$

$$p_{30} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx = \frac{5}{16} \quad p_{40} = \int_{\frac{3}{4}}^{1} 2x\,dx = \frac{7}{16}$$

Portanto, a hipótese a ser testada é que $p_1, p_2, p_3$ e $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$ possuem os valores anteriores em uma distribuição multinomial com $k = 4$. Considere $\alpha = 0.025$, repetindo o experimento aleatório $n = 80$ vezes de forma independente sob as mesmas condições, temos $n \cdot p_{i0},\ i = 1, 2, 3, 4$ são, respectivamente, $5, 15, 25$ e $35$.

Portanto, a hipótese a ser testada é que $p_1, p_2, p_3$ e $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$ possuem os valores anteriores em uma distribuição multinomial com $k = 4$. Considere $\alpha = 0.025$, repetindo o experimento aleatório $n = 80$ vezes de forma independente sob as mesmas condições, temos $n \cdot p_{i0},\ i = 1, 2, 3, 4$ são, respectivamente, $5, 15, 25$ e $35$.

Suponha que as frequências observadas de $A_1, A_2, A_3$ e $A_4$ sejam 6, 18, 20 e 36, respectivamente. Assim,

$$Q_{3,cal} = \frac{(6-5)^2}{5} + \frac{(18-15)^2}{15} + \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(36-35)^2}{35} = \frac{64}{35} \approx 1.83.$$

Ou seja, falhamos em rejeitar $H_0$, pois $\chi^2_{tab} = qchisq(0.975, 3) = 9.34$.

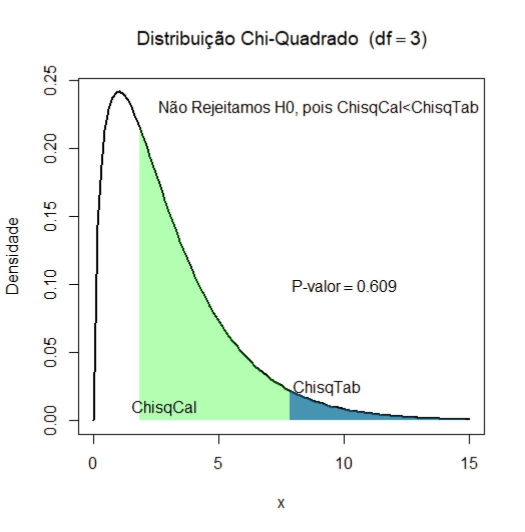



**Figura:** Gráfico com Resultados do Teste Qui-Quadrado

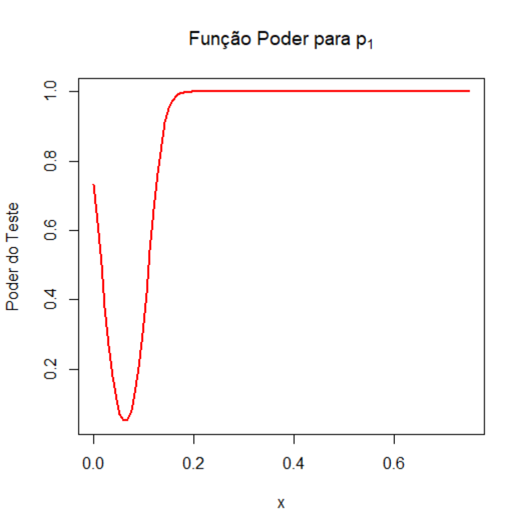



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

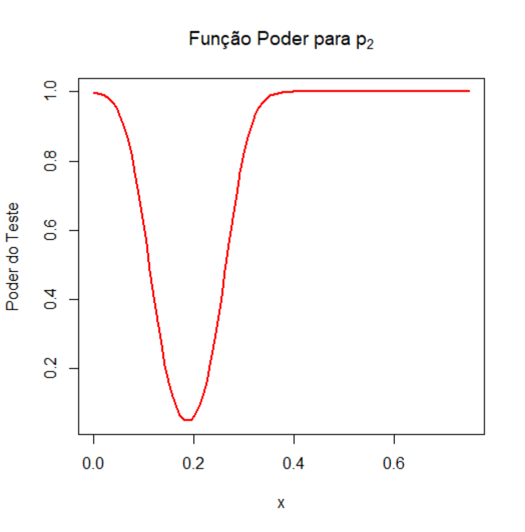



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

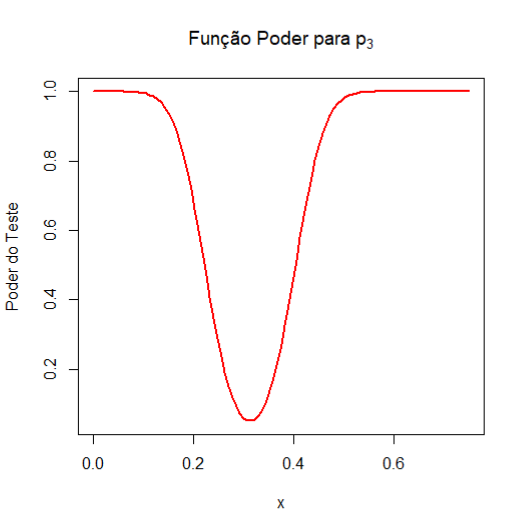



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

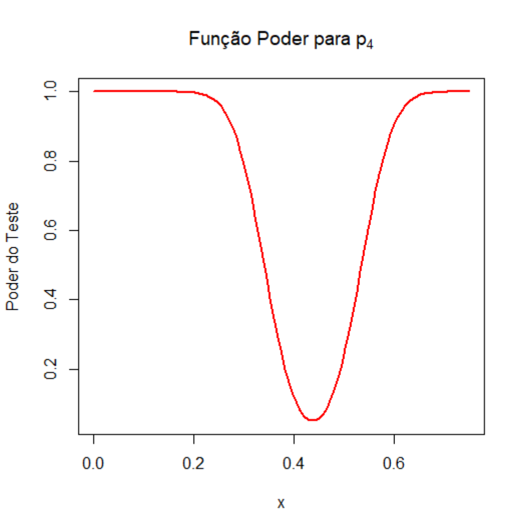



**Figura:** Poder do Teste Qui-Quadrado (Exemplo 2)

# Para 🏠

- **Exercícios da seção 4.7:** 1, 4 e 9.

# Distribuição F

## Definição 1

*Sejam* $Y$ *e* $W$ *variáveis aleatórias independentes, em que* $Y$ *segue uma distribuição qui-quadrado com* $m$ *graus de liberdade e* $W$ *segue uma distribuição qui-quadrado com* $n$ *graus de liberdade,* $m$ *e* $n$ *inteiros positivos dados. Defina uma nova variável aleatória* $X$ *da seguinte forma:*

$$X = \frac{Y/m}{W/n} = \frac{nY}{mW}.$$

*Então, a distribuição de* $X$ *é chamada de distribuição* $F$ *com* $m$ *e* $n$ *graus de liberdade. A função de densidade de probabilidade da distribuição F é apresentada no próximo slide.*

Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição $F$ com $m$ e $n$ graus de liberdade. Então, sua função de densidade de probabilidade $f(x)$ é a seguinte, para $x > 0$ :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+n)\right] m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left[\frac{1}{2}m\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{x^{m/2} - 1}{(mx+n)^{(m+n)/2}},$$

e $f(x) = 0$ para $x \leq 0$.

Suponha que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_m$ formem uma amostra aleatória de $m$ observações de uma distribuição normal para a qual tanto a média $\mu_1$ quanto a variância $\sigma_1^2$ são desconhecidas. Suponha também que as variáveis aleatórias $Y_1, \ldots, Y_n$ formem uma amostra aleatória independente de $n$ observações de outra distribuição normal para a qual tanto a média $\mu_2$ quanto a variância $\sigma_2^2$ são desconhecidas. Por fim, suponha que as seguintes hipóteses devam ser testadas a um nível de significância especificado $\alpha_0$ $(0 < \alpha_0 < 1)$:

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Definimos $S_X^2$ e $S_Y^2$ como as variâncias amostrais de $X$ e $Y$, respectivamente. Então, $\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$ e $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$. Faz sentido intuitivo rejeitar $H_0$ se a razão desses dois estimadores for grande. Ou seja, definimos

$$V = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \underset{\text{sob } H_0}{=} \frac{\frac{(m-1)S_X^2}{(m-1)\sigma_X^2}}{\frac{(n-1)S_Y^2}{(n-1)\sigma_Y^2}} \sim F(m-1, n-1),$$

e rejeitamos $H_0$ se $V \geq c$, em que $c$ é escolhido para que o teste tenha um nível de significância desejado.

# Exemplo 1

Suponha que seis observações $X_1, \ldots, X_6$ sejam selecionadas aleatoriamente de uma distribuição normal para a qual tanto a média $\mu_1$ quanto a variância $\sigma_1^2$ são desconhecidas, e é encontrado que $S_X^2 = 30$. Suponha também que 21 observações, $Y_1, \ldots, Y_{21}$, sejam selecionadas aleatoriamente de outra distribuição normal para a qual tanto a média $\mu_2$ quanto a variância $\sigma_2^2$ são desconhecidas, e é encontrado que $S_Y^2 = 40$. Realize um teste F das hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

.

Neste exemplo, temos $m = 6$ e $n = 21$. Portanto, quando $H_0$ é verdadeira, a estatística $V$, seguirá a distribuição $F$ com $5$ e $20$ graus de liberdade. Segue que o valor de $V$ para as amostras dadas é $V = \frac{30}{40} = 0,75$.
O valor-p do teste, pode ser calculado no R por:

$$\begin{aligned} Pvalor &= P(F > Fcal) \\ &= pf(Fcal, nx-1, ny-1, lower.tail = FALSE) = 0.596 \end{aligned}$$

A hipótese $H_0$ de que $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ seria, portanto, não rejeitada no nível de significância $\alpha_0 = 0.05$.

É possível mostrar que o poder deste teste pode ser escrito como:

$$\gamma_d(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = 1 - F_{m-1,n-1}(C * \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}), C = F_{tab}$$

Suponha, assim, que seja importante rejeitar $H_0$ se $\sigma_1^2$ for três vezes maior que $\sigma_2^2$. Nesse caso, gostaríamos que a função poder fosse alta quando $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$. Nesse caso, $1 - pf(qf(0.95, 5, 20) * (1/3), 5, 20) = 1 - F_{5,20}(2.71 \times 1/3) \approx 0.5$. Logo, se $\sigma_1^2$ for três vezes maior que $\sigma_2^2$, o teste com nível de 0.05 tem cerca de 50% de probabilidade de rejeitar $H_0$.

# Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.