Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Teorema 1

Se $X_n \xrightarrow{P} X$, *então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 1

Se $X_n \xrightarrow{P} X$, *então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Demonstração do Teorema 1

Seja x um ponto de continuidade de $F_X(x)$, a função de distribuição acumulada (FDA) de X. Queremos mostrar que $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ à medida que $n \to \infty$, onde $F_{X_n}(x)$ é a FDA de X_n.
Para isso, partimos da definição de $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x)$. Usaremos uma técnica dividindo a probabilidade em dois pedaços.

Demonstração do Teorema 1

Dividimos o evento $\{X_n \leq x\}$ em dois subconjuntos: um onde $|X_n - X| < \varepsilon$ e outro onde $|X_n - X| \geq \varepsilon$. Assim, podemos reescrever:

$$
\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\
&= P(\{X_n \leq x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\}) \\
&+ P(\{X_n \leq x\} \cap \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) \\
&\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Essa é uma decomposição da probabilidade em duas partes: uma onde X_n está "perto"de X (a diferença é menor que ε) e outra onde X_n está "longe"de X (a diferença é maior ou igual a ε).

Demonstração do Teorema 1

A probabilidade $P(\{X_n \leq x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\})$ pode ser estimada por $P(X \leq x + \varepsilon)$.

$$P(\{X_n \leq x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\}) \leq P(X \leq x + \varepsilon)$$

Isso porque, quando $|X_n - X| < \varepsilon$, sabemos que X_n está perto de X, então $X_n \leq x$ implica que $X \leq x + \varepsilon$.

Demonstração do Teorema 1

O segundo termo, $P(\{X_n \leq x\} \cap \{|X_n - X| \geq \varepsilon\})$, é menor ou igual a $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, que é simplesmente a probabilidade de X_n estar longe de X. Essa probabilidade tende a 0 quando $X_n \to X$ em probabilidade, mas por enquanto, deixamos essa expressão como está:

$$P(\{X_n \leq x\} \cap \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Demonstração do Teorema 1

Juntando as duas estimativas, temos:

$$F_{X_n}(x) \leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Esta é a estimativa superior para $F_{X_n}(x)$.

- O primeiro termo, $P(X \leq x + \varepsilon)$, representa o evento de que X está um pouco acima de x. Isso é um "ajuste", pois estamos lidando com X_n próximo de X.

Demonstração do Teorema 1

Juntando as duas estimativas, temos:

$$F_{X_n}(x) \leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Esta é a estimativa superior para $F_{X_n}(x)$.

- O primeiro termo, $P(X \leq x + \varepsilon)$, representa o evento de que X está um pouco acima de x. Isso é um "ajuste", pois estamos lidando com X_n próximo de X.
- O segundo termo, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, é a probabilidade de que X_n esteja muito distante de X, ou seja, mais de ε de diferença.

Demonstração do Teorema 1

Quando $X_n \to X$ em probabilidade, sabemos que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ conforme $n \to \infty$. Portanto, com base nessa desigualdade, podemos concluir:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$$

Isso nos dá a estimativa superior (upper bound) da função de distribuição acumulada de X_n.

Demonstração do Teorema 1

Agora, para obter a **estimativa inferior**, começamos reescrevendo $P(X_n \leq x)$ utilizando o complemento:

$$P(X_n \leq x) = 1 - P(X_n > x)$$

Dividimos a probabilidade $P(X_n > x)$ em dois pedaços:

$$P(X_n > x) = P(\{X_n > x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\}) + P(\{X_n > x\} \cap \{|X_n - X| \geq \varepsilon$$

Demonstração do Teorema 1

- A primeira parte $P(\{X_n > x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\})$ considera os casos em que X_n está próximo de X (a diferença é menor que ε) e, ao mesmo tempo, $X_n > x$.

Demonstração do Teorema 1

- A primeira parte $P(\{X_n > x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\})$ considera os casos em que X_n está próximo de X (a diferença é menor que ε) e, ao mesmo tempo, $X_n > x$.
- A segunda parte $P(\{X_n > x\} \cap \{|X_n - X| \geq \varepsilon\})$ considera os casos em que X_n e X estão distantes mais de ε.

Demonstração do Teorema 1

Como $P(\{X_n > x\} \cap \{|X_n - X| < \varepsilon\})$ é menor que $P(X > x - \varepsilon)$, podemos usar a seguinte desigualdade:

$$P(X_n > x) \leq P(X \geq x - \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

- O primeiro termo, $P(X \geq x - \varepsilon)$, é a probabilidade de X ser maior ou igual a $x - \varepsilon$. Isso é uma aproximação para lidar com o fato de que X_n está próximo de X. - O segundo termo, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, representa a probabilidade de X_n estar distante de X (mais de ε).

Demonstração do Teorema 1

Assim, podemos expressar $P(X_n \leq x)$ como:

$$P(X_n \leq x) = 1 - P(X_n > x)$$

Substituímos o limite que encontramos para $P(X_n > x)$:

$$P(X_n \leq x) \geq 1 - P(X \geq x - \varepsilon) - P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Ou, de forma mais compacta:

$$F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Demonstração do Teorema 1

Sabemos que, como $X_n \to X$ em probabilidade, temos $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ conforme $n \to \infty$. Assim, no limite:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon)$$

Agora, combinamos as duas estimativas (superior e inferior) que obtivemos:

$$F_X(x - \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \to 0$, chegamos à conclusão desejada:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Teorema 2

Se $X_n \xrightarrow{D} a$, *então* $X_n \xrightarrow{P} a$, *a constante.*

Teorema 3

Se $X_n \xrightarrow{D} X$ *e* $Y_n \xrightarrow{P} 0$ *então* $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 4

Se $X_n \xrightarrow{D} X$ *e* g *é uma função contínua no suporte de* X, *então*

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X).$$

Teorema de Slutsky

Teorema 5

Sejam $X_n, \ A_n$ *e* B_n*, variáveis aleatórias com* $X_n \xrightarrow{D} X, \ A_n \xrightarrow{P} a$ *e* $B_n \xrightarrow{P} b, \ a, b$ *constantes reais. Então,*

$$A_n X_n + B_n \xrightarrow{D} aX + b.$$

Para

Exercícios 5.2.2, 5.2.3, 5.2.6, 5.2.12, 5.2.15, 5.2.17, 5.2.19 e 5.2.20

Função Geradora de Momentos

Definição 1

A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é definida por $M_X(t) = E(e^{tX}), \; t \in \mathbb{R}$

Teorema 6

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias com fgm* $M_{X_n}(t)$ *que existe para* $|t| < h$ *para todo* n*. Seja* X *uma variável aleatória com fgm* $M_X(t)$*, que existe para* $|t| \leq h_1 \leq h$*. Se* $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ *para* $|t| \leq h_1$*, então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 6

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias com fgm* $M_{X_n}(t)$ *que existe para* $|t| < h$ *para todo* n. *Seja* X *uma variável aleatória com fgm* $M_X(t)$, *que existe para* $|t| \leq h_1 \leq h$. *Se* $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ *para* $|t| \leq h_1$, *então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Observação importante na resolução de exercícios:

Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}+\frac{\psi(n)}{n}\right)^{cn}$, em que b e c não dependem de n e, em que, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n)=0$. Então,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}+\frac{\psi(n)}{cn}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{cn}=e^{bc}.$$

Exemplo 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{n}+\frac{t^2}{n^{3/2}}\right)^{-n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{n}+\frac{t^2/\sqrt{n}}{n}\right)^{-n/2}.$$

Aqui, $b=-t^2$, $c=-\frac{1}{2}$ e $\psi(n)=\frac{t^2}{\sqrt{n}}$. Consequentemente, para cada valor fixo de t, o limite é $e^{t^2/2}$.

Exemplo 2

Considere $X_n \sim \mathit{Binomial}(n, p_n)$ e suponha $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ (por exemplo, $p_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} np_n = 1$). Então, $X_n \xrightarrow{D} X$, em que $X \sim$Poisson(λ).

Exemplo 2

Considere $X_n \sim Binomial(n, p_n)$ e suponha $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ (por exemplo, $p_n = \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} np_n = 1$). Então, $X_n \xrightarrow{D} X$, em que $X \sim$Poisson(λ).

Demonstração

Temos que,

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) = E(e^{tX_n}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \left(1 - p_n + p_n e^t\right)^n = \left(1 + \frac{np_n}{n}(e^t - 1)\right)^n \\ \text{(para n grande)} &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

Logo, $X_n \xrightarrow{D} X \sim$Poisson$(\lambda)$.

Quando a quantidade np_n se estabiliza em um valor $\lambda > 0$, estamos essencialmente controlando a média da binomial. À medida que $n \to \infty$ e p_n diminui de forma controlada, mantemos np_n constante, aproximando o comportamento da binomial ao de uma distribuição Poisson com parâmetro λ. A essência é que estamos explorando o comportamento assintótico da binomial, com p_n diminuindo à medida que n cresce, mas de modo que np_n permaneça fixo e igual a λ. Isso faz com que a média e variância da binomial "convirjam" para os parâmetros de uma Poisson.

Referências I

HOGG, RV; MCKEAN, J; CRAIG, AT. **Introduction to Mathematical Statistics**. Eighth Edition. [S.l.]: Pearson, 2019.