Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

$X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias iid com densidade $f(x,\theta), \theta \in \Omega \subset \mathrm{I\!R}^{\mathrm{p}}$. Assumiremos todas as condições de regularidade. As hipóteses de interesse são: $H_0 : \theta \in W$ contra $H_1 : \theta \in \Omega \cap W^c$, em que $W \subset \Omega$.

$X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias iid com densidade $f(x, \theta), \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$. Assumiremos todas as condições de regularidade. As hipóteses de interesse são: $H_0 : \theta \in W$ contra $H_1 : \theta \in \Omega \cap W^c$, em que $W \subset \Omega$.

Assim, um teste intuitivo (baseado no teorema 6.1.1 do livro texto Hogg et al. (2019)) é baseado na estatística de teste dada pela razão de verossimilhança,

$$\Lambda = \frac{\max\limits_{\theta \in W} L(\theta)}{\max\limits_{\theta \in \Omega} L(\theta)}.$$

Valores grandes de Λ, ou seja, próximos de 1, sugerem que H_0 é verdadeira, enquanto que valores pequenos sugerem que H_1 é verdadeira.

Para um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$ especificado, isto sugere a seguinte regra de decisão:

- Rejeite H_0 em favor de H_1 se $\Lambda \leq c$, em que c é tal que $\max\limits_{\theta \in W} P_\theta(\Lambda \leq c) = \alpha$

Exemplo

Sejam $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

$$\theta = (\mu, \sigma^2)^\top, \;\; W = \{(\mu_0, \sigma^2); \sigma^2 > 0\}$$
$$\Omega = \{(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma^2 > 0\}$$

Exemplo

Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

$$\theta = (\mu, \sigma^2)^\top, \ \ W = \{(\mu_0, \sigma^2); \sigma^2 > 0\}$$
$$\Omega = \{(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma^2 > 0\}$$

- Para $\theta \in \Omega$, já vimos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são os EMV de μ e σ^2, respectivamente. Neste caso,

$$\max_{\theta \in \Omega} L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(\hat{\sigma}^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

- Para $\theta \in W$, temos $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$. Neste caso,

$$\max_{\theta \in W} L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(\hat{\sigma}_0^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

Daí,

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Daí,

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$\Lambda \leq c$ é equivalente a

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \geq c' \qquad (\star)$$

Além disso. considerem a identidade

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2 \qquad (\star\star)$$

Além disso. considerem a identidade

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu_0)^2 \qquad (\star\star)$$

Substituindo $(\star\star)$ em $(\star)$, segue que

$$1+\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\geq c' \iff \left(\underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sqrt{\frac{(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}}}_{T\sim t_{n-1}(\text{sob } H_0)}\right)^2\geq c^*$$

$$\iff |T|\geq c''$$

Podemos tomar $c^{''} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

- Rejeite H_0 em favor de H_1 se $|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Teorema 1

Sejam $X_1, \ldots, X_n$*variáveis aleatórias iid com densidade* $f(x, \theta), \theta \in \Omega \subset \mathrm{I\!R}^{\mathrm{p}}$. *Assuma que as condições de regularidade valem. Seja* $\hat{\theta}_n$ *uma sequência de soluções consistentes da equação de verossimilhança sob* $\theta \in \Omega$ *(dimensão p). Seja* $\hat{\theta}_{0n}$ *uma sequência de soluções consistentes da equação de verossimilhança sob* $\theta \in W$ *(dimensão* $q < p$*). Sob* H_0,

$$-2 \log \Lambda \xrightarrow{D} \chi^2(q)$$

Para 🏠

- **Exercícios da seção 6.5:** 2 ao 5, 7 e 9 ao 11.

Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.