

Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa



Sumário

- 1 Função Geradora de Momentos
- 2 Teorema Central do Limite
- 3 Método Delta

Definição 1

A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é definida por $M_X(t) = E(e^{tX})$, $t \in \mathbb{R}$

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com fgm $M_{X_n}(t)$ que existe para $|t| < h$ para todo n . Seja X uma variável aleatória com fgm $M_X(t)$, que existe para $|t| \leq h_1 \leq h$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ para $|t| \leq h_1$, então $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com fgm $M_{X_n}(t)$ que existe para $|t| < h$ para todo n . Seja X uma variável aleatória com fgm $M_X(t)$, que existe para $|t| \leq h_1 \leq h$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ para $|t| \leq h_1$, então $X_n \xrightarrow{D} X$.

Observação importante na resolução de exercícios:

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right)^{cn}$, em que b e c não dependem de n e, em que, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{cn}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{\frac{cn}{cn}} = e^{bc}.$$

Exemplo 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^2}{n^{3/2}} \right)^{-n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^2/\sqrt{n}}{n} \right)^{-n/2}.$$

Aqui, $b = -t^2$, $c = -\frac{1}{2}$ e $\psi(n) = \frac{t^2}{\sqrt{n}}$. Consequentemente, para cada valor fixo de t , o limite é $e^{t^2/2}$.

Exemplo 2

Considere $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ e suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ (por exemplo, $p_n = \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 1$). Então, $X_n \xrightarrow{D} X$, em que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Exemplo 2

Considere $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ e suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ (por exemplo, $p_n = \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 1$). Então, $X_n \xrightarrow{D} X$, em que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Demonstração

Temos que,

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= E(e^{tX_n}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \left(1 - p_n + p_n e^t\right)^n = \left(1 + \frac{np_n}{n}(e^t - 1)\right)^n \\ (\text{para } n \text{ grande}) &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

Logo, $X_n \xrightarrow{D} X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Quando a quantidade np_n se estabiliza em um valor $\lambda > 0$, estamos essencialmente controlando a média da binomial. À medida que $n \rightarrow \infty$ e p_n diminui de forma controlada, mantemos np_n constante, aproximando o comportamento da binomial ao de uma distribuição Poisson com parâmetro λ . A essência é que estamos explorando o comportamento assintótico da binomial, com p_n diminuindo à medida que n cresce, mas de modo que np_n permaneça fixo e igual a λ . Isso faz com que a média e variância da binomial “converjam” para os parâmetros de uma Poisson.

Teorema Central do Limite

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias iid com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Então,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Demonstração

Assuma, sem perda de generalidade, $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

$$\begin{aligned} M_{\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}(t) &= M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{\frac{t \sum X_i}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

Ou seja, $\ln M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}(t) = n \ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}$, aplicando L'Hôpital, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{M'_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} t \left(-\frac{1}{2}\right) n^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} M'_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M'_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M''_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) t \left(-1/2\right) n^{-3/2}}{-\frac{1}{2} n^{-3/2}} \\
&= \frac{t^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} M''_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} X \sim N(0, 1)$

Método Delta

Suponha que conhecemos a distribuição de uma variável aleatória, mas que queremos determinar a distribuição de uma função dela. Isso também é verdade na teoria assintótica, o teorema de Slutsky's e o teorema visto em aula, imediatamente anterior a ele, são ilustrações disso. Outro resultado desse tipo é chamado de método delta. Vejamos o próximo slide!

Teorema 2

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias satisfazendo a seguinte convergência em distribuição:

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

Se g é uma função diferenciável em θ e $g'(\theta) \neq 0$, então

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2).$$

Demonstração

Vamos mostrar primeiro que $X_n \xrightarrow{P} \theta$. Seja $\varepsilon > 0$ e $m > 0$ inteiro ($m \in \mathbb{N}^*$) fixado.

$$\begin{aligned} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &= P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < \varepsilon\sqrt{n}) \\ &\geq P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \end{aligned}$$

$$\uparrow$$

para $n \geq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2$

Continuação da Demonstração

Segue que,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= P(|Z| < \sigma m), \quad Z \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

Usando o fato de que
 $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$

Continuação da Demonstração

Segue que,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= P(|Z| < \sigma m), \quad Z \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

↑
Usando o fato de que
 $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$

Assim,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq P(|Z| < \sigma m) = \Phi(\sigma m) - \Phi(-\sigma m) \\ &= 2\Phi(\sigma m) - 1\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*$$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \lim_{m \rightarrow +\infty} [2\Phi(\sigma m) - 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \lim_{m \rightarrow +\infty} [2\Phi(\sigma m) - 1] \\ &= 1\end{aligned}$$

Como $\limsup \geq \liminf$, temos que

$$\limsup P(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \quad (1)$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \lim_{m \rightarrow +\infty} [2\Phi(\sigma m) - 1] \\ &= 1\end{aligned}$$

Como $\limsup \geq \liminf$, temos que

$$\limsup P(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \quad (1)$$

Expandindo g em série de Taylor até a primeira ordem em torno de θ , temos que

$$g(x) = g(\theta) + g'(\theta)(x - \theta) + \mathcal{C}(x)(x - \theta),$$

em que $\lim_{x \rightarrow \theta} \mathcal{C}(x) = 0$.

Segue que,

$$\begin{aligned}g(x) - g(\theta) &= g'(\theta)(x - \theta) + \mathcal{C}(x)(x - \theta) \\ \sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) &= \sqrt{n}(X_n - \theta)(g'(\theta) + \mathcal{C}(X_n)).\end{aligned}$$

Para mostrar o resultado desejado, devemos mostrar que $\mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0$. Com isso, utilizando o teorema de Slutsky, o resultado é obtido. Como $\lim_{x \rightarrow \theta} \mathcal{C}(x) = 0$, para $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - \theta| < \delta \Rightarrow |\mathcal{C}(x)| < \varepsilon$.

Segue que,

$$\begin{aligned}g(x) - g(\theta) &= g'(\theta)(x - \theta) + \mathcal{C}(x)(x - \theta) \\ \sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) &= \sqrt{n}(X_n - \theta)(g'(\theta) + \mathcal{C}(X_n)).\end{aligned}$$

Para mostrar o resultado desejado, devemos mostrar que $\mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0$. Com isso, utilizando o teorema de Slutsky, o resultado é obtido. Como $\lim_{x \rightarrow \theta} \mathcal{C}(x) = 0$, para $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - \theta| < \delta \Rightarrow |\mathcal{C}(x)| < \varepsilon$.

Daí,

$$\{|X_n - \theta| < \delta\} \subset \{|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon\} \Rightarrow P(|X_n - \theta| < \delta) \leq P(|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon)$$

Esse resultado, juntamente com (1) implica que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon) = 1, \text{ ou seja, } \mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0.$$

Para 

Seja $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$. Mostre que

$$\sqrt{n} \left(\arcsin \sqrt{\frac{X_n}{n}} - \arcsin \sqrt{p} \right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Para

Exercícios 5.3.1 à 5.3.8, 5.3.11, 5.3.12

Referências I

CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. [S.l.]: Cengage Learning, 2021.

HOGG, RV; MCKEAN, J; CRAIG, AT. **Introduction to Mathematical Statistics**. Eighth Edition. [S.l.]: Pearson, 2019.