Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Função Geradora de Momentos

Definição 1

A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é definida por $M_X(t) = E(e^{tX}),\ \ t \in \mathbb{R}$

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias com fgm* $M_{X_n}(t)$ *que existe para* $|t| < h$ *para todo* n. *Seja* X *uma variável aleatória com fgm* $M_X(t)$, *que existe para* $|t| \leq h_1 \leq h$. *Se* $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ *para* $|t| \leq h_1$, *então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 1

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias com fgm* $M_{X_n}(t)$ *que existe para* $|t| < h$ *para todo* n*. Seja* X *uma variável aleatória com fgm* $M_X(t)$*, que existe para* $|t| \leq h_1 \leq h$*. Se* $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$ *para* $|t| \leq h_1$*, então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Observação importante na resolução de exercícios:

Se $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}+\frac{\psi(n)}{n}\right)^{cn}$, em que b e c não dependem de n e, em que, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n) = 0$. Então,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}+\frac{\psi(n)}{cn}\right)^{cn} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{cn} = e^{bc}.$$

Exemplo 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{n}+\frac{t^2}{n^{3/2}}\right)^{-n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{n}+\frac{t^2/\sqrt{n}}{n}\right)^{-n/2}.$$

Aqui, $b=-t^2$, $c=-\frac{1}{2}$ e $\psi(n)=\frac{t^2}{\sqrt{n}}$. Consequentemente, para cada valor fixo de t, o limite é $e^{t^2/2}$.

Exemplo 2

Considere $X_n \sim Binomial(n, p_n)$ e suponha $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ (por exemplo, $p_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} np_n = 1$). Então, $X_n \xrightarrow{D} X$, em que $X \sim$Poisson(λ).

Exemplo 2

Considere $X_n \sim Binomial(n, p_n)$ e suponha $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ (por exemplo, $p_n = \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} np_n = 1$). Então, $X_n \xrightarrow{D} X$, em que $X \sim$Poisson(λ).

Demonstração

Temos que,

$$\begin{aligned}
M_{X_n}(t) = E(e^{tX_n}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \left(1 - p_n + p_n e^t\right)^n = \left(1 + \frac{np_n}{n}(e^t - 1)\right)^n \\
\text{(para n grande)} &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}
\end{aligned}$$

Logo, $X_n \xrightarrow{D} X \sim$Poisson($\lambda$).

Quando a quantidade np_n se estabiliza em um valor $\lambda > 0$, estamos essencialmente controlando a média da binomial. À medida que $n \to \infty$ e p_n diminui de forma controlada, mantemos np_n constante, aproximando o comportamento da binomial ao de uma distribuição Poisson com parâmetro λ. A essência é que estamos explorando o comportamento assintótico da binomial, com p_n diminuindo à medida que n cresce, mas de modo que np_n permaneça fixo e igual a λ. Isso faz com que a média e variância da binomial "convirjam" para os parâmetros de uma Poisson.

Teorema Central do Limite

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias iid com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Então,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Demonstração

Assuma, sem perda de generalidade, $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

$$M_{\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{\frac{t\sum X_i}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Ou seja, $\ln M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}(t) = n \ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}$, aplicando L'Hôpital, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln M_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{M'_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{M_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})} t(-\frac{1}{2})n^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} M'_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{M'_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{M''_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) t(-1/2)n^{-3/2}}{-\frac{1}{2}n^{-3/2}} \\
&= \frac{t^2}{2} \lim_{n\to\infty} M''_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Logo, $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1)$

Método Delta

Suponha que conhecemos a distribuição de uma variável aleatória, mas que queremos determinar a distribuição de uma função dela. Isso também é verdade na teoria assintótica, o teorema de Slutsky's e o teorema visto em aula, imediatamente anterior a ele, são ilustrações disso. Outro resultado desse tipo é chamado de método delta. Vejamos o próximo slide!

Método Delta

Teorema 2

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias satisfazendo a seguinte convergência em distribuição:*

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

Se g *é uma função diferenciável em* θ *e* $g'(\theta) \neq 0$, *então*

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2\sigma^2).$$

Demonstração

Vamos mostrar primeiro que $X_n \xrightarrow{P} \theta$. Seja $\varepsilon > 0$ e $m > 0$ inteiro ($m \in \mathbb{N}^*$) fixado.

$$
\begin{aligned}
P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &= P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < \varepsilon\sqrt{n}) \\
&\underset{\text{para } n \geq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2}{\geq} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m)
\end{aligned}
$$

Continuação da Demonstração

Segue que,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \liminf_{n\to\infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\
&= P(|Z| < \sigma m), \;\; Z \sim N(0,1)
\end{aligned}$$

Usando o fato de que
$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$

Continuação da Demonstração

Segue que,

$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n-\theta|<\varepsilon) \geq \liminf_{n\to\infty} P(|\sqrt{n}(X_n-\theta)|<m)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(|\sqrt{n}(X_n-\theta)|<m)$$
$$= P(|Z|<\sigma m),\ Z\sim N(0,1)$$

Usando o fato de que
$\sqrt{n}(X_n-\theta)\xrightarrow{D}N(0,\sigma^2)$

Assim,

$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n-\theta|<\varepsilon) \geq P(|Z|<\sigma m) = \Phi(\sigma m)-\Phi(-\sigma m)$$
$$=2\Phi(\sigma m)-1$$

Em resumo,

$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \ \forall m \in \mathbb{Z}^*$$

$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \geq \lim_{m\to+\infty} \left[2\Phi(\sigma m) - 1\right]$$

$$= 1$$

Em resumo,

$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \ \forall m \in \mathbb{Z}^*$$
$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \geq \lim_{m\to+\infty} \left[2\Phi(\sigma m) - 1\right]$$
$$= 1$$

Como $\limsup \geq \liminf$, temos que

$$\limsup P(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \tag{1}$$

Em resumo,

$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n-\theta|<\varepsilon) \geq 2\Phi(\sigma m)-1,\ \forall m \in \mathbb{Z}^*$$
$$\liminf_{n\to\infty} P(|X_n-\theta|<\varepsilon) \geq \lim_{m\to+\infty}\left[2\Phi(\sigma m)-1\right]$$
$$=1$$

Como $\limsup \geq \liminf$, temos que

$$\limsup P(|X_n-\theta|<\varepsilon) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n-\theta|<\varepsilon) \tag{1}$$

Expandindo g em série de Taylor até a primeira ordem em torno de θ, temos que

$$g(x) = g(\theta) + g'(\theta)(x-\theta)(x-\theta) + \mathcal{C}(x)(x-\theta),$$

em que $\lim_{x\to\theta} \mathcal{C}(x) = 0$.

Segue que,

$$g(x) - g(\theta) = g'(\theta)(x-\theta)(x-\theta) + \mathcal{C}(x)(x-\theta)$$
$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\big(g'(\theta) - \mathcal{C}(X_n)\big).$$

Para mostrar o resultado desejado, devemos mostrar que $\mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0$. Com isso, utilizando o teorema de Slutsky, o resultado é obtido. Como $\lim_{x\to\theta} \mathcal{C}(x) = 0$, para $\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $|x-\theta| < \delta \Rightarrow\ |\mathcal{C}(x)| < \varepsilon$.

Segue que,

$$g(x) - g(\theta) = g'(\theta)(x-\theta)(x-\theta) + \mathcal{C}(x)(x-\theta)$$
$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) = \sqrt{n}(X_n - \theta)\big(g'(\theta) - \mathcal{C}(X_n)\big).$$

Para mostrar o resultado desejado, devemos mostrar que $\mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0$. Com isso, utilizando o teorema de Slutsky, o resultado é obtido. Como $\lim\limits_{x\to\theta} \mathcal{C}(x) = 0$, para $\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $|x-\theta| < \delta \Rightarrow \ |\mathcal{C}(x)| < \varepsilon$.

Daí,

$$\{|X_n - \theta| < \delta\} \subset \{|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon\} \Rightarrow P(|X_n - \theta| < \delta) \leq P(|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon)$$

Esse resultado, juntamente com (1) implica que,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon) = 1, \text{ ou seja, } \mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0.$$

Exercício

Para

Seja $X_n \sim Binomial(n, p)$. Mostre que

$$\sqrt{n}\Big(\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{X_n}{n}} - \operatorname{arcsen}\sqrt{p}\Big) \xrightarrow{D} N\Big(0, \frac{1}{4}\Big)$$

Para 🏠

Exercícios 5.3.1 à 5.3.8, 5.3.11, 5.3.12

Referências I

CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. [S.l.]: Cengage Learning, 2021.

HOGG, RV; MCKEAN, J; CRAIG, AT. **Introduction to Mathematical Statistics**. Eighth Edition. [S.l.]: Pearson, 2019.