Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Discutiremos inicialmente, dois casos. O primeiro baseado no Teorema Central do Limite. O segundo iremos assumir que a amostra aleatória provém de uma distribuição normal.

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma distribuição dependendo de um parâmetro θ. Seja θ_0 o valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ. Seja T uma estatística para θ_0 satisfazendo a seguinte convergência em distribuição

$$\sqrt{n}(T - \theta_0) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_T^2) \qquad (\star)$$

Em que σ_T^2 é a variância assintótica de $\sqrt{n}T$. Para nossos propósitos iniciais suponha que σ_T^2 é conhecido (geralmente ele é desconhecido)

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma distribuição dependendo de um parâmetro θ. Seja θ_0 o valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ. Seja T uma estatística para θ_0 satisfazendo a seguinte convergência em distribuição

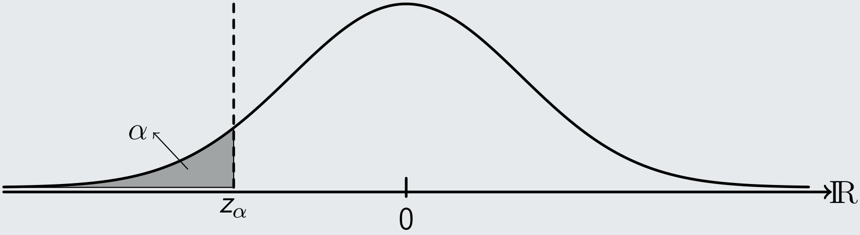
$$\sqrt{n}(T - \theta_0) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_T^2) \qquad (\star)$$

Em que σ_T^2 é a variância assintótica de $\sqrt{n}T$. Para nossos propósitos iniciais suponha que σ_T^2 é conhecido (geralmente ele é desconhecido)

De $(\star)$, temos que

$$\frac{\sqrt{n}(T - \theta_0)}{\sigma_T} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Seja z_α o quantil α da distribuição normal padrão. Ou seja, se $Z \sim N(0,1)$, então $P(Z < z_\alpha) = \alpha$.

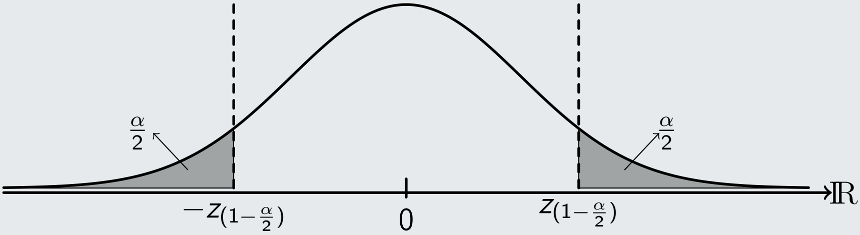


Como

$$\frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{\sigma_T} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

Temos que

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{\sigma_T} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$



$$P(-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} < \frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{\sigma_T} < z_{(1-\frac{\alpha}{2})}) \approx 1-\alpha$$
$$\Rightarrow P(T - \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}} < \theta_0 < T + \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}) \approx 1-\alpha$$

Notem que o intervalo

$$\left(T - \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}; T + \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}\right)$$

depende de T e, portanto, é um intervalo aleatório. Com isso, temos que o intervalo aleatório acima contém o valor θ_0 com probabilidade $1-\alpha$ aproximadamente.

Seja t o valor observado de T. Então, o intervalo

$$\left(t - \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}; t + \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}\right) \qquad (\star\star)$$

contém ou não o valor de θ_0. Podemos pensar nisso como um experimento Bernoulli com probabilidade de sucesso p, sendo a probabilidade do intervalo conter o valor verdadeiro.

Seja t o valor observado de T. Então, o intervalo

$$\left(t - \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}; t + \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}\right) \qquad (\star\star)$$

contém ou não o valor de θ_0. Podemos pensar nisso como um experimento Bernoulli com probabilidade de sucesso p, sendo a probabilidade do intervalo conter o valor verdadeiro.

Em geral, a probabilidade de sucesso é, aproximadamente, $1-\alpha$. O intervalo $(\star\star)$ é chamado de intervalo de confiança para θ_0. E,

- $(1-\alpha)\%$ é a confiança;
- α é conhecido como nível de significância.

De acordo com o slide anterior, podemos escrever:

$$Li(t) = t - \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}$$
$$Ls(t) = t + \frac{\sigma_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}$$

$$P_{\theta_0}\Big(Li(t) \leq \theta_0 \leq Ls(t)\Big) = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; \theta_0 \notin \Big(Li(t); Ls(t)\Big) \\ 1, & \text{se} \;\; \theta_0 \in \Big(Li(t); Ls(t)\Big) \end{cases}$$

Na prática não conhecemos σ_T. Seja S_T um estimador consistente para σ_T. Então, temos que

$$\frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{S_T} = \underbrace{\left(\frac{\sigma_T}{S_T}\right)}_{\xrightarrow{P} 1} \underbrace{\frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{\sigma_T}}_{\xrightarrow{D} N(0,1)} \underset{\text{Teorema de Slutsky}}{\xrightarrow{D}} N(0,1).$$

Na prática não conhecemos σ_T. Seja S_T um estimador consistente para σ_T. Então, temos que

$$\frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{S_T} = \underset{\xrightarrow{P}1}{\underset{\uparrow}{\left(\frac{\sigma_T}{S_T}\right)}}\underset{\xrightarrow{D}N(0,1)}{\underset{\uparrow}{\frac{\sqrt{n}(T-\theta_0)}{\sigma_T}}} \underset{\text{Teorema de Slutsky}}{\underset{\uparrow}{\xrightarrow{D}}} N(0,1).$$

Com isso, obtemos que o intervalo

$$\left(T - \frac{S_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}; T + \frac{S_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}\right)$$

conterá θ_0 com probabilidade $1-\alpha$, aproximadamente.

Se t e s_t são os valores observados de T e S_T, respectivamente, então

$$\left(t - \frac{s_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}; t + \frac{s_T z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}\right)$$

é um intervalo de confiança $(1-\alpha)\%$ aproximadamente para θ_0. Em que $\frac{s_T}{\sqrt{n}}$ é chamado de erro padrão de T.

Exemplo: Intervalo de Confiança para Média

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2 (ambos conhecidos). Seja $\bar{X}$ e S^2 a média amostral e a variância amostral, respectivamente. Pelo TCL,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Além disso, S^2 é um estimador consistente para σ^2, então S é um estimador consistente para σ. Pelo teorema de Slutsky,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Então,

$$\left(\bar{x} - \frac{1,96s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{1,96s}{\sqrt{n}}\right)$$

é um intervalo de confiança de 95%, aproximadamente, para a média μ, em que $\bar{x}$ e s são os valores observados de $\bar{X}$ e S.

Exemplo: Intervalo de Confiança para p

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição Bernoulli com parâmetro de sucesso $p \in (0,1)$. Seja $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ a proporção de sucessos, considerando $P(X_i = 1) = p$ e $P(X_i = 0) = 1 - p$. Pelo TCL,

$$\sqrt{n}(\hat{p} - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p)),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Como $\hat{p}$ é consistente para p, temos que

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Com isso,

$$\left(\hat{p} - \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}; \hat{p} + \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right)$$

é um intervalo de confiança $(1-\alpha)\%$ assintótico.

Outra forma de fazer é utilizar o método delta para encontrar uma função g tal que $p(1-p)[g^{'}(p)]^2 = k$ (constante). Segue que,

$$g^{'}(p) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{p(1-p)}}, \text{ fazendo } k = 1, \text{ temos,}$$
$$g^{'}(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$$

Para 🏠

Um intervalo de confiança $(1-\alpha)\%$ assintótico para p pode ser obtido utilizando a seguinte convergência em distribuição:

$$2\sqrt{n}(\,\mathrm{arcsen}\sqrt{\hat{p}} - \,\mathrm{arcsen}\sqrt{p}) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Escreva o intervalo de confiança explicitamente!

Exemplo: Intervalo de Confiança para μ sob Normalidade

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, com μ e σ^2 desconhecidos. Seja $\bar{X}$ e S^2 a média e a variância amostral, respectivamente. Então,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

tem distribuição t de student com $n-1$ graus de liberdade, ver teorema 3.6.1 do livro do Hogg, página 214 e 215 da oitava edição.

Seja $t_{\alpha,n-1}$ o quantil α de uma distribuição t de student com $n-1$ graus de liberdade, ou seja, $P(T < t_{\alpha,n-1}) = \alpha$, em que $T \sim t-$student$(n-1)$. Então,

$$P(\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Para 🏠

- **Exercícios da seção 4.2:** 7, 8, 9, 15, 18, 21.

Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias

Seja $X_1, \ldots, X_{n_1}$ e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ duas amostras aleatórias da distribuição de X e Y, respectivamente, em que X e Y são v.a.'s com $E(X) = \mu_1$, $Var(X) = \sigma_1^2$, $E(Y) = \mu_2$ e $Var(Y) = \sigma_2^2$. Suponha independência das amostras. Estamos interessados em construir um intervalo de confiança para $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

Seja $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1}$ e $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} Y_i}{n_2}$. Então, $\bar{\Delta} = \bar{X} - \bar{Y}$ é um estimador não viesado para Δ. Seja $n = n_1 + n_2$, assuma que $\frac{n_1}{n} \to \lambda_1 > 0$ e que $\frac{n_2}{n} \to \lambda_2 > 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Pelo Teorema Central do Limite,

$$\sqrt{n_1}(\bar{X} - \mu_1) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_1^2).$$

Segue que,

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1) = \sqrt{\frac{n}{n_1}} \sqrt{n_1}(\bar{X} - \mu_1) \xrightarrow{D} N(0, \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1}).$$

Seja $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1}$ e $\bar{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2} Y_i}{n_2}$. Então, $\bar{\Delta} = \bar{X} - \bar{Y}$ é um estimador não viesado para Δ. Seja $n = n_1 + n_2$, assuma que $\dfrac{n_1}{n} \to \lambda_1 > 0$ e que $\dfrac{n_2}{n} \to \lambda_2 > 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Pelo Teorema Central do Limite,

$$\sqrt{n_1}(\bar{X} - \mu_1) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_1^2).$$

Segue que,

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1) = \sqrt{\frac{n}{n_1}}\sqrt{n_1}(\bar{X} - \mu_1) \xrightarrow{D} N(0, \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1}).$$

Usamos o fato de $\sqrt{\dfrac{n}{n_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_1}}$ e $\sqrt{n_1}(\bar{X} - \mu_1) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_1^2)$.

Da mesma forma,

$$\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_2) \xrightarrow{D} N(0, \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2}).$$

Note que,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)] &= \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1) - \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_2) \\ &\xrightarrow{D} N(0, \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2})\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{Y} - \Delta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2}}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{Y} - \Delta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{Y} - \Delta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\frac{n_1}{n}} + \frac{\sigma_2^2}{\frac{n_2}{n}}}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y} - \Delta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Substituindo σ_1^2 e σ_2^2 por $S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \bar{X})$ e $S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n}(Y_1 - \bar{Y})$, respectivamente, temos que,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y} - \Delta)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

pois S_1^2 e S_2^2 são consistentes para σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente.

Logo, temos que um intervalo de confiança $(1-\alpha)100\%$, assintótico para Δ fica dado por,

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}};\bar{x}-\bar{y}+z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right)$$

Assuma as mesmas condições anteriores. Adicionalmente, suponha que $X_i \sim$Bernoulli(p_1), $i = 1, \ldots, n_1$ e $Y_j \sim$Bernoulli(p_2), $j = 1, \ldots, n_2$. Defina $\hat{p}_1 = \dfrac{\sum X_i}{n_1}$ e $\hat{p}_2 = \dfrac{\sum Y_j}{n_2}$. Segue que,

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema de Slutsky}}}{\iff} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Com isso, um intervalo de confiança $(1-\alpha)100\%$, assintótico para $p_1 - p_2$ fica dado por,

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mp z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right)$$

Para 🏠

- **Exercícios da seção 4.2:** 25 ao 27.

Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.