

# Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos  
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria  
Universidade Federal de Viçosa  
Campus UFV - Viçosa



# Sumário

1 Consistência

2 Convergência em Distribuição

## Definição 1

*Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição acumulada  $F(x, \theta)$ ,  $\theta \in \mathcal{A} \subseteq \Omega$ . Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra da distribuição de  $X$  e seja  $T_n$  uma estatística ( $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$ ). Dizemos que  $T_n$  é um estimador consistente para  $\theta$  se  $T_n \xrightarrow{P} \theta$ .*

# Exemplo

Sejam  $X_1, \dots, X_n, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias iid de uma distribuição com média finita  $\mu$  e variância  $\sigma^2 < +\infty$ , então, pela Lei

Fraca dos Grandes Números, temos que,  $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ . Ou seja,  $\bar{X}_n$  é um estimador consistente de  $\mu$ .

# Exemplo

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma distribuição com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2 < +\infty$ . Suponha que  $E[X_1^4] < +\infty$ , de tal forma que  $\text{Var}(S^2) < +\infty$ .

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}_n^2 \right) \\ &= \frac{n}{n-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right) \\ &\xrightarrow{P} 1 \cdot [E(X_1^2) - \mu^2] = \sigma^2. \end{aligned}$$

Portanto, a variância da amostra é um estimador consistente de  $\sigma^2$ . A partir da discussão acima, temos imediatamente que  $S_n \xrightarrow{P} \sigma$ ; ou seja, o desvio padrão da amostra é um estimador consistente do desvio padrão populacional. Vejam estes exemplos anteriores na prática, [Clique aqui!](#).

# Exemplo

Considere  $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .  
Seja  $\varepsilon > 0$ , segue que:

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) &= P(\theta - Y_n \geq \varepsilon) \\ &= P(Y_n \leq \theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

# Exemplo

Considere  $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .  
Seja  $\varepsilon > 0$ , segue que:

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) &= P(\theta - Y_n \geq \varepsilon) \\ &= P(Y_n \leq \theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Se  $\theta - \varepsilon \leq 0$ , então  $P(Y_n \leq \theta - \varepsilon) = 0$ , pois  $0 \leq Y_n \leq \theta$ , com  $P(0 \leq Y_n \leq \theta) = 1$ .



# Exemplo

Considere  $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .  
Seja  $\varepsilon > 0$ , segue que:

$$\begin{aligned} P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) &= P(\theta - Y_n \geq \varepsilon) \\ &= P(Y_n \leq \theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Se  $\theta - \varepsilon \leq 0$ , então  $P(Y_n \leq \theta - \varepsilon) = 0$ , pois  $0 \leq Y_n \leq \theta$ , com  $P(0 \leq Y_n \leq \theta) = 1$ .

Se  $0 < \varepsilon < \theta$  então,

$$P(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq \theta - \varepsilon) = F_{Y_n}(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ou seja,  $Y_n \xrightarrow{P} \theta$ . Logo,  $Y_n$  é um estimador consistente para  $\theta$ .

# Para

Exercícios 2.8.18, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.7 e 5.1.9

# Convergência em Distribuição

## Definição 2

*Seja  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias com função de distribuição  $F_{X_n}$ ,  $n \geq 1$ . Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F_X$ . Seja  $C(F_X)$  o conjunto de todos os pontos de continuidade de  $F_X$ . Dizemos que  $X_n$  converge em distribuição para  $X$  se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in C(F_X).$$

*Denotamos essa convergência por  $X_n \xrightarrow{D} X$  ou  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .*

# Convergência em Distribuição

## Definição 2

*Seja  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias com função de distribuição  $F_{X_n}$ ,  $n \geq 1$ . Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F_X$ . Seja  $C(F_X)$  o conjunto de todos os pontos de continuidade de  $F_X$ . Dizemos que  $X_n$  converge em distribuição para  $X$  se,*

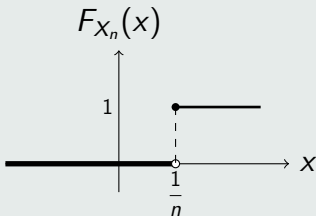
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in C(F_X).$$

*Denotamos essa convergência por  $X_n \xrightarrow{D} X$  ou  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .*

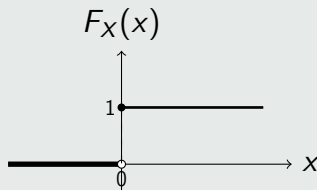
À medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição das médias amostrais se aproxima da distribuição normal, veja isso acontecendo na prática, [Clique aqui!](#).

# Exemplo

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1, \forall n \geq 1, \quad P(X = 0) = 1, \quad \mathcal{C}(F_X(x)) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$$



(a)  $P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1$



(b)  $P(X = 0) = 1$

**Figura:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \neq 0$ , ou seja  $X_n \xrightarrow{D} X$

## Exemplo 2 (Convergência em Distribuição não Implica Convergência em Probabilidade)

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua simétrica em torno do zero (ou seja, se  $f$  denota sua densidade, então  $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Neste caso,  $X$  e  $-X$  tem a mesma distribuição (Verifiquem!). Defina a sequência de variáveis aleatórias  $X_n$  como: 
$$X_n = \begin{cases} X, & \text{se } n \text{ é par} \\ -X, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

## Exemplo 2 (Convergência em Distribuição não Implica Convergência em Probabilidade)

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua simétrica em torno do zero (ou seja, se  $f$  denota sua densidade, então  $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Neste caso,  $X$  e  $-X$  tem a mesma distribuição (Verifiquem!). Defina a sequência de variáveis aleatórias  $X_n$  como: 
$$X_n = \begin{cases} X, & \text{se } n \text{ é par} \\ -X, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

É fácil ver que  $F_{X_n}(x) = F_X(x)$ . Logo,  $X_n \xrightarrow{D} X$ . Porém,  $X_n \not\xrightarrow{P} X$ , pois 
$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ P(2|X| \geq \varepsilon), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

## Exemplo 3

Seja  $T_n$  uma variável aleatória com distribuição t-Student com  $n$  graus de liberdade, ou seja, a densidade de  $T_n$  é dada por:

$$f_{T_n}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad y \in \mathbb{R}$$



## Exemplo 3

Seja  $T_n$  uma variável aleatória com distribuição t-Student com  $n$  graus de liberdade, ou seja, a densidade de  $T_n$  é dada por:

$$f_{T_n}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Temos que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dy$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dy$$

$$= \int_{-\infty}^t \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dy$$

Teorema da  
Convergência Dominada

= ★★

Considere a seguinte aproximação de Stirling (Conhecida como fórmula de Stirling):

$$\Gamma(t+1) \approx \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t$$

Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2t\pi} \left(\frac{t}{e}\right)^t} = 1$$

Considere a seguinte aproximação de Stirling (Conhecida como fórmula de Stirling):

$$\Gamma(t+1) \approx \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t$$

Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2t\pi} \left(\frac{t}{e}\right)^t} = 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi} \left(\frac{n-2}{2}\right)^{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)}} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \star \text{ (t da fórmula de Stirling será } \frac{n-1}{2} \text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)^{\frac{n}{2}} (n-2)^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)^{\frac{n}{2}}(n-2)^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em  $\star\star$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Logo,  $T_n \xrightarrow{D} N(0, 1)$ .

# Referências I



Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.