# Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

# Sumário

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias iid de uma distribuição dependendo de um vetor de parâmetros $\theta \in \Omega$. Assuma que $\theta \in W_0$ ou $\theta \in W_1$, com $W_0 \cap W_1 = \emptyset$ e $W_0 \cup W_1 = \Omega$. Com isso, definimos as hipóteses:

$$H_0 : \theta \in W_0 \text{ contra } H_1 : \theta \in W_1.$$

O teste de $H_0$ contra $H_1$ é baseado na amostra $X_1, \ldots, X_n$, considere um subconjunto (dependendo da amostra) $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$, em que $\mathcal{S}$ é o suporte da amostra aleatória. Essa região $\mathcal{C}$ é conhecida como região crítica e sua correspondente regra de decisão é:

- Rejeite $H_0$ (Aceite $H_1$) se $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}$.
- Aceita $H_0$ (Rejeite $H_1$) se $(X_1, \ldots, X_n) \notin \mathcal{C}$ $(\in \mathcal{C}^c)$.

O teste de $H_0$ contra $H_1$ é baseado na amostra $X_1, \ldots, X_n$, considere um subconjunto (dependendo da amostra) $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$, em que $\mathcal{S}$ é o suporte da amostra aleatória. Essa região $\mathcal{C}$ é conhecida como região crítica e sua correspondente regra de decisão é:

- Rejeite $H_0$ (Aceite $H_1$) se $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}$.
- Aceita $H_0$ (Rejeite $H_1$) se $(X_1, \ldots, X_n) \notin \mathcal{C}$ $(\in \mathcal{C}^c)$.

O erro tipo I ocorre se $H_0$ é rejeitada quando ela é verdadeira, enquanto o erro tipo II ocorre se $H_0$ é aceita quando $H_1$ é verdadeira. Nível de significância é o erro do tipo I, isto é,

$$\alpha = \max_{\theta \in W_0} P_\theta[(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}].$$

Restrito a testes de tamanho $\alpha$, queremos selecionar testes que minimizam o erro do tipo II, que é equivalente a maximizar a função poder. A função poder é definida por,

$$\gamma_{\mathcal{C}}(\theta) = P_\theta[(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}], \ \theta \in W_1$$

## Definição 1

*Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto do suporte de $(X_1, \ldots, X_n)$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é a melhor região critica de tamanho $\alpha$ se,*

a) $\alpha = \max_{\theta \in W_0} P((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C})$

b) *Para qualquer outra região $A$ com $\alpha = P_{\theta \in W_0}((X_1, \ldots, X_n) \in A)$,*

$$P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C}) \geq P_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in A) \text{ quando } \theta \in W_1$$

Considere $X \overset{\text{iid}}{\sim}$ Binomial$(5, \theta)$. Seja $f(x; \theta)$ a função de probabilidade de $X$ e considere $H_0 : \theta = \dfrac{1}{2}$ e $H_1 : \theta = \dfrac{3}{4}$. Além disso, considere:

Considere $X \overset{\text{iid}}{\sim}$ Binomial$(5, \theta)$. Seja $f(x;\theta)$ a função de probabilidade de $X$ e considere $H_0 : \theta = \dfrac{1}{2}$ e $H_1 : \theta = \dfrac{3}{4}$. Além disso, considere:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x; \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |
| $f(x; \frac{3}{4})$ | $\frac{1}{1024}$ | $\frac{15}{1024}$ | $\frac{90}{1024}$ | $\frac{270}{1024}$ | $\frac{405}{1024}$ | $\frac{243}{1024}$ |
| $\dfrac{f(x; \frac{1}{2})}{f(x; \frac{3}{4})}$ | $32$ | $\frac{32}{3}$ | $\frac{32}{9}$ | $\frac{32}{27}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{32}{243}$ |

Considere o nível de significância do teste como $\alpha = \frac{1}{32}$. Buscamos uma melhor região crítica de tamanho $\alpha = \frac{1}{32}$. Se $A_1 = \{x : x = 0\}$ ou $A_2 = \{x : x = 5\}$, então $P_{\{\theta=\frac{1}{2}\}}(X \in A_1) = P_{\{\theta=\frac{1}{2}\}}(X \in A_2) = \frac{1}{32}$ e não há outro subconjunto $A_3$ do espaço $\{x : x = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $P_{\{\theta=\frac{1}{2}\}}(X \in A_3) = \frac{1}{32}$. Portanto, ou $A_1$ ou $A_2$ é a melhor região crítica $C$ de tamanho $\alpha = \frac{1}{32}$ para testar $H_0$ contra $H_1$.

Observamos que $P_{\{\theta=\frac{1}{2}\}}(X \in A_1) = \frac{1}{32}$ e $P_{\{\theta=\frac{3}{4}\}}(X \in A_1) = \frac{1}{1024}$. Assim, se o conjunto $A_1$ for usado como região crítica de tamanho $\alpha = \frac{1}{32}$, temos a situação inaceitável de que a probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_1$ é verdadeira ($H_0$ é falsa) é muito menor do que a probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_0$ é verdadeira.

Por outro lado, se o conjunto $A_2$ for usado como região crítica, então $P_{\{\theta=\frac{1}{2}\}}(X \in A_2) = \frac{1}{32}$ e $P_{\{\theta=\frac{3}{4}\}}(X \in A_2) = \frac{243}{1024}$. Ou seja, a probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_1$ é verdadeira é muito maior do que a probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_0$ é verdadeira. Certamente, esta é uma situação mais desejável, e na verdade, $A_2$ é a melhor região crítica de tamanho $\alpha = \frac{1}{32}$. Esta última afirmação decorre do fato de que quando $H_0$ é verdadeira, existem apenas dois subconjuntos, $A_1$ e $A_2$, do espaço amostral, cada um com medida de probabilidade igual a $\frac{1}{32}$, e do fato de que $\frac{243}{1024} = P_{\{\theta=\frac{3}{4}\}}(X \in A_2) > P_{\{\theta=\frac{3}{4}\}}(X \in A_1) = \frac{1}{1024}$.

Deve ser observado neste problema que a melhor região crítica $C = A_2$ de tamanho $\alpha = \frac{1}{32}$ é encontrada incluindo em $C$ o ponto (ou pontos) em que $\frac{f(x;\frac{1}{2})}{f(x;\frac{3}{4})}$ é mínimo. Assim, a razão $\frac{f(x;\frac{1}{2})}{f(x;\frac{3}{4})}$, que é dada na última linha da tabulação acima, nos fornece uma ferramenta precisa para encontrar uma melhor região crítica $C$ para determinados valores dados de $\alpha$.

Para ilustrar o último slide, suponha $\alpha = \frac{6}{32}$. Quando $H_0$ é verdadeira, cada um dos subconjuntos $\{x : x = 0, 1\}$, $\{x : x = 0, 4\}$, $\{x : x = 1, 5\}$, $\{x : x = 4, 5\}$ tem medida de probabilidade $\frac{6}{32}$. Por cálculo direto, é encontrado que a melhor região crítica desse tamanho é $\{x : x = 4, 5\}$. Isso reflete o fato de que a razão $\frac{f(x; \frac{1}{2})}{f(x; \frac{3}{4})}$ tem seus dois valores mínimos em $x = 4$ e $x = 5$. O poder deste teste, que tem $\alpha = \frac{6}{32}$, é $P_{\{\theta = \frac{3}{4}\}}(X = 4, 5) = \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} = \frac{648}{1024}$.

# Teorema de Neyman-Pearson

## Teorema 1

*Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *uma amostra aleatória de uma distribuição dependendo de um vetor de parâmetros* $\theta$. *Denote,* $L(\theta, X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$ *a função de verossimilhança e* $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. *Sejam* $\theta^{'}$ *e* $\theta^{''}$ *dois valores distintos de* $\theta$, $\Omega = \{\theta^{'}, \theta^{''}\}$, *e* $k$ *um número positivo, Seja* $\mathcal{C}$ *tal que,*

a) $\dfrac{L(\theta^{'}, \underset{\sim}{x})}{L(\theta^{''}, \underset{\sim}{x})} \leq k$, *para cada* $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{C}$, $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$

b) $\dfrac{L(\theta^{'}, \underset{\sim}{x})}{L(\theta^{''}, \underset{\sim}{x})} \geq k$, *para cada* $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{C}^c$

c) $\alpha = P_{\theta'}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{C})$.

*Então,* $\mathcal{C}$ *é a melhor região crítica de tamanho* $\alpha$ *para testar as hipóteses* $H_0 : \theta = \theta^{'}$ *contra* $H_1 : \theta = \theta^{''}$.

# Demonstração

É importante entender que deseja-se mostrar que, satisfeita as condições do teorema, $\mathcal{C}$ é a melhor região crítica de tamanho $\alpha$. Isso pode ser escrito matematicamente como $P_{\theta''}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{C}) > P_{\theta''}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{A})$ para qualquer outra região crítica $\mathcal{A}$ de tamanho $\alpha$.

## Demonstração

É importante entender que deseja-se mostrar que, satisfeita as condições do teorema, $\mathcal{C}$ é a melhor região crítica de tamanho $\alpha$. Isso pode ser escrito matematicamente como $P_{\theta''}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{C}) > P_{\theta''}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{A})$ para qualquer outra região crítica $\mathcal{A}$ de tamanho $\alpha$.

Ou seja, queremos mostrar que

$$P_{\theta''}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{C}) - P_{\theta''}(\underset{\sim}{X} \in \mathcal{A}) > 0.$$

# Demonstração

Consideramos o caso em que $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis continuas (o caso discreto é análogo).

**Notação Simplificada:** $\int_{\rm I\!R} \cdots \int_{\rm I\!R} L(\theta, \underset{\sim}{X}) d\underset{\sim}{X} \equiv \int L(\theta)$

# Demonstração

Consideramos o caso em que $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis continuas (o caso discreto é análogo).
**Notação Simplificada:** $\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} L(\theta, \underset{\sim}{X}) d\underset{\sim}{X} \equiv \int L(\theta)$

Queremos mostrar que,

$$\int_{\mathcal{C}} L(\theta^{''}) - \int_{A} L(\theta^{''}) > 0, \text{ em que } A \text{ tem tamanho } \alpha.$$

Note que $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap A) \cup (\mathcal{C} \cap A^c)$ e $A = (\mathcal{C} \cap A) \cup (\mathcal{C}^c \cap A)$.

Logo,

$$\int_{\mathcal{C}} L(\theta^{''}) - \int_{A} L(\theta^{''}) = \int_{\mathcal{C}\cap A} L(\theta^{''}) + \int_{\mathcal{C}\cap A^c} L(\theta^{''}) - \int_{\mathcal{C}\cap A} L(\theta^{''}) - \int_{\mathcal{C}^c\cap A} L(\theta^{''})$$
$$= \int_{\mathcal{C}\cap A^c} L(\theta^{''}) - \int_{\mathcal{C}^c\cap A} L(\theta^{''})$$

Segue que,

$$\int_{\mathcal{C}\cap A^c} L(\theta^{''}) - \int_{\mathcal{C}^c\cap A} L(\theta^{''}) \underset{\uparrow}{\geq} \int_{\mathcal{C}\cap A^c} \frac{1}{k} L(\theta^{'}) - \int_{\mathcal{C}^c\cap A} \frac{1}{k} L(\theta^{'})$$

Usando a parte a e b do teorema

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k}\left(\int_{\mathcal{C}\cap A^c} L(\theta^{'}) - \int_{\mathcal{C}^c\cap A} L(\theta^{'})\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\int_{\mathcal{C}\cap A^c} L(\theta^{'}) + \int_{\mathcal{C}\cap A} L(\theta^{'}) - \right.\\
&\left. - \int_{\mathcal{C}\cap A} L(\theta^{'}) - \int_{\mathcal{C}^c\cap A} L(\theta^{'})\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\int_{\mathcal{C}} L(\theta^{'}) - \int_{A} L(\theta^{'})\right) \Rightarrow \text{Sob } H_0 \\
&= \frac{1}{k}(\alpha - \alpha) = 0
\end{aligned}$$

# Exemplo

$$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\theta, 1)$$

$$H_0 : \theta = \theta^{'} = 0$$

$$H_1 : \theta = \theta^{''} = 1, \qquad L(\theta, \underset{\sim}{X}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum(X_i - \theta)^2\right\}$$

$$\frac{L(\theta', \underset{\sim}{x})}{L(\theta'', \underset{\sim}{x})} \leq k,$$

$$\begin{aligned}
\frac{L(\theta', \underset{\sim}{x})}{L(\theta'', \underset{\sim}{x})} &= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{2}\right\} \leq k \\
&\Rightarrow -\sum x_i + \frac{n}{2} \leq k^{'} = \log k \\
&\Rightarrow \underbrace{\sum x_i \geq k^{''}}_{\text{Região Crítica}}
\end{aligned}$$

Portanto, a melhor região crítica $C$ é o conjunto de todas as amostras $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para as quais a soma dos $x_i$ é maior ou igual a $k^{''}$. O valor de $k^{''}$ pode ser determinado de modo que o tamanho da região crítica seja igual ao nível de significância desejado $\alpha$. Essa região crítica é dada por:

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k^{''}\}.$$

O teste pode ser baseado na estatística $\bar{X}$, pois $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k^{''}$ é equivalente a $\bar{X} \geq c_1$. Se $H_0$ for verdadeira, ou seja, $\theta = \theta_0 = 0$, então $\bar{X}$ segue uma distribuição $N(0, 1/n)$. Dado um nível de significância $\alpha$, podemos calcular $c_1$ em R como $c_1 = qnorm(1 - \alpha, 0, 1/\sqrt{n})$.

Portanto, se os valores experimentais de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem, respectivamente, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, podemos calcular $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Se $\bar{x} \geq c_1$, a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0 = 0$ será rejeitada no nível de significância $\alpha$; caso contrário, a hipótese $H_0$ será aceita. A probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_0$ é verdadeira é igual a $\alpha$, o nível de significância. A probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_0$ é falsa, ou seja, o valor de poder do teste quando $\theta = \theta_1 = 1$, pode ser calculada como indicado na equação fornecida.

$$P_{H1}(\bar{X} \geq c_1) = \int_{c_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1/n}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-1)^2}{2(1/n)}\right) d\bar{x}.$$

Portanto, se os valores experimentais de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem, respectivamente, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, podemos calcular $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Se $\bar{x} \geq c_1$, a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0 = 0$ será rejeitada no nível de significância $\alpha$; caso contrário, a hipótese $H_0$ será aceita. A probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_0$ é verdadeira é igual a $\alpha$, o nível de significância. A probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $H_0$ é falsa, ou seja, o valor de poder do teste quando $\theta = \theta_1 = 1$, pode ser calculada como indicado na equação fornecida.

$$P_{H1}(\bar{X} \geq c_1) = \int_{c_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1/n}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-1)^2}{2(1/n)}\right) d\bar{x}.$$

Por exemplo, se $n = 25$ e $\alpha$ for 0.05, então $c_1 = \text{qnorm}(0.95, 0, 1/5) = 0.329$, usando R. Portanto, o poder do teste para detectar $\theta = 1$, é calculado por $1 - \text{pnorm}(0.329, 1, 1/5) = 0.9996$.

## Exercício 8.1.2

Vamos considerar o problema de testar a hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0 = 2$ contra a hipótese alternativa simples $H_1 : \theta = \theta_1 = 4$ para a variável aleatória $X$, que possui a função de densidade de probabilidade (pdf) dada por $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$, onde $0 < x < \infty$ e zero caso contrário. Seja $X_1$ e $X_2$ representam uma amostra aleatória de tamanho 2 desta distribuição. Mostre que o melhor teste de $H_0$ contra $H_1$ é usando a estatística $X_1 + X_2$!

A razão de verossimilhança é dada por:

$$\frac{L(\theta_0; X_1, X_2)}{L(\theta_1; X_1, X_2)} = \frac{\frac{1}{\theta_0} e^{-\frac{x_1}{\theta_0}} \frac{1}{\theta_0} e^{-\frac{x_2}{\theta_0}}}{\frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_2}{\theta_1}}}$$
$$= 4e^{-\left(\frac{X_1 + X_2}{4}\right)},$$

em que utilizamos as hipóteses $H_0 : \theta = 2$ e $H_1 : \theta = 4$. Agora, queremos encontrar a melhor região crítica $C$ de tamanho $\alpha$ para testar $H_0$ contra $H_1$. Neste caso, $\alpha$ representa o nível de significância do teste.

Usando a razão de verossimilhança, temos que:

$$\frac{L(\theta_0; X_1, X_2)}{L(\theta_1; X_1, X_2)} \leq k \quad \text{se, e somente se,} \quad 4e^{-\left(\dfrac{X_1 + X_2}{4}\right)} \leq k,$$

ou seja, $X_1 + X_2 \geq k_3$. Portanto, a região crítica $C$ pode ser definida como:

$$C = \{(X_1, X_2) : X_1 + X_2 \geq k_3\},$$

em que $k$ é escolhido de forma a controlar o nível de significância $\alpha$. O teste de hipóteses consiste em verificar se a amostra cai dentro ou fora da região crítica $C$. Portanto, o melhor teste usa a estatística $X_1 + X_2$ e a melhor região crítica $C$ é definida por $C = \{(x_1, x_2)/x_1 + x_2 \geq k\}$.

# Para 🏠

- **Exercícios da seção 8.1:** 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10.

# Referências I

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.