

# Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos  
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria  
Universidade Federal de Viçosa  
Campus UFV - Viçosa



# Sumário

- 1 Função Geradora de Momentos
- 2 Teorema Central do Limite
- 3 Método Delta

## Definição 1

*A função geradora de momentos de uma variável aleatória  $X$  é definida por  $M_X(t) = E(e^{tX})$ ,  $t \in \mathbb{R}$*

## Teorema 1

*Seja  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias com fgm  $M_{X_n}(t)$  que existe para  $|t| < h$  para todo  $n$ . Seja  $X$  uma variável aleatória com fgm  $M_X(t)$ , que existe para  $|t| \leq h_1 \leq h$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$  para  $|t| \leq h_1$ , então  $X_n \xrightarrow{D} X$ .*

## Teorema 1

Seja  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias com fgm  $M_{X_n}(t)$  que existe para  $|t| < h$  para todo  $n$ . Seja  $X$  uma variável aleatória com fgm  $M_X(t)$ , que existe para  $|t| \leq h_1 \leq h$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$  para  $|t| \leq h_1$ , então  $X_n \xrightarrow{D} X$ .

## Observação importante na resolução de exercícios:

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right)^{cn}$ , em que  $b$  e  $c$  não dependem de  $n$  e, em que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$ . Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{cn}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{\frac{cn}{cn}} = e^{bc}.$$

# Exemplo 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^2}{n^{3/2}} \right)^{-n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^2/\sqrt{n}}{n} \right)^{-n/2}.$$

Aqui,  $b = -t^2$ ,  $c = -\frac{1}{2}$  e  $\psi(n) = \frac{t^2}{\sqrt{n}}$ . Consequentemente, para cada valor fixo de  $t$ , o limite é  $e^{t^2/2}$ .

## Exemplo 2

Considere  $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$  e suponha  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$  (por exemplo,  $p_n = \frac{1}{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 1$ ). Então,  $X_n \xrightarrow{D} X$ , em que  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

## Exemplo 2

Considere  $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$  e suponha  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$  (por exemplo,  $p_n = \frac{1}{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 1$ ). Então,  $X_n \xrightarrow{D} X$ , em que  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

### Demonstração

Temos que,

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= E(e^{tX_n}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \left(1 - p_n + p_n e^t\right)^n = \left(1 + \frac{np_n}{n}(e^t - 1)\right)^n \\ (\text{para } n \text{ grande}) &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

Logo,  $X_n \xrightarrow{D} X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .



Quando a quantidade  $np_n$  se estabiliza em um valor  $\lambda > 0$ , estamos essencialmente controlando a média da binomial. À medida que  $n \rightarrow \infty$  e  $p_n$  diminui de forma controlada, mantemos  $np_n$  constante, aproximando o comportamento da binomial ao de uma distribuição Poisson com parâmetro  $\lambda$ . A essência é que estamos explorando o comportamento assintótico da binomial, com  $p_n$  diminuindo à medida que  $n$  cresce, mas de modo que  $np_n$  permaneça fixo e igual a  $\lambda$ . Isso faz com que a média e variância da binomial “converjam” para os parâmetros de uma Poisson.

# Teorema Central do Limite

Seja  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias iid com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2 < \infty$ . Então,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

# Demonstração

Assuma, sem perda de generalidade,  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} M_{\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}(t) &= M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{\frac{t \sum X_i}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

Ou seja,  $\ln M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}}(t) = n \ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\ln M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}$ , aplicando L'Hôpital, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{M'_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{M_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})} t(-\frac{1}{2}) n^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} M'_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M'_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{t}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M''_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) t(-1/2) n^{-3/2}}{-\frac{1}{2} n^{-3/2}} \\
&= \frac{t^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} M''_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Logo,  $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} X \sim N(0, 1)$

# Método Delta

Suponha que conhecemos a distribuição de uma variável aleatória, mas que queremos determinar a distribuição de uma função dela. Isso também é verdade na teoria assintótica, o teorema de Slutsky's e o teorema visto em aula, imediatamente anterior a ele, são ilustrações disso. Outro resultado desse tipo é chamado de método delta. Vejamos o próximo slide!

## Teorema 2

*Seja  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias satisfazendo a seguinte convergência em distribuição:*

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

*Se  $g$  é uma função diferenciável em  $\theta$  e  $g'(\theta) \neq 0$ , então*

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2).$$

# Demonstração

Vamos mostrar primeiro que  $X_n \xrightarrow{P} \theta$ . Seja  $\varepsilon > 0$  e  $m > 0$  inteiro ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) fixado.

$$\begin{aligned} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &= P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < \varepsilon\sqrt{n}) \\ &\geq P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \end{aligned}$$

$$\uparrow$$

para  $n \geq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2$

# Continuação da Demonstração

Segue que,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= P(|Z| < \sigma m), \quad Z \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

Usando o fato de que  
 $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$



# Continuação da Demonstração

Segue que,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(X_n - \theta)| < m) \\ &= P(|Z| < \sigma m), \quad Z \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

Usando o fato de que  
 $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$

Assim,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq P(|Z| < \sigma m) = \Phi(\sigma m) - \Phi(-\sigma m) \\ &= 2\Phi(\sigma m) - 1\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*$$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \lim_{m \rightarrow +\infty} [2\Phi(\sigma m) - 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \lim_{m \rightarrow +\infty} [2\Phi(\sigma m) - 1] \\ &= 1\end{aligned}$$

Como  $\limsup \geq \liminf$ , temos que

$$\limsup P(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \quad (1)$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq 2\Phi(\sigma m) - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &\geq \lim_{m \rightarrow +\infty} [2\Phi(\sigma m) - 1] \\ &= 1\end{aligned}$$

Como  $\limsup \geq \liminf$ , temos que

$$\limsup P(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) \quad (1)$$

Expandindo  $g$  em série de Taylor até a primeira ordem em torno de  $\theta$ , temos que

$$g(x) = g(\theta) + g'(\theta)(x - \theta) + \mathcal{C}(x)(x - \theta),$$

em que  $\lim_{x \rightarrow \theta} \mathcal{C}(x) = 0$ .

Segue que,

$$\begin{aligned}g(x) - g(\theta) &= g'(\theta)(x - \theta) + \mathcal{C}(x)(x - \theta) \\ \sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) &= \sqrt{n}(X_n - \theta)(g'(\theta) + \mathcal{C}(X_n)).\end{aligned}$$

Para mostrar o resultado desejado, devemos mostrar que  $\mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0$ . Com isso, utilizando o teorema de Slutsky, o resultado é obtido. Como  $\lim_{x \rightarrow \theta} \mathcal{C}(x) = 0$ , para  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $|x - \theta| < \delta \Rightarrow |\mathcal{C}(x)| < \varepsilon$ .

Segue que,

$$\begin{aligned}g(x) - g(\theta) &= g'(\theta)(x - \theta) + \mathcal{C}(x)(x - \theta) \\ \sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) &= \sqrt{n}(X_n - \theta)(g'(\theta) + \mathcal{C}(X_n)).\end{aligned}$$

Para mostrar o resultado desejado, devemos mostrar que  $\mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0$ . Com isso, utilizando o teorema de Slutsky, o resultado é obtido. Como  $\lim_{x \rightarrow \theta} \mathcal{C}(x) = 0$ , para  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $|x - \theta| < \delta \Rightarrow |\mathcal{C}(x)| < \varepsilon$ .

Daí,

$$\{|X_n - \theta| < \delta\} \subset \{|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon\} \Rightarrow P(|X_n - \theta| < \delta) \leq P(|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon)$$

Esse resultado, juntamente com (1) implica que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\mathcal{C}(X_n)| < \varepsilon) = 1, \text{ ou seja, } \mathcal{C}(X_n) \xrightarrow{P} 0.$$

Para 

Seja  $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$ . Mostre que

$$\sqrt{n} \left( \arcsin \sqrt{\frac{X_n}{n}} - \arcsin \sqrt{p} \right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

# Para

Exercícios 5.3.1 à 5.3.8, 5.3.11, 5.3.12



# Referências I

CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. [S.l.]: Cengage Learning, 2021.

HOGG, RV; MCKEAN, J; CRAIG, AT. **Introduction to Mathematical Statistics**. Eighth Edition. [S.l.]: Pearson, 2019.