Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

1. Razão de Verossimilhança Monótona
   - Exemplo 1
2. Teorema de Karlin-Rubin
   - Exemplo 1
   - Exemplo 2

Razão de Verossimilhança Monótona

A Razão de Verossimilhança Monótona (RVM) está relacionada à comparação de dois modelos estatísticos por meio da razão de suas funções de verossimilhança. Suponha que tenhamos dois modelos estatísticos, M_1 e M_2, com funções de verossimilhança associadas $L(\theta_1|T(X))$ e $L(\theta_2|T(X))$, respectivamente, onde X representa uma amostra observada e $T(X)$ é uma estatística específica resumindo as informações contidas na amostra. A Razão de Verossimilhança Monótona compara essas duas verossimilhanças de uma maneira especial.

Razão de Verossimilhança Monótona

A razão de verossimilhança monótona é definida como o quociente $\frac{L(\theta_1|T(X))}{L(\theta_2|T(X))}$. Esta razão é considerada monótona se, para quaisquer dois conjuntos de parâmetros θ_1 e θ_2 onde θ_1 é mais provável do que θ_2 para um dado X, a razão $\frac{L(\theta_1|T(X))}{L(\theta_2|T(X))}$ é uma função monótona não-decrescente de $T(X)$.

Razão de Verossimilhança Monótona

A razão de verossimilhança monótona é definida como o quociente $\frac{L(\theta_1|T(X))}{L(\theta_2|T(X))}$. Esta razão é considerada monótona se, para quaisquer dois conjuntos de parâmetros θ_1 e θ_2 onde θ_1 é mais provável do que θ_2 para um dado X, a razão $\frac{L(\theta_1|T(X))}{L(\theta_2|T(X))}$ é uma função monótona não-decrescente de $T(X)$.

A monotonicidade aqui é uma propriedade importante, pois implica que, se um modelo é mais provável do que outro para uma dada estatística $T(X)$, ele permanecerá mais provável à medida que a estatística $T(X)$ aumenta. Isso é fundamental em testes de hipóteses e inferência estatística, pois garante uma ordem consistente de preferência entre os modelos em estudo.

Razão de Verossimilhança Monótona

Definição 1

Uma família de funções de densidade de probabilidade $\{f_{\boldsymbol{X}}(\cdot;\theta), \theta \in \Theta\}$, $\Theta \in \mathbb{R}$, *é dita ter Razão de Verossimilhança Monótona (RVM) se existir uma estatística* $T = t(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}})$ *tal que, para todo* $\theta_2 > \theta_1$,

$$\frac{L(\theta_1|T(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}))}{L(\theta_2|T(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}))}$$

é uma função monótona (não decrescente ou não crescente) em $t(x)$ *para* $x \in \{f(x;\theta_1) > 0$ *ou* $f(x;\theta_2) > 0\}$, *em que* $f_{\boldsymbol{X}}(x;\theta_1) \neq f_{\boldsymbol{X}}(x;\theta_2)$.

Exemplo 1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Segue que,

$$\frac{L(\theta_1 | T(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}))}{L(\theta_2 | T(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}))} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta_1}{\prod_{i=1}^{n} \theta_2} \exp\left(- \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right) \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Exemplo 1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Segue que,

$$\frac{L(\theta_1 | T(\underset{\sim}{X}))}{L(\theta_2 | T(\underset{\sim}{X}))} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta_1}{\prod_{i=1}^{n} \theta_2} \exp\left(- \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right) \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

A função acima é monótona não decrescente em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, logo, $\text{Exp}(\theta)$ tem Razão de Verossimilhança Monótona (RVM) não decrescente em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. De outro lado, $\text{Exp}(\theta)$ tem RVM não crescente em $t^*(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Exemplo 2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$. Considere $y_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$,

$$L(x; \theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} 1_{(0,y_n)}(y_1) \cdot 1_{(0,\theta)}(y_n)$$

Assim, se $\theta_1 < \theta_2$, temos que:

$$\frac{L(x; \theta_2)}{L(x; \theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n \frac{1_{(0,\theta_2)}(y_n)}{1_{(0,\theta_1)}(y_n)}$$

Exemplo 2

Portanto, note que, $U(0,\theta)$ tem Razão de Verossimilhança Monótona (RVM) não decrescente em y_n e,

$$g(y_n) = \begin{cases} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n, & \text{se } 0 < y_n < \theta_1 \\ \infty, & \text{se } \theta_1 \leq y_n < \theta_2 \end{cases}$$

Observação

Página 350 do Casella e Berger (Tradução)

Muitas famílias de distribuição comuns têm uma RVM. Por exemplo, a distribuição normal (Variância conhecida, média desconhecida), de Poisson, e a Binomial, todas têm. Na verdade, qualquer família exponencial regular com $f(t|\theta) = h(t)c(\theta)\exp w(\theta)t$ tem uma RVM se $w(\theta)$ for uma função não decrescente.

Teorema de Karlin-Rubin

Considere testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$. Seja $L(\theta; \boldsymbol{x})$ a função de verosimilhança de uma distribuição com espaço de parâmetros Θ e estatística suficiente $T = t(\boldsymbol{x})$ para θ, tal que, para quaisquer θ_0 e θ_1 em Θ tais que $\theta_0 < \theta_1$, a razão de verosimilhança

$$\Lambda(\boldsymbol{x}; \theta_0, \theta_1) = \frac{L(\theta_0; \boldsymbol{x})}{L(\theta_1; \boldsymbol{x})}$$

é uma RVM (Ou seja, é uma função monótona (não decrescente ou não crescente) em $t(x)$). Sob tais condições, para um apropriado valor t_0,

$$C = \{\boldsymbol{x};\, T(\boldsymbol{x}) > t_0\}$$

é uma região crítica para um teste uniformemente mais poderoso para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$ de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(T(\boldsymbol{x}) > t_0)$.

Observação:

Sob as condições do teorema anterior podemos testar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$. Nesse caso,

$$C = \{x; T(x) < t_0\}$$

é uma região crítica para um teste uniformemente mais poderoso para $H_0 : \theta \geq \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$ de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(T(x) < t_0)$.

Considere $X_1, \ldots, X_n$ Poisson(θ). Encontre um TUMP de nível α para testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta > \theta_0$$

Considere $X_1, \ldots, X_n$ Poisson(θ). Encontre um TUMP de nível α para testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta > \theta_0$$

Sabemos que $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ e que a distribuição de $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é Poisson($n\theta$). Logo,

$$f(t;\theta) = \frac{e^{(-n\theta)}(n\theta)^t}{t!}, \ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Considere $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$ e

$$\frac{f(t;\theta_2)}{f(t;\theta_1)} = e^{-n(\theta_2-\theta_1)}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^t,$$

está razão é uma RVM de t, uma vez que $\theta_1 < \theta_2$.

Logo, a família Poisson tem a propriedade de RVM. Pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste que rejeita H_0 para toda amostra $\boldsymbol{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_i > t_0$ é um teste uniformemente mais poderoso de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > t_0)$.

Suponha

$$H_0 : \theta \leq 1 \text{ contra } H_1 : \theta > 1$$
$$n = 100$$
$$\alpha = 0.05$$

Segue que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(100\theta)$, sob H_0, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(100)$.

No software R, obtemos $t_0 = 117$ e $P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > t_0) \approx 0,043 \leq \alpha$.
Logo, o teste que rejeita H_0 para toda amostra de tamanho $n = 100$ quando $\sum_{i=1}^{n} X_i > 117$ é um TUMP de nível 0.05. O tamanho do teste é $P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > 117) \approx 0,043$.

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial(θ). Encontre um TUMP de

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta < \theta_0$$

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial(θ). Encontre um TUMP de

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta < \theta_0$$

Sabemos que $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ e que a distribuição de $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é Gamma(n, θ). Logo, para $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$

$$\frac{f(t;\theta_2)}{f(t;\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-t\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)}, \ \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} < 0.$$

Dessa forma, temos uma RVM de t. Logo, a família gamma tem a propriedade RVM.

Pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste que rejeita H_0 para toda amostra $\boldsymbol{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_i < 3$ é um teste uniformemente mais poderoso de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i < t_0)$.

Pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste que rejeita H_0 para toda amostra $\boldsymbol{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_i < 3$ é um teste uniformemente mais poderoso de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i < t_0)$.

Considere, por exemplo,

$$H_0 : \theta \geq 3 \text{ contra } H_1 : \theta < 3$$
$$n = 5$$
$$\alpha = 0.05$$

Segue que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(5, \theta)$, sob H_0, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(5, 3)$.

No software R, obtemos $t_0 = 5.91$ e $P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > t_0) \approx 0,05$. Logo, o teste que rejeita H_0 para toda amostra de tamanho $n = 5$ quando $\sum_{i=1}^{n} X_i < 5,91$ é um TUMP de tamanho 0.05.

Referências I

- Casella, George e Roger L Berger (2021). *Statistical inference*. Cengage Learning.
- Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.