Inferência Estatística II

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

Razão de Verossimilhança Monótona

A razão de verossimilhança é definida como o quociente

$$\frac{L(\theta_0|T(X))}{L(\theta_1|T(X))}$$

para dois valores de parâmetro θ_0 e θ_1. Dizemos que a razão de verossimilhança é **monótona** se, para quaisquer dois valores $\theta_1 > \theta_0$, a razão de verossimilhança for uma função **monótona não-decrescente** ou **não-crescente** em relação à estatística $T(X)$. Ambas as formas permitem a construção de testes uniformemente mais poderosos.

Razão de Verossimilhança Monótona

A monotonicidade da razão de verossimilhança é uma propriedade crucial, pois assegura que, se um modelo é mais plausível do que outro para um certo valor da estatística $T(X)$, essa relação de preferência se mantém à medida que $T(X)$ aumenta (ou diminui, dependendo do caso). Isso permite estabelecer uma ordenação consistente entre os modelos, o que é essencial na construção de testes de hipóteses mais poderosos e na tomada de decisões inferenciais.

Razão de Verossimilhança Monótona

Definição 1

Uma família de densidades $\{f_{\boldsymbol{X}}(\cdot;\theta), \theta \in \Theta\}$*, com* $\Theta \subseteq \mathbb{R}$*, possui a* ***propriedade da razão de verossimilhança monótona (RVM)*** *se existe uma estatística* $T = t(\boldsymbol{X})$ *tal que, para quaisquer* $\theta_1 > \theta_0$*, a razão*

$$\frac{L(\theta_0 \mid T(\boldsymbol{X}))}{L(\theta_1 \mid T(\boldsymbol{X}))}$$

é uma função monótona (não decrescente ou não crescente) em $t(\boldsymbol{x})$*, para todo* $\boldsymbol{x}$ *tal que* $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_0) > 0$*,* $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1) > 0$*, e* $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_0) \neq f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)$*.*

Exemplo 1: Distribuição Exponencial

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Exp}(\theta)$, com densidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad \theta > 0.$$

A função de verossimilhança para a amostra $\boldsymbol{X}$ é:

$$L(\theta \mid \boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Exemplo 1: Distribuição Exponencial

Assim, a razão de verossimilhança para dois valores θ_0 e θ_1 é:

$$\frac{L(\theta_0 \mid \boldsymbol{x})}{L(\theta_1 \mid \boldsymbol{x})} = \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \exp\left(-\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Para $\theta_1 > \theta_0$, a razão acima é uma função **monótona não decrescente** em $t(\boldsymbol{x}) = \sum x_i$. Portanto, a distribuição Exp(θ) possui **RVM crescente** em $t(\boldsymbol{x}) = \sum x_i$. Alternativamente, também possui **RVM não crescente** em $t^*(\boldsymbol{x}) = -\sum x_i$.

Exemplo 2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$. Considere $y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$,

$$L(\boldsymbol{x}; \theta) = \frac{1}{\theta^n} 1_{(0,\theta)}(x_(n)) = L(\boldsymbol{y}; \theta) = \frac{1}{\theta^n} 1_{(0,\theta)}(y_n)$$

Assim, se $\theta_0 < \theta_1$, temos que:

$$\frac{L(\boldsymbol{y}; \theta_0)}{L(\boldsymbol{y}; \theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \frac{1_{(0,\theta_0)}(y_n)}{1_{(0,\theta_1)}(y_n)}$$

Exemplo 2

Portanto, a distribuição $U(0,\theta)$ possui Razão de Verossimilhança Monótona (RVM) **não crescente** em $y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, pois:

$$g(y_n) = \begin{cases} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, & \text{se } 0 < y_n < \theta_0 \\ 0, & \text{se } \theta_0 \leq y_n < \theta_1 \\ \text{Indeterminado}, & \text{se } y_n \geq \theta_1 \end{cases}$$

Teorema de Karlin-Rubin

Considere testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$. Seja $L(\theta; T(\boldsymbol{X}))$ a função de verossimilhança expressa em termos de uma estatística suficiente $T = t(\boldsymbol{X})$ para θ, tal que, para quaisquer $\theta_0 < \theta_1$ em Θ, a razão de verossimilhança

$$\Lambda(T(\boldsymbol{X}); \theta_0, \theta_1) = \frac{L(\theta_0; T(\boldsymbol{X}))}{L(\theta_1; T(\boldsymbol{X}))}$$

é uma função monótona (não decrescente ou não crescente) em $T(\boldsymbol{X})$, isto é, a família possui a propriedade de Razão de Verossimilhança Monótona (RVM). Sob tais condições, para um valor apropriado t_0,

$$C = \{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) > t_0\}$$

é uma região crítica para um teste **uniformemente mais poderoso (UMP)** de nível $\alpha = P_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > t_0)$, para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.

Observação:

Sob as condições do teorema anterior podemos testar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$. Nesse caso,

$$C = \{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) < t_0\}$$

é uma região crítica para um teste uniformemente mais poderoso para $H_0 : \theta \geq \theta_0$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$ de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(T(\boldsymbol{x}) < t_0)$.

Exemplo 1

Considere $X_1, \ldots, X_n \sim$ Poisson(θ). Encontre um TUMP de nível α para testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta > \theta_0$$

Exemplo 1

Considere $X_1, \ldots, X_n \sim$ Poisson(θ). Encontre um TUMP de nível α para testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta > \theta_0$$

Considere $0 < \theta_0 < \theta_1 < \infty$ e

$$\frac{L(t;\theta_0)}{L(t;\theta_1)} = e^{n(\theta_1 - \theta_0)} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^t, \text{ com } t = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Sabemos que $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ, como a razão anterior é uma RVM de t, para $\theta_0 < \theta_1$, temos que, pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste que rejeita H_0 para toda amostra $\boldsymbol{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_i > t_0$ é um teste uniformemente mais poderoso de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > t_0\right)$.

Exemplo 2

Suponha o problema de teste:

$$H_0 : \theta \leq 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta > 1$$
$$n = 100$$
$$\alpha = 0{,}05$$

Sabemos que, sob $X_i \sim$ Poisson(θ), a estatística $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem distribuição $T \sim$ Poisson$(n\theta)$. Assim, sob H_0, a distribuição mais favorável à H_0 é quando $\theta = 1$, e portanto:

$$T = \sum X_i \sim \text{Poisson}(100).$$

Continuação

Utilizando o software R, obtemos que o menor valor inteiro t_0 tal que:

$$P_{\theta=1}(T > t_0) \leq 0{,}05$$

é $t_0 = 117$, pois:

$$P_{\theta=1}(T > 117) = P(T \geq 118) \approx 0{,}043.$$

Logo, o teste que rejeita H_0 sempre que $\sum X_i > 117$ é um TUMP de nível $\alpha = 0{,}05$. O tamanho exato do teste é $P_{\theta=1}(T \geq 118) \approx 0{,}043$.

Exemplo 3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial(θ). Encontre um TUMP de

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta < \theta_0$$

Exemplo 3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial(θ). Encontre um TUMP de

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ contra } H_1 : \theta < \theta_0$$

Sabemos que $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ e que a distribuição de $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é Gamma(n, θ). Para $0 < \theta_0 < \theta_1 < \infty$

$$\frac{L(t;\theta_0)}{L(t;\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n e^{t\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}, \ \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} < 0,$$

é uma RVM de t. Logo, a família gamma tem a propriedade RVM.

Pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste que rejeita H_0 para toda amostra $\boldsymbol{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_i < 3$ é um teste uniformemente mais poderoso de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i < t_0)$.

Pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste que rejeita H_0 para toda amostra $\boldsymbol{X}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_i < 3$ é um teste uniformemente mais poderoso de tamanho $\alpha = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i < t_0)$.

Considere, por exemplo,

$$H_0 : \theta \geq 3 \text{ contra } H_1 : \theta < 3$$
$$n = 5$$
$$\alpha = 0.05$$

Segue que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(5, \theta)$, sob H_0, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(5, 3)$.

No software R, obtemos $t_0 = 3,05$ e $P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i < t_0) \approx 0,05$. Logo, o teste que rejeita H_0 para toda amostra de tamanho $n = 5$ quando $\sum_{i=1}^{n} X_i < 3,05$ é um TUMP de tamanho 0.05.

Referências I

Casella, George e Roger L Berger (2021). *Statistical inference*. Cengage Learning.

Hogg, RV, J McKean e AT Craig (2019). *Introduction to Mathematical Statistics*.