

### III HAMPIRAN DAN GALAT

#### Definisi

Hampiran, pendekatan atau aproksimasi (*approximation*) didefinisikan sebagai nilai yang mendekati solusi sejati (*exact solution*).

Galat atau kesalahan (*error*) sebenarnya ( $\varepsilon$ ) didefinisikan sebagai selisih solusi sejati ( $x_0$ ) dengan solusi hampiran ( $x$ ),

$$\varepsilon = x_0 - x \quad \dots (3.1)$$

Galat atau kesalahan (*error*) relatif sebenarnya ( $\varepsilon_r$ ) didefinisikan sebagai perbandingan antara kesalahan sebenarnya ( $\varepsilon$ ) dengan solusi sejati ( $x_0$ ),

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_0} \times 100\% \quad \dots (3.2)$$

#### Contoh 3.1

Misal hasil pengukuran panjang sebuah jembatan dan paku masing-masing adalah 9.999 dan 9 cm. Jika ukuran panjang sebenarnya adalah 10.000 dan 10 cm, tentukan:

a) Kesalahan sebenarnya

b) Kesalahan relatif untuk setiap kasus

Penyelesaian:

a) Kesalahan sebenarnya ( $\varepsilon$ ) pada pengukuran jembatan,

$$\varepsilon = (10.000 - 9.999)\text{cm} = 1 \text{ cm}$$

Kesalahan sebenarnya ( $\varepsilon$ ) pada pengukuran paku,

$$\varepsilon = (10 - 9)\text{cm} = 1 \text{ cm}$$

b) Kesalahan relatif sebenarnya ( $\varepsilon_r$ ) pada pengukuran jembatan adalah

$$\varepsilon_r = \frac{1}{10000} \times 100\% = 0,01\%$$

Kesalahan relatif sebenarnya ( $\varepsilon_r$ ) pada pengukuran paku adalah

$$\varepsilon_r = \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$$

Walaupun kedua pengukuran mempunyai kesalahan yang sama, yaitu 1 cm, tapi kesalahan relatif sebenarnya jauh lebih kecil pada pengukuran jembatan. Artinya pengukuran yang dilakukan pada jembatan jauh lebih baik dibandingkan pengukuran yang dilakukan pada paku.

Dalam dunia nyata, kita jarang mendapatkan informasi mengenai ukuran yang sebenarnya dari suatu benda. Cara untuk mengatasi hal ini adalah dengan cara membandingkan kesalahan sebenarnya ( $\varepsilon$ ) dengan solusi hampiran ( $x$ ) untuk mendapatkan nilai kesalahan relatif hampiran ( $\varepsilon_{rh}$ ), yaitu

$$\varepsilon_{rh} = \frac{\varepsilon}{x} \times 100\% \quad \dots (3.3)$$

Akan tetapi kita tetap masih menghadapi kendala, karena nilai kesalahan ( $\varepsilon$ ) sebenarnya membutuhkan informasi tentang solusi sejati ( $x_0$ ). Oleh karena itu kita hitung nilai kesalahan relatif hampiran dengan membandingkan antara selisih iterasi sekarang ( $x_{r+1}$ ) dengan iterasi sebelumnya ( $x_r$ ) terhadap nilai iterasi sekarang, yaitu

$$\varepsilon_{rh} = \frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}} \times 100\% \quad \dots (3.4)$$

Batas toleransi kesalahan ( $\varepsilon_s$ ) ditentukan oleh jumlah angka bena yang akan kita gunakan. Hubungan antara toleransi kesalahan ( $\varepsilon_s$ ) dan angka signifikan ( $n$ ) adalah,

$$\varepsilon_s = (0,5 \times 10^{2-n})\% \quad \dots (3.5)$$

Pada waktu melakukan komputasi, nilai kesalahan yang terjadi mungkin bernilai negatif. Akan tetapi biasanya kita **tidak** mempertimbangkan apakah hasilnya positif atau negatif, tapi lebih memperhatikan harga absolutnya, apakah masih lebih besar atau sudah lebih kecil dari batas toleransi kesalahan ( $\varepsilon_s$ ). Jika harga absolut kesalahan relatif hampiran ( $\varepsilon_{rh}$ ) lebih kecil dari batas toleransi kesalahan ( $\varepsilon_s$ ) atau

$$|\varepsilon_{rh}| < \varepsilon_s \quad \dots (3.6)$$

maka komputasi selesai.

### Jenis-jenis Galat

Faktor-faktor yang menyebabkan kesalahan pada metode numerik antara lain:

- a) Kesalahan karena bawaan data (*inherent error*)
- b) Kesalahan karena pembulatan (*round-off error*)
- c) Kesalahan karena pemotongan (*truncation error*)

#### Kesalahan karena bawaan data (*inherent error*)

Kesalahan bawaan data merupakan kesalahan dari nilai data. Misal kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur.

#### Kesalahan karena pembulatan (*round-off error*)

Kesalahan karena pembulatan (*round-off error*) terjadi karena kita tidak memperhitungkan beberapa angka terakhir dari suatu bilangan; artinya solusi hampiran digunakan untuk menggantikan solusi sejati (eksak).

#### Contoh 3.2

Tulis bilangan berikut menjadi tiga angka bena.

Penyelesaian

8632574 dapat dibulatkan menjadi 8630000

3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14

#### Kesalahan karena pemotongan (*truncation error*)

Kesalahan pemotongan terjadi karena adanya proses komputasi tak-berhingga diganti dengan proses berhingga. Misal pada deret Taylor atau McClaurin.

### Deret Taylor dan Deret McClaurin

Misal  $f$ , dan semua turunannya, yaitu  $f'$ ,  $f''$ , ...,  $f^{(n)}$  kontinu pd selang  $[a, b]$ . Jika  $x_0 \in [a, b]$ , maka untuk nilai-nilai  $x$  di sekitar  $x_0$  dan  $x \in [a, b]$ ,  $f(x)$  dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \dots \quad \dots (3.7)$$

Jika dimisalkan  $x - x_0 = h$ , maka

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + \dots \quad \dots (3.8)$$

Untuk alasan praktis, proses komputasi dilakukan sampai pada suku ke  $n$  saja. Artinya ada bagian atau beberapa suku sisanya yang dipotong dan tidak dimasukkan ke dalam proses komputasi. Suku-suku yang diabaikan tersebut dikenal sebagai Residu; dan merupakan galat karena pemotongan. Jika faktor residu dimasukkan ke dalam deret Taylor, maka persamaan (3.7) menjadi,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n(x) \quad \dots (3.9)$$

$R_n(x)$  adalah Residu, dan merupakan besar galat yang timbul akibat pemotongan.  $R_n(x)$  dihitung dengan

$$\text{rumus: } R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c) \quad \dots (3.10)$$

Karena nilai  $c$  yang tepat tidak diketahui, maka kita perlu menghitung nilai maksimum  $|R_n|$  untuk menghitung besarnya galat, yaitu

$$|R_n(x)| < \max_{x_0 \leq c \leq x} |f^{n+1}(c)| \times \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \dots (3.11)$$

### Contoh 3.3

Tentukan nilai hampiran dari  $\ln(0,60)$  sampai orde ke 4 di sekitar titik  $x_0 = 1$  dan berikan nilai galat hampiran maksimum!

Penyelesaian:

$$\begin{array}{llll} f(x) = \ln x & f(1) = 0 & ; & f'(x) = \frac{1}{x} & f'(1) = 1 & ; \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} & f''(1) = -1 & ; & f'''(x) = \frac{2}{x^3} & f'''(1) = 2 & ; \\ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} & f^{(4)}(1) = -6 & ; & f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5} & f^{(5)}(1) = \frac{24}{1^5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \ln(0,60) &= 0 + (0,60 - 1) - \frac{(0,60 - 1)^2}{2} + \frac{(0,60 - 1)^3}{3} - \frac{(0,60 - 1)^4}{4} + R_4(0,60) \\ &= -0,40 - 0,08 - 0,021333 - 0,0064 + R_4(0,60) \\ &= -0,507733 + R_4(0,60) \end{aligned}$$

Galat pemotongan maksimum

$$|R_4(0,60)| < \max_{0,60 \leq c \leq 1} \left| \frac{24}{0,60^5} \right| \times \frac{(0,60 - 1)^5}{5!} = 0,02634$$

### Contoh 3.4

Tentukan hampiran fungsi  $f(x) = \cos x$  sampai suku orde ke 6 di sekitar  $x_0 = 0$ .

Penyelesaian:

Karena  $x_0 = 0$ , maka

$$\begin{array}{llll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 & ; & f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 & ; \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 & ; & f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 & ; \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 & ; & f^{(5)}(x) = -\sin x & f^{(5)}(0) = 0 & ; \\ f^{(6)}(x) = -\cos x & f^{(6)}(0) = -1 & ; & f^{(7)}(x) = \sin x & f^{(7)}(0) = 0 & ; \\ f^{(8)}(x) = \cos x & f^{(8)}(0) = 1 & ; & f^{(9)}(x) = -\sin x & f^{(9)}(0) = 0 & ; \\ f^{(10)}(x) = -\cos x & f^{(10)}(0) = -1 & \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + 0 + \frac{x^8}{8!} + 0 - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \end{aligned}$$

Hampiran fungsi  $f(x) = \cos x$  sampai suku orde ke 6 di sekitar  $x_0 = 0$  adalah

$$\text{Nilai hampiran: } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\text{Galat pemotongan: } \cos x = \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

Hampiran  $\cos \frac{\pi}{4}$  sampai suku orde ke 6 di sekitar  $x_0 = 0$  adalah

$$\cos \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} = 1 - 0,35248 + 0,01585 - 0,00032 = 0,66305$$

Latihan

Tentukan hampiran fungsi  $f(x) = \sin x$  sampai suku orde ke 8 di sekitar  $x_0 = 0$ .

