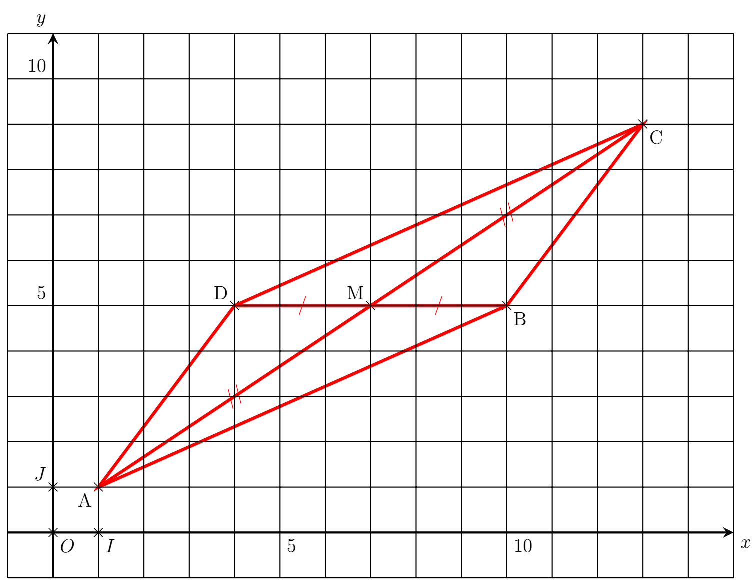
Exercice 1 On veut que $ABCD$ soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu. $[AC]$ et $[BD]$ doivent donc avoir le même milieu.
On peut déterminer le milieu M de $[BD]$: $M\left(7\ ;\ 5\right)$.
Il doit être le milieu de $[AC]$ également.
Soit $M\left(7\ ;\ 5\right)$ milieu de $[AC]$:

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{1+x_C}{2} \\ 14 &= 1+x_C \\ 13 &= x_C \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5 &= \frac{1+y_C}{2} \\ 10 &= 1+y_C \\ 9 &= y_C \end{aligned}$$

Donc le point C a pour coordonnées $\left(13\ ;\ 9\right)$.

$$\boxed{C\left(13\ ;\ 9\right)}$$

<u>Remarque :</u> Il n'était pas demandé de placer le point C ni de tracer le parallélogramme !



Exercice 2 On se place dans le repère *orthonormé* $(O,\ I,\ J)$. Dans ce repère, on considère les points $A\left(-3\ ;\ 0\right)$, $B\left(-2\ ;\ -3\right)$ et $C\left(10\ ;\ 3\right)$.
Vos réponses seront argumentées.

1. $CB = \sqrt{180}$ et $CA = \sqrt{178}$.
   $CB \neq CA$ donc le point A n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$ de centre C passant par B.
2. De même, $CB \neq CA$ donc le point C n'appartient pas à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 3

1. Dans le repère $(O,\ I,\ J)$ orthonormé, on calcule :
   $AB = \sqrt{(-33-42)^2 + (-67-(-42))^2}$
   $AB = \sqrt{(75)^2 + (-25)^2}$
   $AB = \sqrt{5625+625}$
   $AB = \sqrt{6250}$

   De même, on obtient :
   $AC = \sqrt{6250}$ et $BC = \sqrt{12500}$

   On a $AB = AC$ donc le triangle ABC est **isocèle**.

   De plus, $BC^2 = \left(\sqrt{12500}\right)^2 = 12500$ et
   $AB^2 + AC^2 = \left(\sqrt{6250}\right)^2 + \left(\sqrt{6250}\right)^2 = 12500$

   D'où, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en A.

   Conclusion : $\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est } \textbf{rectangle isocèle en } A.}$

2. Dans le repère $(O,\ I,\ J)$,

$$x_D = \frac{42+(-33)}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ et}$$
$$y_D = \frac{-42+(-67)}{2} = \frac{-109}{2} = -54{,}5$$

Donc $\boxed{D\left(\frac{9}{2}\ ;\ \frac{-109}{2}\right)}$

De même, on a :

$\boxed{E\left(-8\ ;\ -17\right)}$ et $\boxed{F\left(\frac{59}{2}\ ;\ -\frac{9}{2}\right)}$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que $ADEF$ est un parallélogramme :
Soit M milieu de $[AE]$, $M\left(17\ ;\ -\frac{59}{2}\right)$
Soit N milieu de $[DF]$, $N\left(17\ ;\ -\frac{59}{2}\right)$
M et N sont **confondus**.
Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme. M et N sont confondus donc le quadrilatère $ADEF$ est un parallélogramme.

$AE = \sqrt{3125}$ et $DF = \sqrt{3125}$
Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle. $AE = DF$ donc le parallélogramme $ADEF$ est un rectangle.

$AD = \sqrt{1562{,}5}$ et $DE = \sqrt{1562{,}5}$
Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré. $AD = DE$ donc le rectangle $ADEF$ est un carré.

$\boxed{\text{Donc le quadrilatère } ADEF \text{ est un carré.}}$

4. D'après la question précédente, on sait que $ADEF$ est un carré donc en particulier que $DE = EF$ et que $\widehat{DEF} = 90^\circ$.

$\boxed{\text{Donc le triangle } DEF \text{ est } \textbf{rectangle isocèle}.}$

5. Dans le *repère* $(A,\ B,\ C)$, $A\left(0\ ;\ 0\right)$; $B\left(1\ ;\ 0\right)$; $C\left(0\ ;\ 1\right)$; $D\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$; $E\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $F\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

6. Le repère $(A,\ B,\ C)$ est **orthonormé** ($AB = AC$ et $\widehat{BAC} = 90^\circ$ OU ABC rectangle isocèle en A) **donc ON PEUT** déterminer la longueur AB dans ce repère.

Fin