

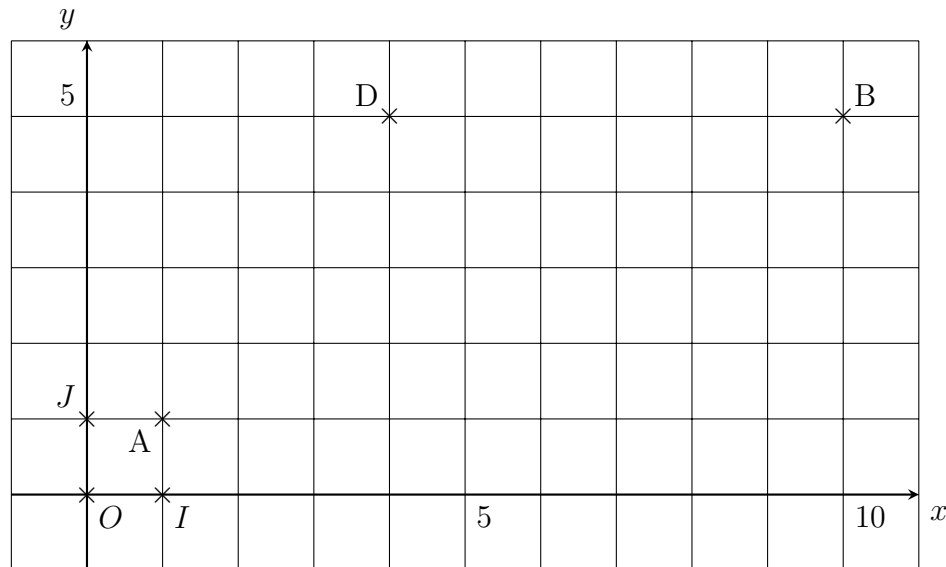
Exercice 1

4 points

Un élève a voulu tracer un parallélogramme $ABCD$ mais il ne sait pas où placer le sommet C .

Comment pouvez-vous l'aider ?

Vous détaillerez votre démarche sur votre copie avant de réaliser des calculs.



Exercice 2

6 points

On se place dans le repère *orthonormé* (O, I, J) . Dans ce repère, on considère les points $A(3 ; 0)$, $B(2 ; -3)$ et $C(-10 ; 3)$.

Vos réponses seront argumentées.

1. Le point A appartient-il au cercle \mathcal{C} de centre C passant par B ?
2. Le point C appartient-il à la médiatrice de $[AB]$?

Exercice 3

10 points

Le plan (\mathcal{P}) est muni d'un repère *orthonormé* (O, I, J) .

Dans ce repère, on considère les points suivants $A(19 ; 26)$, $B(-26 ; 41)$ et $C(4 ; -19)$. On désigne par D , E et F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. Calculer les coordonnées des points D , E et F dans le repère (O, I, J) .
3. Démontrer que le quadrilatère $ADEF$ est un carré.
4. En déduire la nature du triangle DEF .
5. Déterminer les coordonnées des points A , B , C , D , E et F dans le repère (A, B, C) .
6. Pourquoi peut-on calculer des distances dans le repère (A, B, C) ?

F ! ?
E i ?

Exercice 1 On veut que $ABCD$ soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu. $[AC]$ et $[BD]$ doivent donc avoir le même milieu.

On peut déterminer le milieu M de $[BD]$: $M(7 ; 5)$.

Il doit être le milieu de $[AC]$ également.

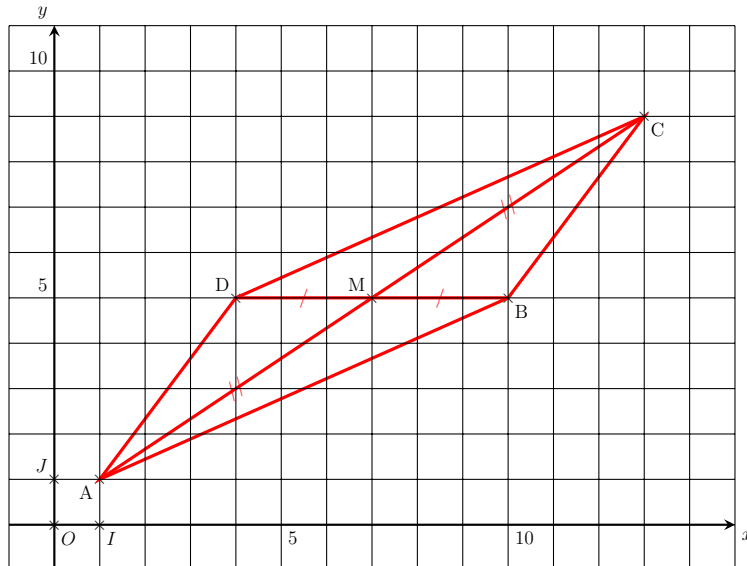
Soit $M(7 ; 5)$ milieu de $[AC]$:

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & \frac{1 + x_C}{2} \\ 14 & = & 1 + x_C \\ 13 & = & x_C \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5 & = & \frac{1 + y_C}{2} \\ 10 & = & 1 + y_C \\ 9 & = & y_C \end{array}$$

Donc le point C a pour coordonnées $(13 ; 9)$.

$C(13 ; 9)$

Remarque : Il n'était pas demandé de placer le point C ni de tracer le parallélogramme !



Exercice 2 On se place dans le repère *orthonormé* (O, I, J) . Dans ce repère, on considère les points $A(3 ; 0)$, $B(2 ; -3)$ et $C(-10 ; 3)$. Vos réponses seront argumentées.

1. $CB = \sqrt{180}$ et $CA = \sqrt{178}$.

$CB \neq CA$ donc le point A n'appartient pas au cercle \mathcal{C} de centre C passant par B .

2. De même, $CB \neq CA$ donc le point C n'appartient pas à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 3

1. Dans le repère (O, I, J) orthonormé, on calcule :

$$AB = \sqrt{(-26 - 19)^2 + (41 - 26)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-45)^2 + (15)^2}$$

$$AB = \sqrt{2025 + 225}$$

$$AB = \sqrt{2250}$$

De même, on obtient :

$$AC = \sqrt{2250} \text{ et } BC = \sqrt{4500}$$

On a $AB = AC$ donc le triangle ABC est **isocèle**.

De plus, $BC^2 = (\sqrt{4500})^2 = 4500$ et

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{2250})^2 + (\sqrt{2250})^2 = 4500$$

D'où, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en A .

Conclusion : $\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

2. Dans le repère (O, I, J) ,

$$x_D = \frac{19 + (-26)}{2} = \frac{-7}{2} = -3,5 \text{ et}$$

$$y_D = \frac{26 + 41}{2} = \frac{67}{2} = 33,5$$

Donc $D \left(-\frac{7}{2} ; \frac{67}{2} \right)$

De même, on a :

$E (-11 ; 11)$ et $F \left(\frac{23}{2} ; \frac{7}{2} \right)$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que $ADEF$ est un parallélogramme :

Soit M milieu de $[AE]$, $M \left(4 ; \frac{37}{2} \right)$

Soit N milieu de $[DF]$, $N \left(4 ; \frac{37}{2} \right)$

M et N sont **confondus**.

Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme. M et N sont confondus donc le quadrilatère $ADEF$ est un parallélogramme.

$$AE = \sqrt{1125} \text{ et } DF = \sqrt{1125}$$

Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle. $AE = DF$ donc le parallélogramme $ADEF$ est un rectangle.

$$AD = \sqrt{562,5} \text{ et } DE = \sqrt{562,5}$$

Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré. $AD = DE$ donc le rectangle $ADEF$ est un carré.

Donc le quadrilatère $ADEF$ est un carré.

4. D'après la question précédente, on sait que $ADEF$ est un carré donc en particulier que $DE = EF$ et que $\widehat{DEF} = 90^\circ$.

Donc le triangle DEF est **rectangle isocèle**.

5. Dans le repère (A, B, C) , $A(0 ; 0)$; $B(1 ; 0)$; $C(0 ; 1)$; $D\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$; $E\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $F\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$.

6. Le repère (A, B, C) est **orthonormé** ($AB = AC$ et $\widehat{BAC} = 90^\circ$ OU ABC rectangle isocèle en A) **donc** on peut déterminer la longueur AB dans ce repère.

F I N
E I N

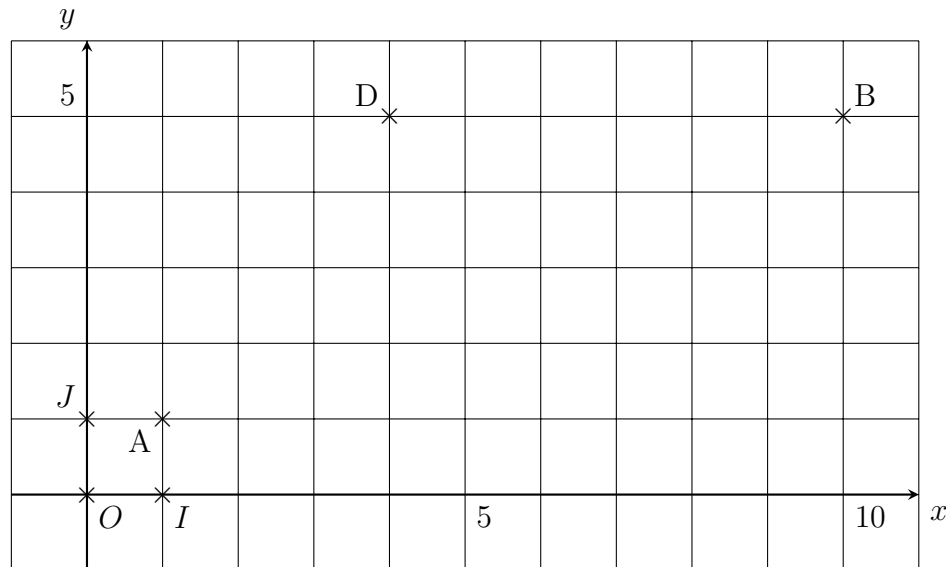
Exercice 1

4 points

Un élève a voulu tracer un parallélogramme $ABCD$ mais il ne sait pas où placer le sommet C .

Comment pouvez-vous l'aider ?

Vous détaillerez votre démarche sur votre copie avant de réaliser des calculs.



Exercice 2

6 points

On se place dans le repère *orthonormé* (O, I, J) . Dans ce repère, on considère les points $A(-3 ; 0)$, $B(-2 ; -3)$ et $C(10 ; 3)$.

Vos réponses seront argumentées.

1. Le point A appartient-il au cercle \mathcal{C} de centre C passant par B ?
2. Le point C appartient-il à la médiatrice de $[AB]$?

Exercice 3

10 points

Le plan (\mathcal{P}) est muni d'un repère *orthonormé* (O, I, J) .

Dans ce repère, on considère les points suivants $A(42 ; -42)$; $B(-33 ; -67)$ et $C(17 ; 33)$. On désigne par D , E et F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. Calculer les coordonnées des points D , E et F dans le repère (O, I, J) .
3. Démontrer que le quadrilatère $ADEF$ est un carré.
4. En déduire la nature du triangle DEF .
5. Déterminer les coordonnées des points A , B , C , D , E et F dans le repère (A, B, C) .
6. Pourquoi peut-on calculer des distances dans le repère (A, B, C) ?

F ! ?
E i ?

Exercice 4 On veut que $ABCD$ soit un parallélogramme. On sait que les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu. $[AC]$ et $[BD]$ doivent donc avoir le même milieu.

On peut déterminer le milieu M de $[BD]$: $M(7 ; 5)$.

Il doit être le milieu de $[AC]$ également.

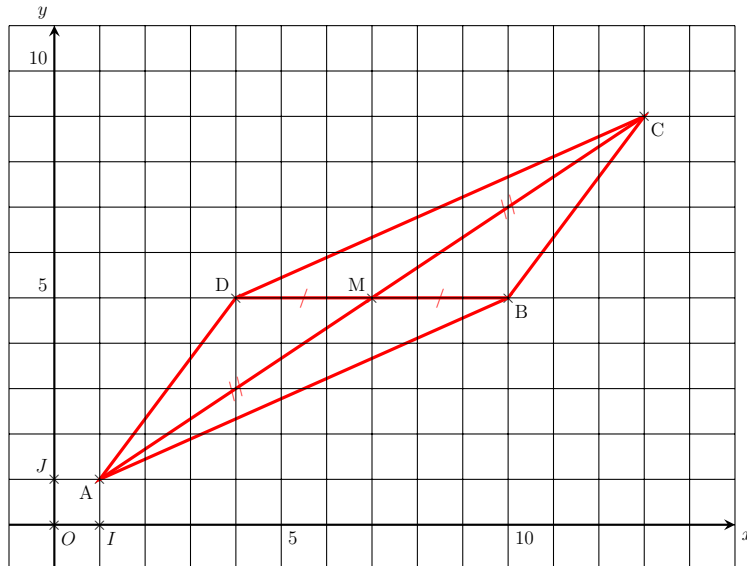
Soit $M(7 ; 5)$ milieu de $[AC]$:

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & \frac{1 + x_C}{2} \\ 14 & = & 1 + x_C \\ 13 & = & x_C \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 5 & = & \frac{1 + y_C}{2} \\ 10 & = & 1 + y_C \\ 9 & = & y_C \end{array}$$

Donc le point C a pour coordonnées $(13 ; 9)$.

$C(13 ; 9)$

Remarque : Il n'était pas demandé de placer le point C ni de tracer le parallélogramme !



Exercice 5 On se place dans le repère *orthonormé* (O, I, J) . Dans ce repère, on considère les points $A(-3 ; 0)$, $B(-2 ; -3)$ et $C(10 ; 3)$. Vos réponses seront argumentées.

1. $CB = \sqrt{180}$ et $CA = \sqrt{178}$.

$CB \neq CA$ donc le point A n'appartient pas au cercle \mathcal{C} de centre C passant par B .

2. De même, $CB \neq CA$ donc le point C n'appartient pas à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 6

1. Dans le repère (O, I, J) orthonormé, on calcule :

$$AB = \sqrt{(-33 - 42)^2 + (-67 - (-42))^2}$$

$$AB = \sqrt{(75)^2 + (-25)^2}$$

$$AB = \sqrt{5625 + 625}$$

$$AB = \sqrt{6250}$$

De même, on obtient :

$$AC = \sqrt{6250} \text{ et } BC = \sqrt{12500}$$

On a $AB = AC$ donc le triangle ABC est **isocèle**.

De plus, $BC^2 = (\sqrt{12500})^2 = 12500$ et

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{6250})^2 + (\sqrt{6250})^2 = 12500$$

$$\text{D'où, } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en A .

Conclusion : $\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle isocèle en } A.}$

2. Dans le repère (O, I, J) ,

$$x_D = \frac{42 + (-33)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ et}$$

$$y_D = \frac{-42 + (-67)}{2} = \frac{-109}{2} = -54,5$$

Donc $D\left(\frac{9}{2}; -\frac{109}{2}\right)$

De même, on a :

$E(-8; -17)$ et $F\left(\frac{59}{2}; -\frac{9}{2}\right)$

3. Un carré est un parallélogramme particulier, commençons par montrer que $ADEF$ est un parallélogramme :

Soit M milieu de $[AE]$, $M\left(17; -\frac{59}{2}\right)$

Soit N milieu de $[DF]$, $N\left(17; -\frac{59}{2}\right)$

M et N sont **confondus**.

Un quadrilatère dont les diagonales ont leurs milieux **confondus** est un parallélogramme. M et N sont confondus donc le quadrilatère $ADEF$ est un parallélogramme.

$AE = \sqrt{3125}$ et $DF = \sqrt{3125}$

Un parallélogramme dont les **diagonales ont même longueur** est un rectangle. $AE = DF$ donc le parallélogramme $ADEF$ est un rectangle.

$AD = \sqrt{1562,5}$ et $DE = \sqrt{1562,5}$

Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré. $AD = DE$ donc le rectangle $ADEF$ est un carré.

Donc le quadrilatère $ADEF$ est un carré.

4. D'après la question précédente, on sait que $ADEF$ est un carré donc en particulier que $DE = EF$ et que $\widehat{DEF} = 90^\circ$.

Donc le triangle DEF est **rectangle isocèle**.

5. Dans le repère (A, B, C) , $A(0; 0)$; $B(1; 0)$; $C(0; 1)$; $D\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

6. Le repère (A, B, C) est **orthonormé** ($AB = AC$ et $\widehat{BAC} = 90^\circ$ OU ABC rectangle isocèle en A) **donc** on peut déterminer la longueur AB dans ce repère.

F I N
E I N