Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: __________ Kennwort: __________ Arbeitsplatz-Nr.: __________	**Frühjahr 2023**	**66115**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Informatik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik, Algorithmen**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 13

Bitte wenden!

Teilaufgabe II: Theoretische Informatik

Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen) [26 PUNKTE]

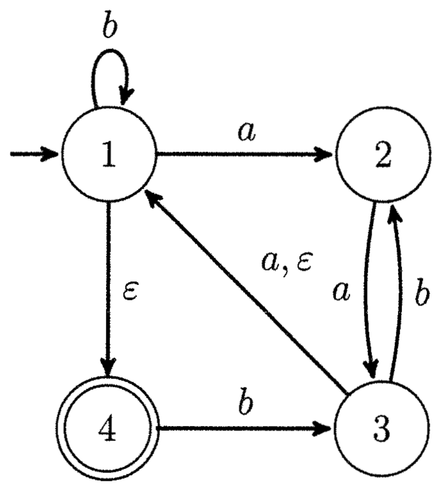
a) Geben Sie einen DEA für die Sprache

$$L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \text{ nach jedem } aa \text{ kommt direkt ein } b\}$$

an. So sind die Wörter a und $babab$ in der Sprache enthalten (da aa nicht vorkommt), sowie $baababaab$ (da direkt nach jedem Vorkommen von aa ein b kommt), aber nicht aa oder $baaab$.

b) Wieviele Äquivalenzklassen hat die Nerode-Relation bezüglich $\sim_{L_1}$? Geben Sie für jede Äquivalenzklasse drei Beispielwörter an.

c) Betrachten Sie den folgenden ε-NEA A:



Konstruieren Sie mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion den DEA A', der dieselbe Sprache wie A erkennt. Erklären Sie insbesondere, wie Sie mit ε-Kanten umgehen und benennen Sie Ihre Zustände sinnvoll.

Aufgabe 2 (Regularität und Kontextfreiheit) [36 PUNKTE]

a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_1 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1; n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{b^m c^n \mid n, m \geq 0; n, m \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis: Sie können $L_1 \cap \; aa^*b^*c^*$ betrachten.

b) Ist die Sprache

$$L_2 = \{(abc)^n ab(cab)^n c(abc)^n \mid n \geq 0; n \in \mathbb{N}\}$$

regulär? Beweisen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_3 = \{a^n b^m c d^m e^n \mid m, n \in \mathbb{N}, n + m \text{ ist gerade}\}$$

kontextfrei ist.

d) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_4 = \{w_1 c^n w_2 \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}, w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, \#_a(w_1) > n \text{ und } \#_b(w_2) < n\}$$

nicht kontextfrei ist. Hierbei entspricht $\#_a(w)$ der Anzahl der Buchstaben a im Wort w und $\#_b(w)$ der Anzahl der Buchstaben b im Wort w. Z. B. ist $\#_a(abbbaab) = 3$ und $\#_b(abbbaab) = 4$.

Aufgabe 3 (Entscheidbarkeit) [26 PUNKTE]

Seien L, L_1 und L_2 Sprachen über dem Alphabet Σ. Sei $\overline{L}$ das Komplement von L, das heißt $\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$. Sei P die Klasse der Entscheidungsprobleme, die deterministisch in Polynomialzeit lösbar sind.

a) Entscheiden Sie begründet, ob folgende Aussage korrekt ist: Falls L_1 regulär und L_2 kontextfrei ist, dann ist $L_1 - L_2$ in P.

b) Zeigen Sie: Ist die Sprache L semi-entscheidbar, dann sind die Sprachen $L \cap \overline{L}$ und $L \cup \overline{L}$ immer entscheidbar.

c) Zeigen Sie: Sind die Sprachen L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar, dann ist auch L entscheidbar.

d) Entscheiden Sie begründet, ob folgende Aussage korrekt ist: Falls L in NP liegt, dann ist L entscheidbar.

Aufgabe 4 (Komplexität) [32 PUNKTE]

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Ein *Pfad* in G ist eine Folge $p = v_1 \cdots v_k$ von Knoten, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ ist (falls G gerichtet ist) oder $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ (falls G ungerichtet ist) für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Wir sagen, dass p einen *Kreis* bildet, falls $v_1 = v_k$. Wir sagen, dass p *einfach* ist, falls $v_i \neq v_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ mit $(i, j) \neq (1, k)$.

a) Betrachten Sie die folgenden Probleme:

2VERTEXDISJOINTPATHS (2VDP)	
Gegeben:	Ein gerichteter Graph G und Knoten s_1, s_2, t_1, t_2 von G.
Frage:	Gibt es Pfade p_1 von s_1 nach t_1 und p_2 von s_2 nach t_2 in G, die Knoten-disjunkt sind, d.h., wenn p_1 einen Knoten benutzt, darf p_2 diesen nicht benutzen und umgekehrt?

SimpleCycle (SC)	
Gegeben:	Ein gerichteter Graph G und zwei Kanten e_1, e_2 von G.
Frage:	Gibt es einen gerichteten einfachen Kreis in G, der die Kanten e_1 und e_2 verwendet?

Zeigen Sie die NP-Vollständigkeit von SC. Nutzen Sie dafür, dass das Problem 2VDP NP-vollständig ist. Dies muss nicht gezeigt werden.

b) Betrachten Sie die folgenden Probleme:

Undirected2VertexDisjointPaths (U2VDP)	
Gegeben:	Ein **ungerichteter** Graph G und Knoten s_1, s_2, t_1, t_2 von G.
Frage:	Gibt es Pfade p_1 zwischen s_1 und t_1 und p_2 zwischen s_2 und t_2 in G, die Knoten-disjunkt sind, d.h., wenn p_1 einen Knoten benutzt, darf p_2 diesen nicht benutzen und umgekehrt?

UndirectedSimpleCycle (USC)	
Gegeben:	Ein **ungerichteter** Graph G und zwei Kanten e_1, e_2 von G.
Frage:	Gibt es einen ungerichteten einfachen Kreis in G, der die Kanten e_1 und e_2 verwendet?

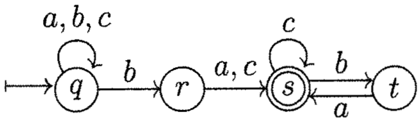
Es ist bekannt, dass das Problem U2VDP in P ist. Dies muss nicht gezeigt werden.

Sei A ein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit in der Größe der Eingabe für U2VDP. Zeigen Sie, dass USC in P ist, indem Sie einen (korrekten) Algorithmus für USC konstruieren und begründen, warum dieser eine polynomielle Laufzeit in der Größe der Eingabe hat. Sie müssen nicht formal beweisen, dass Ihr Algorithmus korrekt ist.

Teilaufgabe II: Theoretische Informatik

Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen) [32 PUNKTE]

a) Es sei $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ die von dem folgenden nichtdeterministischen Automaten akzeptierte Sprache:



Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache L an.

b) Geben Sie einen (vollständigen) deterministischen endlichen Automaten für das Komplement $\{a, b, c\}^* \setminus L$ an. Machen Sie hierbei Ihren Lösungsweg deutlich (z.B. den Rechenweg eines allgemeinen Verfahrens).

c) Minimieren Sie den deterministischen Automaten

$$A = (\{q, r, s, t, x, y, z\}, \{0, 1\}, \delta, s, \{q, z\})$$

mit der tabellarisch gegebenen Zustandsüberführungsfunktion

δ	q	r	s	t	x	y	z
0	x	q	y	q	r	z	x
1	r	x	q	y	z	x	y

Verwenden Sie ein allgemeines Verfahren und machen Sie Ihren Rechenweg deutlich!

Aufgabe 2 (Kontextfreie Sprachen) [24 PUNKTE]

a) Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgende kontextfreie Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$:

$$L = \{w1^n v \mid n \in \mathbb{N}, w, v \in \{0, 2\}^*, n = |w|_0 + |v|_2\}.$$

Erklären Sie den Zweck der einzelnen Nichtterminale (Variablen) und der Regeln (Produktionen) Ihrer Grammatik.

b) Geben Sie eine Ableitung des Wortes 20221112020 mit Ihrer Grammatik an.

c) Beweisen Sie, dass die folgende formale Sprache über $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ nicht kontextfrei ist:

$$L = \{w1^n v \mid n \in \mathbb{N}, v \in \{0, 2\}^*, n = |w|_0 \cdot |v|_2\}.$$

Aufgabe 3 (Entscheidbarkeit) [20 PUNKTE]

Gegeben ist das folgende Entscheidungsproblem:

Eingabe: eine Turingmaschine M mit Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die eine formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ akzeptiert.

Aufgabe: entscheiden, ob es für jedes $n \leq 42$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$ gibt, das M akzeptiert.

a) Beweisen Sie, dass das gegebene Problem semi-entscheidbar ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass das gegebene Problem entscheidbar ist.

Aufgabe 4 (NP-Vollständigkeit) [20 PUNKTE]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *fast unabhängige Menge* ist eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten, sodass höchstens eine Kante zwischen Knoten aus V' in G existiert.

Eingabe: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.

Aufgabe: entscheiden, ob G eine fast unabhängige Menge mit mindestens k Knoten hat.

a) Zeigen Sie, dass das Problem in NP liegt.

b) Zeigen Sie, dass das Problem NP-vollständig ist.

Hinweise:

- Sie dürfen verwenden, dass das Problem *unabhängige Menge* NP-schwer ist.
- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *unabhängige Menge* ist eine Menge $V' \subseteq V$ von Knoten, sodass keine Kante zwischen Knoten aus V' in G existiert.

Aufgabe 5 (Aussagen) [24 PUNKTE]

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (die Beweise sind jeweils kurz).

Notieren Sie zunächst zu jeder Aussage, ob sie richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre jeweilige Entscheidung!

a) Es gibt ein Alphabet Σ über dem alle formalen Sprachen unentscheidbar sind.

b) Für formale Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$ gilt: falls L^* regulär ist, dann ist auch L regulär.

c) Wenn L unentscheidbar ist, liegt sein Komplement nicht in der Klasse NP.

d) Es sei L eine formale Sprache, die von einer Turingmaschine M in konstanter Zeit entschieden wird (d.h. es existiert eine natürliche Zahl k, so dass M bei jedem Eingabewort in höchstens k Schritten hält und das Eingabewort akzeptiert oder ablehnt). Dann ist L regulär.