1 矩阵

用处清晰表示一次方程组.

1.1 乘法

$m \times n$矩阵与$n \times p$矩阵相乘:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + \cdots + a_{1n} \times b_{n1} & \cdots & a_{11} \times b_{1p} + \cdots + a_{1n} \times b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \times b_{11} + \cdots + a_{mn} \times b_{n1} & \cdots & a_{m1} \times b_{1p} + \cdots + a_{mn} \times b_{np} \end{bmatrix} \tag{3}$$

- 矩阵乘法拆解为矩阵向量乘法
- 只有当左边的矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才可以进行乘法运算
- 矩阵相乘不遵循乘法交换律

1.2 次方

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^n \tag{4}$$

1.3 转置矩阵

$$\text{转置矩阵是指}m\times n\text{矩阵}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\text{的行和列交换后得到的}n\times m\text{矩阵}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

$$m \times n\text{矩阵}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\text{的转置矩阵可以表示为}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

1.4 对角矩阵

对角矩阵就是除对角元素外的元素均为0的n阶方阵．如下对角矩阵可表示为$diag(1,2,3,4)$，diag是对角线diagonal的缩写．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

1.5 单位矩阵

单位矩阵就是对角元素均为1，其余元素均为0的n阶方阵，也就是$diag(1,\cdots,1)$．

单位矩阵与其他矩阵或向量相乘，不会产生任何变化．

2 逆矩阵

与n阶方阵A相乘的积等于单位矩阵的n阶方阵B，就是A的逆矩阵，表示为A^{-1}．即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

由于矩阵A存在对应的逆矩阵B，因此矩阵A被称为**可逆矩阵**．(并不是所有矩阵均为可逆矩阵)

"原来的矩阵"与"逆矩阵"相乘，遵循乘法交换律．

2.1 逆矩阵的求解方式－高斯消元法

事例

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

求逆矩阵． 解：

$$\text{分解为} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\text{转换为augmented matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\text{合并} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\text{高斯消元法后}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\text{逆矩阵为}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.2 2阶矩阵的逆矩阵求解方式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{15}$$

2.3 行列式

用于确定n阶矩阵是否为可逆矩阵.

$$\text{矩阵}\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\text{的行列式表示为}det\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\text{或}\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \tag{16}$$

det是determinant（决定因子）的缩写.

存在可逆矩阵的条件

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\text{存在.} \tag{17}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$= x_{11}x_{22}\cdots x_{nn} + x_{12}x_{23}\cdots x_{n1} + \cdots + x_{1n}x_{21}\cdots x_{n(n-1)}$$

$$-x_{1n}x_{2(n-1)}\cdots x_{n1} - x_{1(n-1)}x_{2(n-2)}\cdots x_{nn} \cdots - x_{11}x_{2n}\cdots x_{n2}$$