1 特征值和特征向量

1.1 定义

$$\text{当向量}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\text{通过”}n\text{阶方阵}\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\text{对应的线性映射}f\text{”形成的像为}\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\text{时,} \tag{1}$$

那么λ称为n阶方阵的**特征值**，向量$[x_1 \cdots x_n]^T$称为λ的特征向量．而零向量不能作为特征向量．

注意：特征值是指某映射的特征值，特征向量是指某映射下某特征值的特征向量．

1.2 求特征值和特征向量

特征值求法 特征值与映射对应的行列式有如下的关系：

$$\lambda\text{为}n\text{阶方阵}\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\text{的特征值} \Leftrightarrow det\begin{bmatrix} x_{11}-\lambda & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

特征向量求法 得到特征值后只需带入映射公式即可得特征向量．示例：

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

2 n阶方阵p次幂的求法

由于n阶方阵特征值和特征向量关系如下：

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

然后将n阶方阵所有特征值和特征向量合并为如下公式:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

然后通过两边乘以逆矩阵得到

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \tag{11}$$

那么n阶方阵的p次幂则是

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \tag{12}$$

3 是否存在重解和对角化?

并不是所有n阶方阵都可以以它的特征值矩阵和特征向量矩阵表示，这取决于特征值对应的特征向量是否足够.
足够的情况:

$$n\text{阶方阵} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{的特征值分别是3和1}, \tag{13}$$

$$\text{然后分别求出它们对应的特征向量} c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{和} c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\text{最后得出} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \tag{15}$$

若1对应的特征向量无法表示为$c_2[1\ 0\ 1]^T + c_3[0\ 1\ 0]^T$的形式则无法得到最后一条式子.