1 向量的意思

向量也是一种矩阵.分别有四种意思:

- 平面坐标中的点
- 从坐标原点$(0,0)$出发到某个对应点的箭头
- 多个箭头之和
- 不以坐标原点出发到某个对应点的箭头

向量表示点，线，面

$$\text{y轴上的点表示为:}\quad c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mid \forall c\in R \tag{1}$$

$$\text{y轴表示为:}\quad \left\{c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle|\ \forall c\in R\right\} \tag{2}$$

$$\text{xy平面表示为:}\quad \left\{c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\middle|\ \forall c_1,c_2\in R\right\}\text{或}\ \left\{c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\middle|\ \forall c_1,c_2\in R\right\} \tag{3}$$

2 向量的乘法

$$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\y_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}y_{11}+x_{12}y_{21}\end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11} & y_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}y_{11} & x_{11}y_{12}\\x_{21}y_{11} & x_{21}y_{12}\end{bmatrix} \tag{5}$$

和矩阵乘法一样不遵循乘法交换率.

3 线性相关，线性无关

对于下面方程式组

$$\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+\cdots+c_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix} \tag{6}$$

若$[c_1\cdots c_n]^T$有且仅有一个解时，则称向量$[a_{11}\cdots a_{1n}]^T$到向量$[a_{11}\cdots a_{1n}]^T$为线性无关（线性独立）；否则称为线性相关.

4 线性子空间

若集合R^n的子集W符合以下两个条件，那么称集合W是集合R^n的**线性子空间**，简称**子空间**.

1. $[a_1 \cdots a_n]^T \in W \Rightarrow c[a_1 \cdots a_n]^T \in W \mid \forall c \in R$
2. $[a_1 \cdots a_n]^T, [b_1 \cdots b_n]^T \in W \Rightarrow [a_1 + b_1 \cdots a_n + b_n]^T \in W$

具体就是**通过原点的线**和**通过原点的面**等，总之就是**通过原点**.

由向量空间生成的子空间

$$C = \{c_1[a_{11} \cdots a_{m1}]^T + \cdots + c_n[a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \mid \forall c_1, \cdots, c_n \in R,\ [a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \in R^m\} \tag{7}$$

集合C就是由向量$[a_{11} \cdots a_{m1}]^T$到$a_{1n} \cdots a_{mn}]^T$生成的子空间.

4.1 基，维度

假设集合W为R^m的子空间，若满足以下三个条件:

1. $[a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \in R^m$
2. $[a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T$为线性无关向量
3. $W = \{c_1[a_{11} \cdots a_{m1}]^T + \cdots + c_n[a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \mid \forall c_1, \cdots, c_n \in R\}$

那么我们称集合$\{[a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T\}$为＂子空间$W$的基＂，而基的元素个数$n$称为＂子空间$W$的维度＂，表示为$dimW$.

4.1.1 事例

定义xy平面为W，而W为R^3的子空间．向量$[3\ 1\ 0]^T$和$[1\ 2\ 0]^T$属于R^3，且为线性无关向量.
显然$W = \{c_1[3\ 1\ 0]^T + c_2[1\ 2\ 0]^T \mid \forall c_1, \cdots, c_2 \in R\}$，因此集合$\{[3\ 1\ 0]^T, [1\ 2\ 0]^T\}$为＂子空间$W$的基＂，$dimW$为2.