

1 线性映射

假设 $\forall [x_{1i} \cdots x_{ni}]^T, [x_{1j} \cdots x_{nj}]^T \in R^n$ ，当满足下面两个条件时，我们称 f 为从 R^n 到 R^m 的映射或线性变换或一次变换。

- $f\{[x_{1i} \cdots x_{ni}]^T\} + f\{[x_{1j} \cdots x_{nj}]^T\} = f\{[x_{1i} + x_{1j} \cdots x_{ni} + x_{nj}]^T\}$
- $cf\{[x_{1i} \cdots x_{ni}]^T\} = f\{c[x_{1i} \cdots x_{ni}]^T\}$

而从 R^n 到 R^m 的映射 f ，实质上就是 $M_{m \times n}$ 的矩阵。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.1 用途

缩放 假设 $[x_1 \ y_1]^T \in R^2$ ，现在沿 X 轴缩放 α 倍，沿 Y 轴缩放 β 倍，得到 $[x_2 \ y_2]^T \in R^2$ 。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

旋转 前提知识

- X 轴逆时针转 θ 度

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- Y 轴逆时针转 θ 度

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

那么对于 $\forall [x \ y]^T \in R^2$ 作旋转可采用以下公式

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

平移 假设 $[x_1 \ y_1]^T \in R^2$ ，现在沿 X 轴平移 α ，沿 Y 轴平移 β ，得到 $[x_2 \ y_2]^T \in R^2$ 。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + x_1 \\ \beta + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

上述等式并不是线性映射，于是通过升维来转换为线性映射的形式。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于缩放，旋转，我们也可以通过升维的方式来统一它们的公式。

透视投影 就是沿着通过一个点的直线，把3维空间的点投射为2维空间的点。其线性映射 f 固定为

$$\frac{1}{x_3 - s_3} \begin{bmatrix} -s_3 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_3 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

2 核

将映射到零向量的所有元素所属的集合称为**映射 f 的核**。

$$Ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} \subset R^n \quad (9)$$

3 像空间

将映射的值域称为**映射 f 的像空间**。

$$Im f = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} \subset R^m \quad (10)$$

4 维数公式

$Ker f$ 是 R^n 的子空间，而 $Im f$ 是 R^m 的子空间，它们的维度存在如下关系，称作**维度公式**

$$n - \dim Ker f = \dim Im f$$

4.1 示例

例 1

$$\text{假设映射 } f \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 是从 } R^2 \text{ 到 } R^2 \text{ 的线性映射} \quad (11)$$

那么求 $\dim Ker f$ 和 $\dim Im f$

$$Ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (12)$$

由于 $Ker f$ 无法表示为 $\{c_1[a_{11} \cdots a_{m1}]^T + \cdots + c_n[a_{n1} \cdots a_{mn}]^T\}$ ，因此 $\dim Ker f = 0$ 。并且 $n = 2$ ，所以根据维数公式得到 $\dim Im f = 2$ 。

例 2

假设映射 $f \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是从 R^2 到 R^2 的线性映射 (13)

那么求 $\dim \text{Ker } f$ 和 $\dim \text{Im } f$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \forall c \in R \right\} \quad (14)$$

因此 $\dim \text{Ker } f = 1$, 并且 $n = 2$, 根据维数公式得到 $\dim \text{Im } f = 1$.

关于含 free variable 的 augmented matrix 求解, 要再仔细研究? !

5 秩

秩又称为阶数, R^m 的子空间 $\text{Im } f$ 的维数称为 $m \times n$ 矩阵的秩.

$m \times n$ 矩阵就是子空间的基中所有向量元素所组成的矩阵.

$$m \times n \text{ 矩阵 } \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 的秩一般表示为 } \text{rank} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (15)$$

5.1 秩的求法

和 gaussian elimination 中三类 elementary row operations 类似.

前提: 矩阵乘以可逆矩阵不会影响矩阵的秩.

原等式

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \quad (16)$$

行间/列间对调 左乘可逆矩阵: 第 i 行和第 j 行就会互换位置; 右乘可逆矩阵: 第 i 列和第 j 列就会互换位置.

$$\begin{bmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{33} & x_{32} & x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

行/列缩放 左乘可逆矩阵: 第 i 行缩放 k 倍; 右乘可逆矩阵: 第 i 列缩放 k 倍.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ kx_{21} & kx_{22} & kx_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & kx_{12} & x_{13} \\ x_{21} & kx_{22} & x_{23} \\ x_{31} & kx_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

行/列缩放相加 左乘可逆矩阵：第 j 行会加上第 i 行的 k 倍；右乘可逆矩阵：第 i 列加上第 j 列的 k 倍。

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ kx_{21} + x_{31} & kx_{22} + x_{32} & kx_{23} + x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} + kx_{13} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} + kx_{23} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} + kx_{33} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

6 小结

由于直接求子空间的维度并不容易，而我们手头上一般拥有的是映射 f 对应的 $m \times n$ 矩阵，因此可通过两种方式间接解决

1. 先求映射 f 核 $Ker f$ 的维度，再通过维数公式求映射 f 像空间 $Im f$ (即子空间)的维度。
2. 求映射 f 像空间 $Im f$ 的对应的秩