1 线性映射

假设$\forall [x_{1i} \cdots x_{ni}]^T, [x_{1j} \cdots x_{nj}]^T \in R^n$，当满足下面两个条件时，我们称$f$为**从$R^n$到$R^m$的映射**或**线性变换**或**一次变换**.

- $f\{[x_{1i} \cdots x_{ni}]^T\} + f\{[x_{1j} \cdots x_{nj}]^T\} = f\{[x_{1i} + x1j \cdots x_{ni} + x_{nj}]^T\}$
- $cf\{[x_{1i} \cdots x_{ni}]^T\} = f\{c[x_{1i} \cdots x_{ni}]^T\}$

而从R^n到R^m的映射f，实质上就是$M_{m\times n}$的矩阵.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

1.1 用途

缩放 假设$[x_1\ y_1]^T \in R^2$，现在沿X轴缩放α倍，沿Y轴缩放β倍，得到$[x_2\ y_2]^T \in R^2$.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

旋转 前提知识

- X轴逆时针转θ度

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

- Y轴逆时针转θ度

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -sin\theta \\ 0 & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

那么对于$\forall\ [x\ y]^T \in R^2$作旋转可采用以下公式

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

平移 假设$[x_1\ y_1]^T \in R^2$，现在沿X轴平移α，沿Y轴平移β，得到$[x_2\ y_2]^T \in R^2$.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + x_1 \\ \beta + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{6}$$

上述等式并不是线性映射，于是通过**升维**来转换为线性映射的形式.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

对于缩放，旋转，我们也可以通过升维的方式来统一它们的公式.

透视投影　**就**是沿着通过一个点的直线，把3维空间的点投射为2维空间的点．其线性映射f固定为

$$\frac{1}{x_3 - s_3}\begin{bmatrix} -s_3 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_3 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2　核

将映射到零向量的所有元素所属的集合称为**映射f的核**．

$$Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} \subset R^n \tag{9}$$

3　像空间

将映射的值域称为**映射f的像空间**．

$$Imf = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} \subset R^m \tag{10}$$

4　维数公式

$Kerf$是R^n的子空间，而Imf是R^m的子空间，它们的维度存在如下关系，称作**维度公式**

$$n - dim\ Kerf = dim\ Imf$$

4.1　示例

例 1

$$\text{假设映射} f \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{是从} R^2 \text{到} R^2 \text{的线性映射} \tag{11}$$

那么求$dim\ Kerf$和$dim\ Imf$

$$Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{12}$$

由于$Kerf$无法表示为$\{c_1[a_{11}\ \cdots\ a_{m1}]^T + \cdots + c_n[a_{n1}\ \cdots\ a_{mn}]^T\}$，因此$dim\ Kerf = 0$．
并且$n = 2$，所以根据维数公式得到$dim\ Imf = 2$．

例 2

$$\text{假设映射}f\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}\text{是从}R^2\text{到}R^2\text{的线性映射} \tag{13}$$

那么求$dim\ Kerf$和$dim\ Imf$

$$Kerf=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{c\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\middle|\forall c\in R\right\} \tag{14}$$

因此$dim\ Kerf=1$，并且$n=2$，根据维数公式得到$dim\ Imf=1$.

关于含free variable的augmented matrix求解，要再仔细研究？！

5 秩

秩又称为**阶数**，R^m的子空间Imf的维数称为$m\times n$**矩阵的秩**.
$m\times n$矩阵就是子空间的基中所有向量元素所组成的矩阵.

$$m\times n\text{矩阵}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\text{的秩一般表示为}rank\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \tag{15}$$

5.1 秩的求法

和gaussian elimination中三类elementary row opertions类似.
前提：矩阵乘以可逆矩阵不会影响矩阵的秩.
原等式

$$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix} \tag{16}$$

行间/列间对调 左乘可逆矩阵：第i行和第j行就会互换位置；右乘可逆矩阵：第i列和第j列就会互换位置.

$$\begin{bmatrix}x_{31} & x_{32} & x_{33}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{11} & x_{12} & x_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}x_{13} & x_{12} & x_{11}\\x_{23} & x_{22} & x_{21}\\x_{33} & x_{32} & x_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{18}$$

行/列缩放 左乘可逆矩阵：第i行缩放k倍；右乘可逆矩阵：第i列缩放k倍.

$$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\kx_{21} & kx_{22} & kx_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$
\begin{bmatrix} x_{11} & kx_{12} & x_{13} \\ x_{21} & kx_{22} & x_{23} \\ x_{31} & kx_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}
$$

行/列缩放相加 左乘可逆矩阵：第j行会加上第i行的k倍；右乘可逆矩阵：第i列加上第j列的k倍.

$$
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ kx_{21}+x_{31} & kx_{22}+x_{32} & kx_{23}+x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \tag{21}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}+kx_{13} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22}+kx_{23} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32}+kx_{33} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \tag{22}
$$

5.2 示例

$$
\text{求} rank \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -8 \\ 2 & -1 & 13 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \tag{23}
$$

$$
= rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}
$$

(24)矩阵只有2行非零行，因此原矩阵(23)的秩为2.

6 小结

由于直接求子空间的维度并不容易，而我们手头上一般拥有的是映射f对应的$m \times n$矩阵，因此可通过两种方式间接解决

1. 先求映射f核$Kerf$的维度，再通过维数公式求映射f像空间Imf(即子空间)的维度.
2. 求映射f像空间Imf的对应的秩