1 向量的意思

向量也是一种矩阵.分别有四种意思:

- 平面坐标中的点
- 从坐标原点$(0, 0)$出发到某个对应点的箭头
- 多个箭头之和
- 不以坐标原点出发到某个对应点的箭头

向量表示点，线，面

$$\text{y轴上的点表示为:}\quad c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mid \forall c \in R \tag{1}$$

$$\text{y轴表示为:}\quad \left\{ c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \middle| \ \forall c \in R \right\} \tag{2}$$

$$\text{xy平面表示为:}\quad \left\{ c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \middle| \ \forall c_1, c_2 \in R \right\} \text{或} \left\{ c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \middle| \ \forall c_1, c_2 \in R \right\} \tag{3}$$

2 向量的乘法

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} & x_{11}y_{12} \\ x_{21}y_{11} & x_{21}y_{12} \end{bmatrix} \tag{5}$$

和矩阵乘法一样不遵循乘法交换率.

3 线性相关，线性无关

对于下面方程式组

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

若$[c_1 \cdots c_n]^T$有且仅有一个解时，则称向量$[a_{11} \cdots a_{1n}]^T$到向量$[a_{11} \cdots a_{1n}]^T$为线性无关（线性独立）；否则称为线性相关.

4 线性子空间

若集合R^n的子集W符合以下两个条件，那么称集合W是集合R^n的**线性子空间**，简称**子空间**.

1. $[a_1 \cdots a_n]^T \in W \Rightarrow c[a_1 \cdots a_n]^T \in W \mid \forall c \in R$
2. $[a_1 \cdots a_n]^T, [b_1 \cdots b_n]^T \in W \Rightarrow [a_1 + b_1 \cdots a_n + b_n]^T \in W$

具体就是**通过原点的线**和**通过原点的面**等，总之就是**通过原点**.

由向量空间生成的子空间

$$C = \{c_1[a_{11} \cdots a_{m1}]^T + \cdots + c_n[a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \mid \forall c_1, \cdots, c_n \in R,\ [a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \in R^m\} \tag{7}$$

集合C就是由向量$[a_{11} \cdots a_{m1}]^T$到$a_{1n} \cdots a_{mn}]^T$生成的子空间.

4.1 基，维度

假设集合W为R^m的子空间，若满足以下三个条件:

1. $[a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \in R^m$
2. $[a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T$为线性无关向量
3. $W = \{c_1[a_{11} \cdots a_{m1}]^T + \cdots + c_n[a_{1n} \cdots a_{mn}]^T \mid \forall c_1, \cdots, c_n \in R\}$

那么我们称集合$\{[a_{11} \cdots a_{m1}]^T, \cdots, [a_{1n} \cdots a_{mn}]^T\}$为"子空间$W$的基"，而基的元素个数$n$称为"子空间$W$的维度"，表示为$dimW$.
注意：子空间是一个向量的集合，而对应的基也是一个向量的集合，而维度则是基这个向量集合的元素个数．上述仅对基和维度的概念作描述，而维度的计算方式则要通过线性映射中的核空间维度或线性映射的秩来获取.

4.1.1 事例

定义xy平面为W，而W为R^3的子空间．向量$[3\ 1\ 0]^T$和$[1\ 2\ 0]^T$属于R^3，且为线性无关向量.
显然$W = \{c_1[3\ 1\ 0]^T + c_2[1\ 2\ 0]^T \mid \forall c_1, \cdots, c_2 \in R\}$，因此集合$\{[3\ 1\ 0]^T, [1\ 2\ 0]^T\}$为"子空间$W$的基"，$dimW$为2.

5 向量长度

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \tag{8}$$

6 向量内积

内积（也称为数量积，点积，scalar product），接受R上的两个向量并返回一个标量的二元运算.

$$\begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = x_{1i}x_{1j} + \cdots + x_{ni}x_{nj} \tag{9}$$

7 向量间的夹角

$$\cos\theta = \frac{\begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}}{\left\| \begin{matrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{matrix} \right\|} \tag{10}$$