

# Capítulo 8

## Matemática Elementar

### Funções Polinomiais

27 de outubro de 2019

Igor Oliveira

`igoroliveira@imd.ufrn.br`

Instituto Metrópole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

# Índice



Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Apresentação da Aula



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

## 2 Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

É algo comum escutar a seguinte frase: "Em matemática eu resolvo tudo com regra de três".

Será mesmo que isso é possível? Por exemplo, o lado do quadrado e sua área são proporcionais?

## Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação  $f(x) = ax$ .

## Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação  $f(x) = ax$ .

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de  $a$  é igual a  $f(1)$ .

## Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação  $f(x) = ax$ .

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de  $a$  é igual a  $f(1)$ .

No caso das grandezas inversamente proporcionais, a função matemática que modela tal problema é uma função  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  tal que  $f(x) = \frac{a}{x}$ . Nesse caso, também temos a particularidade de  $f(1) = a \in \mathbb{R}^*$ .

## Teorema 2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

*Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  *$f$  é linear;*
- (ii)  *$f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ ;*
- (iii)  *$f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

Nas hipóteses do Teorema, tem-se  $a = f(1) > 0$ . No caso de se supor  $f$  decrescente, vale um resultado análogo, com  $a < 0$ .

# Função Linear



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

5 Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

A importância desse Teorema está no seguinte fato: se queremos saber se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função linear, basta verificar duas coisas:

- 1<sup>a</sup>:  $f$  deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de  $f$  ser identicamente nula);
- 2<sup>a</sup>:  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{Z}$ . No caso de  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , basta verificar essa última condição para  $n \in \mathbb{N}$ .



# Função Linear



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

6 Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 3

O lado de um quadrado é proporcional à sua área? Em outras palavras, essas duas grandezas podem ser relacionadas por meio de uma função linear?

## Definição 4

Uma função real chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em uma função afim na qual  $f(x) = ax + b$ , chamamos o valor  $a$  de taxa de variação da função ou de taxa de crescimento. Vale observar que é muito comum chamá-lo de coeficiente angular. Esse termo não é apropriado pois define-se coeficiente angular para retas, e não para funções, mesmo que vejamos que o gráfico de uma função afim seja uma reta.

## Exemplo 5

A função identidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é afim, assim como suas translações  $g(x) = x + b$ . São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares  $f(x) = ax$  e as funções constantes  $f(x) = b$ .

## Exemplo 5

A função identidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é afim, assim como suas translações  $g(x) = x + b$ . São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares  $f(x) = ax$  e as funções constantes  $f(x) = b$ .

## Exemplo 6

O preço a se pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim  $f : x \mapsto ax + b$ , em que  $x$  é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial  $b$  é a chamada *bandeirada* e o coeficiente  $a$  é o preço de cada quilômetro rodado.

# Gráfico da Função Afim



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

9 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 7

O gráfico de uma função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta.

# Gráfico da Função Afim



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

9 Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 7

O gráfico de uma função afim  $f(x) = ax + b$  é uma reta.

Note que, para desenhar o gráfico de uma função afim, basta conhecer dois pontos, pois uma reta é inteiramente determinada por dois pontos.

## Proposição 8

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  é uma função afim e  $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$  é uma PA, então a sequência formada pelos pontos  $y_i = f(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$  é uma PA. Reciprocamente, se  $f$  for monótona e transformar qualquer PA  $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$  numa PA com termo geral  $y_i = f(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , então  $f$  é uma função afim.

OBSERVAÇÃO: No Khan Academy é definido função linear como função afim. Ou seja, para eles é qualquer função que o gráfico é uma reta (ou pontos colineares).

Atividade 01 – Problemas de Modelos de Funções Lineares

Atividade 02 – Problemas de Como Escrever Funções

Atividade 03 – Funções Lineares e Não Lineares  
Veja o desempenho na Missão 9º ano.

IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

11 Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



## Definição 9

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Proposição 10

Seja  $f$  uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde  $a > 0$ .

Mostre que  $f$  não é limitada superiormente e que o ponto  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  é o mínimo absoluto da função.

Caso tenhamos  $a < 0$ , então  $f$  não é limitada inferiormente e o ponto  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  é o máximo absoluto da função.

## Proposição 10

Seja  $f$  uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde  $a > 0$ .

Mostre que  $f$  não é limitada superiormente e que o ponto  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  é o mínimo absoluto da função.

Caso tenhamos  $a < 0$ , então  $f$  não é limitada inferiormente e o ponto  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  é o máximo absoluto da função.

## Proposição 11

Seja  $f$  uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Se  $f(x_1) = f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$ , então  $x_1$  e  $x_2$  são equidistantes de  $-\frac{b}{2a}$ , ou seja,  $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ .

# O Gráfico da Função Quadrática



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

14 Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 12

O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  é uma parábola cujo foco é  $F = (0, \frac{1}{4a})$  e cuja diretriz é a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4a}$ . Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

# O Gráfico da Função Quadrática



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

14 Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 12

O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  é uma parábola cujo foco é  $F = (0, \frac{1}{4a})$  e cuja diretriz é a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4a}$ . Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

## Proposição 13

O gráfico de uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola, tem a reta  $x = -\frac{b}{2a}$  como eixo de simetria e o ponto  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  é o vértice da parábola.

Atividade 04 - Problemas com Expressões do  
Segundo Grau (Forma Padrão)

Atividade 05 - Faça o Gráfico de Parábolas em  
Todas as Formas

Atividade 06 - Deslocamento de Parábolas

Atividade 07 - Dimensionar e Refletir  
Parábolas

Veja o desempenho na Missão Álgebra I.

## Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

onde  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  é uma lista ordenada de números reais e  $X$  é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo  $X^i$  uma abreviatura para  $X \cdot X \dots X$  ( $i$  fatores). Ao maior número  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  damos o nome de grau do polinômio  $p(X)$ .

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

16 Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  é uma lista ordenada de números reais e  $X$  é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo  $X^i$  uma abreviatura para  $X \cdot X \dots X$  ( $i$  fatores). Ao maior número  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  damos o nome de grau do polinômio  $p(X)$ .

Dizemos que dois polinômios

$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$  e  
 $q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$  são iguais quando  
 $n = m$  e  $a_i = b_i$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .



## Atividade 08 – Verificação de Identidades Polinomiais

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

17 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 15

Diz-se que  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial quando existem números reais  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (1)$$

Os elementos de  $p^{-1}(0)$  são chamados de raízes de  $p$ .

## Exemplo 16

Além das funções lineares, afins e quadráticas, a soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais. Considere a função polinomial  $p$  tal que

$$p(x) = (x - \alpha) (x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}) = x^n - \alpha^n.$$

Nesse caso, dizemos que  $p(x)$  é divisível por  $x - \alpha$ .

## Proposição 17

Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é raiz da função polinomial  $p(x)$  de grau  $n$ , então existe uma função polinomial  $q(x)$ , de grau  $n - 1$ , tal que

$$p(x) = (x - \alpha) q(x).$$

Além disso,  $p(x)$  não pode ter mais do que  $n$  raízes.

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

20 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 17

Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é raiz da função polinomial  $p(x)$  de grau  $n$ , então existe uma função polinomial  $q(x)$ , de grau  $n - 1$ , tal que

$$p(x) = (x - \alpha) q(x).$$

Além disso,  $p(x)$  não pode ter mais do que  $n$  raízes.

Uma função polinomial  $p$  chama-se identicamente nula quando se tem  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Nesse caso,  $p$  tem uma infinidade de raízes, já que todo número real é raiz de  $p$ . Esse caso não contradiz a proposição anterior, já que o grau de uma função polinomial não está definido para a função identicamente nula.

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

20 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Teorema 18

*Seja  $r(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  uma função polinomial de grau  $n$  e coeficientes inteiros. Se  $\frac{p}{q}$  é uma fração irredutível e raiz de  $r(x)$ , então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .*

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

21 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Teorema 18

*Seja  $r(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  uma função polinomial de grau  $n$  e coeficientes inteiros. Se  $\frac{p}{q}$  é uma fração irredutível e raiz de  $r(x)$ , então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .*

Este Teorema nos permite encontrar facilmente as raízes racionais de um polinômio, caso exista alguma. Basta listar os divisores  $p$  de  $a_0$ , os divisores  $q$  de  $a_n$  e testar se  $p \left( \frac{p}{q} \right) = 0$  para todas as possíveis frações  $\frac{p}{q}$ . Caso haja alguma raiz racional de  $r(x)$ , ela estará entre as frações obtidas.

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

21 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Funções Polinomiais



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

22 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 19

Encontre todas as raízes do polinômio

$$p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x - 8.$$



## Proposição 20 (Fórmula de Interpolação de Lagrange)

Dados  $n + 1$  números reais distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e fixados arbitrariamente os valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , existe um, e somente um, polinômio  $p$  de grau menor ou igual a  $n$  tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \dots, \quad p(x_n) = y_n.$$

$p(x)$  pode ser obtido pela fórmula:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \left[ y_i \cdot \prod_{k \neq i} \left( \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right].$$

# Gráficos de Funções Polinomiais



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

24 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Quando se deseja traçar o gráfico, ao menos um esboço, de uma função polinomial, certas informações são de grande utilidade. Listaremos algumas delas.

Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , com  $a_n \neq 0$ .

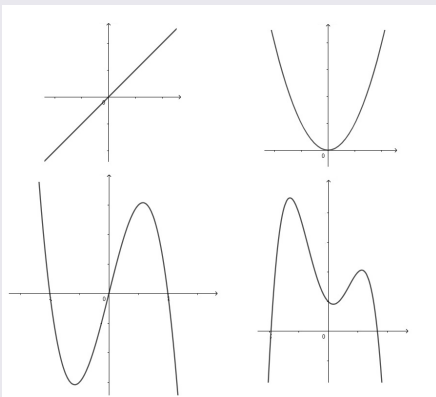
- ▶ Se  $n$  é par, então para  $|x|$  suficientemente grande,  $p(x)$  tem o mesmo sinal de  $a_n$ ;
- ▶ Se  $n$  é ímpar, então  $p(x)$  tem o mesmo sinal de  $a_n$  para valores positivos muito grandes de  $x$  e tem o sinal oposto de  $a_n$  para valores negativos muito grandes, em módulo, de  $x$ .

# Gráficos de Funções Polinomiais

## Exemplo 21

Identifique se  $n$  é par ou ímpar e qual o sinal de  $a_n$  para cada um dos gráficos de funções polinomiais

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  abaixo:



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

25 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Gráficos de Funções Polinomiais



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

26 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios.

- Se o grau de  $p$  é maior do que o grau de  $q$ , então para todo  $x$  com valor absoluto suficientemente grande, tem-se  $|p(x)| > |q(x)|$ ;

# Gráficos de Funções Polinomiais



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

26 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios.

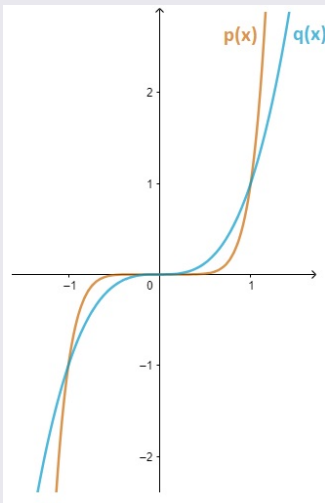
- ▶ Se o grau de  $p$  é maior do que o grau de  $q$ , então para todo  $x$  com valor absoluto suficientemente grande, tem-se  $|p(x)| > |q(x)|$ ;
- ▶ Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Se  $p(x_1) < 0$  e  $p(x_2) > 0$ , então,  $p$  deve possuir uma raiz entre  $x_1$  e  $x_2$ .

## Exemplo 22

Considere os polinômios  $p(x) = x^7$  e  $q(x) = x^3$ . Quando  $0 < |x| < 1$ , temos que  $|p(x)| < |q(x)|$ . Porém, quando  $|x| > 1$ , temos que  $|p(x)| > |q(x)|$ . Além disso, em ambos os casos,  $p(-1) = q(-1) = -1 < 0$  e  $p(1) = q(1) = 1 > 0$ . Assim, os polinômios possuem, cada um, ao menos uma raiz no intervalo  $(-1, 1)$  – a saber,  $x = 0$ .

# Gráficos de Funções Polinomiais

## Exemplo 22 (Continuação)



IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

28 Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Atividade 09 – Zeros de Polinômios e seus Gráficos

### Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

29 Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



1. A escala  $N$  de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

$^{\circ}N$	$^{\circ}C$
0	18
100	43

Modele o problema com funções afim que transforme a temperatura em  $^{\circ}N$  em  $^{\circ}C$  e vice-versa. Qual a relação entre essas duas funções? Em que temperatura ferve a água na escala  $N$ ?

2. Mostre que uma função afim  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fica inteiramente determinada quando conhecemos  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$ .

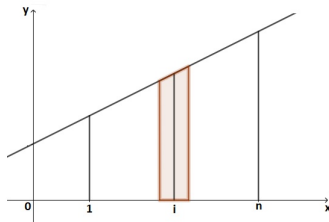
3. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobre 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?

4. Dada as PA's  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ , de razão não nula, e  $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ , mostre que existe uma, e somente uma, função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(a_1) = b_1$ ,  $f(a_2) = b_2$ ,  $\dots$ ,  $f(a_n) = b_n$ ,  $\dots$ .

# Exercícios

5. Os termos  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  de uma PA são os valores  $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$  de uma função afim, tal que  $f(n) > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (a) Mostre que cada  $a_i$  é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas verticais de equações  $x = i - \frac{1}{2}$  e  $x = i + \frac{1}{2}$ .



- (b) Mostre, por indução, que a soma  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas verticais  $x = \frac{1}{2}$  e  $x = n + \frac{1}{2}$ .
- (c) Conclua, a partir da área do trapézio, que  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ .

# Exercícios



6. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-na na forma  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ . A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.

(a)  $f(x) = x^2 - 8x + 23$ ;

(b)  $f(x) = 8x - 2x^2$ .

7. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  em cada um dos intervalos abaixo:

(a)  $[1, 4]$ ;

(b)  $[6, 10]$ .

*Dica:* Esboce o gráfico de  $f(x)$  nos intervalos indicados para visualizar melhor os valores mínimo e máximo assumidos pela função.

8. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

33 Exercícios

Bibliografia

9. Determine o polinômio  $p(x)$  de menor grau possível tal que  $p(1) = 2$ ,  $p(2) = 1$ ,  $p(3) = 4$  e  $p(4) = 3$ .

10. Mostre que, se  $n$  é um número par, então o polinômio  $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$  não possui raiz real.

*Dica:* Note que, para  $x \neq 1$ ,  $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ . Proceda supondo, por contradição, que existe  $a \neq 1$  raiz de  $p(x)$ .

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.*  
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] IEZZI, Gelson; et al.  
*Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 - Conjuntos e Funções.*  
São Paulo: Editora Atual.

IMD1001 Matemática  
Elementar  
Igor Oliveira

Introdução

Função Linear

Função Afim

Atividade Online

Função Quadrática

Atividade Online

Funções Polinomiais

Atividade Online

Atividade Online

Exercícios

35 Bibliografia