Capítulo 8

Matemática Elementar

Funções Polinomiais

9 de maio de 2019

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação da Aula

É algo comum escutar a seguinte frase: "Em matemática eu resolvo tudo com regra de três".
Será mesmo que isso é possível? Por exemplo, o lado do quadrado e sua área são proporcionais?

Função Linear

Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação $f(x) = ax$.

Função Linear

Definição 1

Chamamos de <u>função linear</u> uma função real com lei de formação $f(x) = ax$.

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.
Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de a é igual a $f(1)$.

Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação $f(x) = ax$.

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de a é igual a $f(1)$.

No caso das grandezas inversamente proporcionais, a função matemática que modela tal problema é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \frac{a}{x}$. Nesse caso, também temos a particularidade de $f(1) = a \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *f é linear;*

(ii) *$f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;*

(iii) *$f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.*

Nas hipóteses do Teorema, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente, vale um resultado análogo, com $a < 0$.

Função Linear

A importância desse Teorema está no seguinte fato: se queremos saber se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear, basta verificar duas coisas:

1ª: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f ser identicamente nula);

2ª: $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, basta verificar essa última condição para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3

O lado de um quadrado é proporcional à sua área? Em outras palavras, essas duas grandezas podem ser relacionadas por meio de uma função linear?

Função Afim

Definição 4

Uma função real chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em uma função afim na qual $f(x) = ax + b$, chamamos o valor a de taxa de variação da função ou de taxa de crescimento. Vale observar que é muito comum chamá-lo de coeficiente angular. Esse termo não é apropriado pois define-se coeficiente angular para retas, e não para funções, mesmo que vejamos que o gráfico de uma função afim seja uma reta.

Exemplo 5

A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim, assim como suas translações $g(x) = x + b$. São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

Exemplo 5

A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim, assim como suas translações $g(x) = x + b$. São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

Exemplo 6

O preço a se pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, em que x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

Proposição 7

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Gráfico da Função Afim

Proposição 7

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Note que, para desenhar o gráfico de uma função afim, basta conhecer dois pontos, pois uma reta é inteiramente determinada por dois pontos.

Proposição 8

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função afim e $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ é uma PA, então a sequência formada pelos pontos $y_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$ é uma PA. Reciprocamente, se f for monótona e transformar qualquer PA $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ numa PA com termo geral $y_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$, então f é uma função afim.

Atividade Online

OBSERVAÇÃO: No Khan Academy é definido função linear como função afim. Ou seja, para eles é qualquer função que o gráfico é uma reta (ou pontos colineares).

`Atividade 01 – Problemas de Modelos de Funções Lineares`

`Atividade 02 – Problemas de Como Escrever Funções`

`Atividade 03 – Funções Lineares e Não Lineares`

Veja o desempenho na Missão 9º ano.

Função Quadrática

Definição 9

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 10

Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$.
Mostre que f não é limitada superiormente e que o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o mínimo absoluto da função.
Caso tenhamos $a < 0$, então f não é limitada inferiormente e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o máximo absoluto da função.

Proposição 10

Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$.
Mostre que f não é limitada superiormente e que o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o mínimo absoluto da função.
Caso tenhamos $a < 0$, então f não é limitada inferiormente e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o máximo absoluto da função.

Proposição 11

Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Se $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$, então x_1 e x_2 são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Exemplo 12

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é uma parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

Exemplo 12

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é uma parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

Proposição 13

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, tem a reta $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Atividade Online

Atividade 04 – Problemas com Expressões do Segundo Grau (Forma Padrão)
Atividade 05 – Faça o Gráfico de Parábolas em Todas as Formas
Atividade 06 – Deslocamento de Parábolas
Atividade 07 – Dimensionar e Refletir Parábolas

Veja o desempenho na Missão Álgebra I.

Polinômio

Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \ldots X$ (i fatores). Ao maior número n tal que $a_n \neq 0$ damos o nome de grau do polinômio $p(X)$.

Polinômio

Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \ldots X$ (i fatores). Ao maior número n tal que $a_n \neq 0$ damos o nome de grau do polinômio $p(X)$.

Dizemos que dois polinômios
$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ e
$q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ são iguais quando
$n = m$ e $a_i = b_i$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Atividade Online

Atividade 08 – Verificação de Identidades Polinomiais

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Funções Polinomiais

Definição 15

Diz-se que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

Os elementos de $p^{-1}(0)$ são chamados de raízes de p.

Exemplo 16

Além das funções lineares, afins e quadráticas, a soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais. Considere a função polinomial p tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\left(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}\right) = x^n - \alpha^n.$$

Nesse caso, dizemos que $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Proposição 17

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz da função polinomial $p(x)$ de grau n, então existe uma função polinomial $q(x)$, de grau $n-1$, tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x).$$

Além disso, $p(x)$ não pode ter mais do que n raízes.

Proposição 17

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz da função polinomial $p(x)$ de grau n, então existe uma função polinomial $q(x)$, de grau $n-1$, tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x).$$

Além disso, $p(x)$ não pode ter mais do que n raízes.

Uma função polinomial p chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, p tem uma infinidade de raízes, já que todo número real é raiz de p. Esse caso não contradiz a proposição anterior, já que o grau de uma função polinomial não está definido para a função identicamente nula.

Funções Polinomiais

Proposição 18 (Fórmula de Interpolação de Lagrange)

Dados $n + 1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p de grau menor ou igual a n tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \ldots, \quad p(x_n) = y_n.$$

$p(x)$ pode ser obtido pela fórmula:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right].$$

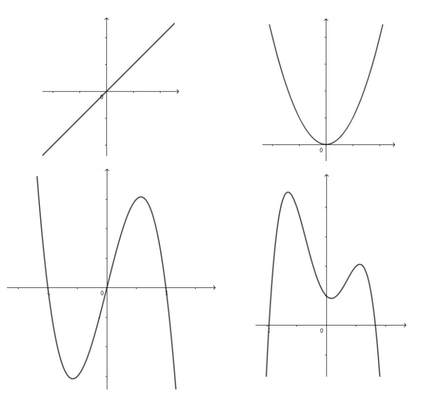
Gráficos de Funções Polinomiais

Quando se deseja traçar o gráfico, ao menos um esboço, de uma função polinomial, certas informações são de grande utilidade. Listaremos algumas delas.
Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$.

- Se n é par, então para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n;
- Se n é ímpar, então $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grandes, em módulo, de x.

Exemplo 19

Identifique se n é par ou ímpar e qual o sinal de a_n para cada um dos gráficos de funções polinomiais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ abaixo:



Sejam p e q dois polinômios.

- Se o grau de p é maior do que o grau de q, então para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$;

Gráficos de Funções Polinomiais

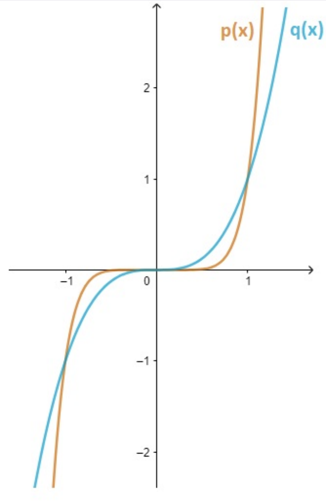
Sejam p e q dois polinômios.

- Se o grau de p é maior do que o grau de q, então para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$;
- Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então, p deve possuir uma raiz entre x_1 e x_2.

Exemplo 20

Considere os polinômios $p(x) = x^7$ e $q(x) = x^3$. Quando $0 < |x| < 1$, temos que $|p(x)| < |q(x)|$. Porém, quando $|x| > 1$, temos que $|p(x)| > |q(x)|$. Além disso, em ambos os casos, $p(-1) = q(-1) = -1 < 0$ e $p(1) = q(1) = 1 > 0$. Assim, os polinômios possuem, cada um, ao menos uma raiz no intervalo $(-1, 1)$ – a saber, $x = 0$.

Exemplo 20 (Continuação)



Atividade Online

Atividade 09 – Zeros de Polinômios e seus Gráficos

Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

1. A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

^oN	^oC
0	18
100	43

Modele o problema com funções afim que transforme a temperatura em ^oN em ^oC e vice-versa. Qual a relação entre essas duas funções? Em que temperatura ferve a água na escala N?

2. Mostre que uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada quando conhecemos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$.

Exercícios

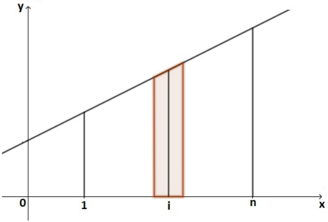
3. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobre 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?

4. Dada as PA's $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, de razão não nula, e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $\ldots$, $f(a_n) = b_n$, $\ldots$

Exercícios

5. Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de uma PA são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ de uma função afim, tal que $f(n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas verticais de equações $x = i - \frac{1}{2}$ e $x = i + \frac{1}{2}$.



(b) Mostre, por indução, que a soma $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas verticais $x = \frac{1}{2}$ e $x = n + \frac{1}{2}$.

(c) Conclua, a partir da área do trapézio, que $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

Exercícios

6. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.

(a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$;

(b) $f(x) = 8x - 2x^2$.

7. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:

(a) $[1, 4]$;

(b) $[6, 10]$.

Dica: Esboce o gráfico de $f(x)$ nos intervalos indicados para visualizar melhor os valores mínimo e máximo assumidos pela função.

8. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

Exercícios

9. Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.
10. Mostre que, se n é um número par, então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raiz real.
Dica: Note que, para $x \neq 1$, $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Proceda supondo, por contradição, que existe $a \neq 1$ raiz de $p(x)$.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] IEZZI, Gelson; et al.
Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 - Conjuntos e Funções.
São Paulo: Editora Atual.