UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

NOTAS DE AULA DA DISCIPLINA IMD1001 – MATEMÁTICA ELEMENTAR

25 de junho de 2020

Antonio Igor Silva de Oliveira
Josenaldo Araújo da Silva Júnior
Giordano Vicente de Oliveira Fausto Rodrigues
matematicaelementar@imd.ufrn.br

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Apresentação

Conjuntos estão por toda parte, ainda que, em um primeiro momento, isso não seja tão evidente. Utilizamos seus conceitos mais frequentemente do que imaginamos, mas não costumamos parar para pensar sobre o quão importantes eles são. Para se ter ideia, praticamente toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos, mesmo sendo a mais simples das ideias matemáticas.

Comecemos com a mais simples das noções. Reflita sobre qual seria a resposta para a pergunta "O que é um conjunto?"

...Refletiu?

Intuitivamente, o que nos vem a cabeça é que conjuntos são uma espécie de coleção, agrupamento – ou qualquer outro sinônimo – de objetos. No entanto, esse é um conceito bastante abstrato; isto é, não há exatamente uma resposta para o questionamento proposto, tendo em vista que ela depende da interpretação de cada um.

No decorrer destas notas de aula, trataremos os conceitos de conjuntos de uma maneira mais palpável para que se tornem mais praticáveis. Logo, precisaremos ir um pouco mais além para entender melhor e ver o que essa ferramenta tão poderosa pode nos oferecer.

1.2 Introdução

Um *conjunto* é definido por seus elementos, e nada mais. Desse fato decorre, imediatamente, que dois conjuntos são *iguais* quando possuem os mesmos elementos, e apenas nessa situação.

Dados um conjunto A e um objeto qualquer x, é natural perguntar se x é um elemento do conjunto A. Tal questionamento admite apenas "sim" ou "não" como candidatos a resposta. Isso se dá porque, na Matemática, qualquer afirmação é verdadeira ou é falsa, não havendo possibilidade de ser as duas coisas simultaneamente nem de, ainda, haver uma terceira opção.

Quando a Matemática "falha"

O caráter binário e exclusivo do valor-verdade das afirmações faz parecer que a Matemática é infalível se usada corretamente, o que não se verifica de fato. O matemático austríaco Kurt Gödel provou, em 1931, que todo sistema formal que inclua a aritmética é falho pois possui verdades que não podem ser provadas – os chamados paradoxos. Antes de assistir ao vídeo `Este vídeo está mentindo`, reflita se você vai acreditar nele ou não.

A descrição dos elementos de um conjunto – necessária para defini-lo, conforme já comentado – pode ser feita textualmente. Contudo, nestas notas serão utilizadas duas formas matemáticas comuns de se especificar tal descrição, apresentadas nos Exemplos 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.1. Se quisermos expressar qual seria o conjunto de todas as vogais do nosso alfabeto, precisaríamos de alguma notação para representá-lo. Temos $V = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$ como sendo o conjunto das vogais. Tal notação lista explicitamente os membros de seu conjunto, colocando-os entre chaves e separados por vírgula.

Exemplo 1.2. O conjunto P dos números primos pares pode ser representado por $P = \{x \ ; \ x \text{ é primo e par}\} = \{2\}$. Tal notação é lida por "o conjunto de todos os x's tais que x é primo e par". Entre chaves é colocada a representação para o elemento e sua descrição separados por ";", "\", ou "|". Nunca escreva $P = \{$ números primos pares $\}$.

1.3 Pertinência

Na Seção 1.2, entendemos o que é um conjunto e como podemos descrevê-lo. Agora, teremos o poder de relacionar objetos a conjuntos perguntando se um dado objeto está em um conjunto. Como já falamos sobre, só temos uma resposta possível dentre sim e não. O que nos permite a seguinte definição:

Definição 1.3 (Relação de Pertinência)**.** Dados um objeto x e um conjunto A, se for o caso de x ser um elemento de A, dizemos que x *pertence* a A. Para denotar esse fato, escrevemos $x \in A$.

Quando x *não* pertence a A, denotamos por $x \notin A$.

Não é correto dizer que x está "contido" ou é "parte" de A, esses termos são usados em matemática com outro sentido, como veremos na Definição 1.11.

Exemplo 1.4. Considere P e V conforme definido nos Exemplos 1.1 e 1.2, respectivamente. Sendo assim, temos que $\mathtt{e} \in V$ e $3 \notin P$.

Exemplo 1.5. Considere L como sendo o conjunto de todas as letras do alfabeto latino. Sabendo que as vogais do conjunto V fazem parte desse alfabeto, podemos concluir que $\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u} \in L$. Também sabemos que a letra $\mathtt{j}$ faz parte do alfabeto, isto é, $\mathtt{j} \in L$. Contudo, como $\mathtt{j}$ não é uma vogal, podemos concluir que $\mathtt{j} \notin V$.

Ainda na Seção 1.2 Introdução, vimos que dois conjuntos iguais A e B possuem, necessariamente, os mesmos elementos, o que implica que são diferentes quando um possui algum elemento que o outro não possui. Com a notação de pertinência, isto é o mesmo que dizer que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ ou que existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.

Exemplo 1.6. Os conjuntos $\mathbb{N}$ (números naturais) e $\mathbb{Z}$ (números inteiros), abordados com mais detalhes no Capítulo 2, são diferentes. Note que $-1 \in \mathbb{Z}$ mas $-1 \notin \mathbb{N}$, por exemplo, o que prova que esses conjuntos são diferentes.

As noções de conjuntos e elementos não são mutuamente exclusivas como, por exemplo, a paridade nos números naturais. Nos exemplos a seguir, veremos conjuntos cujos elementos também são conjuntos.

Exemplo 1.7. Considere o conjunto $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, 1\}$. Observe que existem elementos em A que são conjuntos. Note que:

i) $\{1, 2\} \in A$

ii) $\{2\} \in A$

iii) $1 \in A$

iv) $2 \notin A$

Exemplo 1.8. Os habitantes de um país podem ser vistos como um conjunto de pessoas. Por sua vez, cada pessoa pode ser vista como um conjunto de células. Mais tarde, na Definição 1.18, veremos um famoso conjunto formado por conjuntos.

Para dizer se um dado objeto deve receber o título de "elemento", é preciso olhar para o conjunto com o qual ele está se relacionando. No caso do Exemplo 1.7, o conjunto $\{1, 2\}$ é elemento do conjunto A, mas quando o interesse se volta à sua relação com o número 2, não faz sentido se referir a $\{1, 2\}$ usando simplesmente o nome "elemento".

A Definição 1.9 irá introduzir outro importante tipo de conjunto.

Definição 1.9 (O Conjunto Vazio)**.** O conjunto que não possui elementos é chamado de *conjunto vazio* e é representado por $\emptyset$. Então, para qualquer que seja o objeto x, temos que $x \notin \emptyset$.

Agora, com a Definição 1.9, o Exercício 1 já pode ser feito.

Exemplo 1.10. Quais outros conjuntos você conhece? Que tal pensar sobre o conjunto $A = \{x\ ;\ x \notin A\}$?

Esta "definição" de conjunto não faz sentido, resultando num paradoxo, apesar de muito importante para o desenvolvimento da teoria de conjuntos. Sua descoberta é atribuída ao matemático britâncio Bertrand Russel (1872–1970) e é conhecido por *Paradoxo de Russel* ou *Paradoxo do barbeiro*, que você pode rever no vídeo `Este vídeo está mentindo`.

1.4 Inclusão

Definição 1.11 (Relação de Inclusão)**.** Considere dois conjuntos A e B. Se for o caso que todo elemento de A é, também, elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A está *contido* em B, ou que A é *parte* de B. Para indicar esse fato, usa-se a notação $A \subset B$.

Quando A *não* está contido em B, utiliza-se a notação $A \not\subset B$. Na prática, isso significa que existe pelo menos um elemento que está em A mas não está em B. Em outras palavras, existe um elemento x tal que $x \in A$ mas $x \notin B$.

Observação. Também podemos escrever $B \supset A$ quando for o caso que $A \subset B$. Para essa situação, dizemos que B *contém* A.

Exemplo 1.12. Considere T o conjunto de todos os triângulos e P o conjunto dos polígonos no plano. Como todo triângulo é um polígono podemos concluir que $T \subset P$. Observe também que $P \not\subset T$. Para poder concluir isso precisamos encontrar um elemento de P que não seja um elemento de T. Ora, basta considerar um quadrado q com lados de tamanho 1, como todo quadrado é um polígono, temos que $q \in P$, mas quadrados não são triangulos, então $q \notin T$.

Exemplo 1.13. Na Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos. Quando dizemos que uma reta r está no plano Π, estamos afirmando que r está contida em Π ou, equivalentemente, que r é um subconjunto de Π, pois todos os pontos que pertencem a r pertencem, também, a Π. Nesse caso, deve-se escrever $r \subset \Pi$. Porém, não é correto dizer que r pertence a Π, nem escrever $r \in \Pi$. Os elementos do conjunto Π são pontos, não retas.

Exemplo 1.14. Considere os conjuntos $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $I = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4, 6\}$. Analisando o cenário, podemos concluir que:

i) $I \subset N$. Observe que todos os elementos de I também são elementos de N.

ii) $P \not\subset N$. Observe que nem todos os elementos de P são elementos de N, pois $0 \in P$ mas $0 \notin N$.

Proposição 1.15 (Inclusão universal do $\emptyset$)**.** Para todo conjunto A, tem-se que o conjunto $\emptyset$ é subconjunto de A (em símbolos: $\emptyset \subset A$).

Demonstração. Para chegarmos num absurdo, considere que existe um conjunto A tal que $\emptyset \not\subset A$. Logo, podemos concluir que existe um elemento x tal que $x \in \emptyset$ mas $x \notin A$, pela definição de inclusão. Mas, já sabemos que $x \notin \emptyset$ pela definição do conjunto vazio. O que nos leva a um absurdo, pois não pode acontecer que $x \in \emptyset$ e $x \notin \emptyset$ ao mesmo tempo. Portanto, podemos concluir que $\emptyset \subset A$. □

Observação. Ao manter a arbitrariedade de um conjunto, qualquer conclusão relacionada a este conjunto valerá para todos os conjuntos. Foi o que fizemos com o conjunto A na demonstração da Proposição 1.15.

Definição 1.16 (Inclusão Própria)**.** Dizemos que $A \neq \emptyset$ é um *subconjunto próprio* de B quando $A \subset B$ mas $A \neq B$.

Proposição 1.17 (Propriedades da inclusão)**.** Para quaisquer conjuntos A, B e C, são válidas as propriedades a seguir:

i) *Reflexividade*: $A \subset A$;

ii) *Antissimetria*: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

iii) *Transitividade*: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Demonstração. Primeiramente, demonstremos o item *i*). Seja $x \in A$ um elemento arbitrário. Ora, como já temos que $x \in A$ podemos concluir que $A \subset A$.

Segundamente, demonstremos o item *ii*). Sejam A e B conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset A$. Suponha, por contradição, que $A \neq B$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ (1) ou existe $x \in B$ tal que $x \notin A$ (2). Ora, (1) é o mesmo que $A \not\subset B$, contradizendo $A \subset B$. Analogamente, (2) contradiz $B \subset A$. Portanto, $A = B$.

Por fim, demonstremos que vale o item *iii*). Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset C$. Agora basta demonstrar que $A \subset C$. Para isso, considere $x \in A$ um elemento arbitrário e mostremos que $x \in C$. Como temos que $A \subset B$, podemos concluir que $x \in B$. E, como $x \in B$ e $B \subset C$, segue que $x \in C$. Portanto, $A \subset C$. □

Definição 1.18 (Conjunto das Partes)**.** Dado um conjunto A, chamamos de *conjunto das partes* de A o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, e denotamo-lo $\mathcal{P}(A)$. Em símbolos:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \,;\, X \subset A\}.$$

Exemplo 1.19. Dado $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

Solução. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$.

Observação. Como o Exemplo 1.19 ilustra, o conjunto das partes de um determinado conjunto tem a particularidade de que todos os seus elementos também são conjuntos.

1.5 Operações

Assim como na aritmética, onde os números possuem suas operações (soma, subtração, multiplicação, etc.), os conjutos também possuem suas operações. De uma forma geral, operações têm o objetivo de receber objetos de um tipo, operá-los, e resultar em algum outro objeto, podendo ser diferente ou não.

1.5.1 Complementar

A noção de complementar de um conjunto só faz sentido quando fixamos um *conjunto universo*, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Uma vez fixado $\mathcal{U}$, todos os elementos considerados pertencerão a $\mathcal{U}$ e todos os conjuntos serão subconjuntos de $\mathcal{U}$. Dessa forma, teremos bem esclarecidos quais objetos podem estar presentes nos conjuntos.

Exemplo 1.20. Na geometria plana, $\mathcal{U}$ é o plano onde os elementos são pontos, e todos os conjuntos são constituídos por pontos desse plano. As retas servem como exemplos desses conjuntos; portanto, são subconjuntos de $\mathcal{U}$ (não elementos!).

Definição 1.21 (Complementar)**.** Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de $\mathcal{U}$), chama-se *complementar* de A o conjunto A^C formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A. Em outras palavras:

$$A^C = \{x \; ; \; x \notin A\} .$$

Exemplo 1.22. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos. Qual o complementar do conjunto dos triângulos escalenos?

Solução. Quando classificamos um triângulo pelo comprimento de seus lados, ele é, necessariamente, equilátero, isósceles ou escaleno. Portanto, o complementar do conjunto dos triângulos escalenos é o conjunto dos triângulos que são equiláteros ou isósceles.

Proposição 1.23 (Propriedades do complementar)**.** Fixado um conjunto universo $\mathcal{U}$, valem para todos conjuntos A e B:

i) $\mathcal{U}^C = \emptyset$ e $\emptyset^C = \mathcal{U}$;

ii) $\left(A^C\right)^C = A$ (todo conjunto é complementar do seu complementar);

iii) Se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$ (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar desse outro).

Demonstração. Primeiramente, demonstremos que vale o item *i)*. A inclusão $\emptyset \subset \mathcal{U}^C$ é imediata pois $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto. Provemos, agora, que $\mathcal{U}^C \subset \emptyset$. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{U}^C \not\subset \emptyset$; ou seja, existe $x \in \mathcal{U}^C$ tal que $x \notin \emptyset$. Ora, se $x \in \mathcal{U}^C$, então $x \notin \mathcal{U}$, o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{U}^C \subset \emptyset$. Dos fatos de que $\emptyset \subset \mathcal{U}^C$ e $\mathcal{U}^C \subset \emptyset$, conclui-se que $\mathcal{U}^C = \emptyset$. A demonstração de que $\emptyset^C = \mathcal{U}$ fica como exercício para o leitor.

Em segundo lugar, demonstremos que vale o item *ii*). Para isso, provemos que $A \subset \left(A^C\right)^C$ primeiro. Para tal, seja $x \in A$. Temos duas possibilidades para a presença de x no conjunto A^C, a saber, $x \in A^C$ e $x \notin A^C$. Se $x \in A^C$, segue que $x \notin A$, um absurdo, pois $x \in A$ por hipótese. Logo, $x \notin A^C$. Assim, $x \in \left(A^C\right)^C$, usando, agora, a própria definição de complementar. Então, $A \subset \left(A^C\right)^C$. A prova de que $\left(A^C\right)^C \subset A$, item restante para podermos concluir que a igualdade desejada é válida, fica como exercício para o leitor.

Em decorrência dessa propriedade, vamos tratar como imediato que, para todo conjunto A, $x \notin A^C$ se, e somente se, $x \in A$.

Por fim, demonstremos que vale o item *iii*). Para isso, sejam A, B conjuntos tais que $A \subset B$. Além disso, seja $x \in B^C$, o que implica em $x \notin B$. Temos duas possibilidades para a presença de x no conjunto A, a saber, $x \in A$ e $x \notin A$. Se $x \in A$, teríamos $x \in B$ também pois $A \subset B$; um absurdo visto que já temos $x \notin B$. Logo, concluímos que $x \notin A$, ou seja, $x \in A^C$. Segue, então, que $B^C \subset A^C$. □

1.5.2 Diferença

Definição 1.24 (Diferença de Conjuntos)**.** A *diferença* do conjunto A por B, é o conjunto

$$A \setminus B = \{x \,;\; x \in A \text{ e } x \notin B\}\,.$$

Observação. Em geral, não é verdade que $A \setminus B = B \setminus A$. Pense em um par de conjuntos em que essa igualdade não é válida antes de ver o exemplo a seguir. Além disso, note que $A^C = \mathcal{U} \setminus A$.

Exemplo 1.25. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

Solução.

$$A \setminus B = \{1, 3\}\,;$$
$$B \setminus A = \{5\}\,.$$

1.5.3 União e Interseção

Definição 1.26 (União e Interseção)**.** Dados os conjuntos A e B, definem-se:

i) A *união* $A \cup B$ como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Ou seja,

$$A \cup B = \{x \,;\; x \in A \text{ ou } x \in B\}\,.$$

ii) A *interseção* $A \cap B$ como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos A e B. Ou seja,

$$A \cap B = \{x \; ; \; x \in A \text{ e } x \in B\} .$$

Exemplo 1.27. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\} ;$$
$$A \cap B = \{2\} .$$

Proposição 1.28 (Propriedades da união e interseção)**.** Para quaisquer conjuntos A, B e C, e fixado um universo $\mathcal{U}$, tem-se:

i) *a*) $A \subset A \cup B$;
   b) $A \cap B \subset A$.

ii) União/interseção com o universo:

   a) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$;
   b) $A \cap \mathcal{U} = A$.

iii) *Comutatividade*:

   a) $A \cup B = B \cup A$;
   b) $A \cap B = B \cap A$.

iv) *Associatividade*:

   a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

v) *Distributividade*, de uma em relação à outra:

   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

vi) *Leis de DeMorgan*:

   a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;
   b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Demonstração. Abaixo, seguem as demonstrações de cada propriedade.

i) *a)* Seja $x \in A$. Pela definição de união, segue que $x \in A \cup B$. Portanto, $A \subset A \cup B$;

b) Seja $x \in A \cap B$. Pela definição de interseção, segue que $x \in A$ e $x \in B$. Em particular, já temos que $x \in A$. Portanto, $A \cap B \subset A$.

Em decorrência dessa propriedade, vamos tratar como imediatos que: se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ (ou, de maneira análoga, que $x \in B \cup A$); e se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ (ou, caso convenha, $x \in B$).

ii) *a)* Exercício.

b) Seja $x \in A$. Temos que $x \in \mathcal{U}$, logo, $x \in A \cap \mathcal{U}$. Segue, assim, que $A \subset A \cap \mathcal{U}$. A inclusão $A \cap \mathcal{U} \subset A$, por sua vez, é imediata pela propriedade *i)* da Proposição 1.28. Portanto, $A \cap \mathcal{U} = A$.

iii) Exercício.

iv) *a)* Exercício.

b) Provemos que $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Seja $x \in A \cap (B \cap C)$, isto é, $x \in A$ e $x \in B \cap C$. De $x \in B \cap C$, temos $x \in B$ e $x \in C$. Como $x \in A$ e $x \in B$, segue que $x \in A \cap B$. Além disso, $x \in C$. Então, $x \in (A \cap B) \cap C$. Logo, $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$.

A prova de que $A \cap (B \cap C) \supset (A \cap B) \cap C$, necessária para concluir a igualdade desejada, fica como exercício para o leitor.

v) Exercício.

vi) Abaixo, seguem as demonstrações das leis de De Morgan.

a) Inicialmente, demonstremos que $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$. Do item *i)* da Proposição 1.28, temos que $A \subset A \cup B$. Segue do item *iii)* da Proposição 1.23 que $(A \cup B)^C \subset A^C$ (I). De forma análoga, também temos que $(A \cup B)^C \subset B^C$ (II). Seja agora $x \in (A \cup B)^C$. Por (I), temos $x \in A^C$. Por (II), temos $x \in B^C$. Logo, $x \in A^C \cap B^C$. Portanto, $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$.

Finalmente, demonstremos que $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$. Seja $x \in A^C \cap B^C$, ou seja, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Dessa forma, $x \notin A$ e $x \notin B$. Suponha, por contradição, que $x \in A \cup B$. Dessa maneira, teríamos $x \in A$, o que contradiz $x \notin A$, ou $x \in B$, o que contradiz $x \notin B$. Logo, $x \notin A \cup B$, ou seja, $x \in (A \cup B)^C$. Assim, $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$. Portanto, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

b) Primeiramente, demonstremos que $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$. Observe que, pela propriedade *i)*, temos $A \cap B \subset A$, e, pelo item *iii)* da proposição 1.23, temos $A^C \subset (A \cap B)^C$ (I). De forma análoga, temos $B^C \subset (A \cap B)^C$ (II). Então, seja $x \in A^C \cup B^C$, isto é, $x \in A^C$ ou $x \in B^C$. Caso que $x \in A^C$, podemos afirmar que $x \in (A \cap B)^C$ por (I). E, caso $x \in B^C$, por (II), também podemos afirmar que $x \in (A \cap B)^C$. Portanto, temos que $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$.

Finalmente, demonstremos que $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$. Suponha, para chegar num absurdo, que $(A \cap B)^C \not\subset A^C \cup B^C$. Então, existe $x \in (A \cap B)^C$ tal que $x \notin A^C \cup B^C$. Logo, $x \notin A \cap B$. Temos 4 possibilidades para x:

Caso $x \in A$ e $x \in B$: Então, $x \in A \cap B$, o que contradiz $x \notin A \cap B$.

Caso $x \notin A$ e $x \in B$: Então, $x \in A^C$. Daí, $x \in A^C \cup B^C$, o que contradiz $x \notin A^C \cup B^C$.

Caso $x \in A$ e $x \notin B$: Então, $x \in B^C$. Daí, $x \in A^C \cup B^C$, o que contradiz $x \notin A^C \cup B^C$.

Caso $x \notin A$ e $x \notin B$: De $x \notin A$, temos $x \in A^C$. Daí, $x \in A^C \cup B^C$, o que contradiz $x \notin A^C \cup B^C$.

Sendo assim, como os 4 casos levam a um absurdo, podemos concluir que $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$.

$\square$

Atividade online. `Notação Básica de Conjunto`.

1.6 Conjuntos e Lógica

Em Matemática, a Teoria de Conjuntos está intimamente relacionada à Lógica. Como evidência disso, existem diversas equivalências entre relações e operadores de conjuntos e conectivos lógicos. Apresentar-se-ão quatro delas, mas antes vamos entender como usamos os símbolos $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$ no nosso curso.

Na Lógica Clássica Proposicional, a implicação ($\rightarrow$) é um conectivo lógico. Ela constrói, a partir de duas proposições P e Q, uma terceira proposição $P \rightarrow Q$. O valor-verdade de $P \rightarrow Q$ é completamente determinado quando se conhecem os valores-verdade de P e Q. A relação exata pode ser consultada na Tabela 1.1, denominada tabela-verdade.

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 1.1. Tabela-verdade da implicação.

A implicação aparece textualmente de algumas maneiras; a mais comum delas sendo "Se P, então Q". No caso de a afirmação anterior ser, por exemplo, um problema, interpreta-se o P como a sua hipótese, e Q, como a sua tese. Costuma-se escrever, também, nessa situação, $P \implies Q$ e reservar o $P \to Q$ para contextos puramente lógicos.

Para provar que uma implicação é verdadeira, o primeiro passo é considerar a hipótese P como uma propriedade verdadeira. Consequentemente, nossa atenção se restringe somente às duas primeiras linhas da tabela-verdade de $P \implies Q$. Assim, pela tabela, constatamos que, para alcançarmos nosso objetivo de provar que a afirmação "Se P, então Q" é verdadeira, precisamos mostrar que a tese Q também é verdadeira.

Quando já está provado que "Se P, então Q" é verdadeira, utilizamos esse resultado para concluir que Q é verdadeira quando temos, também, que P é verdadeira. Isso pode, mais uma vez, ser verificado pela tabela-verdade de $P \implies Q$: na única linha em que $P \implies Q$ e P são verdadeiras, Q também é.

Outro conectivo lógico é o $\leftrightarrow$, chamado de bicondicional ou bi-implicação. Da mesma forma que a implicação – e os demais conectivos lógicos –, o valor-verdade da expressão $P \leftrightarrow Q$, dadas duas proposições P e Q, é totalmente determinado pelos valores-verdade dessas proposições. A relação se encontra na Tabela 1.2.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 1.2. Tabela-verdade da bi-implicação.

Pela tabela, pode-se notar que a expressão $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira quando P e Q têm o mesmo valor-verdade, e apenas nessa situação.

De forma similar ao que ocorre na implicação, reserva-se o símbolo $\leftrightarrow$ para contextos lógicos, utilizando o " $\iff$ " apenas em cenários menos formais. Textualmente, uma afirmação do tipo $P \iff Q$ costuma se manifestar como "P se, e somente se, Q". Isso começa a evidenciar um importante fato sobre a bi-implicação: ela pode ser definida como a conjunção de duas implicações. A frase "P se Q" é equivalente a "se Q, então P", o que, conforme já visto, pode ser representado como $Q \implies P$. Ademais, "P somente se Q" diz que P só pode ser verdade se Q também for, ou seja, $P \implies Q$. As frases, quando juntas, expressam a noção de bi-condicionalidade.

Outra versão textual comum do $\iff$ é a sentença "Para P, é necessário e suficiente que Q". Assim como no caso do "se, e somente se", essa expressão carrega duas informações consigo. A frase "Para P, é necessário que Q" significa que a validade de P só é possível na presença da validade de Q, isto é, $P \implies Q$. Por outro lado, "Para P, é suficiente que Q" indica que basta Q ser verdade para P também ser, ou seja, $Q \implies P$.

Uma terceira forma de se apresentar a informação $P \iff Q$ é dizer que "P é equivalente a Q". Pode-se justificar essa construção pela tabela-verdade de $P \leftrightarrow Q$.

Conforme mencionado, $P \leftrightarrow Q$ é verdade precisamente quando P e Q tem o mesmo valor-verdade. Em caso positivo, não existe uma diferença prática entre P e Q. Assim, usa-se o termo "equivalência", que também indica que, quando se tem uma dessas proposições, se tem a outra, já que elas possuem o mesmo valor-verdade.

Em todas as formas textuais vistas, o $\iff$ pôde ser desmembrado em dois $\implies$. Isso reflete diretamente na maneira como se prova afirmações do tipo $P \iff Q$. O método consiste em demonstrar, de forma independente, que $P \implies Q$ e que $Q \implies P$. Aqui, vale a discussão acerca de como provar afirmações com $\implies$. A diferença é que sempre se fazem necessárias duas provas desse tipo.

Explicados os usos do $\implies$ e do $\iff$ neste texto, podemos voltar a atenção à equivalência entre operadores e relações de conjuntos e conectivos lógicos. No restante desta seção, considere P e Q propriedades aplicáveis aos elementos de $\mathcal{U}$. Considere, também, $A = \{x \ ; \ x \text{ satisfaz } P\}$ e $B = \{x \ ; \ x \text{ satisfaz } Q\}$.

Proposição 1.29 (Inclusão e implicação)**.** $A \subset B$ é equivalente a $P \implies Q$.

Proposição 1.30 (Igualdade e bi-implicação)**.** $A = B$ é equivalente a $P \iff Q$.

Exemplo 1.31. Analise as implicações abaixo:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\implies (x^2+1)(x^2-1) = 0 \cdot (x^2-1) \\ &\implies x^4 - 1 = 0 \\ &\implies x^4 = 1 \\ &\implies x \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Isso quer dizer que o conjunto solução de $x^2 + 1 = 0$ é $\{-1, 1\}$?

Solução. O conjunto-solução de $x^2+1 = 0$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$, o que implica que $S \neq \{-1, 1\}$.

Proposição 1.32 (Complementar e negação)**.** A^C é equivalente a $\neg P$.

Podemos combinar os itens *ii*) e *iii*) da Proposição 1.23 e obter que:

$$P \implies Q \text{ se, e somente se, } \neg Q \implies \neg P.$$

Chamamos $Q \implies P$ de *recíproca* de $P \implies Q$, e $P \wedge \neg Q$ de *negação* de $P \implies Q$. É dado um exemplo no Exercício 13.

Exemplo 1.33. Observe as afirmações:

- Todo número primo maior do que 2 é ímpar;

- Todo número par maior do que 2 é composto.

Essas afirmações dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia; só que com diferentes termos. Podemos reescrevê-las na forma de implicações vendo claramente que uma é contrapositiva da outra, e todas estão sob a hipótese de que $n \in \mathbb{N}$, com $n > 2$:

$$\begin{aligned} n \text{ primo} &\implies n \text{ ímpar} \\ \neg(\ n \text{ ímpar }) &\implies \neg(\ n \text{ primo }) \\ n \text{ par} &\implies n \text{ composto} \end{aligned}$$

Proposição 1.34 (União e disjunção)**.** $A \cup B$ é equivalente a $P \vee Q$ (P ou Q).

Proposição 1.35 (Interseção e conjunção)**.** $A \cap B$ é equivalente a $P \wedge Q$ (P e Q).

Observação. O conectivo lógico *ou* tem significado diferente do usado normalmente no português. Na linguagem coloquial, usamos P *ou* Q sem permitir que sejam as duas coisas ao mesmo tempo. Analise a seguinte história:

Um obstetra que também era matemático acabara de realizar um parto quando o pai perguntou: "É menino ou menina, doutor?". E ele respondeu: "sim".

As equivalências entre as relações e os operadores da Teoria dos Conjuntos e conectivos da Lógica são resumidas na Tabela 1.3.

Operação/relação em Conjuntos	Fórmula de Lógica
$A = B$	$P \iff Q$
$A \subset B$	$P \implies Q$
A^C	$\neg P$
$A \cup B$	$P \vee Q$
$A \cap B$	$P \wedge Q$

Tabela 1.3. Equivalências entre as relações e operadores de conjuntos e conectivos lógicos.

Um problema de lógica

A polícia prende quatro homens, um dos quais cometeu um furto. Eles fazem as seguintes declarações:

- Arnaldo: Bernaldo fez o furto.
- Bernaldo: Cernaldo fez o furto.
- Dernaldo: eu não fiz o furto.
- Cernaldo: Bernaldo mente ao dizer que eu fiz o furto.

Se sabemos que só uma destas declarações é a verdadeira, quem é culpado pelo furto?

1.7 Exercícios

Exercício 1. De que outras formas podemos representar o conjunto vazio utilizando as duas notações de definição de conjuntos que conhecemos?

Exercício 2. Decida quais das afirmações a seguir estão corretas. Justifique suas respostas.

a) $\emptyset \in \emptyset$;

b) $\emptyset \subset \emptyset$;

c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

Exercício 3. Complete as demonstrações em Propriedades da união e interseção que não foram feitas em sala de aula.

Exercício 4. Demonstre que os seguintes itens são equivalentes:

a) $A \cup B = B$;

b) $A \subset B$;

c) $A \cap B = A$;

Dica. Para tanto, é preciso provar que a) $\iff$ b) e b) $\iff$ c). Outra maneira é provar a) $\implies$ b), b) $\implies$ c) e por fim, c) $\implies$ a).

Exercício 5. O diagrama de Venn para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$.)

a) $(X^C \cup Y)^C$;

b) $(X^C \cup Y) \cup Z^C$;

c) $(X^C \cap Y) \cup (X \cap Z^C)$;

d) $(X \cup Y)^C \cap Z$.

Exercício 6. Exprimindo cada membro como reunião de regiões numeradas, prove as igualdades:

a) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

b) $X \cup (Y \cap Z)^C = X \cup Y^C \cup Z^C$.

Exercício 7. Sejam A, B e C conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

Exercício 8. Considere A, A', B e B' conjuntos tais que $A \subset A'$ e $B \subset B'$. Prove que, se $A' \cap B' = \emptyset$, então $A \cap B = \emptyset$.

Exercício 9. Recorde a definição da diferença entre conjuntos:

$$B \setminus A = \{x \; ; \; x \in B \text{ e } x \notin A\} .$$

Mostre que

a) $B \setminus A = B \cap A^C$;

b) $(B \setminus A) \cup A = B \cup A$;

c) $(B \setminus A)^C = B^C \cup A$;

d) $B \setminus A = \emptyset$ se, e somente se, $B \subset A$;

e) $B \setminus A = B$ se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$;

f) Vale a igualdade $B \setminus A = A \setminus B$ se, e somente se, $A = B$;

g) Há uma condição necessária e suficiente para que se tenha

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Exercício 10. Dê exemplos de implicações, envolvendo conteúdos de ensino médio, que sejam: verdadeiras com recíproca verdadeira; verdadeiras com recíproca falsa; falsas, com recíproca verdadeira; falsas, com recíproca falsa.

Exercício 11. Considere P, Q e R condições aplicáveis aos elementos de um conjunto universo $\mathcal{U}$, e A, B e C os subconjuntos de $\mathcal{U}$ dos elementos que satisfazem P, Q e R, respectivamente. Expresse, em termos de implicações entre P, Q e R, as seguintes relações entre os conjuntos A, B e C.

a) $A \cap B^C \subset C$;

b) $A^C \cup B^C \subset C$;

c) $A^C \cup B \subset C^C$;

d) $A^C \subset B^C \cup C$;

e) $A \subset B^C \cup C^C$.

Exercício 12. Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:

$$\begin{aligned} x = 1 &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \\ &\iff x^2 - 1 = 0 \\ &\iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Conclusão (?): $x = 1 \iff x = \pm 1$. Onde está o erro?

Exercício 13. Escreva as recíprocas, contrapositivas e negações matemáticas das seguintes afirmações:

a) Todos os gatos têm rabo; ($G \implies R$)
<u>Recíproca:</u> Se têm rabo então é gato; ($R \implies G$)
<u>Contrapositiva:</u> Se não tem rabo então não é gato; ($\sim R \implies \sim G$)
<u>Negação:</u> Existe um gato que não tem rabo. ($G \wedge \sim R$)

b) Sempre que chove, eu saio de guarda-chuva ou fico em casa;

c) Todas as bolas de ping pong são redondas e brancas;

d) Sempre que é terça-feira e o dia do mês é um número primo, eu vou ao cinema;

e) Todas as camisas amarelas ou vermelhas têm manga comprida;

f) Todas as coisas quadradas ou redondas são amarelas e vermelhas.

Exercício 14. Considere os conjuntos: F composto por todos os filósofos; M por todos os matemáticos; C por todos os cientistas; e P por todos os professores. Exprima cada uma das afirmativas abaixo usando a linguagem de conjuntos:

(i) Todos os matemáticos são cientistas;

(ii) Alguns matemáticos são professores;

(iii) Alguns cientistas são filósofos;

(iv) Todos os filósofos são cientistas ou professores;

(v) Nem todo professor é cientista.

(vi) Alguns matemáticos são filósofos;

(vii) Nem todo filósofo é cientista;

(viii) Alguns filósofos são professores;

(ix) Se um filósofo não é matemático, ele é professor;

(x) Alguns filósofos são matemáticos.

Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas restantes são necessariamente verdadeiras.

Exercício 15. Considere um grupo de 4 cartões, que possuem uma letra escrita em um dos lados e um número do outro. Suponha que seja feita, sobre esses cartões, a seguinte afirmação: *Todo cartão com uma vogal de um lado tem um número ímpar do outro*. Quais dos cartões abaixo você precisaria virar para verificar se essa afirmativa é verdadeira ou falsa?

$$\boxed{\text{A}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{\text{B}} \quad \boxed{4}$$

Exercício 16. Numa mesa há cinco cartas:

$$\boxed{\text{Q}} \quad \boxed{\text{T}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{6}$$

Cada carta tem um número natural de um lado e uma letra de outro lado. Nico afirma: "Qualquer carta que tenha uma vogal tem um número par do outro lado". Jorel provou que Nico mente virando somente uma das cartas. Qual das cinco cartas Jorel teve que virar para provar que Nico mentiu?

1.8 Bibliografia

[4] Elon L. Lima. *Números e Funções Reais*. $1^{\underline{a}}$ ed. SBM, 2013.

[5] Elon L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. $9^{\underline{a}}$ ed. SBM, 2006.

[9] Krerley I. M. Oliveira e Adan J. C. Fernandez. *Iniciação em Matemática: um Curso com Problemas e Soluções*. $2^{\underline{a}}$ ed. SBM, 2010.

Capítulo 2

Conjuntos Numéricos e Potenciação

2.1 Apresentação

Os números têm grande importância na matemática; eles podem servir para contar ou medir coisas. Conhecer os conjuntos numéricos e suas operações é indispensável para trabalhar corretamente com os números.

2.2 Conjuntos Numéricos

Nesta seção, serão introduzidos os principais conjuntos numéricos com os quais se trabalha na Matemática.

Definição 2.1. Ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$, damos o nome de *conjunto dos números naturais*.

Alguns autores consideram que o conjunto dos números naturais não possui o 0. Um dos principais argumentos utilizados é o fato de que esses números foram inventados para contar coisas (casas, animais, etc), e, quando fazemos uma contagem, não a iniciamos no 0. Conforme a Definição 2.1, enxergamos, neste texto, o 0 como um número natural. No entanto, usaremos a notação especial $\mathbb{N}^*$ para se referir ao conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$.

Definição 2.2. Ao conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -m - 1, -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$ damos o nome de *conjunto dos números inteiros*.

Usam-se, por conveniência, as seguintes notações para se referir a certas “variações” do conjunto dos inteiros:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} && \text{(inteiros não nulos;)}\\
&\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} && \text{(inteiros não negativos);}\\
&\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^* && \text{(inteiros positivos);}\\
&\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0\} && \text{(inteiros não positivos);}\\
&\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}_- \setminus \{0\} && \text{(inteiros negativos).}
\end{aligned}
$$

Definição 2.3. Ao conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\ ;\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\right\}$ damos o nome de *conjunto dos números racionais.*

Observação. A representação decimal de um número racional é finita ou é uma dízima periódica (infinita).

Exercício 1. Reescreva os números 0.6; 1.37; 0.222...; 0.313131... e 1.123123123... em forma de fração irredutível, ou seja, já simplificada.

Definição 2.4. O *conjunto dos números irracionais* é constituído por todos os números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica.

Exemplo 2.5. $\sqrt{2}$, e e π são números irracionais.

Demonstração. Provemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Para tal, suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$ tais que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível, ou seja, p e q não possuem nenhum fator comum nas suas decomposições em fatores primos. Note que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\implies 2 = \frac{p^2}{q^2}\\
&\implies 2q^2 = p^2.
\end{aligned}
$$

Isso é um absurdo pois, enquanto que o número $2q^2$ possui uma quantidade ímpar de fatores 2, o número p^2 possui uma quantidade par. Esse fato contraria o Teorema Fundamental da Aritmética, que garante a unicidade da decomposição dos números inteiros em fatores primos. Portanto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

As provas de que π e e são irracionais vão além do escopo desse texto. □

Comparando infinitos

Você sabia que existem infinitos "maiores" que outros? Qual conjunto você diria que tem mais elementos: racionais ou irracionais? O problema a seguir, proposto pelo matemático alemão David Hilbert em 1924, ilustra a ideia de enumeração de elementos de conjuntos infinitos.

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados con-

secutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:

— Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

— Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.

E ordenou:

— Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto n+1. Isso manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.

Logo depois, chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. Como deve proceder a recepcionista para acomodar todos?

Horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Como proceder para acomodá-los?

Atividade online. `Classifique números: racionais e irracionais`.

Atividade online. `Expressões racionais versus irracionais`.

Definição 2.6. À união de $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais, nomeamos de *conjunto dos números reais*. Denotamo-la por $\mathbb{R}$.

Usamos os números reais para medir grandezas contínuas. A cada número real está associado um ponto na reta graduada, e vice-versa.

O conjunto dos números reais é "denso" no sentido de que, entre quaisquer dois números reais distintos, há um número racional e um irracional. Já `este vídeo` da Khan Academy mostra que, além disso, entre dois racionais distintos sempre há um número irracional.

Quando se trata de números reais, são frequentes as ocasiões nas quais nossa intuição inicial pode ser falha. Uma delas é a respeito de dízimas periódicas. Você consegue afirmar se a igualdade $0\,999\ldots = 1$ é verdadeira?

Definição 2.7. Chamamos $i = \sqrt{-1}$ de *número imaginário*, e ao conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ damos o nome de *conjunto dos números complexos*.

Os conjuntos estudados até aqui estão relacionados por meio da seguinte cadeia de inclusões próprias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Definição 2.8. Seja $a + bi \in \mathbb{C}$. Nomeamos o número $a - bi$ de *conjugado* de $a + bi$.

2.3 Operações Básicas

Definem-se duas operações básicas com os elementos dos conjuntos numéricos: adição e multiplicação. A subtração e a divisão provêm da adição e da multiplicação, respectivamente. A diferença $a-b$ pode ser vista como $a+(-b)$, e a razão c/d, como $c \cdot (1/d)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $d \neq 0$.

Você está bem treinado nas operações com frações? Dê uma treinada na Khan Academy `aqui`!

2.4 Potenciação

Definição 2.9. A *potência* $n \in \mathbb{N}^*$ de um número real a é definida como sendo a multiplicação de a por ele mesmo n vezes, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Definição 2.10. Quando $a \neq 0$, $a^0 = 1$. 0^0 é uma indeterminação. Além disso, para $n \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$
$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

É comum definir $0^0 = 1$ dependendo de como se quer abordar as potências. Saiba mais `aqui`.

Proposição 2.11 (Propriedades)**.** Sejam $a, b, n, m \in \mathbb{R}$, a menos que se diga o contrário.

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, com $a \neq 0$ ou $m \neq -n$;

ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$;

iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, com $a \neq 0$ ou $m \cdot n \neq 0$;

iv. $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \ldots m}^{n \text{ vezes}}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, e $a \neq 0$ ou $m \neq 0$;

v. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, com $a \neq 0$ ou $a \cdot b \neq 0$;

vi. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$ e $n \neq 0$;

vii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, com $n \neq 0$, e $a \neq 0$ ou $m \neq 0$.

Observação. Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que $\sqrt{a^2} = |a|$. Mais geralmente, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n par. Além disso, é errado dizer que $\sqrt{4} = \pm 2$. O correto é $\sqrt{4} = 2$, mesmo que escrevas $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2}$.

O erro apresentado é comum, e o fator de confusão é que responder o conjunto-solução da equação $x^2 = 4$ não é equivalente a responder qual a raiz de 4, e sim responder quais números que elevados ao quadrado são iguais a 4.

Atividade online. `Propriedades da potenciação (expoentes racionais).`

Atividade online. `Simplifique raízes quadradas (variáveis).`

Atividade online. `Simplifique expressões de raiz quadrada.`

2.5 Exercícios

2.6 Bibliografia

[5] Elon L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.* 9ª ed. SBM, 2006.

[7] Valéria Z. Medeiros et al. *Em Pré-Cálculo.* 2ª ed. Cengage Learning, 2009.

Capítulo 3

Equações e Inequações

3.1 Introdução

Como você responderia se te perguntassem: Qual o número cujo dobro somado com sua quinta parte é igual a 121? Você já viu alguma brincadeira do tipo? A seguir, temos outro exemplo:

1. Escolha um número;

2. Multiplique esse número por 6;

3. Some 12;

4. Divida por 3;

5. Subtraia o dobro do número que você escolheu;

6. O resultado é igual a 4.

3.2 Equação do 1° grau

Definição 3.1. Uma *equação do primeiro grau* na variável x é uma expressão da forma

$$ax + b = 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x é um número real a ser encontrado.

Proposição 3.2 (Propriedades)**.** Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Os seguintes valem:

i) Se $a = b$ e $c = d$, então $a + c = b + d$. Em particular, vale a seguinte implicação $a = b \implies a + c = b + c$;

ii) Se $a = b$ e $c = d$, então $a \cdot c = b \cdot d$. Em particular, vale a seguinte implicação $a = b \implies ac = bc$.

Exemplo 3.3. Resolva a equação $5x - 3 = 6$.

Solução. Utilizaremos as propriedades dadas na Proposição 3.2 para resolver a equação.

$$\begin{aligned} 5x - 3 = 6 &\iff 5x - 3 + 3 = 6 + 3 && (i) \text{ com } c = 3) \\ &\iff 5x = 9 && \text{(Aritmética)} \\ &\iff \frac{5x}{5} = \frac{9}{5} && \left(ii\right), \text{ com com } c = \tfrac{1}{5}\right) \\ &\iff x = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Exemplo 3.4. Escreva em forma de expressões cada passo da brincadeira da Introdução:

1. Escolha um número;

2. Multiplique esse número por 6;

3. Some 12;

4. Divida por 3;

5. Subtraia o dobro do número que você escolheu;

6. O resultado é igual a 4.

Solução.

1. x

2. $6x$

3. $6x + 12$

4. $\frac{6x+12}{3}$

5. $\frac{6x+12}{3} - 2x$

6. $\frac{6x+12}{3} - 2x = 4$

Observação. Deve-se ter cuidado ao efetuar divisões em ambos os lados de uma equação para não cometer o erro de dividir os lados por zero. Do contrário, pode-se derivar absurdos matemáticos. A seguir, temos um exemplo de "prova" de que $1 = 2$:

$$\begin{aligned} 0 = 0 &\implies 1 - 1 = 2 - 2 \\ &\implies 1 \cdot \cancel{(1 - 1)} = 2 \cdot \cancel{(1 - 1)} \\ &\implies 1 = 2 \end{aligned}$$

Qual o erro?

Atividade online. `Modelo com equações de primeiro grau e resolução.`

Exemplo 3.5. Se x representa um dígito na base 10 na equação

$$x11 + 11x + 1x1 = 777,$$

qual o valor de x?

Solução. Seja $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Teremos:

$$\begin{aligned} x11 + 11x + 1x1 = 777 &\iff (100x + 11) + (x + 110) + (10x + 100 + 1) = 777 \\ &\iff 111x + 222 = 777 \\ &\iff 111x = 555 \\ &\iff x = 5 \end{aligned}$$

Logo, $x = 5$.

Exemplo 3.6. Determine se é possível completar o preenchimento do tabuleiro abaixo com os números naturais de 1 a 9, sem repetição, de modo que a soma de qualquer linha seja igual à de qualquer coluna ou diagonal.

1		6
	9	

Os tabuleiros preenchidos com essas propriedades são conhecidos como *quadrados mágicos*.

Solução. Seja c o valor constante da soma de cada uma das linhas, colunas ou diagonais. Note que a soma das 3 linhas será:

$$3c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \iff c = 15$$

Usaremos a notação posicional de matrizes para os quadrados q_{ij}. Da configuração inicial e da definição de quadrado mágico, além do valor de c, segue que:

$$\begin{aligned} 1 + q_{12} + 6 = 15 &\iff q_{12} = 8 \\ q_{12} + q_{22} + 9 = 15 &\iff 8 + q_{22} + 9 = 15 \\ &\iff q_{22} = -2 \end{aligned}$$

Os quadrados q_{ij} não podem conter números negativos. Logo, não é possível montar um quadrado mágico com a configuração inicial dada.

Exemplo 3.7. Imagine que você possui um fio de cobre extremamente longo, mas tão longo que você consegue dar a volta na Terra com ele. Para simplificar, considere que a Terra é uma bola redonda e que seu raio é de exatamente 6.378.000 metros.

O fio com seus milhões de metros está ajustado à Terra, ficando bem colado ao chão ao longo do Equador. Digamos, agora, que você acrescente 1 metro ao fio e o molde de modo que ele forme um círculo enorme, cujo raio é um pouco maior que o raio da Terra e tenha o mesmo centro. Você acha que essa folga será de que tamanho?

Solução. Consideremos C o comprimento do círculo máximo da Terra, r e r' os raios desse círculo antes e depois do aumento do fio, respectivamente, e f o tamanho da folga. Ora,

$$\begin{aligned} C + 1 = 2\pi r' &\iff 2\pi r + 1 = 2\pi r' && (C = 2\pi r) \\ &\iff 2\pi r + 1 = 2\pi (r + f) = 2\pi r + 2\pi f && (r' = r + f) \\ &\iff 1 = 2\pi f \\ &\iff f = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Logo, $f = 1/(2\pi)$ metros.

No Exemplo 3.7, a folga obtida aumentando-se o fio independe do raio em consideração. Além desse problema, veja outras curiosidades sobre o número π no vídeo `O Pi existe` e tente calculá-lo em casa usando algum objeto redondo.

3.3 Equação do 2° grau

Definição 3.8. A *equação do segundo grau* com coeficientes a, b e c é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x é uma variável real a ser determinada.

Exemplo 3.9. Encontre as soluções de uma equação do segundo grau.

Solução. Da Definição 3.8, sabemos que uma equação do segundo grau tem a seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Manipulemos a equação para encontrar o valor de x:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\iff \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\pm 2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Portanto, quando $b^2 - 4ac \geq 0$, o conjunto-solução S da equação será:

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Atividade online. `Equações do segundo grau com cálculo de raízes quadradas: com etapas`.

Atividade online. `Método de completar quadrados`.

Definição 3.10. Chamamos de *discriminante* da equação do segundo grau a expressão $b^2 - 4ac$ e denotamos pela letra grega maiúscula Δ (lê-se delta).

Observação. O número de soluções de uma equação do segundo grau é totalmente determinado pelo sinal do seu discriminante, de forma tal que:

- Se $\Delta > 0$, existem duas soluções reais;
- Se $\Delta = 0$, existe uma solução real ($x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$);
- Se $\Delta < 0$, não existe solução real.

Exemplo 3.11. Sabendo que x é um número real que satisfaz a equação:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$

determine os valores possíveis de x.

Solução. Manipulemos a equação:

$$\begin{aligned} x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} &\iff x\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right) + 1 \\ &\iff x+1 = \frac{1}{x} + 2 \\ &\iff x^2 + x = 1 + 2x \\ &\iff x^2 - x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, as soluções são $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observação. O número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como razão áurea, número de ouro, proporção divina, entre outras denominações. Veja o episódio A Proporção Divina `parte 01` e `parte 02` do programa português Isto É Matemática.

Atividade online. `Fórmula de Bhaskara`.

Teorema 3.12. Os números α e β são as raízes da equação do segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se, e somente se,

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \text{ e } \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Demonstração. Sejam α e β raízes da equação do 2° grau $ax^2+bx+c = 0$. Do Exemplo 3.9, calculando $\alpha + \beta$, obtemos:

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

A demonstração de $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ fica como exercício para o leitor.

Reciprocamente, se $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ e $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$, então, da fatoração de $ax^2 + bx + c$, segue que:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + -(\alpha+\beta)\,x + \alpha\beta\right] = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta) = 0.$$

Logo, α e β são raízes da equação do segundo grau. □

3.4 Inequação do 1° grau

Definição 3.13. Uma *inequação do primeiro grau* é uma relação de uma das seguintes formas:

$$ax + b < 0;$$
$$ax + b > 0;$$
$$ax + b \leq 0;$$
$$ax + b \geq 0;$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Lemos os símbolos da seguinte maneira: $<$ (menor que), $>$ (maior que), $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que).

Observação. O *conjunto solução* de uma inequação do primeiro grau é o conjunto S de números reais que satisfazem a inequação, isto é, o conjunto de números que, quando substituídos na inequação, tornam a desigualdade verdadeira.

Proposição 3.14. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Os seguintes valem:

i. Invariância por adição de números reais: $a < b \implies a + c < b + c$;

ii. Invariância por multiplicação de números reais positivos: $a < b; c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$;

iii. Mudança por multiplicação de números reais negativos: $a < b; c < 0 \implies a \cdot c > b \cdot c$;

iv. Se $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, para a e b ambos positivos, ou ambos negativos;

v. Se $a, b \geq 0$ e $c > 0$, segue que $a < b \implies a^c < b^c$;

vi. Se $a, b < 0$ e n par, segue que $a < b \implies a^n > b^n$;

vii. Se $a, b < 0$ e n ímpar, segue que $a < b \implies a^n < b^n$;

viii. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;

ix. Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Se $a < b$ e $c < d$, então $ac < bd$.

Os resultados são análogos para os tipos $>$, $\leq$ e $\geq$.

Exemplo 3.15. Qual o conjunto solução da inequação $8x - 4 \geq 0$?

Solução. Note que:

$$\begin{aligned} 8x - 4 \geq 0 &\iff 8x \geq 4 \\ &\iff x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, o conjunto-solução da equação é $S = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geq 1/2\}$. A seguir, é exibida uma resolução alternativa da inequação:

$$\begin{aligned} 8x - 4 \geq 0 &\iff -4 \geq -8x \\ &\iff \frac{-4}{-8} \leq x \\ &\iff \frac{1}{2} \leq x \end{aligned}$$

Exemplo 3.16. Antes de fazer os cálculos, diga qual dos números $a = 3456784 \cdot 3456786 + 3456785$ e $b = 3456785^2 - 3456788$ é maior.

Solução. Suponha que $a > b$. Faça $x = 3456784$. Teremos:

$$\begin{aligned} x(x+2) + x + 1 > (x+1)^2 - (x+4) &\iff x(x+1+1) + x + 1 > (x+1)^2 - (x+4) \\ &\iff x\,(x+1) + x + (x+1) > (x+1)^2 - x - 4 \\ &\iff (x+1)\,(x+1) + x > (x+1)^2 - x - 4 \\ &\iff (x+1)^2 > (x+1)^2 - 2x - 4 \\ &\iff 0 > -2x - 4 \\ &\iff 4 > -2x \\ &\iff -2 < x, \end{aligned}$$

o que é uma verdade pois $x = 3456784$. Logo, $a > b$.

Atividade online. `Problemas com Inequações`.

3.5 Inequação do 2° grau

Definição 3.17. Uma *inequação do segundo grau* é uma relação de uma das formas a seguir:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &< 0; \\ ax^2 + bx + c &> 0; \\ ax^2 + bx + c &\leq 0; \\ ax^2 + bx + c &\geq 0; \end{aligned}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

Exemplo 3.18. Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$;

b) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Solução. Observe que:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

Logo, teremos o seguinte “estudo do sinal” da expressão $(x-2)(x-1)$:

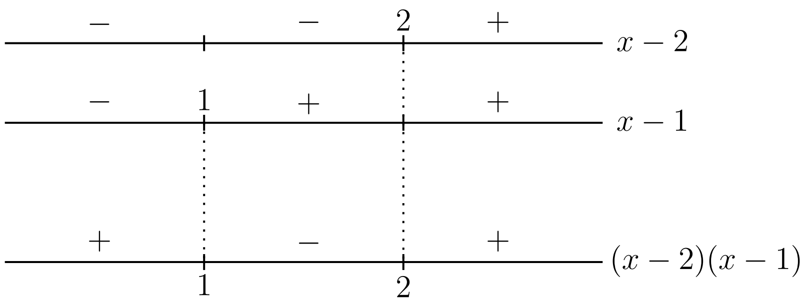


Imagem 3.1

Assim, a solução S para inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$ será $S = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x < 1 \text{ ou } x > 2\}$. Analogamente, a solução S' para a inequação $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ será $S' = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ 1 \leq x \leq 2\}$. Ademais, S' pode ser obtida a partir de S da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S' &= S^C \\ &= \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x < 1 \text{ ou } x > 2\}^C \\ &= \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq 1 \text{ e } x \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}\ ;\ 1 \leq x \leq 2\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.19. Prove que a soma de um número positivo com seu inverso multiplicativo é sempre maior ou igual a 2.

Demonstração. Queremos demonstrar que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, para todo $x > 0$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}$. Observe que:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0.$$

Sendo assim, basta demonstrar que $x + \dfrac{1}{x} - 2 \geq 0$. Calculando o termo do lado esquerdo obtemos:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} - 2 &= \frac{x \cdot x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos realizar o estudo de sinal da expressão $\dfrac{(x-1)^2}{x}$ da seguinte forma:

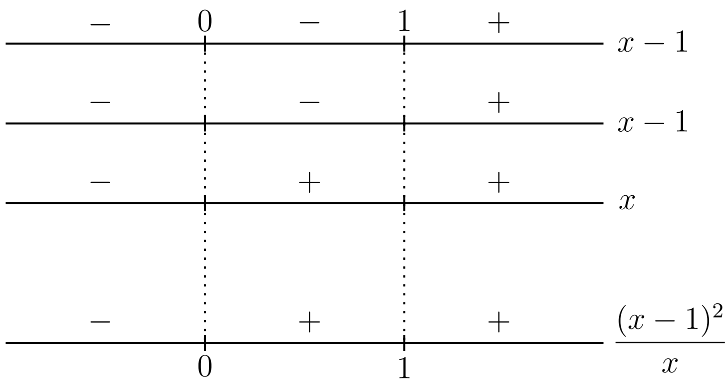


Imagem 3.2

Portanto, para que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, é necessário e suficiente que $x > 0$ como queríamos demonstrar. □

3.6 Módulos

Definição 3.20. O *módulo* (ou *valor absoluto*) de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Para resolver equações modulares, usaremos dois métodos:

- Eliminação do módulo pela definição;
- Partição em intervalos.

Exemplo 3.21. Resolva as equações

(a) $|2x - 5| = 3$;

(b) $|2x - 3| = 1 - 3x$;

(c) $|3-x|-|x+1|=4$.

Solução.

(a) Note que:

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & \text{se } 2x-5 \geq 0 \iff x \geq 5/2 \\ -(2x-5), & \text{se } 2x-5 < 0 \iff x < 5/2 \end{cases}$$

Se $x \geq 5/2$, teremos:

$$\begin{aligned} |2x-5| = 3 &\iff 2x-5=3 \\ &\iff x=4 \end{aligned}$$

Como $x = 4 \geq 5/2$, temos que $4 \in S$.

Se $x < 5/2$, teremos:

$$\begin{aligned} |2x-5| = 3 &\iff -(2x-5)=3 \\ &\iff -2x=-2 \\ &\iff x=1 \end{aligned}$$

Como $x = 1 < 5/2$, então $1 \in S$.

Das análises dos dois casos, concluímos que o conjunto solução é $S = \{1, 4\}$.

(b) Observe que:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } 2x-3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x-3), & \text{se } 2x-3 < 0 \iff x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Se $x \geq 3/2$, teremos:

$$\begin{aligned} |2x-3| = 1-3x &\iff 2x-3=1-3x \\ &\iff x=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Como $4/5 < 3/2$, então $4/5 \notin S$.

Se $x < 3/2$, teremos:

$$\begin{aligned} |2x-3| = 1-3x &\iff -(2x-3)=1-3x \\ &\iff x=-2 \end{aligned}$$

Como $-2 < 3/2$, então $-2 \in S$.

Das análises dos dois casos, concluímos que o conjunto solução é $S = \{-2\}$.

(c) Note que:

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{se } 3-x \geq 0 \iff x \leq 3 \\ -(3-x), & \text{se } 3-x < 0 \iff x > 3 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \iff x < -1 \end{cases}$$

- Caso $x < -1$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| = 4 &\iff 3 - x - [-(x+1)] = 4 \\ &\iff 4 = 4 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  Temos, então, que $x < -1$ é solução para a equação.

- Caso $-1 \leq x \leq 3$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| = 4 &\iff 3 - x - (x+1) = 4 \\ &\iff -2x + 2 = 4 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

  Logo, $x = -1$ é solução da equação.

- Caso $x > 3$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| = 4 &\iff -(3-x) - (x+1) = 4 \\ &\iff -4 = 4 \end{aligned}$$

  Nesse caso, não há soluções.

Das análises dos casos, conclui-se que $S = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leq -1\}$.

Atividade online. `Resolva Equações Modulares`.

Proposição 3.22 (Propriedades de inequações modulares)**.** Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

i) $|x| \geq 0$;

ii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;

iii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$;

iv) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Os resultados (ii) e (iii) também são válidos para os casos com $\leq$ ou $\geq$.

Exemplo 3.23. Resolva as inequações:

(a) $|2x-5|<3$;

(b) $|2x-3| \geq 1-3x$;

(c) $|3-x|-|x+1| \leq 4$.

Solução.

(a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Note que:

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{se } 3-x \geq 0 \iff x \leq 3 \\ -(3-x), & \text{se } 3-x < 0 \iff x > 3 \end{cases}$$

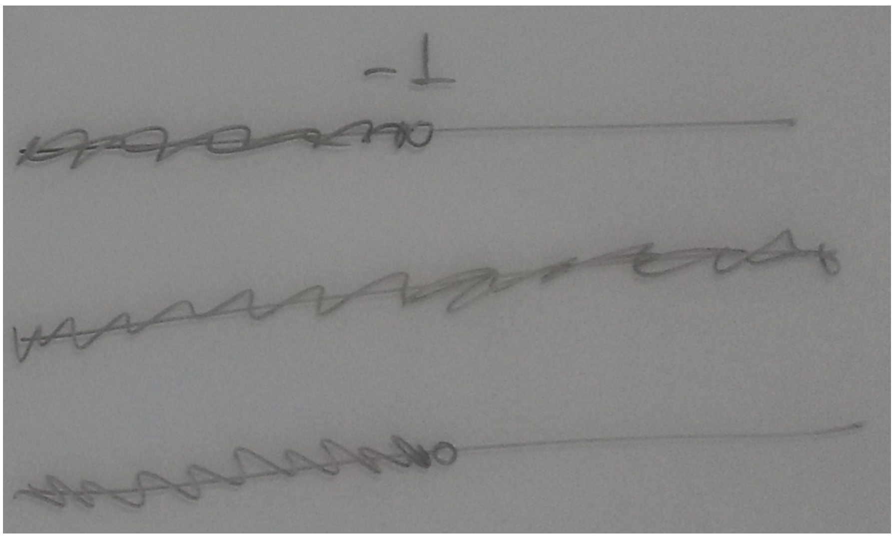
$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \iff x \geq 1 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \iff x < -1 \end{cases}$$

- Caso $x < -1$:

$$\begin{aligned} |3-x|-|x+1| \leq 4 &\iff 3-x-[-(x+1)] \leq 4 \\ &\iff 4 \leq 4 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A interseção das restrições para este caso é calculada na Figura 3.3.

Imagem 3.3



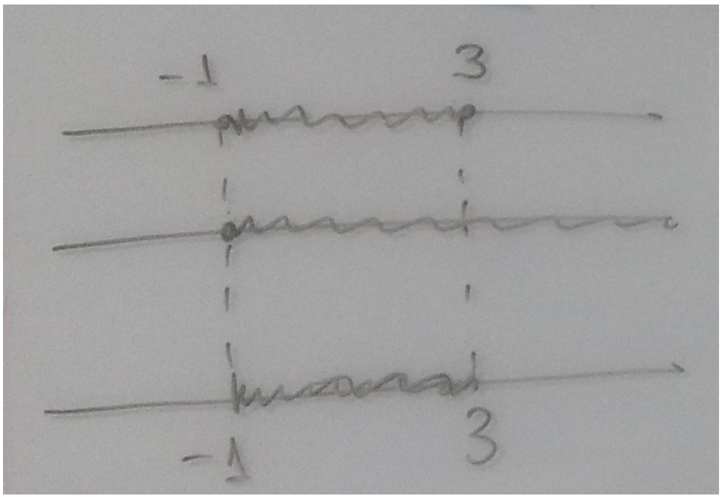
Da figura, conclui-se que $x < -1$ é solução para a inequação.

- Caso $-1 \leq x \leq 3$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| \leq 4 &\iff 3 - x - (x+1) \leq 4 \\ &\iff -2x + 2 \leq 4 \\ &\iff x \geq -1 \end{aligned}$$

A interseção das restrições para este caso é calculada na Figura 3.4.

Imagem 3.4



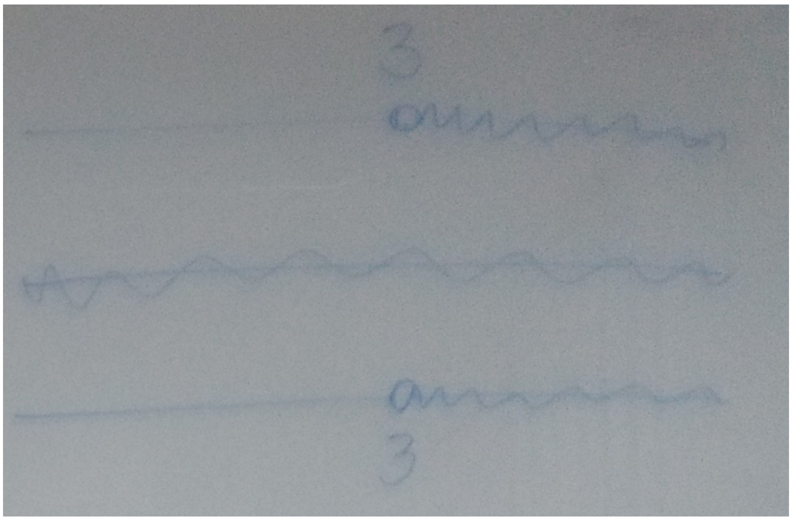
Pela figura, conclui-se que $-1 \leq x \leq 3$ é solução para a inequação.

- Caso $x > 3$:

$$\begin{aligned} |3-x| - |x+1| \leq 4 &\iff -(3-x) - (x+1) \leq 4 \\ &\iff -4 \leq 4 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Na Figura 3.5, é calculada a interseção das restrições para este caso.

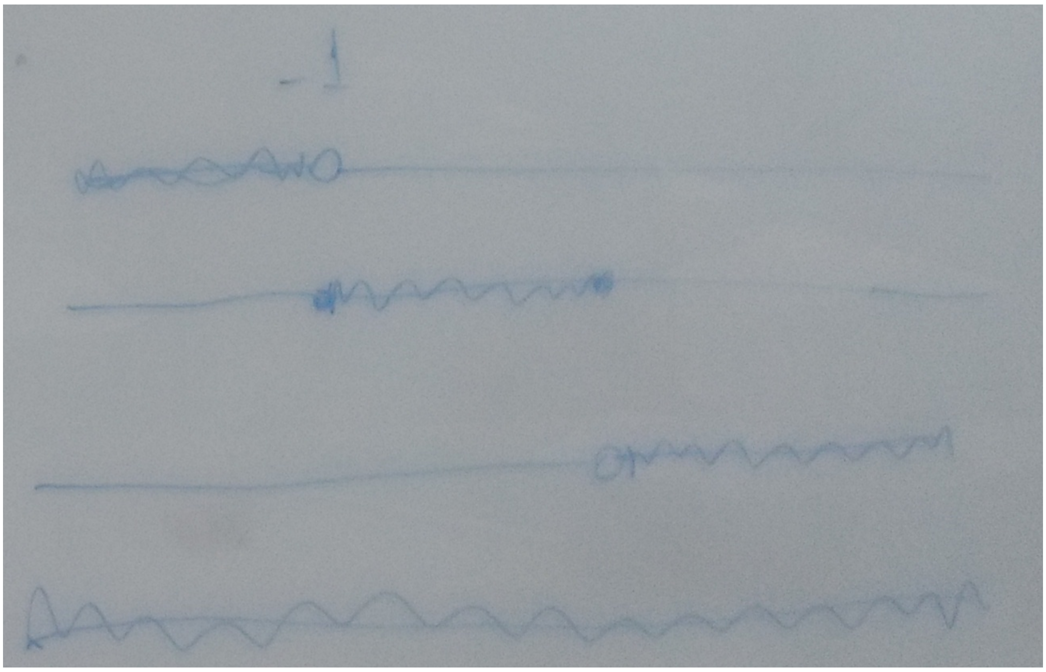
Imagem 3.5



A partir da análise da figura, conclui-se que $x > 3$ também é solução para a inequação.

Na Figura 3.6, é calculada a união das soluções de todos os casos.

Imagem 3.6



Das análises dos três casos e da figura, pode-se concluir que o conjunto solução da inequação é o próprio conjunto dos números reais.

3.7 Desigualdades Clássicas

Para iniciar, apresentamos algumas desigualdades simples mas famosas, válidas para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|a| \geq 0$;
- $a^2 \geq 0$;
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

Teorema 3.24. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $x = y$.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Sabemos que $(x - y)^2 \geq 0$. Segue que:

$$\begin{aligned}(x-y)^2 \geq 0 &\iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ &\iff 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\iff xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}\end{aligned}$$

Ademais, note que a igualdade $xy = \frac{x^2+y^2}{2}$ ocorre quando:

$$\begin{aligned}xy = \frac{x^2 + y^2}{2} &\iff (x-y)^2 = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y\end{aligned}$$

□

Teorema 3.25. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_+$, vale:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Sejam $a, b \in R_+$. Para provar o teorema, basta aplicar o Teorema 3.24 com $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$. □

Teorema 3.26 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica)**.** Para quaisquer $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, vale:

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Teorema 3.27 (Desigualdade das médias harmônica e geométrica)**.** Para quaisquer $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, vale:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Considere $b_i = \frac{1}{a_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Usando o Teorema 3.26 com todos os b_i, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{b_1 \cdot \cdots \cdot b_n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} &\iff \frac{n}{b_1 + \cdots + b_n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{b_1 \cdot \cdots \cdot b_n}} \\
&\iff \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{n}{a_n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}}} \\
&= \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}
\end{aligned}$$

□

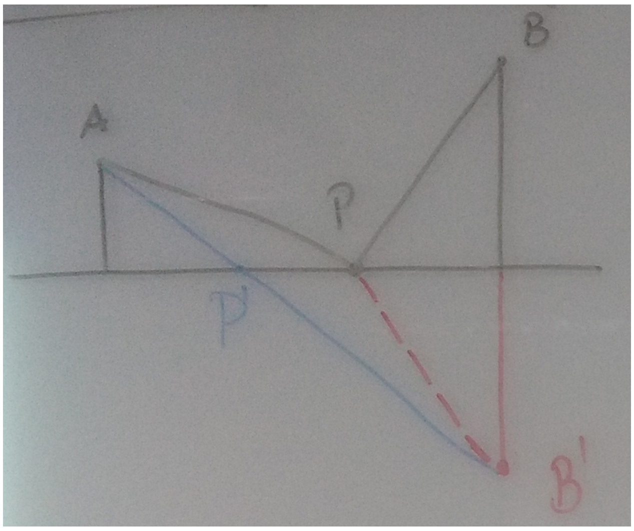
Teorema 3.28 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Sejam $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n \in \mathbb{R}$. O seguinte vale:

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real α tal que $x_1 = \alpha y_1$, ..., $x_n = \alpha y_n$.

Exemplo 3.29. Duas torres são amarradas por uma corda APB que vai do topo A da primeira torre para um ponto P no chão, entre as torres, e então até o topo B da segunda torre. Qual a posição do ponto P que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?

Solução. Tomando B' como o reflexo de B em relação ao chão, conforme a Figura 3.7, temos que o comprimento da corda $\overline{AP} + \overline{PB}$ é igual a $\overline{AP} + \overline{PB'}$.



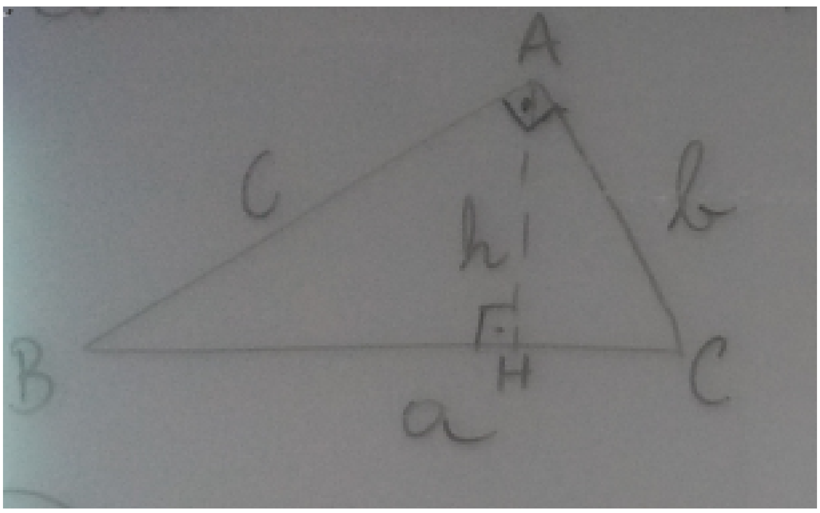
Traçando AB' e tomando P' como a interseção de AB' com o chão, tem-se que P' é a solução do problema pois, pela desigualdade triangular, segue que:

$$\begin{aligned}\overline{AP'} + \overline{P'B} &= \overline{AP'} + \overline{P'B'} \\ &= \overline{AB'} \\ &\leq \overline{AP} + \overline{PB'} \\ &= \overline{AP} + \overline{PB}\end{aligned}$$

Logo, $\overline{AP'} + \overline{P'B} \leq \overline{AP} + \overline{PB}$.

Exemplo 3.30. Prove que, num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual que a metade da hipotenusa. Prove, ainda, que a igualdade só ocorre quando o triângulo retângulo é isósceles.

Solução. Considere um triângulo retângulo como o da Figura 3.7.



Queremos provar que $h \leq \frac{a}{2}$. Da semelhança entre AHC e BAC, segue que:

$$\frac{b}{h} = \frac{a}{c} \iff ah = bc$$

Do Teorema 3.24, segue que:

$$ah = bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2}{2},$$

ou seja,

$$ah \leq \frac{a^2}{2} \iff h \leq \frac{a}{2}.$$

Além disso, a igualdade só será válida quando $b = c$, ou seja, quando o triângulo for isósceles.

Exemplo 3.31. Prove que, entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b, e com hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $S = a + b$ é o triângulo isósceles.

Solução. Seja um triângulo retângulo com hipotenusa c fixada e catetos a e b. Utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz com $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = 1$ e $y_2 = 1$, temos que:

$$|a \cdot 1 + b \cdot 1| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} \iff S = a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Além disso, da Desigualdade, segue que S é igual a $c\sqrt{2}$, ou seja, atinge seu valor máximo se, e somente se, $a = \alpha \cdot 1$ e $b = \alpha \cdot 1$ para certo $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, o triângulo deve ser isósceles, com $a = b$.

3.8 Exercícios

Exercício 1. Descubra os valores de x de modo que seja possível completar o preenchimento do quadrado mágico abaixo:

	x	

Exercício 2. Observe as multiplicações a seguir:

i. $12.345.679 \cdot 18 = 222.222.222$

ii. $12.345.679 \cdot 27 = 333.333.333$

iii. $12.345.679 \cdot 54 = 666.666.666$

Para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por quanto?

Exercício 3. Com algarismos x, y e z não todos nulos formam-se os números de dois algarismos xy e yx, cuja soma é o número de três algarismos zxz. Quanto valem x, y e z?

Exercício 4. Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

Exercício 5. O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c.

Exercício 6. Sejam α_1 e α_2 as raízes da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$. Calcule as seguintes expressões em função de a, b e c:

(a)
$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

(b)
$$\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

(c)
$$\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}$$

Dica: no item (c), inicie calculando o quadrado da expressão.

Exercício 7. Dada as frações

$$\frac{966666555557}{966666555558} \text{ e } \frac{966666555558}{966666555559},$$

qual é a maior?

Exercício 8. Nove cópias de certas notas custam menos de R$ 10,00 e dez cópias das mesmas notas (custando o mesmo preço cada uma) custam mais de R$ 11,00. Quanto custa uma cópia das notas?

Exercício 9. Ache os valores de x para os quais cada uma das seguintes expressões é positiva:

a.
$$\frac{x}{x^2+9};$$

b.
$$\frac{x-3}{x+1};$$

c.
$$\frac{x^2-1}{x^2-3}.$$

Exercício 10. Sejam a, b, c, $d > 0$ tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Exercício 11. Mostre que se r e s são números racionais positivos satisfazendo $r < s$, então existe um outro número racional q tal que $r < q < s$.

Exercício 12. Determine o conjunto solução de cada uma das equações ou inequações modulares abaixo:

a. $|3x-5| = 7$;

b. $|-x+8| = -1$;

c. $|x^2-1| = 3$;

d. $|x+1| + |-3x+2| = 6$;

e. $|x-1| \cdot |x+2| = 3$;

f. $|x^2-1| \leq 3$;

g. $|x-1| + |x+1| > 2$;

h. $|x+1| - |x-1| < -2$.

Exercício 13. Prove que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 14. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

a. $|x-5| < 0{,}1 \implies |2x-10| < 0{,}2$;

b. $|x+3| < 0{,}1 \implies \left|-\frac{3}{2}x + 3 - 7{,}5\right| < 0{,}15$;

c. $|x-2| < \sqrt{5} - 2 \implies |x^2-4| < 1$.

Exercício 15. Quatro cidades rurais *Abaeté*, *Bertioga*, *Caicó* e *Diamantina* estão situadas geograficamente como a figura abaixo.

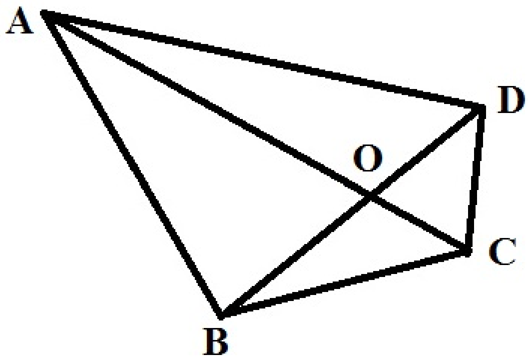


Imagem 3.7. Disposição das cidades.

A empresa *Ozymandias* deseja construir uma central de distribuição de energia para as quatro cidades de modo que a soma total das distâncias da central a cada uma das quatro cidades seja a mínima possível. Mostre que a central deve ser construída no ponto O, que é o ponto em comum dos segmentos AC e BD.

Exercício 16. Provar que em todo triângulo a soma dos comprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semiperímetro (metade do perímetro) dele.

Exercício 17. Prove que $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\,(a + b + c)$.

Exercício 18. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Prove que

$$(a + b)\,(a + c)\,(b + c) \geq 8abc.$$

Exercício 19. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. Prove que

$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

Exercício 20. A soma de três números positivos é 6. Prove que a soma de seus quadrados não é menor que 12.

3.9 Bibliografia

[8] Krerley I. M. Oliveira e Adan J. C. Fernandez. *Estágio dos Alunos Bolsistas - OBMEP 2005 - 4. Equações, Inequações e Desigualdades*. SBM, 2006.

[9] Krerley I. M. Oliveira e Adan J. C. Fernandez. *Iniciação em Matemática: um Curso com Problemas e Soluções*. 2ª ed. SBM, 2010.

Capítulo 4

Princípio da Indução Finita

4.1 Introdução

Imagine uma fila com infinitos dominós, um atrás do outro. Suponha que eles estejam de tal modo distribuídos que, uma vez que um dominó caia, o seu sucessor na fila também cai. O que acontece quando derrubamos o primeiro dominó? Não podemos dizer que todas as peças cairão, pois seria preciso um tempo infinito para que isso ocorresse. Porém, se desejas que alguma peça específica caia, basta ter tempo disponível que isso ocorrerá em algum momento.

O princípio da indução finita pode ser interpretado como essa fila com infinitos dominós. Se quisermos provar que um determinado resultado vale para qualquer número natural a partir de um valor especificado $n_0 \in \mathbb{N}$, basta verificar que:

- O resultado proposto é válido para n_0, representando o primeiro dominó sendo derrubado;
- Se o resultado for válido para algum $n \in \mathbb{N}$, então o resultado também é válido para $n + 1$, representando que qualquer peça de dominó ao cair, derrubará a peça seguinte.

4.2 Princípio da Indução Finita

O Princípio da indução finita é um Teorema muito usado. Nosso objetivo não é demonstrá-lo. Queremos usá-lo em situações e problemas mais elementares para possibilitar o entendimento e uso básico dessa poderosa ferramenta.

Teorema 4.1 (Princípio da Indução Finita)**.** Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $p\,(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:

(a) $p\,(n_0)$ é verdadeira;

(b) Se $p(n)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.

Então, $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

Observação. No Teorema 4.1, a afirmação (a) é chamada de *base da indução*, e a (b), de *passo indutivo*. O fato de que $p(n)$ é verdadeira no item (b) é chamado de *hipótese de indução*.

Exemplo 4.2. Demonstre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, é válida a igualdade:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Solução. A fim de provar que a soma dos n primeiros números pares é igual a $n(n+1)$, ou seja, $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, aplicaremos indução em n.
– *Caso base* $[n = 1]$: Observe que $2 = 1(1+1)$, ou seja, a soma do primeiro número par (somente o 2) é igual a $1(1+1)$. Logo, o caso base é válido.
– *Passo indutivo*: Suponha, como Hipótese de Indução (HI), que para algum $n \in \mathbb{N}^*$, vale a equação:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Provemos então que:

$$2 + 4 + \cdots + 2n + 2(n+1) = (n+1)[(n+1)+1].$$

De fato, segue da (HI) que:

$$\begin{aligned}
\underbrace{2 + 4 + \cdots + 2n}_{\text{HI}} + 2(n+1) &= \underbrace{n(n+1)}_{\text{HI}} + 2(n+1) \\
&= (n+1)(n+2) \\
&= (n+1)[(n+1)+1].
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que o passo indutivo é satisfeito. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a equação $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 4.3. Demonstre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, é válida a igualdade:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Solução. Demonstremos que a igualdade vale aplicando Indução em n.
– *Caso base* $[n = 1]$: Como $1 = 1^2$, o caso base é válido.
– *Passo indutivo*: Assuma, como Hipótese de Indução (HI), que a igualdade vale para algum $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Provemos a validade da equação:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2.$$

Calculando o lado esquerdo da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}_{\text{HI}} + [2(n + 1) - 1] &= \underbrace{n^2}_{\text{HI}} + 2n + 1\\ &= (n + 1)^2\end{aligned}$$

Com isso, provamos que o passo indutivo é válido. Portanto $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 4.4. Mostre que, para todo número $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > 3$ vale:

$$2^n < n!$$

Solução. Considere $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > 3$. Provemos que $2^n < n!$ aplicando Indução em n.
– *Caso base* $[n = 4]$: Temos $2^4 = 16$ e $4! = 24$. Como $16 < 24$, o caso base é satisfeito.
– *Passo Indutivo*: Suponha, como Hipótese de Indução, que vale $2^n < n!$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > 3$.

Provemos que vale $2^{n+1} < (n + 1)!$. Inicialmente, observe que $2 < n + 1$, visto que $2 < 3 < n < n + 1$. Também temos que 2 e 2^n são positivos. Sendo assim, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}2^n < n! \text{ e } 2 < n + 1 &\implies 2^n \cdot 2 < n!(n + 1)\\ &\implies 2^{n+1} < (n + 1)!.\end{aligned}$$

Assim provando que vale o passo indutivo. Portanto, $2^n < n!$ para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > 3$.

Exemplo 4.5. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicais}} < 2.$$

Solução. Aplicaremos o Princípio da Indução Finita em $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Caso base* $(n = 1)$:

  $\sqrt{2} < 2$ é válido.

- *Passo indutivo*:

Suponha a validade da inequação para algum $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

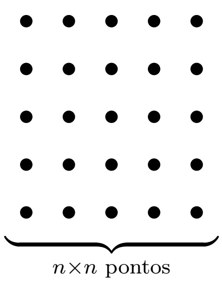
$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{k \text{ radicais}} < 2.$$

Da hipótese de indução, segue que:

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{k \text{ radicais}} < 2+2 \implies \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{k+1 \text{ radicais}} < \sqrt{4} = 2.$$

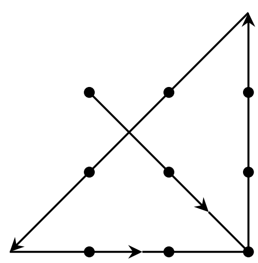
Logo, a inequação é válida para $n = k+1$; e, assim, concluímos a validade da inequação para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 4.6. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Mostre que podemos cobrir os n^2 pontos no reticulado a seguir traçando $2n-2$ segmentos de reta sem tirar o lápis do papel.

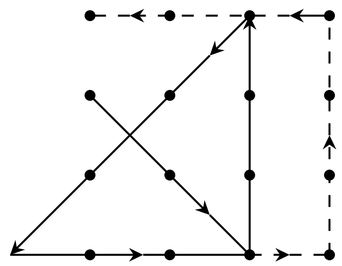


Solução. Aplicaremos indução finita em $n \geq 3$, valor que determina a quantidade de pontos do reticulado e de segmentos de reta que podem ser utilizados.

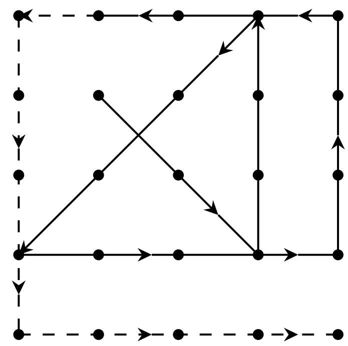
- *Caso base*[$n = 3$]: Uma solução usando $2 \cdot 3 - 2 = 4$ segmentos de reta sem tirar o lápis do papel pode ser vista na figura abaixo.



- *Passo indutivo*: Para a demonstração do passo indutivo, fugiremos um pouco do modelo que estamos apresentando até então e apresentaremos como a solução para o caso $n = 3$ nos traz a solução para o caso $n = 4$ e desse, para o caso $n = 5$. Isto a fim de mostrar que através da repetição do método, a solução para algum $n \geq 3$ implica na solução para $n + 1$.



$n = 4$



$n = 5$

Note que o problema oferece mais dois segmentos de reta a cada caso. Ademais, verificamos que a partir da solução anterior é sempre possível preencher os novos pontos com mais dois segmentos de retas, que foram representados por segmentos tracejados nas figuras. Dessa forma, verificamos o passo indutivo.

Assim, é possível cobrir um reticulado $n \times n$ com $2n - 2$ segmentos de reta sem tirar o lápis do papel.

Exemplo 4.7. Um rei muito rico possui 3^n moedas de ouro, onde $n \in \mathbb{N}^*$. No entanto, uma dessas moedas é falsa, e seu peso é menor que o peso das demais. Com uma balança de dois pratos e sem nenhum peso, mostre que é possível encontrar a moeda falsa com apenas n pesagens.

Solução. Dado que o rei tem 3^n moedas, usaremos indução finita em $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Caso base* $[n = 1]$: Para $n = 1$, ou seja, três moedas, coloca-se uma moeda em cada prato. Se as moedas tiverem pesos iguais, então a moeda falsa é a que não foi colocada na balança. Do contrário, a moeda falsa é a mais leve.

- *Passo indutivo*: Como hipótese de indução, suponhamos que, para algum $n \in \mathbb{N}^*$, seja possível identificar a moeda falsa dentre 3^n moedas realizando-se n pesagens. Suponha que temos 3^{n+1} moedas.

  Separando as moedas em três grupos com 3^n moedas cada, coloca-se um grupo em cada prato da balança. Assim, analogamente ao caso $n = 1$, identificamos o grupo com a moeda falsa. Tal grupo tem 3^n moedas e, pela hipótese de indução, pode-se identificar a moeda falsa com mais n pesagens, totalizando $n + 1$ pesagens. Concluímos assim a veracidade do passo indutivo.

  Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, é possível identificar a moeda falsa dentre 3^n moedas com apenas n pesagens.

Teorema 4.8. Para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, vale:

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Demonstração. Provemos, inicialmente, que a desigualdade é válida quando n é uma potência de 2. Para tal, seja $n = 2^m$, com $m \in \mathbb{N}$. Usaremos o Princípio da Indução Finita em m.

- *Caso base* $[m = 0]$: Para $m = 0$, temos $n = 1$. Seja $a_1 \in \mathbb{R}_+$. Note que $\sqrt[1]{a_1} = a_1 \leq \frac{a_1}{1}$. Assim, a desigualdade é válida para $m = 0$.

- *Passo indutivo*: Como hipótese de indução, suponha, para algum $m = k \in \mathbb{N}$ — ou seja, $n = 2^k$ —, que vale:

$$\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_{2^k}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}$$

  Agora, provemos que a desigualdade é válida para $m = k + 1$ — isto é, $n = 2^{k+1}$—. De fato,

$$\begin{aligned}
\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}} &= \sqrt[2]{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}} \\
&= \sqrt[2]{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}} \\
&\leq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}}{2} && \text{(Teorema 3.25)} \\
&\leq \frac{\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} && \text{(HI)} \\
&= \frac{\frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
&= \frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a desigualdade vale quando n é uma potência de 2.

Provemos, agora, o caso geral. Para tanto, seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Tomemos o menor $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq 2^m$. Além disso, definamos $L = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Pelo que acabamos de provar, é válido que:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + \overbrace{L + \ldots + L}^{2^m - n \text{ vezes}}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 \cdot \ldots + \cdot a_n \cdot L^{2^m - n}}$$

No entanto, note que:

$$\begin{aligned}
\sqrt[2^m]{a_1 \cdot \ldots + \cdot a_n \cdot L^{2^m - n}} &= \sqrt[2^m]{L^n \cdot L^{2^m - n}} \\
&= \sqrt[2^m]{L^{2^m}} \\
&= L
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + (2^m - n)L}{2^m} \geq L \implies a_1 + \ldots + a_n \geq 2^m L - (2^m - n)L = n \cdot L$$
$$\implies \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $n \in N$. □

4.3 Princípio Forte da Indução Finita

Teorema 4.9 (Princípio Forte da Indução Finita)**.** Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $p\,(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:

(a) $p\,(n_0)$ é verdadeira;

(b) Se para cada inteiro não negativo k, com $n_0 \leq k \leq n$, temos que $p\,(k)$ é verdadeira, então $p\,(n+1)$ também é verdadeira.

Então, $p\,(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

Teorema 4.10 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** Todo número natural N maior que 1 pode ser escrito como um produto

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_m, \tag{4.1}$$

onde $m \geq 1$ é um número natural e os p_i, $1 \leq i \leq m$, são números primos. Além disso, a fatoração exibida na Equação 4.1 é única se exigirmos que $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$.

Demonstração. Seja N um número natural maior que 1. Provemos, inicialmente, que existe uma fatoração de N em primos. Para isso, usaremos o Princípio Forte da Indução Finita.

- *Caso base* $[N = 2]$: O N já é sua própria fatoração em primos, pois 2 é um número primo.
- *Passo indutivo*: Suponhamos, como hipótese indutiva, que todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq N-1$ pode ser escrito como um produto de primos. Para provar que N também tem essa propriedade, consideremos os casos a seguir:
  - N *é primo*. Essa situação é similar à base: N já é um produto de primos;
  - N *é composto*. Nesse caso, N pode ser escrito como um produto ab, em que a e b são números naturais maiores que 1 e menores que N. Consequentemente,

pela hipótese indutiva, $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n_a}$ e $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_{n_b}$ para alguns $n_a, n_b \geq 1$, e p's e q's primos. Logo, $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n_a} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_{n_b}$, e, portanto, pode ser escrito como um produto de primos.

A demonstração da unicidade da fatoração vai além do escopo deste texto.

□

Exemplo 4.11. Critique a argumentação a seguir.

Quer-se provar que todo número natural é pequeno. Evidentemente, 1 é um número pequeno. Além disso, se n for pequeno, $n+1$ também o será, pois não se torna grande um número pequeno simplesmente somando-lhe uma unidade. Logo, por indução, todo número natural é pequeno.

Solução. O problema da argumentação é que a propriedade "pequeno" não é algo bem definido para números naturais. Para utilizarmos o Princípio da indução finita para se provar algum resultado, é preciso que o resultado seja algo bem definido.

Exemplo 4.12. Considere a seguinte afirmação, evidentemente falsa:

Em um conjunto qualquer de n bolas, todas as bolas possuem a mesma cor.

Analise a seguinte demonstração por indução para a afirmação anterior e aponte o problema da demonstração.

Para $n = 1$, nossa proposição é verdadeira pois em qualquer conjunto com uma bola, todas as bolas têm a mesma cor, já que só existe uma bola.

Assumamos, por hipótese de indução, que a afirmação é verdadeira para n e provemos que a afirmação é verdadeira para $n+1$.

Ora, seja $A = \{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ o conjunto com $n+1$ bolas referido. Considere os subconjuntos B e C de A com n elementos, construídos como:

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \ \text{e}\ C = \{b_2, \ldots, b_{n+1}\}.$$

De fato, ambos os conjuntos têm n elementos. Assim, as bolas $b_1, b_2, \ldots, b_n$ têm a mesma cor. Do mesmo modo, as bolas do conjunto C também têm a mesma cor. Em particular, as bolas b_n e b_{n+1} têm a mesma cor (ambas estão em C). Assim, todas as $n+1$ bolas têm a mesma cor.

Solução. O problema dessa demonstração está no passo indutivo que não é válido para todo $n \in \mathbb{N}^*$, em particular, não temos o caso em que $n = 1$ implique no caso em que $n = 2$.

De fato, supondo que o caso $n = 1$ seja verdade, o que até já foi provado no caso base, vamos aplicar a ideia apresentada no passo indutivo e verificar que não se pode provar o caso em que $n = 2$. Teremos $A = \{b_1, b_2\}$ e consequentemente $B = \{b_1\}$ e $C = \{b_2\}$. Note que podemos usar o caso em que $n = 1$ para provar que todas as bolas de B e de C

possuem a mesma cor, mas como não há nenhuma bola em comum nesses dois conjuntos, nada garante que b_1 e b_2 sejam da mesma cor. Invalidando assim a demonstração do passo indutivo. Fazendo uma analogia com os dominós, o que ocorreu foi a queda do primeiro dominó, mas essa queda não derrubou o segundo dominó, deixando-o de pé assim como as peças seguintes.

4.4 Exercícios

Exercício 1. Demonstre, por indução, que para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ é válida a igualdade:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Exercício 2. Demonstre, por indução, que para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ é válida a igualdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Exercício 3. *Observação*: este exercício requer conhecimentos de progressões geométricas, estudadas no Capítulo 6.

Demonstre, por indução, a fórmula do somatório dos n primeiros termos de uma PG:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercício 4. Prove que $3^{n-1} < 2^{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 5. Mostre, por indução, que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \geq 3$.

Dica. Mostre que $\frac{k+2}{k+1} \leq \frac{k+1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Depois, eleve tudo à potência $k+1$.

Exercício 6. Prove que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 7. Um subconjunto do plano é *convexo* se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente nele contido. Os exemplos mais simples de conjuntos convexos são o próprio plano e qualquer semi-plano. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, a interseção n de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo.

Exercício 8. Diz-se que três ou mais pontos são *colineares* quando eles todos pertencem a uma mesma reta. Do contrário, diz-se que eles são *não colineares*. Além disso, dois pontos determinam uma única reta. Usando o Princípio da Indução Finita mostre que n pontos, $n \geq 3$, tais que quaisquer 3 deles são não colineares, determinam

$$\frac{n!}{2 \cdot (n-2)!}$$

retas distintas.

4.5 Bibliografia

[4] Elon L. Lima. *Números e Funções Reais*. 1ª ed. SBM, 2013.

[8] Krerley I. M. Oliveira e Adan J. C. Fernandez. *Estágio dos Alunos Bolsistas - OBMEP 2005 - 4. Equações, Inequações e Desigualdades*. SBM, 2006.

[9] Krerley I. M. Oliveira e Adan J. C. Fernandez. *Iniciação em Matemática: um Curso com Problemas e Soluções*. 2ª ed. SBM, 2010.

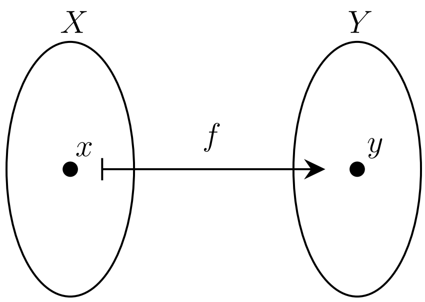
Capítulo 5

Funções

5.1 Introdução

De modo geral, uma *função* é uma ferramenta matemática utilizada para relacionar dois conjuntos quaisquer. A relação consiste em associar, a cada elemento de um dos conjuntos, *exatamente um* elemento do outro conjunto. Essa associação pode ser chamada, também, de *mapeamento*.

Considere dois conjuntos X e Y tais que existem $x \in X$ e $y \in Y$. Sendo assim, podemos associar o objeto x ao objeto y através de uma função f. Nessa situação, também se fala que obtemos y ao *aplicarmos* a função f em x. Expressamos essa afirmação através da notação $f(x) = y$. A associação pode ser representada pelo diagrama a seguir:



No diagrama, os conjuntos X e Y são representados por elipses; os elementos x e y, por pontos dentro dessas elipses, e o mapeamento $f(x) = y$, através da flecha. Note que sempre será o caso que $f(x) \in Y$, e, dessa forma, a ponta da flecha estará num ponto do conjunto Y.

5.2 Definição de Função

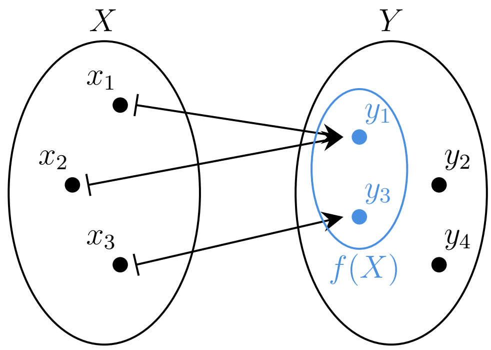
Definição 5.1. Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Uma *função* é uma relação $f : X \to Y$ (lê-se f de X em Y) que, a cada elemento $x \in X$, associa um, e somente um, elemento $y \in Y$. Definem-se, além disso, os seguintes termos:

(i) *Domínio* e *contradomínio* de f para os conjuntos X e Y, respectivamente;

(ii) *Imagem* de x, dado qualquer $x \in X$, para o único elemento $y \in Y$ que satisfaz $y = f(x)$;

(iii) *Imagem* de f para o conjunto $f\,(X) = \{y \in Y\ ;\ y = f\,(x)\ \text{ para algum } x \in X\}$, ou seja, o conjunto das imagens dos elementos de X.

Confira o exemplo a seguir:



Observe que o conjunto imagem de f, por ser constituído de elementos de Y, sempre está contido no contradomínio, isto é, $f(X) \subset Y$.

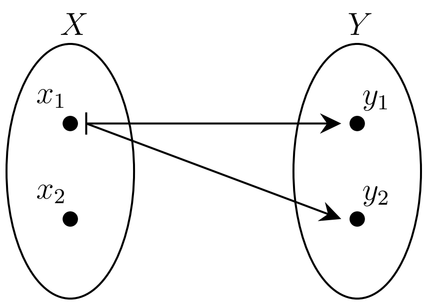
De certa forma, uma função pode ser vista como um terno constituído por: *domínio*, *contradomínio* e *lei de associação* (dos elementos do domínio com os do contradomínio). Precisa-se desses três elementos para que uma função seja bem-definida.

A definição alternativa a seguir também poderia ser adotada: *Uma relação $f : X \to Y$ é uma* função *se satisfaz as seguintes condições:*

(I) Estar bem-definida em todo elemento do domínio, isto é, os elementos do domínio devem corresponder à pelo menos um elemento do contradomínio;

(II) Os elementos do domínio não devem corresponder a mais de um elemento do contradomínio, ou seja, devem corresponder no máximo um elemento.

Exemplo 5.2. Sejam $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ e a relação $f : X \to Y$ definida pelo gráfico a seguir:



Qual(is) o(s) problema(s) com essa "função"?

Solução. Temos dois problemas, o primeiro é que, pelo gráfico, temos que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_1) = y_2$, e com isso existem dois valores possíveis para $f(x_1)$. O segundo é que x_2 não foi mapeado em nenhum elemento de Y, sendo assim não há um valor para $f(x_2)$.

Exemplo 5.3. Considere as funções p e q a seguir:

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2; \end{array}$$
$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q?

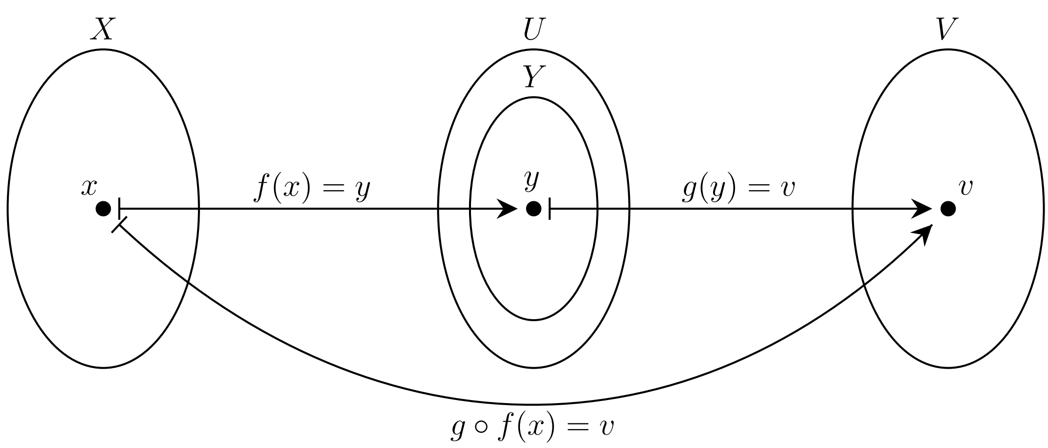
Solução. O domínio de p é $\mathbb{R}$ e o de q é $\mathbb{R}_+$; O contradomínio de p é $\mathbb{R}_+$ e o de q é $\mathbb{R}$; A lei de associação de p é $p(x) = x^2$ e a de q é $q(x) = \sqrt{x}$.

Definição 5.4 (Função Identidade de um Conjunto)**.** Seja $\mathcal{I}_X : X \to X$ uma função tal que $\mathcal{I}_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Chamamos $\mathcal{I}_X$ de *função identidade do conjunto* X.

5.3 Funções Compostas

Definição 5.5. Sejam $f : X \to Y$ e $g : U \to V$ duas funções, com $Y \subset U$. A *função composta de g com f* é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V, que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $v = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$. Diagramaticamente,

$$\begin{array}{rccccc} g \circ f: & X & \to & Y \subset U & \to & V \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$



Exemplo 5.6. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Solução. Note que o domínio de $f \circ \mathcal{I}_X$ é X já que X é o domínio de $\mathcal{I}_X$. Logo, f e $f \circ \mathcal{I}_X$ têm o mesmo domínio. Um resultado análogo vale para o contradomínio dessas funções: Y também é contradomínio de $f \circ \mathcal{I}_X$ pois é o contradomínio de f. Ademais, note que, para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned}(f \circ \mathcal{I}_X)(x) &= f(\mathcal{I}_X(x)) \,(\text{definição de composição}) \\ &= f(x)(\text{definição de identidade}).\end{aligned}$$

Das igualdades de domínio, contradomínio e lei de associação de f e $f \circ \mathcal{I}_X$, conclui-se que essas funções são iguais.

A demonstração da igualdade $\mathcal{I}_Y \circ f = f$ fica como exercício para o leitor.

Exemplo 5.7. Dadas as funções p e q definidas no Exemplo 5.3, qual função resulta da composição $p \circ q$?

Solução. Pode-se representar a função $p \circ q$ com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{cccccc} p \circ q: & R_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} & \mapsto & (\sqrt{x})^2 = x. \end{array}$$

Do diagrama, conclui-se que $p \circ q = \mathcal{I}_{\mathbb{R}_+}$.

Atividade online. `Encontre Funções Compostas`.

Atividade online. `Modele com Funções Compostas`.

5.4 Função inversa

Definição 5.8. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é *invertível* se existe uma função $g: Y \rightarrow X$ tal que:

(i) $f \circ g = \mathcal{I}_Y$;

(ii) $g \circ f = \mathcal{I}_X$.

Nesse caso, a função g é dita *função inversa* de f e denotada por $g = f^{-1}$.

Exemplo 5.9. A função q é inversa de p?

Solução. Do Exemplo 5.7, já temos que $p \circ q = \mathcal{I}_{\mathbb{R}_+}$. Então, devemos verificar se $q \circ p = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$. Para tal, seja $x \in \mathbb{R}$. Note que:

$$\begin{aligned}(q \circ p)(x) &= q(p(x)) \\ &= q(x^2) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x|.\end{aligned}$$

Assim, temos que $q \circ p \neq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, pois, por exemplo, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(-3) = -3 \neq 3 = |-3| = (q \circ p)(-3)$. Portanto, q não é a função inversa de p.

O Exemplo 5.9 ilustra a importância de se verificar, quando se quer provar que uma função é inversa da outra, todas as condições da definição. Demonstrar a validade de apenas uma delas não garante que uma função é inversa de outra, mesmo que, inicialmente, pensemos o contrário.

Atividade online. `Verifique Funções Inversas`.

5.5 Injetividade e Sobrejetividade

Definição 5.10. Considere uma função $f : X \to Y$. Definem-se:

(i) f é *sobrejetiva* se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(ii) f é *injetiva* se, para todos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) f é *bijetiva* se é sobrejetiva e injetiva.

Nas Proposições 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14, são mostradas caracterizações alternativas dos conceitos introduzidos na Definição 5.10. Em todas elas, considere f uma função com domínio X e contradomínio Y.

Proposição 5.11. f é sobrejetiva se, e somente se, $f(X) = Y$.

Proposição 5.12. f é injetiva se, e somente se, para todos $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

Proposição 5.13. f é injetiva se, e somente se, para todo $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Proposição 5.14. f é bijetiva se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 5.15. Quais das propriedades de injetividade, sobrejetividade e bijetividade as funções p e q possuem?

Solução. Verifiquemos, primeiro, se as funções são injetivas. p não é, pois $p(-1) = 1 = p(1)$. Já q, por outro lado, é injetiva. Para provar isso, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $q(x_1) = q(x_2)$. Ora,

$$\begin{aligned} q(x_1) = q(x_2) &\implies \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ &\implies \left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2 \\ &\implies x_1 = x_2, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que q é injetiva.

Agora, vamos à sobrejetividade. q não é sobrejetiva, pois não existe $x \in R_+$ tal que $\sqrt{x} = -1$, e -1 é um elemento do contradomínio dessa função. Já p, por sua vez, é sobrejetiva. De fato; para todo $y \in \mathbb{R}_+$, $p\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$, e $\sqrt{y}$ está no domínio de p.

A bijetividade não é válida para nenhuma das funções, já que p não é injetiva e p não é sobrejetiva.

Teorema 5.16. Uma função $f : X \to Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Demonstração. Seja $f : X \to Y$.

- (*Somente se*) Suponha que f é invertível; isto é, existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ e $g \circ f = \mathcal{I}_X$. Provemos que f é bijetiva.

  – (*Sobrejetividade*) Seja $b \in Y$. Tome $g(b) \in X$. Note que:

  $$\begin{aligned} f\left(g(b)\right) &= \left(f \circ g\right)(b) \\ &= \mathcal{I}_Y(b) \\ &= b. \end{aligned}$$

  Assim, f é sobrejetiva.

  – (*Injetividade*) Sejam $a_1, a_2 \in X$ tais que $f(a_1) = f(a_2)$. Logo, $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Note que:

  $$\begin{aligned} g(f(a_1)) = g(f(a_2)) &\implies \left(g \circ f\right)(a_1) = \left(g \circ f\right)(a_2) \\ &\implies \mathcal{I}_X(a_1) = \mathcal{I}_X(a_2) \\ &\implies a_1 = a_2 \end{aligned}$$

  Logo, f é injetiva.

  Concluímos, então, que f é bijetiva.

- (*Se*) Suponha que f é bijetiva. Ademais, defina $g : Y \to X$ com lei de formação $g(b) = a$, em que $a \in X$ é tal que $f(a) = b$. Ora, para cada $b \in Y$, existe tal a, pela sobrejetividade de f. Além disso, como f é injetiva, a é único. Assim, pela definição alternativa de funções, g é uma função.

  A igualdade $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ é válida, pois, para todo $y \in Y$,

  $$\begin{aligned} \left(f \circ g\right)(y) &= f\left(g(y)\right) && \text{(Definição de } \circ\text{)} \\ &= y && \text{(Definição de } g\text{, com } a = g(y) \text{ e } b = y\text{)} \end{aligned}$$

Verifiquemos, agora, que $g \circ f = \mathcal{I}_X$. Para tal, seja $x \in X$. Temos que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{(Definição de } \circ\text{)} \\ &= x && \text{(Definição de } g\text{, com } a = x \text{ e } b = f(x)\text{)} \end{aligned}$$

Assim, $g \circ f = \mathcal{I}_X$. Disso, e do fato que $f \circ g = \mathcal{I}_Y$, concluímos que f é invertível.

□

Exemplo 5.17. Decorre do Teorema 5.16 e do Exemplo 5.15 que as funções p e q não são invertíveis.

5.6 Fórmulas e Funções

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula. Considere as funções

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} p_2 : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Apesar de possuírem a mesma lei de formação – nesse caso, uma fórmula –, elas não são iguais. Note que os seus domínios são diferentes, e o mesmo vale para seus contradomínios. Essas diferenças impactam, até, as propriedades que as funções satisfazem: p_2 é bijetiva, mas p_1 não.

Outra situação que refuta a ideia de que uma função é uma fórmula é quando se tem uma função que pode ser definida usando mais de uma fórmula. Como exemplo, pode-se tomar a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a seguinte lei de formação:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

5.7 Funções e Cardinalidade

As funções servem, também, como uma ferramenta para comparar conjuntos com relação às suas cardinalidades. Na Definição 5.18, é mostrada a forma como isto é feito.

Definição 5.18. Dois conjuntos X e Y são ditos *cardinalmente equivalentes* (ou *equipotentes*) se existe uma bijeção $f : X \to Y$.

Apesar de, à primeira vista, poder parecer que bijeções e cardinalidades de conjuntos são conceitos desconexos, a relação entre eles existe já existia no tempo das cavernas.

Mesmo quando não existiam sistemas de representação de números, os hominídeos pré-históricos precisavam saber, por exemplo, se algum de seus animais estava faltando. Para tal, eles mantinham um conjunto de objetos, como pedras, com a mesma quantidade de elementos que o conjunto dos seus animais. Assim, quando queriam saber se não havia animais faltando – isto é, se os dois conjuntos em questão tinham a mesma cardinalidade –, bastava fazer uma associação entre os animais e os objetos de forma que cada animal correspondesse a um único objeto, e vice-versa. Tal associação é, justamente, uma função bijetiva entre os dois conjuntos.

Definição 5.19. Dizemos que um conjunto é *enumerável* quando ele é cardinalmente equivalente a algum subconjunto de $\mathbb{N}$.

Teorema 5.20. Se existe uma injeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre X e um subconjunto $Y' \subset Y$; isto é, X é cardinalmente equivalente a um subconjunto de Y.

Teorema 5.21. Se existe uma sobrejeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre Y e um subconjunto $X' \subset X$, isto é, Y é cardinalmente equivalente a um subconjunto de X.

Exemplo 5.22. O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Atividade online. `Determine se uma Função É Inversível`.

Atividade online. `Restrinja os Domínios de Funções para Torná-las Inversíveis`.

5.8 Exercícios

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

(a) Que a cada dois números naturais associa seu mdc;

(b) Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;

(c) Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;

(d) Que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;

(e) Que a cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ associa seu número de elementos;

(f) Que a cada subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento;

(g) Que a cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa seu valor no ponto $x_0 = 0$.

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} .$$

Mostre que f é bijetiva. O que você pode concluir com esse resultado?

Exercício 3. Mostre que a função inversa de $f : X \to Y$, caso exista, é única; isto é, se existem $g_1 : Y \to X$ e $g_2 : Y \to X$ satisfazendo a Definição 5.8, então $g_1 = g_2$.
Dica: Lembre-se que duas funções são iguais se, e só se, possuem mesmos domínios, contradomínios e seus valores são iguais em todos os elementos do domínio. Assim, procure mostrar que $g_1(y) = g_2(y)$, para todo $y \in Y$.

Exercício 4. Seja $f : X \to Y$ uma função e seja A um subconjunto de X. Define-se

$$f(A) = \{f(x) \; ; \; x \in A\} \subset Y.$$

Se A e B são subconjuntos de X:

(a) Mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(b) Mostre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

(c) É possível afirmar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subset X$? Justifique.

(d) Determine que condições deve satisfazer f para que a afirmação feita no item (c) seja verdadeira.

Exercício 5. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $y \in Y$, definimos a contraimagem ou imagem inversa de y como sendo o seguinte subconjunto de X:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \; ; \; f(x) = y\}.$$

(a) Se f é injetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

(b) Se f é sobrejetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

(c) Se f é bijetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

Exercício 6. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $A \subset Y$, definimos a contraimagem ou imagem inversa de A como sendo o seguinte subconjunto de X:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \; ; \; f(x) \in A\}.$$

Mostre que

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Nota: os próximos exercícios estão fora do escopo da avaliação da disciplina de Matemática Elementar. Trate-os como desafios.

Desafio 1. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que, se existem $g_1 : Y \to X$ e $g_2 : Y \to X$ tais que $f \circ g_1 = \mathcal{I}_Y$ e $g_2 \circ f = \mathcal{I}_X$, então $g_1 = g_2$ (portanto, neste caso, f será invertível).

Desafio 2. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

(a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, para todo $B \subset Y$;

(b) $f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subset Y$ se, e somente se, f é sobrejetiva.

Desafio 3. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

(a) $f(f^{-1}(A)) \supset A$, para todo $A \subset X$;

(b) $f(f^{-1}(A)) = A$, para todo $A \subset X$ se, e somente se, f é injetiva.

Desafio 4. Mostre que existe uma injeção $f : X \to Y$ se, e somente se, existe uma sobrejeção $g : Y \to X$.

5.9 Bibliografia

[2] Gelson Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 — Conjuntos e Funções.* Editora Atual.

[4] Elon L. Lima. *Números e Funções Reais.* 1ª ed. SBM, 2013.

Capítulo 6

Progressões

6.1 Progressão Aritmética

Definição 6.1. Uma *progressão aritmética* — ou, simplesmente, PA — é uma sequência na qual a diferença entre um termo, quando este não é o primeiro, e seu anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r.

Observação. De maneira recursiva, o n-ésimo, $n > 1$, termo de uma PA é escrito como:

$$a_n = a_{n-1} + r.$$

Exemplo 6.2. Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção em 30 veículos. Quantos veículos foram produzidos em junho?

Solução. A produção de cada mês será, em número de veículos:

- Janeiro – 400;
- Fevereiro – 430;
- Março – 460;
- Abril – 490;
- Maio – 520;
- Junho – 550.

Poderíamos ter obtido a produção de junho calculando $400 + 5 \cdot 30$.

Observação. Em uma PA $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Dessa forma, teremos $a_{13} = a_5 + 8r$, $a_4 = a_{17} - 13r$, e, mais geralmente,

$$a_i = a_j + (i - j)\, r.$$

Em particular:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r.$$

Exemplo 6.3. Em uma PA, o quinto termo vale 30, e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Solução. Seja $(a_1, a_2, \dots)$ uma PA tal que $a_5 = 30$ e $a_{20} = 50$. Note que:

$$\begin{aligned} a_5 = a_{20} + (5 - 20) \cdot r &\iff 30 = 50 - 15r \\ &\iff r = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_8 &= a_5 + (8 - 5) \cdot \frac{4}{3} \\ &= 30 + 3 \cdot \frac{4}{3} \\ &= 34 \end{aligned}$$

Exemplo 6.4. Qual a razão da PA que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?

Solução. Seja $(a_1, a_2, \dots)$ uma PA tal que $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$. Note que há 10 termos entre 3 e 25. Assim,

$$\begin{aligned} a_{12} = a_1 + (12 - 1) \cdot r &\iff 25 = 3 + 11r \\ &\iff r = 2 \end{aligned}$$

A razão da PA é igual a 2.

Exemplo 6.5. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na Era Cristã?

Solução. Seja $(a_1, a_2, \dots)$ uma PA de razão -76 e $a_1 = 1986$. Quer-se saber qual o maior $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq 0$. Calculemos:

$$\begin{aligned} a_1 + (n - 1) \cdot r \geq 0 &\iff 1986 + (n - 1) \cdot (-76) \geq 0 \\ &\iff 76n \leq 2062 \\ &\iff n \leq 27{,}13 \end{aligned}$$

Logo, o cometa passou 27 vezes na Era Cristã. Além disso, sua primeira passagem nessa era foi no ano $a_{27} = 1986 + (27 - 1) \cdot (-76) = 10$.

Atividade online. `Use Fórmulas de Progressão Aritmética`

Atividade online. `Conversão das Formas Recursiva e Explícita de Progressões Aritméticas`

Exemplo 6.6. O preço de um carro novo é de R\$ 30.000,00 e diminui R\$ 1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com quatro anos de uso?

Solução. Seja $(a_0, a_1, \dots)$ uma PA tal que $a_0 = 30.000$ e $r = -1.000$. Calculemos:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_0 + (4-0) \cdot r \\ &= 30.000 - 4.000 \\ &= 26.000 \end{aligned}$$

O preço do carro após quatro anos de uso será de R\$ 26.000,00.

Exemplo 6.7. Determine quatro números em uma PA crescente tais que sua soma é 8 e a soma de seus quadrados é 36.

Solução. Considere os quatro termos abaixo em uma PA de razão $2r$:

$$x - 3r, x - r, x + r, x + 3r.$$

Por hipótese do problema, tem-se que:

$$x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 4x = 8$$

Logo, $x = 2$. Também por hipótese do problema,

$$\begin{aligned} (2-3r)^2 + (2-r)^2 + (2+r)^2 + (2+3r)^2 = 36 &\iff 4 \cdot 2^2 + 2r^2 + 2 \cdot 9r^2 = 36 \\ &\iff 20r^2 = 20 \\ &\iff r = \pm 1 \end{aligned}$$

Note que, tanto para $r = 1$ quanto para $r = -1$, os quatro números desejados são -1, 1, 3 e 5.

Definição 6.8. Uma PA de razão $r \neq 0$ é chamada de *progressão aritmética de primeira ordem*. Se $r = 0$, chamamos de *progressão aritmética estacionária*.

Observação. Os termos introduzidos na Definição 6.8 são motivados pelo fato de que, em uma PA, o termo geral é dado por um polinômio em n, a saber:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r = r \cdot n + (a_1 - r)\,.$$

Assim, se $r \neq 0$, esse polinômio é de grau 1. Note que, se $r = 0$, a PA é constante.

A recíproca desse resultado também é válida, ou seja, se uma sequência tiver seu termo de ordem n (a_n) definido por um polinômio em n de grau menor ou igual a 1, então essa sequência será uma PA.

6.2 Somatório dos n primeiros termos de uma PA

Proposição 6.9. A soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}.$$

Corolário 1. Nas condições da Proposição 6.9, tem-se que:

$$S_n = \frac{r}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n.$$

Observação. Todo polinômio de segundo grau em n que não possua termo independente nulo é o somatório de alguma PA. De fato, tendo $P(n) = an^2 + bn$, basta tomar $r = 2a$ e $a_1 = a + b$. Verifique!

6.3 Progressão Geométrica

Exemplo 6.10. Uma pessoa, começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

a) Ganha dinheiro;

b) Não ganha nem perde dinheiro;

c) Perde R$ 27,00;

d) Perde R$ 37,00;

e) Ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Solução. Se a pessoa perdesse as três primeiras apostas e, depois, ganhasse as outras três, ela ficaria, em reais, com:

$$\begin{aligned} 64 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} &= 64 \cdot \frac{27}{64} \\ &= 27 \end{aligned}$$

Note que, como a multiplicação de números reais é comutativa, a ordem das apostas não importa. Assim, a pessoa perdeu R$ 37,00.

Exemplo 6.11. A população de um país é, hoje, igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

Solução. Construindo uma sequência $P_0, P_1, P_2, \dots$ tal que P_n é a população do país após n anos, com $n \geq 0$, teremos:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + P_0 \cdot 0{,}02 = P_0 \cdot 1{,}02; \\ P_2 &= P_1 \cdot 1{,}02 = P_0 \cdot 1{,}02^2; \\ &\vdots \\ P_n &= P_0 \cdot 1{,}02^n. \end{aligned}$$

Exemplo 6.12. A torcida de certo clube é, hoje, igual a T_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?

Solução. Analogamente ao Exemplo 6.11, a torcida do clube daqui a n anos será:

$$T_n = T_0 \cdot 0{,}95^n.$$

Observação. Note que, nos Exemplos 6.11 e 6.12, se uma grandeza teve taxa de crescimento igual a i, então cada valor da grandeza foi igual a $(1 + i)$ vezes o valor anterior.

Definição 6.13. Uma *progressão geométrica* (ou, simplesmente, PG) é uma sequência na qual a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplo 6.14. A sequência $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ é um exemplo de uma PG. Aqui, a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior.

Exemplo 6.15. A sequência $(1000, 800, 640, 512, \dots)$ é um exemplo de uma PG. Aqui, cada termo é 80% do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de -20%.

6.4 Fórmulas de uma Progressão Geométrica

Observação. É claro que, numa PG, cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1+i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1 + i$ de *razão da progressão* e a representamos por q. Assim, para $n \geq 2$,

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Portanto, uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior (exceto quando o termo anterior é o primeiro).

Em uma PG $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo, basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Assim,

$$a_i = a_j \cdot q^{i-j}.$$

Em particular,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Exemplo 6.16. Em uma PG, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução. Seja $(a_1, a_2, \dots)$ uma PG tal que $a_5 = 5$ e $a_8 = 135$. Tem-se que:

$$\begin{aligned} a_8 = a_5 * q^{8-5} &\iff 135 = 5 \cdot q^3 \\ &\iff q^3 = 27 \\ &\iff q = 3 \end{aligned}$$

Assim, o sétimo termo é:

$$\begin{aligned} a_7 &= a_8 \cdot q^{7-8} \\ &= \frac{135}{3} \\ &= 45. \end{aligned}$$

Exemplo 6.17. Qual é a razão da PG que se obtém inserindo 3 termos entre os números 30 e 480?

Solução. Considere uma PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 30$ e $a_5 = 480$. Dos valores desses termos, tem-se que:

$$\begin{aligned} a_1 = a_5 \cdot q^{1-5} &\iff 30 = 480 \cdot q^{-4} \\ &\iff q^4 = \frac{480}{30} = 16 \\ &\iff q = \pm 2. \end{aligned}$$

Logo, as possíveis razões para a PG são -2 e 2.

Atividade online. `Use Fórmulas de Progressão Geométrica`.

Atividade online. `Conversão das Formas Recursiva e Explícita de Progressões Geométricas (no Khan aparece errado como Aritméticas)`.

6.5 Somatório dos n primeiros termos de uma PG

Proposição 6.18 (Soma dos n primeiros termos de uma PG)**.** A soma dos n primeiros termos de uma PG (a_n) de razão $q \neq 1$ é:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstração. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma PG de razão q. Considere

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{6.1}$$

Logo,

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}. \tag{6.2}$$

Calculando 6.1 − 6.2:

$$\begin{aligned} S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_1 \cdot q^n &\iff S_n \cdot (1-q) = a_1 \cdot (1-q^n) \\ &\iff S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

□

Exemplo 6.19. Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Sabendo que o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, qual o número de grãos pedido pelo inventor do jogo?

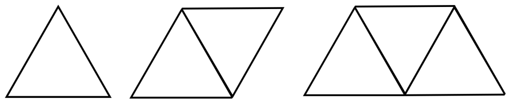
Solução. Pelo seu enunciado, o problema pode ser modelado por uma PG $(a_1, a_2, \ldots, a_{64})$ tal que a_i, $1 \leq i \leq n$, é o número de grãos que o inventor pediu pela i-ésima casa do tabuleiro. A partir da equação para a soma dos n primeiros termos de uma PG, conclui-se que o inventor pediu, no total, $1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ grãos.

Progressões e Funções

Considere a PA (ou PG) $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Os elementos dessa progressão podem ser vistos através da função $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $a(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

6.6 Exercícios

Exercício 1. Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura abaixo.



Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

Exercício 2. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é igual a 540°e estes ângulos estão em PA. Determine a mediana dos valores dos ângulos.

Exercício 3. Se $3-x$, $-x$, $\sqrt{9-x}$, $\ldots$ é uma PA, determine x e calcule o quinto termo.

Exercício 4. Calcule a soma dos termos da PA 2, 5, 8, 11, $\ldots$ desde o 25°termo até o 41°termo, inclusive.

Exercício 5. Determine o maior valor inteiro que pode ter a razão de uma PA que admita os números 32, 227 e 942 como termos da progressão.

Exercício 6. Em um quadrado mágico (Exemplo 3.6), chamamos de constante mágica o valor da soma de quaisquer uma das linhas, colunas ou diagonais. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico $n \times n$.

Exercício 7. Suprimindo um dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é 16,1. Determine o valor de n e qual foi o elemento suprimido.

Exercício 8. O gordinho jaguatirica e Júnio vão jogar um jogo com as seguintes regras:

- Na primeira jogada, o gordinho jaguatirica escolhe um número no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e diz esse número;
- Os jogadores jogam alternadamente;
- Cada jogador ao jogar escolhe um elemento de A, soma-o ao número DITO pelo jogador anterior e DIZ a soma;
- O vencedor é aquele que disser 63.

Pode o gordinho jaguatirica ou Júnio ter uma estratégia vencedora? Se sim, quem pode e qual é essa estratégia?

Exercício 9. Mostre que Júnio pode ter uma estratégia que impeça o gordinho vencer o jogo se a condição de vitória for 62 e $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Exercício 10. Descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um desconto total de quanto?

Exercício 11. Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto?

Exercício 12. Mantida constante a temperatura, a pressão de um gás perfeito é inversamente proporcional a seu volume. De quanto aumenta a pressão quando reduzimos em 20% o volume?

Exercício 13. Considere um triângulo retângulo tal que seus lados formam uma PG crescente. Determine a razão dessa progressão.

Exercício 14. Qual o quarto termo da PG $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}, \ldots$?

Exercício 15. Determine três números em PG, tais que a soma desses números é 19 e a soma de seus quadrados é 133.

Exercício 16. A soma de três números em PG é 19. Subtraindo-se 1 do primeiro, eles passam a formar uma PA. Calcule-os.

Exercício 17. Quatro números que estão em sequência são tais que, os três primeiros formam uma PA de razão 6, os três últimos uma PG e o primeiro número é igual ao quarto. Determine-os.

Exercício 18. Será formada uma pilha de folhas de estanho que têm, cada uma, espessura de $0,1$mm. Inicialmente, adiciona-se uma folha na pilha. Nas operações seguintes, é inserida uma quantidade de folhas igual ao número de folhas que já estavam na pilha no momento da inserção. Após serem realizadas 33 adições de folhas, a altura da pilha será, aproximadamente:

a. A altura de um poste de luz;

b. A altura de um prédio de 40 andares;

c. O comprimento da praia de Copacabana;

d. A distância Rio-São Paulo;

e. O comprimento do equador terrestre.

Exercício 19. Larga-se uma bola de uma altura de 5m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $\frac{4}{9}$ da altura anterior.

a. Determine a progressão que modela o problema e calcule a altura que a bola atinge após o décimo choque com o solo e após o centésimo choque com o solo.

b. Qual a distância total percorrida pela bola no momento do décimo primeiro choque com o solo?

Exercício 20. Começando com um segmento de tamanho 1, divide-se esse segmento em três partes iguais e retiramos o interior da parte central, obtendo dois segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$. Repetimos agora essa operação com cada um desses segmentos e assim por diante. Sendo S_n a soma dos comprimentos dos intervalos que restaram depois de n dessas operações, determine o valor de S_n.

6.7 Bibliografia

[6] Elon L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2.* 5ª ed. SBM, 2004.

Capítulo 7

Funções Reais e Gráficos

7.1 Definição de Função Real

Definição 7.1. Uma função $f : X \to Y$ é chamada de *função real* se seus valores são números reais; isto é, $Y = \mathbb{R}$. Quando a variável independente assume valores reais — isto é, $X \subset \mathbb{R}$ —, diz-se que f é uma *função de variável real.* Nesse caso, pode-se utilizar a notação $f : D \subset \mathbb{R} \to Y$ para enfatizar que o domínio D da função é subconjunto de $\mathbb{R}$.

A menos que se diga o contrário, trabalharemos, a partir desse momento, com funções reais de variável real, e, por simplicidade, chamaremos essas funções simplesmente de *funções reais.*

7.2 Gráficos

7.2.1 Definição

Definição 7.2. O *gráfico* de uma função real $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in D, y = f(x)\right\}.$$

Observação. O gráfico de uma função pode ser visto como o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Exemplo 7.3. Esboce o gráfico da função real

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{array}$$

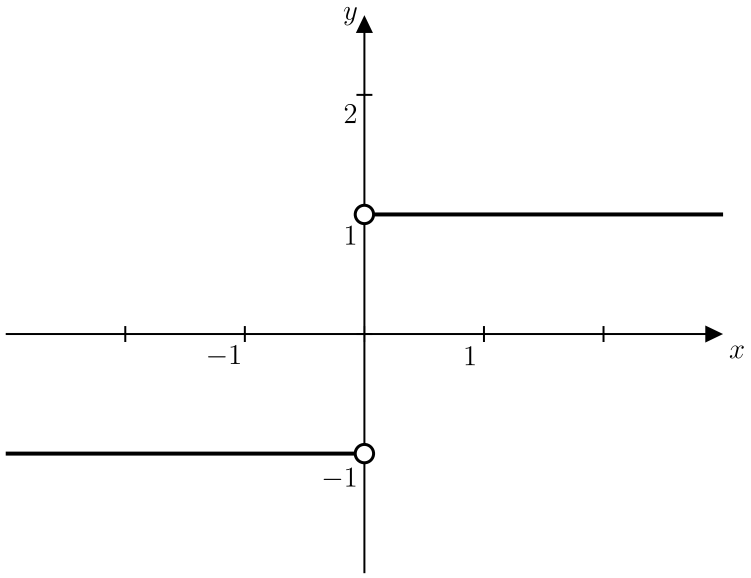


Imagem 7.1. Gráfico da função f.

Solução. Na Imagem 7.1, é mostrado o gráfico de f.

Note que o valor de $f(x)$ não é definido para $x = 0$. Para deixar claro que o gráfico não possui nenhum ponto com coordenada x com valor 0, foram colocadas, na imagem, circunferências — comumente chamadas de bolas abertas — nos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$, indicando que eles não pertencem ao gráfico de f.

7.2.2 Transformações no Plano

Quando a lei de formação de uma função envolve a de outra, seu gráfico consiste em uma transformação do gráfico da função original. Nesta seção, serão apresentadas as transformações de translação, dilatação e reflexão de gráficos, bem como as alterações na lei de formação de uma função que geram essas transformações.

7.2.2.1 Translação

A translação do gráfico de uma função consiste em adicionar, à coordenada y ou x de todos os seus pontos, um mesmo fator constante. O resultado é um gráfico com a mesma forma, mas em uma altura e/ou posição horizontal diferentes no plano cartesiano.

Considere funções reais f e g tais que $g(x) = f(x + h) + v$, em que v e h são números reais, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal de $|h|$ unidades e uma translação vertical de $|v|$ unidades. Os valores de v e h influenciam nas translações vertical e horizontal, respectivamente, do gráfico de f da seguinte forma:

- $v > 0$: o translado vertical é no sentido positivo do eixo y (para cima);
- $v < 0$: o translado vertical é no sentido negativo do eixo y (para baixo);

- $h > 0$: o translado horizontal é no sentido negativo do eixo x (para a esquerda);
- $h < 0$: o translado horizontal é no sentido positivo do eixo x (para a direita).

Exemplo 7.4. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = f(x) + 1 = \operatorname{sen} x + 1$ e $h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Compare os gráficos de h e g ao gráfico de f com relação a translações.

Solução. Na Imagem 7.2, são mostrados os gráficos de f e g.

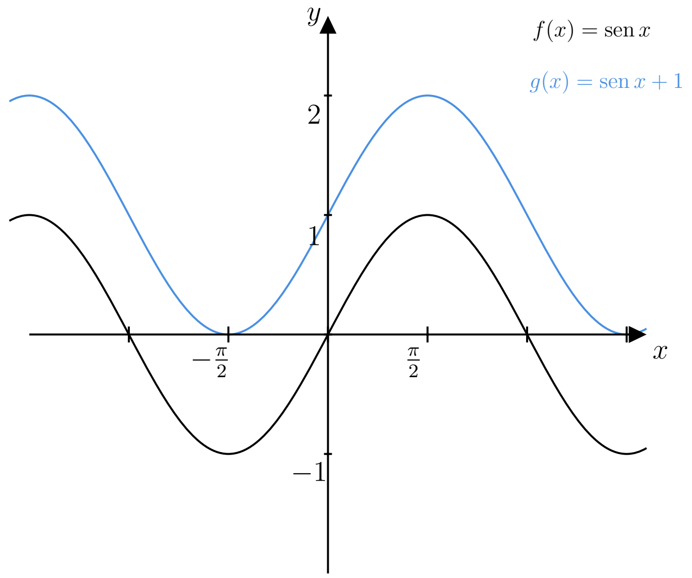


Imagem 7.2. Gráficos das funções f e g.

Uma vez que $g(x) = f(x) + 1$ e $1 > 0$, o gráfico de g é obtível transladando o gráfico de f 1 unidade para cima.

Na Imagem 7.3, são mostrados os gráficos de f e h.

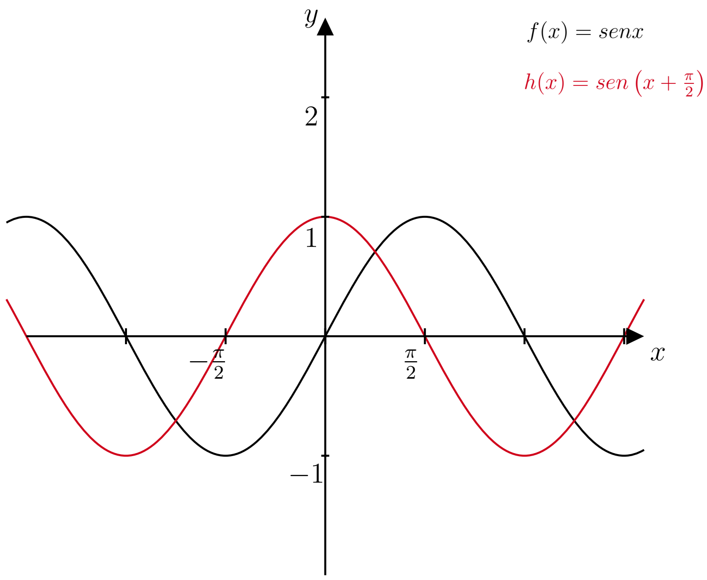


Imagem 7.3. Gráficos das funções f e h.

Uma vez que $h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $\frac{\pi}{2} > 0$, o gráfico de h é obtível transladando o gráfico de f $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

7.2.2.2 Dilatação e Reflexão

Enquanto a translação de um gráfico é gerada pela adição de um valor a certa coordenada de todos os pontos, a dilatação e a reflexão consistem na multiplicação de um mesmo valor à coordenada x ou y de todos os pontos. A dilatação modifica a forma do gráfico podendo deixá-lo mais "achatado" ou "esticado", e a reflexão espelha o gráfico. Ambas as transformações são dadas pelos mesmos parâmetros. Contudo, enquanto a primeira depende da magnitude (módulo) dos parâmetros, a segunda se dá pelos seus sinais.

Se uma função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, em que f é outra função real e $c, d \in \mathbb{R}$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal de $|d|$ vezes e uma dilatação vertical de $|c|$ vezes. Mais especificamente, os valores de c e d influenciam nas dilatações vertical e horizontal, respectivamente, do gráfico de f da seguinte forma:

- $|c| > 1$: esticamento vertical;
- $0 < |c| < 1$: encolhimento vertical;
- $|d| > 1$: encolhimento horizontal;
- $0 < |d| < 1$: esticamento horizontal.

Ademais, os valores de c e d influenciam nas reflexões do gráfico de f em relação aos eixos x e y, respectivamente, da seguinte forma:

- $c > 0$: não há reflexões;
- $c < 0$: reflexão em relação ao eixo x;
- $d > 0$: não há reflexões;
- $d < 0$: reflexão em relação ao eixo y.

As transformações de translação e reflexão podem ocorrer ao mesmo tempo. Assim, se $c < -1$, por exemplo, o gráfico de g é obtível a partir do de f por meio de um esticamento vertical composto com uma reflexão em relação ao eixo x.

Exemplo 7.5. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais tais que $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x$ e $h(x) = f(2 \cdot x) = \operatorname{sen}(2x)$. Compare os gráficos de h e g ao gráfico de f com relação a dilatações.

Solução. Na Imagem 7.4, são mostrados os gráficos de f e g.

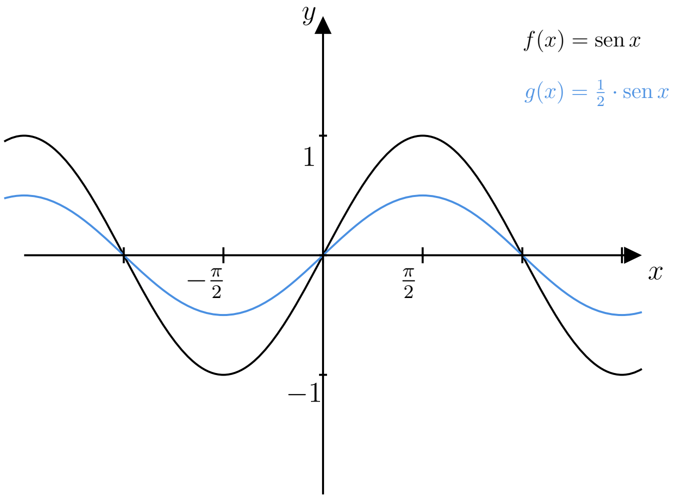


Imagem 7.4. Gráficos das funções f e g.

Uma vez que $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ e $0 < \frac{1}{2} < 1$, o gráfico de g é obtível encolhendo verticalmente o gráfico de f pela metade.

Na Imagem 7.5, são mostrados os gráficos de f e h.

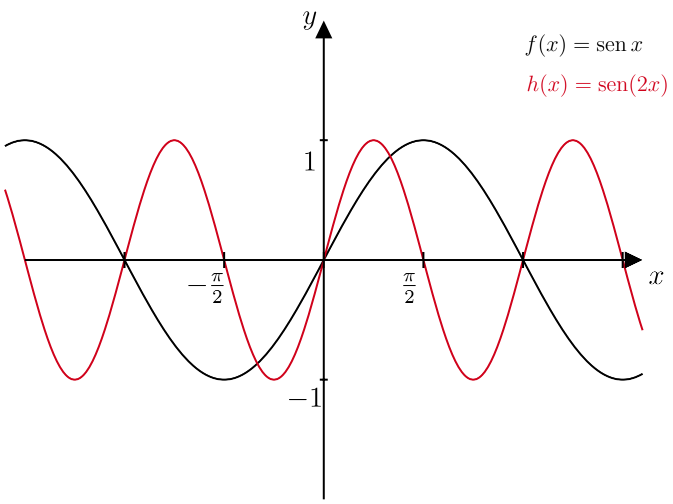


Imagem 7.5. Gráficos das funções f e h.

Uma vez que $h(x) = f(2 \cdot x)$ e $2 > 0$, o gráfico de h é obtível encolhendo horizontalmente o gráfico de f.

Exemplo 7.6. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais tais que $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \operatorname{sen} x$ e $h(x) = f(-1 \cdot x) = \operatorname{sen}(-1 \cdot x)$. Compare os gráficos de h e g ao gráfico de f com relação a dilatações e reflexões.

Solução. Na Imagem 7.6, são mostrados os gráficos de f e g.

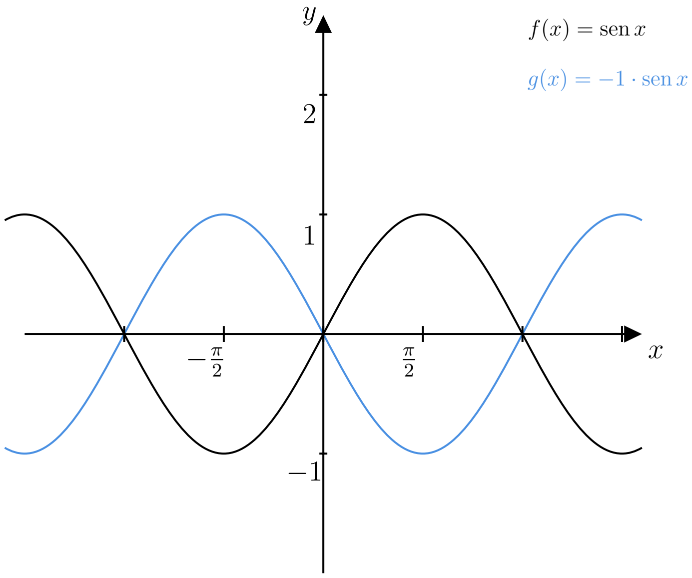


Imagem 7.6. Gráficos das funções f e g.

Uma vez que $g(x) = -1 \cdot f(x)$ e $-1 < 0$, o gráfico de g é obtível por meio de uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo x.

Na Imagem 7.7, são mostrados os gráficos de f e h.

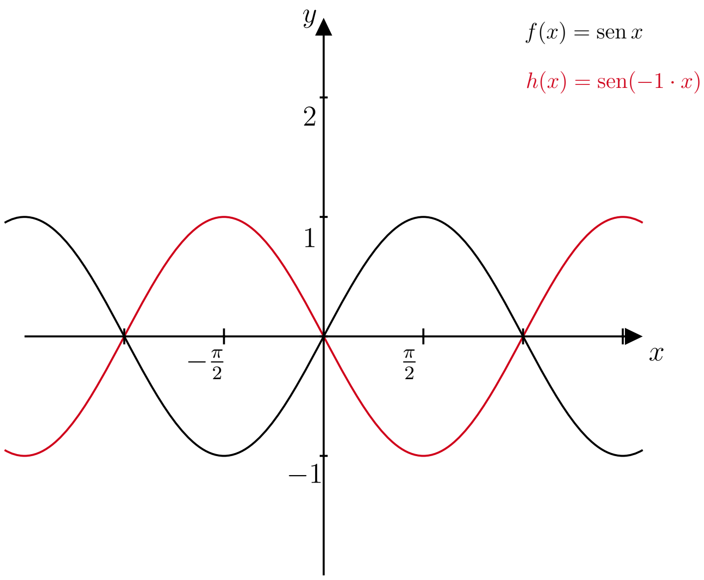


Imagem 7.7. Gráficos das funções f e h.

Uma vez que $h(x) = f(-1 \cdot x)$ e $-1 < 0$, o gráfico de h é obtível por meio de uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo y. Note que o gráfico de h é igual ao de g. O porquê disso será explicado quando estudarmos as funções trigonométricas.

Atividade online. `Deslocamento de Funções`.

Atividade online. `Como Transformar Funções`.

7.3 Categorias Especiais de Funções Reais

Nesta seção, serão introduzidas as funções monótonas e as limitadas, dois grupos de funções reais que satisfazem certas propriedades.

7.3.1 Funções Monótonas

Definição 7.7. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que

(i) f é *monótona (estritamente) crescente* se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

(ii) f é *monótona não decrescente* se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

(iii) f é *monótona (estritamente) decrescente* se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

(iv) f é *monótona não crescente* se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Nas mesmas condições da Definição 7.7, se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in D$, dizemos que f é *constante*. Se $I \subset D$ é um intervalo, definimos a monotonicidade de f no intervalo I de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo: f é *monótona (estritamente) crescente em I* se, para todos $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

7.3.2 Funções Limitadas

Definição 7.8. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

(i) f é *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in D$;

(ii) f é *limitada inferiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in D$;

(iii) $x_0 \in D$ é um *ponto de máximo absoluto* de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in D$;

(iv) $x_0 \in D$ é um *ponto de mínimo absoluto* de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in D$;

(v) $x_0 \in D$ é um *ponto de máximo local* de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$;

(vi) $x_0 \in D$ é um *ponto de mínimo local* de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$.

Exemplo 7.9. A função $h : (-1; 6] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é esboçado na Imagem 7.8, é definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } \ x \leq 2 \\ |x - 4| + 1 & \text{se } \ 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } \ x > 5 \end{cases}.$$

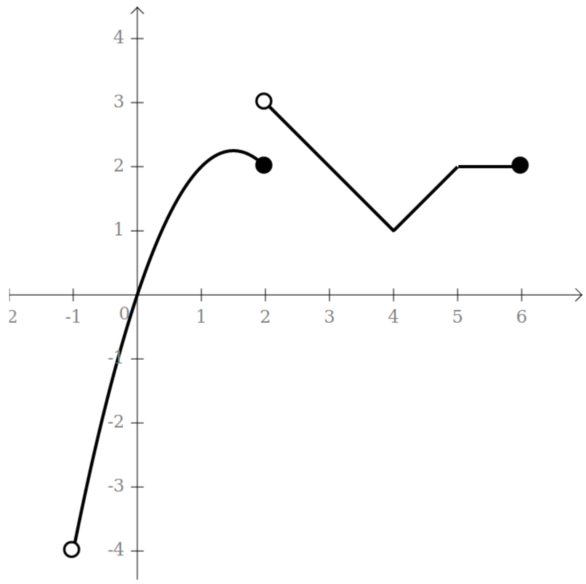


Imagem 7.8. Gráfico da função h.

Identifique, pelo gráfico, os intervalos de monotonicidade e os extremos locais e absolutos de h.

Solução. A partir do gráfico, pode-se perceber que a função h é crescente nos intervalos $(-1; 1{,}5]$ e $[4; 5]$, decrescente em $[1,5; 2]$ e $(2; 4]$ e constante em $[5; 6]$. Também por observação do gráfico da função, conclui-se que o ponto $(1{,}5; 2{,}25)$ é um mínimo local, e o ponto $(4, 1)$ é um máximo local. Além disso, todos os pontos tais que $x \in [5; 6]$ são máximos locais, e todos os pontos tais que $x \in (5; 6]$ são mínimos locais. A função não possui extremos absolutos.

Na solução dada, alguns fatos podem causar certa confusão. Assim, serão feitas, a seguir, algumas observações baseadas na análise do gráfico para elucidá-los.

(a) -1 não está presente no intervalo de crescimento $(-1; 1{,}5]$ por não pertencer ao domínio da função;

(b) 1,5 deve estar no intervalo de crescimento $(-1; 1{,}5]$. Note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in (-1; 1{,}5]$, é verdade que $x_1 < x_2$ implica $h(x_1) < h(x_2)$, uma vez que a função é crescente nesse intervalo. Em particular, como 1,5 é o maior dos valores de $(-1; 1{,}5]$, temos que $x_1 < 1{,}5$ implica $h(x_1) < h(1{,}5)$;

(c) Analogamente ao item (b), é necessário que 1,5 e 2 estejam no intervalo de decrescimento $[1, 5; 2]$. A análise é similar para os extremos dos outros intervalos fechados;

(d) 2 não deve fazer parte do intervalo de decrescimento $(2; 4]$, pois há uma bola aberta nesse intervalo. Se 2 pertencesse ao intervalo, teríamos, devido à definição de função decrescente, que $2 < 2{,}1$ implicaria em $2 = h(2) < h(2{,}1) = 2{,}9$. Essa implicação claramente é falsa;

(e) O fato de que há um mínimo local quando $x = 4$ se dá pois 4 é o maior valor de um intervalo de decrescimento e o menor de um intervalo de crescimento. Em outras palavras, em $x = 4$, a função que estava decrescendo em $(2; 4]$ passa a crescer em $[4; 5]$, atingindo o menor valor localmente nessa mudança de comportamento da monotonicidade. É comum que mudanças da monotonicidade da função determinem extremos locais. No item (h), é demonstrado que, de fato, há um mínimo local em $x = 4$.

(f) A justificativa para a existência de um máximo local em $x = 1{,}5$ é análoga à do item (e);

(g) Em todo o intervalo $[5; 6]$, em que a função é constante, os pontos são máximos locais e mínimos locais, exceto pelo fato de que não há mínimo local em $x = 5$. Para qualquer $x_0 \in (5; 6]$, existe um intervalo $(x_0 - r; x_0 + r)$ em torno de x_0 tal que $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - r; x_0 + r) \cap D$, em que $D = (-1, 6]$. Note que $f(x) = f(x_0)$ implica tanto $f(x) \leq f(x_0)$ quanto $f(x_0) \leq f(x)$, o que justifica a existência dos mínimos e máximos locais em $(5; 6]$. Quando $x_0 = 5$, conseguimos concluir que $f(x) \leq f(x_0)$ mas não $f(x_0) \leq f(x)$, pois em qualquer intervalo $(5 - r; 5 + r)$ existe $x < 5$ tal que $f(x) < f(5)$. Assim, em $x_0 = 5$ há máximo local mas não mínimo local;

(h) Tendo, como verdade, que a função é decrescente em $(2; 4]$ e crescente em $[4; 5]$, provemos que ocorre um mínimo local em $x = 4$. Para tanto, precisamos mostrar que existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in (4 - r; 4 + r)$, vale $h(4) \leq h(x)$. Tome $r = 1$, e seja $x \in (4 - 1; 4 + 1) = (3; 5)$. Separaremos, em três casos possíveis para x, a verificação de que $h(4) \leq h(x)$. Caso $x \in (3; 4)$, note que $x, 4 \in (2; 4]$, um intervalo de decrescimento da função. Assim, como $x < 4$, então $h(4) < h(x)$, o que implica que $h(4) \leq h(x)$. Agora, caso $x \in (4; 5)$, note que $x, 4 \in [4; 5]$, um intervalo de crescimento da função. Assim, como $4 < x$, então $h(4) < h(x)$, e, consequentemente, $h(4) \leq h(x)$. Finalmente, caso $x = 4$, é óbvio que $h(4) = h(x)$, o que também implica que $h(4) \leq h(x)$. Portanto, em $x = 4$ há um mínimo local para a função h.

Atividade online. `Intervalos Crescentes e Decrescentes`.

Atividade online. `Mínimos e Máximos Relativos`.

Atividade online. `Mínimos e Máximos Absolutos`.

7.4 Exercícios

Exercício 1. Considere a função $g : [0; 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se } x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

Determine as soluções de:

(a) $g(x) = -1$;

(b) $g(x) = 0$;

(c) $g(x) = 3$;

(d) $g(x) = 4$;

(e) $g(x) < 3$;

(f) $g(x) \geq 3$.

Exercício 2. Considere a função $g : [0; 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{se } x > 2 \\ x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}.$$

Determine as soluções de $g(x) = -6$.

Exercício 3. Considere a função $f : [3; 5] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

(a) Mostre que f é decrescente.

(b) f possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

(c) f possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

Exercício 4. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

(a) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo absoluto;

(b) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo local;

(c) Se f tem um máximo local, então f tem um máximo absoluto;

(d) Todo máximo local de f é máximo absoluto;

(e) Todo máximo absoluto de f é máximo local;

(f) Se x_0 é o ponto de extremo local de f, então é ponto de extremo local de f^2, onde $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$;

(g) Se x_0 é o ponto de extremo local de f^2, então é ponto de extremo local de f.

Exercício 5. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

(a) Se f e g são crescentes, então a composta $f \circ g$ é uma função crescente;

(b) Se f e g são crescentes, então o produto $f \cdot g$ é uma função crescente, onde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(c) Se f é crescente em $A \subset \mathbb{R}$ e em $B \subset \mathbb{R}$, então f é crescente em $A \cup B \subset \mathbb{R}$.

Exercício 6. Mostre que uma função real é constante se, e somente se, é não decrescente e não crescente.

Exercício 7. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e A e B intervalos reais tais que $A \cap B$ é um intervalo não degenerado, ou seja, que possui pelo menos dois números. Mostre que, se f é crescente em A e em B, então f é crescente em $A \cap B$.

Exercício 8. Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente, e que a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

Exercício 9. *Observação*: este exercício requer conhecimentos de progressões aritméticas, estudadas no Capítulo 6.

Sejam $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ uma PA de razão positiva e a função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $a(i) = a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostre que a função a é crescente.

7.5 Bibliografia

[2] Gelson Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 — Conjuntos e Funções*. Editora Atual.

Capítulo 8

Funções Polinomiais

Neste capítulo, serão estudadas as funções polinomiais, um tipo específico de funções reais bastante comuns em Matemática. Na Seção 8.1, serão apresentadas as classes de funções polinomiais mais conhecidas. Já a Seção 8.2 introduzirá a definição de função polinomial de fato, bem como conceitos inerentes a funções polinomiais de forma geral.

8.1 Funções Polinomiais Especiais

Iniciaremos o estudo das funções polinomiais com algumas funções comuns que podem ser classificadas como polinomiais, a saber, as funções lineares (Seção 8.1.1), as funções afins (Seção Seção 8.1.2) e as funções quadráticas (Seção Seção 8.1.3).

8.1.1 Funções Lineares

É algo comum escutar a seguinte frase: "Em matemática eu resolvo tudo com regra de três".

Será mesmo que isto é possível? Por exemplo, o lado do quadrado e sua área são proporcionais?

8.1.1.1 Introdução

As funções lineares são usadas para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

8.1.1.2 Definição

Definição 8.1. Chamamos de *função linear* uma função real com lei de formação $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Quando $a = 0$, dizemos que f é *identicamente nula*.

Observação. Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de a é igual a $f(1)$.

No caso das grandezas inversamente proporcionais, a função matemática que modela tal problema é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \frac{a}{x}$. Nesse caso, também temos a particularidade de que $f(1) = a \in \mathbb{R}^*$.

A seguir, veremos um teorema de grande relevância para funções lineares.

Teorema 8.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que $f(1) > 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é linear;

(ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Para provar que os três itens são equivalentes, basta provar as implicações (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii) e (i) $\Longrightarrow$ (iii).

- (iii) $\Longrightarrow$ (i): A demonstração deste fato está fora do escopo deste texto.

- (i) $\Longrightarrow$ (ii): Suponha que $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Teremos:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) && \text{(Definição de } f) \\ &= ax + ay && \text{(i)} \\ &= f(x) + f(y) && \text{(Definição de } f) \end{aligned}$$

- (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Suponha que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Provemos, inicialmente, que $f(-x) = -f(x)$ sempre que $x \in \mathbb{R}$. Para isso, tomemos $x \in \mathbb{R}$. Note que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x + 2x) \\ &= f(-x) + f(x + x) && \text{(ii)} \\ &= f(-x) + f(x) + f(x) && \text{(ii)} \end{aligned}$$

  A igualdade $f(x) = f(-x) + f(x) + f(x)$ implica que $f(-x) = -f(x)$.

  Seja, agora, $n \in \mathbb{Z}$. Separaremos a prova de $f(nx) = nf(x)$ em casos.

  - Caso $n > 0$: Temos que:

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}) \\ &= \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ vezes}} && \text{(ii)} \\ &= nf(x) \end{aligned}$$

– Caso $n < 0$: Temos que:

$$\begin{aligned}
f(nx) &= f\left(-(-nx)\right) \\
&= -f\left(-nx\right) && (f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}) \\
&= -f\left((-n)x\right) \\
&= -\left((-n)f(x)\right) && (\text{Caso anterior, pois } -n > 0) \\
&= nf(x)
\end{aligned}$$

– Caso $n = 0$: Temos que:

$$\begin{aligned}
f(0x) &= f(x - x) \\
&= f(x) + f(-x) && (\text{ii}) \\
&= f(x) - f(x) && (f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}) \\
&= 0 \\
&= 0f(x)
\end{aligned}$$

Da verificação dos três casos, concluímos que, para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, vale que $f(nx) = nf(x)$.

□

Observação. Um resultado análogo ao do Teorema 8.2 é válido no caso de f ser decrescente e tal que $f(1) < 0$.

A importância do Teorema 8.2 está no fato de que, se quisermos saber se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear não identicamente nula, basta verificar duas coisas:

1. f é crescente ou decrescente;

2. $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de o domínio e o contradomínio de f serem o conjunto $\mathbb{R}^+$, basta verificar a condição para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 8.3. O lado de um quadrado é proporcional à sua área? Em outras palavras, essas duas grandezas podem ser relacionadas por meio de uma função linear?

Solução. O lado de um quadrado não é proporcional à sua área. Para chegar a um absurdo, considere que o lado e a área de um quadrado são diretamente proporcionais, ou seja, eles podem ser relacionados pela função linear

$$\begin{array}{rccc}
A: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\
& l & \mapsto & A(l),
\end{array}$$

que mapeia um número l à área $A(l)$ de um quadrado cujo lado mede l. Como A é linear, então

$$A(3) = A(1 + 2) = A(1) + A(2),$$

pelo Teorema 8.2. No entanto, $A(3) = 9$, e $A(1)+A(2) = 1+4 = 5$, levando-nos a concluir que $9 = 5$, o que, evidentemente, é falso. Portanto, o lado e a área de um quadrado não são diretamente proporcionais.

8.1.2 Funções Afins

8.1.2.1 Definição

Definição 8.4. Uma função real chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A constante a, em particular, é chamada de *taxa de variação* ou *taxa de crescimento* da função.

Observação. É muito comum se referir ao coeficiente a de uma função afim como coeficiente angular. Esse termo não é apropriado, pois define-se coeficiente angular para retas, e não para funções, mesmo que o gráfico de uma função afim seja uma reta.

Exemplo 8.5. A função identidade $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ (relembre a Definição 5.4) é afim, assim como as funções reais com lei de formação $g(x) = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(x) + b = x + b$, cujos gráficos são translações verticais do de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$.

Exemplo 8.6. As funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$ são casos especiais de funções afins.

Exemplo 8.7. O preço a se pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, em que x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

8.1.2.2 Gráfico

Proposição 8.8. O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Demonstração. Sejam $f(x) = ax+b$ uma função afim e $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_2 = (x_2, f(x_2))$ e $P_3 = (x_3, f(x_3))$ pontos de seu gráfico tais que $x_1 < x_2$ e $x_2 < x_3$. Provemos que esses pontos são colineares, ou seja, $\mathrm{d}(P_1, P_3) = \mathrm{d}(P_1, P_2) + \mathrm{d}(P_2, P_3)$. Para isso, calculemos os valores de cada uma dessas três distâncias:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(P_1,P_2) &= \sqrt{\left(ax_2+\cancel{b}-(ax_1+\cancel{b})\right)^2+(x_2-x_1)^2}\\
&= \sqrt{\left(a(x_2-x_1)\right)^2+(x_2-x_1)^2}\\
&= \sqrt{(a^2+1)(x_2-x_1)^2}\\
&= (x_2-x_1)\sqrt{a^2+1}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}(P_2,P_3) = (x_3-x_2)\sqrt{a^2+1}$$

$$\mathrm{d}(P_1,P_3) = (x_3-x_1)\sqrt{a^2+1}$$

Temos, de fato, que $\mathrm{d}(P_1,P_2)+\mathrm{d}(P_2,P_3) = (x_2-x_1)\sqrt{a^2+1}+(x_3-x_2)\sqrt{a^2+1} = (x_3-x_1)\sqrt{a^2+1} = \mathrm{d}(P_1,P_3)$. Portanto, o gráfico da função afim é uma reta. □

Observação. Para desenhar o gráfico de uma função afim, basta conhecer dois pontos, pois uma reta é inteiramente determinada por dois pontos.

8.1.2.3 Funções Afins e PAs

Proposição 8.9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se f é uma função afim e $(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)$ é uma PA, então a sequência formada pelos pontos $y_i=f(x_i)$, $i\in\mathbb{N}^*$ é uma PA. Reciprocamente, se f for monótona e transformar qualquer PA $(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)$ numa PA com termo geral $y_i=f(x_i)$, $i\in\mathbb{N}^*$, então f é uma função afim.

Demonstração. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função afim e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ uma PA de razão r. Provemos que a sequência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, onde $y_i=f(x_i)$, para cada $i\in\mathbb{N}^*$, é uma PA. Para tanto, seja $n\in\mathbb{N}^*$. Note que:

$$y_{n+1}-y_n = f(x_{n+1})-f(x_n).$$

Como f é afim, existem $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(x)=ax+b$. Logo:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}-y_n &= a(x_{n+1})+\cancel{b}-(ax_n+\cancel{b})\\
&= a(x_{n+1}-x_n)\\
&= ar.
\end{aligned}$$

Assim, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ é uma PA.

Suponha, reciprocamente, que f é monótona e transforma qualquer PA $(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)$ numa PA com termo geral $y_i=f(x_i)$, com $i\in\mathbb{N}^*$.

Para provar que f é afim, é suficiente verificar a linearidade da função $g(x)$ tal que

$f(x) = g(x) + f(0)$, uma vez que $g(x)$ seria da forma ax e $f(0)$ é constante. Pelo Teorema 8.2, basta provar que $g(nx) = ng(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

Note que $g(x) = f(x) - f(0)$. Além disso, se a sequência $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i), \ldots)$ é uma PA de razão r, a sequência $(f(x_1) - f(0), f(x_2) - f(0), \ldots, f(x_i) - f(0), \ldots)$ também é uma PA de razão r. Dessa forma, podemos concluir que g também transforma uma PA em outra.

Considere a PA $(0, x, 2x, 3x, \ldots)$. Temos que $(g(0), g(x), g(2x), g(3x), \ldots)$ também é uma PA, com razão $g(x) - g(0)$. No entanto, $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, o que implica que a PA tem razão $g(x)$. Pela fórmula do termo geral de uma PA, com $a_1 = g(0)$ e $a_{n+1} = g(nx)$, concluímos que $g(nx) = g(0) + n \cdot g(x) = n \cdot g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Falta mostrar que $g(nx) = n \cdot g(x)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < 0$. Para nos ajudar nessa tarefa, vamos demonstrar que $g(x) = -g(-x)$, em que $x \in \mathbb{R}$. Primeiro, note que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, os números $-x$, 0 e x constituem uma PA, e, portanto, $g(-x)$, $g(0)$ e $g(x)$ também estão em PA. Daí, temos que $g(x) - g(0) = g(0) - g(-x)$. No entanto, $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, o que implica que $g(x) = -g(-x)$.

Seja, agora, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < 0$; ou seja, $-n \in \mathbb{N}$. Calculemos:

$$\begin{aligned} g(nx) &= g\left((-n)(-x)\right) \\ &= (-n)g(-x) && (g(mx) = mg(x) \text{ para } m \in \mathbb{N}) \\ &= (-n)\left(-g(x)\right) && (g(k) = -g(-k) \text{ para } k \in \mathbb{R}) \\ &= ng(x) \end{aligned}$$

Demonstramos, então, que $g(nx) = ng(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pelo 8.2, g é linear; isto é, $g(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Logo, $f(x) = ax + f(0)$. Como a e $f(0)$ são constantes, temos que f é afim.

□

Atividade online. `Problemas de Modelos de Funções Lineares`.

Atividade online. `Problemas de Como Escrever Funções`.

Atividade online. `Funções Lineares e Não Lineares`.

8.1.3 Funções Quadráticas

8.1.3.1 Definição

Definição 8.10. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 8.11. Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a > 0$. Mostre que f não é limitada superiormente e que o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o mínimo absoluto da função. Caso tenhamos $a < 0$, então f não é limitada inferiormente e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o máximo absoluto da função.

Demonstração. Note que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

A última expressão é chamada de *forma canônica* da função quadrática.

Note que o termo $-\frac{\Delta}{4a^2}$ não depende de x. Assim, se $a > 0$, então $f(x)$ atingirá o seu mínimo quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, isto é, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Além disso, segue que $f(x)$ é ilimitada superiormente pois $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ também o é.

Teremos o mínimo da função como sendo:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a\left(0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
&= -\frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned}$$

O caso em que $a < 0$ é análogo. $\square$

Proposição 8.12. Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$, então x_1 e x_2 são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Demonstração. Sejam $x_1 \neq x_2$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Assim:

$$
\begin{aligned}
a\left(\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) &\iff \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \\
&\iff \left|x_1 + \frac{b}{2a}\right| = \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right| \\
&\overset{x_1 \neq x_2}{\iff} x_1 + \frac{b}{2a} = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right) \\
&\iff x_1 + x_2 = -2 \cdot \frac{b}{2a} \\
&\iff \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}
\end{aligned}
$$

Portanto, x_1 e x_2 são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$. □

8.1.3.2 Gráfico

Exemplo 8.13. O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é uma parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

Proposição 8.14. O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, tem a reta $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Demonstração. Da forma canônica da função quadrática, temos que:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Assim, obtemos o gráfico de f através do gráfico de $g(x) = ax^2$ mediante um deslocamento vertical de $\frac{-\Delta}{4a}$ e um deslocamento horizontal de $\frac{-b}{2a}$. Logo, o vértice da parábola é o ponto $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, e $x = -\frac{b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola. □

Atividade online. `Problemas com Expressões do Segundo Grau (Forma Padrão)`.

Atividade online. `Faça o Gráfico de Parábolas em Todas as Formas`.

Atividade online. `Deslocamento de Parábolas`.

Atividade online. `Dimensionar e Refletir Parábolas`.

8.2 Funções Polinomiais Gerais

Nesta seção, será visto o caso mais geral de função polinomial. Inicialmente, na Seção 8.2.1, serão abordados os polinômios, estritamente necessários para o entendimento de funções polinomiais. Em seguida, a Seção 8.2.2 introduzirá a definição de função polinomial, bem como algumas de suas propriedades. Por fim, na Seção 8.2.3, serão apresentadas algumas características acerca do gráfico de uma função polinomial.

8.2.1 Polinômios

Definição 8.15 (Polinômio)**.** Um *polinômio* é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo, chamado de *indeterminada*, sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \ldots X$ (i fatores). Ao maior número n tal que $a_n \neq 0$ damos o nome de *grau do polinômio* $p(X)$.

Definição 8.16 (Igualdade de Polinômios)**.** Dizemos que dois polinômios $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ e $q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ são iguais quando $n = m$ e $a_i = b_i$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Atividade online. `Verificação de Identidades Polinomiais`.

8.2.2 Definição

Definição 8.17. Diz-se que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{8.1}$$

Os elementos de $p^{-1}(0)$ são chamados de *raízes de* p.

Exemplo 8.18. Além das funções lineares, afins e quadráticas, a soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais. Considere a função polinomial p tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\left(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}\right) = x^n - \alpha^n.$$

Nesse caso, dizemos que $p(x)$ é *divisível* por $x - \alpha$.

Proposição 8.19. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz da função polinomial $p(x)$ de grau n, então existe uma função polinomial $q(x)$, de grau $n - 1$, tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x).$$

Além disso, $p(x)$ não pode ter mais do que n raízes.

Demonstração. Seja $p(x)$ uma função polinomial de grau n, ou seja, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Teremos, para $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + \cdots + a_1(x - \alpha) + \cancel{a_0} - \cancel{a_0}$$

Colocando o termo $(x - \alpha)$ em evidência de cada parcela dos $(x^i - \alpha^i)$, teremos:

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)q(x), \tag{8.2}$$

em que $q(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ proveniente da fatoração de $(x^n - \alpha^n)$, pelo Exemplo 8.18. Agora, se α é uma raiz de $p(x)$, então $p(\alpha) = 0$, e 8.2 tem a forma $p(x) = (x - \alpha)q(x)$. Ademais, note que esse processo só pode ser repetido no máximo n vezes, pois o grau de $q(x)$ é $n - 1$.

□

Definição 8.20. Uma função polinomial p chama-se *identicamente nula* quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação. Note que uma função polinomial tem uma infinidade de raízes, já que todo número real é raiz de do polinômio correspondente. Isso não contradiz a Propisição 8.19, já que o grau de uma função polinomial não está definido para a função identicamente nula.

Proposição 8.21 (Fórmula de Interpolação de Lagrange)**.** Dados $n + 1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados arbitrariamente $y_0, y_1, \ldots, y_n$ reais, existe um, e somente um, polinômio p de grau menor ou igual a n tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \ldots, \quad p(x_n) = y_n.$$

$p(x)$ pode ser obtido pela fórmula:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right].$$

8.2.3 Gráfico

Quando se deseja traçar o gráfico, ao menos um esboço, de uma função polinomial qualquer $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, certas informações são de grande utilidade. Algumas delas são:

- Se n é par, então para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n;
- Se n é ímpar, então $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grandes, em módulo, de x.

Exemplo 8.22. Sejam p_1, p_2, p_3 e p_4 funções polinomiais, cujos gráficos são mostrados nas Imagens 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4.

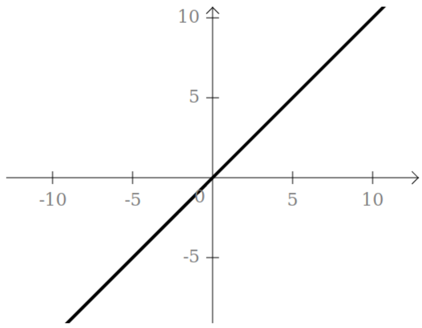


Imagem 8.1. Gráfico da função p_1.

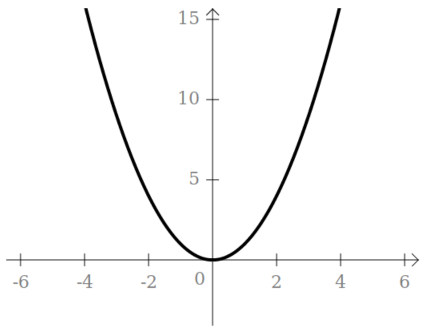


Imagem 8.2. Gráfico da função p_2.

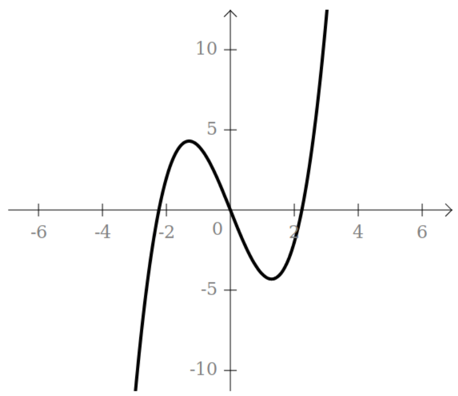


Imagem 8.3. Gráfico da função p_3.

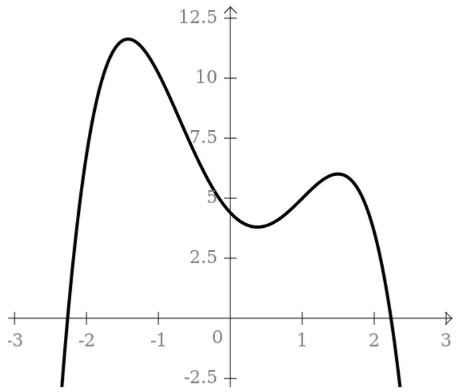


Imagem 8.4. Gráfico da função p_4.

Para cada gráfico, identifique se o grau n da função polinomial correspondente é par ou ímpar, e qual o sinal de a_n.

Solução. Note que, nas funções dos gráficos nas Imagens 8.2 e 8.4, tem-se que, para $|x|$ suficientemente grande – isto é, para os maiores valores de x —, $p(x)$ é positivo. Se n fosse ímpar, então $p(x)$ seria positivo para os maiores valores de x e negativo para os menores (maiores em módulo), ou vice-versa, mas, como vimos, isso não é verdade. Logo, para essas funções, n é par. Ademais, como, na função da Imagem 8.2, $p(x)$ é positivo nos maiores valores de $|x|$, tem-se que a_n também o é. Na função da Imagem 8.4, $p(x)$ é negativo nos maiores valores de $|x|$. Consequentemente, seu a_n é negativo.

Nas funções dos gráficos nas Imagens 8.1 e 8.3, temos que o sinal de $p(x)$ nos maiores valores de x é diferente do sinal nos menores valores de x. Se n fosse par, então o sinal de

$p(x)$ teria que ser o mesmo; a saber, o sinal de a_n. Logo, o valor de n de cada uma dessas funções é ímpar. A função cujo gráfico é mostrado na Imagem 8.1 é positiva nos maiores valores de x, o que quer dizer que a_n é positivo. Já a função da Imagem 8.3, por outro lado, é negativa nos maiores valores de x. Assim, a_n é negativo.

Outros fatos que nos ajudam a traçar gráficos de funções polinomiais são:

- Se o grau de p é maior do que o grau de outra função polinomial q, então para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$;

- Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então, p deve possuir uma raiz entre x_1 e x_2.

Exemplo 8.23. Considere os polinômios $p(x) = x^7$ e $q(x) = x^3$. Quando $0 < |x| < 1$, temos que $|p(x)| < |q(x)|$. Porém, quando $|x| > 1$, temos que $|p(x)| > |q(x)|$. Além disso, em ambos os casos, $p(-1) = q(-1) = -1 < 0$ e $p(1) = q(1) = 1 > 0$. Assim, os polinômios possuem, cada um, ao menos uma raiz no intervalo $(-1, 1)$ – a saber, $x = 0$.

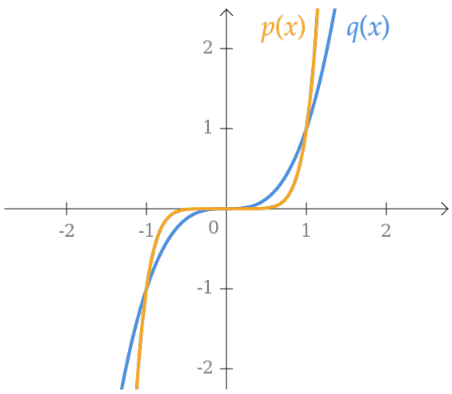


Imagem 8.5. Gráfico das funções p e q.

Atividade online. `Zeros de Polinômios e seus Gráficos`.

8.3 Exercícios

Exercício 1. A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

ºN	ºC
0	18
100	43

Modele o problema com funções afins que transformem a temperatura em °N em °C e vice-versa. Qual a relação entre essas duas funções? Em que temperatura ferve a água na escala N?

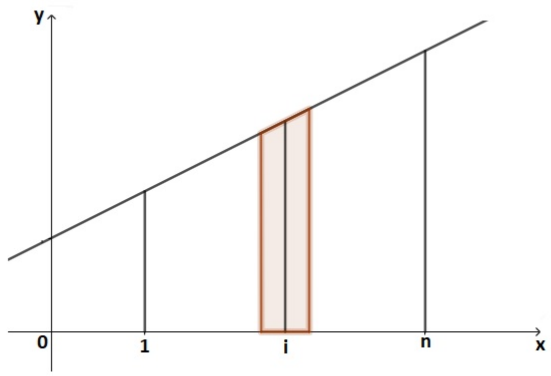
Exercício 2. Mostre que uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada quando conhecemos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$.

Exercício 3. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 s na escada quando sobe 5 degraus e 20 s quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?

Exercício 4. Dada as PAs $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, de razão não nula, e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $\ldots$, $f(a_n) = b_n$, $\ldots$

Exercício 5. Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de uma PA são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ de uma função afim, tal que $f(n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas verticais de equações $x = i - \frac{1}{2}$ e $x = i + \frac{1}{2}$.



(b) Mostre, por indução, que a soma $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas verticais $x = \frac{1}{2}$ e $x = n + \frac{1}{2}$.

(c) Conclua, a partir da área do trapézio, que $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

Exercício 6. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.

(a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$;

(b) $f(x) = 8x - 2x^2$;

(c) $f(x) = 2x^2 - 16x + 46$.

Exercício 7. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:

(a) $[1, 4]$;

(b) $[6, 10]$.

Dica: Esboce o gráfico de $f(x)$ nos intervalos indicados para visualizar melhor os valores mínimo e máximo assumidos pela função.

Exercício 8. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

Exercício 9. Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.

Exercício 10. Mostre que, se n é um número par, então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raiz real.
Dica: Note que, para $x \neq 1$, $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Proceda supondo, por contradição, que existe $a \neq 1$ raiz de $p(x)$.

8.4 Bibliografia

[2] Gelson Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 — Conjuntos e Funções*. Editora Atual.

[5] Elon L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. 9ª ed. SBM, 2006.

Capítulo 9

Funções Exponenciais e Logarítimicas

9.1 Introdução

As funções do tipo exponenciais modelam problemas nos quais o crescimento é calculado dependendo do valor no momento anterior, como em juros compostos. Por que será que a expressão "crescimento exponencial" é sinônimo de um crescimento muito acentuado?

Além disso, a função exponencial é a única função real contínua que transforma somas em produtos, ou seja,

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

A função logarítmica, que será apresentada na segunda parte desse capítulo, é a inversa da função exponencial. Por isso, teremos que ela é a única função real contínua que transforma produtos em somas, ou seja,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

9.2 Funções Exponenciais

9.2.1 Definição

Definição 9.1. Seja a um número real positivo diferente de 1. Chamamos de *função exponencial* uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com lei de formação $f(x) = a^x$. O número a é chamado de *base* da função exponencial.

Definição 9.2. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando $f(x) = b \cdot a^x$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, b é não nulo e a é positivo e diferente de 1.

Proposição 9.3 (Propriedades Fundamentais da Função Exponencial)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função exponencial de base a. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ valem:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

(ii) $a^1 = a$, ou seja, $f(1) = a$;

(iii) $x < y \implies \begin{cases} a^x < a^y, & \text{quando} \quad a > 1 \\ a^y < a^x, & \text{quando} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$.

Como consequências das propriedades listadas na Proposição 9.3, pode-se listar os seguintes resultados acerca de uma função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$:

- $f^{-1}(0) = \emptyset$, ou seja, f não pode assumir o valor zero;
- $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- Ao escolhermos o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ como contradomínio de f, obtemos a sobrejetividade da função;
- f é ilimitada superiormente;
- O gráfico de f é uma linha contínua;
- f é bijetiva e crescente se $a > 1$, ou decrescente se $0 < a < 1$.

Demonstração. Serão apresentadas as demonstrações dos dois primeiros itens, apenas. Os demais são consequências imediatas dessas demonstrações, ou não estão do escopo deste texto.

- Suponha que $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Agora, seja $y \in \mathbb{R}$. Note que:

$$f(y) = f(x_0 + y - x_0) = f(x_0) \cdot f(y - x_0) = 0$$

  Temos, em particular, que $f(1) = 0$, porém $f(1) = a$, o que contradiz o fato de que a base da função exponencial não é nula. Portanto, $f^{-1}(0) = \emptyset$.

- Seja $x \in \mathbb{R}$. Note que:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

  Como $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$. Portanto, $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

9.2.2 Gráfico

Exemplo 9.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função exponencial tal que $f(x) = a^x$. Na Imagem 9.1, são mostrados os gráficos nos casos de $a > 1$ e $0 < a < 1$.

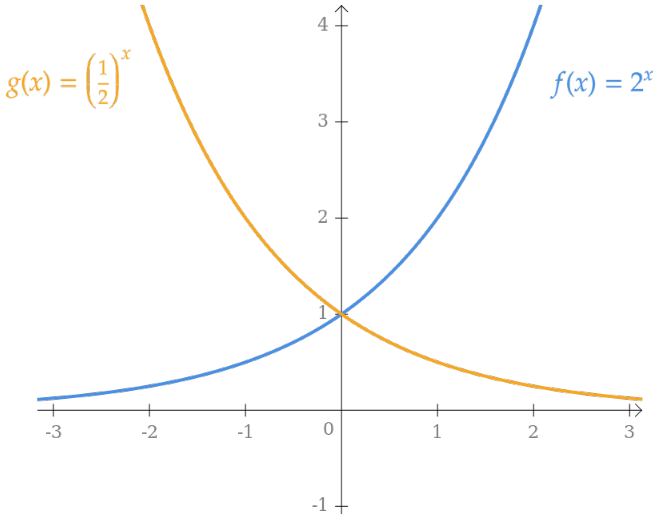


Imagem 9.1. Gráficos da função f nos casos $0 < a < 1$ e $a > 1$.

O gráfico de f nunca toca o eixo x, mas fica tão próximo quanto queiramos. Isso equivale dizer que a reta $y = 0$ é *assíntota* do gráfico de f.

Observação. Quando as bases de duas funções exponenciais são uma o inverso multiplicativo da outra, o gráfico de uma das funções consiste em uma reflexão do da outra. Em outras palavras, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$ para certo $a > 0$, então a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com regra $g(x) = \frac{1}{a}$ é tal que:

$$g(x) = \frac{1}{a} = a^{-1} = f(-1),$$

e, conforme visto na Seção 7.2.2.2, o gráfico de g é obtível a partir do f refletindo-o em relação ao eixo y. Ademais, note que, como $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que:

$$a > 1 \iff 0 < \frac{1}{a} < 1.$$

Exemplo 9.5. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Ao compararmos, por exemplo, as funções $f(x) = 2^x$ e $p(x) = x^{10}$, temos que:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1{,}077 &\implies 2^x > x^{10} \\ 1{,}077 < x < 58{,}77 &\implies x^{10} > 2^x \\ x > 58{,}77 &\implies 2^x > x^{10} \end{aligned}$$

Na Imagem 9.2, são mostrados os gráficos das funções. Pode-se perceber que, a partir de certo valor de x,o valor da função exponencial fica maior que o da polinomial.

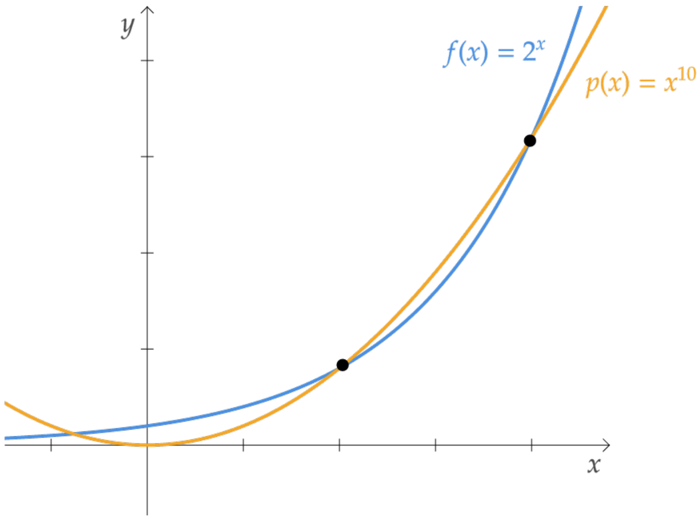


Imagem 9.2. Gráficos das funções f e p.

Atividade online. `Problemas (Algébricos) de Expressões Exponenciais`.

Atividade online. `Representação Gráfica de Crescimento e Decaimento Exponencial`.

Atividade online. `Gráficos de Funções Exponenciais`.

9.2.3 Caracterização

Teorema 9.6 (Caracterização da Função Exponencial)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

(i) $\implies$ (ii): Esta prova está fora do escopo do texto.

(ii) $\implies$ (iii): Suponha que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Note que:

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

(iii) $\implies$ (i): Suponha que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Temos que $f(x) = f(x + 0) = f(x) \cdot f(0)$. Logo, $f(0) = 1 = (f(x))^0$. Além disso, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x).$$

Logo, $f(-x) = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$. Note que:

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termos}}) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)}_{n \text{ termos}} = f(x)^n$$

Agora, sejam $n \in \mathbb{Z}_-^*$ e $x \in \mathbb{R}$. Assim, $-n \in \mathbb{N}^*$, e

$$f(nx) = f\left[-(-nx)\right] = \left[f(-nx)\right]^{-1} = \left[f(x)^{-n}\right]^{-1} = f(x)^n.$$

□

9.2.4 Funções Exponenciais e Progressões

Proposição 9.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função do tipo exponencial e $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ é uma PA, então a sequência formada pelos pontos $y_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$ é uma PG. Reciprocamente, se f for monótona injetiva e transformar qualquer PA $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ numa PG com termo geral $y_i = f(x_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$ então f é uma função real tal que $f(x) = b \cdot a^x$ com $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$.

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Inicialmente, suponha que $f(x) = ba^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso, suponha que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ é uma PA de razão r.

Considere a sequência $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ tal que $b_i = f(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}^*$. Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Temos que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = \frac{\cancel{b} \cdot a^{x_{n+1}}}{\cancel{b} \cdot a^{x_n}} = a^{x_{n+1} - x_n} = a^r$$

Logo, $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ é uma PG.

Reciprocamente, suponha que f é monótona e injetiva e transforma qualquer PA $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ em uma PG $(y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ tal que $y_i = f(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Ademais, tome $b = f(0)$.

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{f(x)}{b}$. Temos que g, assim como f, transforma PAs em PGs (exercício para o leitor). Agora, considere $a = g(1)$. Note que $g(1) = \frac{f(1)}{b}$, o que implica que $a = \frac{f(1)}{b}$ e, consequentemente, $f(1) = b \cdot a$.

Note que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $-x$, 0 e x estão em PA. Assim, $g(-x)$, $g(0)$ e $g(x)$ estão em PG. Como $g(0) = \frac{f(0)}{b} = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$, essa PG tem razão $\frac{g(x)}{g(0)} = g(x)$. Logo, $g(x) = \frac{1}{g(-x)}$, o que implica que:

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)} = (g(x))^{-1}$$

Ademais, a PG $(g(0) = 1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx), \ldots)$ tem razão $g(x)$. Logo, $g(nx) = (g(x))^n$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Como temos, também, que $g(-x) = (g(x))^{-1}$, podemos concluir que $g(nx) = (g(x))^n$ para todos $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue, do Teorema 9.6, que $g(x) = a^x$, em que $a = g(1)$. Assim,

$$f(x) = b \cdot g(x) = b \cdot a^x,$$

com $f(0) = b$ e $f(1) = b \cdot a$, ou seja, $a = \frac{f(1)}{f(0)}$.

□

9.3 Funções Logarítmicas

9.3.1 Definição

Definição 9.8. A inversa da função exponencial de base a é a *função logarítmica*

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado *logaritmo* de x na base a. No caso de $a = 10$, escrevemos, por simplicidade, $\log_{10} x = \log x$.

Observação. Pela definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a (a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Em outras palavras,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Proposição 9.9. Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica tal que $f(x) = \log_a x$. Os seguintes valem para quaisquer $x, y, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$ e qualquer $k \in \mathbb{R}$:

(a) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

(b) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$;

(c) $\log_a 1 = 0$;

(d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

(e) f é bijetiva com contradomínio $\mathbb{R}$, logo é ilimitada superiormente e inferiormente;

(f) O gráfico de f é traçado por uma linha contínua;

(g) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Demonstração. Sejam $x, y, b \in \mathbb{R}_+^*$, com $b \neq 1$, e $k \in \mathbb{R}$.

(a) Seja $z \in \mathbb{R}$. Ora,

$$z = \log_a x + \log_a y \iff a^z = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Note que $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$. Logo,

$$\begin{aligned} z = \log_a x + \log_a y &\iff a^z = a^{\log_a x + \log_a y} \\ &\iff a^z = xy \\ &\iff z = \log_a(xy) \end{aligned}$$

Portanto, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

(b) Seja $z \in \mathbb{R}$. Ora,

$$z = k \log_a x \iff a^z = a^{k \log_a x}$$

Note que $a^{k \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^k = x^k$. Logo:

$$\begin{aligned} z = k \log_a x &\iff a^z = x^k \\ &\iff z = \log_a x^k \end{aligned}$$

Portanto, $\log_a x^k = k \log_a x$

(c) Temos que $a^0 = 1$, e, portanto, $\log_a 1 = 0$.

(d) Note que $x = a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \cdot \log_a x}$. Com isso, temos que $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$. Portanto, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(e) A função f tem inversa — a saber, a exponencial $g(x) = a^x$ —, e, portanto, pelo Teorema 5.16, é bijetiva. Consequentemente, sua imagem é o conjunto $\mathbb{R}$, o que implica que é ilimitada tanto superiormente quanto inferiormente.

(f) A explicação do porquê de o gráfico de f ser traçado por uma linha contínua está fora do escopo do texto.

(g) Temos, como uma das consequências da Proposição 9.3, que a inversa de f é crescente quando $a > 1$ ou decrescente quando $0 < a < 1$, além de ser bijetiva. Logo, sua inversa, que é a própria função f pela Definição 5.8, também é crescente quando $a > 1$ ou decrescente quando $0 < a < 1$ (Exercício 8).

□

Atividade online. `Cálculo de Logaritmos (Avançado).`

Atividade online. `Use as Propriedades dos Logaritmos.`

Atividade online. `Use a Regra da Mudança de Base dos Logaritmos`

9.3.2 Gráfico

Exemplo 9.10. Considere as funções logarítmicas tais que $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Os gráficos de f e g são apresentados abaixo.

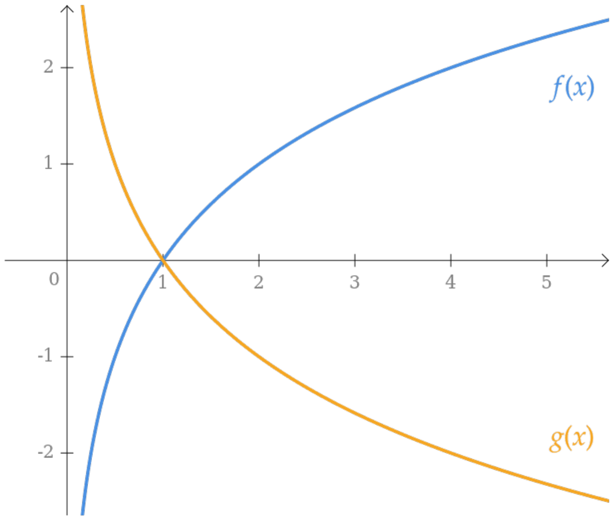


Imagem 9.3. Gráficos das funções f e g.

Qual a relação entre os gráficos dessas funções?

Solução. De modo geral, o gráfico de $h(x) = \log_b x$ terá forma semelhante ao de f quando $b > 1$, e semelhante ao de g quando $0 < b < 1$. Agora, verificaremos que o gráfico de g é um reflexo vertical do gráfico de f, ou seja, $g(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$. Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Note que:

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -f(x)$$

Assim, o gráfico de $g(x)$ é, simplesmente, uma reflexão do gráfico de $f(x)$. Mais geralmente, se f e g são funções logarítmicas de base a e b, respectivamente, então $a \cdot b = 1$ se, e somente se, o gráfico de g é reflexo vertical do gráfico de f (exercício para o leitor).

Observação. Já vimos que o crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Por ser a inversa da função exponencial, a função logarítmica possui um crescimento muito lento. Mesmo assim, a função logarítmica é ilimitada superiormente. Compare os gráficos abaixo:

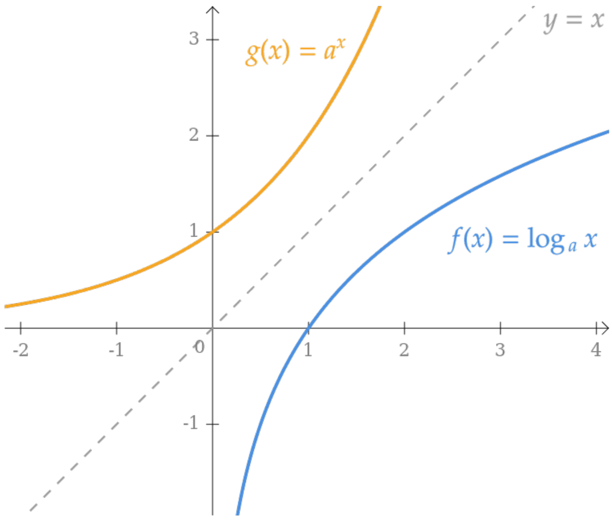


Imagem 9.4. Gráficos das funções f e g.

Atividade online. `Gráficos de Funções Logarítmicas`.

9.3.3 Caracterização

Teorema 9.11 (Caracterização da Função Logarítmica)**.** Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

9.3.4 O Número e e o Logaritmo Natural

Definição 9.12. Definimos o número e como sendo o número cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Em outras palavras, quanto maior for $n \in \mathbb{N}^*$, melhor a aproximação de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para e, e ela se dá na medida que desejarmos.

Observação. O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2{,}718281828459$.

Muito usado como base das funções exponenciais e logarítmicas, principalmente no estudo dessas funções no Cálculo Infinitesimal, o logaritmo na base e é tratado de forma especial.

Definição 9.13. Denotamos

$$\log_e x = \ln x$$

e o chamamos de *logaritmo natural*.

Atividade online. `Solução de Equações Exponenciais Usando Logaritmos: Base 10 e Base` e.

Atividade online. `Problemas com Modelos Exponenciais`.

9.4 Exercícios

Exercício 1. Mostre que a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Exercício 2. Mostre que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Exercício 3. Uma alga cresce de modo que, em cada dia, ela cobre uma superfície de área igual ao dobro da coberta no dia anterior.

(a) Defina uma função do tipo exponencial que modele o problema.

(b) Se uma alga cobre a superfície de um lago em 100 dias, qual é o número de dias necessários para que três algas, da mesma anterior, cubram a superfície do mesmo lago?

(c) Defina uma função que recebe a quantidade inicial de algas e calcule em quantos dias o lago estará coberto pelas algas.

Exercício 4. O gordinho Jaguatirica, certo dia, fez compras em 5 lojas de um shopping. Em cada loja, gastou metade do que possuia e pagou, na saída, R$ 2,00 de estacionamento. Se após toda essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente?

Exercício 5. Se (a_n) é uma PA, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma PG.

Exercício 6. Existe exemplo de função crescente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que, para todo $x \in \mathbb{N}$, a sequência $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$, ..., $f(x+n)$, ... é uma progressão geométrica mas f não é do tipo $f(x) = b \cdot a^x$?

Exercício 7. Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ uma PA, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função do tipo exponencial tal que $f(x) = ba^x$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ uma sequência tal que $f(x_i) = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ é uma PG?

Exercício 8. Use as aproximações $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,477$ e $\log 5 \approx 0,699$ para obter valores aproximados para:

(a) $\log 9$;

(b) $\log 40$;

(c) $\log 200$;

(d) $\log 3000$;

(e) $\log 0{,}003$;

(f) $\log 0{,}81$.

Exercício 9. Uma interpretação do logaritmo decimal é sua relação com a ordem de grandeza, isto é, com o número de algarismos na representação decimal. As questões a seguir exploram essa relação.

(a) Considere o número $x = 58.932{,}1503$. Qual é a parte inteira de $\log x$?

(b) Considere $x > 1$ um número real cuja parte inteira tem k algarismos. Use que a função logarítmica é crescente para mostrar que a parte inteira de $\log x$ é igual a $k - 1$;

(c) Generalizando o item anterior, considere o sistema de numeração posicional de base $b \geq 2$. Mostre que, se a representação de um número real $x > 1$ nesse sistema tem k algarismos, então, a parte inteira de $\log_b x$ é igual a $k - 1$.

Exercício 10. (UNIRIO/1994) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot 1{,}1^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log 2 \approx 0{,}30$ e $\log 11 \approx 1{,}04$, determine:

(a) A altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

(b) A idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de $1{,}6m$.

Exercício 11. Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = 10^k y$, com $k \in \mathbb{Z}$. Qual é a relação entre $\log x$ e $\log y$?

Exercício 12. Se (a_n) é uma PG com todos os termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = \ln a_n$ é uma PA.

Exercício 13. O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida (tempo necessário para que uma substância seja reduzida à metade da quantidade inicial) é de vinte e oito anos, ou seja, sendo f a função exponencial de base a que modele a quantidade de estrôncio-90 em função do tempo, tem-se $\log_a \frac{f(0)}{2} = 28$. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

9.5 Bibliografia

[3] Gelson Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 2 — Logaritmos*. Editora Atual.

[5] Elon L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. 9ª ed. SBM, 2006.

Capítulo 10

Funções Trigonométricas

10.1 Introdução

A trigonometria é estudada desde os gregos, e sua motivação inicial era determinar os seis elementos principais do triângulo — seus lados e ângulos — quando conhecidos alguns deles. Com a criação do Cálculo Infinitesimal, veio a necessidade da criação de funções trigonométricas definidas em $\mathbb{R}$, conforme será visto neste capítulo.

As funções trigonométricas referidas anteriormente ganharam notoriedade quando, em 1822, Joseph Fourier provou que toda função periódica é uma soma — finita ou infinita — de funções do tipo $a\cos(nx) + b\,\mathrm{sen}(nx)$. Tal descoberta deu origem à área da Matemática chamada Análise de Fourier. Além disso, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

10.2 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Definição 10.1. Em um triângulo retânglulo ABC, como na Imagem 10.1, definem-se o *cosseno* (cos) e o *seno* (sen) dos ângulos agudos do triângulo:

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \mathrm{sen}\,\widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos\widehat{C} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

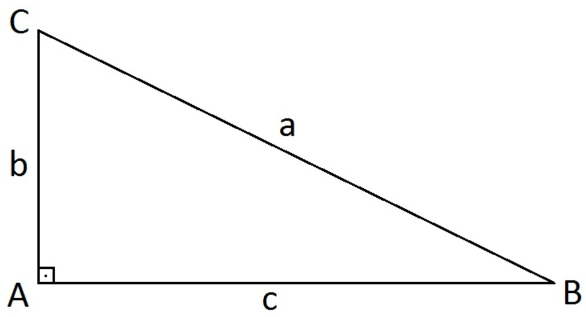


Imagem 10.1. Triângulo retângulo qualquer.

Observação. As relações definidas como o foram na Definição 10.1 são únicas para cada ângulo em decorrência da proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes. Portanto, calculam-se o seno e o cosseno de um ângulo independentemente do triângulo retângulo que o contém.

Proposição 10.2. Os seguintes valem:

- O cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complementar e vice-versa (daí surgiu o termo "cosseno": seno do complemento);
- O seno e o cosseno são números compreendidos entre 0 e 1, uma vez que são razões entre um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Demonstração. Sejam $\widehat{B}$ um ângulo agudo e $\triangle ABC$ um triângulo tal que um de seus ângulos mede $\widehat{B}$. A situação é ilustrada na Imagem 10.2.

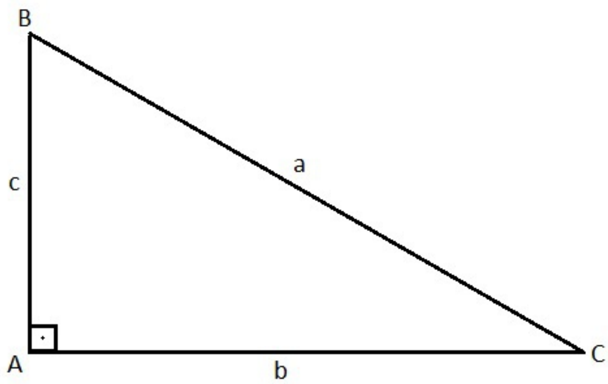


Imagem 10.2. Triângulo retângulo qualquer.

Temos que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180°$, ou seja, $\widehat{B}+\widehat{C} = 90°$. Logo, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são complementares. Segue que:

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} = \operatorname{sen}\widehat{C}.$$

Portanto, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complementar, e vice-versa. Ademais, pelo fato de a hipotenusa ser o maior dos lados de um triângulo retângulo, já que é oposta ao maior dos ângulos desse triângulo, segue que qualquer razão de um cateto pela hipotenusa será um número entre 0 e 1. □

Proposição 10.3 (Relação Fundamental da Trigonometria)**.** Seja $\widehat{B}$ um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a e os catetos, b e c. Então:

$$\operatorname{sen}^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1.$$

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retânglulo tal que $\widehat{B}$ é um de seus ângulos agudos. A situação é mostrada na Imagem 10.3.

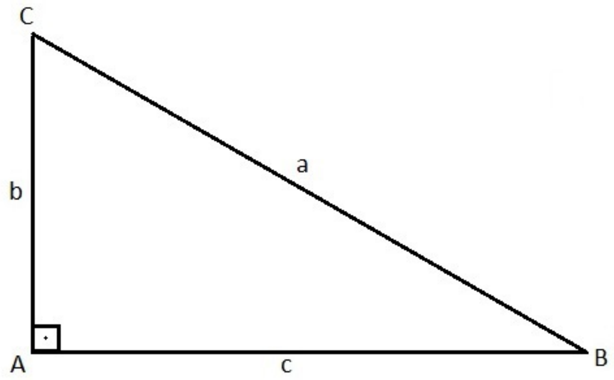


Imagem 10.3. Triângulo retângulo qualquer.

Do Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 = a^2 &\iff \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \\ &\iff \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \\ &\iff \operatorname{sen}^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1. \end{aligned}$$

□

Atividade online. `Razões Trigonométricas em Triângulos Retângulos`.

Atividade online. `Como Calcular a Medida de um Lado em Triângulos Retângulos`.

10.3 Funções Trigonométricas

10.3.1 Funções Seno e Cosseno

10.3.1.1 O Círculo Trigonométrico

A relação fundamental $\operatorname{sen}^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1$ sugere que os pontos do plano cartesiano $\left(\cos \widehat{B}, \operatorname{sen} \widehat{B}\right)$ pertencem a uma circunferência de raio 1, comumente chamada de *círculo* *trigonométrico*, como mostra a Imagem 10.4.

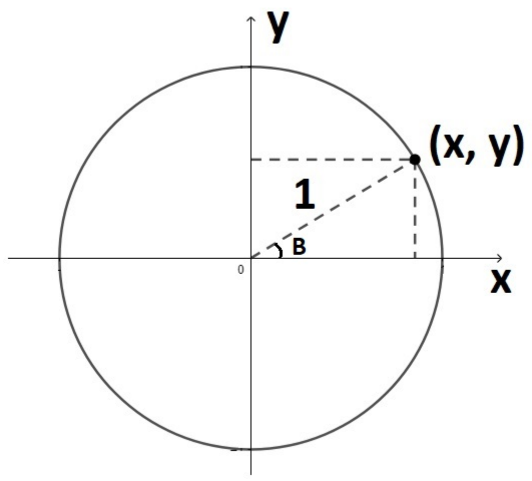


Imagem 10.4. Pontos da forma $(\cos \widehat{B}, \operatorname{sen} \widehat{B})$ numa circunferência de raio 1.

Dessa forma, sendo $\widehat{B}$ o ângulo medido a partir do eixo positivo de x e tomando o sentido anti-horário como sentido positivo, os pontos (x, y) do círculo acima são tais que $x = \cos \widehat{B}$ e $y = \operatorname{sen} \widehat{B}$.

10.3.1.2 Definição

A fim de definirmos as funções trigonométricas como funções reais, considere a seguinte função, chamada de função de Euler: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $E(t)$ é o ponto (x, y) do círculo trigonométrico obtido após "enrolarmos", com uma corda de comprimento t, o círculo trigonométrico iniciando no ponto $(1, 0)$ e tomando como sentido positivo o sentido anti-horário. A construção é mostrada na Imagem 10.5.

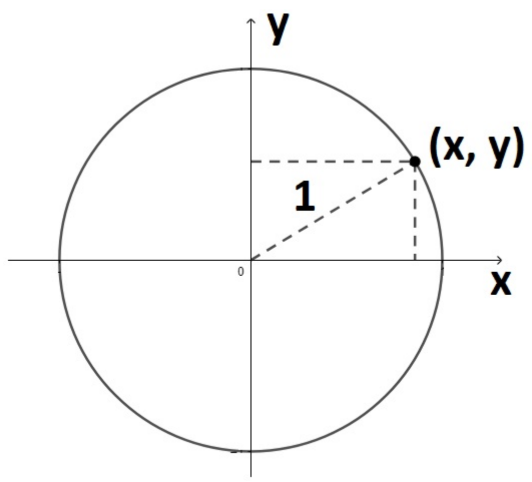


Imagem 10.5. Interpretação geométrica da função E.

Definição 10.4. As funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas *função cosseno* e *função seno*. respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,.$$

Em outras palavras, $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ são, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Segue imediatamente da Definição 10.4 que a relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

vale para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, valem as seguintes igualdades para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cc}
\cos(t+\pi) = -\cos t, & \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t,\\
\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t, & \operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t,\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \operatorname{sen} t, & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t,\\
\cos(\pi - t) = -\cos t, & \operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t.
\end{array}$$

Definição 10.5. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *periódica* quando existe $T \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ao menor número $T > 0$ que faz a propriedade anterior ser satisfeita, damos o nome de *período* da função f.

Observação. Como uma volta completa no círculo trigonométrico tem 2π de comprimento, é fácil ver que a função seno e cosseno são periódicas de período 2π.

Definição 10.6. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se for o caso de $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que f é *ímpar*.

Proposição 10.7. A função seno é ímpar, e a função cosseno é par.

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, suponha que $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Tome, no quarto quadrante do ciclo trigonométrico, o ponto $E(-t) = (x_0; y_0)$, e considere θ o ângulo que o segmento da origem a esse ponto faz com o eixo x, conforme a Imagem 10.6.

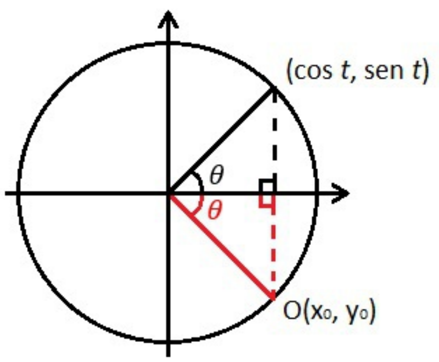


Imagem 10.6. Ângulo θ.

Teremos que $(x_0, y_0) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t))$ e que o ângulo formado no triângulo vermelho é igual a θ. Quando dois triângulos possuem hipotenusas congruentes e um dos ângulos agudos congruentes, tem-se que os triângulos são congruentes. Logo, $\cos t = \cos(-t)$ e $\operatorname{sen} t = |\operatorname{sen}(-t)|$. Como $\operatorname{sen}(-t)$ é negativo, segue que $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$. Os casos em que o ângulo θ está no segundo, terceiro ou quarto quadrantes ficam como exercício para o leitor. $\square$

Atividade online. `Valores Trigonométricos de Ângulos Especiais`.

Atividade online. `Use a Identidade Trigonométrica Fundamental`.

Atividade online. `Resolva Equações Senoidais (Básico)`.

10.3.1.3 Gráficos

Exemplo 10.8. O gráfico da função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mostrado na Imagem 10.7:

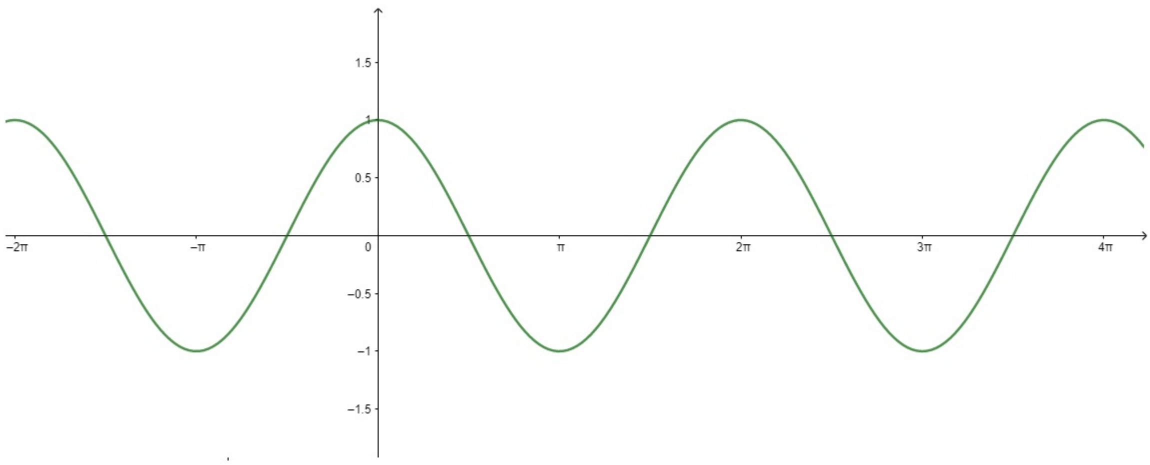


Imagem 10.7. Gráfico da função cosseno.

Exemplo 10.9. O gráfico da função $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mostrado na Imagem 10.8:

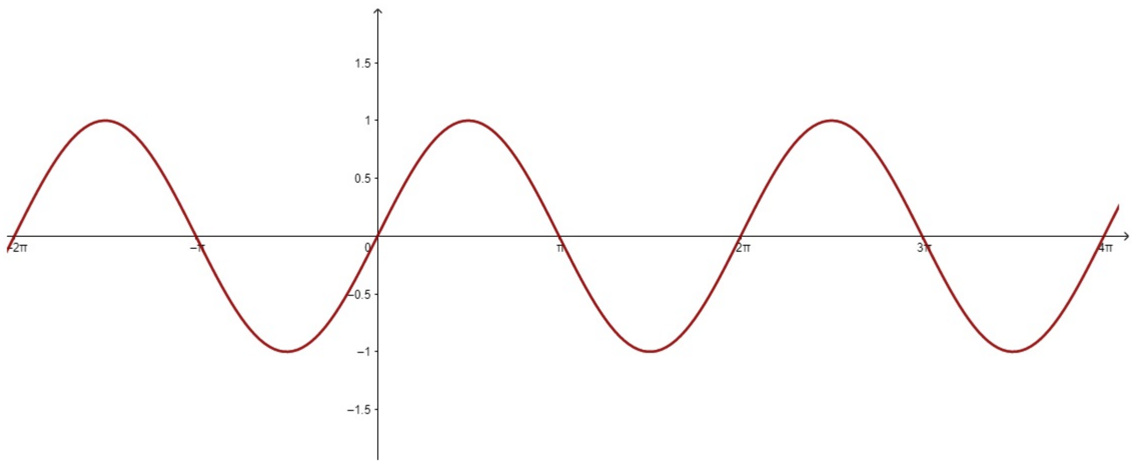


Imagem 10.8. Gráfico da função seno.

Atividade online. `Gráfico de Funções Senoidais`.

10.3.2 Outras Funções Trigonométricas

10.3.2.1 Funções Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

Definição 10.10. Definem-se, através das funções seno e cosseno, as funções trigonométricas com as seguintes leis de formação:

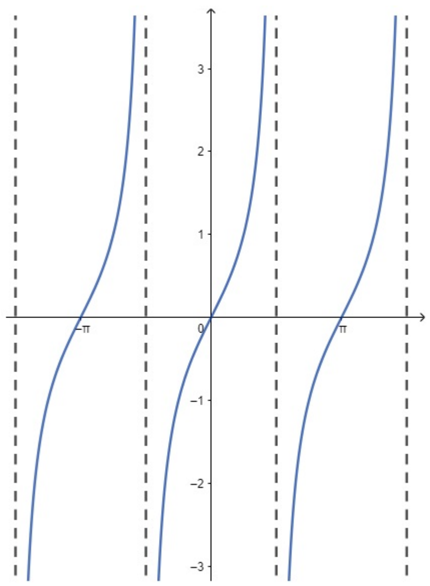
- $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, *tangente*;
- $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, *cotangente*;
- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, *secante*;
- $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, *cossecante.*

Observação. Os domínios das funções introduzidas na Definição 10.10 não contêm o conjunto dos valores de x que zeram seus respectivos denominadores. Assim, temos, por exemplo, que o maior subconjunto dos reais no qual podemos definir as funções tangente e secante é

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

10.3.2.2 Gráfico da Função Tangente

Exemplo 10.11. O gráfico da função $\tan : \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é:



10.3.2.3 Propriedades da Função Tangente

Proposição 10.12. Valem as seguintes propriedades acerca da função tangente:

(a) Embora não seja definida para todo número real, a função tangente pode ser considerada uma função periódica de período π em todo o seu domínio, pois $\tan(x+\pi) = \tan x$;

(b) Para todo par de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em uma reta não vertical, com $x_1 \neq x_2$, se α é o ângulo formado pela reta e o eixo x, então

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(c) Ao definirmos *tan* : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, obtemos uma bijeção. Assim, o intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$.

Demonstração.

(a) Seja $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Segue que:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

Logo, pela Definição 10.5, a função tangente é periódica.

(b) Considere uma reta não vertical com equação $y = mx+n$, em que $m > 0$. Considere, também, que essa reta forma um ângulo α com o eixo x. Agora, sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos quaisquer da reta tais que $x_1 \neq x_2$. O esquema é ilustrado na Imagem 10.9.

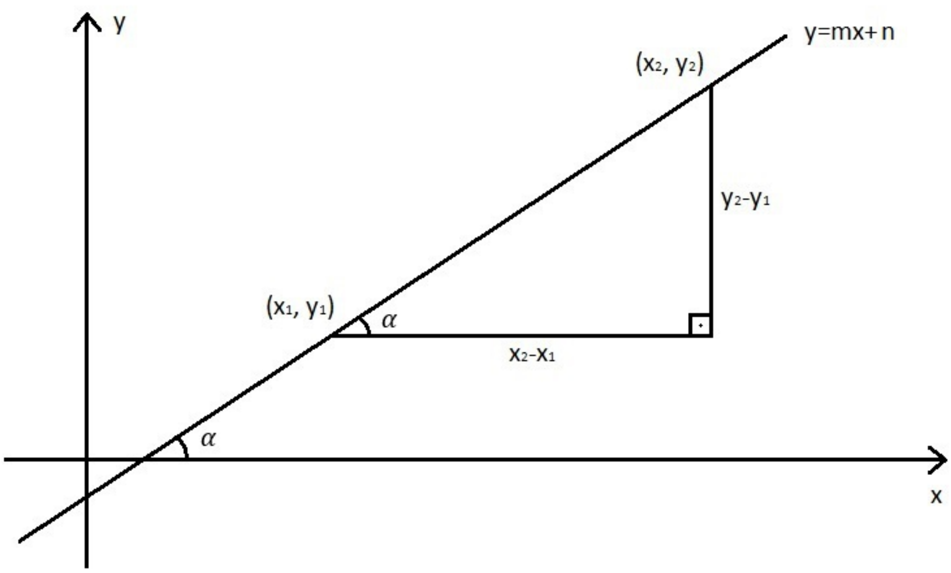


Imagem 10.9. Reta $y = mx + n$ e os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

No triângulo retângulo formado na imagem, temos:

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}}\\ &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\\ &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\end{aligned}$$

O caso em que $m < 0$ é análogo.

Sabemos que $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$ (Exercício 2). É por conta dessa igualdade que o valor m numa função afim é, costumeiramente, chamado de coeficiente angular. Porém, reforçamos que o termo mais apropriado para designar o m numa função afim é taxa de variação ou taxa de crescimento. Use o termo coeficiente angular quando estiver se referindo explicitamente a uma reta. Nesse contexto, ele corresponde ao valor da tangente de α, o ângulo formado pela reta e o eixo x.

(c) A demonstração deste item está fora do escopo do texto.

□

10.3.2.4 Função Inversa da Tangente

Exemplo 10.13. Como *tan* : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é bijetiva, então essa função possui inversa, que chamamos de *arco tangente* e denotamos por $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Seu gráfico é mostrado na Imagem 10.10.

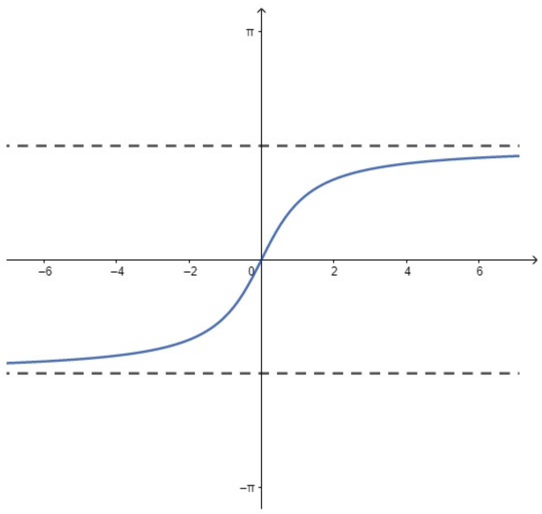


Imagem 10.10. Gráfico da função arctan.

Atividade online. `Razões Trigonométricas Recíprocas`.

Atividade online. `Problemas com Triângulos Retângulos`.

10.4 Identidades Trigonométricas

Identidades, no geral, são equações que são satisfeitas independentemente dos valores atribuídos às suas incógnitas. Em Trigonometria, é comum nos depararmos com identidades envolvendo as funções estudadas. Nesta seção, serão estudadas as fórmulas de adição de arcos, que são exemplos de identidades trigonométricas.

10.4.1 Adição de arcos

Proposição 10.14. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consideremos, incialmente, o caso em que $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Ele é ilustrado na Imagem 10.11.

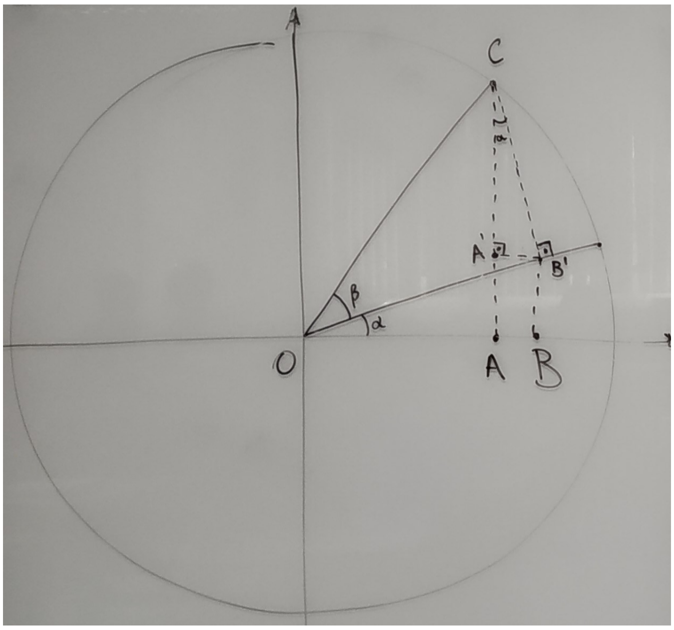


Imagem 10.11. Ângulos α e β e pontos O, A, A', B, B' e C.

Da imagem, obtemos as seguintes igualdades:

$$\cos(\alpha + \beta) = \overline{OA}$$

$$\cos\beta = \overline{OB'} \tag{10.1}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{CB'} \tag{10.2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}} \tag{10.3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \tag{10.4}$$

De 10.2 e 10.3, temos que:

$$\overline{A'B'} = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \tag{10.5}$$

De 10.1 e 10.4, temos que:

$$\overline{OB} = \cos\alpha\cos\beta \tag{10.6}$$

Pela imagem, temos, além disso, que:

$$\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} \tag{10.7}$$

Note, agora, que:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \\
&= \overline{OA} \\
&\overset{10.7}{=} \overline{OB} - \overline{AB} \\
&\overset{10.6}{=} \cos\alpha\cos\beta - \overline{AB} \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \overline{A'B'} \\
&\overset{10.5}{=} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Considere as relações:

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t \tag{10.8}$$

$$\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t \tag{10.9}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &\overset{10.8}{=} -\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\left[\cos\alpha\cdot\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&\overset{10.8}{=} -\left[\cos\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\beta) - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&\overset{10.9}{=} \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

□

Observação. Da Proposição 10.14 e da (im)paridade das funções seno e cosseno (Definição 10.6) seguem, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Além disso, temos os casos particulares:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha.$$

10.4.1.1 Rotação de Pontos no Plano Cartesiano

Nesta seção, será vista a rotação de pontos, uma aplicação direta das fórmulas de adição de arcos vistas até então.

Definição 10.15. Considere o ponto $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e chame de α o ângulo formado pelo segmento OA com o eixo positivo de x. A função $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T_\theta(x, y) = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta, x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta)$$

é a rotação de ângulo θ do ponto $A = (x, y)$ em torno da origem. O esquema é ilustrado na Imagem 10.12.

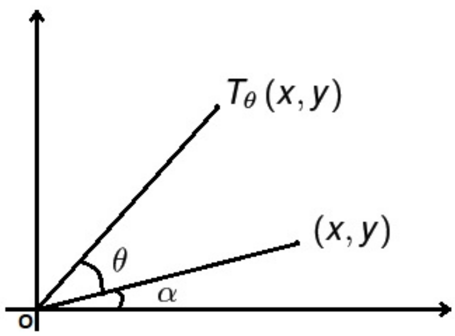


Imagem 10.12. Função de rotação T_θ.

Observação. Note que $x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta = \cos(\alpha+\theta)$ e que $x\operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta = \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}(\alpha+\theta)$, ou seja, a rotação de pontos é, de fato, uma aplicação direta das identidades da Proposição 10.14.

Atividade online. `Uso das Identidades Trigonométricas de Soma de Ângulos.`

Atividade online. `Calcule Valores Trigonométricos a Partir de Identidades de Soma de Ângulos.`

10.5 Leis dos Cossenos e dos Senos

Teorema 10.16 (Lei dos Cossenos)**.** Seja ABC um triângulo com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Então:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

Demonstração. Considere, na prova, o triângulo retângulo mostrado na Imagem 10.13.

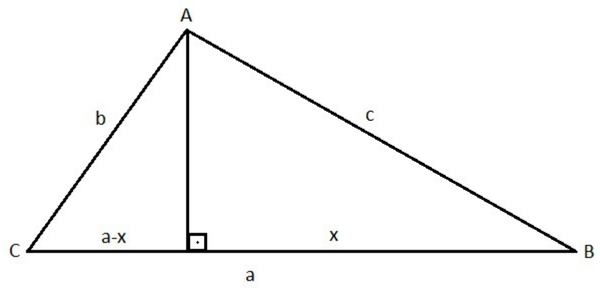


Imagem 10.13. Triângulo retângulo qualquer.

Note que $\cos \widehat{B} = \frac{x}{c}$, o que implica que:

$$x = c \cos \widehat{B} \tag{10.10}$$

Agora, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle APB$, temos que:

$$c^2 = x^2 + h^2 \tag{10.11}$$

Aplicando o mesmo teorema no triângulo $\triangle APC$, obtemos:

$$b^2 = (a - x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 \tag{10.12}$$

De 10.11 e 10.12, temos que:

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 - (x^2 + h^2) \overset{10.10}{\iff} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

□

Observação. A Lei dos Cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Note que, se $\widehat{B}$ é um ângulo reto, então $\cos \widehat{B} = 0$ e b será a hipotenusa do triângulo.

Teorema 10.17 (Lei dos Senos)**.** Seja ABC um triângulo com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Então:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$

Demonstração. Consideremos, novamente, o triângulo retângulo da Imagem . Temos que:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{h}{c} \iff h = c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} \tag{10.13}$$

$$\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{h}{b} \iff h = b \cdot \operatorname{sen}\widehat{C} \tag{10.14}$$

De 10.13 e 10.14, temos que $c \operatorname{sen}\widehat{B} = b \operatorname{sen}\widehat{C}$, o que implica que

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}.$$

Analogamente, baixando a altura relativa ao vértice B, teremos:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}.$$

□

As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando são dados três deles, desde que um seja lado, conforme os casos clássicos de congruência de triângulos.

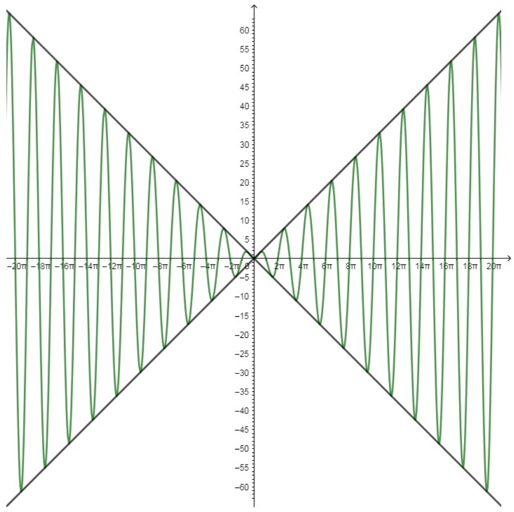
Atividade online. `Problemas com Triângulos Gerais`.

10.6 Exercícios

Exercício 1. Na Definição 10.1, definimos seno e cosseno de um ângulo no triângulo retângulo. Como você definiria, com os lados de um triângulo retângulo, as demais relações trigonométricas da Definição 10.10?

Exercício 2. Encontre os valores do domínio da função sen tais que ela seja igual a -1, 0 e 1 (não simultaneamente). Repita o processo para as funções cos, tan, sec, csc e cot.

Exercício 3. A figura abaixo representa o gráfico da função $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$, traçado no intervalo $[-20\pi, 20\pi]$, juntamente com as retas $y = x$ e $y = -x$.

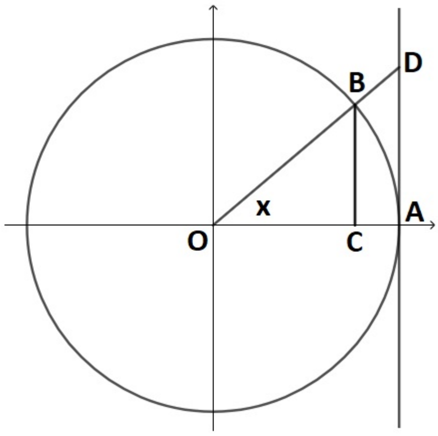


(a) Explique por que o gráfico de f_1 fica limitado entre essas retas e indique todos os pontos em que o gráfico toca as retas;

(b) Considere a seguinte afirmação: *Os máximos e mínimos locais da função f_1 ocorrem nos mesmos valores de x que os da função seno.* Esta afirmação é verdadeira?

(c) Como você espera visualizar o gráfico da função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_2(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$?

Exercício 4. Na figura abaixo, os segmentos AD e OD representam, respectivamente, $\tan x$ e $\sec x$.



(a) Justifique a afirmação acima;

(b) Qual a interpretação dos sinais de $\tan x$ e $\sec x$ na figura?

(c) Faça uma figura análoga para representar $\cot x$ e $\csc x$, justificando a construção.

Exercício 5. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Exercício 6. Sem utilizar as fórmulas de seno e cosseno da soma de dois arcos, mostre que, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$$

Exercício 7. Mostre que o perímetro do pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por $10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.

Exercício 8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(ax) + \operatorname{sen}(bx)$, em que a e b são constantes reais.

(a) Mostre que, se a e b são racionais, então f é periódica;
Dica: Mostre que o período de $\operatorname{sen}(ax)$ é $\frac{2\pi}{a}$.

(b) A recíproca da afirmação do item anterior é verdadeira? Justifique sua resposta.

Exercício 9. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

(a) $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$;

(b) $\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$;

(c) $\frac{\operatorname{sen} x}{\csc x - \cot x} = 1 + \cos x$;

(d) $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$;

(e) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$;

(f) $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)$;

(g) $\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$.

Exercício 10. Use as fórmulas de seno e cosseno da soma para determinar os senos e cossenos dos seguintes ângulos (medidos em radianos): $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

Exercício 11. Obtenha fórmulas para $\tan(\alpha+\beta)$ e para $\sec(\alpha+\beta)$, em função de $\tan\alpha$ e $\tan\beta$.

10.7 Bibliografia

[1] Manfredo P. Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner. *Trigonometria — Números Complexos*. 3ª ed. SBM, 2005.