Fatoração LU e resolução de sistemas

Francisco N. C. Sobral e Júlia Guizardi
Universidade Estadual de Maringá

XXXII Semana da Matemática
UEM, 2022

Pergunta de 1 milhão

Queremos resolver

$$Ax = b$$

O que é melhor?

- Calcular $x = A^{-1}b$
- Calcular $A = LU$ e resolver $LUx = b$ (Comando `A \ b`)

Fatoração LU e resolução de sistemas

Dado um sistema matricial da forma

$$Ax = b, \tag{1}$$

podemos calcular uma matriz triangular inferior unitária L e outra triangular superior U, tal que $A = LU$. Assim, para resolver (1), operamos

$$Ly = b \text{ e } Ux = y,$$

$$\Rightarrow Ax = LUx = Ly = b.$$

Fatoração LU

$$A = LU \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Seja a matriz A,

$$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 4 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, vamos calcular a fatoração LU.

$$\ell_{2,2} = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{4}{6}$$

Vamos operar $linha_2 = linha_2 - \ell_{2,2} \cdot linha_1$,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 0 & -5 & -\frac{23}{3} \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

Vamos repetir o processo até zeramos toda a parte inferior da matriz.

$$\ell_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = \frac{2}{6}$$

Daí $linha_3 = linha_3 - \ell_{3,1} \cdot linha_1$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 0 & -5 & -\frac{23}{3} \\ 0 & -4 & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

Por fim,

$$\ell_{3,2} = \frac{-4}{-5}$$

Daí $linha_3 = linha_3 - \ell_{3,2} \cdot linha_2$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 0 & -5 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

Com isso temos que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{6} & 1 & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 0 & -5 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Por que fazer?

Vantagens da fatoração:

- Apesar de serem dois sistemas, tais sistemas são simples de serem resolvidos pela quantidade de entradas nulas, uma vez que as matrizes L e U são triangulares;
- Caso seja necessário resolver outros sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes A, mas diferentes valores para b, podemos reaproveitar a fatoração de A;
- A fatoração LU nos permite executar a mudança de uma coluna de A de forma eficiente e sem ter que repetir toda a fatoração;
- Podemos fazer a fatoração usando pouco espaço da máquina.

Armazenamento

Note que é possível armazenar L e U em uma única matriz, consideremos $n = 3$:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} u_{1,2} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

O que podemos fazer é criar uma única matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} u_{1,2} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ \ell_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Isso é possível já que L é uma matriz unitária.

Com a fatoração em mãos, basta encontramos y em

$$Ly = b.$$

E depois, encontramos x,

$$Ux = y.$$

Exemplo 2

Seja o sistema matricial dado por $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 4 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Já calculamos a fatoração LU da matriz A no Exemplo 1. Agora, vamos resolver $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{6} & 1 & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

É fácil ver que $y_1 = 12$, os outros valores calculamos substituindo. Observe que são contas simples, e obtemos

$$y = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ -\frac{24}{5} \end{bmatrix}.$$

Por fim, vamos resolver $Ux = y$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 22 \\ 0 & -5 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ -\frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Fazendo a substituição encontramos

$$x = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Pivoteamento

Vejamos o exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 12 & -9 & 48 \\ 11 & 31 & -9 \end{bmatrix}$$

Realizamos a seguinte operação:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -9 & 48 \\ 0 & 1 & 7 \\ 11 & 31 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -9 & 48 \\ 0 & 1 & 7 \\ 11 & 31 & -9 \end{bmatrix}.$$

Chamamos essa matriz de P. Assim, temos:

$$PA = LU$$

Pivoteamento

Podemos substituir a matriz P por um vetor p :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Indicando a troca da primeira linha pela segunda com o vetor p utilizamos apenas um vetor, e podemos construir um algoritmo mais eficiente.

Obrigada!