

Problema dos Jogos Vorazes

Modelagem computacional de problemas de otimização - XXXIII SEMAT

Universidade Estadual de Maringá

Problema dos Jogos Vorazes

Item	Descrição	Peso (kg)	Valor de sobrevivência	Item	Descrição	Peso (kg)	Valor de sobrevivência
1	Saco de dormir	9	15	11	Flechas	5	10
2	Carne seca	5	14	12	Peneira	6	9
3	Nozes	3	10	13	Toalha	1	2
4	Arco	10	25	14	Barraca	25	50
5	Óculos de visão noturna	10	15	15	Rolo de arame	7	5
6	Estilingue	10	3	16	Frasco de iodo	5	12
7	Remédio	15	30	17	Par extra de meias	4	10
8	Lanterna	3	5	18	Fósforos	1	2
9	Faca	3	7	19	Broche do tordo	2	2
10	Água	5	15	20	Capa de chuva	12	25

Figura 1: Itens de sobrevivência e respectivos pesos e valores

Problema dos Jogos Vorazes

S														
14		11		3						20				
							9							
												6		
			10					7						
					16			18			5			
	12													
				13			1							
									8					
		2				19							4	
													17	
									15					

Figura 2: Mapa da área

Como modelar o PJV?

Para modelar o PJV como um problema de programação inteira mista, veremos ele por duas lentes:

- Problema da Mochila
- Problema do Caixeiro Viajante

Problema da Mochila

Considere o problema de se selecionar um conjunto de itens que **maximize o valor de sobrevivência** de Katniss sujeito apenas à restrição de **capacidade da mochila**.

- peso
- valor de sobrevivência
- capacidade da mochila

Problema da Mochila

Denotaremos por p_i e s_i o peso e o valor de sobrevivência do item i e por C a capacidade da mochila.

Problema da Mochila

Denotaremos por p_i e s_i o peso e o valor de sobrevivência do item i e por C a capacidade da mochila.

Assim, faremos uso das variáveis de decisão

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

para representar a presença ou ausência do item i na solução, onde n é a quantidade total de itens.

Problema da Mochila

Logo, objetivamos maximizar o somatório do valor de sobrevivência, ou seja

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n s_i x_i$$

Problema da Mochila

Logo, objetivamos maximizar o somatório do valor de sobrevivência, ou seja

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n s_i x_i$$

E simultaneamente respeitar a capacidade da mochila

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq C$$

Problema da Mochila

Assim, o problema de se selecionar um conjunto ótimo de itens que caibam na mochila pode ser modelado por

$$\begin{array}{ll}\text{Maximizar} & \sum_{i=1}^n s_i x_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq C \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n\end{array}$$

Suponha que Katniss deseje visitar todos os itens e retornar à origem no menor tempo possível. Tal problema é uma instância do Problema do Caixeiro Viajante.

Suponha que Katniss deseje visitar todos os itens e retornar à origem no menor tempo possível. Tal problema é uma instância do Problema do Caixeiro Viajante.

Sendo assim, denotaremos por c_{ij} a distância, que equivale ao tempo de viagem, entre os itens i e j .

Suponha que Katniss deseje visitar todos os itens e retornar à origem no menor tempo possível. Tal problema é uma instância do Problema do Caixeiro Viajante.

Sendo assim, denotaremos por c_{ij} a distância, que equivale ao tempo de viagem, entre os itens i e j .

Além disso, faremos uso das variáveis de decisão

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n$$

para denotar a presença/ausência de uma rota entre i e j .

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem
- Katniss deve retornar à origem

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem
- Katniss deve retornar à origem
- Katniss deve chegar em todo item uma vez

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem
- Katniss deve retornar à origem
- Katniss deve chegar em todo item uma vez
- Katniss deve deixar todo item uma vez

Com isso garantimos que Katniss faça um trajeto entre os itens e volte ao ponto de partida.

A saída da origem pode ser expressa por:

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = 1 \quad (1)$$

A saída da origem pode ser expressa por:

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = 1 \quad (1)$$

E o retorno à origem por

$$\sum_{j=1}^n x_{j1} = 1 \quad (2)$$

A chegada e a saída de cada item k podem ser modelados como

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1 \quad k = 2, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ki} = 1 \quad k = 2, \dots, n \quad (4)$$

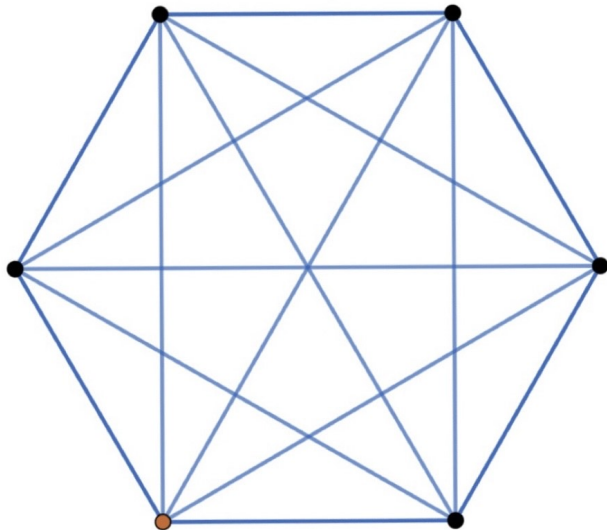
respectivamente.

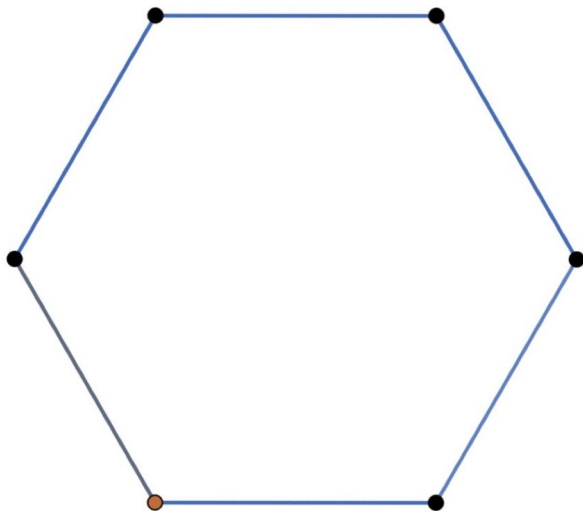
Assim, as restrições (1) – (4) são equivalentes a

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (5)$$

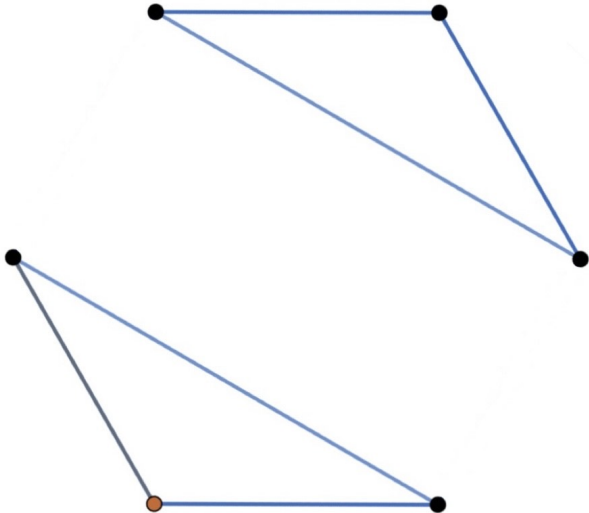
$$\sum_{i=1}^n x_{ki} = 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (6)$$

respectivamente.





Caixeiro Viajante



Para evitar o aparecimento de circuitos isolados, usaremos as **restrições de eliminação de sub-rotas** de Miller-Tucker-Zemlin.

Sendo assim, adicionaremos o seguinte conjunto de restrições:

$$u_i - u_j + (n + 1)x_{ij} \leq n \quad i, j = 2, \dots, n, \quad i \neq j$$

onde $u_i \geq 0 \quad i = 2, \dots, n$ são variáveis contínuas.

Caixeiro Viajante

Assim, o Problema do Caixeiro Viajante pode ser modelado matematicamente como

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{kj} = 1, \quad k = 1, \dots, n \\ & u_i - u_j + (n+1)x_{ij} \leq n \quad i, j = 2, \dots, n, \quad i \neq j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n \\ & u_i \geq 0 \quad i = 2, \dots, n\end{array}$$

Para modelar o PJV, levaremos em consideração as seguintes informações do problema

- p_i : peso do item i
- s_i : valor de sobrevivência do item i
- c_{ij} : distância (em tempo de viagem) entre os itens i e j
- C : capacidade da mochila
- T : limite de tempo

Agora, não basta apenas decidir quais itens pegar, precisamos de uma rota viável de coleta. Assim, faremos uso das variáveis

$$z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$$

para representar a presença/ausência do item i e

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n$$

para denotar a presença/ausência de uma rota entre i e j .

Ainda almejamos maximizar o valor de sobrevivência, logo, a função objetivo é

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n s_i z_i$$

Ainda almejamos maximizar o valor de sobrevivência, logo, a função objetivo é

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^n s_i z_i$$

Além disso, a capacidade da mochila também deve ser respeitada, ou seja

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i \leq C$$

Katniss não precisa retornar à origem no problema original nem escolher a melhor rota possível entre os itens. Logo, expressaremos a existência de um caminho viável como o conjunto de restrições abaixo

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = z_k, k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{kj} = z_k, k = 1, \dots, n$$

Katniss não precisa retornar à origem no problema original nem escolher a melhor rota possível entre os itens. Logo, expressaremos a existência de um caminho viável como o conjunto de restrições abaixo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n c_{ij} x_{ij} \leq T$$

$$u_i - u_j + (n + 1)x_{ij} \leq n \quad i, j = 2, \dots, n, \quad i \neq j$$

Assim, a modelagem em programação inteira mista do PJV pode ser feita como

$$\begin{array}{ll}\text{Maximizar} & \sum_{i=1}^{20} s_i z_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{20} p_i z_i \leq C, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n c_{ij} x_{ij} \leq T \\ & \sum_{i=1}^n x_{ik} = z_k, \quad k = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{kj} = z_k, \quad k = 1, \dots, n \\ & u_i - u_j + (n+1)x_{ij} \leq n \quad i, j = 2, \dots, n, \quad i \neq j \\ & z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n \\ & u_i \geq 0 \quad i = 2, \dots, n\end{array}$$

- [1] The Operations Research Challenge 2013, "Hunger Games", <http://orchallenge.org/wp-content/uploads/2014/01/TORCH2013-Questions.pdf>. Acesso em 20/06/2022.
- [2] Rangel, Socorro, "Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira", 2012.