Modelagem computacional de problemas de otimização

Dia 1

Francisco N. C. Sobral Giovana Melo dos Santos Joaquim Gabriel Martins

XXXIII SEMAT 2023

DMA - Universidade Estadual de Maringá

Resumo

Motivação

Modelagem

- A modelagem matemática de um problema está associada à escrever matematicamente um problema qualquer
- Em otimização, geralmente estamos interessados em olhar para conjunto de pontos e escolher algum

Problema do churrasco

- Uma pessoa vai fazer um churrasco para N pessoas
- Vai comprar contra filé (R$ 50 o kg) e costela (R$ 20 o kg). Para cada pessoa, calcula-se 500g de carne se for contra filé ou 700g se for costela
- Deve haver um balanço entre a gordura e a proteína: no máximo 20g de gordura e no mínimo 50g de proteína por pessoa em média
- Balanço nutricional fictício por 100g

	Gordura	Proteína
Costela	5g	5g
Contra filé	10g	2g

Problema do churrasco

- Uma pessoa vai fazer um churrasco para N pessoas
- Vai comprar contra filé (R$ 50 o kg) e costela (R$ 20 o kg). Para cada pessoa, calcula-se 500g de carne se for contra filé ou 700g se for costela
- Deve haver um balanço entre a gordura e a proteína: no máximo 20g de gordura e no mínimo 50g de proteína por pessoa em média
- Balanço nutricional fictício por 100g

	Gordura	Proteína
Costela	5g	5g
Contra filé	10g	2g

Um problema de otimização

Um problema de otimização geral é dado por

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$

Um problema de otimização

Um problema de otimização linear é dado por

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \\ \text{sujeito a} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, & i \in I_1 \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, & i \in E \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, & i \in I_2 \\ & x_i \geq 0 & \end{array}$$

Um problema de otimização

Um problema de otimização linear binária é dado por

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n & \\ \text{sujeito a} & a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i, & i \in I_1 \\ & a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, & i \in E \\ & a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \geq b_i, & i \in I_2 \\ & x_i \in \{0, 1\} & \end{array}$$

Hipóteses

Se um problema é modelado através de um problema de programação linear, então assumimos

- Proporcionalidade
  A contribuição de uma variável é proporcional ao seu valor
- Aditividade
  O valor da função objetivo total é a soma das contribuições individuais, o mesmo para as restrições
- Divisibilidade
  O valor de uma variável pode ser fracionado o quanto se necessite (valores inteiros não são obrigatórios)
- Dados determinísticos
  As constantes são bem definidas

Problema do churrasco

- Uma pessoa vai fazer um churrasco para N pessoas minimizando o custo financeiro
- Vai comprar contra filé (R$ 50 o kg) e costela (R$ 20 o kg). Para cada pessoa, calcula-se 500g de carne se for contra filé ou 700g se for costela
- Deve haver um balanço entre a gordura e a proteína: no máximo 20g de gordura e no mínimo 50g de proteína por pessoa em média
- Balanço nutricional fictício por 100g

	Gordura	Proteína
Costela	5g	5g
Contra filé	10g	2g

Usando JuMP

JuMP

- JuMP – Julia for Mathematical Programming
- Site: `https://jump.dev`

Primeiro modelo

- Considere

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 12x + 20y \\ \text{Sujeita a} \quad & 6x + 8y \geq 100 \\ & 7x + 12y \geq 120 \\ & x \geq 0 \\ & y \in [0, 3] \end{aligned}$$

Retirado de `https://jump.dev/JuMP.jl/stable/tutorials/getting_started/getting_started_with_JuMP/#An-example`

Primeiro modelo

- Assumo que JuMP e HiGHS já estão instalados (Nosso ambiente já faz isso)

Primeiro modelo

- Usando os pacotes

```
using JuMP, HiGHS
```

Primeiro modelo

- Criando o modelo para ser resolvido pelo software HiGHS

```
modelo = Model(HiGHS.Optimizer)
```

Primeiro modelo

- Criando as variáveis (com suas restrições)

```
@variable(modelo, x >= 0)
@variable(modelo, 0 <= y <= 3)
```

Primeiro modelo

- Adicionando as restrições

```
@constraint(modelo, c1, 6x + 8y >= 100)
@constraint(modelo, c2, 7x + 12y >= 120)
```

Primeiro modelo

- Função objetivo

  ```
  @objective(modelo, Min, 12x + 20y)
  ```

Primeiro modelo

- Resolvendo

  ```
  optimize!(modelo)
  ```

Primeiro modelo

- Mostra alguns resultados

```
@show termination_status(modelo)
@show primal_status(modelo)
@show dual_status(modelo)
@show objective_value(modelo)
@show value(x)
@show value(y)
```

Criando variáveis

```
@variable(modelo, x)
@variable(modelo, x[i = 1:10] >= 0)
@variable(modelo, x[1:5, 1:3]

u = [1, 3, 4, 5, 6]
@variable(modelo, x[i = 1:5] <= u[i])
```

Criando restrições

```
@constraint(modelo, 2 x[1] - x[3] == -10)

a = [-10, 0, 3]
@constraint(modelo, sum(x[j] for j = 1:3) == -10)

A = [0 1 1;
     1 2 0]
b = [8, 10];
@constraint(modelo, [i = 1:2],
            sum(A[i, j] * x[j] for j = 1:3) <= b[i])
```

Notação matricial

```
A = [ 1 1 9  5
      3 5 0  8
      2 0 6 13 ]

b = [7, 3, 5]
c = [1, 3, 5, 2]

modelo = Model(HiGHS.Optimizer)
@variable(modelo, x[1:4] >= 0)
@constraint(modelo, A * x .== b)
@objective(modelo, Min, c' * x)

optimize!(modelo)
```

Alguns exemplos

O problema da dieta (animal)

- Uma empresa agrícola fabrica ração para aves
- Diversos ingredientes são misturados (milho, soja, ...) de forma a atingir a quantidade mínima de determinados nutrientes (cálcio, proteína, ...)

O problema da dieta (animal)

- Suponha que tenhamos n ingredientes
- Suponha que tenhamos m nutrientes
- Seja x_j a quantidade utilizada para o ingrediente j
- Qual o problema de otimização que vamos modelar?

O problema da dieta (animal)

- Minimizar o custo de produção

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

onde c_j é o custo para adquirir uma unidade do produto j

O problema da dieta (animal)

- Produzir uma quantidade b do produto final

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b$$

O problema da dieta (animal)

- Satisfazer limites mínimos e máximos de cada nutriente

$$b\bar{l}_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b\bar{u}_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

onde

- $0 \leq \bar{l}_i \leq \bar{u}_i$ são os limites para uma unidade do nutriente i
- a_{ij} é a quantidade de nutriente i que há em uma unidade do ingrediente j

O problema da dieta (animal)

- Há um limite superior para a quantidade do ingrediente j que pode ser comprada

$$x_j \leq u_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

O problema da dieta (animal)

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Sujeita a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = b \\
& b\bar{l}_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b\bar{u}_i, i = 1, \ldots, m \\
& 0 \leq x_j \leq u_j, i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Consertar o modelo

- Queremos resolver um Sudoku com dimensão 4×4
- Temos um quadrado com 16 posições, 4 linhas, 4 colunas e 4 blocos 2×2
- São dados os valores conhecidos $v_{ij} \in \mathcal{C}$
- Em cada linha, coluna ou bloco deve existir um e apenas uma ocorrência do número $n \in \{1 \ldots, 4\}$

Consertar o modelo

- Utilizaremos variáveis binárias
- Seja x_{ijk} indicando 1 se a posição (i, j) possui o valor k, e 0 caso contrário, para $i, j, k \in \{1, \ldots, 4\}$

Consertar o modelo

- Somente um valor valor por linha ℓ

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{\ell,j,k} = 1$$

- Somente um valor por coluna c

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{i,c,k} = 1$$

- Somente um valor por bloco (b_i, b_j), $b_i, b_j \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{i=2(b_i-1)}^{2b_i}\sum_{j=2(b_j-1)}^{2b_j}\sum_{k=1}^{4} x_{i,j,k} = 1$$

Consertar o modelo

- $x \in \{0, 1\}$
- Lugares já preenchidos, para cada $v_{ij} \in \mathcal{C}$

$$x_{ij\ v_{ij}} = 1$$

Problema do financiamento

- A prefeitura de Maringá tem um grande projeto para ser executado em 4 anos
- Os gastos previstos (em milhões) para cada ano são

1	2	3	4
2	4	8	5

Problema do financiamento

- A prefeitura irá emitir títulos de dívida (ou seja, empréstimos) para realizar a obra que pagam juros **simples** com previsão de taxas dada por

1	2	3	4
7%	6%	6,5%	7,5%

- Os títulos começarão a cobrar juros após o fim da obra (quarto ano) e serão quitados após 20 anos

Problema do financiamento

- Além disso, a prefeitura pode colocar dinheiro em uma aplicação, para usar em anos posteriores, que lhe rendem juros anuais previstos como

1	2	3	4
6%	5,5%	4,5%	-

(No quarto ano, não faz sentido guardar dinheiro)

Problema do financiamento

- Seja x_j o valor obtido pela venda de títulos de dívida no ano j, $j = 1, \ldots, 4$
- Seja y_j a quantia colocada na aplicação no ano j, $j = 1, 2, 3$

Problema do financiamento

- Desejamos minimizar a quantidade de juros paga

$$20 \cdot 0,07x_1 + 20 \cdot 0,06x_2 + 20 \cdot 0,065x_3 + 20 \cdot 0,075x_4$$

Problema do financiamento

- Em cada ano, o valor usado no projeto ou vem dos títulos vendidos ou vem das aplicações de anos anteriores
- Uma parte do valor obtido nos títulos pode ser guardada em aplicação para uso futuro

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= 2 \\ 1,06y_1 + x_2 - y_2 &= 4 \\ 1,055y_2 + x_3 - y_3 &= 8 \\ 1,045y_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Problema do financiamento

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & 20 \cdot 0,07x_1 + 20 \cdot 0,06x_2 + 20 \cdot 0,065x_3 + 20 \cdot 0,075x_4 \\
\text{Sujeita a} & x_1 - y_1 = 2 \\
& 1,06y_1 + x_2 - y_2 = 4 \\
& 1,055y_2 + x_3 - y_3 = 8 \\
& 1,045y_3 + x_4 = 5 \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4 \\
& y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3
\end{array}
$$

O grande problema

O problema

- Os professores do DMA têm direito a 3 meses consecutivos de afastamento a cada 5 anos
- A cada mês, no máximo 20% dos professores pode estar afastados
- Uma vez recebido, os professores têm um prazo de 5 anos para usufruir senão perdem o afastamento
- Atualmente, cada professor p tem até o prazo t_p para usufruir de seu afastamento. Após esse prazo, ele perde o atual e ganha direito a outro
- Queremos planejar os afastamentos para o horizonte dos próximos 5 anos