Problema dos Jogos Vorazes

Modelagem computacional de problemas de otimização - XXXIII SEMAT

Universidade Estadual de Maringá

Problema dos Jogos Vorazes

Item	Descrição	Peso (kg)	Valor de sobrevivência	Item	Descrição	Peso (kg)	Valor de sobrevivência
1	Saco de dormir	9	15	11	Flechas	5	10
2	Carne seca	5	14	12	Peneira	6	9
3	Nozes	3	10	13	Toalha	1	2
4	Arco	10	25	14	Barraca	25	50
5	Óculos de visão noturna	10	15	15	Rolo de arame	7	5
6	Estilingue	10	3	16	Frasco de iodo	5	12
7	Remédio	15	30	17	Par extra de meias	4	10
8	Lanterna	3	5	18	Fósforos	1	2
9	Faca	3	7	19	Broche do tordo	2	2
10	Água	5	15	20	Capa de chuva	12	25

Figura 1: Itens de sobrevivência e respectivos pesos e valores

Problema dos Jogos Vorazes

S														
14		11		3							20			
							9							
													6	
			10						7					
					16			18				5		
	12													
				13			1							
										8				
		2				19								4
														17
										15				

Figura 2: Mapa da área

Como modelar o PJV?

Para modelar o PJV como um problema de programação inteira mista, veremos ele por duas lentes:

- Problema da Mochila
- Problema do Caixeiro Viajante

Problema da Mochila

Considere o problema de se selecionar um conjunto de itens que maximize o valor de sobrevivência de Katniss sujeito apenas à restrição de capacidade da mochila.

- peso
- valor de sobrevivência
- capacidade da mochila

Problema da Mochila

Denotaremos por p_i e s_i o peso e o valor de sobrevivência do item i e por C a capacidade da mochila.

Problema da Mochila

Denotaremos por p_i e s_i o peso e o valor de sobrevivência do item i e por C a capacidade da mochila.

Assim, faremos uso das variáveis de decisão

$$x_i \in \{0, 1\} \; i = 1, \ldots, n$$

para representar a presença ou ausência do item i na solução, onde n é a quantidade total de itens.

Problema da Mochila

Logo, objetivamos maximizar o somatório do valor de sobrevivência, ou seja

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i$$

Problema da Mochila

Logo, objetivamos maximizar o somatório do valor de sobrevivência, ou seja

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i$$

E simultaneamente respeitar a capacidade da mochila

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C$$

Problema da Mochila

Assim, o problema de se selecionar um conjunto ótimo de itens que caibam na mochila pode ser modelado por

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^{n} s_i \, x_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C, \qquad i = 1, \ldots, n \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Caixeiro Viajante

Suponha que Katniss deseje visitar todos os itens e retornar à origem no menor tempo possível. Tal problema é uma instância do Problema do Caixeiro Viajante.

Caixeiro Viajante

Suponha que Katniss deseje visitar todos os itens e retornar à origem no menor tempo possível. Tal problema é uma instância do Problema do Caixeiro Viajante.

Sendo assim, denotaremos por c_{ij} a distância, que equivale ao tempo de viagem, entre os itens i e j.

Caixeiro Viajante

Suponha que Katniss deseje visitar todos os itens e retornar à origem no menor tempo possível. Tal problema é uma instância do Problema do Caixeiro Viajante.

Sendo assim, denotaremos por c_{ij} a distância, que equivale ao tempo de viagem, entre os itens i e j.

Além disso, faremos uso das variáveis de decisão

$$x_{ij} \in \{0,1\} \; i,j = 1,\ldots,n$$

para denotar a presença/ausência de uma rota entre i e j.

Caixeiro Viajante

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem

Caixeiro Viajante

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem
- Katniss deve retornar à origem

Caixeiro Viajante

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem
- Katniss deve retornar à origem
- Katniss deve chegar em todo item uma vez

Caixeiro Viajante

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Katniss deve sair da origem
- Katniss deve retornar à origem
- Katniss deve chegar em todo item uma vez
- Katniss deve deixar todo item uma vez

Com isso garantimos que Katniss faça um trajeto entre os itens e volte ao ponto de partida.

Caixeiro Viajante

A saída da origem pode ser expressa por:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 1 \tag{1}$$

Caixeiro Viajante

A saída da origem pode ser expressa por:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 1 \tag{1}$$

E o retorno à origem por

$$\sum_{j=1}^{n} x_{j1} = 1 \tag{2}$$

Caixeiro Viajante

A chegada e a saída de cada item k podem ser modelados como

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1 \ k = 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} = 1 \ k = 2, \ldots, n \tag{4}$$

respectivamente.

Caixeiro Viajante

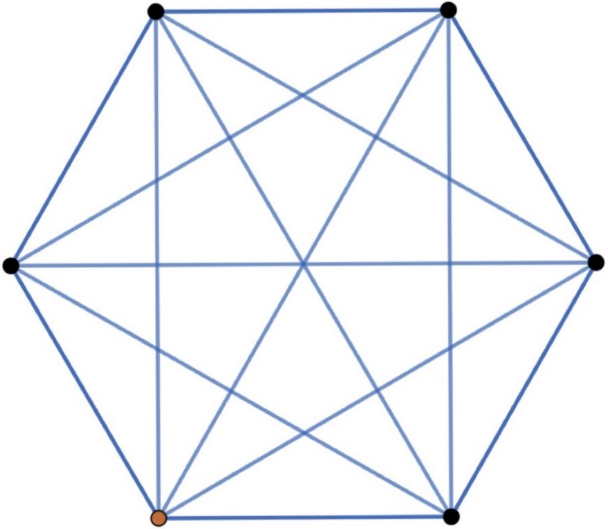
Assim, as restrições (1) – (4) são equivalentes a

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1 \; k = 1, \ldots, n \tag{5}$$

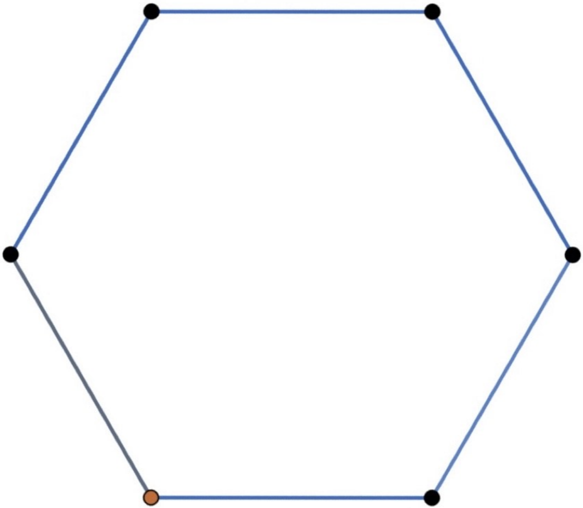
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} = 1 \; k = 1, \ldots, n \tag{6}$$

respectivamente.

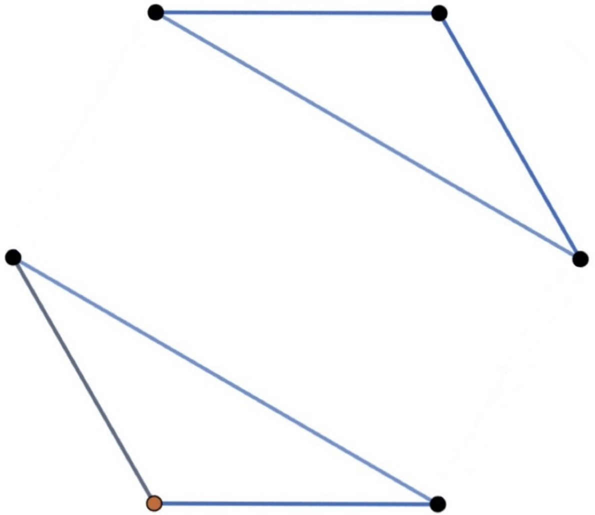
Caixeiro Viajante



Caixeiro Viajante



Caixeiro Viajante



Caixeiro Viajante

Para evitar o aparecimento de circuitos isolados, usaremos as restrições de eliminação de sub-rotas de Miller-Tucker-Zemlin.

Sendo assim, adicionaremos o seguinte conjunto de restrições:

$$u_i - u_j + (n+1)x_{ij} \leq n \; i,j = 2,\ldots,n, \;\; i \neq j$$

onde $u_i \geq 0 \; i = 2,\ldots,n$ são variáveis contínuas.

Assim, o Problema do Caixeiro Viajante pode ser modelado matematicamente como

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1, & k = 1, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 1, & k = 1, \ldots, n \\
& u_i - u_j + (n+1)x_{ij} \leq n & i, j = 2, \ldots, n, \ i \neq j \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, & i, j = 1, \ldots, n \\
& u_i \geq 0 & i = 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Jogos Vorazes

Para modelar o PJV, levaremos em consideração as seguintes informações do problema

- p_i: peso do item i
- s_i: valor de sobrevivência do item i
- c_{ij}: distância (em tempo de viajem) entre os itens i e j
- C: capacidade da mochila
- T: limite de tempo

Jogos Vorazes

Agora, não basta apenas decidir quais itens pegar, precisamos de uma rota viável de coleta. Assim, faremos uso das variáveis

$$z_i \in 0, 1 \ i = 1, \ldots, n$$

para representar a presença/ausência do item i e

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \ i, j = 1, \ldots, n$$

para denotar a presença/ausência de uma rota entre i e j.

Jogos Vorazes

Ainda almejamos maximizar o valor de sobrevivência, logo, a função objetivo é

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i$$

Jogos Vorazes

Ainda almejamos maximizar o valor de sobrevivência, logo, a função objetivo é

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i$$

Além disso, a capacidade da mochila também deve ser respeitada, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C$$

Jogos Vorazes

Katniss não precisa retornar à origem no problema original nem escolher a melhor rota possível entre os itens. Logo, expressaremos a existência de um caminho viável como o conjunto de restrições abaixo

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = z_k, k = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = z_k, k = 1, \ldots, n$$

Jogos Vorazes

Katniss não precisa retornar à origem no problema original nem escolher a melhor rota possível entre os itens. Logo, expressaremos a existência de um caminho viável como o conjunto de restrições abaixo

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} c_{ij}x_{ij} \leq T$$

$$u_i - u_j + (n+1)x_{ij} \leq n \; i, j = 2, \ldots, n, \;\; i \neq j$$

Assim, a modelagem em programação inteira mista do PJV pode ser feita como

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{20} s_i x_i & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{20} p_i x_i \leq 30, & i = 1, \ldots, 20 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq 30 & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1, & k = 1, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 1, & k = 1, \ldots, n \\
& u_i - u_j + (n+1)x_{ij} \leq n & i, j = 2, \ldots, n, \ i \neq j \\
& x_i \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, 20 \\
& u_i \geq 0 & i = 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Referências

[1] The Operations Research Challenge 2013, "Hunger Games", http://orchallenge.org/wp-content/uploads/2014/01/TORCH2013-Questions.pdf. Acesso em 20/06/2022.

[2] Rangel, Socorro, "Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira", 2012.