Problemas de empacotamento: uma abordagem inicial

Joaquim Gabriel Martins

Minicurso: Modelagem computacional de problemas de otimização

Universidade Estadual de Maringá - UEM

2 de agosto de 2023

O que é empacotamento?

Considere que você possui n latas de cerveja, cada uma com um volume específico v_i (onde $i = 1, 2, \ldots, n$), e caixas com capacidade para armazenar um volume máximo V. O objetivo é determinar a quantidade ideal de cervejas necessárias para preencher completamente uma caixa, otimizando o uso do espaço na caixa e minimizando o número de espaços vazios.

Podemos abordar esse problema como uma alocação de circunferências em uma caixa retangular, supondo que a altura da lata seja a mesma do tamanho da caixa. Dessa forma, buscamos encontrar a disposição mais eficiente das latas dentro da caixa, visando ocupar o espaço de forma otimizada e reduzindo ao máximo os espaços não preenchidos.

O que é empacotamento?

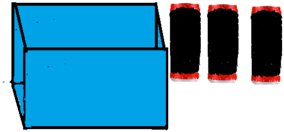

Figura: Problema em 3D

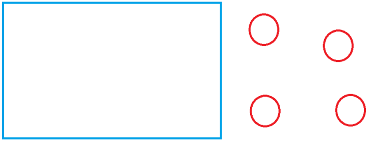

Figura: Problema em 2D

O que é empacotamento

Ao visualizarmos o problema pode-se pensar que de forma manual, isso é, de forma humana é algo trivial, entretanto e se tivermos várias latas de tamanhos diferentes e se quisermos levar também um pote de sorvete onde podemos desprezar a altura nessa caixa, o que faremos?

O que é empacotamento?

Matematicamente podemos pensar como o seguinte problema

Problema Fundamental

Dadas uma faixa retangular de comprimento $L > 0$ e largura $W > 0$, e um número finito de círculos e polígonos, desejamos dispor estes itens dentro da faixa retangular sem que haja sobreposição

Contenção de cícurlos

$$
\begin{aligned}
-x^C &\leq -r, \\
x^C &\leq W - r, \\
-y^C &\leq -r, \\
y^C &\leq L - r.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Essas desigualdades nos ajudam a delimitar a região em que o centro do círculo pode estar para que ele permaneça completamente dentro da faixa retangular.

Contenção de circunferências

Interpretação das Desigualdades: Vamos entender o significado de cada desigualdade:
$-x^C \leq -r$: A coordenada x^C do centro do círculo deve ser maior ou igual a r. Isso garante que o círculo não ultrapasse a borda esquerda da faixa retangular.
$x^C \leq W - r$: A coordenada x^C do centro do círculo deve ser menor ou igual a $W - r$. Isso garante que o círculo não ultrapasse a borda direita da faixa retangular.
$-y^C \leq -r$: A coordenada y^C do centro do círculo deve ser maior ou igual a r. Isso garante que o círculo não ultrapasse a borda inferior da faixa retangular.
$y^C \leq L - r$: A coordenada y^C do centro do círculo deve ser menor ou igual a $L - r$. Isso garante que o círculo não ultrapasse a borda superior da faixa retangular.

Modelagem - Não-sobreposição de Círculos

Nesta parte do minicurso, abordaremos a restrição de não-sobreposição entre dois círculos. Suponhamos que tenhamos dois círculos, cada um com seu próprio centro (x^{C_1}, y^{C_1}) e (x^{C_2}, y^{C_2}), e raios r_1 e r_2, respectivamente.

Restrição de Não-sobreposição:

A condição para que os dois círculos não se sobreponham é dada por:

$$(x^{C_1} - x^{C_2})^2 + (y^{C_1} - y^{C_2})^2 \geq (r_1 + r_2)^2.$$

Essa equação nos diz que a distância entre os centros dos dois círculos, representada pela expressão $(x^{C_1} - x^{C_2})^2 + (y^{C_1} - y^{C_2})^2$, deve ser maior ou igual à soma dos quadrados dos raios r_1 e r_2.

Não sobreposição de Círculos

Interpretação:
Podemos interpretar essa restrição como garantia de que não existe nenhum ponto que esteja contido em ambos os círculos. Se a desigualdade for satisfeita, os círculos não se sobrepõem e, portanto, mantêm uma distância segura entre si.

Modelagem - Contenção de Circunferências

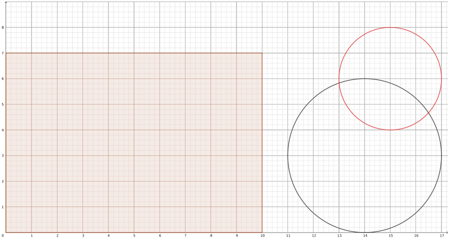

Figura: Contenção de circunferência.

Representação de Polígonos:
Para modelar polígonos, precisamos definir notações para representar seus respectivos vértices. Suponha que tenhamos um polígono convexo P_i. Sua representação pode ser dada da seguinte forma:

$$P_i = [(x_i^1, y_i^1), (x_i^2, y_i^2), \ldots, (x_i^k, y_i^k)].$$

Ou seja, o polígono P_i possui k vértices numerados de 1 a k, e cada vértice é representado por um par ordenado (x_i^k, y_i^k).

Contenção de Polígonos

Observação: Polígonos Não Convexos
Quando lidamos com polígonos não convexos, podemos representá-los como a união de diversos polígonos convexos. Isso significa que um polígono não convexo P_i pode ser decomposto em várias partes, cada uma delas sendo um polígono convexo.

Generalizando:
De forma mais geral, podemos representar um polígono como:

$$(v^l_{x_{i_k}}, v^l_{y_{i_k}}), \text{ com } k = 1, \ldots, p_i, \text{ e } l = 1, \ldots, v_{i_k},$$

onde v_{i_k} é o número de vértices da k-ésima componente convexa do polígono P_i.

Modelagem - Não-sobreposição de Círculos

Nesta parte do minicurso, abordaremos a restrição de não-sobreposição entre dois círculos. Suponhamos que tenhamos dois círculos, cada um com seu próprio centro (x^{C_1}, y^{C_1}) e (x^{C_2}, y^{C_2}), e raios r_1 e r_2, respectivamente.

Não sobreposição de Circunferências

Restrição de Não-sobreposição:
A condição para que os dois círculos não se sobreponham é dada por:

$$(x^{C_1} - x^{C_2})^2 + (y^{C_1} - y^{C_2})^2 \geq (r_1 + r_2)^2.$$

Essa equação nos diz que a distância entre os centros dos dois círculos, representada pela expressão $(x^{C_1} - x^{C_2})^2 + (y^{C_1} - y^{C_2})^2$, deve ser maior ou igual à soma dos quadrados dos raios r_1 e r_2.

Para garantir que dois polígonos P_i e P_j não se sobreponham, é necessário que exista uma linha de separação entre eles, de modo que todos os vértices de P_i e P_j estejam em lados diferentes dessa linha.

Coordenadas dos Vértices:

Considerando um polígono P_i qualquer, as coordenadas do vértice l podem ser calculadas como:

$$X_i^l = v_{x_i}^l \cdot \cos(\theta_i) - v_{y_i}^l \cdot \sin(\theta_i) + x^{P_i}, \; Y_i^l \;\; = v_{x_i}^l \cdot \sin(\theta_i) + v_{y_i}^l \cdot \cos(\theta_i) + y^{P_i}$$

onde $v_{x_i}^l$ e $v_{y_i}^l$ representam as coordenadas do vértice l do polígono P_i, e θ_i é o ângulo de rotação do polígono P_i.

Não-sobreposição entre polígonos

Condição de Separação:
Os polígonos P_i e P_j estarão separados se e somente se:

$$Y_i^l - c_{i,j} \cdot X_i^l - d_{i,j} \geq 0 \quad \text{para } l = 1, \ldots, v_i, \; Y_j^l - c_{i,j} \cdot X_j^l - d_{i,j} \quad \leq 0 \quad \text{para}$$

Essas condições asseguram que cada vértice de P_i esteja de um lado da linha de separação em relação a P_j, e vice-versa.
Vamos continuar com exemplos para reforçar nosso entendimento sobre a não-sobreposição de polígonos.

Não-sobreposição entre Polígonos

Para garantir que dois polígonos P_i e P_j não se sobreponham, é necessário que exista uma linha de separação entre eles, de modo que todos os vértices de P_i e P_j estejam em lados diferentes dessa linha.

Coordenadas dos Vértices:

Considerando um polígono P_i qualquer, as coordenadas do vértice l podem ser calculadas como:

$$
\begin{aligned}
X_i^l &= v_{x_i}^l \cdot \cos(\theta_i) - v_{y_i}^l \cdot \sin(\theta_i) + x^{P_i}, \\
Y_i^l &= v_{x_i}^l \cdot \sin(\theta_i) + v_{y_i}^l \cdot \cos(\theta_i) + y^{P_i},
\end{aligned}
$$

onde $v_{x_i}^l$ e $v_{y_i}^l$ representam as coordenadas do vértice l do polígono P_i, e θ_i é o ângulo de rotação do polígono P_i.

Frame Title

Condição de Separação:
Os polígonos P_i e P_j estarão separados se e somente se:

$$
\begin{aligned}
Y_i^l - c_{i,j} \cdot X_i^l - d_{i,j} \geq 0 \quad \text{para } l = 1, \ldots, v_i, \\
Y_j^l - c_{i,j} \cdot X_j^l - d_{i,j} \leq 0 \quad \text{para } l = 1, \ldots, v_j.
\end{aligned}
$$

Essas condições asseguram que cada vértice de P_i esteja de um lado da linha de separação em relação a P_j, e vice-versa.
Vamos continuar com exemplos para reforçar nosso entendimento sobre a não-sobreposição de polígonos.

Exemplo

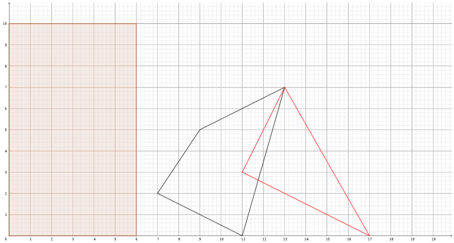

Figura: Contenção de circunferência.

Referências

PERALTA, J., ANDRETTA, M., OLIVEIRA, J. Packing Circles and Irregular Polygons using Separation Lines. **Proceedings of the 7th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2018)**, 71-77, 2018.

PERALTA, J., ANDRETTA, M., OLIVEIRA, J. F. Solving irregular strip packing problems with free rotations using separation lines. **Pesquisa Operacional**, v. 38, p. 195-214, 2018.