

Modelagem computacional de problemas de otimização

Dia 1

Francisco N. C. Sobral Giovana Melo dos Santos Joaquim Gabriel Martins
XXXIII SEMAT 2023

DMA - Universidade Estadual de Maringá

Motivação

Usando JuMP

Alguns exemplos

O grande problema

Motivação

- A **modelagem matemática** de um problema está associada à **escrever matematicamente** um problema qualquer
- Em otimização, geralmente estamos interessados em olhar para **conjunto de pontos** e escolher algum

Problema do churrasco

- Uma pessoa vai fazer um churrasco para N pessoas
- Vai comprar contra filé (R\$ 50 o kg) e costela (R\$ 20 o kg). Para cada pessoa, calcula-se 500g de carne se for contra filé ou 700g se for costela
- Deve haver um balanço entre a gordura e a proteína: no máximo 20g de gordura e no mínimo 50g de proteína por pessoa em média
- Balanço nutricional fictício por 100g

	Gordura	Proteína
Costela	5g	5g
Contra filé	10g	2g

Problema do churrasco

- Uma pessoa vai fazer um churrasco para N pessoas
- Vai comprar contra filé (R\$ 50 o kg) e costela (R\$ 20 o kg). Para cada pessoa, calcula-se 500g de carne se for contra filé ou 700g se for costela
- Deve haver um balanço entre a gordura e a proteína: no máximo 20g de gordura e no mínimo 50g de proteína por pessoa em média
- Balanço nutricional fictício por 100g

	Gordura	Proteína
Costela	5g	5g
Contra filé	10g	2g

Um problema de otimização

Um problema de otimização geral é dado por

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Um problema de otimização

Um problema de otimização linear é dado por

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i \in I_1 \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i \in E \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i \in I_2 \\ & x_j \geq 0\end{array}$$

Um problema de otimização

Um problema de otimização linear **binária** é dado por

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i \in I_1 \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i \in E \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i \in I_2 \\ & x_j \in \{0, 1\}\end{array}$$

Se um problema é modelado através de um problema de programação linear, então assumimos

- Proporcionalidade
A contribuição de uma variável é proporcional ao seu valor
- Aditividade
O valor da função objetivo total é a soma das contribuições individuais, o mesmo para as restrições
- Divisibilidade
O valor de uma variável pode ser fracionado o quanto se necessite (valores inteiros não são obrigatórios)
- Dados determinísticos
As constantes são bem definidas

Problema do churrasco

- Uma pessoa vai fazer um churrasco para N pessoas **minimizando o custo financeiro**
- Vai comprar contra filé (R\$ 50 o kg) e costela (R\$ 20 o kg). Para cada pessoa, calcula-se 500g de carne se for contra filé ou 700g se for costela
- Deve haver um balanço entre a gordura e a proteína: no máximo 20g de gordura e no mínimo 50g de proteína por pessoa em média
- Balanço nutricional fictício por 100g

	Gordura	Proteína
Costela	5g	5g
Contra filé	10g	2g

Usando JuMP

- JuMP – Julia for Mathematical Programming
- Site: <https://jump.dev>

- Considere

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & 12x + 20y \\ \text{Sujeita a} & 6x + 8y \geq 100 \\ & 7x + 12y \geq 120 \\ & x \geq 0 \\ & y \in [0, 3]\end{array}$$

Retirado de https://jump.dev/JuMP.jl/stable/tutorials/getting_started/getting_started_with_JuMP/#An-example

- Assumo que JuMP e HiGHS já estão instalados (Nosso ambiente já faz isso)

- Usando os pacotes
using JuMP, HiGHS

- Criando o modelo para ser resolvido pelo software HiGHS
`modelo = Model(HiGHS.Optimizer)`

- Criando as variáveis (com suas restrições)

```
@variable(modelo, x >= 0)
```

```
@variable(modelo, 0 <= y <= 3)
```

- Adicionando as restrições

```
@constraint(modelo, c1, 6x + 8y >= 100)
```

```
@constraint(modelo, c2, 7x + 12y >= 120)
```

- Função objetivo

```
@objective(modelo, Min, 12x + 20y)
```

- Resolvendo

```
optimize!(modelo)
```

- Mostra alguns resultados

```
@show termination_status(modelo)
```

```
@show primal_status(modelo)
```

```
@show dual_status(modelo)
```

```
@show objective_value(modelo)
```

```
@show value(x)
```

```
@show value(y)
```

```
@variable(modelo, x)
@variable(modelo, x[i = 1:10] >= 0)
@variable(modelo, x[1:5, 1:3]

u = [1, 3, 4, 5, 6]
@variable(modelo, x[i = 1:5] <= u[i])
```

Criando restrições

```
@constraint(modelo, 2 x[1] - x[3] == -10)
```

```
a = [-10, 0, 3]
```

```
@constraint(modelo, sum(x[j] for j = 1:3) == -10)
```

```
A = [0 1 1;
```

```
      1 2 0]
```

```
b = [8, 10];
```

```
@constraint(modelo, [i = 1:2],
```

```
    sum(A[i, j] * x[j] for j = 1:3) <= b[i])
```


Notação matricial

```
A = [ 1 1 9 5  
      3 5 0 8  
      2 0 6 13 ]
```

```
b = [7, 3, 5]
```

```
c = [1, 3, 5, 2]
```

```
modelo = Model(HiGHS.Optimizer)  
@variable(modelo, x[1:4] >= 0)  
@constraint(modelo, A * x .== b)  
@objective(modelo, Min, c' * x)
```

```
optimize!(modelo)
```

Alguns exemplos

O problema da dieta (animal)

- Uma empresa agrícola fabrica ração para aves
- Diversos ingredientes são misturados (milho, soja, ...) de forma a atingir a quantidade mínima de determinados nutrientes (cálcio, proteína, ...)

O problema da dieta (animal)

- Suponha que tenhamos n ingredientes
- Suponha que tenhamos m nutrientes
- Seja x_j a quantidade utilizada para o ingrediente j
- Qual o problema de otimização que vamos modelar?

O problema da dieta (animal)

- Minimizar o custo de produção

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

onde c_j é o custo para adquirir uma unidade do produto j

O problema da dieta (animal)

- Produzir uma quantidade b do produto final

$$\sum_{j=1}^n x_j = b$$

O problema da dieta (animal)

- Satisfazer limites **mínimos** e **máximos** de cada nutriente

$$b\bar{l}_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b\bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m$$

onde

- $0 \leq \bar{l}_i \leq \bar{u}_i$ são os limites para **uma unidade** do nutriente i
- a_{ij} é a quantidade de nutriente i que há **em uma unidade** do ingrediente j

O problema da dieta (animal)

- Há um limite superior para a quantidade do ingrediente j que pode ser comprada

$$x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n$$

O problema da dieta (animal)

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujeita a } \sum_{j=1}^n x_j = b$$

$$b\bar{l}_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b\bar{u}_i, i = 1, \dots, m$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, i = 1, \dots, n$$

Problema do Sudoku

- Queremos resolver um Sudoku com dimensão 4×4
- Temos um quadrado com 16 posições, 4 linhas, 4 colunas e 4 blocos 2×2
- São dados os valores conhecidos $v_{ij} \in \mathcal{C}$
- Em cada linha, coluna ou bloco deve existir um e apenas uma ocorrência do número $n \in \{1 \dots, 4\}$

- Utilizaremos variáveis binárias
- Seja x_{ijk} indicando 1 se a posição (i,j) possui o valor k , e 0 caso contrário, para $i, j, k \in \{1, \dots, 4\}$

Problema do Sudoku

- Somente um valor por linha ℓ

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{\ell,j,k} = 1$$

- Somente um valor por coluna c

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{i,c,k} = 1$$

- Somente um valor por bloco (b_i, b_j) , $b_i, b_j \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{i=2(b_i-1)}^{2b_i} \sum_{j=2(b_j-1)}^{2b_j} \sum_{k=1}^4 x_{i,j,k} = 1$$

Problema do Sudoku

- $x \in \{0, 1\}$
- Lugares já preenchidos, para cada $v_{ij} \in \mathcal{C}$

$$x_{ij} v_{ij} = 1$$

Problema do financiamento

- A prefeitura de Maringá tem um grande projeto para ser executado em 4 anos
- Os gastos previstos (em milhões) para cada ano são

1	2	3	4
<hr/>			
2	4	8	5

Problema do financiamento

- A prefeitura irá emitir títulos de dívida (ou seja, empréstimos) para realizar a obra que pagam juros **simples** com **previsão de taxas** dada por

1	2	3	4
7%	6%	6,5%	7,5%

- Os títulos começarão a cobrar juros **após** o fim da obra (quarto ano) e serão quitados após 20 anos

Problema do financiamento

- Além disso, a prefeitura pode colocar dinheiro em uma aplicação, para usar em anos posteriores, que lhe rendem juros anuais previstos como

1	2	3	4
6%	5,5%	4,5%	-

(No quarto ano, não faz sentido guardar dinheiro)

Problema do financiamento

- Seja x_j o valor obtido pela venda de títulos de dívida no ano j , $j = 1, \dots, 4$
- Seja y_j a quantia colocada na aplicação no ano j , $j = 1, 2, 3$

- Desejamos minimizar a quantidade de juros paga

$$20 \cdot 0,07x_1 + 20 \cdot 0,06x_2 + 20 \cdot 0,065x_3 + 20 \cdot 0,075x_4$$

Problema do financiamento

- Em cada ano, o valor usado no projeto ou vem dos títulos vendidos ou vem das aplicações de anos anteriores
- Uma parte do valor obtido nos títulos pode ser guardada em aplicação para uso futuro

$$x_1 - y_1 = 2$$

$$1,06y_1 + x_2 - y_2 = 4$$

$$1,055y_2 + x_3 - y_3 = 8$$

$$1,045y_3 + x_4 = 5$$

Problema do financiamento

Minimizar $20 \cdot 0,07x_1 + 20 \cdot 0,06x_2 + 20 \cdot 0,065x_3 + 20 \cdot 0,075x_4$

Sujeita a $x_1 - y_1 = 2$

$$1,06y_1 + x_2 - y_2 = 4$$

$$1,055y_2 + x_3 - y_3 = 8$$

$$1,045y_3 + x_4 = 5$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

O grande problema

O problema

- Os professores do DMA têm direito a 3 meses consecutivos de afastamento a cada 5 anos
- A cada mês, no máximo 20% dos professores pode estar afastados
- Uma vez recebido, os professores têm um prazo de 5 anos para usufruir senão perdem o afastamento
- Atualmente, cada professor p tem até o prazo t_p para usufruir de seu afastamento. Após esse prazo, ele perde o atual e ganha direito a outro
- Queremos planejar os afastamentos para o horizonte dos próximos 5 anos