Toric Varieties - Geometria Algebrica F

Corso del prof. Talpo Mattia

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Contents

Introduction

Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

Esempio 0.1. Il gruppo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ agisce su $\mathbb{C}^2$, e quindi anche sulle funzioni definite su $\mathbb{C}^2$, infatti se $f : \mathbb{C}^2 \to X$ abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

Domanda: come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x,y]_d = \left\langle x^d, x^{d-1}y, \cdots, y^d \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio $V_2 = \mathbb{C}[x,y]_2 = \left\langle x^2, xy, y^2 \right\rangle$. I suoi elementi sono $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$. Segue che $\mathbb{C}[\alpha,\beta,\gamma]$ sono le funzioni polinomiali su V_2. Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$.