Geometria Algebrica B

Corso tenuro dal prof. Manfredini Sandro

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

Introduzione

Scopo del corso

Il filo conduttore che guida il corso è la seguente domanda:

Quando una varietà complessa è algebrica?

Per **varietà complessa** si intende uno spazio che localmente si comporta come $\mathbb{C}^n$, mentre per **varietà algebrica** si intende il luogo di zeri di un sistema di equazioni polinomiali omogenee in[1] $\mathbb{P}^n$.

Grazie al teorema di Chow, che vedremo durante il corso, possiamo trasformare la domanda in

Per quali varietà complesse M esiste un embedding $M \hookrightarrow \mathbb{P}^n$?

Vedremo che mappe olomorfe $f : M \to \mathbb{P}^n$ (più precisamente $f : M \dashrightarrow \mathbb{P}^n$) corrispondono a line bundle su M, quindi la domanda si riduce a capire per quali varietà complesse esistono line bundle che inducono un embedding.

Kodaira riesce a ricondurre questa domanda all'annullamento di alcuni gruppi di coomologia, il culmine sono i teoremi di Kodaira vanishing e Kodaira embedding, il secondo risponde in modo perlopiù soddisfacente alla domanda:

Teorema 0.1 (Kodaira embedding)**.** Se M è una varietà complessa compatta allora essa si immerge in $\mathbb{P}^n$ per qualche n se e solo se esiste su M una $(1,1)$-forma differenziale razionale, chiusa e positiva.

[1]In questo corso $\mathbb{P}^n$ è sempre $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ se non diversamente specificato.

Parte I

Fasci

Capitolo 1

Fasci di insiemi

1.1 Fascio di germi di applicazioni

Vogliamo capire il comportamento locale di funzioni, cerchiamo allora di associare ad una funzione f un oggetto che incapsuli il suo comportamento locale in un punto P, il suo **germe** in P:

Definizione 1.1 (Germi)**.** Sia X spazio topologico, Y insieme e fissiamo $P \in X$. La **spiga** dei **germi** in P della applicazioni $f : X \to Y$ è

$$(\mathcal{F}_{X,Y})_P = \frac{\{(U, f) \mid U \text{ aperto di } X,\ P \in U,\ f : U \to Y\}}{\sim_P}$$

dove $(U, f) \sim_P (V, g)$ se esiste $P \in W \subseteq U \cap V$ aperto tale che $f|_W = g|_W$. Come notazione poniamo $[(U, f)]_{\sim_P} = f_P$.

Osservazione 1.2. $f_P = g_P \iff f = g$ su un intorno di P.

Raccogliamo tutte le spighe in un oggetto, il fascio!

Definizione 1.3 (Fascio dei germi di applicazioni)**.** Il fascio dei germi di applicazioni da X a Y è

$$\mathcal{F}_{X,Y} = \coprod_{P \in X} (\mathcal{F}_{X,Y})_P.$$

Osservazione 1.4. Abbiamo una mappa $\pi : \mathcal{F}_{X,Y} \to X$ data da $\pi(f_P) = P$ per ogni $f_P \in (\mathcal{F}_{X,Y})_P$.

Cerchiamo ora di dare al fascio una topologia in modo da renderlo uno spazio.

Notazione. Dati $U \subseteq X$ aperto e $f : U \to Y$ poniamo $\mathcal{A}_{U,f} = \bigcup_{P \in U} f_P$.

Osservazione 1.5. $\pi(\mathcal{A}_{U,f}) = U$ e $\pi|_{\mathcal{A}_{U,f}} : \mathcal{A}_{U,f} \to U$ è biunivoca ($f_P \leftrightarrow P$).

Possiamo rendere $\mathcal{F}_{X,Y}$ uno spazio topologico dichiarando che $\mathcal{A}_{U,f}$ è una base al variare di $U \subseteq X$ aperto e $f : U \to Y$ applicazione.

Dimostrazione (sono una base).
Dobbiamo verificare che la collezione di questi insiemi copre e che è chiusa per intersezione

- Se $z \in \mathcal{F}_{X,Y}$ allora $z = [(U, f)]_P$ e quindi $z \in \mathcal{A}_{U,f}$, quindi coprono.
- Se $\mathcal{A}_{U,f} \cap \mathcal{A}_{V,g} \neq \emptyset$ allora
$$\mathcal{A}_{U,f} \cap \mathcal{A}_{V,g} = \mathcal{A}_{W,h}$$
dove
$$W = \{P \in U \cap V \mid f_P = g_P\}, \quad h = f|_W = g|_W.$$

□

Osservazione 1.6. Con questa topologia si ha che $(\mathcal{F}_{X,Y})_P$ eredita la topologia discreta e π è un omeomorfismo locale surgettivo.

1.2 Fasci di applicazioni con più struttura

Al posto di considerare tutte le funzioni $X \to Y$ possiamo prendere funzioni con qualche proprietà in più, a *patto che* questa proprietà sopravviva quando restringiamo la funzione ad un aperto del dominio.

Esempio 1.7. Siano X, Y spazi topologici, allora possiamo costruire $\mathcal{C}^0_{X,Y}$ il fascio dei germi delle applicazioni continue da X a Y.

Se X e Y hanno altre strutture, per esempio sono varietà differenziali o complesse possiamo considerare i fasci di funzioni lisce o olomorfe rispettivamente (denotati $\mathcal{C}^\infty_{X,Y}$ e $\mathcal{O}_{X,Y}$ rispettivamente).

1.2.1 Sezioni

Possiamo definire Γ_F il fascio dei germi di sezioni di $F : Y \to X$ surgettiva con X spazio topologico.

Definizione 1.8 (Sezione)**.** Data $F : Y \to X$ surgettiva, una inversa destra di F definita su un aperto U di X si dice **sezione** di F.

Osservazione 1.9. Se F ha qualche struttura possiamo considerare sezioni con struttura compatibile (per esempio continue, lisce, olomorfe).

Definizione 1.10 (Sezione del fascio dei germi di applicazioni)**.** Sia X spazio topologico, Y insieme e U aperto di X, una sezione di $\mathcal{F}_{X,Y}$ su U è una $\sigma : U \to \mathcal{F}_{X,Y}$ continua tale che $\pi \circ \sigma = id_U$.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathcal{F}_{X,Y} \arrow[d, "\pi"] \\
U \arrow[u] \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & X
\end{tikzcd}$$

L'insieme delle sezioni di $\mathcal{F}_{X,Y}$ su U si denota $\Gamma(U, \mathcal{F}_{X,Y})$.

Osservazione 1.11. Se $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{F}_{X,Y})$ e $P \in U$ allora $\sigma(P) \in (\mathcal{F}_{X,Y})_P$, dunque $\sigma(P) = [(W_P, f^{(P)})]_{\sim_P}$. Sull'aperto $\mathcal{A}_{W_P, f^{(P)}}$ sappiamo che π è invertibile, qundi sull'aperto $\sigma^{-1}(\mathcal{A}_{W_P, f^{(P)}})$ si ha

$$\sigma = (\pi_{\mathcal{A}_{W_P, f^{(P)}}})^{-1},$$

dunque per ogni $Q \in \sigma^{-1}(\mathcal{A}_{W_P, f^{(P)}})$ abbiamo $\sigma(Q) = (f^{(P)})_Q$.

Siamo passati dall'informazione puntuale (valore di $\sigma(P)$) ad una informazione locale (valore di σ su un intorno di P).

Proposizione 1.12. Esiste una bigezione

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(U, \mathcal{F}_{X,Y}) & \longleftrightarrow & \{F : U \to Y\} \\
\sigma & \longmapsto & \text{incollamento dei } \sigma(P) = [(W_P, f^{(P)})]_{\sim_P} \\
\sigma : P \mapsto F_P & \longleftarrow\!\shortmid & F
\end{array}$$

Dimostrazione.
Costruiamo un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di U tale che per ogni $\alpha \in I$ esiste $f_\alpha : U_\alpha \to Y$ tale che per ogni $P \in U_\alpha$ si ha $\sigma(P) = (f_\alpha)_P$.

Notiamo che se $\alpha, \beta \in I$ e $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora per ogni $Q \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$(f_\alpha)_Q = \sigma(Q) = (f_\beta)_Q,$$

cioè $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

Questo ci permette di definire $F : U \to Y$ tale che $F|_{U_\alpha} = f_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$. Per costruzione $F_P = \sigma(P)$ per ogni $P \in U$. $\square$

1.3 Definizione topologica di Fascio

Definizione 1.13 (Fascio)**.** Un **fascio (di insiemi)** su X spazio topologico è una coppia $(\mathcal{F}, \pi)$ con $\mathcal{F}$ spazio topologico e $\pi : \mathcal{F} \to X$ omeomorfismo locale surgettivo.
Se $x \in X$ definiamo $\pi^{-1}(x)$ la **spiga** di $\mathcal{F}$ su x e gli elementi di questa si chiamano **germi** di $\mathcal{F}$ su x.

Osservazione 1.14. Un rivestimento è un fascio.

Esempio 1.15. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ e $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ sono fasci. Le spighe si identificano con $\mathbb{Z}$.

Esempio 1.16. Se $\pi : Y \to X$ rivestimento di grado $d \geq 2$ e $V \subseteq Y$ chiuso su cui π è iniettiva allora

$$\pi|_{Y \setminus V} : Y \setminus V \to X$$

è un fascio su X.

Definizione 1.17 (Fascio costante)**.** Se M ha la topologia discreta, $\pi_1 : X \times M \to X$ è un fascio su X detto **fascio costante**. Spesso si indica con M.

Esempio 1.18. Se $x \in X$ la spiga del fascio costante M si identifica con M.

Definizione 1.19 (Fascio grattacielo)**.** Fissato $x \in M$ punto chiuso, $\mathcal{F} = \frac{X \times M}{\sim}$ con $(x_1, m_1) \sim (x_2, m_2)$ se e solo se $x_1 = x_2 \neq x_0$. La proiezione $\mathcal{F} \to X$ rende $\mathcal{F}$ un fascio che si chiama **fascio grattacielo a spiga** M **e supporto** x_0.

Esempio 1.20. La spiga in x di un fascio grattacielo con spiga M e supporto x_0 è $\{x\}$ se $x \neq x_0$ e M se $x = x_0$.

Parte II

Varietà complesse

Parte III

Fibrati vettoriali complessi

Parte IV

Forme differenziali e teoria di Hodge