Gruppi algebrici lineari

Corso del prof. Maffei Andrea

Antonio Di Nunzio e Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

Introduzione

Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

Esempio 0.1. Il gruppo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ agisce su $\mathbb{C}^2$, e quindi anche sulle funzioni definite su $\mathbb{C}^2$, infatti se $f : \mathbb{C}^2 \to X$ abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

Domanda: come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x, y]_d = \left\langle x^d, x^{d-1}y, \cdots, y^d \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio $V_2 = \mathbb{C}[x, y]_2 = \left\langle x^2, xy, y^2 \right\rangle$. I suoi elementi sono $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$. Segue che $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$ sono le funzioni polinomiali su V_2. Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$.

Parte I

Prerequisiti

Capitolo 1

Teoria delle rappresentazioni

1.1 Definizioni

Definizione 1.1 (Rappresentazione)**.** Sia G un gruppo e $\mathbb{K}$ un campo. Una **rappresentazione** di G su $\mathbb{K}$ (o G**-modulo**) è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V munito di una azione $\mathbb{K}$-lineare di G, cioè esiste una mappa

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g, v) & \longmapsto & g \cdot v \end{array}$$

con le proprietà[a]

- $e \cdot v = v$
- $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$
- $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda g \cdot u + \mu g \cdot v$

[a]in futuro potrò abbreviare omettendo il $\cdot$.

Osservazione 1.2. Dare una rappresentazione è equivalente a dare un morfismo di gruppi $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ dove $\rho(g)v = g \cdot v$.

Definizione 1.3 (Sottorappresentazione)**.** Dato $U \subseteq V$ con V rappresentazione di G, U è una **sottorappresentazione** se U è sottospazio vettoriale G-invariante.

Osservazione 1.4. Data $U \subseteq V$ sottorappresentazione, possiamo definire una struttura naturale di rappresentazione su $W = V/U$ ponendo

$$g[v] = [gv].$$

Definizione 1.5 (Morfismo di G-rappresentazioni)**.** Se V_1, V_2 sono rappresentazioni di G e abbiamo $\varphi : V_1 \to V_2$ lineare, diciamo che φ è un **morfismo di G-rappresentazioni o di G-moduli** se

$$\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1).$$

Esempio 1.6. Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $U \subseteq V$ è morfismo di G-moduli

Esempio 1.7. Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $V \to V/U$ è morfismo di G-moduli

Osservazione 1.8. La mappa $\pi : V \to V/U$ è tale che per ogni $\varphi : V \to V'$ di G-moduli, se $\varphi(U) = 0$ allora esiste $\chi : V/U \to V'$ di G-moduli t.c. $\varphi = \chi \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & V \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & V/U \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\chi"] & 0 \\
& & V' & &
\end{tikzcd}$$

Definizione 1.9 (Invarianti e coinvarianti)**.** Sia V un G-modulo. Definiamo lo **spazio degli invarianti** come

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \forall g \in G\}.$$

Si ha che V^G è una sottorappresentazione du cui G agisce banalmente.
Analogamente definiamo lo **spazio dei coinvarianti** come

$$V_G = V / \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Notiamo che $\langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$ è effettivamente una sottorappresentazione ($h(v-gv) = hv - (hgh^{-1})(hv)$), quindi questo quoziente è ben definito. Notiamo che G agisce banalmente anche V_G.

Notazione. Se V e W sono G-moduli, poniamo

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ di } G\text{-moduli}\}.$$

Notiamo che è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

1.2 Costruzioni principali

Se V_i sono rappresentazioni di G, $\bigoplus_i V_i$ e $\prod_i V_i$ sono rappresentazioni di G. Inoltre $\bigoplus_i V_i$ è sottorappresentazione di $\prod_i V_i$.

Osservazione 1.10 (Proprietà universale)**.** Consideriamo le inclusioni di G-moduli

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus V_i \\ v_i & \longmapsto & (w_j) \end{array}, \quad \text{dove } w_j = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $\varphi_i : V_i \to W$ è di G-moduli allora esiste un'unica $\psi : \bigoplus V_i \to W$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \bigoplus V_i \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Vale una proprietà duale per il prodotto.

Definizione 1.11 (Rappresentazione duale)**.** Se V è G-modulo, definiamo una azione di G su V^* definendo $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$. Come notazione useremo

$$\langle g\varphi, v\rangle = \left\langle \varphi, g^{-1}v \right\rangle .$$

La rappresentazione così definita è detta **duale** alla rappresentazione V.

Osservazione 1.12. $\langle g\varphi, gv\rangle = \langle \varphi, v\rangle$.

Definizione 1.13 (Prodotto tensore)**.** Se V e W rappresentazioni di G, definiamo una azione sul prodotto tensore ponendo

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

Definizione 1.14 (Omomorfismi)**.** Se V e W rappresentazioni di G, definiamo una azione su $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ponendo

$$(gL)(v) = g(L(g^{-1}v)).$$

Osservazione 1.15. $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \{L \mid gL = L\}$, ma

$$gL = L \iff g(L(g^{-1}v)) = gL(v) = L(v) \iff L(g^{-1}v) = g^{-1}L(v)$$

e poiché questo vale per ogni $g \in G$ ricaviamo che

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \mathrm{Hom}_G(V, W).$$

Ricordiamo che esiste

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \varphi \otimes w & \longmapsto & \{v \mapsto \varphi(v)w\} \end{array}$$

Osservazione 1.16. Φ è iniettiva e $\mathrm{Imm}\,\Phi = \{L : V \to W \mid \mathrm{rnk}\, L < \infty\}$

Dimostrazione.
ESERCIZIO □

Domanda: Φ è di G-moduli?

Dimostrazione.
Per linearità basta considerare elementi della forma $\varphi \otimes w$.

$$\Phi(g(\varphi \otimes w))(v) = \Phi(g\varphi \otimes gw)(v) = g\varphi(v)gw = \varphi(g^{-1}v)gw = g(\Phi(\varphi \otimes w))(v).$$

□

Definizione 1.17 (Tensori simmetrici e antisimmetrici)**.** Definiamo

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-volte}}$$

$$S^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes x_b \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_b \otimes x_a \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

$$\bigwedge^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes v \otimes v \otimes x_{a+3} \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

Per il prodotto simmetrico vale una proprietà universale analoga a quella del prodotto tensore, dove al posto di mappe multilineari qualsiasi consideriamo multilineari simmetriche (se $V^n \to W$ multilineare simmetrica, abbiamo $F : V^{\otimes n} \to W$ che passa al quoziente diventando $H : S^n V \to W$, l'unicità segue dall'unicità di F e suriettività di $V^{\otimes n} \to S^n V$).
Un ragionamento completamente analogo vale per $\bigwedge^n V$.

Osservazione 1.18. Se V è un G-modulo, per quanto detto sul prodotto tensore, $V^{\otimes n}$ è una rappresentazione e quindi anche $S^n V$ e $\bigwedge^n V$ lo sono in quanto suoi quozienti.

Definizione 1.19 (Algebra tensoriale)**.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e poniamo $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Definiamo l'**algebra tensoriale** come

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

dove il prodotto è indotto da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

In modo analogo costruiamo l'**algebra simmetrica** SV e l'**algebra antisimmetrica** $\bigwedge V$.

Osservazione 1.20. $SV \cong \mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$ dove $\{x_i\}_{i \in I}$ è una base di V.

Definizione 1.21 (Algebra associativa universale)**.** Sia V uno spazio vettoriale, l'**algebra associativa universale** su V consiste in una $\mathbb{K}$-algebra[a] A e un morfismo $\alpha : V \to A$ tale che

1. α è $\mathbb{K}$-lineare
2. per ogni B algebra associativa e per ogni $\beta : V \to B$ $\mathbb{K}$-lineare esiste un unico morfismo ψ di $\mathbb{K}$-algebre tale che

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

[a] $\mathbb{K} \subseteq A$, A anello con unità e $\mathbb{K} \subseteq Z(A)$

Osservazione 1.22. Se una algebra associativa universale esiste allora è unica a meno di isomorfismo perché abbiamo dato una proprietà universale.

Osservazione 1.23. Un'algebra associativa universale esiste per ogni V ed è datta dall'algebra tensoriale e l'inclusione $V \overset{id}{\to} V^{\otimes 1} \subseteq TV$.

Dimostrazione.
Sia B un'algebra associativa e sia $\beta : V \to B$ lineare. Definiamo

$$F : \begin{array}{ccc} TV & \longrightarrow & B \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \beta(v_1) \cdots \beta(v_n) \end{array}$$

La buona definizione segue dal fatto che il prodotto in un'algebra è multilineare. □

Osservazione 1.24. Dato V spazio vettoriale possiamo definire analogamente a prima l'algebra associativa universale simmetrica e l'algebra associativa universale antisimmetrica e un loro modello è dato da SV e $\bigwedge V$ rispettivamente.

1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici

Definizione 1.25 (Rappresentazione semplice)**.** Una rappresentazione S di G si dice **semplice** se $S \neq 0$ e se non ha sottorappresentazioni non banali.

Lemma 1.26 (Lemma di Schur)**.** Sia S una rappresentazione semplice di G.

1. Ogni morfismo di G-moduli non nullo $\varphi \colon S \to S$ è invertibile.
2. L'insieme $\mathrm{End}_G(S)$ è un corpo e si ha $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathrm{End}_G(S))$.

Dimostrazione.
Per il primo punto, osserviamo che $\ker \varphi$ è un sottomodulo di S che non può essere uguale a S, quindi è 0. Analogamente $\mathrm{Imm}\, \varphi = S$. Per il secondo punto, sia $F =$

$\mathrm{End}_G(S)$. La moltiplicazione per un elemento λ di $\mathbb{K}$ è in F e commuta con tutto F. Infine, se φ è un elemento non nullo di F, per il primo punto φ è invertibile e l'inverso è un omomorfismo di G-moduli. $\square$

Esempio 1.27. Assumiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $\dim_{\mathbb{K}}(S) < +\infty$. Allora abbiamo un contenimento $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathrm{End}_G(S)) \subseteq \mathrm{End}_G(S)$. Poiché la dimensione di $\mathrm{End}_G(S)$ su $\mathbb{K}$ è finita e $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, si ottiene $\mathbb{K} = \mathrm{End}_G(S)$.

Esercizio 1.28. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supponiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(S)$ sia al più numerabile. Mostrare che $\mathrm{End}_G(S) = \mathbb{C}$.

Esempio 1.29. Sia $G = C_2 = \{1, \sigma\}$ e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$. Allora la rappresentazione $V = \mathbb{K}^2$ di G data da

$$[\sigma]_{e_1,e_2}^{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è somma di rappresentazioni semplici.

Definizione 1.30. Sia V una rappresentazione di G.

1. V si dice **semisemplice** se è somma diretta di rappresentazioni semplici.
2. V si dice **completamente riducibile** se per ogni sottorappresentazione W di V esiste una sottorappresentazione U di V tale che $V = U \oplus W$.

Esempio 1.31. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la rappresentazione $V = \mathbb{C}^2$ del gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

non è completamente riducibile: consideriamo la sottorappresentazione di V data da $W = \mathbb{C}e_1$; se esistesse $U = \mathbb{C}v_2$ tale che $V = U \oplus W$, allora nella base e_1, v_2 tutte gli elementi g in G sarebbero diagonali

$$[g]_{e_1,v_2}^{e_1,v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonale se $x \neq 0$.

Proposizione 1.32. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. V è somma diretta di rappresentazioni semplici;
2. V è somma di rappresentazioni semplici.

Inoltre, le precedenti condizioni implicano la seguente.

3. V è completamente riducibile.

Dimostrazione.
Chiaramente la prima condizione implica la seconda. Proviamo il viceversa. Sia $V = \sum_{i \in I} S_i$ con S_i semplici. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I \colon \sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j \right\}.$$

La famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota in quanto contiene il singoletto $\{i\}$ per ogni i in I. Inoltre $\mathcal{F}$ è ordinata parzialmente per inclusione: mostriamo che ogni catena $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di $\mathcal{F}$ ammette il maggiorante $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ in $\mathcal{F}$. Basta mostrare che, per ogni $H \subseteq J$ finito, la somma $\sum_{h \in H} S_h$ è diretta. Poiché H è finito, si ha $H \subseteq J_\alpha$ per qualche α in A, dunque la somma $\sum_{j \in J_\alpha} S_j$ è diretta. A questo punto, per il Lemma di Zorn esiste un elemento M in $\mathcal{F}$ massimale. Mostriamo che $V = \bigoplus_{j \in M} S_j$. Per assurdo assumiamo $W \doteqdot \bigoplus_{j \in M} S_j \subsetneq V$ e sia S_0 tale che $S_0 \not\subseteq W$. Allora $S_0 \cap W \subseteq S_0$ e $S_0 \oplus W \subset V$, allora $\widetilde{M} = M \cup \{0\}$ è in $\mathcal{F}$, contro la massimalità di M in $\mathcal{F}$.

L'implicazione 1. $\Rightarrow$ 3. è lasciata per esercizio. $\square$

Capitolo 2

Geometria Algebrica

In questa sezione, assumeremo sempre $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso.

2.1 Varietà affini immerse

Definizione 2.1. Un sottoinsieme X di $\mathbb{K}^n$ si dice una **varità algebrica affine** (**immersa**) se esistono $f_1, \ldots, f_h$ in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che

$$X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f_1(v) = \ldots = f_h(v) = 0\}.$$

Data una varità algebrica affine immersa X, denotiamo

$$I(X) \doteqdot \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } v \in X\}.$$

L'insieme $I(X)$ risulta un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Viceversa, se J è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, denotiamo

$$V(J) \doteqdot \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } f \in J\}.$$

Richiamiamo inoltre il classico Teorema degli Zeri di Hilbert.

Notazione. Nel seguito, denoteremo con P l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Teorema 2.2 (Nullstellensatz)**.** Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso e I, J sono ideali di P allora

$$V(I) = V(J) \Longleftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

In particolare abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{varietà algebriche affini immerse in } \mathbb{K}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Esempio 2.3. Vediamo qualche controesempio classico.

- Se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz non vale: ad esempio per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il polinomio X^2+1 in $\mathbb{R}[X]$ genera un ideale proprio (massimale) J tale che $V(J) = \emptyset$.
- La corrispondenza precedente non vale per gli ideali in generale: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, l'ideale $J = (x^2)$ è tale che $V(J) = \{0\}$, ma $I(V(J)) = (x) \neq J$.

Vediamo ora alcune conseguenze del Nullstellensatz.

1. Gli ideali massimali di P sono tutti e solo quelli della forma $m_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in $\mathbb{K}^n$.

   Dimostrazione.
   Che i precedenti siano tutti ideali massimali è evidente, mostriamo che sono i soli. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di P. Allora $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ (in quanto altrimenti avremmo $P = I(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$), dunque esiste un α in $\mathbb{K}^n$ appartenente a $V(\mathfrak{m})$. Ma allora $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$ e per massimalità di $\mathfrak{m}_\alpha$ si ottiene l'uguaglianza. □

2. Sia $I \subseteq P$ e sia α in $V(I)$. Allora $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$ e in generale

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I\}.$$

Ricordiamo inoltre (mostrarlo per esercizio) che se I è un ideale di P, allora si ha

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(P) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

Definizione 2.4. Sia X una varietà algebrica affine immersa in $\mathbb{K}^n$. Si definisce l'**anello delle coordinate** di X come il quoziente

$$\mathbb{K}[X] = P/I(X) = \left\{ f|_X : f \in P \right\}.$$

Ricordiamo che su $\mathbb{K}^n$ è definita una topologia, detta **topologia di Zariski**, in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi $V(I)$ al variare degli ideali I in P. Ricordiamo infatti che, se I, J sono ideali di P, allora

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$;
- $\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V\left(\sum_{i \in I} I_i\right)$.

Esempio 2.5. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, i chiusi sono gli insiemi con un numero finito di punti, oppure tutto $\mathbb{C}$.

Definizione 2.6. Sia f un elemento di P. Si definisce l'**aperto principale** relativo a f come

$$(\mathbb{K}^n)_f \doteqdot \mathbb{K}^n \setminus V(f) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Se $U = \mathbb{K}^n \setminus V(I)$ è un aperto e α è in U, allora esiste f in P tale che $\alpha \in (\mathbb{K}^n)_f \subseteq U$. Infatti $I = (f_1, \dots, f_h)$, $V(I) \subseteq V(f_i)$ e $(\mathbb{K}^n)_{f_i} = \mathbb{K}^n \setminus V(f_i) \subseteq U$.

Dotiamo ogni varietà algebrica affine immersa in $\mathbb{K}^n$ della topologia di sottospazio. Inoltre, definiamo

$$X_f \doteqdot (\mathbb{K}^n)_f \cap X = \{\alpha \in X \colon f(\alpha) \neq 0\}.$$

Osservazione 2.7. L'insieme

$$\left\{ \frac{g}{f^n} : g \in P \right\}$$

è ben definito su $(\mathbb{K}^n)_f$.

Definizione 2.8 (Funzioni regolari)**.** Sia U un aperto di $\mathbb{K}^n$. Si definisce l'insieme delle **funzioni regolari** su U come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \colon U \to \mathbb{K} \mid \forall \alpha \in U \ \exists g, h \in P \colon g(\alpha) \neq 0 \text{ e } f = h/g^n \text{ su } U \cap X_g\}.$$

Lemma 2.9. Sia X varietà affine immersa, allora

1. $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}[X]$
2. Se $g \in \mathbb{K}[X]$ allora $\mathcal{O}(X_g) = \mathbb{K}[X]_g$

Dimostrazione.
Intanto l'affermazione 2. implica l'affermazione 1. scegliendo $g \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Osserviamo che se abbiamo una funzione della forma f/g^n allora essa appartiene a $\mathcal{O}(X_g)$, quindi basta mostrare che se $\varphi \in \mathcal{O}(X_g)$ allora $\varphi \in \mathbb{K}[X]_g$. Per definizione, per ogni $\alpha \in X_g$ esistono h e k tali che $\varphi = k/h$ in $X_g \cap X_h = X_{gh}$.

Abbiamo dunque un ricoprimento $X_g = \bigcup X_{gh_i}$ dove $\varphi = k_i/h_i$ su X_{gh_i}. Sia $I = (h_i)$ l'ideale in $\mathbb{K}[X]_g$ generato dagli h_i. Se per assurdo $I \neq \mathbb{K}[X_g]$ allora esiste un massimale $\mathfrak{m}$ che contine I. Un massimale corrisponde ad un punto $\alpha \in X_g \subseteq X$ ma, poiché X_g è ricoperto dagli X_{gh_i}, esiste un indice i_0 tale che $\alpha \in X_{gh_{i_0}}$ e questo è assurdo perché vorrebbe dire

$$h_{i_0} \notin \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I \ni h_{i_0}.$$

Questo mostra che $I = \mathbb{K}[X_g]$. Possiamo dunque scrivere[1] $1 = \sum \alpha_i h_i$ per opportuni α_i. Segue che $\varphi = \sum \alpha_i h_i \varphi = \sum \alpha_i k_i$ in $\mathbb{K}[X]_g$, infatti dove $h_i \neq 0$ abbiamo $\varphi = k_i/h_i$ e quindi $h_i\varphi = k_i$, se invece $h_i(x) = 0$ si ha che $h_i(x)\varphi(x) = 0 = k_i(0)$, perché se così non fosse, poiché $x \in X_{h_j}$ per qualche $j \neq i$, si ha che

$$k_j/h_j = k_i/h_i \iff h_i k_j = k_i h_j$$

su $X_{h_i h_j}$ e quindi valutando in x abbiamo $k_i(x)h_j(x) = 0$ con $h_j(x) \neq 0$. □

[1] nota che la somma è finita per definizione di ideale generato.

2.2 Varietà algebriche e morfismi

Definizione 2.10 (Varietà algebrica)**.** Spazio topologico compatto X tale che per ogni aperto U abbiamo un insieme di funzioni $\mathcal{O}_X(U) \subseteq C^0(X \to \mathbb{K})$ tale che

1. Se $U \subseteq V$ e $f \in \mathcal{O}_X(V)$ allora $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$.
2. Se $V = \bigcup U_\alpha$ e $f : V \to \mathbb{K}$ è tale che $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ per ogni α allora $f \in \mathcal{O}_X(V)$.
3. $(X, \mathcal{O}_X)$ è localmente isomorfo ad una varietà affine immersa, cioè per ogni $x \in X$ esiste un intorno U e un omeomorfismo $\varphi : U \to Y$ con Y affine tale che per ogni V aperto di U si ha $\varphi(V) = W$ aperto e $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_X(V)$ è un isomorfismo.

Esempio 2.11. Sia $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2} \supseteq V_{\det} = \mathrm{GL}(n) = X$. Se U è un aperto di X pongo $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_V(U)$. Dimostriamo che X è localmente isomorfo ad una varietà affine (in realtà possiamo morstrare che è isomorfo ad una varietà affine globalmente):

Sia $Y \subseteq \mathbb{K}^{n^2+1} = V_{x_{ij}} \times \mathbb{K}_t$ definito dall'equazione $d(x_{ij})t = 1$. La mappa

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ (x_{ij}) & \longmapsto & (x_{ij}, \frac{1}{\det(x_{ij})}) \end{array}$$

risulta essere un isomorfismo.

Proposizione 2.12. Se X è una varietà affine immersa in $\mathbb{K}^N$, X_f è una varietà isomorfa ad una varietà affine immersa Y data da $V((\{f(x), f(x)t - 1\}_{f \in I(X)})) \subseteq \mathbb{K}^N_x \times \mathbb{K}_t$.

Dimostrazione.
ESERCIZIO. □

Esempio 2.13. Sia $X = \mathbb{P}^1$. Come spazio topologico, i chiusi sono $\mathbb{P}^1, \emptyset$ e sottoinsiemi finiti di punti. Per ogni U aperto di $\mathbb{P}^1$ poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{K} \mid f \circ \varphi_1 \in \mathcal{O}(\varphi_1^{-1}(U)), f \circ \varphi_2 \in \mathcal{O}(\varphi_2^{-1}(U)) \right\}$$

dove

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [t : 1] \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1 : t] \end{array}.$$

Definizione 2.14 (Funzione regolare)**.** Se $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ sono varietà, la mappa $\varphi : X \to Y$ è **regolare** se

1. φ è continua
2. Per ogni W aperto di Y, se $f \in \mathcal{O}_Y(W)$ allora $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(W))$

Definizione 2.15 (Varietà affine)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ è una **varietà affine** se è isomorfa ad una varietà affine immersa.

Se X è una varietà affine immersa, un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ induce un omomorfismo di anelli

$$\varphi^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

in particolare possiamo definire $f_i = \varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi$ in $\mathbb{K}[X]$ tali che $\varphi(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ per definizione.

Viceversa, dati $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{K}[X]$ si ha che $\varphi(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ è una mappa regolare.

Cont. Ovvio.

Pullback Sia $U = D(g) \subseteq \mathbb{K}^n$. Notiamo che

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid h(x) \doteqdot g(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \neq 0\} = X_h$$

Se $\alpha : U \to \mathbb{K}$ è regolare, $\alpha = \ell/g^n$ con $\ell \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, quindi

$$\alpha \circ \varphi = frac\ell(f_1, \cdots, f_n)h^n$$

che è un elemento di $\mathcal{O}(X_h)$ come voluto.

Proposizione 2.16 (Morfismi verso affine)**.** Se Y è una varietà affine allora un morfismo $\varphi : X \to Y$ è univocamente determinato dall'omomorfismo $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$.

Dimostrazione.
Sia $\psi : X \to \mathbb{K}^n$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & Y \arrow[d, "\subseteq"] \\ & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Notiamo che φ è morfismo se e solo se ψ lo è. Se $\psi(X) \subseteq Y$ e $f \in I(Y)$ allora $\psi^*(f) = f \circ \varphi = 0$, quindi abbiamo un diagramma di algebre.

Viceversa se un morfismo di algebre sollevo e bla bla bla trovo morfismo di varietà. □

Definizione 2.17 (Prodotto)**.** Siano X, Y varietà affini immerse in $\mathbb{K}^\ell_x$ e $\mathbb{K}^m_y$ rispettivamente, allora $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{\ell+m}_{(x,y)}$ è una varietà, data da

$$X \times Y = V((\{f(x), g(y)\}_{f \in I(X), g \in I(Y)})) \subseteq \mathbb{K}^\ell \times \mathbb{K}^m.$$

Proposizione 2.18. $\mathbb{K}[X \times Y] \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$

Dimostrazione.
L'anello delle coordinate del prodotto di due varietà affini è dato da

$$\mathbb{K}[X \times Y] = \frac{\mathbb{K}x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, x_\ell}{f(x), g(y)} \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

Infatti abbiamo un morfismo bilineare da $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X \times Y]$ dato dal prodotto dei polinomi. Il morfismo indotto Φè surgettivo perché $x_i = \Phi(x_i \times 1)$ e $y_i = \Phi(1 \otimes y_i)$, quindi abbiamo i generatori. Per l'iniettività procediamo per casi

- Supponiamo $X = \mathbb{K}^\ell$ e $Y = \mathbb{K}^m$, allora abbiamo una inversa di Φ data da

$$x_i \mapsto x_i \otimes 1, \qquad y_i \mapsto 1 \otimes y_i$$

- Scrivendo $\mathbb{K}[X \times Y]$ come $\frac{\mathbb{K}[x_1, \cdots, y_\ell]}{(f(x), g(y))}$ abbiamo un morfismo dal numeratore verso $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$ ben definito e notiamo che il nucleo è esattamente $(f(x), g(y))$. (dimostrare che protto tensore di $\mathbb{K}$-alegbre ridotte finitamente generate è ridotta.)

$\square$

Definizione 2.19 (Prodotto fibrato)**.** Se X, Y, Z varietà affini e morfismi $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$, definiamo $W = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Osservazione 2.20. Notiamo che W è un chiuso, infatti è luogo di zeri di $f(x) - g(y)$ in $X \times Y$. Osserviamo però che queste equazioni non sono ridotte a priori.

2.3 Connessione e Irriducibilità

Sia X uno spazio topologico connesso. Allora

1. Se $Y \subset X$ è connesso, allora $\overline{Y}$ è connesso.
2. Se $\varphi \colon X \to Y$ è continua, allora $\varphi(X)$ è connesso.

Esercizio 2.21. Se X è una varietà algebrica affine, allora

$$X \text{ sconnesso} \iff \mathbb{K}[X] = A \times B.$$

Esercizio 2.22. Siano X, Y due varietà affini connesse. Allora $X \times Y$ è connessa. [Attenzione: la topologia di $X \times Y$ non è la topologia prodotto!]

Esercizio 2.23. Se X è una varietà, allora X ha un numero finito di componenti connesse. In particolare le componenti connesse sono chiuse e aperte.

Definizione 2.24. Uno spazio topologico X si dice **riducibile** se esistono due sottospazi chiusi propri Z e W di X tali che $X = Z \cup W$. Lo spazio X si dice **irriducibile** se non è riducibile.

Osservazione 2.25. Se X è uno spazio di Hausdorff irriducibile, allora X è un punto.

Dimostrazione.
Se x, y sono punti distinti di X, allora esistono due intorni disgiunti U_x e U_y di x e y rispettivamente. Posti $Z = X \setminus U_y$ e $W = X \setminus U_x$, si ottiene $X = Z \cup W$. $\square$

Osservazione 2.26. Sia X una varietà affine. Allora X è irriducibile se e solo se l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ è un dominio d'integrità.

Dimostrazione.
Siano f, g in $\mathbb{K}[X]$ tali che $fg = 0$. Consideriamo $Z = V(f)$ e $W = V(g)$. Allora Z e W sono due chiusi tali che $X = Z \cup W$, dunque $X = Z$ oppure $X = W$, cioè $f = 0$ oppure $g = 0$. $\square$

Esempio 2.27. La varietà $X = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : xy = 0\}$ non è irriducibile.

Osservazione 2.28. Se Y è un sottospazio irriducibile di una varietà affine X, allora $\overline{Y}$ è irriducibile. Se inoltre $\varphi \colon Y \to X$ è una mappa continua, allora $\varphi(Y)$ è irriducibile. Infine, se X e Y sono spazi topologici irriducibili, allora $X \times Y$ è uno spazio topologico irriducibile.

Sia X una varietà affine. Ricordiamo che esiste una bigezione tra gli ideali radicali di $\mathbb{K}[X]$ e le sottovarietà chiuse di X, data da $I \mapsto V(I)$ e viceversa $Y \mapsto I(Y)$.

Osservazione 2.29. Sia I un ideale di $\mathbb{K}[X]$. Allora

$$V(I) \text{ è irriducibile} \quad \Longleftrightarrow \quad I \text{ è un ideale primo.}$$

Ricordiamo che, se I è un ideale radicale allora $V(I)$, come spazio topologico, è omeomorfo alla varietà affine avente come anello di coordinate $\mathbb{K}[X]/I$. L'insieme $V(I)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti I. D'altra parte, gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]/I$ sono gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti I. Se $\pi \colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]/I$ è la proiezione canonica, si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X] \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X]/I\} \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & \mathfrak{m}/I \\ \pi^{-1}(M) & \longleftarrow\!\shortmid & M \end{array}$$

Definizione 2.30. Uno spazio topologico X si dice **Noetheriano** se ogni successione

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

di sottospazi chiusi di X stabilizza.

Osservazione 2.31. Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.

Dimostrazione.
Se $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ è una successione di sottospazi chiusi di X, allora si ha una successione

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq \dots$$

di ideali di $\mathbb{K}[X]$ che stabilizza perché $\mathbb{K}[X]$ è Noetheriano. Quindi anche la successione $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ stabilizza. $\square$

Osservazione 2.32. Ogni varietà è uno spazio topologico Noetheriano.

Dimostrazione.
Scrivendo $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ con X_i aperti affini e data una successione di chiusi $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq \ldots$, si ha una successione $Z_1 \cap X_i \supseteq Z_2 \cap X_i \supseteq \ldots \supseteq Z_n \cap X_i \supseteq \ldots$ che stabilizza per ogni i. Allora esiste un N tale che $Z_n \cap X_i = Z_N \cap X_i$ per ogni $n \geq N$ e per ogni i, da cui $Z_n = Z_N$ per ogni $n \geq N$. $\square$

Proposizione 2.33. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora esistono dei sottospazi $Y_1, \ldots, Y_n$ chiusi e irriducibili di X tali che $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$. Inoltre, se $Y_i \not\subseteq Y_j$ per ogni $i \neq j$, una tale decomposizione di X è unica, e i sottospazi Y_i si dicono le **componenti irriducibili** di X.

Dimostrazione.
Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ dei chiusi di X che non possono essere scritti come unione di un numero finito di chiusi irriducibili. Mostriamo che $\mathcal{F}$ è vuota.

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$ sia non vuota. Poiché ogni catena in $\mathcal{F}$ ammette un minimo, per il Lemma di Zorn esiste un elemento minimale Z in $\mathcal{F}$. Per costruzione, Z è riducibile, quindi possiamo scrivere $Z = C \cup D$ con C, D sottospazi chiusi e propri di Z. Poiché Z è un elemento minimale, C, D non sono in $\mathcal{F}$, quindi ammettono una decomposizione finita in chiusi irriducibili, ma allora anche Z ammette una tale decomposizione.

Supponiamo ora che X ammetta due decomposizioni in chiusi irriducibili

$$X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$$

tali che $Y_i \not\subseteq Y_j$ e $Z_i \not\subseteq Z_j$ per ogni $i \neq j$. Poiché

$$Y_i = Y_i \cap (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n) = Y_i \cap Z_1 \cup \ldots \cup Y_i \cap Z_n$$

e poiché Y_i è irriducibile, si ha $Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)}$. Analogamente, $Z_j \subseteq Y_{\beta(i)}$. Allora $\beta \circ \alpha = id$, infatti

$$Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)} \subseteq Y_{\beta(\alpha(i))} = Y_i.$$

Analogamente $\alpha \circ \beta = id$ e ciò conclude. $\square$

Osservazione 2.34 (Componenti irriducibili corrispondono a primi minimali)**.** Siano I, J_α ideali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che i J_α siano primi contenti I. Siano $X = V(I)$ e $Y_\alpha = V(J_\alpha)$. Allora

$$X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n,$$

dove $J_1, \ldots, J_n$ sono i primi minimali contenenti I. Sappiamo dal corso di Algebra 2 che i primi minimali sono in numero finito.

Esempio 2.35. $I = (zx, zy)$. $p_1 = (z)$ è il piano, $p_2 = (x, y)$ è la retta, $X = V(p_1) \cup V(p_2)$.

2.4 Dimensione di una varietà algebrica

Definizione 2.36. Sia X uno spazio topologico. Definiamo la **dimensione (di Krull)** di X come

$$\sup\{n \in \mathbb{N}\colon \text{ esiste una catena di chiusi irriducibili } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n\}.$$

Denotiamo questo numero $\dim X$.

Osservazione 2.37. Se X è una varietà affine, per quanto già visto si ha

$$\dim(X) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ esistono primi } P_0, \cdots, P_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \ldots \supsetneq P_n\}.$$

Teorema 2.38. Ogni varietà affine ha dimensione finita.

Poiché l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ di una varietà affine irriducibile X è un dominio d'integrità, possiamo considerare il suo campo dei quozienti, che indichiamo con K_X.

Definizione 2.39 (Altezza)**.** Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $\mathbb{K}[X]$, la sua **altezza** è definita come

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \doteqdot \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ esistono primi } \mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

Teorema 2.40. Sia X una varietà affine irriducibile. Allora

1. $\dim(X) = \operatorname{tr}\deg_{\mathbb{K}}(K_X)$.
2. Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $K[X]$ e $Y = V(\mathfrak{p})$, allora
$$\dim(X) = \dim(Y) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$
3. Se f è un elemento non nullo e non invertibile di $\mathbb{K}[X]$, allora $V(f)$ è un chiuso di X. Se la sua decomposizione in componenti irriducibili è data da $V(f) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_h$, allora
$$\dim(Y_i) = \dim(X) - 1.$$

2.5 Varietà liscie

Notazione. Sia X una varietà (affine) e sia x un punto di X. In questa sezione poniamo $A = \mathbb{K}[X]$ e $\mathfrak{m}_x = \{f \in A\colon f(x) = 0\}$.

Definizione 2.41. Lo **spazio cotangente** di X nel punto x è il quoziente

$$T_x^* X := \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2.$$

Dato un elemento f in A, definiamo il **differenziale** di f come la classe

$$df := [f - f(x)] \in T_x^* X.$$

Lo **spazio tangente** di X nel punto x è il duale

$$T_x X = (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$$

dello spazio cotangente di X in x.

Definizione 2.42. Una **derivazione** su A è una funzione $\partial \colon A \to \mathbb{K}$ che soddisfa la seguente proprietà

$$\partial(fg) = f(x)\partial g + g(x)\partial f.$$

Indichiamo con $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ l'insieme delle derivazioni su A.

Esercizio 2.43. La mappa $T_x X \to \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ definita da $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, dove

$$\widetilde{\varphi}(a + \mu) = \varphi(\mu)$$

definisce una bigezione (stiamo usando la decomposizione $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}_x$).

Esempio 2.44. Se $X = \mathbb{K}$ e p è un punto di $\mathbb{K}$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x - p)$ e $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{K}(x - p) = \mathbb{K} d_p x$.

Esempio 2.45. Se $X = \mathbb{K}^n$ e $p = (p_1, \ldots, p_n)$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ e si ha

$$\mathrm{Der}_p(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], \mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

Esempio 2.46. Se $X = V(I)$ è contenuta in $\mathbb{K}^n$ e p è un punto di X, allora $I \subseteq \mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$. Posto $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$, si ha

$$\frac{\overline{\mathfrak{m}}}{\overline{\mathfrak{m}}^2} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I}$$

e si ha un'immersione

$$\mathrm{Der}_p(A/I, \mathbb{K}) = \{\partial \in \mathrm{Der}_p(A, \mathbb{K}) \colon \partial(I) = 0\} \hookrightarrow \mathrm{Der}_p(A, \mathbb{K})$$

data da $\partial \mapsto \partial \circ \pi$, dove $\pi \colon A \to A/I$ è la proiezione canonica.

Osservazione 2.47. Se $\varphi \colon X \to Y$ è un morfismo di varietà e p è un punto di X, posto $q = \varphi(p)$ si ha una mappa

$$d_p \varphi \colon T_q X \to T_p Y$$

definita tramite

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_p(A, \mathbb{K}) & \to & \mathrm{Der}_q(B, \mathbb{K}) \\ \partial & \mapsto & \partial \circ \varphi \end{array}$$

dove $B = \mathbb{K}[Y]$.

Esempio 2.48. Se $Y = \mathbb{K}$ e $\varphi(p) = q$, la mappa $d_p\varphi\colon T_pX \to T_q\mathbb{K} = \mathbb{K}\,\frac{\partial}{\partial x}\big|_q$ è definita da $\partial \mapsto \widetilde{\partial}$, dove

$$\widetilde{\partial}(f) = \partial(f \circ \varphi).$$

Se $\widetilde{\partial}(x) = \lambda$, allora $\widetilde{\partial} = \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\big|_q$.

Osservazione 2.49. Se X è affine e φ è in A, allora φ definisce una mappa $\mathbb{K}[x] \to A$ data da $g \mapsto g \circ \varphi$. In particolare $x \mapsto \varphi$. Quindi

$$\widetilde{\partial}(x) = \partial(x \circ \varphi) = \partial(\varphi).$$

Osservazione 2.50. Nel caso di $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon X \to \mathbb{K}^n$, si ha

$$d_p\varphi : \begin{array}{ccc} T_pX & \longrightarrow & T_q\mathbb{K}^n \\ \partial & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \partial(\varphi_i)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q \end{array}$$

Nel caso in cui X sia $\mathbb{K}^m$ (con coordinata y), si ha

$$d_p\varphi : \begin{array}{ccc} T_p\mathbb{K}^m & \longrightarrow & T_q\mathbb{K}^n \\ \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_q \end{array}$$

cioè $d_p\varphi = \mathcal{D}_p\varphi$ a meno di rinominare i vettori base.

Teorema 2.51. Se X è una varietà irriducibile di dimensione n, allora

$$\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim T_pX \geq n.$$

Definizione 2.52. Sia X una varietà di dimensione n. Un punto p di X si dice **liscio** se $\dim \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = n$.

Osservazione 2.53. Se X è una varietà irriducibile di dimensione d contenuta in $\mathbb{K}^n$, consideriamo il punto $p = 0$ in X. Vogliamo capire se 0 è liscio. Scriviamo $X = V(I)$, con $I = (f_1, \dots, f_r)$. In questo caso $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 = (x_1, \dots, x_n)$. I generatori f_i di I si scrivono come $f_i = \ell_i + f_{1,i}$ con ℓ_i lineare omogeneo e $f_{1,i}$ di grado superiore a $\deg(\ell_i)$. Quindi $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + \mathbb{K}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}x_n$, da cui

$$\frac{\overline{\mathfrak{m}}}{\overline{\mathfrak{m}}^2} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle} = \frac{\mathbb{K}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}x_n}{\langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle}.$$

Dunque X è liscio in 0 se $\dim_{\mathbb{K}}\langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle = n - d$.

Esempio 2.54. Consideriamo X la curva affine definita dall'equazione $y^2 = x^3$ (notiamo che $\dim X = 1$). Posto $f = y^2 - x^3$, si ha[2]

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{0},$$

[2] $y^2 - x^3$ non ha parte lineare

che ha dimensione 2, quindi X non è liscia in $(0,0)$. Se invece consideriamo X definita da $y^2 = x^3 + x$, allora

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{x}$$

che ha dimensione 1, quindi X è liscia in 0.

Esempio 2.55. Se $X = V(I)$ in $\mathbb{K}^n$, con $I = (f_1, \ldots, f_r)$, consideriamo la mappa

$$f = (f_1, \ldots, f_r) \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r.$$

Allora

$$d_0 f : \begin{array}{ccc} T_0\mathbb{K}^n_x & \longrightarrow & T_0\mathbb{K}^r_y \\ \partial & \longmapsto & \sum_j \partial(f_j) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0 \end{array}$$

e

$$T_0X = \{\partial \colon \partial(I) = 0\} = \{\partial \colon \partial(f_j) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \ldots, r\} = \ker d_0 f.$$

Teorema 2.56. Se X è una varietà, allora esiste un aperto U in X costituito da punti lisci.

Teorema 2.57 (Zariski)**.** Supponiamo $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$. Se X è irriducibile e Y è liscia, ogni morfismo $\varphi \colon X \to Y$ bigettivo è un isomorfismo.

In caratteristica p il teorema va enunciato in modo diverso: $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_p}$, $\varphi \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definito da $x \mapsto x^p$.

Definizione 2.58. Sia $\varphi \colon X \to Y$ un morfismo di varietà lisce. Diciamo che φ è **liscio** in un punto p di X se la mappa $d_p\varphi \colon T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ è surgettiva.

Teorema 2.59. Assumiamo $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$. Se $\varphi \colon X \to Y$ è un morfismo **dominante** di varietà lisce (cioè $\overline{\varphi(X)} = Y$), allora esiste un aperto non vuoto U di Y tale che la restrizione

$$\varphi\big|_{\varphi^{-1}(U)} \colon \varphi^{-1}(U) \to U$$

è liscia.

Teorema 2.60. Ogni mappa $\varphi \colon X \to Y$ liscia è aperta. Inoltre, per ogni varietà Z (non necessariamente liscia), la mappa

$$(\varphi, id) \colon X \times Z \to Y \times Z$$

è aperta.

Teorema 2.61. Siano X e Y varietà lisce e $\varphi : X \to Y$ una mappa liscia tale che $d\varphi_x$ è surgettivo per ogni $x \in X$, allora

1. $X_y = \varphi^{-1}(y)$ è una varietà liscia di dimensione $\dim X - \dim Y$
2. Se $x \in X_y$ allora

$$0 \to T_x X_y \to T_x X \xrightarrow{d\varphi_x} T_y Y \to 0$$

Parte II

Gruppi algebrici

Capitolo 3

Gruppi algebrici

3.1 Definizioni generali

Definizione 3.1 (Gruppo algebrico lineare)**.** Un gruppo G è un **gruppo algebrico lineare** se è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ per qualche n definito da equazioni polinomiali.

Definizione 3.2 (Gruppo algebrico affine)**.** Un gruppo G è un **gruppo algebrico affine** se G è una varietà affine e le operazioni prodotto

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

e inverso

$$i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

sono morfismi di varietà.

Osservazione 3.3. Il prodotto $\mu : \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(n)$ è un morfismo di varietà, infatti

$$(x_{ij})(y_{ij}) = \left(\sum_h x_{i,h-i} \right)$$

è definito da equazioni polinomiali nelle entrate.

Similmente per l'operazione di inverso, infatti $(x_{ij})^{-1} = \mathrm{Adj}(x_{ij}) \cdot (\det(x_{ij}))^{-1}$. Le entrate della matrice aggiunta classica sono dei determinanti e quindi polinomiali, mentre l'inversa del determinante della matrice di partenza è una funzione regolare perché siamo su $\mathrm{GL}(n) = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \setminus V(\det)$.

Esempio 3.4. I gruppi $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{GL}(1) = \mathbb{G}_m$ e $\mathrm{SL}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ sono evidentemente gruppi algebrici lineari.

Esempio 3.5. Il gruppo

$$\mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un gruppo algebrico lineare (definito da $x_{11} = x_{22} = 1$ e $x_{21} = 0$). Notiamo però che

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi questo gruppo lo si può interpretare come $(\mathbb{K}, +)$, dando una realizzazione di questo come gruppo algebrico lineare.

Definizione 3.6 (Azione regolare di gruppo algebrico)**.** Sia G un gruppo algebrico affine e sia X una varietà affine qualsiasi. Se G agisce su X affermiamo che questa azione è **regolare** se $\sigma : G \times X \to X$ è un morfismo di varietà algebriche.

Definizione 3.7 (Rappresentazione regolare)**.** Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e l'azione di G è lineare diciamo che V è una **rappresentazione regolare finito dimensionale** di G.
Se V è una rappresentazione di G (di dimensione qualsiasi) diciamo che è **regolare** se

1. per ogni $v \in V$ si ha $\dim \langle gv \rangle_{g \in G} < \infty$
2. per ogni $W \subseteq V$ sottospazio di dimensione finita, W è una rappresentazione regolare finito dimensionale.

Osservazione 3.8. Se G è un gruppo algebrico affine, ai morfismi di moltiplicazione μ e inverso i corrispondono omomorfismi di $\mathbb{K}$-algebre

$$\mu^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & (x \otimes y) \mapsto f(xy) \end{array} , \quad i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}$$

Osservazione 3.9. Se σ è una azione $G \times X \to X$ allora

$$\sigma^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & (g, x) \mapsto f(gx) \end{array}$$

Osservazione 3.10. La proprietà associativa si può esprimere tramite il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "id_G \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times id_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

Quindi abbiamo una proprietà analoga sulla comoltiplicazione μ^* considerando il diagramma indotto.

Osservazione 3.11. Se $X = V$ è una rappresentazione regolare fin.dim. e $\sigma : G \times V \to V$ abbiamo un omomorfismo di algebre

$$\sigma^* : \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[V]$$

Ricordiamo però che $\mathbb{K}[V] = SV^*$, quindi possiamo restringere σ^* a solo $V^* \subseteq SV^*$.

Lemma 3.12. $\sigma^*(V^*) \subseteq \mathbb{K}[G] \otimes V^*$.

Dimostrazione.
Sia $e_1, \cdots, e_n$ una base di V e $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ la base duale. Se g agisce come (g_{ij}) su V e $v = \sum v_i e_i$ allora

$$\begin{aligned}\sigma^*\varphi_k(g,v) =& \varphi_k(gv) = \varphi_k\left(\sum g_{ij}v_je_i\right) = \\ &= \sum g_{ij}v_j\varphi_k(e_i) = \sum g_{kj}v_j = \\ &= \left(\sum x_{kj} \otimes \varphi_j\right)(g,v),\end{aligned}$$

dove $x_{kj} \in \mathbb{K}[G]$ è la funzione che per ogni g restituisce g_{kj}. □

Lemma 3.13. Sia G che agisce su X in modo regolare con entrambi affini. Allora

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione di G con azione data da
$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$
- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione regolare
- $\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di G.

Dimostrazione.
Se $f \in \mathbb{K}[X]$ allora $\dim \langle Gf \rangle < \infty$. Notiamo che $\sigma(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \beta_i$ con somma finita. Notiamo che, per definizione

$$f(gx) = \sum_i \alpha_i(g)\beta_i(x)$$

quindi

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) = \sum \alpha_i(g^{-1})\beta_i(x) \Longleftrightarrow gf = \sum_{i=1}^k \alpha_i(g^{-1})\beta_i \in \langle \beta_1, \cdots, \beta_k \rangle$$

Questo mostra che $\dim \langle Gf \rangle$ è finita.

Vogliamo dimostrare che su $W \subseteq \mathbb{K}[X]$ di dimensione finita l'azione di G è regolare, cioè voglio mostrare che per ogni $\varphi \in W^*$ (generatori di $SW^* = \mathbb{K}[W]$) si ha $\varphi(gf)$ regolare.

Sia $f_1, \cdots, f_k$ una base di W. Poiché sono una base $\sigma^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes f_j$. Se $\varphi(f_i) = \lambda_i$ abbiamo che $\psi = \sigma^*\varphi$ è tale che

$$\psi(g, f_i) = \varphi(gf_i) = \varphi(\sum \alpha_{ij}(g^{-1})f_j) = \sum \alpha_{ij}(g^{-1})\lambda_j$$

□

3.1.1 Componente connessa dell'identità

Proposizione 3.14. Sia G un gruppo algebrico affine e sia G^0 la componente connessa di e_G. Allora G^0 è un sottogruppo normale chiuso.

Dimostrazione.
Sicuramente G^0 è chiuso in quanto componente connessa. L'insieme $G^0 \times G^0$ è connesso e la mappa

$$m^0 = m|_{G^0 \times G^0} : G^0 \times G^0 \longrightarrow G$$

ha immagine connessa in G. Poiché e_G è nell'immagine di m^0, si ha $\mathrm{Imm}(m^0) = G^0$.
Dato g in G, si ha

$$gG^0 g^{-1} \subset G^0,$$

infatti la mappa

$$AD_g : \begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

è continua e fissa e_G, quindi $\mathrm{Imm}(AD_g) \subset G^0$. □

Osservazione 3.15. In gruppo algebrico affine le componenti connesse sono irriducibili.

Esercizio 3.16. Il sottogruppo G^0 è irriducibile.

Citiamo il seguente teorema:

Teorema 3.17 (Chevalley)**.** Se $\varphi \colon X \to Y$ è una mappa regolare tra due varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\overline{\varphi(X)}$.

Osservazione 3.18. Se G è un gruppo algebrico, allora esistono $g_1, \dots, g_k$ in G tali che

$$G = G^0 \cup G^0 g_1 \cup \dots \cup G^0 g_k.$$

La precedente è una decomposizione in componenti connesse e irriducibili.

Proposizione 3.19. Se $\varphi \colon G \to H$ è un morfismo di gruppi algebrici affini, allora $\varphi(G)$ è un chiuso di H.

Dimostrazione.
Sfruttando la decomposizione dell'Osservazione (3.18), abbiamo

$$\varphi(G) = \varphi(G^0) \cup \varphi(G^0 g_1) \cup \dots \cup \varphi(G^0 g_k),$$

quindi basta mostrare che $\varphi(G^0)$ è chiuso. In particolare, possiamo ricondurci al caso $G = G^0$.
Il sottogruppo $X = \overline{\varphi(G)}$ di H è irriducibile, e per il Teorema di Chevalley (3.17)

esiste un aperto U di X contenuto in $\varphi(G)$. Mostriamo che $X = \varphi(G)$. Poiché X e $\varphi(G)$ sono sottogruppi di H, si ha

$$U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X$$

Se x è un elemento di X, poiché $i(U) = U^{-1}$ è un aperto di X, anche xU^{-1} è un aperto di X. Per irriducibilità di X, si ha $U \cap xU^{-1} \neq \emptyset$, quindi esistono u, v in U tali che $x = uv$, da cui $X = U \cdot U = \varphi(G)$. □

3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari

Osservazione 3.20 (Punti e ideali massimali sono la stessa cosa)**.** Nella situazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \cap\!| & & \cap\!| \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

abbiamo una corrispondente mappa di algebre

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Notiamo che

$$\varphi(\alpha) = \beta \iff \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta$$

dove $\mathfrak{m}_\alpha$ e $\mathfrak{m}_\beta$ sono i massimali che corrispondono ai rispettivi punti.

Dimostrazione.
Basta notare che le seguenti sono equivalenze

$$\begin{gathered} f \in \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) \\ f \circ \varphi \in \mathfrak{m}_\alpha \\ (f \circ \varphi)(\alpha) = 0 \\ f(\varphi(\alpha)) = 0 \\ f \in \mathfrak{m}_{\varphi(\alpha)} = \mathfrak{m}_\beta \end{gathered}$$

□

Proposizione 3.21. Siano X e Y affini e sia $\varphi : X \to Y$ un morfismo. Se $\psi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ è surgettiva allora $\varphi(X)$ è chiuso.

Dimostrazione.
Sia $I = \ker \psi$ e mostriamo che $\varphi(X) = V(I)$:

$\boxed{\subseteq}$ Se $x \in X$ e $f \in I$ allora $f(\varphi(x)) = \psi(f)(x) = 0$, quindi $\varphi(x) \in V(I)$.

$\boxed{\supseteq}$ Sia $\beta \in V(I)$, allora $I \subseteq \mathfrak{m}_\beta$. Notiamo che $\psi : \mathbb{K}[Y]/I \to \mathbb{K}[X]$ è un isomorfismo e sotto questo isomorfismo

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\beta / I,$$

dunque
$$\mathbb{K} \cong \frac{\mathbb{K}[Y]}{\mathfrak{m}_\beta} \overset{\psi}{\cong} \frac{\mathbb{K}[X]}{\psi(\mathfrak{m}_\beta)}.$$
Abbiamo quindi mostrato che $\psi(\mathfrak{m}_\beta)$ è un massimale, dunque per il Nullstellensatz esiste $\alpha \in X$ tale che $\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha$. Concludiamo notando che

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha \implies \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta \iff \varphi(\alpha) = \beta.$$

□

Proposizione 3.22. Se X, Y affini, $\varphi : X \to Y$ e $\psi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ mappe corrispondenti, se G agisce su X e Y allora si ha che φ è G-equivariante se e solo se ψ è G-equivariante.

Dimostrazione.
Diamo le due implicazioni:

$\boxed{\implies}$ Segue calcolando

$$\begin{aligned}\psi(g \cdot f)(x) =& (g \cdot f)(\varphi(x)) = f(g^{-1} \cdot \varphi(x)) = \\ =& f(\varphi(g^{-1}x)) = \psi(f)(g^{-1}x) = \\ =& (g \cdot \psi(f))(x).\end{aligned}$$

$\boxed{\impliedby}$ Vogliamo mostrare che $\varphi(gx) = g\varphi(x)$. Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni $f \in \mathbb{K}[Y]$ si ha $f(g\varphi(x)) = f(\varphi(gx))$.

$$f(g\varphi(x)) = (g^{-1}f)(\varphi(x)) = \psi(g^{-1}f)(x) = (g^{-1}\psi(f))(x) = \psi(f)(gx) = f(\varphi(gx)).$$

□

Teorema 3.23. Se X è affine e G agisce su X allora esiste una rappresentazione di dimensione finita V di G e $i : X \to V$ iniettiva che è G-equivariante

Dimostrazione.
ESERCIZIO □

Teorema 3.24. Ogni gruppo affine è lineare.

Dimostrazione.
Consideriamo l'azione di G su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Questa rende $\mathbb{K}[G]$ una rappresentazione di G. Notiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, con generatori $f_1, \cdots, f_n$. Notiamo che esiste V uno spazio vettoriale di dimensione finita che contiene $f_1, \cdots, f_n$ che è stabile per l'azione di G e una rappresentazione regolare di G.

Supponiamo $f_1, \cdots, f_N$ base di V. Sia

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G \times G] \\ f & \longmapsto & (g,h) \mapsto f(gh) \end{array}$$

e scriviamo $\mu(f_j) = \sum \widetilde{\alpha}_{i,j} \otimes f_i$.

$$(gf_j)(h) = f_j(g^{-1}h) = \mu(f)(g^{-1}, h) = \sum \widetilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1}) f_i(h).$$

Poniamo $\alpha_{i,j}(g) = \widetilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})$. Consideriamo ora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & [g]_{\{f_j\}}^{\{f_j\}} = (\alpha_{i,j}(g)) \end{array}$$

che a livello di algebre diventa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[x_{i,j}, \det^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ x_{i,j} & \longmapsto & \alpha_{i,j} \end{array}.$$

Dalla definizione è evidente che φ è una mappa regolare. Se mostriamo che φ è iniettiva e che ψ è surgettiva allora per (3.21) avremo che $\varphi(G)$ è un chiuso, quindi φ identifica G con un chiuso di $\mathrm{GL}(V)$, rendendo G un gruppo algebrico lineare.

Siano $g, h \in G$ tali che $\alpha_{i,j}(g) = \alpha_{i,j}(h)$ per ogni i, j, allora $gf_j = hf_j$ per ogni j, quindi g e h hanno lo stesso effetto su $\mathbb{K}[G]$, in particolare[1]

$$f(g^{-1}) = (gf)(e) = (hf)(e) = g(h^{-1})$$

per ogni $f \in \mathbb{K}[G]$, e questo significa che $g^{-1} = h^{-1}$, cioè $g = h$, mostrando l'iniettività.

Notiamo che per ogni $g \in G$

$$f_j(g^{-1}) = (gf_j)(e) = \sum \alpha_{i,j}(g) \underbrace{f_j(e)}_{\in \mathbb{K}}.$$

Questo mostra che i generatori f_j di $\mathbb{K}[G]$ appartengono all'immagine di ψ (perché combinazioni lineari delle $\alpha_{i,j}$), quindi ψ è surgettiva. $\square$

Ricordiamo il

Teorema 3.25 (di Chevalley)**.** Sia $\varphi : X \to Y$ morfismo di varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\overline{\varphi(X)}$.

Corollario 3.26. Se G e H gruppi algebrici affini con $\varphi : G \to H$ morfismo di gruppi algebrici allora $\varphi(G)$ è un chiuso di H.

Dimostrazione.
Sia $T = \varphi(G) \subseteq H$. Vogliamo mostrare che $T = \overline{T} \subseteq H$. Per Chevalley (3.17), $T \supseteq U$ per U aperto di $\overline{T}$. Notiamo che $\overline{T}$ è un sottogruppo di H. Dunque per ogni $t \in \overline{T}$, $tU \subseteq \overline{T}$.

Poiché la moltiplicazione per t è un omeomorfismo, U e tU sono aperti di $\overline{T}$, quindi per irriducibilità $U \cap tU \neq$, dunque esiste $g, h \in U$ tali che $g = th$, cioè $t = gh^{-1} \in T$ e dato che t era un generico elemento di T abbiamo finito. $\square$

[1] e è l'identità di G

Capitolo 4

Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile

Proposizione 4.1 (Semisemplice uguale completamente riducibile)**.** Per le rappresentazioni regolari di G abbiamo che se essa è completamente riducibile allora è semisemplice, cioè le due condizioni sono equivalenti in questo caso.

Dimostrazione.
Se V è una rappresentazione regolare non nulla allora V contiene una sottorappresentazione semplice, infatti basta prendere $W \subseteq V$ di dimensione finita e poi la sottorappresentazione di W di dimensione minima.

Se $W \subseteq V$ allora W e V/W sono completamente riducibili, infatti per completa riducibilità $V = W \oplus U$ per $U \cong V/W$, quindi basta mostrarlo per W. Sia $X \subseteq W$ sottorappresentazione. Poiché $V = X \oplus Y$ (di nuovo applico l'ipotesi su V) allora $W = X \oplus Y \cap W$.

Mostriamo ora che V è semisemplice. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigoplus_{i \in I} S_i \subseteq V \right\}$$

con S_i tutti semplici e ordine su $\mathcal{F}$ dato da

$$\bigoplus_{i \in I} S_i \preceq \bigoplus_{j \in J} T_j \iff I \subseteq J \text{ e } S_i = T_i \text{ per } i \in I.$$

Ogni catena ammette maggiorante dato sommando sull'unione degli indici. Sia allora $W = \bigoplus S_i \subseteq V$ massimale e sciviamo $V = W \oplus U$. Se $W \neq (0)$ allora esiste una sottorappresentazione semplice $S \subseteq U$ e quindi $W' = W \oplus S$ sarebbe maggiore di W, assurdo. □

Vorremmo capire per quali gruppi G le rappresentazioni regolari sono semisemplici.

4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti

Definizione 4.2 (Elementi unipotenti, nilpotenti e semisemplici)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $g \in \mathrm{End}(V)$. Affermiamo che g è

- **semisemplice** se è diagonalizzabile
- **nilpotente** se $g^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$
- **unipotente** se $(g - id_V)^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$

Osservazione 4.3. Se g è invertibile allora $\mathbb{Z}$ agisce su V come

$$n \cdot v = g^n v,$$

quindi la definizione di semisemplice si sposa bene con quella già data in quanto g induce una decomposizione in autospazi g-invarianti.

Definizione 4.4 (Endomorfismo localmente finito)**.** Siano V uno spazio vettoriale e $g \in \mathrm{End}(V)$. g è **localmente finito** se per ogni $v \in V$ esiste W di dimensione finita g-stabile con $v \in W$. In tal caso diciamo che

- g è **semisemplice** se $g|_W$ è semisemplice per ogni $W \subseteq V$ g-stabile di dimensione finita.
- g è **nilpotente** se $g|_W$ è nilpotente per ogni $W \subseteq V$ g-stabile di dimensione finita.
- g è **unipotente** se $g|_W$ è unipotente per ogni $W \subseteq V$ g-stabile di dimensione finita.

Definizione 4.5 (Semisemiplice, unipotente e nilpotente per gruppi algebrici)**.** Se G è un gruppo algebrico e $g \in G$ allora g è

- **semisemplice** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è semisemplice, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è semisemplice
- **unipotente** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è unipotente, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è unipotente
- **nilpotente** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è nilpotente, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è nilpotente.

Lemma 4.6 (Semisemplice/unipotente/nilpotente passano alle costruzioni lineari)**.** Siano $g \in \mathrm{End}(V)$ e $h \in \mathrm{End}(W)$ con V e W localmente finite. Allora

- Se g e h semisemplici allora

$$g \oplus h : V \oplus W \to V \oplus W \text{ è semisemplice}$$
$$g \otimes h : V \otimes W \to V \otimes W \text{ è semisemplice}$$

- Se $U \subseteq V$ è stabile per g e g semisemplice allora $g|_U$ e $\overline{g} : V/U \to V/U$ sono semisemplici.
- Se g è semisemplice allora l'azione di g su SV è semisemplice
- Se $\dim V$ è finita e g è semisemplice allora V^* è semisemplice.

Valgono anche gli analoghi per unipotente e nilpotente.

Dimostrazione.
Tante verifiche noiose, riportiamo giusto quelle per $g \otimes h$:

Se V e W hanno dimensione finita allora esistono basi di autovettori per g e h

$$gv_i = \lambda_i v_i, \quad hw_i = \mu_i v_i$$

Allora

$$(g \otimes h)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$

quindi $v_i \otimes w_j$ è ancora base di autovettori. Se invece V e W hanno dimensione infinita e $U \subseteq V \otimes W$ di dimensione finita allora gli elementi di base di U appartengono a prodotti tensore di sottospazi di dimensione finita di V e W, quindi ingrandendo in modo tale da tener conto di tutta la base ricaviamo $U \subseteq \widehat{V} \otimes \widehat{W}$ con $\widehat{V}$ e $\widehat{W}$ di dimensione finita, ora ci restringiamo sottospazi stabili di $\widetilde{V}$ e $\widetilde{W}$ e con calma ci rimettiamo nelle ipotesi finite. $\square$

Lemma 4.7 (Rappresentazioni finte si immergono in $\mathbb{K}[G]^n$)**.** Sia V una rappresentazione di dimensione finita di G, allora abbiamo una iniezione

$$f : V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^n$$

G-equivariante

Dimostrazione.
Sia $v_1, \cdots, v_n$ una base di V e sia $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ la base duale. Definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}[G]^n \\ v & \longmapsto & (\varphi_1 \otimes v, \cdots, \varphi_n \otimes v) \end{array}$$

dove se $\varphi \in V^*$ e $v \in V$ poniamo

$$(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g^{-1}v).$$

$\boxed{G\text{-equivariante}}$ Vogliamo $\psi(gv) = g\psi(v)$, cioè $g(\varphi \otimes v) = \varphi \otimes gv$. Allora calcoliamo

$$(g(\varphi \otimes v))(h) = (\varphi \otimes v)(g^{-1}h) = \varphi(h^{-1}gv) = (\varphi \otimes gv)(h)$$

$\boxed{\text{iniettiva}}$ Supponiamo $\psi(v) = 0$, allora per ogni i

$$0 = (\varphi_i \otimes v)(e) = \varphi_i(v)$$

ma φ_i era una base del duale, quindi $v = 0$.

□

Osservazione 4.8. Se $gv = (\alpha_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n} v$ allora $\varphi_i \otimes v_j = \alpha_{i,j}$.

Corollario 4.9. Se $g \in G$ allora

- g è semisemplice se e solo se l'azione di g su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice
- g è unipotente se e solo se l'azione di g su $\mathbb{K}[G]$ è unipotente

Dimostrazione.
Facciamo il caso semisemplice

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ovvio

$\boxed{\Longleftarrow}$ Dobbiamo verificare che l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita V è semisemplice. Per il lemma (4.7) abbiamo che $V \subseteq \mathbb{K}[G]^n$ e questo è semisemplice quindi anche g lo è per il secondo punto del lemma (4.6)

□

Lemma 4.10 (Criterio per semisemplice/unipotente in gruppi lineari)**.** Se $G \subseteq GL(V)$ è un sottogruppo chiuso per V di dimensione finita allora

- $g \in G$ è semisemplice se e solo se l'azione di g su V è semisemplice.
- $g \in G$ è unipotente se e solo se l'azione di g su V è unipotente.

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni per il caso semisemplice

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ovvio

$\boxed{\Longleftarrow}$ Verifichiamo che l'azione su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Osserviamo che

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$$

è surgettivo e G-equivariante quindi basta far vedere che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$.

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]\left[\det^{-1}\right]$$

Verifichiamo che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] = S(\mathrm{End}(V)^*)$. Per il lemma (4.6) basta verificare che g agisce in modo semisemplice su $\mathrm{End}(V)^*$ o equivalentemente su $\mathrm{End}(V)$ per lo stesso lemma. Ricordiamo che g agisce tramite la moltiplicazione a sinistra.

Se $\dim V = n$ allora $\mathrm{End}(V)$ con l'azione di moltiplicazione a sinistra di g è uguale a considerare l'azione di g su $V^{\oplus n}$ dove la corrispondenza è data dal fatto che l'azione per moltiplicazione a sinistra agisce sulle colonne della matrice a destra per restituire le colonne della matrice risultato.

Poiché g agiva in modo semisemplice su V, agisce in modo semisemplice anche sulla somma che abbiamo considerato, quindi mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$.

Sia ora $W \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}]$ un sottospazio di dimensione finita, in particolare

$$W \subseteq \frac{1}{\det^N}\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \quad \text{per qualche } N$$

Consideriamo allora l'azione di g su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \otimes \mathbb{K}$ dove sulla copia di $\mathbb{K}$ abbiamo $g\lambda = (\det g)^{-N}\lambda$. Abbiamo una mappa G-equivariante surgettiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \frac{1}{\det^N}\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \\ f \otimes \lambda & \longmapsto & \frac{\lambda}{(\det)^N} f \end{array}$$

quindi, poiché g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ e su $\mathbb{K}$, si ha che agisce in modo semisemplice su $\frac{1}{\det^N}\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ e quindi su W.

Mettendo tutto insieme, abbiamo mostrato che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[G]$ e questo conclude per il corollario (4.9).

□

4.2 Decomposizione di Jordan

Proposizione 4.11. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e sia T un endomorfismo di V. Allora

1. Esistono e sono unici S semisemplice e N nilpotente in $\mathrm{End}(V)$ tali che $T = S + N$ e $SN = NS$.

Gli endomorfismi S e N si dicono **parte semisemplice** e **parte nilpotente** di T e li denoteremo T_s e T_n rispettivamente.

2. Esistono f, g in $\mathbb{K}[x]$, con $f(0) = g(0) = 0$, tali che $S = f(T)$ e $N = g(T)$.

3. Se W è un sottospazio T-stabile di V, allora W è S-stabile e N-stabile. Inoltre
$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_n = N|_W\,.$$

4. Se V' è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita, T' è un endomorfismo di V' e $L\colon V \to V'$ è un'applicazione lineare, allora
$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_n = T'_n \circ L.$$

Dimostrazione.
Dimostriamo i vari punti.

1. Scriviamo T in forma di Jordan e poniamo S la parte diagonale di T (che è quindi semisemplice). Posto $N = T - S$, si ha che N è nilpotente e $SN = NS$.

   Mostriamo ora l'unicità: se S' e N' sono tali che $T = S+N = S'+N'$ e $S'N' = N'S'$, allora S, S', N, N' commutano con T, quindi S', N' commutano con S, N. Osservando che $S - S' = N' - N$, dove il primo membro è diagonale e il secondo è nilpotente, troviamo $S = S'$ e $N = N'$.

2. Consideriamo il polinomio caratteristico p_T di T e scriviamolo nella forma

   $$p_T(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{n_i},$$

   dove i λ_i sono distinti. Cerchiamo un polinomio $f(t)$ in $\mathbb{K}[t]$ tale che

   $$\begin{cases} f(t) \equiv 0 & \pmod{t} \\ f(t) \equiv \lambda_i & \pmod{(t-\lambda_i)^{n_i}} \quad \forall i \in \{1, \cdots, r\} \end{cases}$$

   Tale polinomio esiste per il teorema cinese del resto. Inoltre soddisfa $f(T) = S$. Infatti, sul singolo blocco di Jordan J_i relativo all'autovalore λ_i (di taglia $m_i \leq n_i$), si ha che $f(T) = \lambda_i I$. Poiché $N = T - S$, posto $g(t) = t - f(t)$, si ha $N = g(T)$.

3. Poiché $S = f(T)$ e $N = g(T)$, se W è T-stabile, lo sono chiaramente anche S e N. Siano ora $t = T|_W$, $s = S|_W$ e $n = N|_W$. Allora $t = s + n$, $sn = ns$ e, per il lemma (4.6), s è semisemplice e n è nilpotente. Quindi la tesi discende dall'unicità della decomposizione.

4. Se L è iniettiva (o suriettiva), allora V è un sottospazio (o un quoziente) di V', e la tesi discende dal punto precedente (nel caso del quoziente è analogo considerando la stabilità degli elementi semisemplici e nilpotenti). Nel caso generale, consideriamo il diagramma:

   $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L_1"] \arrow[d, "T"] & V \oplus V' \arrow[r, "L_2"] \arrow[d, "T''=T\oplus T'"] & V' \arrow[d, "T'"] \\ V \arrow[r] & V \oplus V' \arrow[r] & V' \end{tikzcd}$$

   dove $L_1 \colon v \mapsto (v, L(v))$ e $L_2 \colon (v,w) \mapsto w$. Per commutatività, si ha $L_1 \circ T_s = T''_s \circ L_1$ e $L_2 \circ T''_s = T'_s \circ L_2$. Deduciamo quindi che

   $$L \circ T_s = L_2 \circ L_1 \circ T_s = L_2 \circ T''_s \circ L_1 = T'_s \circ L_2 \circ L_1 = T'_s \circ L.$$

Per il caso nilpotente la dimostrazione è analoga. □

Vale una decomposizione analoga nel caso moltiplicativo, sostituendo elementi nilpotenti con elementi unipotenti.

Proposizione 4.12. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e sia T in $\mathrm{GL}(V)$. Allora

1. Esistono e sono uniche S semisemplice e U unipotente tali che $T = SU = US$, date da $S = T_S$ e $U = T_U$
2. Esistono f, g in $\mathbb{K}[x]$ tali che $S = f(T)$ e $U = g(T)$.
3. Se W è un sottospazio T-stabile di V, allora W è S-stabile e U-stabile. Inoltre
$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_u = U|_W\,.$$
4. Se V' è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita, T' è un endomorfismo di V' e $L\colon V \to V'$ è un'applicazione lineare, allora
$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_u = T'_u \circ L.$$

Dimostrazione.
Per analogia con la proposizione precedente, ci limitiamo a dimostrare il primo punto. Partendo dalla decomposizione additiva, si ha
$$T = S + N = S(I + S^{-1}N).$$
Poiché $S^{-1}N$ è nilpotente, l'elemento $U = I + S^{-1}N$ è unipotente. Mostriamo l'unicità: se S' e U' sono tali che $T = S'U'$, posto $U' = I + M$ con M nilpotente, si ha $T = S' + S'M$. Quindi l'unicità discende da quella del caso additivo. □

Vogliamo ora estendere quanto fatto al caso localmente finito. Ricordiamo che un'applicazione lineare $T\colon V \to V$ è *localmente finita* se per ogni v in V esiste un sottospazio W di V di dimensione finita contenente v e T-stabile.

Teorema 4.13. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $T\colon V \to V$ lineare, invertibile e localmente finita. Allora esistono e sono unici S semisemplice e U unipotente tali che $T = SU = US$.

Dimostrazione.
Mostriamo dapprima l'esistenza. Per ogni v in V, sia W un sottospazio di V di dimensione finita contenente v e T-stabile. Consideriamo la restrizione $T|_W$ in $\mathrm{GL}(W)$. Consideriamo allora gli elementi $S_W = (T|_W)_s$ e $U_W = (T|_W)_u$ dati dalla Proposizione (4.12) e definiamo $S(v) = S_W(v)$. Osserviamo che $S(v)$ non dipende dalla scelta di W. Infatti, se W è contenuto in un W', allora $S_{W'}|_W = S_W$. Procedendo in modo analogo per U, otteniamo l'esistenza.

Osserviamo che S e U costruite soddisfano le proprietà 3 e 4 dell'enunciato precedente.

Verifichiamo ad esempio la 4. Mostriamo che, con la notazione della Proposizione (4.12), si ha $LS = S'L$. Per ogni v in V, consideriamo un sottospazio W di dimensione finita, contenente v e T-stabile. Sia $W' = L(W)$. Allora
$$S'(W') = S'L(W) = LS(W) \subseteq L(W) = W'.$$

È quindi sufficiente mostrare che

$$L|_W \circ S|_W (v) = S'|_{W'} \circ L|_W (v),$$

ma ciò segue dal caso di dimensione finita.

Mostriamo ora l'unicità. Assumiamo $T = su = us$ e mostriamo che $S = s$ e $U = u$. Osserviamo che S, U commutano con s, u. Infatti, per il punto 4, sappiamo che $LS = SL$ e $LU = UL$. Allora dal diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L=s"] \arrow[d, "T"] & V \arrow[d, "T"] \\ V \arrow[r, "L=s"'] & V \end{tikzcd}$$

ricaviamo $Ss = sS$ e $Us = sU$. Analogamente troviamo $Uu = uU$ e $Su = uS$. Scriviamo ora $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(S)$. Poiché $V_\lambda(S)$ è stabile per U, s, u, lo spazio

$$V_{\lambda,\mu}(S,s) = \{v \in V : Sv = \lambda v,\ sv = \mu v\}$$

è stabile per U e u. Supponiamo per assurdo che esistano λ, μ distinti tali che $V_{\lambda,\mu} \neq 0$. Allora, poiché U e u sono unipotenti, si ha $(V_{\lambda,\mu}(S,s))^U \neq 0$ e, poiché U e u commutano, si ha anche $((V_{\lambda,\mu}(S,s))^U)^u \neq 0$. Scegliendo v non nullo in $((V_{\lambda,\mu}(S,s))^U)^u$, si ottiene $T(v) = SU(v) = S(v) = \lambda v$, ma anche $T(v) = su(v) = s(v) = \mu v$, contro l'ipotesi che λ e μ sono distinti. $\square$

Teorema 4.14 (Decomposizione di Jordan)**.** Sia G un gruppo algebrico e sia g un elemento di G. Allora esistono e sono unici s, u in G tali che s è semisemplice, u è unipotente e $g = su = us$.

Dimostrazione.
Assumiamo che G sia un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(W)$. $G = V(I)$ con $I \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo l'esistenza di s e u. Poiché g è in $\mathrm{GL}(W)$, possiamo scrivere (4.12) $g = su = us$ con u unipotente e s semisemplice in $\mathrm{GL}(W)$ (cioè s agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ e u agisce in modo unipotente su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$). In particolare $g = su$ è la decomposizione di Jordan per l'azione di g su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo che effettivamente u e s sono in G verificando che annullano ogni elemento f di I. Osserviamo che I è stabile per l'azione di g (e in generale per l'azione di G), infatti, per ogni h in G si ha $(gf)(h) = f(g^{-1}h) = 0$. Poiché s è la parte semisemplice di g, $s(I)$ è contenuto in I e se f è un elemento di I, si ha sf è 0 su G. D'altro canto, valutando sull'elemento neutro e di G, troviamo

$$0 = (sf)(e) = f(s^{-1}),$$

dunque s^{-1} (e quindi s) è in G. L'unicità segue direttamente dal fatto che la decomposizione è unica in $\mathrm{GL}(W)$. $\square$

Notazione. Denotiamo $g_s = s$ e $g_u = u$.

Esercizio 4.15. Se $\varphi \colon G \to G'$ è un morfismo di gruppi algebrici, allora $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ e $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$.

Esercizio 4.16. Sia $\mathbb{K}$ un campo perfetto (assumiamo per l'esercizio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Consideriamo l'inclusione
$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$
Sia G un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definito da un'equazione a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia $G_{\mathbb{R}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Consideriamo un elemento g in $G_{\mathbb{R}}$. Mostrare che g_s e g_u sono in $G_{\mathbb{R}}$.

4.3 Gruppi unipotenti

Definizione 4.17. Un gruppo G si dice **unipotente** se ogni suo elemento è unipotente.

Lemma 4.18. Se G è tale che l'unica rappresentazione irriducibile di G è banale allora G si immerge nel gruppo delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale, cioè

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimostrazione.
Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita per cui G è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(V)$. Sia W una sottorappresentazione di V non banale. Allora $W = \mathbb{K}v_1$ e $gv_1 = v_1$ per ogni g in G. Consideriamo il quoziente $V_1 = V/\langle v_1 \rangle$. Allora esiste v_2 in V tale che per ogni g in G si ha $gv_2 \equiv v_2 \pmod{V_1}$. Procedendo in questo modo, possiamo scegliere una base $v_1, \dots, v_n$ di V, rispetto alla quale risulta chiaramente $G \subseteq U_n$. $\square$

Teorema 4.19. Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, V spazio vettoriale di dimensione finita, $A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ che sia una $\mathbb{K}$-algebra associativa. Se V è un A-modulo semplice allora $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Dimostrazione.
Sia $v_1, \cdots, v_n$ una base di V. Se $v = (v_1, \cdots, v_n) \in V^n$ allora vogliamo mostrare che $Av = V^n$.

Poiché V è semplice, V^n è somma di rappresentazioni semplici, quindi per la proposizione (1.32) si ha che V^n è semisemplice e quindi completamente riducibile. Possiamo allora scrivere $V^n = Av \oplus P$ per P un A-sottomodulo. Sia $\pi_P : V^n \to V^n$ la proiezione su P e notiamo che essa ammette una decomposizione a blocchi

$$\pi_P = (\alpha_{ij})_{i,j} \quad \text{per degli endomorfismi } \alpha_{ij} : V \to V$$

dove il dominio di α_{ij} è la j-esima copia di V in V^n e il codominio è l'i-esima copia.

Quindi $\alpha_{ij} \in \mathrm{End}_A(V)$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Per il lemma di Schur (1.26) questi endomorfismi sono le costanti.

Ricordando ricordando che $V^n = Av \oplus P$, si ha necessariamente $\pi_P(v) = 0$ per definizione di π_P, quindi per ogni i abbiamo $\sum \alpha_{ij} v_j = 0$. Poiché gli v_j sono una base e gli endomorfismi α_{ij} sono costanti, per indipendenza lineare questo significa che per ogni i e ogni j si ha $\alpha_{ij} = 0$. Segue dunque che $\pi_P = 0$ e quindi $P = \mathrm{Imm}\, \pi_P = \{0\}$, cioè $V^n = Av$. $\square$

Esercizio 4.20. Trova un controesempio per $\mathbb{K}$ non algebricamente chiuso.

Teorema 4.21. Un gruppo G è unipotente se e solo se l'unica rappresentazione irriducibile di G è quella banale.

Dimostrazione.
Diamo le due implicazioni

$\boxed{\Longleftarrow}$ Se G ha questa proprietà allora per il lemma (4.18) abbiamo

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e chiaramente un gruppo di questa forma è unipotente.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sia V una rappresentazione semplice di G di dimensione n. Allora $\mathrm{tr}(g_V) = n$ per ogni $g \in G$ (perché si immerge nelle triangolari superiori), quindi

$$\forall g_V, h_V \in G, \qquad \mathrm{tr}((g_V - 1)h_V) = \mathrm{tr}(g_V h_V - h_V) = 0.$$

Se A è il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale generato da G, $A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ed è un'algebra associativa. Poiché V è semplice per A (in quanto semplice per G e $A = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(G)$), si ha per il teorema (4.19) si ha $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Segue per linearità della traccia che $\mathrm{tr}((g_V - 1)a) = 0$ per ogni $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$, da cui $(g_v - 1) = 0$, cioè G agisce banalmente.

□

Corollario 4.22. Se G è unipotente, allora è contenuto nel gruppo U_n delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale principale.

Osservazione 4.23. Consideriamo il gruppo $(\mathbb{C}, +)$. Questo è un gruppo unipotente perché possiamo vederlo in $\mathrm{GL}(2)$ tramite la rappresentazione

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche una rappresentazione data da

$$\mathbb{C} \to \mathrm{GL}(1), \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

La differenza tra i due casi è che da una rappresentazione V non possiamo costruire tutte le funzioni di $C^\infty(\mathbb{C})$, ma solo quelle di $\mathbb{C}[G]$ (con $G = \mathbb{C}$).

Corollario 4.24. Se V è una rappresentazione di G non nulla allora $V^G \neq 0$.

Corollario 4.25. Se G è unipotente allora G è nilpotente come gruppo, cioè definiamo iterativamente $G^{(0)} = G$ e $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G]$ allora esiste n tale che $G^{(n)} = \{id_G\}$.

Dimostrazione.
Basta immergere G in $U(n)$ e notare che sottogruppi di triangolari superiori con 1 sulla diagonale hanno questa proprietà. $\square$

Esempio 4.26. Il gruppo $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = C_p$ con $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ è un gruppo unipotente, perché si può scrivere come

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

Osservazione 4.27. Se $G = U(n)$ con $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ allora $g^{p^n} = id_G$.

4.3.1 Esponenziale e logaritmo

Notazione. Definiamo lo spazio vettoriale

$$N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definizione 4.28 (Esponenziale)**.** Definiamo la mappa **esponenziale**

$$\exp : \begin{array}{ccc} N(n) & \longrightarrow & U(n) \\ M & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} M^i \end{array}.$$

Osservazione 4.29. La mappa esponenziale appena definita è algebrica. Inoltre rispetta le usuali proprietà:

- $\exp((\lambda + \mu)M) = \exp(\lambda M)\exp(\mu M)$
- Se $M_1 M_2 = M_2 M_1$ allora $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)$.

Definizione 4.30 (Logaritmo)**.** Definiamo la mappa **logaritmo**

$$\log : \begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & N(n) \\ B & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (M - I_n)^i \end{array}.$$

Osservazione 4.31. log e exp sono mappe algebriche e inverse. Sono anche in realtà la definizione usuale, solo che per matrici in $N(n)$ e $U(n)$ queste somme finite coincidono con la definizione in serie.

Notazione. Se $G \subseteq U(n)$ definiamo $X = \log(G)$ e notiamo che X è isomorfo a G come varietà.

Proposizione 4.32. Se $g \in G \setminus \{id_G\}$ allora, ponendo

$$\overline{\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = H \subseteq G,$$

si ha $H \cong \mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$.

Dimostrazione.
Poiché $g \neq id_G$, $\log g = x \neq 0$, inoltre $\log(g^n) = nx$. Notiamo dunque che da $nx \neq 0$ per ogni n ricaviamo $g^n \neq 1_G$ per ogni n. Se $Y = \mathbb{K}x$ allora

$$\log(H) = \log(\overline{\{g^n\}}) = \overline{\{nx\}} \subseteq Y$$

Poiché Y è una retta e $\{nx\}$ sono infiniti, $\overline{nx} = Y$ per come sono fatti i chiusi di Zariski di $\mathbb{A}^1$, quindi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & H = \exp(Y) \\ \lambda & \longmapsto & \exp(\lambda x) \end{array}$$

è un isomorfismo di gruppi tra $\mathbb{K}$ e H. $\square$

Esercizio 4.33. Se $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ e G unipotente abeliano allora $G \cong \mathbb{K}^n$.

Fatto 4.34. Se $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ e $g^p = id$ per ogni $g \in G$ abeliano connesso allora G è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^n$.

Esempio 4.35. Se $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ poniamo $\widetilde{\alpha}_i = \frac{1}{p}\binom{p}{i}$ per $i \in \{0, \cdots, p-1\}$ e definiamo α_i come l'immagine di $\widetilde{\alpha}_i$ in $\mathbb{K}$.

Definiamo[1]

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a, b) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i a^i b^{p-1} \end{array}$$

e notiamo che

$$c(a, b)c(a + b, c) = c(b, c)c(a, b + c) \implies c(a, 0) = c(a, b) = 0,$$

quindi se $G = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ con prodotto

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + c(a, a'))$$

allora G è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^2$ come gruppo.

(QUESTO DOVREBBE ESSERE UN CONTROESEMPIO DI QUALCOSA???)

4.4 Gruppi completamente riducibili

Definizione 4.36. Un gruppo è **completamente riducibile** se ogni sua rappresentazione regolare è semisemplice.

Osservazione 4.37. Basta anche chiedere "ogni rappresentazione regolare *finita* è semisemplice".

Osservazione 4.38. G è completamente riducibile se e solo se $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Dimostrazione.
$\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di G quindi una implicazione è ovvia. Se V ha dimensione n e $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice allora per l'immersione (4.7) $V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^m$ si ha che V è semisemplice (4.6). $\square$

[1] moralmente $c(a, b) = \frac{(a+b)^p - a^p - b^p}{p}$, che non potremmo fare direttamente in $\mathbb{K}$ per l'identità del binomio ingenuo

Definizione 4.39. Un gruppo G è un **toro (algebrico)** se $G \cong (\mathbb{G}_m)^n$.

Osservazione 4.40. Ricordando che $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ notiamo che

$$\mathbb{K}[\mathbb{G}_m^n] = \mathbb{K}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}].$$

Questo spazio ha una base data da $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$ per $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Proposizione 4.41 (Tori algebrici sono semisemplici)**.** Se G toro algebrico allora G è semisemplice.

Dimostrazione.
Se $g = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ e $h = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ sono elementi di $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{K}^\times)^n$ si ha che

$$\begin{aligned}(gt^\alpha)(h) =& t^\alpha(g^{-1}h) = t^\alpha(\lambda_1^{-1}\mu_1, \cdots, \lambda_n^{-1}\mu_n) = \\ =&(\lambda_1^{-1}\mu_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_n^{-1}\mu_n)^{\alpha_n} = \\ =&\lambda^{-\alpha}\mu^\alpha = \\ =&(\lambda^{-\alpha}t^\alpha)h.\end{aligned}$$

Segue che $gt^\alpha = \lambda^{-\alpha}t^\alpha$ e che quindi i t^α sono autovettori per ogni $g \in G$. Poiché

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K}t^\alpha$$

e ogni $\mathbb{K}t^\alpha$ è semisemplice, segue (4.6) che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Quindi le rappresentazioni semplici di G sono di dimensione 1 e sono date da $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}t^{-\alpha}$ con $gz = t^\alpha(g)z$ □

Lemma 4.42. Se $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ allora G è completamente riducibile se e solo se $V^{\otimes n}$ è semisemplice per ogni n

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ovvio

$\boxed{\Longleftarrow}$ La dimostrazione è del tutto analoga a quella esposta per il lemma (4.10). Dimostriamo che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Dato il morfismo $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$ basta mostrare che $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$ è semisemplice. Scriviamo

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}].$$

$\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ è un quoziente di somme di rappresentazioni della forma $(V^*)^{\otimes m}$ e quindi è quoziente di $(V^* \oplus \cdots, \oplus V^*)^{\otimes m}$ e dato che V^* è semisemplice ho finito.

□

Corollario 4.43. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è tale che se $g \in G$ allora $\overline{g} \in G$, allora G è completamente riducibile.

Dimostrazione.
Sia $V = \mathbb{C}^n$ e dimostriamo che $V^{\otimes m}$ è semisemplice per ogni m, cioè che per ogni $U \subseteq V^{\otimes m}$ che sia G-stabile esiste W G-stabile tale che $V^{\otimes m} = U \oplus W$.

Consideriamo il caso $m = 1$. Definiamo la forma hermitiana

$$h((x_i)(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

Se $U \subseteq V$, poniamo $W = U^\perp$ rispetto a questa forma. Chiaramente $V = U \oplus U^\perp$, quindi vogliamo mostrare che U G-stabile implica $U^\perp$ G-stabile.

$$h(gw, u) = \overline{w}^\top \overline{g}^\top u = h(w, \underbrace{\overline{g}^\top u}_{\in U}) \overset{w \in U^\perp}{=} 0.$$

Per il caso generale l'idea è la stessa ma usiamo

$$h_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^{m} h(v_i, u_i).$$

Si conclude usando la tesi per h. $\square$

Esempio 4.44. Sia $G \in \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n), O(n)\}$, allora G è completamente riducibile. Per $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ questo è ovvio. Per $O(n) = \left\{g^\top g = id\right\}$ basta mostrare che se $g^\top g = id$ allora $\overline{g}^\top \overline{g} = id$, ma questo è chiaro.

Anche $SO(n)$ e $S_p(2n)$ hanno questa proprietà, dove

$$S_p(2n) = \left\{g \mid gJg^\top = J\right\}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.45. Sia $\operatorname{char} \mathbb{K} = p = 2$ e consideriamo $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$. Esso ammette una rappresentazione semplice $V = \mathbb{K}^2$. Sia x, y una base di V e consideriamo l'azione data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = ax + by, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y = cx + dy.$$

Consideriamo ora $S^2V = \left\langle X^2, xy, y^2 \right\rangle$. Per questioni di caratteristica 2, $gx^2 = (gx)^2$. Notiamo allora che $W = \left\langle x^2, y^2 \right\rangle$ è una sottorappresentazione di S^2V che non ammette un complementare.

Esercizio 4.46. Se $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$ allora $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ non sono completamente riducibili.

Proposizione 4.47. Se G è completamente riducibile allora G non ha sottogruppi unipotenti normali non banali.

Dimostrazione.
Sia W tale che $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ (definizione di gruppo algebrico lineare).

Sia V una rappresentazione irriducibile di G e sia $U \subseteq G$ un sottogruppo normale unipotente. Poiché $V \neq (0)$ e U unipotente, $V^U \neq 0$ per il corollario (4.24). Poiché U è normale V^U è stabile per G e quindi $V^U = V$, cioè U agisce banalmente su tutte le rappresentazioni irriducibili. Questo mostra che per la mappa $G \to \mathrm{GL}(W)$ si ha che U finisce in $\{id_W\}$ perché G è completamente riducibile, ma questa mappa è iniettiva e quindi $U = \{1_G\}$. □

Definizione 4.48 (Caratteri di un gruppo)**.** Dato un gruppo algebrico G definiamo un **carattere** di G come un omomorfismo di gruppi

$$\alpha : G \to \mathrm{GL}(1) = \mathbb{K}^\times.$$

L'insieme dei caratteri $X(G)$ forma un gruppo abeliano:

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) = \beta(g)\alpha(g) = (\beta\alpha)(g).$$

Teorema 4.49. Sia G un gruppo abeliano connesso completamente riducibile, allora G è un toro algebrico.

Dimostrazione.
Notiamo che ogni elemento di G è semisemplice: se $g \in G$ allora per la decomposizione di Jordan (4.12) si ha $g = su$ con u unipotente in G. Poiché G è abeliano, $\langle u \rangle$ è un suo sottogruppo normale, quindi per la proposizione sopra (4.47) si ha che $\langle u \rangle = \{1_G\}$, cioè $u = 1_G$. Dunque $g = s1_G = s$, cioè g è semisemplice.

Poiché G è abeliano, gli elementi commutano. Dato che ogni elemento è semisemplice (cioè in ogni rappresentazione è diagonalizzabile), si ha che per ogni rappresentazione esiste una base di autovettori dove ogni elemento di G è *simultaneamente* diagonalizzabile. In particolare le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.

Consideriamo allora una decomposizione di $\mathbb{K}[G]$ che rende ogni elemento di G diagonalizzabile

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$$

dove $\mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$ sono le funzioni regolari f tali che $gf = \alpha(g)f$. Notiamo che

$$\alpha(gh)f = (gh)f = g(hf) = g(\alpha(h)f) = \alpha(h)gf = \alpha(h)\alpha(g)f$$

quindi $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$. Questo ci permette di identificare questa decomposizione con

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in X(G)} V_\alpha, \qquad \text{dove } V_\alpha = \{h \in \mathbb{K}[G] \mid gh = \alpha(g)h\}.$$

Per ogni carattere $\alpha \in X(G)$ definiamo $f_\alpha = \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times) \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}) = \mathbb{K}[G]$. Sfruttando il fatto che α è un omomorfismo si ha $f_\alpha \in V_\alpha$, infatti

$$\begin{aligned}(gf_\alpha)(x) =& f_\alpha(g^{-1}x) = \alpha^{-1}(g^{-1}x) = (\alpha(g^{-1}x))^{-1} = \\ =& (\alpha(g)^{-1}\alpha(x))^{-1} = (\alpha(x))^{-1}\alpha(g) = \\ =& \alpha(g)\alpha^{-1}(x) = \\ =& \alpha(g)f_\alpha(x).\end{aligned}$$

Se h ha carattere α, cioè $gh = \alpha(g)h$, allora per ogni $g \in G$

$$\frac{h(1_G)}{f_\alpha(1_G)} = \frac{\alpha(g^{-1})h(1_G)}{\alpha(g^{-1})f_\alpha(1_G)} = \frac{g^{-1}h(1_G)}{g^{-1}f_\alpha(1_G)} = \frac{h(g1_G)}{f_\alpha(g1_G)} = \frac{h(g)}{f_\alpha(g)},$$

cioè h è un multiplo di f_α (in particolare $n_\alpha = 1$ nella scrittura sopra).

Mostriamo che $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$ per qualche n mostrando che è un gruppo abeliano finitamente generato libero da torsione:

$\boxed{\text{fin.gen.}}$ Sappiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata quindi consideriamo dei generatori $f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_m}$. Come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathbb{K}[G]$ è generato da elementi della forma

$$f_{\alpha_1}^{n_1} \cdots f_{\alpha_m}^{n_m},$$

il quale ha carattere $\prod \alpha_i^{n_i}$. Questo mostra che i caratteri $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ sono dei generatori di $X(G)$.

$\boxed{\text{tor.free}}$ EPer assurdo supponiamo $\alpha^N = 1$ ma $\alpha \neq 1$, cioè $\alpha(g)^N = 1$ per ogni $g \in G$. Notiamo che

$$G = \coprod_{\omega \ t.c. \ \omega^N = 1} \{g \mid \alpha(g) = \omega\},$$

ma poiché G è connesso, questa unione disgiunta deve consistere di un solo termine, mostrando che α assume solo il valore 1 contraddicendo le ipotesi.

Abbiamo quindi mostrato che $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$. Sia $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ una sua base. Se scriviamo $x_i = f_{\alpha_i}$ troviamo

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \langle f_\alpha \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus \langle x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

e in questa decomposizione il prodotto è esattamente quello che ci aspetteremmo. Se scriviamo $\alpha = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_n^{m_n}$ allora $f_\alpha = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, dunque abbiamo proprio mostrato che

$$\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{K}[(\mathbb{K}^\times)^n].$$

Essendo sia G che $(\mathbb{K}^\times)^n$ affini questo mostra che sono isomorfi. $\square$

Capitolo 5

Quozienti

5.1 Costruzione dei quozienti

Lemma 5.1. Sia G un gruppo algebrico e H sottogruppo di G, allora

1. Esistono una rappresentazione di dimensione finita V di G e una retta $L \subseteq V$ tali che $H = \operatorname{stab}_G L = \{g \in G \mid g(L) = L\}$
2. Se H è normale allora V si può scegliere in modo che sia somma dei V_α per $\alpha \in X(H)$ e $V_\alpha = \{v \in V \mid h \cdot v = \alpha(h)v\}$.

Dimostrazione.
Mostriamo le due affermazioni

1. Sia $I_H \subseteq \mathbb{K}[G]$ l'ideale che definisce H, allora

$$H = \{g \in G \mid g(I_H) = I_H\}$$

$\boxed{\subseteq}$ Se $g \in H$ e $f \in I_H$ allora $gf(k) = f(g^{-1}k)$, quindi se $k \in H$ allora $g^{-1}k \in H$ e quindi questa funzione vale 0, cioè $gf \in I_H$. L'altra inclusione segue dallo stesso ragionamento fatto su g^{-1}.

$\boxed{\supseteq}$ Se $g^{-1}(I_H) \subseteq I_H$ allora per ogni $f \in I_H$

$$f(g) = \underbrace{(g^{-1}f)}_{\in I_H}(e) = 0$$

cioè $g \in H$.

Consideriamo ora dei generatori $f_1, \cdots, f_m$ per I_H e sia $V_0 \subseteq \mathbb{K}[G]$ una G-sottorappresentazione di dimensione finita che contiene ogni f_i. Consideriamo il sottospazio vettoriale $W_0 = I_H \cap V_0$ e notiamo che

$$H = \{g \in G \mid g(W_0) = W_0\}.$$

$\boxed{\subseteq}$ Ovvio per quanto detto sopra.

$\boxed{\supseteq}$ Se $g(W_0) = W_0$ allora $g(I_H) = I_H$, infatti $g(I_H) \subseteq I_H$ ovvio per costruzione di W_0, l'altra inclusione segue dal fatto che $g(W_0) = W_0 \iff g^{-1}(W_0) = W_0$.

Sia $\dim W_0 = m$. Poniamo

$$V = \bigwedge^m V_0, \quad L = \bigwedge^m W_0 \subseteq \bigwedge^m V_0.$$

Per concludere basta mostrare che

$$H = \{g \in G \mid g(L) = L\}$$

$\boxed{\subseteq}$ Se $g(W_0) = W_0$ allora chiaramente

$$g(L) = g\left(\bigwedge^m W_0\right) = \bigwedge^m g(W_0) = \bigwedge^m W_0 = L.$$

$\boxed{\supseteq}$ Notiamo che se $u_1, \cdots, u_m$ è una base di $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale allora

$$U = \{u \in V \mid u \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_m = 0\}.$$

Fissiamo una base $w_1, \cdots, w_m$ di W_0 e osserviamo che $gw_1, \cdots, gw_m$ è una base di $g(W_0)$. Se $g(L) = L$ allora per definizione

$$\langle gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m \rangle = \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \rangle,$$

quindi per il criterio appena citato si ha che

$$\begin{aligned} W_0 &= \{v \in V \mid v \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid u \wedge gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m = 0\} = g(W_0). \end{aligned}$$

2. Sia $V' = \bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha \subseteq V$ con V di prima. Mostriamo che V' è G-invariante: Se $v_\alpha \in V_\alpha$ per $\alpha \in X(H)$, $h \in H$ e $g \in G$ allora

$$h \cdot (gv_\alpha) = (gg^{-1}hg) \cdot v_\alpha = g(\alpha(g^{-1}hg)v_\alpha) = \alpha(g^{-1}hg)gv_\alpha,$$

cioè gv_α è un autovettore per l'azione di h per un qualsiasi $g \in G$ e $h \in H$, ovvero V' è G-invariante.

Per concludere è dunque sufficiente mostrare che $L \subseteq V'$, ma abbiamo già visto che

$$g(w_1 \wedge \cdots \wedge w_m) = gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m = \lambda(g) w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$$

per qualche $\lambda(g)$ per ogni $g \in H$, quindi $L \subseteq V_\lambda$.

□

Siano $H < G$ e L, V come nel lemma. Allora $L \in \mathbb{P}(V)$ per definizione di spazio proiettivo. Definiamo la varietà proiettiva

$$Y = \overline{G \cdot L} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

e scriviamo $X = G \cdot L$. Mostriamo che X è aperto: data la mappa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Y \\ g & \longmapsto & gL \end{array},$$

per Chevalley (3.17) si ha che X contiene un aperto U di Y. Se $x \in U \subseteq X$ allora $gx \in gU \subseteq X$ quindi

$$X = \bigcup_{g \in G} gU \text{ è aperto.}$$

Insiemisticamente si ha $X = G \cdot L = G/\operatorname{stab}_G(L) = G/H$, quindi prendere la chiusura è in un qualche modo il minimo indispensabile per rendere G/H una varietà.

Esercizio 5.2. Sia $G = \mathrm{GL}(2)$ e $H = B(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$. Sia $V = \mathbb{K}^2$ e $L = \mathbb{K}e_1$, allora effettivamente $H = \mathrm{stab}_G(L)$ e $G \cdot L = \mathbb{P}(V)$ (ogni retta si ottiene da L applicando una trasformazione lineare), quindi $G/H \leftrightarrow \mathbb{P}(V)$.

Esercizio 5.3. Sia $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $H = O(n, \mathbb{C})$. Sia $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ lo spazio delle matrici simmetriche. Se $A \in V$ e $g \in G$ agisce su A tramite

$$g \cdot A = gAg^\top$$

allora $H = \mathrm{stab}_G(I_n)$ (stabilizzatore della matrice identità).

$X = G \cdot I_n = \left\{ gg^\top \mid g \in \mathrm{GL}(n) \right\} = \{A \in \mathrm{Sym}(n) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq \overline{G \cdot I_n} = Y \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Proposizione 5.4. Se H è normale, G/H è un gruppo algebrico affine.

Dimostrazione.
Costruiamo L e $V = \bigoplus V_\alpha$ come nel punto 2. del lemma (5.1). Sia

$$W = \{T : V \to V \mid \forall \alpha \in X(H),\ T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha\}$$

e notiamo che G agisce su W come $gT = g \circ T \circ g^{-1}$. Per rendere valido quanto detto dobbiamo verificare che $gTg^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha$, ma questo segue dal fatto che se $g^{-1}(V_\alpha) = V_\beta$ allora

$$gTg^{-1}(V_\alpha) = gT(V_\beta) \subseteq gV_\beta = V_\alpha.$$

Notiamo ora che

$$\left\{ g \in G \mid g|_W = id_W \right\} = \left\{ g \in G \mid g|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha}\ \forall \alpha \in X(H) \right\} = H,$$

la seconda uguaglianza segue dalla definizione di carattere mentre la prima si ricava osservando le matrici associate agli elementi di g visti come automorfismi di V: gli elementi di W sono diagonali a blocchi e ciò che commuta[1] con tutte le diagonali a blocchi sono le cose che sono multiplo di identità su ogni blocco.

Abbiamo dunque costruito un omomorfismo di gruppi algebrici $\varphi : G \to \mathrm{GL}(W)$ il cui nucleo è H. Poiché $\varphi(G)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(W)$ per Chevalley (3.19) si ha che $G/H \cong \varphi(G)$ eredita la struttura di gruppo algebrico lineare da $\varphi(G)$. $\square$

Osservazione 5.5. Se H è un sottogruppo di G e $\pi \colon G \to X = G \cdot L$, allora π è G-equivariante e induce una bigezione tra G/H e X.

Nel seguito supporremo $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$.

[1] $g|_W = id_W$ significa che per ogni $T \in W$ $gTg^{-1} = T$, cioè $gT = Tg$.

Proposizione 5.6. Se H è un sottogruppo di G e $\pi\colon G \to X$ una mappa H-equivariante, valgono le seguenti proprietà.

1. Per ogni varietà Z, la mappa
$$G \times Z \xrightarrow{(\pi,id)} X \times Z$$
è aperta.

2. Per ogni aperto U di X, si ha un isomorfismo
$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U)))^H.$$

Dimostrazione.
Notiamo che $\pi\colon G \to X$ induce una bigezione insiemistica tra G/H e X. Poiché per ogni varietà Z la mappa $(\pi, id)\colon G \times Z \to X \times Z$ è liscia (π è liscia), tale mappa è anche aperta (2.60).

Sia U un aperto di X, poniamo $V = \pi^{-1}(U)$, e consideriamo la mappa
$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_G(V)^H.$$
Osserviamo che tale mappa è iniettiva, infatti se $f(\pi(x)) = 0$ per ogni x in $V = \pi^{-1}(U)$, si ha $f(y) = 0$ per ogni y in U, per cui $f = 0$.

Mostriamo che la mappa $\pi^{-1}(U) \to U$ è surgettiva. Posso ridurmi al caso U irriducibile:

In G le componenti connesse coincidono con le componenti irriducibili (3.15). Lo stesso vale per X, infatti se G^0 è la componente connessa di 1_G allora da $X = G/H$ troviamo che $X^0 = G^0/H \cap G^0$ è aperto e X è unione finita disgiunta dei traslati di X^0 (G ha finite componenti irriducibili per Noetherianità).

Se U è un aperto di X allora
$$X = X^0 \sqcup g_1X^0 \sqcup \cdots \sqcup g_nX^0 \implies U = U \cap X^0 \sqcup \cdots \sqcup U \cap g_nX^0.$$
Poiché X^0 irriducibile i suoi aperti sono irriducibili, quindi per località della verifica di surgettività sui pullback per aperti di X^0, ci siamo quindi ricondotti al caso X e U irriducibili.

Sia $f : V \to \mathbb{K}$ regolare H-equivariante e consideriamo il grafico $\Gamma(f) \subseteq V \times \mathbb{K}$. Sia g la fattorizzazione
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & U = V/H \arrow[dl, dashed, "g"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$
Decomponiamo V in irriducibili $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_n$ e per irriducibilità di U deve essere il caso che H agisce transitivamente su $\{V_1, \cdots, V_n\}$.

Per il punto 1., $(\pi, id) : G \times \mathbb{K} \to X \times \mathbb{K}$ è una mappa aperta, quindi la restrizione $\psi : V \times \mathbb{K} \to U \times \mathbb{K}$ resta aperta perché $V \times \mathbb{K}$ è un aperto di $G \times \mathbb{K}$. Segue che[2] $\psi(\Gamma(f)) = \Gamma(g)$ è un chiuso di $U \times \mathbb{K}$. In realtà notando che $\Gamma(g)$ è H invariante e che esso è immagine di $\Gamma(f) = \bigsqcup \Gamma(f) \cap V_i$ si ha che in realtà possiamo scrivere $\Gamma(g)$

[2]Se $(v, f(v)) \in \Gamma(f)$ allora $\psi(v, f(v)) = (\pi(v), f(v)) = (\pi(v), g(\pi(v)))$.

solo come immagine di un singolo $\Gamma(f) \cap V_i$, in particolare è irriducible (altrimenti potremmo decomporre V ulteriormente).

Consideriamo ora il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(g) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "q"'] & U \times \mathbb{K} \arrow[d, "p_U"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

dove p_U è la proiezione su U e q è la restrizione a $\Gamma(g)$. Chiaramente q è regolare in quanto composizione di regolari. q è anche bigettiva perché $(u, g(u)) \mapsto u$ può essere facilmente invertita. Poiché U è liscio e $\Gamma(g)$ irriducibile, per il teorema di Zariski (2.57) si ha che q è un isomorfismo, quindi la mappa $u \mapsto (u, g(u))$ un morfismo e in particolare g stesso è un morfismo. Questo mostra che π^* effettivamente è surgettiva perché abbiamo trovato $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tale che $\pi^*(g) = g \circ \pi = f$. $\square$

Teorema 5.7. Per ogni G-varietà Y e per ogni y_0 in Y tale che H è contenuto in $\mathrm{stab}_G(y_0)$, vale la seguente proprietà: se $\varphi \colon G \to Y$ è la mappa definita da $\varphi(g) = gy_0$, allora esiste un'unica $\psi \colon X \to Y$ tale che $\psi \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \arrow[dl, dashed, "\exists! \psi"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione.
Insiemisticamente, la mappa $\psi \colon gH \mapsto gy_0$ è definita. Inoltre ψ è continua: se U è un aperto di Y, allora

$$\psi^{-1}(U) = \pi(\pi^{-1}(\psi^{-1}(U))) = \pi(\varphi^{-1}(U)),$$

che è aperto. Dato un aperto U di Y, verifichiamo che l'immagine della mappa

$$\psi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Set})}(\psi^{-1}(U), \mathbb{K})$$

è contenuta nell'insieme delle funzioni regolari su X. Consideriamo una funzione $f \colon U \to \mathbb{K}$. Allora $\widetilde{f} := f \circ \psi \circ \pi = f \circ \varphi$ è in $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$ in quanto φ è un morfismo di varietà. Mostriamo che in realtà è in $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))^H$. Sia λ in $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$ e sia h in H. Allora per ogni x in G si ha

$$(h\widetilde{f})(x) = \widetilde{f}(xh) = f(\varphi(xh)) = f(xhy_0) = f(xy_0) = f(\varphi(x)) = \widetilde{f}(x).$$

$\square$

Definizione 5.8. Una varietà è **omogenea** rispetto al gruppo G se l'azione di G su X è transitiva.

Corollario 5.9. Se X è una varietà omogenea rispetto a G, allora X è liscia.

Dimostrazione.
Poiché X ha un aperto U di punti lisci, la tesi segue dal fatto che $X = \bigcup_{g\in G} gU$. □

Corollario 5.10. Se X e Y sono varietà omogenee per G e $\varphi\colon X \to Y$ è G-equivariante, allora φ è liscia.

Dimostrazione.
Sicuramente φ è surgettiva, perché X e Y sono varietà omogenee per G e φ è G-equivariante. Per il teorema (2.59) esiste un aperto non vuoto U di Y tale che $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}\colon \varphi^{-1}(U) \to U$ è liscia. Allora si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}(gU) \arrow[r, "\varphi|_{g\varphi^{-1}(U)}"] & gU \\
\varphi^{-1}(U) \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, "\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}"] & U \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Poiché $Y = \bigcup gU$, φ è liscia in ogni punto e quindi è liscia.

□

5.2 Sottogruppi generati e contenimenti

Lemma 5.11. Sia G un gruppo algebrico e siano X_i delle varietà irriducibili. Siano $\varphi_i : X_i \to G$ tali che $1_G \in \operatorname{Imm} \varphi_i$ per ogni i. Poniamo $Y_i = \varphi_i(X_i)$.
Sia $H = \langle \{Y_i\}_i \rangle$ il sottogruppo generato dalle immagini delle φ_i. Allora

1. H è chiuso
2. esistono $i_1, \cdots, i_n$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ tali che

$$H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{i_n}^{\varepsilon_n}, \qquad \varepsilon_j \in \{1, -1\}$$

Dimostrazione.
Supponiamo $X_i = Y_i \subseteq G$ e supponiamo che tra le X_i compaiano anche le X_i^{-1} (così evitiamo gli ε).

Definiamo iterativamente

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1, & W_1 &= \overline{Z_1},\\
Z_2 &= X_1 \cdot X_2, & W_2 &= \overline{Z_2},\\
&\vdots & &\vdots\\
Z_n &= X_1 \cdots X_n, & W_n &= \overline{Z_n},\\
Z_{n+1} &= X_1 \cdots X_n X_1, & W_{n+1} &= \overline{Z_{n+1}}\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Notiamo che Z_i è l'immagine di $X_1 \times \cdots \times X_i \to G$, quindi Z_i è irriducible per ogni i, dunque anche $W_i = \overline{Z_i}$ è irriducibile.

Notiamo ora che $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq G$ è una catena di chiusi, ma dato che G ha dimensione finita essa stabilizza, cioè esiste N tale che $W_N = W_{N+1}$, ovvero $W_N \cdot X_i \subseteq W_N$ per ogni i.

Allora $W_N Z_N \subseteq W_N$ cioè $W_N \cdot W_N \subseteq W_N$ perché W_n è chiuso. Quindi[3] $W_N^{-1} \subseteq W_N$ e in particolare $Z_N^{-1} \subseteq W_N$, ma $Z_N^{-1} = X_N^{-1} \cdots X_1^{-1} = X_{i_1} \cdots X_{i_N}$, cioè mettendo tutto insieme $H \subseteq W_N$

Mostriamo che $W_N = Z_N \cdot Z_N$: abbiamo una mappa

$$\underbrace{X_1 \times \cdots \times X_N}_{irrid.} \to Z_N \to W_N,$$

quindi per Chevalley (3.17) $Z_N \supseteq U$ per U aperto non vuoto di W_N, dunque $U \cdot U = W_N$ perché W_N è irriducibile.

Questo mostra che $W_N \subseteq H$ ma ci sono tutti gli elementi di H quindi effettivamente $H = W_N$. $\square$

Osservazione 5.12 (Dimensione del quoziente)**.** Sia $\varphi : G \to G/H$ e ricordiamo che una mappa di questo tipo è liscia per omogeneità. Allora per il teorema (2.61) abbiamo una successione esatta

$$0 \to T_e H \to T_e G \xrightarrow{d\varphi_e} T_e(G/H) \to 0$$

e sappiamo che $\dim(G/H) = \dim G = \dim H$.

Proposizione 5.13. Supponiamo $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$. Siano $H, K \subseteq G$ sottogruppi connessi, allora

$$H \subseteq K \iff T_e H \subseteq T_e K \text{ in } T_e G.$$

Dimostrazione.
L'implicazione $\implies$ è ovvia quindi basta mostrare l'altra.

Sia $X = H \cdot K \subseteq G$ e notiamo che è omogeneo rispetto all'azione di $H \times K$ data da $(h,k) \cdot g = hgk^{-1}$. Osserviamo che X è aperto in $\overline{X} \subseteq G$ per Chevalley (3.17) (contiene un aperto della chiusura ed è omogeneo in quanto orbita di e). Si ha

$$X \cong \frac{H \times K}{\operatorname{stab}_{H\times K}(e)}.$$

Studiando lo stabilizzatore notiamo che

$$\operatorname{stab}_{H\times K}(e) = \left\{(h,k) \mid hk^{-1} = e\right\} = \{(h,k) \mid h = k\} \cong H \cap K,$$

dunque per il teorema (2.61) abbiamo $\dim X = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$ e una successione esatta

$$0 \to T_e(H \cap K) \to T_e(H \times K) \to T_e X \to 0$$

da cui segue $\dim T_e X = \dim T_e H + \dim T_e K - \dim T_e(H \cap K)$.

[3] $Z_N^{-1} W_N \subseteq W_N \implies Z_N^{-1} \subseteq W_N \implies \overline{Z_N^{-1}} \subseteq W_N$ e $\overline{Z_N^{-1}} = \overline{Z_N}^{-1} = W_N^{-1}$.

Se $T_eX = T_eH + T_eK$ allora

$$\dim(T_eX) = \dim(T_eH + T_eK) \stackrel{T_eH \subseteq T_eK}{=} \dim T_eK,$$

dunque

$$\dim X = \dim T_eX = \dim T_eK = \dim K$$

e quindi $K \subseteq X \subseteq \overline{X}$ con K e $\overline{X}$ irriducibili della stessa dimensione, dunque $K = X = \overline{X}$, e poiché $X = H \cdot K$ questo mostra

$$K = X = H \cdot K \implies H \subseteq K$$

che è la tesi.

Per concludere basta dunque dimostrare che $T_eX = T_eH + T_eK$. Consideriamo la composizione

$$\begin{array}{ccccc} H \times K & \to & H \times K & \to & X \\ (h,k) & \mapsto & (h,k^{-1}) & & \\ & & (h',k') & \mapsto & h'(k'^{-1}) \end{array}$$

che è la mappa di moltiplicazione $\mu|_{H\times K}$. Dal teorema (2.61) ricaviamo una successione esatta

$$0 \to T_e(\mathrm{stab}_{H\times K}(e)) \to \underbrace{T_e(H \times K)}_{T_eH\times T_eK} \to T_eX \to 0$$

In particolare $d\left(\mu|_{H\times K}\right)_{(e,e)}$ è surgettiva, quindi per concludere basta mostrare che

$$d\left(\mu|_{H\times K}\right)_{(e,e)}(\alpha,\beta) = \alpha + \beta.$$

Dato che $G \subseteq \mathrm{GL}(n)$ è sufficiente che la tesi valga per $\mathrm{GL}(n)$ e $d\mu_{(e,e)}$. Notiamo che $\mathrm{Mat}_{n\times n} = T_I\mathrm{GL}(n)$ dove l'identificazione è data da

$$(a_{i,j}) \longleftrightarrow \left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I\right)$$

Traduciamo allora $d\mu_{(e,e)}$ in queste coordinate: se

$$d\mu_{(e,e)} \begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{n\times n} \times \mathrm{Mat}_{n\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n\times n} \\ ((a_{i,j}),(b_{i,j})) & \longmapsto & (c_{i,j}) \end{array}$$

allora

$$\begin{aligned} c_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(x_{i,j}\circ\mu)\bigg|_I &= \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}\left(\sum_\ell y_{i,\ell}z_{\ell,j}\right)\bigg|_I = \\ &= \sum_\ell \frac{\partial}{\partial x_{i,\ell}}(y_{i,\ell})z_{\ell,j}\bigg|_I + \sum_\ell y_{i,\ell}\,\frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(z_{\ell,j})\bigg|_I \stackrel{(\star)}{=} \\ &= \sum_\ell \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,\ell})\bigg|_I \delta_{\ell,j} + \sum_\ell \delta_{i,\ell}\,\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{\ell,j})\bigg|_I = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,j})\bigg|_I + \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j})\bigg|_I = \\ &= a_{i,j} + b_{i,j} \end{aligned}$$

dove il passaggio $(\star)$ segue perché stiamo interpretando quei differenziali come derivazioni. $\square$

5.3 Varietà complete

Definizione 5.14 (Varietà separata)**.** X è **separata** se la diagonale $X \to X \times X$ è un morfismo chiuso.

Supporremo che sia tutto separato.

Definizione 5.15 (Varietà completa)**.** X è **completa** se per ogni Z varietà, $\pi : X \times Z \to Z$ è un morfismo chiuso.

Osservazione 5.16. Se X è irriducibile e completa allora $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$.

Dimostrazione.
Sia $f : X \to \mathbb{K}$ regolare e consideriamo $\Gamma(f) \subseteq X \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Questa proiezione è chiusa quindi $\pi(\Gamma(f)) = f(X)$ è un chiuso irriducibile (immagine di irriducibile) di $\mathbb{K}$. Ma i chiusi irriducibili di $\mathbb{K}$ non vuoti sono o tutto $\mathbb{K}$ o solo un punto.

Consideriamo ora $W = \{(x, y) \in X \times \mathbb{K} \mid yf(x) = 1\}$. Se $f(X) = \mathbb{K}$ allora l'immagine di W tramite la proiezione $X \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ è $\mathbb{K}^\times$, che non è chiuso in $\mathbb{K}$, assurdo.

Quindi $f(X)$ è un solo punto, cioè f è costante. □

Corollario 5.17. Se X è completa, affine e connessa allora $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}$ significa che X è un solo punto $\{(0)\}$.
In generale le affini complete sono un numero finito di punti.

Teorema 5.18 (I proiettivi sono completi)**.** Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\mathbb{P}(V)$ è completa.

Moralmente "completo=compatto" in senso classico, per esempio valgono:

Osservazione 5.19. Se X è completa e $Z \subseteq X$ chiuso allora Z è completo.

Osservazione 5.20. Se $\varphi : X \to Y$ è surgettiva e X è completa allora Y è completa

5.3.1 Punto fisso di Borel

Proposizione 5.21 (Esiste orbita chiusa)**.** Se K è un gruppo che agisce su una varietà Y allora K ha un'orbita chiusa in Y.

Dimostrazione.
Consideriamo un'orbita che ha dimensione minima $Z = G \cdot y$. Notiamo che Gy è un

aperto denso di $\overline{Z}$ per Chevalley (3.17) (contiene un aperto ed è omogeneo), quindi $\dim \overline{Z} \setminus Z < \dim Z$, ma se questa differenza è non vuota allora G agisce su questa differenza e quindi esiste un'orbita di dimensione più piccola.

Dunque $\overline{Z} \setminus Z = \emptyset$, cioè $\overline{Z} = Z$. □

Teorema 5.22 (Punto fisso di Borel)**.** Se G è un gruppo risolubile connesso che agisce su una varietà completa allora G ha un punto fisso.

Dimostrazione.
Se $\dim G = 0$ allora G è un singolo punto e quindi è l'indetità e agisce banalmente.

Supponiamo $\dim G > 0$. Sia $H = [G, G]$ il sottogruppo dei commutatori. Questo è un sottogruppo algebrico connesso. Dato che G è risolubile, $H \subsetneq G$, quindi per ipotesi induttiva $X^H \neq \emptyset$.

Notiamo ora che su X^H agisce $A = G/H$, quindi su X^H abbiamo un'orbita chiusa (5.21) $A \cdot x \subseteq X^H \subseteq X$. Notiamo che $A \cdot x$ è completa perché chiuso di X completa, ma $A \cdot x = A/\operatorname{stab}_A x$, quindi è anche una varietà affine. $A \cdot x$ è anche connessa perché A è connesso in quanto G lo è.

$A \cdot x$ è affine, completa e connessa, quindi è un punto, cioè x è un punto fisso per A in X^H, ma allora x è un punto fisso per G. □

Esempio 5.23. Consideriamo $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^n$ come segue:

$$\lambda \cdot [x_0 : \cdots : x_n] = [x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda^n x_n]$$

Questa azione ha come punti fissi quelli della forma $[0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$.

Ricordiamo che B_n è il sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ costituito dalle matrici triangolari superiori.

Corollario 5.24. Se G è connesso, sono tra loro equivalenti

1. G è risolubile.
2. Le uniche rappresentazioni irriducibili di G sono di dimensione 1.
3. Esiste un intero positivo n tale che G è contenuto in B_n.

Dimostrazione.
Supponiamo G risolubile e mostriamo il punto 1. Sia V una rappresentazione irriducibile di G. Allora $\mathbb{P}(V)^G$ è non vuoto e dunque per il teorema del punto fisso (5.22) esiste una retta ℓ in V tale che $G \cdot \ell = \ell$. Quindi $\ell = V$, da cui $\dim V = 1$.

Mostriamo l'implicazione $2 \Rightarrow 3$. Assumiamo G contenuto in $\mathrm{GL}(V)$ per qualche V. Sia F_1 una sottorappresentazione irriducibile di dimensione 1. Allora G agisce su V/F_1. Allora esiste una retta F_2/F_1 in V/F_1 tale che $GF_2/F_1 \subseteq F_2/F_1$. Procedendo induttivamente, troviamo una bandiera

$$0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_n = V$$

tale che $GF_i = F_i$ con $\dim F_i = i$. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base compatibile con tale bandiera (cioè $v_i \in F_i$ per ogni indice i), allora abbiamo un'immersione $G \hookrightarrow B_n$ definita da $g \mapsto [g]_{\underline{v}}^{\underline{v}}$.

Infine, l'implicazione $3 \Rightarrow 1$ è immediata perché B_n è risolubile. □

5.3.2 Sottogruppi parabolici e di Borel

Definizione 5.25. Sia G un gruppo algebrico e $P \subseteq G$ sottogruppo chiuso.

1. P si dice **parabolico** se G/P è completo
2. $B \subseteq G$ si dice **sottogruppo di Borel** se è un sottogruppo risolubile connesso massimale.

Osservazione 5.26. Se P è un sottogruppo parabolico, $G/P \subseteq \mathbb{P}(V)$ per qualche V.

Dimostrazione.
Ricorda (5.1) che esistono una rappresentazione V di G e una retta $L \subseteq V$ tali che $\operatorname{stab}_G L = P$. Per questa rappresentazione $G/P = G \cdot L \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Notiamo che l'immagine di G/P in $\mathbb{P}(V)$ è chiusa, infatti se Γ è il grafico di $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ allora esso è contenuto in $G/P \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ e per definizione di sottogruppo parabolico G/P è completa.

Questo mostra che G/P è una sottovarietà di $\mathbb{P}(V)$. □

Esempio 5.27. Sia $G = \mathrm{GL}(n)$, $B \subseteq G$ le matrici triangolari superiori, diagonale inclusa.

$$G/B = \{0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = \mathbb{K}^n \mid \dim F_i = i\}$$

Lemma 5.28. G è un gruppo connesso e risolubile se e solo se G non ha sottogruppi parabolici propri.

Dimostrazione.
Diamo le due implicazioni

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sia $P \subseteq G$ parabolico. Per il teorema del punto fisso di Borel (5.22) si ha che G/P ha un punto fisso per G, ma per omogeneità questo significa che G/P consiste di un solo punto, cioè $P = G$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sia $P = G^0$ e mostriamo che G/G^0 è completo, questo basta perché in tal caso G^0 è parabolico e quindi per ipotesi $G^0 = G$.

Per il corollario (5.24) basta dimostrare che le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1: se V irriducibile, G agisce su $\mathbb{P}(V)$ e ha un'orbita chiusa $G \cdot \ell \subseteq \mathbb{P}(V)$ per (5.21). Sia $P = \operatorname{stab}_G(\ell)$, questo gruppo deve essere parabolico perché il quoziente è $G\ell$ orbita chiusa ma allora $P = G$ e per irriducibilità questo mostra $V = \ell$.

□

Teorema 5.29. Sia G un gruppo algebrico.

1. Se B è un sottogruppo di Borel di G, allora B è parabolico.
2. Se B è un sottogruppo di Borel di G e P è un sottogruppo parabolico di G, allora esiste g in G tale che gBg^{-1} è contenuto in P.
3. Tutti i sottogruppi di Borel sono coniugati.

Dimostrazione.
Mostriamo contemporaneamente il primo e il secondo punto.

Osserviamo che è sufficiente mostrare che G^0/B è completo, infatti, se $G = \coprod_i g_i G^0$, allora $G/B = \coprod_i g_i G^0/B$. Possiamo quindi assumere che G sia connesso.

Se G è risolubile, allora per per definizione di sottogruppo di Borel $G = B$ e si conclude. Se G non è risolubile, allora per il lemma (5.28) esiste un sottogruppo parabolico proprio P di G. Possiamo quindi considerare l'azione di B su G/P, la quale ha un punto fisso (5.22), cioè esiste un g in G tale che $gBg^{-1}P = P$, ovvero $gBg^{-1} \subseteq P$. Ciò in particolare mostra il secondo punto.

Possiamo assumere $B \subseteq P \subsetneq G$, per cui B è un sottogruppo di Borel di P. A questo punto procediamo per induzione sulla dimensione di G. Poiché $\dim P < \dim G$, abbiamo che B è un sottogruppo parabolico di P per ipotesi induttiva, quindi P/B è completa e G/P è completa. Avendo mostrato che B è parabolico in P e che P è parabolico in G, per il lemma (5.31) si ha che B è parabolico in G.

Infine, per il terzo punto, siano B, B' due sottogruppi di Borel di G. Allora esiste g in G tale che $gBg^{-1} \subseteq B'$ per il punto 2. Poiché gBg^{-1} e B' sono sottogruppi connessi, risolubili e massimali, concludiamo che $gBg^{-1} = B'$. □

Corollario 5.30. Se $B \subseteq G$ è parabolico, connesso e risolubile allora è di Borel.

Dimostrazione.
Per il punto 2. del teorema (5.29) si ha che B contiene un sottogruppo di Borel, ma essendo connesso e risolubile deve essere già un sottogruppo di Borel per massimalità. □

Lemma 5.31. Siano G un gruppo algebrico, $P \subseteq Q$ due sottogruppi tali che Q è parabolico in G e P è parabolico in Q. Allora P è parabolico in G.

Dimostrazione.
Data una varietà arbitraria Z, mostriamo che la mappa $\pi_Z \colon G/P \times Z \to Z$ è chiusa. Sia A un chiuso in $G/P \times Z$. Sia A' l'immagine inversa di A rispetto la proiezione $\pi_1 \colon G \times Z \to G/P \times Z$. Allora A' è chiuso e $A' \cdot P = A'$. Se mostriamo che $A' \cdot Q = A'$, abbiamo concluso, infatti, considerando la composizione

$$\begin{array}{ccccc} G \times Z & \to & G/Q \times Z & \to & Z \\ A' & \to & A'' & \to & \pi_Z(A) \end{array}$$

l'immagine di A' tramite la prima mappa è un certo A'', che viene mandato in $\pi_Z(A)$. Sia $A''' = A' \cdot Q$. Mostriamo che A''' è chiuso (ciò permette di concludere per quanto appena detto). Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Q \times G \times X & \longrightarrow & G \\ (q, g, x) & \longmapsto & (gq, x) \end{array}$$

Allora $A^{IV} := \varphi^{-1}(A')$ è chiuso ed è stabile per l'azione a destra di P su Q, cioè se (q, g, x) è in A^{IV}, allora (gp, g, x) è in A^{IV}. Infatti se (gq, x) è in A', allora anche (gqp, x) è in A'. Ragionando come prima, abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} Q \times G \times Z & \to & Q/P \times G \times Z & \to & G \times Z \\ A^{IV} & \to & \text{imm chiusa} & \to & A^{V} \text{chiuso} \end{array}$$

dove

$$A^V = \{(g,x) \in G \times X \colon \exists\, q \in Q,\ (gq,x) \in A'\} = A' \cdot Q.$$

A questo punto $A' \cdot Q$ è chiuso e concludiamo come prima. $\square$

Con tecniche simili, è possibile mostrare il seguente risultato.

Teorema 5.32. Se G è un gruppo algebrico connesso, B un sottogruppo di Borel di G e P un sottogruppo parabolico di G, allora

1. $N_G(B) = B$ e $N_G(P) = P$.
2. P è connesso.

Sia $\mathscr{B}$ la famiglia dei sottogruppi di Borel di un gruppo algebrico G. Allora G agisce per coniugio (e transitivamente) su $\mathscr{B}$. Per il Teorema (5.32) abbiamo $\mathrm{stab}_G(B) = N_G(B) = B$, da cui deduciamo il seguente risultato.

Corollario 5.33. Sia B un sottogruppo di Borel di un gruppo algebrico G. Esiste una corrispondenza biunivoca tra la famiglia $\mathscr{B}$ e il quoziente G/B, data da

$$\begin{array}{ccc} G/B & \longrightarrow & \mathscr{B} \\ gB & \longmapsto & gBg^{-1}. \end{array}$$

5.4 Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici

Citiamo il seguente teorema per la sua utilità in alcuni degli esempi:

Teorema 5.34 (Witt)**.** Se V spazio vettoriale, b forma simmetrica non degenere, W_1, W_2 sottospazi di V e $\varphi : W_1 \to W_2$ isomorfismo che preserva b, allora φ si estende a V e continua a preservare b.

5.4.1 Matrici invertibili

Fissiamo $G = \mathrm{GL}(n)$.

Esempio 5.35 (Borel di $\mathrm{GL}(n)$ sono le matrici triangolari)**.** Consideriamo il sottogruppo B_n di G. Sappiamo che B_n è connesso e risolubile. Mostriamo che è massimale (e quindi un sottogruppo di Borel).

Sia H un sottogruppo risolubile connesso contenente B_n. Essendo risolubile e connesso, H si triangolarizza rispetto a una bandiera $F_1 \subset \ldots \subset F_n$. Poiché $H \cdot F_i = F_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha anche $B \cdot F_i = F_i$ per ogni indice i. Poiché B_n è lo stabilizzatore in G della bandiera $F_1 \subset \ldots \subset F_n$, si ottiene $H = B_n$.

Esempio 5.36 (Sottogruppi parabolici di $\mathrm{GL}(n)$)**.** Abbiamo visto che se P è un sottogruppo di G contenente B_n, allora P è un sottogruppo parabolico di G. Se P è il sottogruppo costituito dalle matrici triangolari superiori con blocchi sulla diagonale di tipo $h \times h$ e $k \times k$, sappiamo che G/P è in corrispondenza biunivoca con $\mathrm{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$, sulla quale G agisce transitivamente e per cui $\mathrm{stab}_G \langle e_1, \ldots, e_h \rangle = P$. Quindi $\mathrm{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$ è una varietà proiettiva. Vogliamo descrivere una sua immersione esplicita in $\mathbb{P}(V)$ per qualche spazio vettoriale V. Per farlo, dobbiamo trovare uno spazio vettoriale V contenente una retta L fissata da P. Consideriamo $V = \bigwedge^h (\mathbb{K}^n)$ e $L = \bigwedge^h W$, dove W è il sottospazio generato da $e_1, \ldots, e_h$. Abbiamo già visto che, fissato g in G, si ha $gL = L$ se e solo se $gW = W$. Quindi $\mathrm{stab}_G L = \mathrm{stab}_G W = P$. Dunque

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r] & \bigwedge^h U \\
gW & \mathrm{Gr}(h, \mathbb{K}^n) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{P}(V) \\
 & G/P \arrow[r] & \mathbb{P}(v) \\
g \arrow[uu] \arrow[rr] & & gL = \left(g \bigwedge^h W\right) = \left(\bigwedge^h gW\right)
\end{tikzcd}
$$

Descriviamo questa mappa in coordinate. Presa

$$U = \big(v_1 | \ldots | v_h\big) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_h = \sum_{i_1 < \ldots < i_h} p_{i_1, \ldots, i_h} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_h}$$

dove $p_{i_1, \ldots, i_h}$ è il determinante del minore di $(v_1 | \ldots | v_h)$ identificato dalle righe $i_1, \ldots, i_h$ e

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_h = \det(v_1 | \ldots | v_h) e_1 \wedge \ldots \wedge e_h.$$

Quindi si ha

$$U = \langle v_1, \ldots, v_h \rangle \longrightarrow [p_I(v_1, \ldots, v_h)]_{I = \{i_1 < \ldots < i_h\}}$$

Se $U = \langle w_1, \ldots, w_h \rangle$, allora esiste una matrice invertibile A di taglia h tale che $MA = N$, dove $N = (w_1 | \ldots | w_h)$. Si ha

$$
\begin{aligned}
p_I(M) &= \det(M_{i_1, \ldots, i_h}) \\
p_I(N) &= \det(N_{i_1, \ldots, i_h}) = \det(M_{i_1, \ldots, i_h} \cdot A) = p_I(M) \det(A).
\end{aligned}
$$

Infine $(v) \longrightarrow [p_I(M)]$ e $(w) \longrightarrow [p_I(N)] = [p_I(M) \det(A)] = [p_I(M)]$.

5.4.2 Matrici ortogonali speciali

Ora consideriamo $G = \mathrm{SO}(n)$. Cerchiamo di capire come è definito questo gruppo

$\boxed{n = 1}$ $G = \{1\}$.

$\boxed{n = 2}$ Scegliamo la forma quadratica $q(x, y) = xy$. Lo stabilizzatore di tale forma è dato da

$$\left\{ A \in \mathrm{SO}(2) \colon A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Imponendo che A sia nello stabilizzatore della forma q, si trova $b = c = 0$. Poiché $\det(A) = 1$, troviamo $d = a^{-1}$ e quindi $\mathrm{SO}(2)$ è isomorfo a $\mathbb{K}^\times$.

$\boxed{n = 3}$ Mostriamo che

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SL}(2)/\{\pm I\}.$$

Proposizione 5.37. $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SL}(2)/\{\pm I\}$.

Dimostrazione.
Sappiamo che $\mathrm{SL}(2)$ agisce su $W := \mathbb{K}^2$. Consideriamo la rappresentazione $W \otimes W = S^2W \oplus \bigwedge^2 V$. Consideriamo la forma bilineare e simmetrica

$$b(u \otimes u', v \otimes v') = \det(u, v) \det(u', v').$$

Tale forma è $\mathrm{SL}(2)$-invariante, infatti, se g è in $\mathrm{SL}(2)$, allora $\det(g) = 1$ e quindi

$$\begin{aligned} b(gu \otimes gu', gv \otimes gv') =& \det(gu, gv) \det(gu', gv') = \\ =& \det(g)^2 b(u \otimes u', v \otimes v') = \\ =& b(u \otimes u', v \otimes v'). \end{aligned}$$

Fissiamo una base $e_{11} = e_1 \otimes e_1$, $e_{12} = e_1 \otimes e_2$, $e_{21} = e_2 \otimes e_1$, $e_{22} = e_2 \otimes e_2$. Allora

$$[b]_{e_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare b è non degenere. Inoltre, anche la restrizione $\beta := b|_{S^2W}$ è non degenere, in quanto $S^2W = \langle e_{11}, e_{22}, e_{12} + e_{21} \rangle$. Abbiamo quindi definito una mappa

$$\mathrm{SL}(2) \to \mathrm{SO}(\beta).$$

Imponendo $ge_{11} = e_{11}$ e $ge_{22} = e_{22}$, troviamo $g = \pm I$, quindi abbiamo un'immersione $\mathrm{SL}(2)/\{\pm I\} \hookrightarrow \mathrm{SO}(\beta)$. Mostriamo che è suriettiva. Osserviamo che $\mathrm{GL}(2)$ è isomorfo (come varietà) a $\mathrm{SL}(2) \times \mathbb{K}^\times$ tramite la mappa $(A, \lambda) \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi $\dim \mathrm{SL}(2) = 3$. Calcoliamo la dimensione di $\mathrm{SO}(\beta)$ (e in generale di $\mathrm{SO}(n)$). Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{n\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n\times n} \\ A & \longmapsto & A^tA \end{array}.$$

Allora $\mathrm{O}(n) = \varphi^{-1}(I)$. Quindi abbiamo una mappa tra gli spazi tangenti a I data da

$$T : \begin{array}{ccc} T_I \mathrm{Mat}_{n\times n} & \longrightarrow & T_I \mathrm{Mat}_{n\times n} \\ B & \longmapsto & B + B^t \end{array}$$

Quindi $T_I \mathrm{O}(n) = \ker T$. Quindi $\dim \mathrm{SO}(n) = \binom{n}{2}$ e in particolare $\dim \mathrm{SO}(3) = 3 = \dim \mathrm{SL}(2)$. Inoltre, il quoziente $\mathrm{SL}(2)/\{\pm I\}$ coincide con la componente connessa di $\mathrm{SO}(\beta)$, quindi è sufficiente mostrare che $\mathrm{SO}(\beta)$ (e più in generale $\mathrm{SO}(n)$) è connesso.

Procediamo per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ e $n = 2$ sappiamo già che ciò è vero. Assumiamo $n > 2$. Consideriamo la forma quadratica standard rappresentata dalla matrice identità, consideriamo e_1 in $\mathbb{K}^n$ e

$$Y := \mathrm{SO}(n) \cdot e_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \right\}$$

Poiché il polinomio $x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$ è irriducibile, la varietà Y è connessa. Inoltre si ha $Y \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$, che, in quanto connesso, ci permette di concludere. $\square$

Ricordiamo che $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SL}(2)/\{\pm I\}$. Sia

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{SL}(2)$$

Notiamo che $\mathrm{SL}(2)$ agisce su $\mathbb{P}^1$ transitivamente e che lo stabilizzatore di $[e_1]$ è B.

Più precisamente, sia $V = \mathbb{K}^2$ e $L = [e_1] \in \mathbb{P}(V)$. Poniamo

$$W = S^n\mathbb{K}^2 = S^nV$$

e, notando che $e_1^n \in W$, si ha $\mathrm{stab}_G[e_1^n] = B$.

Possiamo descrivere il quoziente anche come

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1 \cong G/B = G[e_1^n] \subseteq \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(S^nV)$$

dove l'immersione è data da $v \mapsto v^n$. Questa mappa è un morfismo equivariante e una immersione chiusa $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$.

Osservazione 5.38. Se $n = 2$ allora

$$\mathrm{SO}(3)/B_{\mathrm{SO}(3)} = \frac{\mathrm{SL}(2)/\pm id}{B_{\mathrm{SL}}/\pm id} = \frac{\mathrm{SL}(2)}{B_{\mathrm{SL}}}.$$

Lo spazio $V = \mathbb{K}^2$ non è una rappresentazione di $\mathrm{SO}(3)$ perché $-id$ non agisce banalmente, ma S^2V è una rappresentazione di $\mathrm{SO}(3)$.

Esempio 5.39. Consideriamo la forma quadratica $x_1x_3 = x_2^2$, lo spazio $V = \mathbb{K}^3$ e la retta $L = \mathbb{K}(1\ 0\ 0)^\top$. In $\mathbb{P}(V)$ si ha che $G \cdot L$ è la quadrica $Q : x_1x_3 = x_2^2$ per il teorema di Witt (5.34).

Notiamo anche che $\mathrm{stab}(L) = B$, quindi abbiamo una mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Q \\ [a:b] & \longmapsto & [a^2 : ab : b^2] \end{array}.$$

5.4.3 Matrici del gruppo lineare speciale

Sia $G = \mathrm{SL}(n)$ e ricordiamo che il sottogruppo delle matrici triangolari superiori B è un sottogruppo di Borel.

$$G/B \cong \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}$$

Definizione 5.40. Definiamo la **varietà delle bandiere** di taglia n come

$$\mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}(n)} = \mathrm{SL}(n)/B_{\mathrm{SL}(n)} = \mathscr{F}\ell = \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}.$$

Vogliamo un risultato analogo per $\mathrm{SO}(n)$

Osservazione 5.41. Se consideriamo la forma quadratica $q = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ e interseco $\mathrm{SO}(n) = \{A \mid A^\top A = I, \det A = 1\}$ con $B_{\mathrm{SL}(n)}$ troviamo

$$T^\top T = I \quad e \quad T \text{ triangolare superiore} \implies T \text{ diagonale con entrate } \pm 1.$$

Consideriamo la forma quadratica associata a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $SO(n) = \{A \mid AJA^\top = J, \ \det A = 1\}$.

Proposizione 5.42. Il sottogruppo di questo $\mathrm{SO}(n)$ dato da

$$B = B_{\mathrm{SO}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, \ (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), \ A \text{ triang. sup.} \right\},$$

dove M^{at} indica la trasposta di M rispetto all'altra diagonale, è un sottogruppo di Borel.

Dimostrazione.
Assumiamo $n = 2m$, il caso dispari è simile.

Notiamo che $Jg^\top J = g^{at}$, cioè la trasposta di g rispetto all'altra diagonale. Scrivendo g triangolare superiore evidenziando blocchi di dimensione m troviamo

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Poiché $g \in SO(n)$ significa che $gg^{at} = id$ con determinante 1, g triangolare superiore appartiene a $\mathrm{SO}(n)$ se

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{at} & B^{at} \\ 0 & A^{at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^{at} & AB^{at} + BA^{at} \\ 0 & DA^{at} \end{pmatrix}$$

ovvero se $D = (A^{at})^{-1}$ e $(BA^{at})^{at} = -(BA^{at})$. Il determinante di g è automaticamente 1 perché[4] $\det D = (\det A)^{-1}$. Dunque l'intersezione tra $\mathrm{SO}(n)$ e le triangolari superiori è

$$B = B_{\mathrm{SO}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, \ (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), \ A \text{ triang. sup.} \right\}.$$

Notiamo che B_{SO} è risolubile e connesso[5]. Se dimostriamo che B è parabolico allora è un sottogruppo di Borel per (5.30).

Sia $\mathscr{E}$ la bandiera data dai vettori di base

$$E_1 = \langle e_1 \rangle \subseteq E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \cdots \subseteq E_n = \langle e_1, \cdots, e_{2m} \rangle = \mathbb{K}^n.$$

[4] $\det M^{at} = \det(JM^\top J) = 1 \cdot \det M^\top \cdot 1 = \det M$.
[5] connesso perché immagine di {triang.sup.invertibili} $\times$ {antisimmetriche per l'altra diagonale}

Notiamo che $\mathrm{stab}_{\mathrm{GL}(n)}(\mathscr{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)}$ e che $\mathrm{stab}_{O(n)}(\mathscr{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)} \cap O(n) = B_{O(n)} = B_{\mathrm{SO}(n)}$, dove l'ultima uguaglianza segue perché tutte le matrici ortogonali triangolari superiori per la forma associata a J hanno già determinante 1. Notiamo che

$$O(n)\mathscr{E} \subseteq \left\{0 = F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_{2m} \mid \dim F_i = i,\ F_{m-i}^{\perp} = F_{m+i}\ \forall i \in \{0, \cdots, m\}\right\} \subseteq \mathscr{F}\ell.$$

Per il teorema di Estensione di Witt (5.34) si ha che $O(n)\mathscr{E}$ è esattamente lo spazio delle bandiere di quella forma, che chiamiamo $\mathscr{F}_O$ e notiamo che è un chiuso di $\mathscr{F}\ell$.

Vogliamo dimostrare che $\mathscr{F}_{\mathrm{SO}}$ è chiuso. Sia

$$\mathscr{G}_O = \{g \in \mathrm{GL}(n) \mid gB_{\mathrm{GL}} \in \mathscr{F}_O\}$$

Poiché $\mathscr{F}\ell = \mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}}$ basta mostrare che $\mathscr{G}_O$ è chiuso. Sia $g = (v_1 \mid \cdots \mid v_{2m})$ e notiamo che $g \in \mathscr{G}_O$ se $b(v_i, v_j) = 0$ per $i, j \leq m$, $b(v_{m+\alpha}, v_i) = 0$ per $i \leq m - \alpha$ e $b(v_i, v_j) = 0$ se $i + j \leq 2m$. Queste sono condizioni chiuse quindi $\mathscr{G}_O$ è chiuso. Questo mostra che

$$O(n)/B_{\mathrm{SO}(n)}$$

è proiettivo. □

Osservazione 5.43. Con le notazioni di sopra,

$$O(n) = \frac{\mathrm{SO}(n) \sqcup g\,\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}(n)}}$$

per una qualsiasi g tale che $\det g = -1$, $g \in O(n)$, dunque

$$\frac{O(n)}{B_{\mathrm{SO}}} = \frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}} \sqcup g \frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}}$$

e quindi $\frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}}$ è proiettivo.

Esempio 5.44 (Parabolici di $\mathrm{GL}(n)$)**.** Sia $P \supseteq B$ con P parabolico e B di Borel, P connesso.

Guardiamo T_eP e notiamo che $T_eP \supseteq T_eB = \{\text{triang.sup.}\}$. Sia $A = (a_{i,j}) \in T_eP$. Si ha che B agisce per coniugio su P. In particolare se fissiamo $b \in B$ allora definiamo

$$AD_b : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ p & \longmapsto & bpb^{-1} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad Ad_b : \begin{array}{ccc} T_eP & \longrightarrow & E_eP \\ C & \longmapsto & bCb^{-1} \end{array}$$

quindi $T_eP \subseteq T_e\mathrm{GL}(n) = \mathrm{Mat}_{n\times n}$ è stabile per Ad_b per ogni $b \in B$. Se $b = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ allora

$$Ad_b(A) = \left(\lambda_i \lambda_j^{-1} a_{i,j}\right)$$

se $a_{i,j} \neq 0$ allora $E_{i,j} \in T_eP$