Gruppi algebrici lineari

Esercizi per l'esame.

Francesco Sorce

3 dicembre

Notazione

Notazione. Chiamiamo M il punto chiuso di $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]]$ e O il punto generico. Con *val* intendo la valutazione su $\mathbb{C}((t))$ indotta dal fatto che $\mathbb{C}[[t]]$ è un DVR.

Esercizio 2

Per ogni n sia

$$g_n(t) = \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix}.$$

Mostrare che $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}((t))) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])\ g_n(t)\ \ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$.

Soluzione.
Sia $b(t) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}((t)))$ e sia $-n$ il minimo tra le valutazioni dei coefficienti. Scrivendo $b(t) = t^{-n}t^n b(t)$ notiamo che $t^n b(t) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}[[t]])$ e che $\det(t^n b(t)) = t^{2n}$.

Scriviamo $t^n b(t) = \left(\begin{smallmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t)\end{smallmatrix}\right)$. Sia t^m il massimo comune divisore di $b_{11}(t)$ e $b_{12}(t)$ e scriviamo $t^m = \alpha(t)b_{11}(t) + \gamma(t)b_{12}(t)$. Notiamo che $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$ hanno massimo comune divisore 1 perché altrimenti l'equazione sopra non avrebbe senso. Questo significa che $1 = \alpha(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma(t)$ ha soluzione. Consideriamo

$$M(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t^{-m}(b_{11}(t)\beta(t) + b_{12}(t)\delta(t)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & -t^{-m}b_{12}(t) \\ \gamma(t) & t^{-m}b_{11}(t) \end{pmatrix}$$

e notiamo che

$$t^n b(t)M(t) = \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ b'_{21}(t) & b'_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $M(t) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$.

Se ora consideriamo la trasposta otteniamo

$$M(t)^\top t^n b(t)^\top = \begin{pmatrix} t^m & b'_{21}(t) \\ 0 & b'_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Con un procedimento identico a prima possiamo definire $M'(t) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$ tale che

$$M(t)^\top t^n b(t)^\top M'(t) = \begin{pmatrix} t^{m'} & 0 \\ b''_{21}(t) & b''_{22}(t) \end{pmatrix}$$

con $t^{m'}$ il massimo comune divisore di t^m e $b'_{21}(t)$.

Iterando questo processo notiamo che la successione degli esponenti della prima entrata nella matrice è decrescente e contenuta in $\mathbb{N}$, dunque stabilizza. Supponiamo dunque di aver trovato $N(t), N'(t) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$ tali che[1]

$$N(t)t^n b(t)N'(t) = \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ u(t)t^m & b_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando a sinistra per $\widetilde{M}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -u(t) & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$ troviamo

$$\widetilde{M}(t)N(t)t^n b(t)N'(t) = \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ 0 & b_{22}(t) \end{pmatrix}$$

e dato che il determinante è rimasto t^{2n} per tutto il processo si ha che $b_{22}(t) = t^{2n-m}$.

[1] ho ridefinito la notazione per semplicità.

Se $m > 2n - m \iff m > n$, moltiplichiamo a sinistra per $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e a destra per $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in modo da scambiare tra di loro le entrate diagonali moltiplicando per elementi di $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$. Abbiamo dunque mostrato che esistono $A(t), B(t) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}[[t]])$ tali che

$$A(t)t^n b(t)B(t) = \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{2n-m} \end{pmatrix}$$

con $m \leq n$. Adesso moltiplichiamo per t^{-n} trovando

$$A(t)b(t)B(t) = \begin{pmatrix} t^{-(n-m)} & 0 \\ 0 & t^{n-m} \end{pmatrix} = g_{n-m}(t),$$

quindi la tesi segue moltiplicando a sinistra per $A(t)^{-1}$ e a destra per $B(t)^{-1}$. $\square$

Esercizio 3

Consideriamo una azione $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \curvearrowright V$. Sia $x \in V$. Sia $\operatorname{orb} x$ l'orbita di x per questa azione. Mostare che $\operatorname{orb} x$ è chiusa se e solo se per ogni omomorfismo $b : \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(2)$ tale che il limite $\lim_{t \to 0} b(t)x = y$ esiste si ha che $y \in \operatorname{orb} x$.

Soluzione.
Sia $b : \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(2)$ un omomorfismo tale che la mappa indotta $\mathbb{G}_m \to V$ ammette una estensione $f : \mathbb{A}^1 \to V$, cioè tale che il limite $\lim_{t \to 0} b(t)x = f(0)$ esiste. Per continuità $f^{-1}(\overline{\operatorname{orb} x})$ è un chiuso di $\mathbb{A}^1$ e contiene $\mathbb{G}_m$, quindi $f^{-1}(\overline{\operatorname{orb} x}) = \mathbb{A}^1$ e in particolare il limite $f(0)$ appartiene a $\overline{\operatorname{orb} x}$.

Se $\operatorname{orb} x$ è chiusa questo mostra la prima implicazione. Resta dunque da mostrare l'altra implicazione. Seguiamo i passi suggeriti:

I Sia $y \in \overline{\operatorname{orb} x} \setminus \operatorname{orb} x$ e sia $b : \operatorname{Spec} \mathbb{C}((t)) \to \mathrm{SL}(2)$ tale che $\lim_{t \to 0} b(t)x = y$, cioè tale che esista un morfismo $f : \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]] \to V$ con $f(O) = b(t)x$ e $f(M) = y$.

II Usando l'**Esercizio 2** scriviamo $b(t) = c(t)g_n(t)d(t)$.

Osserviamo che f induce un morfismo[2] $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]] \to V_{\mathbb{C}[[t]]}$ per proprietà universale del prodotto fibrato (il secondo morfismo è l'identità di $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]]$). Seguendo il diagramma otteniamo un nuovo morfismo $g : \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]] \to V$ che se ristretto a $O = \operatorname{Spec} \mathbb{C}((t))$ restituisce $c(t)^{-1}c(t)g_n(t)d(t)x = g_n(t)d(t)x$.

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathbb{C}[[t]]} \arrow[r] & V \\
V_{\mathbb{C}[[t]]} \arrow[u, "c(t)^{-1}\cdot"] \arrow[r] & V \\
& \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted] \arrow[uu, bend right, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Questo mostra che il limite $\lim_{t \to 0} g_n(t)d(t)x = g(M)$ esiste. Questo in particolare significa che tutte le entrate del vettore $g_n(t)d(t)x$ appartengono $\mathbb{C}[[t]]$ e quindi possiamo valutare queste entrate in $t = 0$. Dato che valutare le entrate di $c(t)g_n(t)d(t)x$ in $t = 0$ restituisce le entrate di y segue che[3]

$$g(M) = (g_n(t)d(t)x)(0) = c(0)^{-1}y \in \operatorname{orb} y \subseteq \overline{\operatorname{orb} x} \setminus \operatorname{orb} x.$$

[2] $V_{\mathbb{C}[[t]]} = V \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]]$ è il cambiamento di base.
[3] $\overline{\operatorname{orb} x}$ e $\operatorname{orb} x$ sono G-invarianti perché l'azione è regolare e quindi compatibile con la topologia di Zariski.

Dunque a meno di sostituire y con $c(0)^{-1}y$ possiamo supporre $c(t) = 1$.

III Osserviamo che $d(t) = d(t)d(0)^{-1}d(0)$ e che $(d(t)d(0)^{-1})(0) = 1$. Se sostituiamo x con $d(0)x$ e $d(t)$ con $d(t)d(0)^{-1}$ allora $\overline{\operatorname{orb} x}$ e $\operatorname{orb} x$ non cambiano e $\lim_{t\to 0} g_n(t)d(t)x = y$ mantiene la stessa forma ma adesso $d(0) = 1$.

IV Supponiamo che $d(0) = 1$ e che $\lim\limits_{t\to 0} g_n(t)d(t)x = y$. Dividiamo la dimostrazione in tre punti: mostriamo che $\lim\limits_{t\to 0} g_n(t)x = z$ esiste, che l'esistenza del limite $\lim_{t\to 0} g_n(t)x$ su $\operatorname{Spec}\mathbb{C}((t))$ implica l'esistenza dello stesso limite su $\mathbb{G}_m$ e che $z \in \overline{\operatorname{orb} y}$.

(a) Osserviamo che $\mathbb{G}_m$ agisce su V se poniamo $t \cdot v = g_n(t)v$. Per quanto visto sulle azioni dei tori questo significa che V si decompone come segue:

$$V = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} V_r, \qquad V_r = \{v \in V \mid g_n(\lambda)v = \lambda^r v\}.$$

Per il resto del punto (a) fissiamo una base $\{e_1, \cdots, e_{\dim_{\mathbb{C}} V}\}$ di V che rispetta questa decomposizione. Osserviamo che, componendo con $\operatorname{Spec}\mathbb{C}((t)) \to \mathbb{G}_m$, si ha che se $v(t) \in V(\mathbb{C}((t)))$ e $v(t) = \sum v(t)_i e_i$ è la scrittura nella base sopra allora

$$g_n(t)v(t) = \sum t^{r_i} v(r)_i e_i$$

dove $r_i \in \mathbb{Z}$ è tale che $e_i \in V_{r_i}$.
Dato che $d(0)x = x$, scriviamo $d(t)x = x + \varepsilon(t)$ dove $\varepsilon(t) \in V(\mathbb{C}[[t]])$ è tale che la valutazione in $t = 0$ restituisce 0. Con una idea simile scriviamo

$$y + \delta(t) = g_n(t)(x + \varepsilon(t)) = \sum \left(t^{r_i}x_i + t^{r_i}\varepsilon(t)_i\right) e_i$$

Valutando in $t = 0$ sappiamo che il membro di sinistra è ben definito, dunque per ogni i deve essere il caso che $t^{r_i}x_i + t^{r_i}\varepsilon(t)_i \in \mathbb{C}[[t]]$. Sapendo anche che $\varepsilon(0) = 0$ osserviamo che $\varepsilon(t)_i$ ha termine costante nullo. Se $x_i \neq 0$ osserviamo che $r_i \geq 0$, perché se così non fosse allora ci sarebbe un addendo con valutazione negativa che non può essere cancellato (perché $val(t^{r_i}\varepsilon(t)_i) \geq r_i + 1$) e quindi $t^{r_i}x_i + t^{r_i}\varepsilon(t)_i$ non sarebbe un elemento di $\mathbb{C}[[t]]$.
Osserviamo che questo significa che $t^{r_i}x_i \in \mathbb{C}[[t]]$ e quindi

$$g_n(t)x = \sum t^{r_i}x_i e_i \in V(\mathbb{C}[[t]]),$$

cioè il limite $\lim_{t\to 0} g_n(t)x = z$ esiste (e in particolare $z = \sum_{r_i=0} x_i e_i$).

(b) Consideriamo l'omomorfismo $\mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(2)$ che sui $\mathbb{C}$ punti associa $g_n(\lambda)$ a λ. Questo induce un morfismo $\mathbb{G}_m \to V$ dato da $t \mapsto g_n(t)x$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
V & & \\
& & \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t^{\pm 1}] \arrow[ull, bend right] \\
& \operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]] \arrow[uul, rightsquigarrow] & \operatorname{Spec}\mathbb{C}((t)) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[uull, dashed]
\end{tikzcd}$$

dove il morfismo tratteggiato è quello indotto per restrizione, che è però anche il morfismo $\operatorname{Spec}\mathbb{C}((y)) \to V$ definito da $g_n(t)x$, quindi questo si estende a $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]] \to V$ (morfismo ondulato, il valore in M è lo z del passo precedente).

Passando al diagramma di $\mathbb{C}$-algebre associato (e inserendo $\mathbb{C}[t]$)

$$\begin{tikzcd}
SV^* \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \mathbb{C}[t] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \arrow[d] \\
& \mathbb{C}[[t]] \arrow[r] & \mathbb{C}((t))
\end{tikzcd}$$

notiamo che l'immagine di un polinomio $p \in SV^*$ in $\mathbb{C}((t))$ deve appartenere all'intersezione di $\mathbb{C}[[t]]$ e $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$, cioè a $\mathbb{C}[t]$. Questo mostra che effettivamente il morfismo $\mathbb{G}_m \to V$ si estende a $\mathbb{A}^1 \to V$ (con valore z in $0 \in \mathbb{A}^1$) e quindi abbiamo trovato un omomorfismo $g_n : \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}(2)$ tale che $\lim_{t\to 0} g_n(t)x = z$ esiste.

(c) Dato che V è uno spazio affine, $\overline{\operatorname{orb} y} = V(I)$ per qualche ideale di SV^*. Essendo l'azione di $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ su V una rappresentazione regolare, SV^* è una rappresentazione regolare di $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. I è un sottospazio $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-invariante di questo anello di polinomi dunque è esso stesso una rappresentazione regolare. Sia H una sottorappresentazione di I di dimensione finita che contiene dei generatori di I come ideale. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \operatorname{Spec} SH = H^*$. Abbiamo una mappa canonica $\varphi : V \to W$ data da $v \mapsto (h \mapsto h(v))$. Per definizione una base di H è in particolare un insieme di generatori per I, quindi $\varphi(v) = 0$ se e solo se $h_i(v) = 0$ per $\{h_i\}$ base di H se e solo se $v \in V(H) = V(I) = \overline{\operatorname{orb} y}$. In particolare la fibra di 0 rispetto a φ è esattamente $\overline{\operatorname{orb} y}$, quindi il nostro obiettivo è mostrare che $\varphi(z) = 0$.

Abbiamo visto che $V \to W$ è $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-equivariante se e solo se $SH \to SV^*$ lo è, ma lo è perché questa mappa è una inclusione di sottoalgebre. Per lo stesso motivo è anche $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}((t)))$-equivariante (se tensorizziamo tutto con $\mathbb{C}((t))$).

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\mathbb{C}((t)) \arrow[r, "g_n(t)d(t)x"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "g_n(t)d(t)\varphi(x)"] & V \arrow[r, "\varphi"'] & W \\
\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

dove per la freccia in alto stiamo usando la $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}((t)))$-invarianza per dire $\varphi(g_n(t)d(t)x) = g_n(t)d(t)\varphi(x)$. Dunque

$$0 = \varphi(y) = \lim_{t\to 0} g_n(t)d(t)\varphi(x).$$

Scegliendo una base di W che diagonalizza $g_n(t)$ come nel passo (a), questa equazione significa che se $(d(t)\varphi(x))_i \neq 0$ allora $r_i > 0$. Notando che $d(t)\varphi(x) = \varphi(x) + \widetilde{\varepsilon}(t)$ dove le coordinate di $\widetilde{\varepsilon}(t)$ hanno valutazione strettamente positiva questo mostra che se $(\varphi(x))_i \neq 0$ allora $r_i > 0$. Questo mostra che $\lim_{t\to 0} g_n(t)\varphi(x) = 0$, ma

$$g_n(t)\varphi(x) = \varphi(g_n(t)x) \implies 0 = \lim_{t\to 0} g_n(t)\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{t\to 0} g_n(t)x\right) = \varphi(z),$$

che è quello che volevamo mostrare.

$\boxed{\text{Conclusione}}$ Per concludere mostriamo che $z \notin \operatorname{orb} x$.

Sappiamo che $\operatorname{orb} x$ è aperto in $\overline{\operatorname{orb} x}$ quindi $\overline{\operatorname{orb} x} \setminus \operatorname{orb} x$ è chiuso. Dato che $y \in \overline{\operatorname{orb} x} \setminus \operatorname{orb} x$ si ha che $\operatorname{orb} y \subseteq \overline{\operatorname{orb} x} \setminus \operatorname{orb} x$ ($\overline{\operatorname{orb} x}$ è G-invariante e $\operatorname{orb} y \cap \operatorname{orb} x \neq \emptyset$ implicherebbe $y \in \operatorname{orb} x$). Passando alla chiusura questo mostra che $z \in \overline{\operatorname{orb} y} \subseteq \overline{\operatorname{orb} x} \setminus \operatorname{orb} x$ e quindi in particolare $z \notin \operatorname{orb} x$.

$\square$