

Gruppi algebrici lineari  
Corso del prof. Maffei Andrea

Antonio Di Nunzio e Francesco Sorce

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
A.A. 2024/25

# Indice

<b>I Prerequisiti</b>	<b>4</b>
<b>1 Teoria delle rappresentazioni</b>	<b>5</b>
1.1 Definizioni . . . . .	5
1.2 Costruzioni principali . . . . .	6
1.2.1 Duale, prodotto tensore e omomorfismi . . . . .	7
1.2.2 Algebre tensoriali . . . . .	8
1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici . . . . .	10
<b>2 Geometria Algebrica</b>	<b>13</b>
2.1 Varietà affini immerse . . . . .	13
2.2 Varietà algebriche e morfismi . . . . .	16
2.3 Connessione e Irriducibilità . . . . .	19
2.4 Dimensione di una varietà algebrica . . . . .	21
2.5 Varietà liscie . . . . .	22
2.6 Varietà separate e complete . . . . .	26
<b>II Gruppi algebrici</b>	<b>27</b>
<b>3 Gruppi algebrici</b>	<b>28</b>
3.1 Definizioni generali . . . . .	28
3.1.1 Componente connessa dell'identità . . . . .	31
3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari . . . . .	32
<b>4 Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile</b>	<b>36</b>
4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti . . . . .	37
4.2 Decomposizione di Jordan . . . . .	41
4.3 Gruppi unipotenti . . . . .	44
4.3.1 Esponenziale e logaritmo . . . . .	46
4.4 Gruppi completamente riducibili . . . . .	48
4.4.1 Caratteri, Tori e Gruppi abeliani connessi Semisemplici . . . . .	50
<b>5 Quozienti</b>	<b>53</b>
5.1 Realizzazione geometrica di quotienti e insiemi delle classi . . . . .	53
5.1.1 Costruzione . . . . .	53
5.1.2 Varietà omogenee . . . . .	56
5.1.3 Quoziente categorico . . . . .	57
5.2 Sottogruppi generati e “algebre di Lie” . . . . .	59
5.3 Quando quozienti di gruppi sono completi . . . . .	62
5.3.1 Gruppi risolubili e commutatori . . . . .	62

5.3.2	Punto fisso di Borel . . . . .	62
5.3.3	Sottogruppi parabolici e di Borel . . . . .	64
5.4	Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici . . . . .	68
5.4.1	Matrici invertibili . . . . .	68
5.4.2	Matrici ortogonali speciali . . . . .	70
5.4.3	Quoziente per sottogruppo di Borel . . . . .	72
<b>III</b>	<b>Fibrati</b>	<b>76</b>
<b>6</b>	<b>Fibrati vettoriali</b>	<b>77</b>
6.1	Cocicli e banalizzazioni . . . . .	78
6.2	Operazioni sui fibrati . . . . .	81
6.3	Sezioni di un fibrato . . . . .	82
6.4	Fibrati vettoriali su varietà affini . . . . .	84
6.4.1	Caratterizzazione con i moduli proiettivi . . . . .	84
6.5	Fibrati vettoriali sulla retta proiettiva . . . . .	88
6.5.1	Fibrati lineari . . . . .	88
6.5.2	Fibrati vettoriali . . . . .	89
6.6	Fibrati con azione di gruppo . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Teorema di Quillen-Suslin</b>	<b>94</b>
7.1	Retta proiettiva su un anello . . . . .	94
7.2	Teorema di incollamento di Quillen . . . . .	95
7.2.1	Lemmi geometrici . . . . .	96
7.2.2	Lemmi su polinomi invertibili a coefficienti in algebra . . . . .	98
7.2.3	Dimostrazione . . . . .	99
7.3	Cohomologia di Čech di fibrati su rette proiettive . . . . .	101
7.4	Teoremi di Horrocks . . . . .	103
7.4.1	Dimostrazione Horrocks geometrico locale . . . . .	104
7.4.2	Implicazioni verso Horrocks algebrico globale . . . . .	108
7.4.3	Dimostrazione di Quillen-Suslin . . . . .	109

# Introduzione

## Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(n)$  definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

**Esempio 0.1.** Il gruppo  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  agisce su  $\mathbb{C}^2$ , e quindi anche sulle funzioni definite su  $\mathbb{C}^2$ , infatti se  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$  abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

**Domanda:** come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x, y]_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d \rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio  $V_2 = \mathbb{C}[x, y]_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ . I suoi elementi sono  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ . Segue che  $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$  sono le funzioni polinomiali su  $V_2$ . Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante  $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$ .

# **Parte I**

# **Prerequisiti**

# Capitolo 1

## Teoria delle rappresentazioni

### 1.1 Definizioni

**Definizione 1.1** (Rappresentazione). Sia  $G$  un gruppo e  $\mathbb{K}$  un campo. Una **rappresentazione** di  $G$  su  $\mathbb{K}$  (o  **$G$ -modulo**) è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $V$  munito di una azione  $\mathbb{K}$ -lineare di  $G$ , cioè esiste una mappa

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g, v) & \longmapsto & g \cdot v \end{array}$$

con le proprietà <sup>a</sup>

- $e \cdot v = v$
- $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$
- $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda g \cdot u + \mu g \cdot v$

<sup>a</sup>se non si presentano ambiguità ometteremo ..

**Osservazione 1.2.** Dare una rappresentazione è equivalente a dare un morfismo di gruppi  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  dove  $\rho(g)v = g \cdot v$ .

**Definizione 1.3** (Sottorappresentazione). Dato  $U \subseteq V$  con  $V$  rappresentazione di  $G$ ,  $U$  è una **sottorappresentazione** se  $U$  è sottospazio vettoriale  $G$ -invariante.

**Osservazione 1.4.** Data  $U \subseteq V$  sottorappresentazione, possiamo definire una struttura naturale di rappresentazione su  $W = V/U$  ponendo

$$g[v] = [gv].$$

**Definizione 1.5** (Morfismo di  $G$ -rappresentazioni). Se  $V_1, V_2$  sono rappresentazioni di  $G$  e abbiamo  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  lineare, diciamo che  $\varphi$  è un **morfismo di  $G$ -rappresentazioni o di  $G$ -moduli** se

$$\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1).$$

**Esempio 1.6.** Se  $U \subseteq V$  è una sottorappresentazione,  $U \subseteq V$  è morfismo di  $G$ -moduli

**Esempio 1.7.** Se  $U \subseteq V$  è una sottorappresentazione,  $V \rightarrow V/U$  è morfismo di  $G$ -moduli

**Osservazione 1.8** (Proprietà universale del quoziente). La mappa  $\pi : V \rightarrow V/U$  è tale che per ogni  $\varphi : V \rightarrow V'$  di  $G$ -moduli, se  $\varphi(U) = 0$  allora esiste  $\chi : V/U \rightarrow V'$  di  $G$ -moduli t.c.  $\varphi = \chi \circ \pi$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/U \longrightarrow 0 \\ & & \searrow 0 & & \downarrow \varphi & & \swarrow \chi \\ & & & & V' & & \end{array}$$

**Definizione 1.9** (Invarianti e coinvarianti). Sia  $V$  un  $G$ -modulo. Definiamo lo **spazio degli invarianti** come

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}.$$

Si ha che  $V^G$  è una sottorappresentazione su cui  $G$  agisce banalmente.

Analogamente definiamo lo **spazio dei coinvarianti** come

$$V_G = V / \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Notiamo che  $\langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$  è effettivamente una sottorappresentazione ( $h(v - gv) = hv - (hgh^{-1})(hv)$ ), quindi questo quoziente è ben definito. Notiamo che  $G$  agisce banalmente anche  $V_G$ .

**Osservazione 1.10** ([Non parte del corso]).  $V^G$  è l'equalizzatore delle mappe  $g : V \rightarrow V$  e  $V_G$  è il coequalizzatore delle stesse mappe, quindi sono esempi di limite e colimite rispettivamente nella categoria dei  $G$ -moduli.

**Notazione.** Se  $V$  e  $W$  sono  $G$ -moduli, poniamo

$$\text{Hom}_G(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ di } G\text{-moduli}\}.$$

Notiamo che è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale.

## 1.2 Costruzioni principali

**Proposizione 1.11.** Se  $V_i$  sono rappresentazioni di  $G$  allora  $\bigoplus_i V_i$  e  $\prod_i V_i$  sono rappresentazioni di  $G$ . Inoltre  $\bigoplus_i V_i$  è una sottorappresentazione di  $\prod_i V_i$ .

**Osservazione 1.12** (Proprietà universale). Consideriamo le inclusioni di  $G$ -moduli

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus V_i \\ v_i & \longmapsto & (w_j) \end{array}, \quad \text{dove } w_j = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se  $\varphi_i : V_i \rightarrow W$  è di  $G$ -moduli allora esiste un'unica  $\psi : \bigoplus V_i \rightarrow W$  che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \bigoplus V_i \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \psi \\ & & W \end{array}$$

Vale una proprietà duale per il prodotto.

### 1.2.1 Duale, prodotto tensore e omomorfismi

**Definizione 1.13** (Rappresentazione duale). Se  $V$  è  $G$ -modulo, definiamo una azione di  $G$  su  $V^*$  definendo  $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$ . Come notazione useremo

$$\langle g\varphi, v \rangle = \langle \varphi, g^{-1}v \rangle.$$

La rappresentazione così definita è detta **duale** alla rappresentazione  $V$ .

**Osservazione 1.14.** Usiamo  $g^{-1}$  al posto di  $g$  per continuare ad avere una azione destra di  $G$  su  $V^*$ . Un altro motivo è la coerenza di questo diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & & \mathbb{K} \\ \nearrow g^{-1} & \downarrow g & \searrow \varphi \\ V & & \mathbb{K} \end{array}$$

**Osservazione 1.15.**  $\langle g\varphi, gv \rangle = \langle \varphi, v \rangle$ .

**Definizione 1.16** (Prodotto tensore). Se  $V$  e  $W$  rappresentazioni di  $G$ , definiamo una azione sul prodotto tensore  $V \otimes W$  ponendo

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

**Definizione 1.17** (Omomorfismi). Se  $V$  e  $W$  rappresentazioni di  $G$ , definiamo una azione su  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  ponendo

$$(gL)(v) = g(L(g^{-1}v)).$$

**Osservazione 1.18.** La definizione sopra corrisponde alla commutatività di

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{gL} & W \end{array}$$

**Osservazione 1.19.**  $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \{L \mid gL = L\}$ , ma

$$gL = L \iff g(L(g^{-1}v)) = gL(v) = L(v) \iff L(g^{-1}v) = g^{-1}L(v)$$

e poiché questo vale per ogni  $g \in G$  ricaviamo che

$$(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \text{Hom}_G(V, W).$$

**Proposizione 1.20.** La mappa canonica

$$\begin{aligned} \Phi : \quad V^* \otimes W &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \varphi \otimes w &\longmapsto \{v \mapsto \varphi(v)w\} \end{aligned}$$

è un omomorfismo iniettivo di  $G$ -moduli con immagine data dalle mappe lineari di rango finito.

*Dimostrazione.*

Mostriamo che è un  $G$ -omomorfismo: per linearità basta considerare elementi della forma  $\varphi \otimes w$ .

$$\Phi(g(\varphi \otimes w))(v) = \Phi(g\varphi \otimes gw)(v) = g\varphi(v)gw = \varphi(g^{-1}v)gw = g(\Phi(\varphi \otimes w))(v).$$

L'immagine cosiste sicuramente di mappe di rango finito:  $\Phi(\sum_{i=1}^r \varphi_i \otimes w_i)$  ha rango al massimo  $r$  perché ha immagine contenuta in  $\text{Span}(w_1, \dots, w_r)$ . Viceversa, data  $L : V \rightarrow W$  lineare di rango finito sia  $w_1, \dots, w_r$  una base di  $\text{Imm } L$  e siano  $\varphi_i : V \rightarrow \mathbb{K}$  i funzionali che a  $v$  associano la  $i$ -esima coordinata di  $L(v)$  nella base scelta. Segue che  $L(v) = \sum \varphi_i(v)w_i$  e quindi  $L = \Phi(\sum \varphi_i \otimes w_i)$ . La costruzione data fornisce una inversa di  $\Phi$  definita sul sottospazio delle funzioni di rango finito, quindi  $\Phi$  in particolare è iniettiva.  $\square$

### 1.2.2 Algebre tensoriali

**Definizione 1.21** (Tensori simmetrici e antisimmetrici). Definiamo

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-volte}}$$

$$S^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes x_b \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_b \otimes x_a \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

$$\bigwedge^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes v \otimes v \otimes x_{a+3} \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

**Osservazione 1.22.** Alcuni testi usano la notazione  $\text{Sym}^n V$  al posto di  $S^n V$ .

**Osservazione 1.23.** Per il prodotto simmetrico  $S^n V$  vale una proprietà universale analoga a quella del prodotto tensore, dove al posto di mappe multilineari qualsiasi consideriamo multilineari simmetriche, similmente per  $\Lambda^n V$  e mappe multilineari antisimmetriche.

*Sketch per prodotto simmetrico.*

Se  $V^n \rightarrow W$  multilineare simmetrica, abbiamo  $F : V^{\otimes n} \rightarrow W$  che passa al quoziante diventando  $H : S^n V \rightarrow W$ , l'unicità segue dall'unicità di  $F$  e suriettività di  $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$ .  $\square$

**Osservazione 1.24.** Se  $V$  è un  $G$ -modulo, per quanto detto sul prodotto tensore,  $V^{\otimes n}$  è una rappresentazione e quindi anche  $S^n V$  e  $\Lambda^n V$  lo sono in quanto suoi quozienti.

**Definizione 1.25** (Algebra tensoriale). Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e poniamo  $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ . Definiamo l'**algebra tensoriale** come

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

dove il prodotto è indotto da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

Similmente costruiamo l'**algebra simmetrica**  $SV$  e **antisimmetrica**  $\Lambda V$ .

**Osservazione 1.26.**  $SV \cong \mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$  dove  $\{x_i\}_{i \in I}$  è una base di  $V$ .

**Definizione 1.27** (Algebra associativa universale). Sia  $V$  uno spazio vettoriale, l'**algebra associativa universale** su  $V$  consiste in una  $\mathbb{K}$ -algebra<sup>a</sup>  $A$  e un morfismo  $\alpha : V \rightarrow A$  tale che

1.  $\alpha$  è  $\mathbb{K}$ -lineare
2. per ogni  $B$  algebra associativa e per ogni  $\beta : V \rightarrow B$   $\mathbb{K}$ -lineare esiste unico morfismo  $\psi$  di  $\mathbb{K}$ -algebre tale che

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow \beta & \downarrow \psi \\ & & B \end{array}$$

<sup>a</sup> $\mathbb{K} \subseteq A$ ,  $A$  anello con unità e  $\mathbb{K} \subseteq Z(A)$

**Osservazione 1.28.** Se una algebra associativa universale esiste allora è unica a meno di isomorfismo perché abbiamo dato una proprietà universale.

**Proposizione 1.29.** Un’algebra associativa universale esiste per ogni  $V$  ed è data dall’algebra tensoriale e l’inclusione  $V \xrightarrow{id} V^{\otimes 1} \subseteq TV$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $B$  un’algebra associativa e sia  $\beta : V \rightarrow B$  lineare. Definiamo

$$F : \begin{array}{ccc} TV & \longrightarrow & B \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \beta(v_1) \cdots \beta(v_n) \end{array}$$

La buona definizione segue dal fatto che il prodotto in un’algebra è multilineare.  $\square$

**Osservazione 1.30.** Dato  $V$  spazio vettoriale possiamo definire analogamente a prima l’algebra associativa universale simmetrica e l’algebra associativa universale antisimmetrica e un loro modello è dato da  $SV$  e  $\bigwedge V$  rispettivamente.

### 1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici

**Definizione 1.31** (Rappresentazione semplice). Una rappresentazione  $S$  di  $G$  si dice **semplice** se  $S \neq 0$  e se non ha sottorappresentazioni non banali.

**Lemma 1.32** (Lemma di Schur). Sia  $S$  una rappresentazione semplice di  $G$ .

1. Ogni morfismo di  $G$ -moduli non nullo  $\varphi : S \rightarrow S$  è invertibile.
2. L’insieme  $\text{End}_G(S)$  è un corpo e si ha  $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S))$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo i due punti

1. Basta notare che  $\ker \varphi$  e  $\text{Imm } \varphi$  sono sotto- $G$ -moduli di  $S$  che sappiamo essere non tutto e non banale rispettivamente.
2. Sia  $F = \text{End}_G(S)$ . La moltiplicazione per un elemento  $\lambda$  di  $\mathbb{K}$  è in  $F$  e commuta con tutto  $F$ , quindi  $\mathbb{K} \subseteq Z(F)$ .

Se  $\varphi$  è un elemento non nullo di  $F$ , per il primo punto  $\varphi$  è invertibile e l’inverso è un omomorfismo di  $G$ -moduli.

$\square$

**Esempio 1.33.** Assumiamo  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso e  $\dim_{\mathbb{K}}(S) < +\infty$ . Allora abbiamo un contenimento  $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S)) \subseteq \text{End}_G(S)$ . Poiché la dimensione di  $\text{End}_G(S)$  su  $\mathbb{K}$  è finita e  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, si ottiene  $\mathbb{K} = \text{End}_G(S)$ .

**Esercizio 1.34.** Nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , supponiamo che  $\dim_{\mathbb{C}}(S)$  sia al più numerabile. Mostrare che  $\text{End}_G(S) = \mathbb{C}$ .

**Definizione 1.35.** Sia  $V$  una rappresentazione di  $G$ .

1.  $V$  si dice **semisemplice** se è somma diretta di rappresentazioni semplici.
2.  $V$  si dice **completamente riducibile** se per ogni sottorappresentazione  $W$  di  $V$  esiste una sottorappresentazione  $U$  di  $V$  tale che  $V = U \oplus W$ .

**Osservazione 1.36.** Se  $V$  è una rappresentazione semisemplice di  $G$  allora la scrittura  $V = \bigoplus S_i$  significa che per ogni  $g \in G$ ,  $g$  agisce su  $V$  come una matrice a blocchi se consideriamo una base di  $V$  che rispetta la decomposizione.

**Esempio 1.37.** Sia  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\}$  e  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$ . Allora la rappresentazione  $V = \mathbb{K}^2$  di  $G$  data da

$$[\sigma]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è somma di rappresentazioni semplici.

**Esempio 1.38.** Nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la rappresentazione  $V = \mathbb{C}^2$  del gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

non è completamente riducibile.

*Soluzione.*

Consideriamo la sottorappresentazione di  $V$  data da  $W = \mathbb{C}e_1$ ; se esistesse  $U = \mathbb{C}v_2$  tale che  $V = U \oplus W$ , allora nella base  $e_1, v_2$  tutti gli elementi  $g$  in  $G$  sarebbero diagonali

$$[g]_{e_1, v_2}^{e_1, v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ma  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  non è diagonale se  $x \neq 0$ . □

**Proposizione 1.39.** Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1.  $V$  è somma diretta di rappresentazioni semplici;
2.  $V$  è somma di rappresentazioni semplici.

Inoltre, le precedenti condizioni implicano la seguente.

3.  $V$  è completamente riducibile.

*Dimostrazione.*

Chiaramente la prima condizione implica la seconda. Proviamo il viceversa. Sia  $V = \sum_{i \in I} S_i$  con  $S_i$  semplici. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I : \sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j \right\}.$$

La famiglia  $\mathcal{F}$  è non vuota in quanto contiene il singoletto  $\{i\}$  per ogni  $i$  in  $I$ . Inoltre  $\mathcal{F}$  è ordinata parzialmente per inclusione. Mostriamo che ogni catena  $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$  di  $\mathcal{F}$  ammette il maggiorante  $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$  in  $\mathcal{F}$ . Basta mostrare che, per ogni  $H \subseteq J$  finito, la somma  $\sum_{h \in H} S_h$  è diretta. Poiché  $H$  è finito, si ha  $H \subseteq J_\alpha$  per qualche  $\alpha$  in  $A$ , dunque la somma  $\sum_{j \in J_\alpha} S_j$  è diretta.

A questo punto, per il Lemma di Zorn, esiste un elemento  $M$  in  $\mathcal{F}$  massimale. Mostriamo che  $V = \bigoplus_{j \in M} S_j$ . Per assurdo assumiamo  $W \doteq \bigoplus_{j \in M} S_j \subsetneq V$  e sia  $S_0$  tale che  $S_0 \not\subseteq W$ . Poiché  $S_0 \cap W \subseteq S_0$  ma  $S_0 \cap W \neq S_0$  (altrimenti vale il contenimento) si ha  $S_0 \cap W = 0$ , quindi  $S_0 \oplus W \subset V$ . Abbiamo dunque mostrato che  $\widetilde{M} = M \cup \{0\}$  è in  $\mathcal{F}$ , contro la massimalità di  $M$  in  $\mathcal{F}$ .

Mostriamo ora  $1. \Rightarrow 3.$  : se  $W$  è una sottorappresentazione di  $V$  allora

$$W = W \cap V = \bigoplus_{i \in M} S_i \cap W = \bigoplus_{\substack{i \in M \text{ t.c.} \\ S_i \cap W \neq 0}} S_i$$

quindi possiamo scegliere come rappresentazione supplementare

$$U = \bigoplus_{\substack{i \in M \text{ t.c.} \\ S_i \cap W = 0}} S_i.$$

□

## Capitolo 2

# Geometria Algebrica

In questa sezione, assumeremo sempre  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso.

### 2.1 Varietà affini immerse

**Definizione 2.1.** Un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{K}^n$  si dice una **varietà algebrica affine (immersa)** se esistono  $f_1, \dots, f_h$  in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tali che

$$X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f_1(v) = \dots = f_h(v) = 0\}.$$

**Notazione.** Data una varietà algebrica affine immersa  $X$  poniamo

$$I(X) \doteq \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } v \in X\}.$$

**Osservazione 2.2.** L'insieme  $I(X)$  risulta un ideale di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Notazione.** Se  $J$  è un ideale di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  scriviamo

$$V(J) \doteq \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } f \in J\}.$$

Richiamiamo inoltre il classico Teorema degli Zeri di Hilbert.

**Notazione.** Nel seguito, denoteremo con  $P$  l'anello  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Teorema 2.3** (Nullstellensatz). Se  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso e  $I, J$  sono ideali di  $P$  allora

$$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

In particolare abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{varietà algebriche affini immerse in } \mathbb{K}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$$

**Esempio 2.4.** Vediamo qualche controsenso classico.

- Se  $\mathbb{K}$  non è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz non vale: ad esempio per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il polinomio  $X^2 + 1$  in  $\mathbb{R}[X]$  genera un ideale proprio (massimale)  $J$  tale che  $V(J) = \emptyset$ .
- La corrispondenza precedente non vale per gli ideali in generale:  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $n = 1$ , l'ideale  $J = (x^2)$  è tale che  $V(J) = \{0\}$ , ma  $I(V(J)) = (x) \neq J$ .

Vediamo ora alcune conseguenze del Nullstellensatz.

1. Gli ideali massimali di  $P$  sono tutti e solo quelli della forma

$$m_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n),$$

con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  in  $\mathbb{K}^n$ .

*Dimostrazione.*

Che i precedenti siano tutti ideali massimali è evidente, mostriamo che sono i soli. Sia  $\mathfrak{m}$  un ideale massimale di  $P$ . Allora  $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$  (in quanto altrimenti avremmo  $P = I(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ), dunque esiste un  $\alpha$  in  $\mathbb{K}^n$  appartenente a  $V(\mathfrak{m})$ . Ma allora  $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$  e per massimalità di  $\mathfrak{m}_\alpha$  si ottiene l'uguaglianza.  $\square$

2. Sia  $I \subseteq P$  e sia  $\alpha$  in  $V(I)$ . Allora  $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$  e in generale

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I\}.$$

Ricordiamo inoltre che se  $I$  è un ideale di  $P$ , allora si ha

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \text{Max}(P) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

**Definizione 2.5.** Sia  $X$  una varietà algebrica affine immersa in  $\mathbb{K}^n$ . Si definisce l'**anello delle coordinate** di  $X$  come il quoziante

$$\mathbb{K}[X] = P/I(X) = \{f|_X : f \in P\}.$$

Ricordiamo che su  $\mathbb{K}^n$  è definita una topologia, detta **topologia di Zariski**, in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi  $V(I)$  al variare degli ideali  $I$  in  $P$ . Ricordiamo infatti che, se  $I, J$  sono ideali di  $P$ , allora

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ ;
- $\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V(\sum_{i \in I} I_i)$ .

**Esempio 2.6.** Nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $n = 1$ , i chiusi sono gli insiemi con un numero finito di punti, oppure tutto  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.7.** Sia  $f$  un elemento di  $P$ . Si definisce l'**aperto principale** relativo a  $f$  come

$$(\mathbb{K}^n)_f \doteq \mathbb{K}^n \setminus V(f) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f(\alpha) \neq 0\}.$$

**Osservazione 2.8.** Se  $U = \mathbb{K}^n \setminus V(I)$  è un aperto e  $\alpha$  è in  $U$ , allora esiste  $f$  in  $P$  tale che  $\alpha \in (\mathbb{K}^n)_f \subseteq U$ . Infatti  $I = (f_1, \dots, f_h)$ ,  $V(I) \subseteq V(f_i)$  e  $(\mathbb{K}^n)_{f_i} = \mathbb{K}^n \setminus V(f_i) \subseteq U$ .

Dotiamo ogni varietà algebrica affine immersa in  $\mathbb{K}^n$  della topologia di sottospazio.

**Notazione.** Poniamo  $X_f \doteq (\mathbb{K}^n)_f \cap X = \{\alpha \in X : f(\alpha) \neq 0\}$ .

**Osservazione 2.9.** L'insieme

$$\left\{ \frac{g}{f^n} : g \in P \right\}$$

è ben definito su  $(\mathbb{K}^n)_f$ .

**Definizione 2.10** (Funzioni regolari). Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{K}^n$ . Si definisce l'insieme delle **funzioni regolari** su  $U$  come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall \alpha \in U \exists g, h \in P : g(\alpha) \neq 0 \text{ e } f = h/g \text{ su } U \cap X_g\}.$$

**Lemma 2.11.** Sia  $X$  varietà affine immersa, allora

1.  $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}[X]$
2. Se  $g \in \mathbb{K}[X]$  allora  $\mathcal{O}(X_g) = \mathbb{K}[X]_g$

*Dimostrazione.*

L'affermazione 2. implica l'affermazione 1. scegliendo  $g \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , quindi basta mostrare 2.

Una funzione della forma  $f/g^n$  appartiene a  $\mathcal{O}(X_g)$ , quindi basta mostrare l'altra inclusione. Sia  $\varphi \in \mathcal{O}(X_g)$ . Per definizione, per ogni  $\alpha \in X_g$  esistono  $h$  e  $k$  tali che  $\varphi = k/h$  in  $X_g \cap X_h = X_{gh}$ .

Abbiamo dunque un ricoprimento  $X_g = \bigcup X_{gh_i}$  dove  $\varphi = k_i/h_i$  su  $X_{gh_i}$ . Sia  $I = (h_i)$  l'ideale in  $\mathbb{K}[X]_g$  generato dagli  $h_i$ . Se per assurdo  $I \neq \mathbb{K}[X_g]$  allora esiste un massimale  $\mathfrak{m}$  che contiene  $I$ . Un massimale corrisponde ad un punto  $\alpha \in X_g \subseteq X$  ma, poiché  $X_g$  è ricoperto dagli  $X_{gh_i}$ , esiste un indice  $i_0$  tale che  $\alpha \in X_{gh_{i_0}}$  e questo è assurdo perché vorrebbe dire

$$h_{i_0} \notin \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I \ni h_{i_0}.$$

Questo mostra che  $I = \mathbb{K}[X_g]$ . Possiamo dunque scrivere<sup>1</sup>  $1 = \sum \alpha_i h_i$  per opportuni  $\alpha_i$ . Affermiamo che  $\varphi = \sum \alpha_i h_i \varphi = \sum \alpha_i k_i$ , il quale è un elemento di  $\mathbb{K}[X]_g$ . L'identità vale perché dove  $h_i \neq 0$  abbiamo  $\varphi = k_i/h_i$  e quindi  $h_i \varphi = k_i$ , se invece  $h_i(x) = 0$  si ha che  $h_i(x)\varphi(x) = 0 = k_i(0)$ , perché se così non fosse, poiché  $x \in X_{h_j}$  per qualche  $j \neq i$ , si ha che

$$k_j/h_j = k_i/h_i \iff h_i k_j = k_i h_j$$

su  $X_{h_i h_j}$  e quindi valutando in  $x$  abbiamo  $k_i(x)h_j(x) = 0$  con  $h_j(x) \neq 0$ .  $\square$

<sup>1</sup>nota che la somma è finita per definizione di ideale generato.

## 2.2 Varietà algebriche e morfismi

**Definizione 2.12.** Una **varietà algebrica** su  $\mathbb{K}$  è uno spazio topologico compatto  $X$  tale che per ogni aperto  $U$  abbiamo un insieme di funzioni  $\mathcal{O}_X(U) \subseteq C^0(X \rightarrow \mathbb{K})$  tale che

1. Se  $U \subseteq V$  e  $f \in \mathcal{O}_X(V)$  allora  $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$ .
2. Se  $V = \bigcup U_\alpha$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  è tale che  $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$  per ogni  $\alpha$  allora  $f \in \mathcal{O}_X(V)$ .
3.  $(X, \mathcal{O}_X)$  è localmente isomorfo ad una varietà affine immersa, cioè per ogni  $x \in X$  esiste un intorno  $U$  e un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow Y$  con  $Y$  affine tale che per ogni  $V$  aperto di  $U$  si ha  $\varphi(V) = W$  aperto e  $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  è un isomorfismo.

**Osservazione 2.13.** Quello che abbiamo appena definito è più propriamente detto *schema ridotto di tipo finito su  $\mathbb{K}$* .

**Esempio 2.14.** Sia  $X = \mathbb{P}^1$ . Come spazio topologico, i chiusi sono  $\mathbb{P}^1, \emptyset$  e sottoinsiemi finiti di punti. Per ogni  $U$  aperto di  $\mathbb{P}^1$  poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \circ \varphi_1 \in \mathcal{O}(\varphi_1^{-1}(U)), f \circ \varphi_2 \in \mathcal{O}(\varphi_2^{-1}(U))\}$$

dove

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [t : 1] \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1 : t] \end{array}.$$

**Definizione 2.15** (Funzione regolare). Se  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  sono varietà, la mappa  $\varphi : X \rightarrow Y$  è **regolare** se

1.  $\varphi$  è continua
2. Per ogni  $W$  aperto di  $Y$ , se  $f \in \mathcal{O}_Y(W)$  allora  $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(W))$

**Definizione 2.16** (Varietà affine).  $(X, \mathcal{O}_X)$  è una **varietà affine** se è isomorfa ad una varietà affine immersa.

**Proposizione 2.17.** Se  $X$  è una varietà affine immersa in  $\mathbb{K}^N$ ,  $X_f$  è isomorfa alla varietà affine immersa  $Y$  data da

$$V((\{f(x), f(x)t - 1\}_{f \in I(X)})) \subseteq \mathbb{K}_x^N \times \mathbb{K}_t.$$

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO.

□

**Corollario 2.18.**  $\mathrm{GL}(n)$  è una varietà affine.

*Dimostrazione.*

Sia  $X = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$ . Basta notare che il determinante  $\det$  è una funzione regolare su  $V$  e che  $\mathrm{GL}(n) = X_{\det}$ .  $\square$

**Proposizione 2.19.** Se  $X$  è una varietà affine immersa

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{K}^n) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{K}[X]).$$

*Dimostrazione.*

Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  induce un omomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

in particolare possiamo definire  $f_i = \varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi$  in  $\mathbb{K}[X]$  tali che  $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  per definizione.

Viceversa, dati  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X]$  si ha che  $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  è una mappa regolare.

[Cont.] Ovvio.

[Pullback] Sia  $U = D(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ . Notiamo che

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid h(x) \neq g(f_1(x), \dots, f_n(x)) \neq 0\} = X_h$$

Se  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{K}$  è regolare,  $\alpha = \ell/g^n$  con  $\ell \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , quindi

$$\alpha \circ \varphi = \frac{\ell(f_1, \dots, f_n)}{h^n}$$

che è un elemento di  $\mathcal{O}(X_h)$  come voluto.

$\square$

**Proposizione 2.20** (Morfismi verso affine). Se  $X$  e  $Y$  sono varietà affini allora un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  è univocamente determinato dall'omomorfismo  $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\psi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \psi & \downarrow \subseteq \\ & & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Notiamo che  $\varphi$  è morfismo se e solo se  $\psi$  lo è. Se  $\psi(X) \subseteq Y$  e  $f \in I(Y)$  allora  $\psi^*(f) = f \circ \varphi = 0$ , quindi abbiamo un diagramma di algebre.

Viceversa se un morfismo di algebre sollevo e bla bla bla trovo morfismo di varietà.

$\square$

**Definizione 2.21** (Prodotto). Siano  $X, Y$  varietà affini immerse in  $\mathbb{K}_x^\ell$  e  $\mathbb{K}_y^m$  rispettivamente, allora  $X \times Y \subseteq \mathbb{K}_{(x,y)}^{\ell+m}$  è una varietà, data da

$$X \times Y = V(\{(f(x), g(y))\}_{f \in I(X), g \in I(Y)}) \subseteq \mathbb{K}^\ell \times \mathbb{K}^m.$$

**Proposizione 2.22.**  $\mathbb{K}[X \times Y] \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$

*Dimostrazione.*

L'anello delle coordinate del prodotto di due varietà affini è dato da

$$\mathbb{K}[X \times Y] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m]}{(f(x), g(y))} \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

Infatti abbiamo un morfismo bilineare da  $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$  dato dal prodotto dei polinomi. Il morfismo indotto  $\Phi$  è surgettivo perché  $x_i = \Phi(x_i \otimes 1)$  e  $y_i = \Phi(1 \otimes y_i)$ , quindi abbiamo i generatori. Per l'iniettività procediamo per casi

- Supponiamo  $X = \mathbb{K}^\ell$  e  $Y = \mathbb{K}^m$ , allora abbiamo una inversa di  $\Phi$  data da

$$x_i \mapsto x_i \otimes 1, \quad y_i \mapsto 1 \otimes y_i$$

- Scrivendo  $\mathbb{K}[X \times Y]$  come  $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, y_m]}{(f(x), g(y))}$  abbiamo un morfismo dal numeratore verso  $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$  ben definito e notiamo che il nucleo è esattamente  $(f(x), g(y))$ . (dimostrare che protto tensore di  $\mathbb{K}$ -alegbre ridotte finitamente generate è ridotta.)

□

**Definizione 2.23** (Prodotto fibrato). Se  $X, Y, Z$  varietà affini e morfismi  $f : X \rightarrow Z$  e  $g : Y \rightarrow Z$ , definiamo  $W = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$ .

$$\begin{array}{ccc} W & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

**Osservazione 2.24.** Notiamo che  $W$  è un chiuso, infatti è luogo di zeri di  $f(x) - g(y)$  in  $X \times Y$ . Osserviamo però che queste equazioni non sono ridotte a priori<sup>2</sup>.

Concludiamo la sezione citando il seguente teorema che useremo ripetutamente

**Teorema 2.25** (Dominanti sono aperte su un aperto). Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è un morfismo tra varietà quasi-proiettive, allora  $\varphi(X)$  contiene un aperto di  $\overline{\varphi(X)}$ .

**Osservazione 2.26.** Questo è un corollario del teorema di Chevalley sugli insiemi costruibili.

<sup>2</sup>ed è naturale che sia così. Intersezioni sono in particolare prodotti fibrati e quando intersechiamo due varietà è naturale trovare delle molteplicità, per esempio  $V(x) \cap V(y - x^2)$  in  $\mathbb{A}^2$  è il punto  $(0, 0)$  ma con molteplicità 2.

## 2.3 Connessione e Irriducibilità

Sia  $X$  uno spazio topologico connesso. Allora

1. Se  $Y \subset X$  è connesso, allora  $\bar{Y}$  è connesso.
2. Se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è continua, allora  $\varphi(X)$  è connesso.

**Esercizio 2.27.** Se  $X$  è una varietà algebrica affine, allora

$$X \text{ sconnesso} \iff \mathbb{K}[X] = A \times B.$$

**Esercizio 2.28.** Siano  $X, Y$  due varietà affini connesse. Allora  $X \times Y$  è connessa. [Attenzione: la topologia di  $X \times Y$  non è la topologia prodotto!]

**Esercizio 2.29.** Se  $X$  è una varietà, allora  $X$  ha un numero finito di componenti connesse. In particolare le componenti connesse sono chiuse e aperte.

**Definizione 2.30.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **riducibile** se esistono due sottospazi chiusi propri  $Z$  e  $W$  di  $X$  tali che  $X = Z \cup W$ . Lo spazio  $X$  si dice **irriducibile** se non è riducibile.

**Proposizione 2.31.** Se  $X$  è uno spazio di Hausdorff irriducibile, allora  $X$  è un punto.

*Dimostrazione.*

Se  $x, y$  sono punti distinti di  $X$ , allora esistono due intorni disgiunti  $U_x$  e  $U_y$  di  $x$  e  $y$  rispettivamente. Posti  $Z = X \setminus U_y$  e  $W = X \setminus U_x$ , si ottiene  $X = Z \cup W$ .  $\square$

**Proposizione 2.32.** Sia  $X$  una varietà affine. Allora  $X$  è irriducibile se e solo se l'anello delle coordinate  $\mathbb{K}[X]$  è un dominio d'integrità.

*Dimostrazione.*

Siano  $f, g$  in  $\mathbb{K}[X]$  tali che  $fg = 0$ . Consideriamo  $Z = V(f)$  e  $W = V(g)$ . Allora  $Z$  e  $W$  sono due chiusi tali che  $X = Z \cup W$ , dunque  $X = Z$  oppure  $X = W$ , cioè  $f = 0$  oppure  $g = 0$ .  $\square$

**Esempio 2.33.** La varietà  $X = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid xy = 0\}$  non è irriducibile.

**Osservazione 2.34.** Se  $Y$  è un sottospazio irriducibile di una varietà affine  $X$ , allora  $\bar{Y}$  è irriducibile. Se inoltre  $\varphi: Y \rightarrow X$  è una mappa continua, allora  $\varphi(Y)$  è irriducibile. Infine, se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici irriducibili, allora  $X \times Y$  è uno spazio topologico irriducibile.

Sia  $X$  una varietà affine. Ricordiamo che esiste una biiezione tra gli ideali radicali di  $\mathbb{K}[X]$  e le sottovarietà chiuse di  $X$ , data da  $I \mapsto V(I)$  e viceversa  $Y \mapsto I(Y)$ .

**Osservazione 2.35.** Sia  $I$  un ideale di  $\mathbb{K}[X]$ . Allora

$$V(I) \text{ è irriducibile} \iff I \text{ è un ideale primo.}$$

Ricordiamo che, se  $I$  è un ideale radicale allora  $V(I)$ , come spazio topologico, è omeomorfo alla varietà affine avente come anello di coordinate  $\mathbb{K}[X]/I$ . L'insieme  $V(I)$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali massimali di  $\mathbb{K}[X]$  contenenti  $I$ . D'altra parte, gli ideali massimali di  $\mathbb{K}[X]/I$  sono gli ideali massimali di  $\mathbb{K}[X]$  contenenti  $I$ . Se  $\pi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]/I$  è la proiezione canonica, si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X] \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X]/I\} \\ \pi^{-1}(M) & \xrightarrow{\mathfrak{m}} & M/I \end{array}$$

**Definizione 2.36.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **Noetheriano** se ogni successione

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

di sottospazi chiusi di  $X$  stabilizza.

**Osservazione 2.37.** Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.

*Dimostrazione.*

Se  $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$  è una successione di sottospazi chiusi di  $X$ , allora si ha una successione

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq \dots$$

di ideali di  $\mathbb{K}[X]$  che stabilizza perché  $\mathbb{K}[X]$  è Noetheriano. Quindi anche la successione  $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$  stabilizza.  $\square$

**Osservazione 2.38.** Ogni varietà è uno spazio topologico Noetheriano.

*Dimostrazione.*

Scrivendo  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$  con  $X_i$  aperti affini e data una successione di chiusi  $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ , si ha una successione  $Z_1 \cap X_i \supseteq Z_2 \cap X_i \supseteq \dots \supseteq Z_n \cap X_i \supseteq \dots$  che stabilizza per ogni  $i$ . Allora esiste un  $N$  tale che  $Z_n \cap X_i = Z_N \cap X_i$  per ogni  $n \geq N$  e per ogni  $i$ , da cui  $Z_n = Z_N$  per ogni  $n \geq N$ .  $\square$

**Proposizione 2.39.** Sia  $X$  uno spazio topologico Noetheriano. Allora esistono dei sottospazi  $Y_1, \dots, Y_n$  chiusi e irriducibili di  $X$  tali che  $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ . Inoltre, se  $Y_i \not\subseteq Y_j$  per ogni  $i \neq j$ , una tale decomposizione di  $X$  è unica, e i sottospazi  $Y_i$  si dicono le **componenti irriducibili** di  $X$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}$  dei chiusi di  $X$  che non possono essere scritti come unione di un numero finito di chiusi irriducibili. Mostriamo che  $\mathcal{F}$  è vuota.

Supponiamo per assurdo che  $\mathcal{F}$  sia non vuota. Poiché ogni catena in  $\mathcal{F}$  ammette un minimo, per il Lemma di Zorn esiste un elemento minimale  $Z$  in  $\mathcal{F}$ . Per costruzione,  $Z$  è riducibile, quindi possiamo scrivere  $Z = C \cup D$  con  $C, D$  sottospazi chiusi e propri di  $Z$ . Poiché  $Z$  è un elemento minimale,  $C, D$  non sono in  $\mathcal{F}$ , quindi ammettono una decomposizione finita in chiusi irriducibili, ma allora anche  $Z$  ammette una tale decomposizione.

Supponiamo ora che  $X$  ammetta due decomposizioni in chiusi irriducibili

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_m = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$$

tali che  $Y_i \not\subseteq Y_j$  e  $Z_i \not\subseteq Z_j$  per ogni  $i \neq j$ . Poiché

$$Y_i = Y_i \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n) = Y_i \cap Z_1 \cup \dots \cup Y_i \cap Z_n$$

e poiché  $Y_i$  è irriducibile, si ha  $Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)}$ . Analogamente,  $Z_j \subseteq Y_{\beta(j)}$ . Allora  $\beta \circ \alpha = id$ , infatti

$$Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)} \subseteq Y_{\beta(\alpha(i))} = Y_i.$$

Analogamente  $\alpha \circ \beta = id$  e ciò conclude.  $\square$

**Osservazione 2.40** (Componenti irriducibili corrispondono a primi minimali). Siano  $I, J_\alpha$  ideali di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tali che i  $J_\alpha$  siano primi contenenti  $I$ . Siano  $X = V(I)$  e  $Y_\alpha = V(J_\alpha)$ . Allora

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n,$$

dove  $J_1, \dots, J_n$  sono i primi minimali contenenti  $I$ . Sappiamo dal corso di Algebra 2 che i primi minimali sono in numero finito.

**Esempio 2.41.**  $I = (zx, zy)$ .  $p_1 = (z)$  è il piano,  $p_2 = (x, y)$  è la retta,  $X = V(p_1) \cup V(p_2)$ .

**Teorema 2.42** (principale di Zariski). Supponiamo  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ . Se  $X$  è irriducibile e  $Y$  è liscia, ogni morfismo  $\varphi: X \rightarrow Y$  bigettivo è un isomorfismo.

In caratteristica  $p$  il teorema va enunciato in modo diverso:  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_p}$ ,  $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  definito da  $x \mapsto x^p$ .

## 2.4 Dimensione di una varietà algebrica

**Definizione 2.43.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Definiamo la **dimensione (di Krull)** di  $X$  come

$$\sup \{n \in \mathbb{N}: \text{esiste una catena di chiusi irriducibili } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n\}.$$

Denotiamo questo numero  $\dim X$ .

**Osservazione 2.44.** Se  $X$  è una varietà affine, per quanto già visto si ha

$$\dim(X) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } P_0, \dots, P_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \dots \supsetneq P_n\}.$$

**Teorema 2.45.** Ogni varietà affine ha dimensione finita.

**Definizione 2.46** (Altezza). Se  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo di  $\mathbb{K}[X]$ , la sua **altezza** è definita come

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) \doteq \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } \mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

**Definizione 2.47** (Campo delle funzioni razionali). Se  $X$  è una varietà affine irriducibile definiamo il suo **campo delle funzioni razionali**  $K_X$  come il campo dei quozienti <sup>a</sup> di  $\mathbb{K}[X]$ .

<sup>a</sup>la definizione è ben posta perché se  $X$  è irriducibile allora  $\mathbb{K}[X]$  è un dominio

**Teorema 2.48.** Sia  $X$  una varietà affine irriducibile. Allora

1.  $\dim(X) = \text{tr deg}_{\mathbb{K}}(K_X)$ .
2. Se  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo di  $K[X]$  e  $Y = V(\mathfrak{p})$ , allora

$$\dim(X) = \dim(Y) + \text{ht}(\mathfrak{p}).$$

3. Se  $f$  è un elemento non nullo e non invertibile di  $\mathbb{K}[X]$ , allora  $V(f)$  è un chiuso di  $X$ . Se la sua decomposizione in componenti irriducibili è data da  $V(f) = Y_1 \cup \dots \cup Y_h$ , allora

$$\dim(Y_i) = \dim(X) - 1.$$

## 2.5 Varietà liscie

**Notazione.** Sia  $X$  una varietà (affine) e sia  $x$  un punto di  $X$ . In questa sezione poniamo  $A = \mathbb{K}[X]_{\mathfrak{m}_x}$  e  $\mathfrak{m}_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ .

**Definizione 2.49.** Lo **spazio cotangente** di  $X$  nel punto  $x$  è il quoziente

$$T_x^* X := \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2.$$

Dato un elemento  $f$  in  $A$ , definiamo il **differenziale** di  $f$  come la classe

$$df := [f - f(x)] \in T_x^* X.$$

Lo **spazio tangente** di  $X$  nel punto  $x$  è il duale

$$T_x X = (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$$

dello spazio cotangente di  $X$  in  $x$ .

**Definizione 2.50.** Una **derivazione** su  $A$  in  $x$  è una funzione  $\partial: A \rightarrow \mathbb{K}$  lineare che soddisfa la seguente proprietà

$$\partial(fg) = f(x)\partial g + g(x)\partial f.$$

Indichiamo con  $\text{Der}_x(A, \mathbb{K}(x))$  l'insieme delle derivazioni su  $A$ .

**Esercizio 2.51.** La mappa  $T_x X \rightarrow \text{Der}_x(A, \mathbb{K})$  definita da  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ , dove

$$\tilde{\varphi}(\lambda + \mu) = \varphi(\mu)$$

definisce una bigezione (stiamo usando la decomposizione  $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}_x$ ).

**Esempio 2.52.** Se  $X = \mathbb{K}$  e  $p$  è un punto di  $\mathbb{K}$ , allora  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x - p)$  e  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{K}(x - p) = \mathbb{K}d_p x$ .

**Esempio 2.53.** Se  $X = \mathbb{K}^n$  e  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , allora  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$  e si ha

$$\text{Der}_p(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

**Esempio 2.54.** Se  $X = V(I)$  è contenuta in  $\mathbb{K}^n$  e  $p$  è un punto di  $X$ , allora  $I \subseteq \mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ . Posto  $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$ , si ha

$$\frac{\bar{\mathfrak{m}}}{\bar{\mathfrak{m}}^2} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I}$$

e si ha un'immersione

$$\text{Der}_p(A/I, \mathbb{K}) = \{\partial \in \text{Der}_p(A, \mathbb{K}): \partial(I) = 0\} \hookrightarrow \text{Der}_p(A, \mathbb{K})$$

data da  $\partial \mapsto \partial \circ \pi$ , dove  $\pi: A \rightarrow A/I$  è la proiezione canonica.

**Osservazione 2.55.** Se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è un morfismo di varietà e  $p$  è un punto di  $X$ , posto  $q = \varphi(p)$ , si ha una mappa

$$d_p \varphi: T_q X \rightarrow T_p Y$$

definita tramite

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_p(A, \mathbb{K}) & \rightarrow & \text{Der}_q(B, \mathbb{K}) \\ \partial & \mapsto & \partial \circ \varphi \end{array}$$

dove  $B = \mathbb{K}[Y]$ .

**Esempio 2.56.** Se  $Y = \mathbb{K}$  e  $\varphi(p) = q$ , la mappa  $d_p \varphi: T_p X \rightarrow T_q \mathbb{K} = \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_q$  è definita da  $\partial \mapsto \tilde{\partial}$ , dove

$$\tilde{\partial}(f) = \partial(f \circ \varphi).$$

Se  $\tilde{\partial}(x) = \lambda$ , allora  $\tilde{\partial} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \Big|_q$ .

**Osservazione 2.57.** Se  $X$  è affine e  $\varphi$  è in  $A$ , allora  $\varphi$  definisce una mappa  $\mathbb{K}[x] \rightarrow A$  data da  $g \mapsto g \circ \varphi$ . In particolare  $x \mapsto \varphi$ . Quindi

$$\tilde{\partial}(x) = \partial(x \circ \varphi) = \partial(\varphi).$$

**Osservazione 2.58.** Nel caso di  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): X \rightarrow \mathbb{K}^n$ , si ha

$$d_p\varphi : \begin{array}{ccc} T_p X & \longrightarrow & T_q \mathbb{K}^n \\ \partial & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \partial(\varphi_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q \end{array}$$

Nel caso in cui  $X$  sia  $\mathbb{K}^m$  (con coordinata  $y$ ), si ha

$$d_p\varphi : \begin{array}{ccc} T_p \mathbb{K}^m & \longrightarrow & T_q \mathbb{K}^n \\ \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q \end{array}$$

cioè  $d_p\varphi = \mathcal{D}_p\varphi$  a meno di rinominare i vettori base.

**Teorema 2.59.** Se  $X$  è una varietà irriducibile di dimensione  $n$ , allora

$$\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim T_p X \geq n.$$

**Definizione 2.60.** Sia  $X$  una varietà di dimensione  $n$ . Un punto  $p$  di  $X$  si dice **liscio** se  $\dim \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = n$ .

**Osservazione 2.61.** Se  $X$  è una varietà irriducibile di dimensione  $d$  contenuta in  $\mathbb{K}^n$ , consideriamo il punto  $p = 0$  in  $X$ . Vogliamo capire se  $0$  è liscio. Scriviamo  $X = V(I)$ , con  $I = (f_1, \dots, f_r)$ . In questo caso  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 = (x_1, \dots, x_n)$ . I generatori  $f_i$  di  $I$  si scrivono come  $f_i = \ell_i + f_{1,i}$  con  $\ell_i$  lineare omogeneo e  $f_{1,i}$  di grado superiore a  $\deg(\ell_i)$ . Quindi  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + \mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$ , da cui

$$\frac{\bar{\mathfrak{m}}}{\bar{\mathfrak{m}}^2} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle} = \frac{\mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n}{\langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle}.$$

Dunque  $X$  è liscio in  $0$  se  $\dim_{\mathbb{K}} \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle = n - d$ .

**Esempio 2.62.** Consideriamo  $X$  la curva affine definita dall'equazione  $y^2 = x^3$  (notiamo che  $\dim X = 1$ ). Posto  $f = y^2 - x^3$ , si ha<sup>3</sup>

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{0},$$

che ha dimensione 2, quindi  $X$  non è liscia in  $(0, 0)$ . Se invece consideriamo  $X$  definita da  $y^2 = x^3 + x$ , allora

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{x}$$

che ha dimensione 1, quindi  $X$  è liscia in  $0$ .

**Esempio 2.63.** Se  $X = V(I)$  in  $\mathbb{K}^n$ , con  $I = (f_1, \dots, f_r)$ , consideriamo la mappa

$$f = (f_1, \dots, f_r): \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r.$$

---

<sup>3</sup> $y^2 - x^3$  non ha parte lineare

Allora

$$d_0 f : \begin{array}{ccc} T_0 \mathbb{K}_x^n & \longrightarrow & T_0 \mathbb{K}_y^r \\ \partial & \longmapsto & \sum_j \partial(f_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_0 \end{array}$$

e

$$T_0 X = \{ \partial : \partial(I) = 0 \} = \{ \partial : \partial(f_j) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, r \} = \ker d_0 f.$$

**Teorema 2.64.** Se  $X$  è una varietà, allora esiste un aperto  $U$  in  $X$  costituito da punti lisci.

**Definizione 2.65.** Sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà lisce. Diciamo che  $\varphi$  è **liscio**<sup>a</sup> in un punto  $p$  di  $X$  se la mappa  $d_p \varphi : T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$  è surgettiva.

<sup>a</sup>In geometria differenziale sarebbe una sommersione.

La definizione di morfismo liscio è il seguente risultato

**Teorema 2.66.** Siano  $X$  e  $Y$  varietà lisce e  $\varphi : X \rightarrow Y$  una mappa liscia, allora

1.  $X_y = \varphi^{-1}(y)$  è una varietà liscia di dimensione  $\dim X - \dim Y$
2. Se  $x \in X_y$  allora

$$0 \rightarrow T_x X_y \rightarrow T_x X \xrightarrow{d\varphi_x} T_y Y \rightarrow 0$$

cioè  $T_x(\varphi^{-1}(y)) = \ker d\varphi_x$ .

Enunciamo altri teoremi utili sulle mappe lisce:

**Teorema 2.67.** Assumiamo  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ . Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è un morfismo **dominante** di varietà lisce (cioè  $\overline{\varphi(X)} = Y$ ), allora esiste un aperto non vuoto  $U$  di  $Y$  tale che la restrizione

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$$

è liscia.

**Teorema 2.68.** Ogni mappa  $\varphi : X \rightarrow Y$  liscia è aperta. Inoltre, per ogni varietà  $Z$  (non necessariamente liscia), la mappa

$$(\varphi, id) : X \times Z \rightarrow Y \times Z$$

è aperta<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>in quanto “liscia” per una definizione più generale. Per più dettagli cercare “essere un morfismo liscio è stabile per cambiamento di base”.

## 2.6 Varietà separate e complete

Introdiciamo gli analoghi di Hausdorff e Compatto in geometria algebrica

**Definizione 2.69** (Varietà separata).  $X$  è **separata** se la diagonale  $X \rightarrow X \times X$  è un morfismo chiuso.

Supporremo che sia tutto separato.

**Definizione 2.70** (Varietà completa).  $X$  è **completa** se per ogni  $Z$  varietà,  $\pi : X \times Z \rightarrow Z$  è un morfismo chiuso.

**Proposizione 2.71.** Se  $X$  è irriducibile e completa allora  $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  regolare e consideriamo  $\Gamma(f) \subseteq X \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ . Questa proiezione è chiusa quindi  $\pi(\Gamma(f)) = f(X)$  è un chiuso irriducibile (immagine di irriducibile) di  $\mathbb{K}$ . Ma i chiusi irriducibili di  $\mathbb{K}$  non vuoti sono o tutto  $\mathbb{K}$  o solo un punto.

Consideriamo ora  $W = \{(x, y) \in X \times \mathbb{K} \mid yf(x) = 1\}$ . Se  $f(X) = \mathbb{K}$  allora l'immagine di  $W$  tramite la proiezione  $X \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  è  $\mathbb{K}^\times$ , che non è chiuso in  $\mathbb{K}$ , assurdo.

Quindi  $f(X)$  è un solo punto, cioè  $f$  è costante. □

**Corollario 2.72.** Se  $X$  è completa, affine e connessa allora  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}$  significa che  $X$  è un solo punto  $\{(0)\}$ .

In generale le affini complete sono un numero finito di punti.

**Teorema 2.73** (I proiettivi sono completi). Se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita,  $\mathbb{P}(V)$  è completa.

**Osservazione 2.74.** Se  $X$  è completa e  $Z \subseteq X$  chiuso allora  $Z$  è completo<sup>4</sup>.

**Osservazione 2.75.** Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è surgettiva e  $X$  è completa allora  $Y$  è completa<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Questo corrisponde a “chiuso in un compatto è compatto” in senso classico.

<sup>5</sup>Questo corrisponde a “immagine di un compatto è compatta” in senso classico.

# **Parte II**

# **Gruppi algebrici**

# Capitolo 3

## Gruppi algebrici

### 3.1 Definizioni generali

I due tipi di gruppo algebrico che tratteremo (che a breve mostreremo essere la stessa cosa) sono

**Definizione 3.1** (Gruppo algebrico lineare). Un gruppo  $G$  è un **gruppo algebrico lineare** se è un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(n)$  per qualche  $n$  definito da equazioni polinomiali.

**Definizione 3.2** (Gruppo algebrico affine). Un gruppo  $G$  è un **gruppo algebrico affine** se  $G$  è una varietà affine e le operazioni prodotto

$$\begin{aligned} \mu : & G \times G &\longrightarrow & G \\ & (x, y) &\longmapsto & xy \end{aligned}$$

e inverso

$$i : \begin{aligned} & G &\longrightarrow & G \\ & x &\longmapsto & x^{-1} \end{aligned}$$

sono morfismi di varietà.

**Osservazione 3.3.** Il prodotto  $\mu : \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \rightarrow \mathrm{GL}(n)$  è un morfismo di varietà, infatti

$$(x_{ij})(y_{ij}) = \left( \sum_h x_{i,h-i} \right)$$

è definito da equazioni polinomiali nelle entrate.

Similmente per l'operazione di inverso, infatti  $(x_{ij})^{-1} = \mathrm{Adj}(x_{ij}) \cdot (\det(x_{ij}))^{-1}$ . Le entrate della matrice aggiunta classica sono dei determinanti e quindi polinomiali, mentre l'inversa del determinante della matrice di partenza è una funzione regolare perché siamo su  $\mathrm{GL}(n) = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \setminus V(\det)$ .

**Esempio 3.4.** I gruppi  $\mathrm{GL}(n)$ ,  $\mathrm{GL}(1) = \mathbb{G}_m$  e  $\mathrm{SL}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$  sono evidentemente gruppi algebrici lineari.

**Esempio 3.5.** Il gruppo

$$\mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un gruppo algebrico lineare (definito da  $x_{11} = x_{22} = 1$  e  $x_{21} = 0$ ). Notiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi questo gruppo è isomorfo a  $(\mathbb{K}, +)$ , dando una realizzazione di questo come gruppo algebrico lineare.

Avendo a disposizione gruppi cerchiamo di capire le loro azioni e rappresentazioni.

**Definizione 3.6** (Azione regolare di gruppo algebrico). Sia  $G$  un gruppo algebrico affine e sia  $X$  una varietà affine qualsiasi. Se  $G$  agisce su  $X$  affermiamo che questa azione è **regolare** se  $\sigma : G \times X \rightarrow X$  è un morfismo di varietà algebriche.

**Definizione 3.7** (Rappresentazione regolare). Se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$  e l'azione di  $G$  è lineare diciamo che  $V$  è una **rappresentazione regolare finito dimensionale** di  $G$ .

Se  $V$  è una rappresentazione di  $G$  (di dimensione qualsiasi) diciamo che è **regolare** se

1. per ogni  $v \in V$  si ha  $\dim \langle gv \rangle_{g \in G} < \infty$
2. per ogni  $W \subseteq V$  sottorappresentazione di dimensione finita,  $W$  è una rappresentazione regolare finito dimensionale.

a cioè l'orbita di ogni elemento è contenuta in un sottospazio di dimensione finita.

**Osservazione 3.8.** Ogni rappresentazione regolare non banale ammette una sottorappresentazione regolare finito dimensionale, basta prendere un vettore non nullo e poi il sottospazio generato dall'orbita.

**Osservazione 3.9.** Se  $G$  è un gruppo algebrico affine, ai morfismi di moltiplicazione  $\mu$  e inverso  $i$  corrispondono omomorfismi di  $\mathbb{K}$ -algebre

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G], & i^* : \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ f &\longmapsto (x, y) \mapsto f(xy), & f &\longmapsto x \mapsto f(x^{-1}) \end{aligned}$$

**Osservazione 3.10.** Se  $\sigma$  è una azione  $G \times X \rightarrow X$  allora

$$\begin{aligned} \sigma^* : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ f &\longmapsto (g, x) \mapsto f(gx) \end{aligned}$$

**Osservazione 3.11.** La proprietà associativa si può esprimere tramite il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{id_G \times \mu} & G \times G \\ \downarrow \mu \times id_G & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Quindi abbiamo una proprietà analoga sulla comoltiplicazione  $\mu^*$  considerando il diagramma indotto.

**Osservazione 3.12.** Se  $X = V$  è una rappresentazione regolare finito dimensionale e  $\sigma : G \times V \rightarrow V$  abbiamo un omomorfismo di algebre

$$\sigma^* : \mathbb{K}[V] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[V]$$

Ricordiamo però che  $\mathbb{K}[V] = SV^*$ , quindi possiamo considerare equivalentemente la restrizione  $\sigma^*$  a  $V^* \subseteq SV^*$ .

**Lemma 3.13.**  $\sigma^*(V^*) \subseteq \mathbb{K}[G] \otimes V^*$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $e_1, \dots, e_n$  una base di  $V$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  la base duale. Se  $g$  agisce come  $(g_{ij})$  su  $V$  e  $v = \sum v_i e_i$  allora

$$\begin{aligned} (\sigma^* \varphi_k)(g, v) &= \varphi_k(gv) = \varphi_k \left( \sum_{i,j} g_{ij} v_j e_i \right) = \\ &= \sum_{i,j} g_{ij} v_j \varphi_k(e_i) = \sum_j g_{kj} v_j = \\ &= \left( \sum_j x_{kj} \otimes \varphi_j \right) (g, v), \end{aligned}$$

dove  $x_{kj} \in \mathbb{K}[G]$  è la funzione che per ogni  $g$  restituisce  $g_{kj}$  (che è regolare perché la rappresentazione lo è).  $\square$

**Lemma 3.14.** Sia  $G$  che agisce su  $X$  in modo regolare con entrambi affini. Allora

- $\mathbb{K}[X]$  è una rappresentazione di  $G$  con azione data da

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

- $\mathbb{K}[X]$  è una rappresentazione regolare
- $\mathbb{K}[G]$  è una rappresentazione regolare di  $G$ .

*Dimostrazione.*

Il primo punto è ovvio e l'ultimo è il caso particolare  $X = G$  e  $G \curvearrowright G$  per traslazione. Mostriamo dunque che  $G \curvearrowright \mathbb{K}[X]$  è regolare.

$\dim \langle Gf \rangle < \infty$  Sia  $f \in \mathbb{K}[X]$ . Notiamo che  $\sigma(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \beta_i$  con somma finita e che per definizione

$$f(gx) = \sum_i \alpha_i(g) \beta_i(x),$$

quindi

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) = \sum_i \alpha_i(g^{-1}) \beta_i(x) \iff gf = \sum_{i=1}^k \alpha_i(g^{-1}) \beta_i \in \langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$$

Questo mostra che  $\dim \langle Gf \rangle$  è finita.

reg. su fin.dim.

Vogliamo dimostrare che su  $W \subseteq \mathbb{K}[X]$  di dimensione finita l'azione di  $G$  è regolare, cioè che  $\sigma^*|_{\mathbb{K}[W]}$  è un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre con codominio  $k[G] \otimes k[W]$ . Concretamente, per ogni  $\varphi \in W^*$  (generatori di  $SW^* = \mathbb{K}[W]$ ) mostriamo che  $\psi = \sigma^*\varphi$  data da  $\psi(g, f) = \varphi(gf)$  è regolare su  $G \times W$ .

Sia  $f_1, \dots, f_k$  una base di  $W$  e  $f_1^*, \dots, f_k^*$  la relativa base duale di  $W^*$ . Poiché sono una base  $\sigma^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes f_j$ . Ponendo  $\varphi(f_i) = \lambda_i$  si ha

$$\psi(g, f) = \varphi(\sum \mu_i g f_i) = \varphi\left(\sum f_i^*(f) \alpha_{ij}(g^{-1}) f_j\right) = \sum_j \left(\sum_i \alpha_{ij}(i(g)) f_i^*(f)\right) \lambda_j,$$

che è regolare su  $G \times W$  in quanto  $i : G \rightarrow G$  è l'inversa (morfismo) e  $f_i^* : W^* \subseteq \mathbb{K}[W]$ .

□

### 3.1.1 Componente connessa dell'identità

**Proposizione 3.15.** Sia  $G$  un gruppo algebrico affine e sia  $G^0$  la componente connessa di  $e_G$ . Allora  $G^0$  è un sottogruppo normale chiuso.

*Dimostrazione.*

Sicuramente  $G^0$  è chiuso in quanto componente connessa. La varietà  $G^0 \times G^0$  è connessa<sup>1</sup> e la mappa

$$m^0 = m|_{G^0 \times G^0} : G^0 \times G^0 \longrightarrow G$$

ha immagine connessa in  $G$  per continuità. Poiché  $e_G$  è nell'immagine di  $m^0$ , si ha  $\text{Imm}(m^0) \subseteq G^0$ , cioè  $G^0$  è un sottogruppo.

Mostriamo ora la normalità: dato  $g$  in  $G$ , si ha

$$gG^0g^{-1} \subseteq G^0,$$

infatti la mappa

$$AD_g : \begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

è continua e fissa  $e_G$ , quindi  $\text{Imm}(AD_g) \subset G^0$ .

□

**Esercizio 3.16.** Il sottogruppo  $G^0$  è irriducibile.

**Osservazione 3.17.** In un gruppo algebrico affine le componenti connesse sono irriducibili.

**Osservazione 3.18.** Se  $G$  è un gruppo algebrico, allora esistono  $g_1, \dots, g_k$  in  $G$  tali che

$$G = G^0 \cup G^0 g_1 \cup \dots \cup G^0 g_k.$$

La precedente è una decomposizione in componenti connesse e irriducibili.

---

<sup>1</sup>topologia di Zariski è meno fine della topologia prodotto.

Possiamo adesso dimostrare un importante risultato sugli omomorfismi di gruppi algebrici

**Proposizione 3.19.** Se  $\varphi: G \rightarrow H$  è un morfismo di gruppi algebrici affini, allora  $\varphi(G)$  è un chiuso di  $H$ .

*Dimostrazione.*

Sfruttando la decomposizione dell'osservazione (3.18), abbiamo

$$\varphi(G) = \varphi(G^0) \cup \varphi(G^0 g_1) \cup \dots \cup \varphi(G^0 g_k),$$

quindi basta mostrare che  $\varphi(G^0)$  è chiuso. In particolare, possiamo ricondurci al caso  $G = G^0$ .

Il sottogruppo  $X = \overline{\varphi(G)}$  di  $H$  è irriducibile per continuità di  $\varphi$ , quindi basta mostrare che  $X = \varphi(G)$ .

Per il teorema (2.25) esiste un aperto  $U$  di  $X$  contenuto in  $\varphi(G)$ . Poiché  $X$  e  $\varphi(G)$  sono sottogruppi di  $H$ , si ha

$$U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X.$$

Se  $x$  è un elemento di  $X$ , poiché  $i(U) = U^{-1}$  è un aperto di  $X$ , anche  $xU^{-1}$  è un aperto di  $X$ . Per irriducibilità di  $X$ , si ha  $U \cap xU^{-1} \neq \emptyset$ , quindi esistono  $u, v$  in  $U$  tali che

$$u = xv^{-1} \iff x = uv,$$

da cui  $X \subseteq U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X$  e abbiamo l'uguaglianza cercata.  $\square$

## 3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari

**Osservazione 3.20** (Punti e ideali massimali sono la stessa cosa). Nella situazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

abbiamo una corrispondente mappa di algebre

$$\begin{array}{ccc} \psi: & \mathbb{K}[Y] & \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ & f & \longmapsto f \circ \varphi \end{array}$$

Notiamo che

$$\varphi(\alpha) = \beta \iff \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta$$

dove  $\mathfrak{m}_\alpha$  e  $\mathfrak{m}_\beta$  sono i massimali che corrispondono ai rispettivi punti.

*Dimostrazione.*

Basta notare che le seguenti sono equivalenze

$$\begin{aligned} f &\in \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) \\ f \circ \varphi &\in \mathfrak{m}_\alpha \\ (f \circ \varphi)(\alpha) &= 0 \\ f(\varphi(\alpha)) &= 0 \\ f &\in \mathfrak{m}_{\varphi(\alpha)} = \mathfrak{m}_\beta \end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 3.21.** Siano  $X$  e  $Y$  affini e sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morfismo. Se  $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  è surgettiva allora  $\varphi(X)$  è chiuso.

*Dimostrazione.*

Sia  $I = \ker \psi$  e mostriamo che  $\varphi(X) = V(I)$ :

- $\subseteq$  Se  $x \in X$  e  $f \in I$  allora  $f(\varphi(x)) = \psi(f)(x) = 0$ , quindi  $\varphi(x) \in V(I)$ .
- $\supseteq$  Sia  $\beta \in V(I)$ , allora  $I \subseteq \mathfrak{m}_\beta$ . Notiamo che  $\psi : \mathbb{K}[Y]/I \rightarrow \mathbb{K}[X]$  è un isomorfismo e sotto questo isomorfismo

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\beta/I,$$

dunque

$$\mathbb{K} \cong \frac{\mathbb{K}[Y]}{\mathfrak{m}_\beta} \cong \frac{\mathbb{K}[X]}{\psi(\mathfrak{m}_\beta)}.$$

Abbiamo quindi mostrato che  $\psi(\mathfrak{m}_\beta)$  è un massimale, dunque per il Nullstellensatz esiste  $\alpha \in X$  tale che  $\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha$ . Concludiamo notando che

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha \implies \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta \iff \varphi(\alpha) = \beta.$$

□

**Proposizione 3.22.** Se  $X, Y$  affini,  $\varphi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  mappe corrispondenti, se  $G$  agisce su  $X$  e  $Y$  allora si ha che  $\varphi$  è  $G$ -equivariante se e solo se  $\psi$  è  $G$ -equivariante.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni:

- $\implies$  Segue calcolando

$$\begin{aligned} \psi(g \cdot f)(x) &= (g \cdot f)(\varphi(x)) = f(g^{-1} \cdot \varphi(x)) = \\ &= f(\varphi(g^{-1}x)) = \psi(f)(g^{-1}x) = \\ &= (g \cdot \psi(f))(x). \end{aligned}$$

- $\iff$  Vogliamo mostrare che  $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ . Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni  $f \in \mathbb{K}[Y]$  si ha  $f(g\varphi(x)) = f(\varphi(gx))$ .

$$f(g\varphi(x)) = (g^{-1}f)(\varphi(x)) = \psi(g^{-1}f)(x) = (g^{-1}\psi(f))(x) = \psi(f)(gx) = f(\varphi(gx)).$$

□

**Teorema 3.23.** Se  $X$  è affine e  $G$  agisce su  $X$  allora esiste una rappresentazione di dimensione finita  $V$  di  $G$  e  $i : X \rightarrow V$  iniettiva che è  $G$ -equivariante

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO

□

**Teorema 3.24.** Ogni gruppo affine è lineare.

*Dimostrazione.*

Consideriamo l'azione di  $G$  su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Questa rende  $\mathbb{K}[G]$  una rappresentazione di  $G$ . Notiamo che  $\mathbb{K}[G]$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata. Siano  $f_1, \dots, f_n$  dei generatori. Osserviamo che  $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}(Gf_1 \cup \dots \cup Gf_n)$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita che contiene  $f_1, \dots, f_n$ , è stabile per l'azione di  $G$  ed è una rappresentazione regolare di  $G$ , quindi senza perdita di generalità scegliere un numero finito di generatori di  $\mathbb{K}[G]$  linearmente indipendenti tali che il loro span  $V$  è una rappresentazione regolare di  $G$ .

Consideriamo la comoltiplicazione

$$\begin{array}{ccc} \mu : & \mathbb{K}[G] & \longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G \times G] \\ & f & \longmapsto (g, h) \mapsto f(gh) \end{array}$$

Poiché  $gf_j = \sum_i \alpha_{i,j}(g)f_i$ , si ha che  $\mu(f_j) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j} \otimes f_i$  dove  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \alpha_{i,j} \circ i$  per  $i : G \rightarrow G$  inverso, infatti

$$\left( \sum \alpha_{i,j}(g)f_i \right)(h) = (gf_j)(h) = f_j(g^{-1}h) = \mu(f)(g^{-1}, h) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})f_i(h).$$

Consideriamo ora la mappa

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & G & \longrightarrow \text{GL}(V) \\ & g & \longmapsto [g]_{\{f_j\}}^{\{f_j\}} = (\tilde{\alpha}_{i,j}(g)) \end{array}$$

che a livello di algebre diventa

$$\begin{array}{ccc} \psi : & \mathbb{K}[\text{GL}(V)] = \mathbb{K}[x_{i,j}, \det^{-1}] & \longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ & x_{i,j} & \longmapsto \tilde{\alpha}_{i,j} \end{array}.$$

Dalla definizione è evidente che  $\varphi$  è una mappa regolare. Se mostriamo che  $\varphi$  è iniettiva e che  $\psi$  è surgettiva allora per (3.21) avremo che  $\varphi(G)$  è un chiuso, quindi  $\varphi$  identifica  $G$  con un chiuso di  $\text{GL}(V)$ , rendendo  $G$  un gruppo algebrico lineare.

Siano  $g, h \in G$  tali che  $\tilde{\alpha}_{i,j}(g) = \tilde{\alpha}_{i,j}(h)$  per ogni  $i, j$ , allora  $g^{-1}f_j = h^{-1}f_j$  per ogni  $j$ , quindi  $g^{-1}$  e  $h^{-1}$  hanno lo stesso effetto su  $\mathbb{K}[G]$ , in particolare<sup>2</sup>

$$f(g) = (g^{-1}f)(e) = (h^{-1}f)(e) = g(h)$$

per ogni  $f \in \mathbb{K}[G]$ , e questo significa che  $g = h$ , mostrando l'iniettività.

Notiamo che per ogni  $g \in G$

$$f_j(g) = (g^{-1}f_j)(e) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j}(g) \underbrace{f_j(e)}_{\in \mathbb{K}}.$$

Questo mostra che i generatori  $f_j$  di  $\mathbb{K}[G]$  appartengono all'immagine di  $\psi$  (perché combinazioni lineari delle  $\tilde{\alpha}_{i,j}$ ), quindi  $\psi$  è surgettiva.  $\square$

**Proposizione 3.25.** Se  $G$  e  $H$  gruppi algebrici affini con  $\varphi : G \rightarrow H$  morfismo di gruppi algebrici allora  $\varphi(G)$  è un chiuso di  $H$ .

<sup>2</sup>e è l'identità di  $G$

*Dimostrazione.*

Sia  $T = \varphi(G) \subseteq H$ . Vogliamo mostrare che  $T = \overline{T} \subseteq H$ . Per il teorema (2.25),  $T \supseteq U$  per  $U$  aperto di  $\overline{T}$ . Notiamo che  $\overline{T}$  è un sottogruppo di  $H$ . Dunque per ogni  $t \in \overline{T}$ ,  $tU \subseteq \overline{T}$ .

Poiché la moltiplicazione per  $t$  è un omeomorfismo,  $U$  e  $tU$  sono aperti di  $\overline{T}$ , quindi per irriducibilità  $U \cap tU \neq \emptyset$ , dunque esistono  $g, h \in U$  tali che  $g = th$ , cioè  $t = gh^{-1} \in T$  e dato che  $t$  era un generico elemento di  $T$  abbiamo finito.  $\square$

## Capitolo 4

# Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile

Avendo ricondotto lo studio dei gruppi algebrici affini allo studio di particolari gruppi di matrici, in questo capitolo cerchiamo di trasportare strumenti di algebra lineare al contesto dei gruppi algebrici.

**Osservazione 4.1.** Se  $V$  è una rappresentazione regolare non nulla allora  $V$  contiene una sottorappresentazione semplice, infatti basta prendere  $W \subseteq V$  di dimensione finita non banale e poi una sottorappresentazione di  $W$  di dimensione minima.

**Lemma 4.2.** Se  $V$  è una rappresentazione completamente riducibile e  $W \subseteq V$  è una sottorappresentazione allora anche  $W$  e  $V/W$  sono completamente riducibili.

*Dimostrazione.*

Per completa riducibilità  $V = W \oplus U$  con  $U \cong V/W$ , quindi basta mostrarlo per  $W$ . Sia  $X \subseteq W$  una sottorappresentazione. Poiché, sempre per completa riducibilità di  $V$ ,  $V = X \oplus Y$  si ha  $W = X \oplus Y \cap W$ .  $\square$

**Proposizione 4.3.** Una rappresentazione regolare di  $G$  è completamente riducibile se e solo se è semisemplice.

*Dimostrazione.*

Sappiamo già che semisemplice implica completamente riducibile (1.39), basta dunque mostrare il contrario. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigoplus_{i \in I} S_i \subseteq V \right\}$$

con  $S_i$  tutti semplici e consideriamo l'ordine su  $\mathcal{F}$  dato da

$$\bigoplus_{i \in I} S_i \preceq \bigoplus_{j \in J} T_j \iff I \subseteq J \text{ e } S_i = T_i \text{ per } i \in I.$$

Ogni catena ammette maggiorante dato sommando sull'unione degli indici. Sia allora  $W = \bigoplus S_i \subseteq V$  massimale e scriviamo  $V = W \oplus U$ . Se  $U \neq (0)$  allora (4.1) esiste una sottorappresentazione semplice  $S \subseteq U$  e quindi  $W' = W \oplus S$  sarebbe maggiore di  $W$ , assurdo.  $\square$

Vorremmo capire per quali gruppi  $G$  le rappresentazioni regolari sono semisemplici.

## 4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti

Prima di studiare le rappresentazioni, cerchiamo di capire come un elemento di  $G$  può agire su una rappresentazione.

**Definizione 4.4** (Elementi unipotenti, nilpotenti e semisemplici). Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Affermiamo che  $\varphi$  è

- **semisemplice** se è diagonalizzabile
- **nilpotente** se  $\varphi^n = 0$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$
- **unipotente** se  $(\varphi - id_V)^n = 0$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$

**Osservazione 4.5.** Se  $\varphi$  è invertibile allora  $\mathbb{Z}$  agisce su  $V$  come

$$n \cdot v = \varphi^n v,$$

quindi la definizione di semisemplice si sposa bene con quella già data in quanto  $\varphi$  induce una decomposizione in autospazi  $\varphi$ -invarianti.

Diamo delle definizioni valide anche per rappresentazioni di dimensione infinita

**Definizione 4.6** (Endomorfismo localmente finito). Siano  $V$  uno spazio vettoriale e  $\varphi \in \text{End}(V)$ .  $\varphi$  è **localmente finito** se per ogni  $v \in V$  esiste  $W$  di dimensione finita  $\varphi$ -stabile con  $v \in W$ . In tal caso diciamo che

- $\varphi$  è **semisemplice** se  $\varphi|_W$  è semisemplice per ogni  $W \subseteq V$   $\varphi$ -stabile di dimensione finita.
- $\varphi$  è **nilpotente** se  $\varphi|_W$  è nilpotente per ogni  $W \subseteq V$   $\varphi$ -stabile di dimensione finita.
- $\varphi$  è **unipotente** se  $\varphi|_W$  è unipotente per ogni  $W \subseteq V$   $\varphi$ -stabile di dimensione finita.

**Definizione 4.7** (Semisemplice, unipotente e nilpotente per gruppi algebrici).  
Se  $G$  è un gruppo algebrico e  $g \in G$  allora  $g$  è

- **semisemplice** se l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione regolare è semisemplice, cioè l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita è semisemplice
- **unipotente** se l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione regolare è unipotente, cioè l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita è unipotente
- **nilpotente** se l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione regolare è nilpotente, cioè l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita è nilpotente.

**Lemma 4.8.** Siano  $g \in \text{End}(V)$  e  $h \in \text{End}(W)$  con  $V$  e  $W$  localmente finite.  
Allora

- Se  $g$  e  $h$  semisemplici allora

$$g \oplus h : V \oplus W \rightarrow V \oplus W \text{ è semisemplice}$$

$$g \otimes h : V \otimes W \rightarrow V \otimes W \text{ è semisemplice}$$

- Se  $g$  è semisemplice e  $U \subseteq V$  è  $g$ -stabile allora

$$g|_U : U \rightarrow U \quad \text{e} \quad \bar{g} : V/U \rightarrow V/U$$

sono semisemplici.

- Se  $g$  è semisemplice allora l'azione di  $g$  su  $SV$  è semisemplice
- Se  $\dim V$  è finita e  $g$  è semisemplice allora  $V^*$  è semisemplice.

Valgono anche gli analoghi per unipotente e nilpotente.

*Dimostrazione.*

Tante verifiche noiose, riportiamo solo quelle per  $g \otimes h$  per dare una idea:

Se  $V$  e  $W$  hanno dimensione finita allora esistono basi di autovettori per  $g$  e  $h$

$$gv_i = \lambda_i v_i, \quad hw_i = \mu_i v_i.$$

Dunque

$$(g \otimes h)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$

e quindi  $v_i \otimes w_j$  è ancora base di autovettori. Consideriamo ora  $V$  e  $W$  generali e sia  $U \subseteq V \otimes W$  di dimensione finita. Scegliendo una base  $\{u_j\}$  di  $U$  si ha che  $u_j = \sum_i a_{ij} v_i \otimes w_j$ . Siano  $\tilde{V} = \text{Span}(\text{orb}_{\langle g \rangle}(v_i))$  e  $\tilde{W} = \text{Span}(\text{orb}_{\langle h \rangle}(w_j))$ . Per costruzione  $\tilde{V}$  e  $\tilde{W}$  hanno dimensione finita,  $U \subseteq \tilde{V} \otimes \tilde{W}$  e questo prodotto tensore è  $g \otimes h$ -stabile. Usando il caso di dimensione finita troviamo una base di autovettori per  $\tilde{V} \otimes \tilde{W}$  e dato che  $U$  è invariante troviamo una base di autovettori per  $U$  scartando qualche elemento da quella di  $\tilde{V} \otimes \tilde{W}$ .  $\square$

**Lemma 4.9** (Rappresentazioni finite si immergono in  $\mathbb{K}[G]^n$ ). Sia  $V$  una rappresentazione di dimensione finita di  $G$ , allora abbiamo una iniezione

$$f : V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^n$$

$G$ -equivariante.

*Dimostrazione.*

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$  e sia  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  la base duale. Definiamo

$$\begin{array}{ccc} \psi : & V & \longrightarrow \mathbb{K}[G]^n \\ & v & \longmapsto (\varphi_1 \otimes v, \dots, \varphi_n \otimes v) \end{array}$$

dove se  $\varphi \in V^*$  e  $v \in V$  poniamo

$$(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g^{-1}v).$$

G-equivariante Vogliamo  $\psi(gv) = g\psi(v)$ , cioè  $g(\varphi \otimes v) = \varphi \otimes gv$ . Allora calcoliamo

$$(g(\varphi \otimes v))(h) = (\varphi \otimes v)(g^{-1}h) = \varphi(h^{-1}gv) = (\varphi \otimes gv)(h)$$

iniettiva Supponiamo  $\psi(v) = 0$ , allora per ogni  $i$

$$0 = (\varphi_i \otimes v)(e) = \varphi_i(v)$$

ma  $\varphi_i$  era una base del duale, quindi  $v = 0$ .

□

**Osservazione 4.10.** Se  $gv = (\alpha_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n}v$  allora  $\varphi_i \otimes v_j = \alpha_{i,j}$ .

**Osservazione 4.11** (Non parte del corso). Stiamo dicendo che possiamo trovare un fibrato vettoriale banale sopra  $G$  che ammette un frame globale dato da sezioni che si comportano come una base di  $V$ . Questo sarà un  $G$ -fibrato e questo ci permette di ricostruire l'azione di  $G$  su  $V$  guardando come  $G$  agisce su combinazioni lineari di questo frame.

**Corollario 4.12.** Se  $g \in G$  allora

- $g$  è semisemplice se e solo se l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice
- $g$  è unipotente se e solo se l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[G]$  è unipotente

*Dimostrazione.*

Facciamo il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Dobbiamo verificare che l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita  $V$  è semisemplice. Per il lemma (4.9) abbiamo che  $V \subseteq \mathbb{K}[G]^n$  e questo è semisemplice quindi anche  $g$  lo è per il secondo punto del lemma (4.8)

□

**Lemma 4.13** (Criterio per semisemplice/unipotente in gruppi lineari). Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $G \subseteq GL(V)$  un sottogruppo chiuso. Allora

- $g \in G$  è semisemplice se e solo se l'azione di  $g$  su  $V$  è semisemplice.
- $g \in G$  è unipotente se e solo se l'azione di  $g$  su  $V$  è unipotente.

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni per il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Verifichiamo che l'azione su  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice. Osserviamo che

$$\mathbb{K}[GL(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$$

è surgettivo e  $G$ -equivariante quindi basta far vedere che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[GL(V)]$ .

$$\mathbb{K}[GL(V)] = \mathbb{K}[\text{End}(V)] [\det^{-1}]$$

Verifichiamo che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)] = S(\text{End}(V)^*)$ . Per il lemma (4.8) basta verificare che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\text{End}(V)^*$  o equivalentemente su  $\text{End}(V)$  per lo stesso lemma. Ricordiamo che  $g$  agisce tramite la moltiplicazione a sinistra.

Se  $\dim V = n$  allora  $\text{End}(V)$  con l'azione di moltiplicazione a sinistra di  $g$  è uguale a considerare l'azione di  $g$  su  $V^{\oplus n}$  dove la corrispondenza è data dal fatto che l'azione per moltiplicazione a sinistra agisce sulle colonne della matrice a destra per restituire le colonne della matrice risultato.

Poiché  $g$  agiva in modo semisemplice su  $V$ , agisce in modo semisemplice anche sulla somma che abbiamo considerato, quindi mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$ .

Sia ora  $W \subseteq \mathbb{K}[\text{End}(V)][\det^{-1}]$  un sottospazio di dimensione finita, in particolare

$$W \subseteq \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \quad \text{per qualche } N$$

Consideriamo allora l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K}$  dove sulla copia di  $\mathbb{K}$  abbiamo  $g\lambda = (\det g)^{-N}\lambda$ . Abbiamo una mappa  $G$ -equivariante surgettiva

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K} &\longrightarrow \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \\ f \otimes \lambda &\longmapsto \frac{\lambda}{(\det)^N} f \end{aligned}$$

quindi, poiché  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$  e su  $\mathbb{K}$ , si ha che agisce in modo semisemplice su  $\frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)]$  e quindi su  $W$ .

Mettendo tutto insieme, abbiamo mostrato che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[G]$  e questo conclude per il corollario (4.12).

□

## 4.2 Decomposizione di Jordan

**Proposizione 4.14.** Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $T$  un endomorfismo di  $V$ . Allora

1. Esistono e sono unici  $S$  semisemplice e  $N$  nilpotente in  $\text{End}(V)$  tali che  $T = S + N$  e  $SN = NS$ .

Gli endomorfismi  $S$  e  $N$  si dicono **parte semisemplice** e **parte nilpotente** di  $T$  e li denoteremo  $T_s$  e  $T_n$  rispettivamente.

2. Esistono  $f, g$  in  $\mathbb{K}[x]$ , con  $f(0) = g(0) = 0$ , tali che  $S = f(T)$  e  $N = g(T)$ .
3. Se  $W$  è un sottospazio  $T$ -stabile di  $V$ , allora  $W$  è  $S$ -stabile e  $N$ -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = T_s|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_n = T_n|_W.$$

4. Se  $V'$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita,  $T'$  è un endomorfismo di  $V'$  e  $L: V \rightarrow V'$  è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_n = T'_n \circ L.$$

*Dimostrazione.*

Dimostriamo i vari punti.

1. Scriviamo  $T$  in forma di Jordan e poniamo  $S$  la parte diagonale di  $T$  (che è quindi semisemplice). Posto  $N = T - S$ , si ha che  $N$  è nilpotente e  $SN = NS$ .

Mostriamo ora l'unicità: se  $S'$  e  $N'$  sono tali che  $T = S + N = S' + N'$  e  $S'N' = N'S'$ , allora  $S, S', N, N'$  commutano con  $T$ , quindi  $S', N'$  commutano con  $S, N$ . Osservando che  $S - S' = N' - N$ , dove il primo membro è diagonale e il secondo è nilpotente, troviamo  $S = S'$  e  $N = N'$ .

2. Consideriamo il polinomio caratteristico  $p_T$  di  $T$  e scriviamolo nella forma

$$p_T(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{n_i},$$

dove i  $\lambda_i$  sono distinti. Cerchiamo un polinomio  $f(t)$  in  $\mathbb{K}[t]$  tale che

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0 \pmod{(t)} \\ f(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{n_i}} \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Tale polinomio esiste per il teorema cinese del resto<sup>1</sup>. Inoltre soddisfa  $f(T) = S$ . Infatti, sul singolo blocco di Jordan  $J_i$  relativo all'autovalore  $\lambda_i$  (di taglia  $m_i \leq n_i$ ), si ha che  $f(T) = \lambda_i I$ . Poiché  $N = T - S$ , posto  $g(t) = t - f(t)$ , si ha  $N = g(T)$ .

3. Poiché  $S = f(T)$  e  $N = g(T)$ , se  $W$  è  $T$ -stabile allora è chiaramente anche  $T_s$ - e  $T_n$ -stabile. Siano ora  $t = T|_W$ ,  $s = T_s|_W$  e  $n = T_n|_W$ . Allora  $t = s + n$ ,  $sn = ns$  e, per il lemma (4.8),  $s$  è semisemplice e  $n$  è nilpotente. Quindi la tesi discende dall'unicità della decomposizione.

<sup>1</sup>se  $\lambda_i = 0$  per qualche  $i$  la condizione  $f(t) \equiv 0 \pmod{(t)}$  viene implicata da  $f(t) \equiv 0 \pmod{(t)^{n_i}}$  e quindi le congruenze continuano ad avere moduli coprimi.

4. Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{L_1} & V \oplus V' & \xrightarrow{L_2} & V' \\
 \downarrow T & & \downarrow T'' = T \oplus T' & & \downarrow T' \\
 V & \longrightarrow & V \oplus V' & \longrightarrow & V'
 \end{array}$$

dove  $L_1: v \mapsto (v, L(v))$  e  $L_2: (v, w) \mapsto w$ . Per definizione abbiamo che  $L_1 \circ T_s = T''_s \circ L_1$  e  $L_2 \circ T''_s = T'_s \circ L_2$ . Deduciamo quindi che

$$L \circ T_s = L_2 \circ L_1 \circ T_s = L_2 \circ T''_s \circ L_1 = T'_s \circ L_2 \circ L_1 = T'_s \circ L.$$

Per il caso nilpotente la dimostrazione è analoga.  $\square$

Vale una decomposizione analoga nel caso moltiplicativo, sostituendo elementi nilpotenti con elementi unipotenti.

**Proposizione 4.15.** Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $T$  in  $\mathrm{GL}(V)$ . Allora

1. Esistono e sono uniche  $S$  semisemplice e  $U$  unipotente tali che  $T = SU = US$ , date da  $S = T_s$  e  $U = T_u$
  2. Esistono  $f, g$  in  $\mathbb{K}[x]$  tali che  $S = f(T)$  e  $U = g(T)$ .
  3. Se  $W$  è un sottospazio  $T$ -stabile di  $V$ , allora  $W$  è  $S$ -stabile e  $U$ -stabile. Inoltre
- $$(T|_W)_s = T_s|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_u = T_u|_W.$$
4. Se  $V'$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita,  $T'$  è un endomorfismo di  $V'$  e  $L: V \rightarrow V'$  è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_u = T'_u \circ L.$$

*Dimostrazione.*

Per analogia con la proposizione precedente, ci limitiamo a dimostrare il primo punto. Partendo dalla decomposizione additiva, si ha

$$T = S + N = S(I + S^{-1}N).$$

Poiché  $S^{-1}N$  è nilpotente, l'elemento  $U = I + S^{-1}N$  è unipotente. Mostriamo l'unicità: se  $S'$  e  $U'$  sono tali che  $T = S'U'$ , posto  $U' = I + M$  con  $M$  nilpotente, si ha  $T = S' + S'M$ . Quindi l'unicità discende da quella del caso additivo.  $\square$

Vogliamo ora estendere quanto fatto al caso localmente finito. Ricordiamo che un'applicazione lineare  $T: V \rightarrow V$  è *localmente finita* se per ogni  $v$  in  $V$  esiste un sottospazio  $W$  di  $V$  di dimensione finita contenente  $v$  e  $T$ -stabile.

**Teorema 4.16.** Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e sia  $T: V \rightarrow V$  lineare, invertibile e localmente finita. Allora esistono e sono unici  $S$  semisemplice e  $U$  unipotente tali che  $T = SU = US$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo dapprima l'esistenza. Per ogni  $v$  in  $V$ , sia  $W$  un sottospazio di  $V$  di dimensione finita contenente  $v$  e  $T$ -stabile. Consideriamo la restrizione  $T|_W$  in  $\mathrm{GL}(W)$ . Consideriamo allora gli elementi  $S_W = (T|_W)_s$  e  $U_W = (T|_W)_u$  dati dalla Proposizione (4.15) e definiamo  $S(v) = S_W(v)$ . Osserviamo che  $S(v)$  non dipende dalla scelta di  $W$ . Infatti, se  $W$  è contenuto in un  $W'$ , allora  $S_{W'}|_W = S_W$ . Procedendo in modo analogo per  $U$ , otteniamo l'esistenza.

Osserviamo che  $S$  e  $U$  costruite soddisfano le proprietà 3 e 4 dell'enunciato precedente.

Verifichiamo ad esempio la 4. Mostriamo che, con la notazione della Proposizione (4.15), si ha  $LS = S'L$ . Per ogni  $v$  in  $V$ , consideriamo un sottospazio  $W$  di dimensione finita, contenente  $v$  e  $T$ -stabile. Sia  $W' = L(W)$ . Allora

$$S'(W') = S'L(W) = LS(W) \subseteq L(W) = W'.$$

È quindi sufficiente mostrare che

$$L|_W \circ S|_W(v) = S'|_{W'} \circ L|_W(v),$$

ma ciò segue dal caso di dimensione finita.

Mostriamo ora l'unicità. Assumiamo  $T = su = us$  e mostriamo che  $S = s$  e  $U = u$ . Osserviamo che  $S, U$  commutano con  $s, u$ . Infatti, per il punto 4, sappiamo che  $LS = SL$  e  $LU = UL$ . Allora dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L=s} & V \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ V & \xrightarrow{L=s} & V \end{array}$$

ricaviamo  $Ss = ss$  e  $Us = sU$ . Analogamente troviamo  $Uu = uU$  e  $Su = uS$ . Scriviamo ora  $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(S)$ . Poiché  $V_\lambda(S)$  è stabile per  $U, s, u$ , lo spazio

$$V_{\lambda,\mu}(S, s) = \{v \in V : Sv = \lambda v, sv = \mu v\}$$

è stabile per  $U$  e  $u$ . Supponiamo per assurdo che esistano  $\lambda, \mu$  distinti tali che  $V_{\lambda,\mu} \neq 0$ . Allora, poiché  $U$  e  $u$  sono unipotenti, si ha  $(V_{\lambda,\mu}(S, s))^U \neq 0$  e, poiché  $U$  e  $u$  commutano, si ha anche  $((V_{\lambda,\mu}(S, s))^U)^u \neq 0$ . Scegliendo  $v$  non nullo in  $((V_{\lambda,\mu}(S, s))^U)^u$ , si ottiene  $T(v) = SU(v) = S(v) = \lambda v$ , ma anche  $T(v) = su(v) = s(v) = \mu v$ , contro l'ipotesi che  $\lambda$  e  $\mu$  sono distinti.  $\square$

**Teorema 4.17** (Decomposizione di Jordan). Sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $g$  un elemento di  $G$ . Allora esistono e sono unici  $s, u$  in  $G$  tali che  $s$  è semisemplice,  $u$  è unipotente e  $g = su = us$ .

*Dimostrazione.*

Assumiamo che  $G$  sia un sottogruppo chiuso di  $\mathrm{GL}(W)$ .  $G = V(I)$  con  $I \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ . Mostriamo l'esistenza di  $s$  e  $u$ . Poiché  $g$  è in  $\mathrm{GL}(W)$ , possiamo scrivere (4.15)  $g = su = us$  con  $u$  unipotente e  $s$  semisemplice in  $\mathrm{GL}(W)$  (cioè  $s$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$  e  $u$  agisce in modo unipotente su  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ ). In particolare  $g =$

$su$  è la decomposizione di Jordan per l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ . Mostriamo che effettivamente  $u$  e  $s$  sono in  $G$  verificando ogni elemento  $f$  di  $I$  si annulla su essi. Osserviamo che  $I$  è stabile per l'azione di  $g$  (e in generale per l'azione di  $G$ ), infatti, per ogni  $h$  in  $G$  si ha  $(gf)(h) = f(g^{-1}h) = 0$ . Poiché  $s$  è la parte semisemplice di  $g$ ,  $s(I)$  è contenuto in  $I$  e se  $f$  è un elemento di  $I$ , si ha  $sf$  è 0 su  $G$ . D'altro canto, valutando sull'elemento neutro  $e$  di  $G$ , troviamo

$$0 = (sf)(e) = f(s^{-1}),$$

dunque  $s^{-1}$  (e quindi  $s$ ) appartiene a  $G$ . L'unicità segue direttamente dal fatto che la decomposizione è unica in  $\mathrm{GL}(W)$ .  $\square$

**Notazione.** Denotiamo  $g_s = s$  e  $g_u = u$ .

**Esercizio 4.18.** Se  $\varphi: G \rightarrow G'$  è un morfismo di gruppi algebrici, allora  $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$  e  $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ .

**Esercizio 4.19.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo perfetto (assumiamo per l'esercizio  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Consideriamo l'inclusione

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Sia  $G$  un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  definito da un'equazione a coefficienti in  $\mathbb{R}$ . Sia  $G_{\mathbb{R}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ . Consideriamo un elemento  $g$  in  $G_{\mathbb{R}}$ . Mostrare che  $g_s$  e  $g_u$  sono in  $G_{\mathbb{R}}$ .

### 4.3 Gruppi unipotenti

**Definizione 4.20.** Un gruppo  $G$  si dice **unipotente** se ogni suo elemento è unipotente.

**Lemma 4.21.** Se  $G$  è tale che l'unica rappresentazione irriducibile di  $G$  è banale allora  $G$  si immerge nel gruppo delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale, cioè

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Dimostrazione.*

Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita per cui  $G$  è un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(V)$ . Sia  $W$  una sottorappresentazione di  $V$  irriducibile non nulla. Allora  $W = \mathbb{K}v_1$  e  $gv_1 = v_1$  per ogni  $g$  in  $G$ . Se  $V_1 = 0$  abbiamo la tesi, altrimenti consideriamo il quoziente  $V_1 = V/\langle v_1 \rangle$ . Anche  $V_1$  è una rappresentazione di  $G$ , quindi scegliendo una sottorappresentazione irriducibile non nulla troviamo  $v_2$  in  $V$  tale che per ogni  $g$  in  $G$  si ha  $gv_2 \equiv v_2 \pmod{\mathbb{K}v_1}$ . Procedendo in questo modo, possiamo scegliere una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , rispetto alla quale risulta chiaramente  $G \subseteq U(n)$ .  $\square$

**Teorema 4.22.** Sia  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso,  $V$  spazio vettoriale di dimensione finita,  $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  che sia una  $\mathbb{K}$ -algebra associativa. Se  $V$  è un  $A$ -modulo semplice allora  $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ . Se  $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$  allora vogliamo mostrare che  $\{a(v) \mid a \in A\} = V^n \equiv \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

Poiché  $V$  è semplice,  $V^n$  è somma di rappresentazioni semplici, quindi per la proposizione (1.39) si ha che  $V^n$  è semisemplice e quindi completamente riducibile. Possiamo allora scrivere  $V^n = Av \oplus P$  per  $P$  un  $A$ -sottomodulo. Sia  $\pi_P : V^n \rightarrow V^n$  la proiezione su  $P$  e notiamo che essa ammette una decomposizione a blocchi

$$\pi_P = (\alpha_{ij})_{i,j} \quad \text{per degli endomorfismi } \alpha_{ij} : V \rightarrow V$$

dove il dominio di  $\alpha_{ij}$  è la  $j$ -esima copia di  $V$  in  $V^n$  e il codominio è l' $i$ -esima copia.

Quindi  $\alpha_{ij} \in \text{End}_A(V)$  con  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso. Per il lemma di Schur (1.32) questi endomorfismi sono le costanti.

Ricordando che  $V^n = Av \oplus P$ , si ha necessariamente  $\pi_P(v) = 0$  per definizione di  $\pi_P$ , quindi per ogni  $i$  abbiamo  $\sum \alpha_{ij} v_j = 0$ . Poiché gli  $v_j$  sono una base e gli endomorfismi  $\alpha_{ij}$  sono costanti, per indipendenza lineare questo significa che per ogni  $i$  e ogni  $j$  si ha  $\alpha_{ij} = 0$ . Segue dunque che  $\pi_P = 0$  e quindi  $P = \text{Imm } \pi_P = \{0\}$ , cioè  $V^n = Av$ .  $\square$

**Esercizio 4.23.** Trova un controesempio per  $\mathbb{K}$  non algebricamente chiuso.

**Teorema 4.24.** Un gruppo  $G$  è unipotente se e solo se l'unica rappresentazione irriducibile di  $G$  è quella banale.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni

$\Leftarrow$  Se  $G$  ha questa proprietà allora per il lemma (4.21) abbiamo

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e chiaramente un gruppo di questa forma è unipotente.

$\Rightarrow$  Sia  $V$  una rappresentazione semplice di  $G$  di dimensione  $n$ . Allora<sup>2</sup>  $\text{tr}(g_V) = n$  per ogni  $g \in G$  (perché si immerge nelle triangolari superiori), quindi

$$\forall g_V, h_V \in G, \quad \text{tr}((g_V - 1)h_V) = \text{tr}(g_V h_V - h_V) = 0.$$

Se  $A$  è il  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale generato da  $G$ ,  $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  ed è un'algebra associativa. Poiché  $V$  è semplice per  $A$  (in quanto semplice per  $G$  e  $A = \text{Span}_{\mathbb{K}}(G)$ ), si ha per il teorema (4.22) che  $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

Segue per linearità della traccia che  $\text{tr}((g_V - 1)a) = 0$  per ogni  $a \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$ , da cui  $(g_V - 1) = 0$ , cioè  $G$  agisce banalmente.

<sup>2</sup>tiriamo in gioco la traccia perché svolgerà il ruolo di un prodotto scalare definito positivo su  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ , che mostriamo essere  $\text{Span}(G)$  grazie al teorema.

□

**Corollario 4.25.** Se  $G$  è unipotente, allora è contenuto nel gruppo  $U_n$  delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale principale.

**Corollario 4.26.** Se  $V$  è una rappresentazione di  $G$  non nulla allora  $V^G \neq 0$ .

**Corollario 4.27.** Se  $G$  è unipotente allora  $G$  è nilpotente come gruppo, cioè se definiamo iterativamente

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G \\ G^{(k+1)} &= [G^{(k)}, G] \end{aligned}$$

allora esiste  $n$  tale che  $G^{(n)} = \{id_G\}$ .

*Dimostrazione.*

Basta immergere  $G$  in  $U(n)$  e notare che sottogruppi di triangolari superiori con 1 sulla diagonale hanno questa proprietà. □

**Esempio 4.28.** Consideriamo il gruppo  $(\mathbb{C}, +)$ . Questo è un gruppo unipotente perché possiamo vederlo in  $\mathrm{GL}(2)$  tramite la rappresentazione

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio 4.29.** Il gruppo  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$  è un gruppo unipotente se  $\mathrm{char} \mathbb{K} = p$ , infatti si può scrivere come

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{K} \right\}$$

**Osservazione 4.30.** Se  $G = U(n)$  con  $\mathrm{char} \mathbb{K} = p$  allora  $g^{p^n} = id_G$ .

### 4.3.1 Esponenziale e logaritmo

**Notazione.** Definiamo lo spazio vettoriale

$$N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Definizione 4.31** (Esponenziale). Definiamo la mappa **esponenziale**

$$\begin{array}{ccc} \exp : & N(n) & \longrightarrow U(n) \\ & M & \longmapsto \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} M^i \end{array}.$$

**Osservazione 4.32.** La mappa esponenziale appena definita è algebrica. Inoltre rispetta le usuali proprietà:

- $\exp((\lambda + \mu)M) = \exp(\lambda M)\exp(\mu M)$
- Se  $M_1M_2 = M_2M_1$  allora  $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)$ .

**Definizione 4.33** (Logaritmo). Definiamo la mappa **logaritmo**

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & N(n) \\ B & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} (M - I_n)^i \end{array} .$$

**Osservazione 4.34.**  $\log$  e  $\exp$  sono mappe algebriche e inverse. Sono anche in realtà la definizione usuale, solo che per matrici in  $N(n)$  e  $U(n)$  queste somme finite coincidono con la definizione in serie.

**Notazione.** Se  $G \subseteq U(n)$  definiamo  $X = \log(G)$  e notiamo che  $X$  è isomorfo a  $G$  come varietà.

**Proposizione 4.35.** Se  $g \in G \setminus \{id_G\}$  è unipotente e  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  allora, ponendo

$$\overline{\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = H \subseteq G,$$

si ha  $H \cong \mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $g \neq id_G$ ,  $\log g = x \neq 0$ , inoltre  $\log(g^n) = nx$ . Notiamo dunque che da  $nx \neq 0$  per ogni  $n$  ricaviamo  $g^n \neq id_G$  per ogni  $n$ . Se  $Y = \mathbb{K}x$  allora

$$\log(H) = \log(\overline{\{g^n\}}) = \overline{\{nx\}} \subseteq Y$$

Poiché  $Y$  è una retta e  $\{nx\}$  sono infiniti,  $\overline{\{nx\}} = Y$  per come sono fatti i chiusi di Zariski di  $\mathbb{A}^1$ , quindi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & H = \exp(Y) \\ \lambda & \longmapsto & \exp(\lambda x) \end{array}$$

è un isomorfismo di gruppi tra  $\mathbb{K}$  e  $H$ . □

**Esercizio 4.36.** Se  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  e  $G$  unipotente abeliano allora  $G \cong \mathbb{K}^n$ .

**Fatto 4.37.** Se  $\text{char } \mathbb{K} = p$  e  $g^p = id$  per ogni  $g \in G$  abeliano connesso allora  $G$  è unipotente e  $G \cong \mathbb{K}^n$ .

**Esempio 4.38.** Se  $\text{char } \mathbb{K} = p$  poniamo  $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{p} \binom{p}{i}$  per  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  e definiamo  $\alpha_i$  come l'immagine di  $\tilde{\alpha}_i$  in  $\mathbb{K}$ .

Definiamo<sup>3</sup>

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a, b) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i a^i b^{p-i} \end{array}$$

e notiamo che

$$c(a, b)c(a + b, c) = c(b, c)c(a, b + c) \implies c(a, 0) = c(a, b) = 0,$$

quindi se  $G = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  con prodotto

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + c(a, a'))$$

allora  $G$  è unipotente, abeliano e connesso ma non è isomorfo a  $(\mathbb{K}^2, +)$  come gruppo a priori. Infatti  $(1, 0)^p = (0, c(1, 1) + c(1, 2) + \dots + c(1, p-1)) \neq (0, 0)$  in generale.

## 4.4 Gruppi completamente riducibili

**Definizione 4.39.** Un gruppo è **completamente riducibile** se ogni sua rappresentazione regolare è semisemplice.

**Osservazione 4.40.** Basta anche chiedere “ogni rappresentazione regolare *finita* è semisemplice”.

**Proposizione 4.41** (Criterio per completa riducibilità).  $G$  è completamente riducibile se e solo se  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice.

*Dimostrazione.*

$\mathbb{K}[G]$  è una rappresentazione regolare di  $G$  quindi una implicazione è ovvia. Se  $V$  ha dimensione  $n$  e  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice allora per l’immersione (4.9)  $V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^m$  si ha che  $V$  è semisemplice (4.8).  $\square$

**Lemma 4.42.** Se  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$  allora  $G$  è completamente riducibile se e solo se  $V^{\otimes n}$  è semisemplice per ogni  $n$

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

$\Rightarrow$  Ovvio

$\Leftarrow$  La dimostrazione è del tutto analoga a quella esposta per il lemma (4.13). Dimostriamo che  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice. Dato il morfismo  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \rightarrow \mathbb{K}[G]$  basta mostrare che  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$  è semisemplice. Scriviamo

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}].$$

$\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$  è un quoziente di somme di rappresentazioni della forma  $(V^*)^{\otimes m}$  e quindi è quoziente di  $(V^* \oplus \dots \oplus V^*)^{\otimes m}$  e dato che  $V^*$  è semisemplice ho finito.

<sup>3</sup>moralmente  $c(a, b) = \frac{(a+b)^p - a^p - b^p}{p}$ , che non potremmo fare direttamente in  $\mathbb{K}$  per l’identità del binomio ingenuo

□

**Corollario 4.43.** Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  è tale che se  $g \in G$  allora  $g^\dagger \in G$ , allora  $G$  è completamente riducibile.

<sup>a</sup>se vedo  $g$  come matrice,  $g^\dagger$  è la matrice trasposta coniugata di  $g$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $V = \mathbb{C}^n$  e dimostriamo che  $V^{\otimes m}$  è semisemplice per ogni  $m$ , cioè che per ogni  $U \subseteq V^{\otimes m}$  che sia  $G$ -stabile esiste  $W$   $G$ -stabile tale che  $V^{\otimes m} = U \oplus W$ .

Consideriamo il caso  $m = 1$ . Definiamo la forma hermitiana<sup>4</sup>

$$h((x_i)(y_i)) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Se  $U \subseteq V$ , poniamo  $W = U^\perp$  rispetto a questa forma. Chiaramente  $V = U \oplus U^\perp$ , quindi vogliamo mostrare che  $U$   $G$ -stabile implica  $U^\perp$   $G$ -stabile.

$$h(gw, u) = \overline{w}^\top \overline{g}^\top u = h(w, \underbrace{\overline{g}^\top u}_{\in G}) \stackrel{w \in U^\perp}{=} 0.$$

Per il caso generale l'idea è la stessa ma usiamo questa forma hermitiana

$$h_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^m h(v_i, u_i).$$

Si conclude usando la tesi per  $h$ .

□

**Esempio 4.44.** Sia  $G \in \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), O(n)\}$ , allora  $G$  è completamente riducibile. Per  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$  questo è ovvio. Per  $O(n) = \{g^\top g = id\}$  basta mostrare che se  $g^\top g = id$  allora  $\overline{g}g^\top = id$ , ma questo è chiaro.

Anche  $SO(n)$  e  $S_p(2n)$  hanno questa proprietà, dove

$$S_p(2n) = \{g \mid gJg^\top = J\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 4.45.** Sia  $\mathrm{char} \mathbb{K} = p = 2$  e consideriamo  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ . Esso ammette una rappresentazione semplice  $V = \mathbb{K}^2$ . Sia  $x, y$  una base di  $V$  e consideriamo l'azione data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = ax + by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y = cx + dy.$$

Consideriamo ora  $S^2V = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ . Per questioni di caratteristica 2,  $gx^2 = (gx)^2$ . Notiamo allora che  $W = \langle x^2, y^2 \rangle$  è una sottorappresentazione di  $S^2V$  che non ammette un complementare.

**Esercizio 4.46.** Se  $\mathrm{char} \mathbb{K} = p$  allora  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$  e  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  non sono completamente riducibili.

<sup>4</sup>Definiamo un prodotto scalare in modo da definire il supplementare come l'ortogonale a  $U$  rispetto a questa forma. La  $G$ -stabilità deriva dall'ipotesi sul coniugio complesso.

**Proposizione 4.47.** Se  $G$  è completamente riducibile allora  $G$  non ha sottogruppi unipotenti normali non banali.

*Dimostrazione.*

Sia  $W$  tale che  $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$  (definizione di gruppo algebrico lineare).

Sia  $V$  una rappresentazione irriducibile di  $G$  e sia  $U \subseteq G$  un sottogruppo normale unipotente. Poiché  $V \neq (0)$  e  $U$  unipotente,  $V^U \neq 0$  per il corollario (4.26). Poiché  $U$  è normale,  $V^U$  è stabile per  $G$  e quindi  $V^U = V$ , cioè  $U$  agisce banalmente su tutte le rappresentazioni irriducibili. Questo mostra che per la mappa  $G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  si ha che  $U$  finisce in  $\{id_W\}$  perché  $G$  è completamente riducibile, ma questa mappa è iniettiva e quindi  $U = \{id_G\}$ .  $\square$

#### 4.4.1 Caratteri, Tori e Gruppi abeliani connessi Semisemplici

Uno degli esempi più importanti di gruppi completamente riducibili sono i tori algebrici:

**Definizione 4.48.** Un gruppo  $G$  è un **toro (algebrico)** se  $G \cong (\mathbb{G}_m)^n$ .

**Osservazione 4.49.** Ricordando che  $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$  notiamo che

$$\mathbb{K}[\mathbb{G}_m^n] = \mathbb{K}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

Questo spazio ha una base data da  $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$  per  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ .

**Proposizione 4.50** (Tori algebrici sono semisemplici). Se  $G$  toro algebrico allora  $G$  è semisemplice.

*Dimostrazione.*

Se  $g = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $h = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  sono elementi di  $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{K}^\times)^n$  si ha che

$$\begin{aligned} (gt^\alpha)(h) &= t^\alpha(g^{-1}h) = t^\alpha(\lambda_1^{-1}\mu_1, \dots, \lambda_n^{-1}\mu_n) = \\ &= (\lambda_1^{-1}\mu_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_n^{-1}\mu_n)^{\alpha_n} = \\ &= \lambda^{-\alpha} \mu^\alpha = \\ &= (\lambda^{-\alpha} t^\alpha)h. \end{aligned}$$

Segue che  $gt^\alpha = \lambda^{-\alpha} t^\alpha$  e che quindi i  $t^\alpha$  sono autovettori per ogni  $g \in G$ . Poiché

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K}t^\alpha$$

e ogni  $\mathbb{K}t^\alpha$  è semisemplice, segue (4.8) che  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice.

Quindi le rappresentazioni semplici di  $G$  sono di dimensione 1 e sono date da  $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}t^{-\alpha}$  con  $gz = t^\alpha(g)z$   $\square$

**Definizione 4.51** (Caratteri di un gruppo). Dato un gruppo algebrico  $G$  definiamo un **carattere** di  $G$  come un omomorfismo di gruppi

$$\alpha : G \rightarrow \mathrm{GL}(1) = \mathbb{K}^\times.$$

L'insieme dei caratteri  $X(G)$  forma un gruppo abeliano:

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) = \beta(g)\alpha(g) = (\beta\alpha)(g).$$

**Teorema 4.52.** Sia  $G$  un gruppo abeliano connesso completamente riducibile, allora  $G$  è un toro algebrico.

*Dimostrazione.*

Notiamo che ogni elemento di  $G$  è semisemplice: se  $g \in G$  allora per la decomposizione di Jordan (4.15) si ha  $g = su$  con  $u$  unipotente in  $G$ . Poiché  $G$  è abeliano,  $\langle u \rangle$  è un suo sottogruppo normale, quindi per la proposizione sopra (4.47) si ha che  $\langle u \rangle = \{1_G\}$ , cioè  $u = 1_G$ . Dunque  $g = s1_G = s$ , cioè  $g$  è semisemplice.

Poiché  $G$  è abeliano, gli elementi commutano. Dato che ogni elemento è semisemplice (cioè in ogni rappresentazione è diagonalizzabile), si ha che per ogni rappresentazione esiste una base di autovettori dove ogni elemento di  $G$  è *simultaneamente* diagonalizzabile. In particolare le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.

Consideriamo allora una decomposizione di  $\mathbb{K}[G]$  che rende ogni elemento di  $G$  diagonalizzabile

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$$

dove  $\mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$  sono le funzioni regolari  $f$  tali che  $gf = \alpha(g)f$ . Notiamo che

$$\alpha(gh)f = (gh)f = g(hf) = g(\alpha(h)f) = \alpha(h)gf = \alpha(h)\alpha(g)f$$

quindi  $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ . Questo ci permette di identificare questa decomposizione con

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in X(G)} V_\alpha, \quad \text{dove } V_\alpha = \{h \in \mathbb{K}[G] \mid gh = \alpha(g)h\}.$$

Per ogni carattere  $\alpha \in X(G)$  definiamo  $f_\alpha = \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times) \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}) = \mathbb{K}[G]$ . Sfruttando il fatto che  $\alpha$  è un omomorfismo si ha  $f_\alpha \in V_\alpha$ , infatti

$$\begin{aligned} (gf_\alpha)(x) &= f_\alpha(g^{-1}x) = \alpha^{-1}(g^{-1}x) = (\alpha(g^{-1}x))^{-1} = \\ &= (\alpha(g)^{-1}\alpha(x))^{-1} = (\alpha(x))^{-1}\alpha(g) = \\ &= \alpha(g)\alpha^{-1}(x) = \\ &= \alpha(g)f_\alpha(x). \end{aligned}$$

Se  $h$  ha carattere  $\alpha$ , cioè  $gh = \alpha(g)h$ , allora per ogni  $g \in G$

$$\frac{h(1_G)}{f_\alpha(1_G)} = \frac{\alpha(g^{-1})h(1_G)}{\alpha(g^{-1})f_\alpha(1_G)} = \frac{g^{-1}h(1_G)}{g^{-1}f_\alpha(1_G)} = \frac{h(g1_G)}{f_\alpha(g1_G)} = \frac{h(g)}{f_\alpha(g)},$$

cioè  $h$  è un multiplo di  $f_\alpha$  (in particolare  $n_\alpha = 1$  nella scrittura sopra).

Mostriamo che  $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$  per qualche  $n$  mostrando che è un gruppo abeliano finitamente generato libero da torsione:

**fin.gen.** Sappiamo che  $\mathbb{K}[G]$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata quindi consideriamo dei generatori  $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_m}$ . Come  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale,  $\mathbb{K}[G]$  è generato da elementi della forma

$$f_{\alpha_1}^{n_1} \cdots f_{\alpha_m}^{n_m},$$

il quale ha carattere  $\prod \alpha_i^{n_i}$ . Questo mostra che i caratteri  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sono dei generatori di  $X(G)$ .

**tor.free** Per assurdo supponiamo esista  $\alpha \neq 1$  tale che  $\alpha^N = 1$ , cioè  $\alpha(g)^N = 1$  per ogni  $g \in G$ . Notiamo che

$$G = \coprod_{\substack{\omega \in \mathbb{K}^\times \text{ t.c.} \\ \omega^N = 1}} \{g \mid \alpha(g) = \omega\},$$

ma poiché  $G$  è connesso, questa unione disgiunta di chiusi deve consistere di un solo termine, mostrando che  $\alpha$  assume solo il valore 1 contraddicendo le ipotesi.

Abbiamo quindi mostrato che  $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$ . Sia  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  una sua base. Se scriviamo  $x_i = f_{\alpha_i}$  troviamo

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \langle f_\alpha \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus \langle x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

e in questa decomposizione il prodotto è esattamente quello che ci aspetteremmo. Se scriviamo  $\alpha = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_n^{m_n}$  allora  $f_\alpha = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ , dunque abbiamo proprio mostrato che

$$\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{K}[(\mathbb{K}^\times)^n].$$

Essendo sia  $G$  che  $(\mathbb{K}^\times)^n$  affini questo mostra che sono isomorfi.  $\square$

**Osservazione 4.53.** Il gruppo dei caratteri di un toro è dato da un reticolo  $\mathbb{Z}^n$ .

# Capitolo 5

## Quozienti

### 5.1 Realizzazione geometrica di quozienti e insiemi delle classi

In generale, l'esistenza di quozienti in geometria algebrica è un argomento molto complicato. Per evitare questo limite *restringiamo l'attenzione allo studio di insiemi delle classi*. Se  $G$  è un gruppo algebrico e  $H$  è un sottogruppo allora possiamo pensare all'insieme delle classi come la varietà quoziente  $G/H$ , cioè il quoziente di  $G$  tramite l'azione di  $H$  indotta in modo ovvio. In questo caso il quoziente esiste grazie ad un lemma che esponiamo nella sezione seguente.

In questa sezione dunque pensiamo a  $G$  come una varietà della quale cerchiamo un quoziente e ad  $H$  come il gruppo algebrico che agisce su questa varietà.

#### 5.1.1 Costruzione

Il seguente lemma sarà molto utile nella realizzazione geometrica dei quozienti.

**Lemma 5.1.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e  $H$  sottogruppo di  $G$ , allora

1. Esistono una rappresentazione di dimensione finita  $V$  di  $G$  e una retta  $L \subseteq V$  tali che  $H = \text{stab}_G L = \{g \in G \mid g(L) = L\}$
2. Se  $H$  è normale allora  $V$  si può scegliere in modo che sia somma dei  $V_\alpha$  per  $\alpha \in X(H)$  e  $V_\alpha = \{v \in V \mid h \cdot v = \alpha(h)v\}$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo le due affermazioni

1. Sia<sup>1</sup>  $I_H \subseteq \mathbb{K}[G]$  l'ideale che definisce  $H$ , allora

$$H = \{g \in G \mid g(I_H) = I_H\}$$

<sup>1</sup>L'idea di questo punto è mostrare che  $H$  è lo stabilizzatore di  $I_H$ . Da questo intersecando con una rappresentazione di dimensione finita che contiene i generatori di  $I_H$  si ha che  $H$  è lo stabilizzatore di un particolare sottospazio vettoriale dentro un altro spazio, cioè stabilizza un punto in una Grassmanniana. A questo punto basta considerare l'immersione di Plücker e abbiamo che  $H$  è lo stabilizzatore di una retta.

$\subseteq$  Se  $g \in H$  e  $f \in I_H$  allora  $gf(k) = f(g^{-1}k)$ , quindi se  $k \in H$  allora  $g^{-1}k \in H$  e quindi questa funzione vale 0, cioè  $gf \in I_H$ . L'altra inclusione segue dallo stesso ragionamento fatto su  $g^{-1}$ .

$\supseteq$  Se  $g^{-1}(I_H) \subseteq I_H$  allora per ogni  $f \in I_H$

$$f(g) = \underbrace{(g^{-1}f)}_{\in I_H}(e) = 0$$

cioè  $g \in H$ .

Consideriamo ora dei generatori  $f_1, \dots, f_m$  per  $I_H$  e sia  $V_0 \subseteq \mathbb{K}[G]$  una  $G$ -sottorappresentazione di dimensione finita che contiene ogni  $f_i$ . Consideriamo il sottospazio vettoriale  $W_0 = I_H \cap V_0$  e notiamo che

$$H = \{g \in G \mid g(W_0) = W_0\}.$$

$\subseteq$  Ovvio per quanto detto sopra.

$\supseteq$  Se  $g(W_0) = W_0$  allora  $g(I_H) = I_H$ , infatti  $g(I_H) \subseteq I_H$  ovvio per costruzione di  $W_0$ , l'altra inclusione segue dal fatto che  $g(W_0) = W_0 \iff g^{-1}(W_0) = W_0$ .

Sia  $\dim W_0 = m$ . Poniamo

$$V = \bigwedge^m V_0, \quad L = \bigwedge^m W_0 \subseteq \bigwedge^m V_0.$$

Per concludere basta mostrare che

$$H = \{g \in G \mid g(L) = L\}$$

$\subseteq$  Se  $g(W_0) = W_0$  allora chiaramente

$$g(L) = g\left(\bigwedge^m W_0\right) = \bigwedge^m g(W_0) = \bigwedge^m W_0 = L.$$

$\supseteq$  Notiamo che se  $u_1, \dots, u_m$  è una base di  $U \subseteq V$  sottospazio vettoriale allora

$$U = \{u \in V \mid u \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_m = 0\}.$$

Fissiamo una base  $w_1, \dots, w_m$  di  $W_0$  e osserviamo che  $gw_1, \dots, gw_m$  è una base di  $g(W_0)$ . Se  $g(L) = L$  allora per definizione

$$\langle gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m \rangle = \langle w_1 \wedge \dots \wedge w_m \rangle,$$

quindi per il criterio appena citato si ha che

$$\begin{aligned} W_0 &= \{v \in V \mid v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_m = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid u \wedge gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m = 0\} = g(W_0). \end{aligned}$$

2. Sia  $V' = \bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha \subseteq V$  con  $V$  di prima. Mostriamo che  $V'$  è  $G$ -invariante: Se  $v_\alpha \in V_\alpha$  per  $\alpha \in X(H)$ ,  $h \in H$  e  $g \in G$  allora

$$h \cdot (gv_\alpha) = (gg^{-1}hg) \cdot v_\alpha \stackrel{g^{-1}hg \in H}{=} g(\alpha(g^{-1}hg)v_\alpha) = \alpha(g^{-1}hg)gv_\alpha,$$

cioè  $gv_\alpha$  è un autovettore per l'azione di  $h$  per un qualsiasi  $g \in G$  e  $h \in H$ , ovvero  $V'$  è  $G$ -invariante.

Per concludere è dunque sufficiente mostrare che  $L \subseteq V'$ , ma abbiamo già visto che

$$g(w_1 \wedge \cdots \wedge w_m) = gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m = \lambda(g)w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$$

per qualche  $\lambda(g)$  per ogni  $g \in H$ , quindi  $L \subseteq V_\lambda$ .

□

**Osservazione 5.2.** Se  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e  $\pi: G \rightarrow X = G \cdot L$  è la mappa ovvia, allora  $\pi$  è  $G$ -equivariante e induce una bigezione tra  $G/H$  e  $X$ .

Questa mappa risulta in realtà essere un valido quoziante categorico. Mostreremo nel resto della sezione i risultati coinvolti

**Proposizione 5.3.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e  $H$  un sottogruppo, allora l'insieme delle classi  $G/H$  può essere identificato con una varietà quasiproiettiva.

*Dimostrazione.*

Siano  $H < G$  e  $L, V$  come nel lemma. Dato che  $G$  agisce su  $V$  si ha che esso agisce anche su  $\mathbb{P}(V)$ . Interpretando  $L \in \mathbb{P}(V)$  abbiamo che l'insieme delle classi coincide con l'orbita  $X = G \cdot L = G/\text{stab}_G(L) = G/H$ . Definiamo la varietà proiettiva

$$Y = \overline{G \cdot L} \subseteq \mathbb{P}(V).$$

Concludiamo mostrando che  $X$  è aperto in essa: data la mappa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Y \\ g & \longmapsto & gL \end{array},$$

per il teorema (2.25) si ha che  $X$  contiene un aperto  $U$  di  $Y$ . Se  $x \in U \subseteq X$  allora  $gx \in gU \subseteq X$  quindi

$$X = \bigcup_{g \in G} gU \text{ è aperto.}$$

□

Nel caso in cui il sottogruppo è normale sappiamo che l'insieme delle classi è un gruppo. Quello che si scopre è che effettivamente in questo caso  $G/H$  è un gruppo algebrico (anche se la costruzione che diamo sotto è diversa da quella sopra):

**Proposizione 5.4.** Se  $H$  è normale,  $G/H$  è un gruppo algebrico affine.

*Dimostrazione.*

Costruiamo  $L$  e  $V = \bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha$  come nel punto 2. del lemma (5.1). Sia

$$W = \{T : V \rightarrow V \mid \forall \alpha \in X(H), T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha\}$$

e notiamo che  $G$  agisce su  $W$  come  $gT = g \circ T \circ g^{-1}$ . Per rendere valido quanto detto dobbiamo verificare che  $gTg^{-1}(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$ , ma questo segue dal fatto che se  $g^{-1}(V_\alpha) = V_\beta$  allora

$$gTg^{-1}(V_\alpha) = gT(V_\beta) \subseteq gV_\beta = V_\alpha.$$

Notiamo ora che

$$\left\{ g \in G \mid g|_W = id_W \right\} \stackrel{(*)}{=} \left\{ g \in G \mid g|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha} \quad \forall \alpha \in X(H) \right\} \stackrel{(**)}{=} H.$$

- (\*) Notiamo che  $g|_W = id_W$  significa che per ogni  $T \in W$  abbiamo  $gTg^{-1} = T$ , cioè  $gT = Tg$ . L'uguaglianza segue scrivendo le matrici associate a  $T$  e  $g$  visti come elementi di  $\mathrm{GL}(V)$ : Le matrici in  $W$  sono le diagonali a blocchi per la decomposizione  $\bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha$  e una matrice commuta con tutte le diagonali a blocchi per una data decomposizione se e solo se è a blocchi per la stessa decomposizione e in ogni blocco è multiplo dell'identità.
- (\*\*) Segue per doppia inclusione: Per definizione di carattere, gli elementi di  $H$  sono tali che  $h|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha}$ . Se invece  $g$  è tale che  $g|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha}$  allora in particolare  $g|_{V_\lambda}$  è un multiplo dell'identità per il blocco  $V_\lambda$  che contiene  $L$ , quindi  $g \cdot L = L$  ovvero  $g \in \mathrm{stab}_G(L) = H$ .

Abbiamo dunque costruito un omomorfismo di gruppi algebrici  $\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  il cui nucleo è  $H$ . Poiché  $\varphi(G)$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathrm{GL}(W)$  per il teorema (3.19) si ha che  $G/H \cong \varphi(G)$  eredita la struttura di gruppo algebrico lineare da  $\varphi(G)$ .  $\square$

Diamo due esempi dove il sottogruppo NON è normale:

**Esercizio 5.5.** Sia  $G = \mathrm{GL}(2)$  e  $H = B(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ . Sia  $V = \mathbb{K}^2$  e  $L = \mathbb{K}e_1$ , allora effettivamente  $H = \mathrm{stab}_G(L)$  e  $G \cdot L = \mathbb{P}(V)$  (ogni retta si ottiene da  $L$  applicando una trasformazione lineare), quindi<sup>2</sup>  $G/H \leftrightarrow \mathbb{P}(V)$ .

**Esercizio 5.6.** Sia  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $H = O(n, \mathbb{C})$ . Sia  $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  lo spazio delle matrici simmetriche. Se  $A \in V$  e  $g \in G$  agisce su  $A$  tramite

$$g \cdot A = gAg^\top$$

allora  $H = \mathrm{stab}_G(I_n)$  (stabilizzatore della matrice identità).

$$X = G \cdot I_n = \{gg^\top \mid g \in \mathrm{GL}(n)\} = \{A \in \mathrm{GL}(n) \mid A = A^\top\} \subseteq \overline{G \cdot I_n} = Y \subseteq \mathbb{P}(V).$$

### 5.1.2 Varietà omogenee

Nel seguito supporremo  $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ .

**Definizione 5.7.** Una varietà è **omogenea** rispetto al gruppo  $G$  se l'azione di  $G$  su  $X$  è transitiva.

**Corollario 5.8.** Se  $X$  è una varietà omogenea rispetto a  $G$ , allora  $X$  è liscia.

---

<sup>2</sup>Intuitivamente, questo risultato semplicemente afferma che l'insieme delle rette in  $V$  corrisponde all'orbita di una retta fissata tramite l'azione di  $\mathrm{GL}$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $X$  ha un aperto  $U$  di punti lisci, la tesi segue dal fatto che  $X = \bigcup_{g \in G} gU$ .  $\square$

**Corollario 5.9.** Se  $X$  e  $Y$  sono varietà omogenee per  $G$  e  $\varphi: X \rightarrow Y$  è  $G$ -equivariante, allora  $\varphi$  è liscia.

*Dimostrazione.*

Sicuramente  $\varphi$  è surgettiva, perché  $X$  e  $Y$  sono varietà omogenee per  $G$  e  $\varphi$  è  $G$ -equivariante. Per il teorema (2.67) esiste un aperto non vuoto  $U$  di  $Y$  tale che  $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$  è liscia. Allora si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(gU) & \xrightarrow{\varphi|_{g\varphi^{-1}(U)}} & gU \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}} & U \end{array}$$

Poiché  $Y = \bigcup gU$ ,  $\varphi$  è liscia in ogni punto e quindi è liscia.  $\square$

### 5.1.3 Quoziente categorico

Sfruttando quanto detto sulle varietà omogenee possiamo dimostrare il seguente lemma, il quale ci permette di mostrare l'universalità del quoziente

$$\pi: G \rightarrow X = G \cdot L.$$

**Lemma 5.10.** Se  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e  $\pi: G \rightarrow X$  è la proiezione sull'insieme delle classi come in (5.3) allora per ogni varietà  $Z$ , la mappa

$$G \times Z \xrightarrow{(\pi, id)} X \times Z$$

è aperta.

*Dimostrazione.*

Notiamo che  $\pi$  è  $G$ -equivariante e che sia  $G$  che  $X$  sono varietà  $G$ -omogenee. Segue che  $\pi$  è liscia. Segue dunque che per ogni varietà  $Z$  la mappa  $(\pi, id): G \times Z \rightarrow X \times Z$  è liscia e quindi tale mappa è anche aperta (2.68).  $\square$

**Proposizione 5.11.** Se  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e  $\pi: G \rightarrow X$  è la proiezione sull'insieme delle classi come in (5.3), si ha che per ogni aperto  $U$  di  $X$  vale<sup>a</sup>

$$\pi^*: \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U)))^H.$$

<sup>a</sup>Questo è in realtà un risultato generale sui fasci di struttura quando facciamo un quoziente di spazi localmente anulati.

*Dimostrazione.*

Sia  $U$  un aperto di  $X$ , poniamo  $V = \pi^{-1}(U)$ , e consideriamo la mappa

$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_G(V)^H.$$

Osserviamo che tale mappa è iniettiva, infatti se  $f(\pi(x)) = 0$  per ogni  $x$  in  $V = \pi^{-1}(U)$ , si ha  $f(y) = 0$  per ogni  $y$  in  $U$  per surgettività di  $\pi$ , per cui  $f = 0$ . L'immagine di  $\pi^*$  è contenuta negli  $H$ -invarianti perché

$$(h \cdot (\pi^*(f)))(g) = f(\pi(h^{-1}g)) \stackrel{X=G/H}{=} f(\pi(g)) = \pi^*(f).$$

Resta solo da mostrare che la mappa  $\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_G(V)^H$  è surgettiva.

Come primo passo ci riduciamo al caso di  $U$  irriducibile:

In  $G$  le componenti connesse coincidono con le componenti irriducibili (3.17). Lo stesso vale per  $X$ , infatti se  $G^0$  è la componente连通的 di  $1_G$  allora da  $X = G/H$  troviamo che  $X^0 = G^0/H \cap G^0$  è aperto e  $X$  è unione finita disgiunta dei traslati di  $X^0$  ( $G$  ha finite componenti irriducibili per Noetherianità).

Se  $U$  è un aperto di  $X$  allora

$$X = X^0 \sqcup g_1 X^0 \sqcup \cdots \sqcup g_n X^0 \implies U = U \cap X^0 \sqcup \cdots \sqcup U \cap g_n X^0.$$

Poiché  $X^0$  irriducibile i suoi aperti sono irriducibili. Se verifichiamo la tesi per ogni  $U \cap g_i X^0$  allora data  $f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))^H$  possiamo trovare una preimmagine considerando l'insieme delle preimmagini per le varie restrizioni  $f|_{\pi^{-1}(U \cap g_i X^0)} \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U \cap g_i X^0))^H$ , infatti una tale collezione da proprio un elemento di  $\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_X(U \cap g_i X^0) = \mathcal{O}_X(U)$ .

Sia  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  regolare  $H$ -invariante e consideriamo il grafico  $\Gamma(f) \subseteq V \times \mathbb{K}$ . Sia  $g$  la fattorizzazione (insiemistica per ora)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & U = V/H \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ \mathbb{K} & & \end{array}$$

Decomponiamo  $V$  in irriducibili  $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$  e per irriducibilità di  $U$  deve essere il caso che  $H$  agisce transitivamente su  $\{V_1, \dots, V_n\}$ .

Per il lemma (5.10) sappiamo che  $(\pi, id) : G \times \mathbb{K} \rightarrow X \times \mathbb{K}$  è una mappa aperta, quindi la restrizione  $\psi : V \times \mathbb{K} \rightarrow U \times \mathbb{K}$  resta aperta perché  $V \times \mathbb{K}$  è un aperto di  $G \times \mathbb{K}$ . Segue che<sup>3</sup>  $\psi(\Gamma(f)) = \Gamma(g)$  è un chiuso di  $U \times \mathbb{K}$ . In realtà notando che  $\Gamma(g)$  è  $H$  invariante e che esso è immagine di  $\Gamma(f) = \bigcup \Gamma(f) \cap V_i$  si ha che in realtà possiamo scrivere  $\Gamma(g)$  solo come immagine di un singolo  $\Gamma(f) \cap V_i$ , in particolare è irriducibile (altrimenti potremmo decomporre  $V$  ulteriormente).

Consideriamo ora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(g) & \xhookrightarrow{\quad} & U \times \mathbb{K} \\ & \searrow q & \downarrow p_U \\ & & U \end{array}$$

<sup>3</sup>Se  $(v, f(v)) \in \Gamma(f)$  allora  $\psi(v, f(v)) = (\pi(v), f(v)) = (\pi(v), g(\pi(v))).$

dove  $p_U$  è la proiezione su  $U$  e  $q$  è la restrizione a  $\Gamma(g)$ . Chiaramente  $q$  è regolare in quanto composizione di regolari.  $q$  è anche bigettiva perché  $(u, g(u)) \mapsto u$  può essere facilmente invertita. Poiché  $U$  è liscio e  $\Gamma(g)$  irriducibile, per il teorema di Zariski (2.42) si ha che  $q$  è un isomorfismo, quindi la mappa  $u \mapsto (u, g(u))$  un morfismo e in particolare  $g$  stesso è un morfismo. Questo mostra che  $\pi^*$  effettivamente è surgettiva perché abbiamo trovato  $g \in \mathcal{O}_X(U)$  tale che  $\pi^*(g) = g \circ \pi = f$ .  $\square$

Siamo pronti per mostrare la proprietà universale dei quozienti

**Teorema 5.12.** Per ogni  $G$ -varietà  $Y$  e per ogni  $y_0$  in  $Y$  tale che  $H$  è contenuto in  $\text{stab}_G(y_0)$ , vale la seguente proprietà: se  $\varphi: G \rightarrow Y$  è la mappa definita da  $\varphi(g) = gy_0$ , allora esiste un'unica  $\psi: X \rightarrow Y$  tale che  $\psi \circ \pi = \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \psi & \\ X & & \end{array}$$

dove  $X \cong G/H$  è la varietà quasiproiettiva di (5.3).

*Dimostrazione.*

Insiematicamente, la mappa  $\psi: gH \mapsto gy_0$  è definita. Inoltre  $\psi$  è continua: se  $U$  è un aperto di  $Y$ , allora

$$\psi^{-1}(U) = \pi(\pi^{-1}(\psi^{-1}(U))) = \pi(\varphi^{-1}(U)),$$

che è aperto per il lemma (5.10). Dato un aperto  $U$  di  $Y$ , verifichiamo che l'immagine della mappa

$$\psi^*: \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \text{Hom}_{(\text{Set})}(\psi^{-1}(U), \mathbb{K})$$

è contenuta nell'insieme delle funzioni regolari su  $X$ . Consideriamo una funzione  $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ . Allora  $\tilde{f} := f \circ \psi \circ \pi = f \circ \varphi$  è in  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$  in quanto  $\varphi$  è un morfismo di varietà. Mostriamo che in realtà è in  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))^H$ . Sia  $\lambda$  in  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$  e sia  $h$  in  $H$ . Allora per ogni  $x$  in  $G$  si ha

$$(h\tilde{f})(x) = \tilde{f}(xh) = f(\varphi(xh)) = f(xhy_0) = f(xy_0) = f(\varphi(x)) = \tilde{f}(x).$$

Dato che  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))^H = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(U))$  per la proposizione (5.11) questo conclude.  $\square$

## 5.2 Sottogruppi generati e “algebre di Lie”

**Lemma 5.13.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e siano  $X_i$  delle varietà irriducibili. Siano  $\varphi_i: X_i \rightarrow G$  tali che  $1_G \in \text{Imm } \varphi_i$  per ogni  $i$ . Poniamo  $Y_i = \varphi_i(X_i)$ . Sia  $H = \langle \{Y_i\}_i \rangle$  il sottogruppo generato dalle immagini delle  $\varphi_i$ . Allora

1.  $H$  è chiuso
2. esistono  $i_1, \dots, i_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  tali che

$$H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_j \in \{1, -1\}$$

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $X_i = Y_i \subseteq G$  con  $\varphi_i$  date dall'inclusione<sup>4</sup>. Supponiamo inoltre che tra le  $X_i$  compaiano anche le  $X_i^{-1}$ , in modo da poter semplificare la notazione evitando gli esponenti  $\varepsilon_j$ . Definiamo iterativamente

$$\begin{cases} Z_0 = \{1_G\} \\ Z_{kn+i+1} = Z_{kn+i} \cdot X_{i+1} \quad \text{se } k \in \mathbb{N}, i \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

e poniamo  $W_i = \overline{Z_i}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

Notiamo che  $Z_i$  è l'immagine di  $X_1 \times \dots \times X_i \rightarrow G$ , quindi  $Z_i$  è irriducibile per ogni  $i$ , dunque anche  $W_i = \overline{Z_i}$  è irriducibile. Segue dunque che

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots \subseteq G$$

è una catena di chiusi irriducibili e, dato che  $G$  ha dimensione finita, essa stabilizza, cioè esiste  $N$  tale che  $W_N = W_{N+i}$

Un qualsiasi elemento di  $H$  è contenuto in qualche  $Z_i$  per costruzione, quindi in particolare  $H \subseteq W_N$ . Mostriamo che  $W_N = Z_N \cdot Z_N$ : abbiamo una mappa

$$\underbrace{X_1 \times \dots \times X_N}_{irrid.} \rightarrow Z_N \rightarrow W_N,$$

quindi per il teorema (2.25)  $Z_N \supseteq U$  per  $U$  aperto non vuoto di  $W_N$  (e quindi denso per irriducibilità), dunque<sup>5</sup>  $U \cdot U = W_N$ .

Questo mostra che  $W_N \subseteq H$  ma ci sono tutti gli elementi di  $H$  quindi effettivamente  $H = W_N$ .  $\square$

**Osservazione 5.14** (Dimensione del quoziente). Sia  $\varphi : G \rightarrow G/H$  e ricordiamo che una mappa di questo tipo è liscia per omogeneità. Allora per il teorema (2.66) abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e H \rightarrow T_e G \xrightarrow{d\varphi_e} T_e(G/H) \rightarrow 0$$

da cui  $\dim(G/H) = \dim G = \dim H$ .

**Proposizione 5.15.** Supponiamo  $\text{char } \mathbb{K} = 0$ . Siano  $H, K \subseteq G$  sottogruppi connessi, allora<sup>a</sup>

$$H \subseteq K \iff T_e H \subseteq T_e K \text{ in } T_e G.$$

<sup>a</sup>Questo risultato è analogo alla corrispondenza tra sottogruppi di Lie connessi di un gruppo di Lie e sottoalgebre di Lie.

*Dimostrazione.*

L'implicazione  $\implies$  è ovvia quindi basta mostrare l'altra.

<sup>4</sup>l'immagine di una varietà irriducibile è irriducibile.

<sup>5</sup>Per ogni  $g \in W_N$  fissiamo  $f : W_N \rightarrow W_N$  data da  $f(a) = a^{-1}g$ . Questa mappa è ben definita perché  $W_N \cdot W_N \subseteq W_N$  ed è evidentemente continua. Dato che  $U$  è aperto,  $f^{-1}(U)$  è aperto e quindi interseca  $U$  in quanto  $U$  è denso. Segue dunque che esiste  $u \in U \cap f^{-1}(U)$ , cioè  $u^{-1}g = v \in U$ , ovvero  $g = u \cdot v \in U \cdot U$ .

Sia  $X = H \cdot K \subseteq G$  e notiamo che è omogeneo rispetto all'azione di  $H \times K$  data da  $(h, k) \cdot g = hgk^{-1}$ . Osserviamo che  $X$  è aperto in  $\overline{X} \subseteq G$  per il teorema (2.25) (contiene un aperto della chiusura ed è omogeneo in quanto orbita di  $e$ ). Si ha

$$X \cong \frac{H \times K}{\text{stab}_{H \times K}(e)}.$$

Studiando lo stabilizzatore notiamo che

$$\text{stab}_{H \times K}(e) = \{(h, k) \mid hk^{-1} = e\} = \{(h, k) \mid h = k\} \cong H \cap K,$$

dunque per il teorema (2.66) abbiamo  $\dim X = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$  e una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e(H \cap K) \rightarrow T_e(H \times K) \rightarrow T_eX \rightarrow 0$$

da cui segue  $\dim T_eX = \dim T_eH + \dim T_eK - \dim T_e(H \cap K)$ .

Se  $T_eX = T_eH + T_eK$  allora

$$\dim(T_eX) = \dim(T_eH + T_eK) \stackrel{T_eH \subseteq T_eK}{=} \dim T_eK,$$

dunque

$$\dim X = \dim T_eX = \dim T_eK = \dim K$$

e quindi  $K \subseteq X \subseteq \overline{X}$  con  $K$  e  $\overline{X}$  irriducibili chiusi della stessa dimensione, dunque  $K = X = \overline{X}$ , e poiché  $X = H \cdot K$  questo mostra

$$K = X = H \cdot K \implies H \subseteq K$$

che è la tesi.

Per concludere basta dunque dimostrare che  $T_eX = T_eH + T_eK$ . Consideriamo la composizione

$$\begin{array}{ccc} H \times K & \rightarrow & H \times K & \rightarrow & X \\ (h, k) & \mapsto & (h, k^{-1}) & & \\ & & (h', k') & \mapsto & h'(k'^{-1}) \end{array}$$

che è la mappa di moltiplicazione  $\mu|_{H \times K}$ . Dal teorema (2.66) ricaviamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e(\text{stab}_{H \times K}(e)) \rightarrow \underbrace{T_e(H \times K)}_{T_eH \times T_eK} \rightarrow T_eX \rightarrow 0$$

In particolare  $d(\mu|_{H \times K})_{(e,e)}$  è surgettiva, quindi per concludere basta mostrare che

$$d(\mu|_{H \times K})_{(e,e)}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

Dato che  $G \subseteq \text{GL}(n)$  è sufficiente che la tesi valga per  $\text{GL}(n)$  e  $d\mu_{(e,e)}$ . Notiamo che  $\text{Mat}_{n \times n} = T_I \text{GL}(n)$  dove l'identificazione è data da

$$(a_{i,j}) \longleftrightarrow \left( a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I \right)$$

Traduciamo allora  $d\mu_{(e,e)}$  in queste coordinate: se

$$\begin{array}{ccc} d\mu_{(e,e)} & \text{Mat}_{n \times n} \times \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & \text{Mat}_{n \times n} \\ & ((a_{i,j}), (b_{i,j})) & \longmapsto & (c_{i,j}) \end{array}$$

allora

$$\begin{aligned}
c_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(x_{i,j} \circ \mu) \Big|_I = \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \left( \sum_{\ell} y_{i,\ell} z_{\ell,j} \right) \Big|_I = \\
&= \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,\ell}}(y_{i,\ell}) z_{\ell,j} \Big|_I + \sum_{\ell} y_{i,\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(z_{\ell,j}) \Big|_I \stackrel{(\star)}{=} \\
&= \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,\ell}) \Big|_I \delta_{\ell,j} + \sum_{\ell} \delta_{i,\ell} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{\ell,j}) \Big|_I = \\
&= \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,j}) \Big|_I + \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j}) \Big|_I = \\
&= a_{i,j} + b_{i,j}
\end{aligned}$$

dove il passaggio  $(\star)$  segue perché stiamo interpretando quei differenziali come derivazioni.  $\square$

## 5.3 Quando quozienti di gruppi sono completi

### 5.3.1 Gruppi risolubili e commutatori

Ricordiamo la seguente definizione

**Definizione 5.16.** Un gruppo  $G$  è **risolubile** se la catena dei suoi sottogruppi derivati termina nel gruppo banale, cioè, se  $G = G^{(0)}$  e  $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$  allora chiediamo che  $G^{(n)} = \{id_G\}$  per  $n \gg 0$ .

**Lemma 5.17.** Sia  $G$  un gruppo algebrico connesso. Allora  $[G, G]$  è chiuso e connesso.

*Dimostrazione.*

Per ogni  $i$  definiamo

$$\phi_i : \begin{array}{ccc} G^i \times G^i & \longrightarrow & G \\ (x_1, \dots, x_i), (y_1, \dots, y_i) & \longmapsto & [x_1, y_1] \cdots [x_i, y_i] \end{array} .$$

Per il lemma (5.13) segue che il sottogruppo di  $G$  generato  $\text{Imm } \phi_i$  (cioè  $[G, G]$  per definizione) è chiuso. Notiamo però che  $\overline{\text{Imm } \phi_i}$  è una catena di chiusi irriducibili contenuta in  $[G, G]$  che stabilizza, quindi in particolare  $[G, G] = \overline{\text{Imm } \phi_n}$  per qualche  $n$  e dunque  $[G, G]$  è anche irriducibile.  $\square$

### 5.3.2 Punto fisso di Borel

**Proposizione 5.18** (Esiste orbita chiusa). Se  $G$  è un gruppo che agisce su una varietà  $Y$  allora  $G$  ha un'orbita chiusa in  $Y$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo un'orbita che ha dimensione minima  $Z = G \cdot y$ . Notiamo che  $Gy$  è un aperto denso di  $\overline{Z}$  (contiene un aperto per il teorema (2.25) ed è omogeneo), quindi  $\dim \overline{Z} \setminus Z < \dim Z$ , ma se questa differenza non fosse vuota allora  $G$  agirebbe su essa e quindi esisterebbe un'orbita di dimensione più piccola.

Dunque  $\overline{Z} \setminus Z = \emptyset$ , cioè  $\overline{Z} = Z$ .  $\square$

Quindi orbite di dimensione minima sono chiuse. Sotto quali condizioni questa orbita è la più piccola possibile? Sotto quali condizioni abbiamo un punto fisso?

**Lemma 5.19.** Se  $G$  è un gruppo algebrico che agisce su una varietà separata  $X$  allora  $X^G$  è chiuso in  $X$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni  $g \in G$  sia  $X^g$  il sottoinsieme dei punti di  $X$  fissati dall'azione di  $G$ . Dato che  $X^G = \bigcap_{g \in G} X^g$  basta mostrare che  $X^g$  è chiuso.

$X^g$  è la preimmagine della diagonale  $\Delta(X)$  tramite il morfismo  $(1, g) : X \rightarrow X \times X$ , quindi per separatezza di  $X$  è chiusa.  $\square$

**Teorema 5.20** (Punto fisso di Borel). Se  $G$  è un gruppo risolubile connesso che agisce su una varietà completa allora esiste un punto fisso per l'azione.

*Dimostrazione.*

Se  $\dim G = 0$  allora  $G = \{id\}$  per connessione, quindi ogni punto è fisso.

Supponiamo  $\dim G > 0$ . Sia  $H = [G, G]$  il sottogruppo derivato. Questo è un sottogruppo algebrico connesso per il lemma (5.17). Dato che  $G$  è risolubile,  $H \subsetneq G$ , quindi per ipotesi induuttiva  $X^H \neq \emptyset$ .

Notiamo ora che su  $X^H$  agisce  $A = G/H$ , quindi su  $X^H$  abbiamo un'orbita chiusa (5.18)  $A \cdot x \subseteq X^H$ . Dato che  $X^H$  è chiuso in  $X$  per il lemma (5.19),  $A \cdot x$  è chiusa in  $X$  e quindi è completa perché chiuso in  $X$  che è completa. Dato che  $x \in X^H$  si ha che  $A \cdot x = G \cdot x$ . Dato che  $[G, G] = H \subseteq \text{stab}_G x$ , si ha che  $\text{stab}_G x$  è un sottogruppo normale di  $G$ , quindi  $G \cdot x = G/\text{stab}_G x$  è una varietà affine per (5.4). Notiamo che  $A \cdot x$  è anche connessa perché  $A$  è connesso in quanto  $G$  lo è.

Dunque  $A \cdot x$  è affine, completa e connessa, quindi è un punto, cioè  $x$  è un punto fisso per  $A$  in  $X^H$ , ma allora  $x$  è un punto fisso per  $G$ .  $\square$

**Esempio 5.21.** Consideriamo  $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^n$  come segue:

$$\lambda \cdot [x_0 : \dots : x_n] = [x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda^n x_n]$$

Questa azione ha come punti fissi quelli della forma  $[0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0]$ .

Ricordiamo che  $B_n$  è il sottogruppo di  $\text{GL}(n)$  costituito dalle matrici triangolari superiori.

**Corollario 5.22.** Se  $G$  è connesso, sono equivalenti

1.  $G$  è risolubile.
2. Le uniche rappresentazioni irriducibili di  $G$  sono di dimensione 1.
3. Esiste un intero positivo  $n$  tale che  $G$  è contenuto in  $B_n$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo le tre implicazioni

1.  $\implies$  2. Sia  $V$  una rappresentazione irriducibile di  $G$ . Allora  $\mathbb{P}(V)^G$  è non vuoto per il teorema del punto fisso (5.20), cioè esiste una retta  $\ell$  in  $V$  tale che  $G \cdot \ell = \ell$ . Quindi  $\ell = V$ , da cui  $\dim V = 1$ .
2.  $\implies$  3. Assumiamo  $G$  contenuto in  $\mathrm{GL}(V)$  per qualche  $V$ . Sia  $F_1$  una sottorappresentazione irriducibile di dimensione 1. Notiamo che  $G$  agisce su  $V/F_1$  quindi, invocando nuovamente l'ipotesi, esiste una retta  $F_2/F_1$  in  $V/F_1$  tale che  $GF_2/F_1 \subseteq F_2/F_1$ . Procedendo induttivamente, troviamo una bandiera

$$0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = V$$

tale che  $GF_i = F_i$  e  $\dim F_i = i$ . Se  $v_1, \dots, v_n$  è una base compatibile con tale bandiera (cioè  $v_i \in F_i$  per ogni indice  $i$ ), allora abbiamo un'immersione  $G \hookrightarrow B_n$  definita da  $g \mapsto [g]_v^v$ .

3.  $\implies$  1. Segue dal fatto che  $B_n$  è risolubile.

□

### 5.3.3 Sottogruppi parabolici e di Borel

Abbiamo visto che i sottogruppi normali danno come quozienti gruppi algebrici (e quindi affini) e che in generale i quozienti di gruppi algebrici sono varietà quasi-proiettive.

È lecito chiedersi quando il quoziente è proiettivo.

**Definizione 5.23.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e  $P \subseteq G$  sottogruppo chiuso.

1.  $P$  si dice **parabolico** se  $G/P$  è completo
2.  $B \subseteq G$  si dice **sottogruppo di Borel** se è un sottogruppo risolubile connesso massimale.

**Proposizione 5.24.** Se  $P$  è un sottogruppo parabolico,  $G/P$  è proiettiva.

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che esistono una rappresentazione  $V$  di  $G$  e una retta  $L \subseteq V$  tali che  $\mathrm{stab}_G L = P$  per il lemma (5.1). Per questa rappresentazione  $G/P = G \cdot L \subseteq \mathbb{P}(V)$ .

Mostriamo che l'immagine di  $G/P$  in  $\mathbb{P}(V)$  è chiusa. Se  $\Gamma$  è il grafico di  $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$  allora esso è un chiuso (per separatezza) di  $G/P \times \mathbb{P}(V)$ . Dato che  $G/P$  è completa per definizione di sottogruppo parabolico,  $G/P \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  è una mappa chiusa, quindi l'immagine di  $\Gamma$  in  $\mathbb{P}(V)$  è chiusa, ma questa immagine è per definizione anche l'immagine di  $G/P \rightarrow \mathbb{P}(V)$ .

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & \subseteq & G/P \times \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & G/P & & \end{array}$$

□

**Esempio 5.25.** Sia  $G = \mathrm{GL}(n)$ ,  $B \subseteq G$  le matrici triangolari superiori, diagonale inclusa.

$$G/B = \{0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = \mathbb{K}^n \mid \dim F_i = i\} =: \mathcal{F}\ell(\mathbb{K}^n)$$

**Lemma 5.26.**  $G$  è un gruppo connesso e risolubile se e solo se  $G$  non ha sottogruppi parabolici propri.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni

⇒ Sia  $P \subseteq G$  parabolico. Per il teorema del punto fisso di Borel (5.20) si ha che  $G/P$  ha un punto fisso per  $G$ , ma per omogeneità questo significa che  $G/P$  consiste di un solo punto, cioè  $P = G$ .

⇐ Osserviamo che  $G^0$  è un sottogruppo parabolico, infatti  $G/G^0$  è un insieme finito di punti (uno per componente irriducibile di  $G$ ). Per ipotesi dunque  $G^0 = G$  e quindi il gruppo è connesso.

Per il corollario (5.22) possiamo concludere verificando che le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1: se  $V$  irriducibile,  $G$  agisce su  $\mathbb{P}(V)$  e ha un'orbita chiusa  $G \cdot \ell \subseteq \mathbb{P}(V)$  per (5.18). Sia  $P = \mathrm{stab}_G(\ell)$ , questo gruppo deve essere parabolico perché il quoziente è  $G \cdot \ell$  orbita chiusa in  $\mathbb{P}(V)$ , ma allora  $P = G$ , cioè  $G \cdot \ell = \{\ell\}$  e quindi per irriducibilità questo mostra  $V = \ell$ .

□

**Lemma 5.27** (Transitività dei sottogruppi parabolici). Siano  $G$  un gruppo algebrico,  $P \subseteq Q \subseteq G$  due sottogruppi tali che  $Q$  è parabolico in  $G$  e  $P$  è parabolico in  $Q$ . Allora  $P$  è parabolico in  $G$ .

*Dimostrazione.*

Data una varietà arbitraria  $Z$ , mostriamo che la mappa  $\pi_Z: G/P \times Z \rightarrow Z$  è chiusa. Sia  $A$  un chiuso in  $G/P \times Z$ . Sia  $A'$  l'immagine inversa di  $A$  rispetto la proiezione  $\pi_1: G \times Z \rightarrow G/P \times Z$ . Allora  $A'$  è chiuso e  $A' \cdot P = A'$ . Se mostriamo che  $A' \cdot Q = A'$ , abbiamo concluso, infatti, considerando la composizione

$$\begin{array}{ccccccc} G \times Z & \rightarrow & G/Q \times Z & \rightarrow & Z \\ A' & \rightarrow & A'' & \rightarrow & \pi_Z(A) \end{array}$$

l'immagine di  $A'$  tramite la prima mappa è un certo  $A''$ , che viene mandato in  $\pi_Z(A)$ . Sia  $A''' = A' \cdot Q$ . Mostriamo che  $A'''$  è chiuso (ciò permette di concludere per quanto appena detto). Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Q \times G \times Z & \longrightarrow & G \times Z \\ (q, g, x) & \longmapsto & (gq, x) \end{array}$$

Allora  $A^{IV} := \varphi^{-1}(A')$  è chiuso ed è stabile per l'azione a destra di  $P$  su  $Q$ , cioè se  $(q, g, x)$  è in  $A^{IV}$ , allora  $(gp, g, x)$  è in  $A^{IV}$ . Infatti se  $(gq, x)$  è in  $A'$ , allora anche  $(gqp, x)$  è in  $A'$ . Ragionando come prima, abbiamo

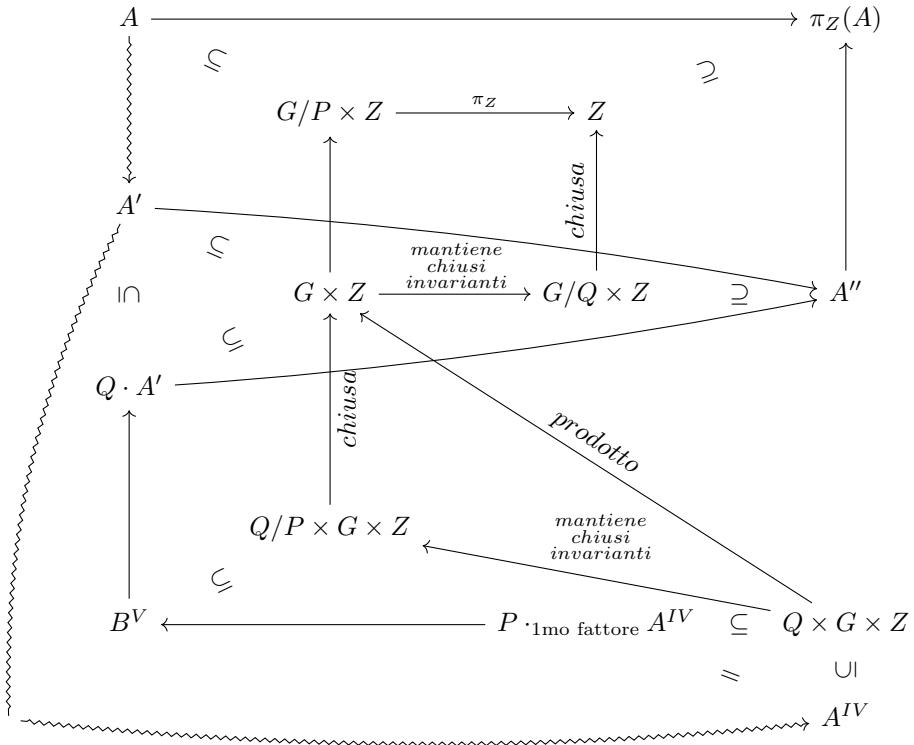
$$\begin{array}{ccccc} Q \times G \times Z & \rightarrow & Q/P \times G \times Z & \rightarrow & G \times Z \\ A^{IV} & \rightarrow & B^V & \rightarrow & A^V \text{ chiuso} \end{array}$$

dove

$$A^V = \{(g, x) \in G \times Z : \exists q \in Q, (gq, x) \in A'\} = A' \cdot Q.$$

A questo punto  $A' \cdot Q$  è chiuso e concludiamo come prima.

Per seguire meglio i passaggi può essere utile questo diagramma. Le frecce ondulate indicano che il target è stato ottenuto come preimmagine tramite la mappa tra i due spazi.



□

Con tecniche simili, è possibile mostrare il seguente risultato.

**Teorema 5.28.** Se  $G$  è un gruppo algebrico connesso,  $B$  un sottogruppo di Borel di  $G$  e  $P$  un sottogruppo parabolico di  $G$ , allora

1.  $N_G(B) = B$  e  $N_G(P) = P$ .
2.  $P$  è connesso.

**Teorema 5.29.** Sia  $G$  un gruppo algebrico.

1. Se  $B$  è un sottogruppo di Borel di  $G$ , allora  $B$  è parabolico.
2. Se  $B$  è un sottogruppo di Borel di  $G$  e  $P$  è un sottogruppo parabolico di  $G$ , allora esiste  $g$  in  $G$  tale che  $gBg^{-1}$  è contenuto in  $P$ .
3. Tutti i sottogruppi di Borel sono coniugati.

*Dimostrazione.*

Mostriamo contemporaneamente il primo e il secondo punto. Per i punti 1. e 2. possiamo supporre  $G$  connesso. Dato che  $B$  è connesso,  $B \subseteq G^0$  quindi  $G/B = \coprod_i g_i G^0 / B$  e  $gBg^{-1} \subseteq G^0$ .

2. Se  $G$  è risolubile, allora per definizione di sottogruppo di Borel  $G = B$  e la tesi vale perché un gruppo connesso e risolubile non ha sottogruppi parabolici propri (5.26). Se  $G$  non è risolubile, allora per il lemma (5.26) esiste un sottogruppo parabolico proprio  $P$  di  $G$ . Possiamo quindi considerare l'azione di  $B$  su  $G/P$ , la quale ha un punto fisso (5.20), cioè esiste un  $g$  in  $G$  tale che  $gBg^{-1}P = P$ , ovvero  $gBg^{-1} \subseteq P$ .
1. Possiamo assumere  $B \subseteq P \subsetneq G$  grazie al punto 2., per cui  $B$  è un sottogruppo di Borel di  $P$ . A questo punto procediamo per induzione sulla dimensione di  $G$ . Poiché  $\dim P < \dim G$ , abbiamo che  $B$  è un sottogruppo parabolico di  $P$  per ipotesi induttiva, dunque per il lemma (5.27) si ha che  $B$  è parabolico in  $G$ .
3. Siano  $B, B'$  due sottogruppi di Borel di  $G$ . Allora esiste  $g$  in  $G$  tale che  $gBg^{-1} \subseteq B'$  per il punto 2. Poiché  $gBg^{-1}$  e  $B'$  sono sottogruppi connessi, risolubili e massimali, concludiamo che  $gBg^{-1} = B'$ .

□

**Corollario 5.30.** Se  $B \subseteq G$  è parabolico, connesso e risolubile allora è di Borel.

*Dimostrazione.*

Per il punto 2. del teorema (5.29) si ha che  $B$  contiene un sottogruppo di Borel, ma essendo connesso e risolubile deve essere già un sottogruppo di Borel per massimalità.

□

**Corollario 5.31.** Se  $B \subseteq H \subseteq G$  sono sottogruppi e  $B$  è di Borel allora  $H$  è parabolico.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che la mappa di proiezione  $G/B \rightarrow G/H$  è surgettiva,  $G/B$  è una varietà completa e  $G/H$  è separata, quindi  $G/H$  è completa, cioè  $H$  è parabolico.  $\square$

Sia  $\mathcal{B}$  la famiglia dei sottogruppi di Borel di un gruppo algebrico  $G$ . Allora  $G$  agisce per coniugio (e transitivamente) su  $\mathcal{B}$ . Per il Teorema (5.28) abbiamo  $\text{stab}_G(B) = N_G(B) = B$ , da cui deduciamo il seguente risultato.

**Corollario 5.32.** Sia  $B$  un sottogruppo di Borel di un gruppo algebrico  $G$ . Esiste una corrispondenza biunivoca tra la famiglia  $\mathcal{B}$  e la varietà  $G/B$ , data da

$$\begin{array}{ccc} G/B & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ gB & \longmapsto & gBg^{-1}. \end{array}$$

## 5.4 Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici

Citiamo il seguente teorema per la sua utilità in alcuni degli esempi:

**Teorema 5.33** (Witt). Se  $V$  spazio vettoriale,  $b$  forma simmetrica non degenere,  $W_1, W_2$  sottospazi di  $V$  e  $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$  isomorfismo che preserva  $b$ , allora  $\varphi$  si estende a  $V$  e continua a preservare  $b$ .

### 5.4.1 Matrici invertibili

Fissiamo  $G = \text{GL}(n)$ .

**Lemma 5.34.** Il sottogruppo  $B_n \subseteq \text{GL}(n)$  delle matrici triangolari superiori è di Borel.

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $B_n$  è connesso e risolubile. Mostriamo che è massimale.

Sia  $H$  un sottogruppo risolubile connesso contenente  $B_n$ . Essendo risolubile e connesso,  $H$  si triangolarizza rispetto a una bandiera  $F_1 \subset \cdots \subset F_n$  per la caratterizzazione (5.22). Poiché  $H \cdot F_i = F_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si ha anche  $B_n \cdot F_i = F_i$  per ogni indice  $i$ . Poiché  $B_n$  è lo stabilizzatore in  $G$  di ogni bandiera  $F_1 \subset \cdots \subset F_n$ , si ottiene  $H = B_n$ .  $\square$

**Esempio 5.35** (Grassmanniane come quoziente di  $\text{GL}(n)$ ). Fissiamo  $1 \leq h < n$  e sia  $P$  il sottogruppo di  $G$  dato dalle matrici triangolari superiori a blocchi con due blocchi, il primo dei due di taglia  $h$ . Segue che per questo gruppo  $G/P \cong \text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$ . Considerando l'azione transitiva di  $G$  segue che  $P \cong \text{stab}_G(e_1, \dots, e_h)$ <sup>6</sup>. Dato che  $P$  contiene  $B_n$ ,  $P$  è parabolico per (5.31), quindi  $G/P \cong \text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$  è proiettiva.

<sup>6</sup>o ogni altro sottospazio di dimensione  $h$  fissato.

Descriviamo adesso una immersione esplicita in  $\mathbb{P}(V)$  per qualche spazio vettoriale. Per farlo possiamo seguire il procedimento indicato dalla dimostrazione del punto 1. del lemma (5.1) e dalla proposizione (5.3).

Cerchiamo uno spazio vettoriale  $V$  contenente una retta  $L$  fissata da  $P$ . Consideriamo  $V = \bigwedge^h(\mathbb{K}^n)$  e  $L = \bigwedge^h W$ , dove  $W$  è il sottospazio generato da  $e_1, \dots, e_h$ . Abbiamo già visto che, fissato  $g$  in  $G$ , si ha  $gL = L$  se e solo se  $gW = W$ . Quindi  $\text{stab}_G L = \text{stab}_G W = P$ . La mappa che immerge  $G/P$  in  $\mathbb{P}(V)$  secondo questa procedura è  $[g] \mapsto gL$ . Notiamo però che

$$gL = \left( g \bigwedge^h W \right) = \left( \bigwedge^h gW \right)$$

quindi la mappa  $\text{Gr}(h, \mathbb{K}^n) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  corrispondente è

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}(h, \mathbb{K}^n) & & \\ \uparrow gW \leftrightarrow [g] & \nearrow U \mapsto \bigwedge^h U & \\ G/P & \xrightarrow{[g] \mapsto gL} & \mathbb{P}(V) \end{array}$$

Questa è la ben nota **immersione di Plücker**. Descriviamo la mappa in coordinate: considerando un sottospazio  $U \in \text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$  abbiamo

$$U = \langle v_1, \dots, v_h \rangle \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_h = \sum_{i_1 < \dots < i_h} p_{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}$$

dove  $p_{i_1, \dots, i_h}$  è il determinante del minore di  $M = (v_1 | \dots | v_h)$  corrispondente alle righe  $i_1, \dots, i_h$ . Quindi il punto di  $\mathbb{P}(V)$  scritto nelle coordinate omogenee corrispondenti alla base  $\{e_I\} = \{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}\}$  di  $V$  è

$$U = \langle v_1, \dots, v_h \rangle \mapsto [p_I(v_1, \dots, v_h)]_I$$

Se cambiamo base,  $U = \langle w_1, \dots, w_h \rangle$ , allora esiste una matrice invertibile  $A$  di taglia  $h$  tale che  $MA = N$ , dove  $N = (w_1 | \dots | w_h)$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} p_I(M) &= \det(M_{i_1, \dots, i_h}) \\ p_I(N) &= \det(N_{i_1, \dots, i_h}) = \det(M_{i_1, \dots, i_h} \cdot A) = p_I(M) \det(A). \end{aligned}$$

Quindi  $(v) \mapsto [p_I(M)]$  e  $(w) \mapsto [p_I(N)] = [p_I(M) \det(A)] = [p_I(M)]$  e la mappa è ben definita.

**Esempio 5.36** (Parabolici di  $\text{GL}(n)$ ). Sia  $P \supseteq B$  con  $P$  parabolico e  $B$  di Borel,  $P$  connesso. Notiamo che  $T_e P \supseteq T_e B = \{\text{triang.sup.}\}$ . Sia  $A = (a_{i,j}) \in T_e P$ . Si ha che  $B$  agisce per coniugio su  $P$ . In particolare se fissiamo  $b \in B$  allora definiamo

$$\begin{aligned} AD_b : \frac{P}{p} &\longrightarrow \frac{P}{pb^{-1}} & \rightsquigarrow Ad_b : \frac{T_e P}{C} &\longrightarrow \frac{T_e P}{bCb^{-1}} \end{aligned}$$

quindi  $T_e P \subseteq T_e \text{GL}(n) = \text{Mat}_{n \times n}$  è stabile per  $Ad_b$  per ogni  $b \in B$ . Se  $b = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  allora

$$Ad_b(A) = (\lambda_i \lambda_j^{-1} a_{i,j})$$

dunque se  $a_{i,j} \neq 0$  allora  $E_{i,j} \in T_e P$

### 5.4.2 Matrici ortogonali speciali

Consideriamo ora  $G = \mathrm{SO}(n)$ . Ricordiamo che per un campo algebricamente chiuso (di caratteristica diversa da 2) tutte le forme quadratiche inducono lo stesso prodotto scalare a meno di isometria, quindi in quanto segue cambiamo liberamente la forma in esame in base alla convenienza.

**Osservazione 5.37.**  $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ .

**Osservazione 5.38.**  $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{G}_m$ .

*Dimostrazione.*

Scegliamo la forma quadratica  $q(x, y) = xy$ . Lo stabilizzatore di tale forma è dato da

$$\left\{ A \in \mathrm{SO}(2) \mid A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Imponendo che  $A$  sia nello stabilizzatore della forma  $q$ , si trova  $b = c = 0$ . Poiché  $\det(A) = 1$ , troviamo  $d = a^{-1}$  e quindi  $\mathrm{SO}(2)$  è isomorfo a  $\mathbb{K}^\times$ .  $\square$

**Proposizione 5.39.**  $\mathrm{SO}(n)$  è connesso e ha dimensione  $\binom{n}{2}$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n \times n} \\ A & \longmapsto & A^\top A \end{array}.$$

Per costruzione  $\mathrm{O}(n) = \varphi^{-1}(I)$ . Abbiamo una mappa indotta tra gli spazi tangentici a  $I$

$$d\varphi_I : \begin{array}{ccc} T_I \mathrm{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & T_I \mathrm{Mat}_{n \times n} \\ B & \longmapsto & B + B^\top \end{array}$$

e per il teorema (2.66) si ha  $T_I \mathrm{SO}(n) = T_I \mathrm{O}(n) = \ker d\varphi_I$ . In particolare

$$\dim \mathrm{SO}(n) = \binom{n}{2}.$$

Mostriamo ora che  $\mathrm{SO}(n)$  è connesso per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  e  $n = 2$  sappiamo già che ciò è vero. Assumiamo  $n > 2$ . Consideriamo la forma quadratica standard rappresentata dalla matrice identità, consideriamo  $e_1$  in  $\mathbb{K}^n$  e

$$Y := \mathrm{SO}(n) \cdot e_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}$$

Poiché il polinomio  $x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$  è irriducibile, la varietà  $Y$  è connessa. Inoltre si ha  $Y \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ , che, in quanto connesso, ci permette di concludere.  $\square$

**Proposizione 5.40.**  $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SL}(2)/\{\pm I\}$ .

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $\mathrm{SL}(2)$  agisce su  $W := \mathbb{K}^2$ . Consideriamo la rappresentazione  $W \otimes W = S^2 W \oplus \bigwedge^2 V$ . Consideriamo la forma bilineare e simmetrica

$$b(u \otimes u', v \otimes v') = \det(u, v) \det(u', v').$$

Tale forma è  $\mathrm{SL}(2)$ -invariante, infatti, se  $g$  è in  $\mathrm{SL}(2)$ , allora  $\det(g) = 1$  e quindi

$$\begin{aligned} b(gu \otimes gu', gv \otimes gv') &= \det(gu, gv) \det(gu', gv') = \\ &= \det(g)^2 b(u \otimes u', v \otimes v') = \\ &= b(u \otimes u', v \otimes v'). \end{aligned}$$

Fissiamo una base  $e_{11} = e_1 \otimes e_1$ ,  $e_{12} = e_1 \otimes e_2$ ,  $e_{21} = e_2 \otimes e_1$ ,  $e_{22} = e_2 \otimes e_2$ . Allora

$$[b]_{e_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare  $b$  è non degenere. Inoltre, anche la restrizione  $\beta := b|_{S^2 W}$  è non degenere, in quanto  $S^2 W = \langle e_{11}, e_{22}, e_{12} + e_{21} \rangle$ . Abbiamo quindi definito una mappa

$$\mathrm{SL}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(\beta).$$

Imponendo  $ge_{11} = e_{11}$  e  $ge_{22} = e_{22}$ , troviamo  $g = \pm I$ , quindi abbiamo un'immersione  $\mathrm{SL}(2)/\{\pm I\} \hookrightarrow \mathrm{SO}(\beta)$ . Mostriamo che è suriettiva. Notiamo che la seguente mappa è un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2) \times \mathbb{K}^\times & \longrightarrow & \mathrm{SO}(3) \\ (A, \lambda) & \longmapsto & A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quindi  $\dim \mathrm{SL}(2) = 3$ . Per la proposizione (5.39) abbiamo che

$$\dim \mathrm{SO}(3) = 3 = \dim \mathrm{SL}(2)$$

e che  $\mathrm{SO}(3)$  è connesso, dunque il quoziente  $\mathrm{SL}(2)/\{\pm I\}$  è  $\mathrm{SO}(3)$ .  $\square$

**Osservazione 5.41.** Consideriamo il gruppo

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{SL}(2)$$

Sia  $V = \mathbb{K}^2$  e  $L = [e_1] \in \mathbb{P}(V)$ .  $\mathrm{SL}(2)$  agisce su  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$  transitivamente e lo stabilizzatore di  $L$  è  $B$ .

Se poniamo

$$W = S^n \mathbb{K}^2 = S^n V$$

allora, notando che  $e_1^n \in W$ , si ha che  $\mathrm{stab}_G[e_1^n] = B$ . Possiamo dunque descrivere il quoziente anche come

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1 \cong G/B = G[e_1^n] \subseteq \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(S^n V)$$

dove l'immersione è data da  $v \mapsto v^n$ . Questa mappa è un morfismo equivariante e una immersione chiusa  $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$ .

**Osservazione 5.42.** Se  $n = 2$  allora

$$\mathrm{SO}(3)/B_{\mathrm{SO}(3)} = \frac{\mathrm{SL}(2)/\pm id}{B_{\mathrm{SL}}/\pm id} = \frac{\mathrm{SL}(2)}{B_{\mathrm{SL}}}.$$

Lo spazio  $V = \mathbb{K}^2$  non è una rappresentazione di  $\mathrm{SO}(3)$  perché  $-id$  non agisce banalmente, ma  $S^2V$  è una rappresentazione di  $\mathrm{SO}(3)$ .

**Esempio 5.43.** Consideriamo la forma quadratica  $x_1x_3 = x_2^2$ , lo spazio  $V = \mathbb{K}^3$  e la retta  $L = \mathbb{K}(1 0 0)^\top$ . In  $\mathbb{P}(V)$  si ha che  $G \cdot L$  è la quadrica  $Q : x_1x_3 = x_2^2$  per il teorema di Witt (5.33). Notiamo anche che  $\mathrm{stab}(L) = B$ , quindi abbiamo una mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Q \\ [a:b] & \longmapsto & [a^2:ab:b^2] \end{array}.$$

### 5.4.3 Quoziente per sottogruppo di Borel

Sia  $G = \mathrm{SL}(n)$  e ricordiamo che il sottogruppo delle matrici triangolari superiori  $B$  è un sottogruppo di Borel.

$$G/B \cong \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}$$

**Definizione 5.44.** Definiamo le **varietà delle bandiere (flag variety)** come

$$\mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}(n)} = \mathrm{SL}(n)/B_{\mathrm{SL}(n)} = \mathcal{F}\ell(\mathbb{K}^n) = \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}.$$

Vogliamo un risultato analogo per  $\mathrm{SO}(n)$

**Osservazione 5.45.** Se consideriamo la forma quadratica standard  $q = x_1^2 + \cdots + x_n^2$  e interseco  $\mathrm{SO}(n) = \{A \mid A^\top A = I, \det A = 1\}$  con  $B_{\mathrm{SL}(n)}$  troviamo

$T^\top T = I$  e  $T$  triangolare superiore  $\implies T$  diagonale con entrate  $\pm 1$ ,

ovvero

$$B_{\mathrm{SO}(n)} = \left\{ \begin{array}{l} T \text{ diagonale con entrate sulla diagonale } 1 \\ \text{eccetto un numero pari di } -1. \end{array} \right\}$$

Consideriamo ora la forma quadratica associata a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

da cui  $\mathrm{SO}(J) = \{A \mid AJA^\top = J, \det A = 1\}$ . Osserviamo che  $J = J^{-1}$ .

**Proposizione 5.46.** Il sottogruppo di  $\mathrm{SO}(J)$  dato da

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), A \text{ triang. sup.} \right\},$$

dove  $M^{at}$  indica la trasposta di  $M$  rispetto all'altra diagonale, è un sottogruppo di Borel.

*Dimostrazione.*

Assumiamo  $n = 2m$ , il caso dispari è simile.

Notiamo che  $Jg^\top J^{-1} = Jg^\top J = g^{at}$ , cioè la trasposta di  $g$  rispetto all'altra diagonale. Scrivendo  $g$  triangolare superiore evidenziando blocchi di dimensione  $m$  troviamo

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Poiché  $g \in \mathrm{SO}(J)$  significa che  $gg^{at} = id$  con determinante 1,  $g$  triangolare superiore appartiene a  $\mathrm{SO}(J)$  se

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{at} & B^{at} \\ 0 & A^{at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^{at} & AB^{at} + BA^{at} \\ 0 & DA^{at} \end{pmatrix}$$

ovvero se  $D = (A^{at})^{-1}$  e  $(BA^{at})^{at} = -(BA^{at})$ . Il determinante di  $g$  è automaticamente 1 perché<sup>7</sup>  $\det D = (\det A)^{-1}$ . Dunque l'intersezione tra  $\mathrm{SO}(J)$  e le triangolari superiori è

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), A \text{ triang. sup.} \right\}.$$

Notiamo che  $B$  è connesso<sup>8</sup> e risolubile<sup>9</sup>. Se dimostriamo che  $B$  è parabolico allora è un sottogruppo di Borel per (5.30).

Sia  $\mathcal{E}$  la bandiera data dai vettori di base

$$E_1 = \langle e_1 \rangle \subseteq E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \cdots \subseteq E_n = \langle e_1, \dots, e_{2m} \rangle = \mathbb{K}^n.$$

Notiamo che  $\mathrm{stab}_{\mathrm{GL}(n)}(\mathcal{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)}$  e che  $\mathrm{stab}_{O(J)}(\mathcal{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)} \cap O(J) = B_{O(J)} = B_{\mathrm{SO}(J)} = B$ , dove la penultima uguaglianza segue perché tutte le matrici ortogonali triangolari superiori per la forma associata a  $J$  hanno già determinante 1. Notiamo che

$$O(J) \cdot \mathcal{E} \subseteq \{0 = F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_{2m} \mid \dim F_i = i, F_{m-i}^\perp = F_{m+i} \ \forall i \in \{0, \dots, m\}\} \subseteq \mathcal{F}\ell.$$

Per il teorema di Estensione di Witt (5.33) si ha che  $O(J) \cdot \mathcal{E}$  è esattamente lo spazio delle bandiere di quella forma, che chiamiamo  $\mathcal{F}$ . Vogliamo dimostrare che  $\mathcal{F}$  è chiuso, così per proiettività di  $\mathcal{F}\ell$  avremo mostrato che  $O(J)/B = O(J)/\mathrm{stab}_{O(J)} \mathcal{E} = O(J) \cdot \mathcal{E}$  è proiettivo. Sia

$$\mathcal{G} = \{g \in \mathrm{GL}(n) \mid gB_{\mathrm{GL}} \in \mathcal{F}\}$$

Poiché  $\mathcal{F}\ell = \mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}}$  basta<sup>10</sup> mostrare che  $\mathcal{G}$  è chiuso. Sia  $g = (v_1 \mid \cdots \mid v_{2m})$  e notiamo che  $g \in \mathcal{G}$  se e solo se  $b(v_i, v_j) = 0$  per  $i, j \leq m$ ,  $b(v_{m+\alpha}, v_i) = 0$  per  $i \leq m - \alpha$  e  $b(v_i, v_j) = 0$  per  $i + j \leq 2m$ . Queste sono condizioni chiuse quindi  $\mathcal{G}$  è chiuso.

Concludiamo notando che

$$O(J) = \frac{\mathrm{SO}(J) \sqcup g \mathrm{SO}(J)}{B}$$

per una qualsiasi  $g$  tale che  $\det g = -1$ ,  $g \in O(J)$ , dunque

$$\frac{O(J)}{B} = \frac{\mathrm{SO}(J)}{B} \sqcup g \frac{\mathrm{SO}(J)}{B}$$

e quindi  $\frac{\mathrm{SO}(J)}{B}$  è proiettivo come volevasi dimostrare.  $\square$

<sup>7</sup>  $\det M^{at} = \det(JM^\top J) = 1 \cdot \det M^\top \cdot 1 = \det M$ .

<sup>8</sup> connesso perché immagine di  $\{\text{triang.sup.invertibili}\} \times \{\text{antisimmetriche per l'altra diagonale}\}$

<sup>9</sup> per quanto appena detto è un sottogruppo di  $B_n$  e quindi invochiamo (5.22)

<sup>10</sup>  $\mathcal{F} = \mathcal{G}/B_{\mathrm{GL}}$  e  $\mathcal{G}$  è  $B_{\mathrm{GL}}$ -invariante.

Vogliamo descrivere la componente data da  $\mathrm{SO}(2m)/B$ .

**Teorema 5.47.** Sia  $V = \mathbb{K}^{2m}$  munito di una forma bilineare, simmetrica e non degenera  $b(\cdot, \cdot)$ . Siano  $L, M$  sottospazi isotropi (lagrangiani) di  $V$  tali che  $\dim L = \dim M$ . Allora

$$\exists g \in \mathrm{SO}(b): gL = M \iff \dim(L \cap M) \equiv m \pmod{2}.$$

*Dimostrazione.*

Scegliamo una base  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m}$  di  $V$  tale che  $e_1, \dots, e_m$  è base di  $L$  e tale che  $b$  è rappresentata in questa base dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre  $L' = \langle e_1, \dots, e_{m-1}, e_{2m} \rangle$ . Notiamo che  $L'$  è isotropo. Mostriamo che se  $g$  è un elemento di  $\mathrm{SO}(2m)$ , allora

$$\dim(gL \cap L) \equiv m \pmod{2} \quad (5.4.1)$$

$$\dim(gL \cap L') \not\equiv m \pmod{2} \quad (5.4.2)$$

Iniziamo mostrando la (5.4.1). Sia  $P$  il sottogruppo di  $\mathrm{SO}(b)$  costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Notiamo che una matrice di questa forma è in  $\mathrm{SO}(b)$  se e solo se  $A^\top = C^{-1}$  e  $B^\top C + C^\top B = 0$ , per cui

$$\dim P = \dim \mathrm{GL}(m) + \binom{m}{2} = m^2 + \binom{m}{2}.$$

Sia  $U$  il sottogruppo di  $\mathrm{SO}(b)$  costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix}$$

Osserviamo che una matrice di questo tipo appartiene a  $\mathrm{SO}(b)$  se e solo se  $X^\top = -X$ , cioè se e solo se  $X$  è antisimmetrica, quindi  $\dim U = \binom{m}{2}$ . Ne consegue che  $\dim P + \dim U = 2m^2 - m$ . Ricordiamo che  $\dim \mathrm{SO}(2m) = \dim \mathrm{O}(2m) = 2m^2 - m$ , infatti la mappa

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(2m) &\longrightarrow \mathrm{Sym}(2m) \\ A &\longmapsto AA^\top \end{aligned}$$

è surgettiva e ha nucleo  $\mathrm{O}(2m)$ , che quindi ha dimensione  $4m^2 - \binom{2m+1}{2} = 2m^2 - m$ . Consideriamo la mappa  $U \times P \rightarrow \mathrm{SO}(b)$  data da

$$\begin{aligned} U \times P &\xrightarrow{\sim} U \times P \longrightarrow \mathrm{SO}(b) \\ (u, p^{-1}) &\longmapsto (u, p) \longmapsto uIp \\ (u, p) &\longmapsto (u, p^{-1}) \longmapsto uIp^{-1} \end{aligned}$$

Ora  $UP$  è aperto in  $\overline{UP}$  e poiché  $U \cap P = \{I_{2m}\}$ , si ha

$$\dim(UP) = \dim(U \times P) = \dim \mathrm{SO}(2m),$$

da cui  $\overline{UP} = \text{SO}(2m)$ . Consideriamo gli aperti  $V_1 = UP$  e  $V_2 = PU$  in  $\text{SO}(2m)$ . Mostriamo che  $V_2 V_1 = \text{SO}(2m)$ . Sia  $g$  in  $\text{SO}(2m)$  e sia  $v_2$  nell'intersezione  $V_2 \cap gV_2$  (che è non vuota in quanto  $V_1$  e  $V_2$  sono aperti in una varietà irriducibile). Allora  $v_2 = gv'_2$  per qualche  $v'_2$  in  $V_2$ . Poiché  $(v'_2)^{-1} \in UP = V_1$ , si ha  $g = v_2(v'_2)^{-1} \in V_2 V_1$ . Ne deduciamo che

$$\text{SO}(2m) = PU \cdot UP = PUP$$

e quindi, posto  $g = p_1 up_2$ , si ha

$$\dim(gL \cap L) = \dim(p_1 up_2 L \cap L) = \dim(up_2 L \cap p_1^{-1}L) = \dim(uL \cap L).$$

Quindi ci siamo ridotti a considerare il caso di un elemento

$$u = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} \in U.$$

Osserviamo che, poiché  $L = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ , si ha

$$uL = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} e_i, \quad i = 1, \dots, m \right\},$$

quindi

$$uL \cap L = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} v \\ Xv \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{K}^m : Xv = 0 \right\} \cong \ker X,$$

da cui  $\dim(uL \cap L) = \dim(\ker X) = m - \text{rnk}(X) \equiv m \pmod{2}$  perché le matrici antisimmetriche hanno rango pari.

Mostriamo la (5.4.2). Sia  $g$  un elemento in  $\text{O}(2m)$ . Sappiamo che se  $g$  è in  $\text{SO}(2m)$ , allora  $\dim(gL \cap L) \equiv m \pmod{2}$ ; se invece  $g$  non è in  $\text{SO}(2m)$ , allora  $\dim(gL \cap L) \not\equiv m \pmod{2}$ . Sia  $h$  in  $\text{O}(2m) \setminus \text{SO}(2m)$  che scambia  $e_m$  con  $e_{2m}$  e lascia fissi gli altri  $e_i$ . Allora  $L' = hL$  ed esiste  $\tilde{g}$  in  $\text{SO}(2m)$  tale che  $g = h\tilde{g}$ . Dunque

$$\dim(gL \cap L) = \dim(h\tilde{g}L \cap L) = \dim(\tilde{g}L \cap L') \not\equiv m \pmod{2}$$

e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Esempio 5.48** (Caso  $m = 1$ ). Consideriamo  $V = \mathbb{K}^2$  munito della forma bilineare la cui forma quadratica associata è data da  $b(x, y) = xy$ . Allora i sottospazi isotropi  $\mathbb{K}e_1$  e  $\mathbb{K}e_2$  si intersecano banalmente e quindi non vengono scambiati dagli elementi di  $\text{SO}(b)$ . In effetti

$$\text{SO}(b) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{K}^\times \right\}.$$

**Esempio 5.49** (Caso  $m = 2$ ). Consideriamo  $\mathbb{K}^4$  con la forma quadratica

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Cerchiamo i sottospazi di dimensione 2 contenuti nel radicale della forma: cerchiamo quindi rette in  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$  contenute nella quadrica  $x_1x_4 = x_2x_3$ . Questa quadrica corrisponde a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  tramite la mappa  $([a : b], [c : d]) \mapsto [ac : ad : bc : bd]$ . Il gruppo  $\text{SO}(b)$  agisce su ciascun fattore  $\mathbb{P}^1$ , ma non scambia i due fattori tra loro.

## **Parte III**

# **Fibrati**

# Capitolo 6

## Fibrati vettoriali

**Definizione 6.1.** Un **fibrato vettoriale** di rango  $m$  su una varietà  $X$  è una mappa  $p: E \rightarrow X$  che soddisfa le seguenti proprietà. Lo spazio

$$E \times_X E := \{(a, b) \in E \times E \mid p(a) = p(b)\}$$

è munito di una mappa somma  $+: E \times_X E \rightarrow E$  e di un prodotto per scalare  $\cdot: \mathbb{K} \times_X E \rightarrow E$  tali che, detta  $q: E \times_X E \rightarrow X$  la proiezione  $q(a, b) := p(a) = p(b)$ , i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{array}{ccc} E \times_X E & \xrightarrow{+} & E \\ q \searrow & & \swarrow p \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times_X E & \xrightarrow{\cdot} & E \\ p \searrow & & \swarrow p \\ X & & \end{array}$$

Inoltre vale una condizione di trivializzazione locale, cioè per ogni  $x$  in  $X$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e una mappa lineare sulle fibre tale che

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & U \times \mathbb{K}^m \\ p \searrow & & \swarrow \pi_U \\ U & & \end{array}$$

**Esempio 6.2.**  $X \times \mathbb{K}^m$  con la mappa di proiezione su  $X$  è un fibrato vettoriale, detto **fibrato banale**.

**Esempio 6.3.** Sia  $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$  e consideriamo

$$E = \{(\ell, v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{K}^2 : v \in \ell\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$$

dove la somma è data da  $(\ell, v) + (\ell, w) = (\ell, v + w)$ . Questo è detto il **fibrato tautologico**.

**Esercizio 6.4.** Consideriamo la coppia  $(E, p)$  dell'esempio precedente. Mostrare che

1. È un fibrato vettoriale.

2. Non è il fibrato banale<sup>1</sup>.

## 6.1 Cocicli e banalizzazioni

**Osservazione 6.5.** Se  $p : E \rightarrow X$  è un fibrato vettoriale su  $X$  di rango  $m$  allora esiste un ricoprimento (finito)  $\{U_i\}$  di  $X$  tale che per ogni  $i$

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\sim} & U_i \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

**Definizione 6.6** (Cocicli). Dato un ricoprimento  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  di  $X$  definiamo gli **1-cocicli** relativi al ricoprimento come

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(m)) = \{\{\alpha_{i,j}\} \mid \alpha_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \mathrm{GL}(m), \alpha_{i,h} = \alpha_{j,h}\alpha_{i,j}, \alpha_{i,i}(u) = I_m\}.$$

**Definizione 6.7** (Cocatene). Dato un ricoprimento  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  di  $X$  definiamo le **0-cocatene** relative al ricoprimento come

$$C^0(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(m)) = \{\{\beta_i\} \mid \beta_i : U_i \rightarrow \mathrm{GL}(m)\}.$$

**Proposizione 6.8.** Se  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento banalizzante per il fibrato  $p : E \rightarrow X$  allora esso definisce dei cocili indotti dalle mappe di transizione.

*Dimostrazione.*

Se  $U_{i,j} = U_i \cap U_j$  allora abbiamo degli isomorfismi<sup>2</sup>

$$\varphi_{i,j} = \varphi_j|_{U_{i,j}} \circ \varphi_i|_{U_{i,j}}^{-1} : U_{i,j} \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_{i,j} \times \mathbb{K}^m$$

Sia  $\varphi_{i,j}(u, v) = (u, \alpha_{i,j}(u)(v))$ . Questo definisce delle mappe regolari

$$\alpha_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \mathrm{GL}(m).$$

Notiamo inoltre che su  $U_{i,j,h} \times \mathbb{K}^m$

$$\varphi_{j,h} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_h \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_{i,h}.$$

Vedendo queste identità in termini delle  $\alpha_{i,j}$  abbiamo mostrato

$$\alpha_{i,h}(u) = \alpha_{j,h}(u)\alpha_{i,j}(u).$$

Chiaramente  $\varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = id_{U_i \times \mathbb{K}^m}$  quindi  $\alpha_{i,i}(u) = I_m$ . □

<sup>1</sup>Una intuizione geometrica importante (seppur lontana da essere una dimostrazione) che giustifica la non banalità è che il fibrato banale di rango 1 “topologicamente” è un cilindro mentre il fibrato tautologico è un nastro di Möbius.

<sup>2</sup>da ora in poi eviteremo di scrivere ogni volta le restrizioni

**Osservazione 6.9** (Fuori programma). Se consideriamo delle mappe  $\mathrm{GL}(m) \times U_i \rightarrow U_i$  per ogni  $i$ , le  $\alpha_{i,j}$  danno i dati necessari per costruire il  $\mathrm{GL}(m)$ -torsore associato al fibrato.

**Proposizione 6.10.** Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento di  $X$ . Una collezione di cocicli  $\alpha \in Z^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(m))$  determina un fibrato vettoriale su  $X$ .

*Dimostrazione.*

Definiamo lo spazio totale come il seguente coprodotto fibrato in Top

$$E_\alpha := \frac{\coprod(U_i \times \mathbb{K}^m)}{(u, v) \sim (u, \alpha_{i,j}(u)(v))},$$

in particolare se  $\psi_i : U_i \times \mathbb{K}^m \rightarrow E_\alpha$  sono le mappe ovvie allora  $V$  è aperto in  $E_\alpha$  se e solo se  $\psi_i^{-1}(V)$  è aperto in  $U_i \times \mathbb{K}^m$  per ogni  $i$ .

$$\coprod_{i,j} U_{ij} \times \mathbb{K}^m \xrightarrow[\iota_j \circ \varphi_{i,j}]{} \coprod_i U_i \times \mathbb{K}^m \xrightarrow{(\psi_i)} E_\alpha$$

Se  $V$  è aperto in  $E_\alpha$  allora, poiché la regolarità è una condizione locale, poniamo<sup>3</sup>

$$f \in \mathcal{O}_{E_\alpha}(V) \iff f \circ \psi_i \in \mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(V)) \quad \forall i.$$

Affermiamo che  $\psi_i$  è iniettiva, aperta e regolare per ogni  $i$ :

**Iniettiva** Supponiamo  $\psi_i(u, v) = \psi_i(u', v')$ , allora

$$U_i \times \mathbb{K}^m \ni (u, v) \sim (u', v') \in U_i \times \mathbb{K}^m \xrightarrow{\alpha_{i,i} = id_{U_i}} u = u', \quad v = v'.$$

**Aperta** Se  $W \subseteq U_i \times \mathbb{K}^m$  aperto e  $\widetilde{W} = \psi_i(W) \subseteq E_\alpha$  allora dobbiamo verificare che  $\psi_j^{-1}(\widetilde{W})$  è aperto per ogni  $j$ . Consideriamo la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} (u, v) &\in \psi_j^{-1}(\widetilde{W}) \subseteq U_j \times \mathbb{K}^m \\ \psi_j(u, v) &\in \widetilde{W} = \psi_i(W) \\ \exists(u', v') &\in W \subseteq U_i \times \mathbb{K}^m \text{ t.c. } \psi_j(u, v) = \psi_i(u', v') \text{ in } E_\alpha \\ \exists(u', v') &\in W \text{ t.c. } U_j \times \mathbb{K}^m \ni (u, v) \sim (u', v') \in U_i \times \mathbb{K}^m \\ (u, \alpha_{j,i}(u)(v)) &\in W \end{aligned}$$

cioè  $\psi_j^{-1}(\widetilde{W})$  è la preimmagine di  $W$  tramite la mappa  $U_{i,j} \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$ , che è continua.

**Regolare**  $\psi_i$  è continua per definizione della topologia di  $E_\alpha$ . Essendo la regolarità una condizione locale, per come abbiamo definito la topologia su  $E_\alpha$  anche la condizione sui pullback è chiara.

Abbiamo dunque mostrato che  $\psi_i(U_i \times \mathbb{K}^m) \cong U_i \times \mathbb{K}^m$ .

La struttura vettoriale sulle fibre di  $E_\alpha$  è quella indotta dal coprodotto in modo ovvio.  $\square$

<sup>3</sup>nel linguaggio degli schemi, stiamo definendo il fascio di struttura di  $E_\alpha$ .

**Osservazione 6.11.** Se  $U_i$  è un aperto di  $X$  che banalizza  $p : E \rightarrow X$  notiamo che possono essere definiti diversi isomorfismi tra  $p^{-1}(U_i)$  e  $U_i \times \mathbb{K}^m$

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow \tilde{\varphi}_i & \swarrow \pi_{U_i} \\ & U_i & \end{array}$$

In particolare questi definiscono diverse mappe di transizione e diversi cocicli.

Studiamo la “differenza” tra le mappe di transizione:

$$\chi_i := \tilde{\varphi}_i \circ \varphi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$$

Come notazione scriviamo  $\chi_i(u, v) = (u, \beta_i(u)(v))$ . Notiamo che

$$\tilde{\varphi}_{i,j} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} = \tilde{\varphi}_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} = \chi_j \circ \varphi_{i,j} \circ \chi_i^{-1},$$

quindi in termini di cocicli  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$  o equivalentemente  $\tilde{\alpha}_{i,j} \beta_i = \beta_j \alpha_{i,j}$ .

Questo ci spinge a dare la seguente definizione:

**Definizione 6.12** (Coomologia). Definiamo due 1-cocicli  $\alpha_{i,j}$  e  $\tilde{\alpha}_{i,j}$  **equivalenti** (o **co-omologhi**) se esiste una 0-cocatena  $\beta_i : U_i \rightarrow \text{GL}(m)$  tale che  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$ . Definiamo il **primo insieme di coomologia** come

$$H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) = Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) / \sim.$$

**Teorema 6.13.** Se  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento aperto di  $X$  allora abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{Fibrati vett. che si banalizzano su } \mathcal{U}\} / \text{iso. di fibr.} \longleftrightarrow H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)).$$

*Dimostrazione.*

Ad un fibrato associa una collezione di cocicli e quindi una classe in coomologia. Questa associazione è ben definita perché cambiando cocicli associati alla stessa banalizzazione essi sono equivalenti per l’osservazione (6.11).

Cambiare rappresentante nella classe di isomorfismo del fibrato non cambia la classe di coomologia perché l’isomorfismo sugli aperti banalizzanti induce un automorfismo che corrisponde a cambiare cocicli.

Viceversa, dati dei cocicli sappiamo costruire un fibrato come in (6.10). Se  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  sono cocicli equivalenti allora mostriamo che  $E_\alpha \cong E_{\tilde{\alpha}}$  come fibrati. Se  $\beta_i$  sono tali che  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$  allora abbiamo una ovvia mappa tra i fibrati

$$\frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{\sim_\alpha} \xrightarrow{\coprod id_{U_i} \times \beta_i(u)(v)} \frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{\sim_{\tilde{\alpha}}}$$

che si verifica essere un isomorfismo (Esercizio).  $\square$

## 6.2 Operazioni sui fibrati

**Definizione 6.14** (Morfismo di fibrati). Se  $E \rightarrow X$  e  $F \rightarrow X$  sono fibrati, un **morfismo di fibrati**  $T : E \rightarrow F$  è un morfismo di varietà  $E \rightarrow F$  che commuta con i cocicli. Più precisamente, definite  $T_i$

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{T|_{E|_{U_i}}} & F|_{U_i} \\ \varepsilon_i \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\ \mathbb{K}^n \times U_i & \xrightarrow{T_i} & \mathbb{K}^m \times U_i \end{array}$$

dove  $\varepsilon_i$  e  $\varphi_i$  sono isomorfismi fissati, che inducono i cocicli  $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_j \varepsilon_i^{-1}$  e  $\varphi_{i,j} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$ , chiediamo che commuti il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^n \times U_{i,j} & \xrightarrow{T_j} & \mathbb{K}^m \times U_{i,j} & & \\ \varepsilon_{i,j} \uparrow & & \uparrow \varphi_j & & \\ E|_{U_{i,j}} & \xrightarrow{T} & F|_{U_{i,j}} & & \\ \varepsilon_i \downarrow & & \downarrow \varphi_i & & \\ \mathbb{K}^n \times U_{i,j} & \xrightarrow{T_i} & \mathbb{K}^m \times U_{i,j} & & \end{array}$$

cioè che valga la relazione

$$\varphi_{i,j} \circ T_i = T_j \circ \varepsilon_{i,j}.$$

**Osservazione 6.15.** Equivalentemente, un morfismo di fibrati da  $E \rightarrow X$  a  $F \rightarrow X$  è una morfismo  $E \rightarrow F$  compatibile con le mappe verso  $X$  che in ogni fibra induce una mappa lineare.

**Definizione 6.16** (Somma diretta). Dati due fibrati  $p_E : E \rightarrow X$  e  $p_F : F \rightarrow X$  possiamo definire la loro **somma diretta** come

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F \mid p_E(e) = p_F(f)\} \rightarrow X$$

dove la proiezione è definita mandando  $(e, f)$  in  $x = p_E(e) = p_F(f)$ .

**Osservazione 6.17.**  $E \oplus F$  è il prodotto fibrato su  $X$  dei due fibrati.

$$\begin{array}{ccc} E \oplus F & \longrightarrow & F \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow p_F \\ E & \xrightarrow{p_E} & X \end{array}$$

**Osservazione 6.18.** Se  $\varepsilon_{i,j}$  è un cociclo per  $E$  e  $\varphi_{i,j}$  per  $F$  allora  $\varepsilon_{i,j} + \varphi_{i,j}$  è un cociclo di  $E \oplus F$  (stiamo considerando un ricoprimento che banalizza sia  $E$  che  $F$ ).

**Definizione 6.19** (Prodotto tensore). Dati due fibrati  $p_E : E \rightarrow X$  e  $p_F : F \rightarrow X$  possiamo definire il loro **prodotto tensore**  $E \otimes F$  come il fibrato associato al cociclo

$$\varepsilon_{i,j} \otimes \varphi_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m)$$

dove  $n = \mathrm{rnk} E$  e  $m = \mathrm{rnk} F$ .

**Definizione 6.20** (Fibrato duale). Dato un fibrato  $p : E \rightarrow X$  definiamo il **fibrato duale** come quello associato al cociclo  $(\varepsilon_{i,j}^{-1})^\top : U_{i,j} \rightarrow \mathrm{GL}(n)$ .

**Proposizione 6.21.** Abbiamo un morfismo

$$E^* \otimes E \rightarrow \mathbb{K} \times X$$

dato mandando il cociclo  $\tilde{\varepsilon}_{i,j} := (\varepsilon_{i,j}^{-1})^\top \otimes \varepsilon_{i,j}$  a  $h_{i,j} = 1$ .

*Dimostrazione.*

Se ci restringiamo ad un ricoprimento  $\{U_i\}$  che banalizza  $E$  definiamo<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} T_i : (\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^n) \times U_i &\longrightarrow \mathbb{K} \times U_i \\ ((\lambda \otimes v), u) &\longmapsto (\lambda^\top v, u) \end{aligned}$$

e notiamo che queste  $T_i$  si incollano ad un mosrfismo di fibrati:

Data la definizione delle mappe di incollamento sui fibrati, verificare

$$h_{i,j} \circ T_i \circ \tilde{\varepsilon}_{i,j}^{-1} = T_j$$

mostra anche che le  $T_i$  si incollano come funzioni e questo incollamento sarà un morfismo di fibrati. La formula vale perché  $h_{i,j} = 1$  e

$$\begin{aligned} T_i(\tilde{\varepsilon}_{i,j}^{-1}((\lambda \otimes v), u)) &= T_i((\varepsilon_{i,j}^\top \otimes \varepsilon_{i,j}^{-1})((\lambda \otimes v), u)) = T_i((\varepsilon_{i,j}^\top \lambda \otimes \varepsilon_{i,j}^{-1}v), u) = \\ &= (\lambda^\top \varepsilon_{i,j} \varepsilon_{i,j}^{-1}v, u) = (\lambda^\top v, u) = \\ &= T_j((\lambda \otimes v), u). \end{aligned}$$

□

### 6.3 Sezioni di un fibrato

**Definizione 6.22** (Sezioni di un fibrato). Dato un fibrato vettoriale  $p : E \rightarrow X$  e dato un aperto  $U$  di  $X$ , definiamo le **sezioni** di  $U$  come

$$\Gamma(U, E) := \{\sigma : U \rightarrow E \mid p \circ \sigma = id_U\}.$$

<sup>4</sup> stiamo pensando a  $\lambda^\top v$  come la valutazione del funzionale  $\lambda$  nel vettore  $v$ , cioè stiamo considerando  $\lambda$  come un elemento di  $(\mathbb{K}^n)^*$ .

**Osservazione 6.23.**  $\Gamma(U, E)$  eredita la somma dal fibrato:

$$(\sigma + \tau)(u) = \sigma(u) + \tau(u)$$

dove il membro di destra è l'immagine della coppia  $(\sigma(u), \tau(u)) \in E \times_X E$  tramite la mappa  $+$ . Se  $f$  è in  $\mathcal{O}_X(U)$  e  $\sigma \in \Gamma(U, E)$ , allora è definito  $f \cdot \sigma$  in modo analogo.

Insieme questi fatti mostrano che  $\Gamma(U, E)$  è un  $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo.

**Esempio 6.24** (Sezioni del fibrato banale).

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{K}^m & \supseteq & U \times \mathbb{K}^m \\ \downarrow & & p \downarrow \nearrow \sigma \\ X & \supseteq & U \end{array}$$

Consideriamo  $\sigma(u) = (u, \alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u))$ , dove  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{K}$ . Allora

$$\Gamma(U, U \times \mathbb{K}^m) \cong \mathcal{O}_X(U)^m.$$

**Osservazione 6.25** (Fuori programma). L'associazione  $U \mapsto \Gamma(U, E)$  definisce un funtore controvariante. Questo funtore è detto *fascio delle sezioni di E*. Questo fascio è un  $\mathcal{O}_X$ -modulo localmente libero per quanto affermato nell'osservazione e l'esempio precedenti.

Studiamo ora le sezioni di un fibrato qualsiasi.

**Proposizione 6.26.** Siano  $p : E \rightarrow X$  un fibrato vettoriale e  $\mathcal{U}$  un ricoprimento banalizzante per questo. Dare  $\sigma \in \Gamma(X, E)$  è equivalente a dare delle  $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^m$  per ogni aperto del ricoprimento che verificano

$$\sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i \quad (\text{condizione di cociclo})$$

dove  $\alpha_{i,j}$  sono dei cocicli per il fibrato.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\varphi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$  e  $\alpha_{i,j}$  come prima. Se  $\sigma \in \Gamma(X, E)$  allora definiamo

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma|_{U_i} : U_i \rightarrow E|_{U_i} \quad e \quad \sigma_i := \pi_{\mathbb{K}^m} \circ \varphi_i \circ \tilde{\sigma}_i$$

in modo tale che

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \tilde{\sigma}_i : U_i &\longrightarrow U_i \times \mathbb{K}^m \\ u &\longmapsto (u, \sigma_i(u)) \end{aligned}$$

Su  $U_{i,j}$  abbiamo

$$\tilde{\sigma}_j = \varphi_{i,j} \circ \tilde{\sigma}_i, \quad \sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i$$

quindi da  $\sigma$  abbiamo trovato delle  $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^m$  che verificano  $\sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i$ .

Viceversa dati questi dati essi si possono incollare a  $\sigma : X \rightarrow E$  perché la condizione di cociclo garantisce che le  $\sigma_i$  coincidano sulle intersezioni degli aperti del ricoprimento.  $\square$

## 6.4 Fibrati vettoriali su varietà affini

**Osservazione 6.27.** Se  $X$  è una varietà affine,  $A = \mathbb{K}[X]$  e  $E$  è un fibrato vettoriale di rango  $m$  su  $X$  allora  $M = \Gamma(X, E)$  è un  $A$ -modulo.

**Osservazione 6.28.** Supponiamo che  $E$  si banalizzi su aperti affini  $X_i$  tali che<sup>5</sup>  $\mathbb{K}[X_i] = A_{f_i}$ . Siano  $\alpha_{i,j}$  i cocicli e consideriamo la mappa

$$J : \begin{array}{ccc} \bigoplus_i (A_{f_i})^m & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} (A_{f_i f_j})^m \\ (\sigma_i) & \mapsto & (\sigma_j - \alpha_{i,j} \sigma_i) \end{array}$$

Per quanto detto  $\Gamma(X, E) = \ker J$ .

**Proposizione 6.29.**  $\Gamma(X_f, E) = \Gamma(X, E)_f$

*Dimostrazione.*

Su  $X_f = U \subseteq X$  abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, E) & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i]^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j}]^m \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(U, E) & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i \cap U]^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j} \cap U]^m \\ & & \| & & \| & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, E)_f & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i]_f^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j}]_f^m \end{array}$$

dove l'uguaglianza in basso a sinistra (quella voluta) segue dalle altre due uguaglianze e dal fatto che tutte le righe del diagramma sono esatte.  $\square$

**Corollario 6.30.** Se  $E$  si banalizza su  $X_f$  allora

$$\Gamma(X, E)_f \cong \mathbb{K}[X_f]^m = (A_f)^m.$$

### 6.4.1 Caratterizzazione con i moduli proiettivi

Ricordiamo il seguente

**Teorema 6.31.**  $A$  locale e Noetheriano,  $M$  finitamente generato, allora

$$M \text{ è piatto} \iff M \text{ è proiettivo} \iff M \text{ è libero.}$$

**Lemma 6.32.** Sia  $A$  un anello,  $X$  un  $A$  modulo e  $M$  un  $A$ -modulo finitamente presentato, allora per  $\mathfrak{m}$  massimale di  $A$  abbiamo un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) \\ \varphi/s & \mapsto & \frac{u}{t} \mapsto \frac{\varphi(u)}{st} \end{array}$$

<sup>5</sup>ricordiamo che aperti di questo tipo formano una base per la topologia di Zariski.

*Dimostrazione.*

Se  $M$  è libero allora la tesi è vera in quanto

$$(\text{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} \cong (X^n)_{\mathfrak{m}} = X_{\mathfrak{m}}^n \cong \text{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}^n, X_{\mathfrak{m}}) = \text{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}})$$

e la mappa data è questo isomorfismo.

Se ora  $A^h \rightarrow A^k \rightarrow M \rightarrow 0$  è una presentazione finita di  $M$  costruiamo il diagramma commutativo con righe esatte<sup>6</sup>

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M, X)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}(A^k, X)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}(A^h, X)_{\mathfrak{m}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(A_{\mathfrak{m}}^k, X_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(A_{\mathfrak{m}}^h, X_{\mathfrak{m}}) \end{array}$$

Poiché le due mappe a destra sono isomorfismi anche la prima lo è per diagram chasing.  $\square$

**Teorema 6.33.** Sia  $A$  Noetheriano e  $M$  finitamente generato. Le seguenti sono equivalenti

1.  $M$  è proiettivo
2.  $M$  è piatto
3.  $M_{\mathfrak{m}}$  è libero per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale in  $A$
4.  $M$  è localmente libero, cioè esistono  $f_1, \dots, f_n \in A$  tali che  $(f_1, \dots, f_n) = A$  e  $M_{f_i}$  è libero.

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

- 1.  $\implies$  2. ovvio.
- 2.  $\implies$  3. ovvio per il teorema (6.31) dato che  $A_{\mathfrak{m}}$  è locale e  $M_{\mathfrak{m}}$  sarebbe piatto finitamente generato su locale noetheriano, quindi libero.
- 4.  $\implies$  3. Se  $\mathfrak{m}$  è massimale esiste  $f_i$  che non appartiene a  $\mathfrak{m}$ . Allora  $M_{\mathfrak{m}} = (M_{f_i})_{\mathfrak{m}}$  ma  $M_{f_i}$  è libero.
- 3.  $\implies$  1. Mostriamo che  $\text{Hom}_A(M, \bullet)$  è esatto. Consideriamo una successione esatta corta di moduli

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

e mostriamo che

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Z) \rightarrow 0$$

è esatta. Per fare ciò basta mostrare che per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale è esatta

$$0 \rightarrow (\text{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} \rightarrow (\text{Hom}_A(M, Y))_{\mathfrak{m}} \rightarrow (\text{Hom}_A(M, Z))_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$$

<sup>6</sup>le righe sono esatte per esattezza della localizzazione e esattezza a sinistra degli Hom

Per il lemma (6.32) la mappa

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) \\ \varphi/s & \longmapsto & \frac{u}{t} \mapsto \frac{\varphi(u)}{st} \end{array}$$

è un isomorfismo (poiché  $A$  noetheriano si ha che  $M$  è finitamente generato esattamente se e solo se è finitamente presentato). Otteniamo dunque un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M, X)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Y)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Z)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, Z_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

con mappe verticali date da isomorfismi, dunque la riga sopra è esatta se e solo se la riga sotto lo è, ma la riga sotto è esatta perché  $M_{\mathfrak{m}}$  è libero (e quindi proiettivo).

**3.  $\implies$  4.** Mostriamo che per ogni  $\mathfrak{m}$  esiste  $f \notin \mathfrak{m}$  tale che  $M_f$  è libero come  $A_f$  modulo. Questo è sufficiente perché  $X = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\max}(A)} X_f$  per queste  $f$  e per compattezza estraiamo un sottoricoprimento finito. Le  $f_i$  corrispondenti a questo ricoprimento per costruzione sono della forma cercata.

Mostriamo il claim: Poiché  $M_{\mathfrak{m}}$  è libero esso ha una base  $m_1, \dots, m_n$ . Consideriamo la mappa

$$0 \rightarrow A_{\mathfrak{m}}^n \xrightarrow{\alpha} M_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$$

che manda  $v_i$  in  $m_i$ , dove  $v_1, \dots, v_n$  è la base canonica di  $A_{\mathfrak{m}}^n$ . Per definizione della localizzazione esiste  $f \notin \mathfrak{m}$  tale che

$$v_i = \frac{u_i}{f}, \quad m_i = \frac{x_i}{f}, \quad \text{per } u_i \in A^n, \quad x_i \in M.$$

Segue dunque che abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A_f^n \rightarrow M_f \rightarrow 0$$

dato che l'unico elemento che appare al denominatore è  $f$ .

Notiamo che  $K$  è finitamente generato per Noetherianità, per esempio da  $w_1, \dots, w_t$ , e che  $K_{\mathfrak{m}} = 0$ , dunque esiste  $g \notin \mathfrak{m}$  tale che  $gw_i = 0$  per ogni  $i$ , cioè  $K_g = 0$ . Se allora localizziamo la successione di prima troviamo una nuova successione esatta

$$0 \rightarrow K_g \rightarrow A_{fg}^n \rightarrow M_{fg} \rightarrow 0$$

ma dato che  $K_g = 0$  abbiamo dimostrato che  $M_{fg}$  è libero. Per costruzione  $fg \notin \mathfrak{m}$  in quanto il complementare di  $\mathfrak{m}$  è una parte moltiplicativa.

□

**Corollario 6.34.** Se  $p : E \rightarrow X$  è un fibrato vettoriale e  $M = \Gamma(X, E)$  allora  $M$  è proiettivo.

*Dimostrazione.*

Ricordando (6.30) che  $\Gamma(X_f, E) = M_f$ , se scegliamo un ricoprimento  $\{X_f\}$  che banalizza  $E \rightarrow X$  si ha che  $M_f$  è libero, dunque abbiamo mostrato che  $M$  è localmente libero, che implica proiettivo per il teorema (6.33) se  $M$  è finitamente generato.

Poiché ogni  $M_{f_i}$  (dove  $f_1, \dots, f_n$  determinano il ricoprimento banalizzante) è finitamente generato (libero di rango pari al rango del fibrato), esistono  $m_1, \dots, m_T \in M$  tali che  $m_1, \dots, m_T$  generano  $M_{f_i}$  per ogni  $i$ . Se  $N = \langle m_1, \dots, m_T \rangle \subseteq M$  si ha che  $N_{f_i} = M_{f_i}$  per ogni  $f_i$  per costruzione, dunque localizzando ulteriormente  $N_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}$  per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale e quindi  $N = M$ .  $\square$

**Definizione 6.35** (Rango di un modulo proiettivo). Sia  $P$  un modulo proiettivo. Affermiamo che  $n$  è il **rango** di  $P$  se per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale  $P_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}^n$ .

**Proposizione 6.36.** Ad un  $A$ -modulo proiettivo  $P$  di rango  $n$  corrisponde un fibrato vettoriale di rango  $n$  sulla varietà associata ad  $A$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $P$  è proiettivo esistono  $f_1, \dots, f_N$  tali che  $(f_1, \dots, f_N) = A$  e  $P_{f_i} \cong A_{f_i}^n$ . Sia  $\alpha_i : P_{f_i} \rightarrow A_{f_i}^n$  un fissato isomorfismo. Questi isomorfismi si restringono a isomorfismi  $P_{f_i f_j} \rightarrow A_{f_i f_j}^n$ , quindi possiamo definire

$$\alpha_{i,j} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} \in \mathrm{GL}(A_{f_i f_j}^n).$$

Per definizione  $\alpha_{ih} = \alpha_{jh} \alpha_{ij}$ . Ricordiamo che

$$A_{f_i f_j} = \mathcal{O}(X_{f_i f_j}) = \mathcal{O}(X_{f_i} \cap X_{f_j})$$

quindi effettivamente  $\alpha_{i,j} : X_{f_i f_j} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}(X_{f_i f_j}))$ . Avendo verificato la condizione di cociclo si ha che questo definisce un fibrato.  $\square$

Possiamo dare una descrizione più concreta di questo fibrato:

**Osservazione 6.37** (Costruzione intrinseca del fibrato).

Sia  $P$  un modulo proiettivo e consideriamo il duale

$$P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$$

e poi l'algebra simmetrica

$$\mathrm{Sym}_A P^* = \frac{A \oplus (P^*) \oplus (P^* \otimes_A P^*) \oplus \cdots}{(u \otimes v - v \otimes u)}.$$

Chiaramente  $\mathrm{Sym}_A P^*$  è un anello. Si può verificare che esso è finitamente generato e ridotto, quindi è l'anello di coordinate di una varietà affine  $E$ .

Notiamo che se  $P$  è libero allora  $\mathrm{Sym}_A P^*$  è un anello di polinomi: chiamiamo  $x_1, \dots, x_n$  i generatori di  $P^*$  duali alla base di  $P$ , allora è evidente che

$$\mathrm{Sym}_A P^* = A[x_1, \dots, x_n] = A \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathcal{O}(X \times \mathbb{K}^n).$$

Quindi  $E$  è coperto da intorni della forma  $X \times \mathbb{K}^n$  e la mappa di proiezione è quella ovvia.

**Osservazione 6.38** (Fuori programma). La definizione appena data è un caso particolare della costruzione “Spec relativo”.

**Teorema 6.39.** C'è una corrispondenza biunivoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Moduli proiettivi su } A \\ \text{di rango } n \end{array} \right\}_{iso.} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fibrati vettoriali su } X \\ \text{di rango } n \end{array} \right\}_{iso.}$$

e la mappa dal fibrato  $E$  ai moduli è  $E \mapsto \Gamma(X, E)$ .

## 6.5 Fibrati vettoriali sulla retta proiettiva

### 6.5.1 Fibrati lineari

**Notazione.** Scriviamo  $\mathbb{A}^1 \cong U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$  e  $\mathbb{A}^1 \cong U_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ , da cui

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \cong U_{0,\infty} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}.$$

Scriviamo dunque  $\mathbb{K}[U_0] = \mathbb{K}[z]$ ,  $\mathbb{K}[U_\infty] = \mathbb{K}[w]$  e  $\mathbb{K}[U_{0,\infty}] = \mathbb{K}[z, z^{-1}]$  con  $w = z^{-1}$ .

**Osservazione 6.40.** Rispetto a questo ricoprimento i cocicli sono

$$Z^1(\mathcal{U}) = \{\alpha_{0,\infty} : U_{0,\infty} \rightarrow \mathrm{GL}(1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} U_{0,\infty} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(1) \\ z & \longmapsto & \lambda z^n \end{array} \mid n \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{K}^\times \right\}$$

A priori sono mappe della forma  $z \mapsto p(z)$  ma se comparissero più monomi allora ci sarebbero radici diverse da 0, quindi esisterebbe  $a \in U_{0,\infty}$  tale che  $p(a) = 0 \notin \mathrm{GL}(1)$ .

**Osservazione 6.41.** Si ha

$$H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(1)) = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

*Dimostrazione.*

Se  $\alpha = \lambda z^n$  e  $\tilde{\alpha} = \mu z^m$  sono cocicli equivalenti allora esistono  $\beta_0 : U_0 \rightarrow \mathrm{GL}(1)$  e  $\beta_\infty : U_\infty \rightarrow \mathrm{GL}(1)$  tali che

$$\mu z^m = \tilde{\alpha} = \beta_\infty \alpha \beta_0^{-1} = \lambda \beta_\infty \beta_0^{-1} z^n$$

Per definizione,  $\beta_0 \in \mathbb{K}[z]$  e non è mai nullo, quindi dato che  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso,  $\beta_0 \in \mathbb{K}^\times$ . Similmente per  $\beta_\infty$ . Questo insieme all'equazione trovata implica che  $n = m$ .

Viceversa, se  $n = m$  allora possiamo sempre trovare  $\beta_0$  e  $\beta_\infty$  (per esempio  $\beta_0 = \lambda$  e  $\beta_\infty = \mu$ ), quindi abbiamo mostrato

$$H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(1)) = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

□

**Notazione.** Indichiamo il fibrato lineare  $E_{z^{-n}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  con  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1}(n)$  (o solo  $\mathcal{O}(n)$  se chiaro dal contesto).

**Proposizione 6.42.** Le sezioni globali dei fibrati lineari su  $\mathbb{P}^1$  sono

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} \mathbb{K}[z]_n = \{p(z) \in \mathbb{K}[z] \mid \deg p \leq n\} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo due sezioni  $\sigma_0 = f(z)$  e  $\sigma_\infty = g(w)$  tali che  $\sigma_\infty = \alpha_{0,\infty}\sigma_0$ . Per quanto detto possiamo scegliere  $\alpha_{0,\infty} = z^{-n}$ , da cui sull'intersezione  $U_{0,\infty}$  abbiamo

$$g(z^{-1}) = z^{-n}f(z).$$

Scrivendo le espansioni troviamo

$$g(z^{-1}) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots \quad z^{-n}f(z) = b_0z^{-n} + b_1z^{1-n} + \dots$$

dunque:

$n < 0$  In questo caso imporre uguaglianza impone che ogni coefficiente sia nullo, cioè  $\sigma_0 = \sigma_\infty = 0$  e quindi il  $\sigma$  a cui corrispondono è 0.

$n \geq 0$  Imponendo l'uguaglianza troviamo

$$f(z) = a_0z^n + \dots + a_{n-1}z + a_n$$

cioè un generico polinomio di grado  $n$ .

□

**Osservazione 6.43.** Segue immediatamente che

$$\dim \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

### 6.5.2 Fibrati vettoriali

**Lemma 6.44** (Forma di Smith). Per ogni  $C \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}[t^{\pm 1}])$  possiamo trovare  $\alpha$  e  $\beta$  matrici in  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}[t])$  tali che

$$\beta C \alpha = \begin{pmatrix} t^{m_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & t^{m_k} & \end{pmatrix}$$

con  $m_1 \geq \dots \geq m_k$ . Se  $c_{i,j} \in \mathbb{K}[t]$  per ogni  $i, j$  vogliamo anche poter scegliere  $m_\ell \geq 0$  per ogni  $\ell$ .

*Dimostrazione.*

Per  $k = 1$  la tesi è esattamente il contenuto dei conti nell'osservazione (6.41).

Mostriamo ora il caso di  $k > 1$ . A meno di moltiplicare per una potenza alta di  $t$  supponiamo  $c_{i,j} \in \mathbb{K}[t]$  per ogni  $i$  e  $j$ , finito il conto in questo caso possiamo moltiplicare per  $t^{-1}$  alla stessa potenza per tornare al problema originale senza disturbare la forma diagonale che vorremmo ottenere.

Mostriamo che possiamo intanto trovare una  $\alpha \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}[t])$  tale che

$$C\alpha = \begin{pmatrix} t^m & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Osserviamo che se abbiamo  $c_{1,1}$  e  $c_{1,j}$  sulla prima riga possiamo moltiplicare a destra per una matrice in modo da ottenere  $m(t) = \gcd(c_{1,1}, c_{1,j})$  e 0 al loro posto: se

$$m = c_{1,1}a + c_{1,j}c, \quad 1 = da - bc$$

dove  $a, c$  esistono per l'identità di Bézout e  $d, b$  esistono perché  $a$  e  $c$  devono essere coprimi affinché  $m$  sia il massimo comune divisore, possiamo definire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_{1,1}b+c_{1,j}d}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e “inserirla” in una matrice identità di taglia  $k$  in modo da fare l'operazione richiesta, per esempio se  $j = 2$  allora

$$C \begin{pmatrix} M & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Reiterando questo procedimento prendendo la prima e seconda colonna, poi prima e terza, prima e quarta eccetera troviamo  $\alpha$  tale che

$$C\alpha = \begin{pmatrix} \gcd(\{c_{1,j} \mid 1 \leq j \leq k\}) & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

ma questo massimo comune divisore deve essere della forma  $t^\ell$  perché deve dividere  $\det C$  e questo deve essere un elemento invertibile di  $\mathbb{K}[t^{\pm 1}]$  (ogni eventuale coefficiente di  $t^\ell$  può essere inglobato da  $\alpha$ ). Notiamo che  $\ell \geq 0$  perché i singoli  $c_{i,j}$  sono elementi di  $\mathbb{K}[t]$ .

Per ipotesi induttiva esistono  $\alpha'$  e  $\beta'$  che riducono la sottomatrice sud-est, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} C\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\ell_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & t^{\ell_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & t^{\ell_k} \end{pmatrix}$$

con  $\ell_i \geq 0$  per ogni  $1 \leq i \leq k$ . In particolare  $\det C = t^n$  con  $n = \sum_{i=1}^k \ell_i$ . Poiché dunque  $\ell_1$  è limitato da  $n$ , esiste un  $\ell_1$  massimo che possiamo ottenere a meno di moltiplicare a destra o sinistra per matrici in  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}[t])$ .

Affermiamo che per un tale  $\ell_1$  massimale  $\ell_1 \geq \ell_2$ , infatti se  $\ell_1 < \ell_2$ , poiché

$$\begin{pmatrix} t^{\ell_1} & 0 \\ c_{2,1} & t^{\ell_2} \end{pmatrix} \text{ è equivalente a } \begin{pmatrix} t^{\ell_2} & c_{2,1} \\ 0 & t^{\ell_1} \end{pmatrix},$$

se  $c_{2,1} = 0$  allora evidentemente  $\ell_1$  non era massimale, se  $c_{2,1} \neq 0$  allora riusciamo a sostituire questo pezzo  $2 \times 2$  con  $\begin{pmatrix} t^{\ell_1+1} & 0 \\ * & t^{\ell_2} \end{pmatrix}$ , negando ancora la massimalità di  $\ell_1$ .

Quindi  $\ell_1 \geq \ell_2$  (e analogamente  $\ell_1 \geq \ell_i$  per ogni  $2 \leq i \leq k$ ) quindi possiamo agire sulle colonne e sulle righe con elementi della forma  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(t) & 1 \end{pmatrix}$  per rindurre  $c_{2,1}(t)$  ad un polinomio che contemporaneamente dovrebbe avere grado minore di  $\ell_2$  ma maggiore di  $\ell_1$ , che è assurdo e quindi  $c_{1,2} = 0$ .  $\square$

**Osservazione 6.45.** Abbiamo semplicemente affermato che, poiché  $\mathbb{K}[t]$  è un PID, possiamo raccogliere potenze negative di  $t$ , trasformare in forma normale di Smith, e poi ri-moltiplicare per esse. Il fatto che gli elementi sulla diagonale sono della forma  $t^m$  è solo conseguenza del fatto che devono essere elementi invertibili in  $\mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ .

**Teorema 6.46.** Su  $\mathbb{P}^1$  gli unici fibrati vettoriali sono  $E \cong \mathcal{O}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n_k)$  per degli interi  $n_i$ .

*Dimostrazione.*

Scriviamo  $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_\infty$  e procediamo per induzione su  $n$  il rango del fibrato.

$n = 1$  Notiamo che  $E|_{U_0}$  e  $E|_{U_\infty}$  sono banali perché  $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus V(x_1)$ ,  $U_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus V(x_0)$ , vale (6.39) e i moduli proiettivi su un PID sono liberi.

Sia  $\mathcal{U} = \{U_0, U_\infty\}$  e consideriamo  $H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(1))$ , che per il teorema (6.13) e quanto appena osservato determina tutti i fibrati di rango 1 che si banalizzano su  $\mathcal{U}$  a meno di isomorfismo. Per quanto osservato nella sottosezione precedente questo conclude.

$n > 1$  In modo del tutto analogo vogliamo considerare  $H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(n))$ . Ricordando che i cocicli per questo ricoprimento sono

$$Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(n)) = \{C : U_{0,\infty} \rightarrow \text{GL}(k)\}$$

e che la relazione per cui quozientiamo per trovare la coomologia è

$$C \sim D \iff \exists \alpha : U_\infty \rightarrow \text{GL}(n), \beta : U_0 \rightarrow \text{GL}(n) \text{ t.c. } D = \alpha C \beta^{-1}.$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} C(t) &= (c_{i,j}(t)) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t^\pm]) \\ \alpha(t) &= (a_{i,j}(t)) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t]) \\ \beta(t) &= (b_{i,j}(t)) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t^{-1}]) \end{aligned}$$

Per definizione di somma diretta di fibrati vista dal punto di vista dei cocicli il lemma (6.44) conclude.

□

**Proposizione 6.47.** Se  $E$  è un fibrato vettoriale su  $\mathbb{P}^1$  e (per il teorema (6.46)) esso è isomorfo a  $\mathcal{O}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n_k)$  per  $n_1 \geq \cdots \geq n_k$  allora gli  $n_i$  sono univocamente determinati.

*Dimostrazione.*

Supponiamo di avere un'altra scrittura  $E \cong \mathcal{O}(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(m_k)$  con  $m_1 \geq \cdots \geq m_k$  (il numero di addendi è lo stesso perché è pari al rango del fibrato). Senza perdita di generalità supponiamo  $m_1 \geq n_1$  e tensorizziamo per  $\mathcal{O}(-m_1)$  per ottenere

$$\mathcal{O}(0)^a \oplus \underbrace{\mathcal{O}(n'_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n'_k)}_{E'} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(0)^b \oplus \underbrace{\mathcal{O}(m'_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(m'_k)}_{F'}$$

dove  $n'_i$  e  $m'_i$  sono gli opportuni interi che codificano le differenze  $n_j - m_1$  e  $m_j - m_1$  dopo aver raccolto le copie di  $\mathcal{O}(0)$ . Per costruzione tutti gli addendi diretti sono fibrati lineari con sezioni globali nulle (eccetto per le copie di  $\mathcal{O}(0)$ ), quindi

$$\dim \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(0)^a \oplus E') = a \cdot (0+1) + (k-a) \cdot 0 = a, \quad \dim \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(0)^b \oplus F') = b$$

e cioè  $a = b$ .

Scriviamo l'isomorfismo  $\varphi : \mathcal{O}(0)^a \oplus E' \rightarrow \mathcal{O}(0)^a \oplus F'$  in forma matriciale come

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

(cioè  $\alpha : \mathcal{O}(0)^a \rightarrow \mathcal{O}(0)^a$ ,  $\beta : E' \rightarrow \mathcal{O}(0)^a$  eccetera). Notiamo che dare un morfismo  $\mathcal{O}(0) \rightarrow F'$  è la stessa cosa di dare una sezione di  $F'$ , quindi  $\gamma = 0$ , dunque  $\varphi|_{\mathcal{O}(0)^a} = \alpha : \mathcal{O}(0)^a \rightarrow \mathcal{O}(0)^a$  è un isomorfismo e quindi abbiamo un isomorfismo

$$E' = E/\mathcal{O}(0)^a \xrightarrow{\varphi} E/\mathcal{O}(0)^a = F'$$

e per induzione la scrittura di questi due pezzi è unica. Ri-tensorizzando per  $\mathcal{O}(m_1)$  troviamo che la scrittura originale era unica.  $\square$

## 6.6 Fibrati con azione di gruppo

**Definizione 6.48.** Se  $X$  è una  $G$ -varietà, un  **$G$ -fibrato** su  $X$  è un fibrato vettoriale  $p : E \rightarrow X$  su  $X$  per cui esiste un'azione lineare di  $G$  su  $E$  tale che  $p$  è  $G$ -equivariante.

**Osservazione 6.49.** In questo caso,  $\Gamma(X, E)$  ha un'azione lineare di  $G$ , data da

$$(g \cdot \sigma)(x) = g(\sigma(g^{-1}x)).$$

Si potrebbe dimostrare che  $G$  agisce in modo regolare su  $\Gamma(X, E)$ , e quindi che  $\Gamma(X, E)$  è una rappresentazione di  $G$ . (Non lo faremo.)

**Definizione 6.50.** Un morfismo di fibrati è **equivariante** se commuta con l'azione di  $G$ .

**Osservazione 6.51.** Per ogni  $x_0$  in  $X$ , un morfismo  $\varphi$  definisce una mappa lineare  $\varphi_{x_0} : (E_1)_{x_0} \rightarrow (E_2)_{x_0}$ .

**Proposizione 6.52.** Le classi di isomorfismo fibrati di vettoriali  $G$ -equivarianti di rango  $m$  su  $X = G/H$  sono in corrispondenza con le classi di isomorfismo delle rappresentazioni  $m$ -dimensionali di  $H$ .

*Dimostrazione.*

Costruiamo esplicitamente questa corrispondenza:

Dato un fibrato vettoriale  $G$ -equivariante  $p : E \rightarrow G/H$  e posto  $x_0 = H = e_{G/H}$ , possiamo considerare la fibra  $E_{x_0}$  e chiaramente  $H$  agisce su  $E_{x_0}$ .

Data una rappresentazione  $V$  di  $H$ , consideriamo  $G \times V$  con l'azione di  $H$  data da

$$h(g, v) = (gh^{-1}, hv).$$

Passando al quoziente in  $H$  abbiamo

$$\begin{array}{ccc} E = \frac{G \times V}{H} & \longrightarrow & X = G/H \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ [g, v] & \longmapsto & [g] \end{array}$$

Notiamo che

$$[g, v] + [gh, u] = [g, v] + [g, hu] = [g, v + hu]$$

e che

$$\lambda[g, v] = [g, \lambda v],$$

quindi le fibre hanno una struttura vettoriale.

Per concludere andrebbe mostrato che  $E$  è una varietà algebrica, che la mappa costruita è regolare e che abbiamo la trivializzazione locale.  $\square$

**Esempio 6.53.** Se vogliamo costruire fibrati  $G$ -equivarianti di rango 1 su  $\mathcal{F}\ell(n) = \mathrm{GL}(n)/B_n$ , sappiamo che questi corrispondono alle rappresentazioni 1-dimensionali di  $B_n$

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^\times \\ & \searrow & \swarrow \\ & T = B_n/U_n & \end{array}$$

Quindi queste possono essere caratterizzate attraverso i caratteri del toro.

## Capitolo 7

# Teorema di Quillen-Suslin

Vogliamo mostrare il seguente risultato:

**Teorema 7.1** (Quillen-Suslin). Se  $R$  è un PID e  $M$  è proiettivo finitamente generato su  $R[t_1, \dots, t_n]$ , allora  $M$  è libero.

**Osservazione 7.2.** Geometricamente il teorema afferma che i fibrati vettoriali su <sup>1</sup> $\mathbb{A}_R^n = \text{Spec } R \times \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$  sono banali.

**Osservazione 7.3.** Ricordiamo che nel linguaggio degli schemi, un modulo su  $A$  è un fascio quasicoerente su  $\text{Spec } A$ , un modulo finitamente generato è un fascio coerente<sup>2</sup> e un modulo proiettivo è un fibrato vettoriale<sup>3</sup>.

### 7.1 Retta proiettiva su un anello

**Definizione 7.4.** Definiamo lo **spazio proiettivo** di dimensione  $n$  su  $A$  come

$$\mathbb{P}_A^n := \mathbb{P}^n \times \text{Spec } A.$$

**Notazione.** In analogia con il caso  $A = \mathbb{K}$  definiamo  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^1}(n)$  come il fibrato su  $\mathbb{P}_A^1$  ottenuto ponendo  $M_0 = A[t]$ ,  $M_{\infty} = A[t^{-1}]$  e considerando come isomorfismo  $(M_0)_t = A[t, t^{-1}] \rightarrow A[t, t^{-1}] = (M_{\infty})_{t^{-1}}$  quello dato da  $f \mapsto t^{-n}f$ .

Per abbreviare scriveremo anche  $\mathcal{O}_A(n)$ .

<sup>1</sup>In questo capitolo non mi tratterò nell'uso del linguaggio degli schemi.

<sup>2</sup>se  $A$  Noetheriano

<sup>3</sup>questo fatto è esattamente il contenuto del teorema (6.39)

**Definizione 7.5.** Dato un fibrato vettoriale  $\mathfrak{M}$  su  $\mathbb{P}_A^1$  definiamo

$$\overline{\mathfrak{M}} := \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}\mathfrak{M}} \cong \mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}}$$

cioè  $\overline{\mathfrak{M}}$  è il fibrato vettoriale su  $\mathbb{P}_{A/\mathfrak{m}}^1$  ottenuto incollando i moduli proiettivi  $M_0/\mathfrak{m}$  e  $M_\infty/\mathfrak{m}$ .

**Osservazione 7.6.** Dato che  $\mathbb{P}_A^1 = \text{Spec } A \times \mathbb{P}^1$ , il fibrato  $\overline{\mathfrak{M}}$  è quello ottenuto restringendo  $\mathfrak{M}$  a  $\mathbb{P}^1 \cong \{\mathfrak{m}\} \times \mathbb{P}^1 \subseteq \text{Spec } A \times \mathbb{P}^1$ .

**Osservazione 7.7.** Per la classificazione dei fibrati vettoriali sulla retta proiettiva su un campo (6.46) si ha

$$\overline{\mathfrak{M}} = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}(n_i).$$

**Notazione.** Se tensorizziamo  $\mathfrak{M}$  per  $\mathcal{O}_A(n)$  otteniamo un fibrato

$$\mathfrak{M}(n) := \mathfrak{M} \otimes \mathcal{O}(n)$$

dello stesso rango ma dove moltiplichiamo i coclici.

**Osservazione 7.8.** Sfruttando di nuovo (6.46) si ha

$$\overline{\mathfrak{M}(n)} \cong \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{A/\mathfrak{m}}(n_i) \otimes \mathcal{O}_{A/\mathfrak{m}}(n) = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{A/\mathfrak{m}}(n + n_i),$$

in particolare possiamo scegliere un opportuno  $n$  tale che  $n + n_i \geq 0$  per ogni  $i$  e  $n + n_{i_0} = 0$  per qualche  $i_0$ .

## 7.2 Teorema di incollamento di Quillen

**Definizione 7.9.** Sia  $M$  un  $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulo. Diciamo che  $M$  è **esteso** da  $A$  se esiste un  $A$ -modulo  $N$  tale che  $M \cong N[t_1, \dots, t_n]$ .

**Osservazione 7.10.** A meno di isomorfismo, l' $A$ -modulo  $N$  della definizione precedente è univocamente determinato, infatti

$$N \cong M/(t_1, \dots, t_n)M = R \otimes_{R[t_1, \dots, t_n]} M.$$

**Osservazione 7.11.** Geometricamente un fascio quasicoerente su  $\mathbb{A}_A^n$  è esteso da  $\text{Spec } A$  se esiste un fascio quasicoerente su  $\text{Spec } A$  del quale è pullback tramite il fibrato banale  $\mathbb{A}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$ , ovvero è della forma  $\mathbb{A}^n \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{A}^n \times \text{Spec } A$ .

Il teorema che vogliamo dimostrare in questa sezione è

**Teorema 7.12** (di incollamento di Quillen). Siano  $R, A$  anelli noetheriani dove  $A$  è una  $R$ -algebra. Sia  $M$  un  $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulo finitamente generato. Allora  $M$  è esteso da  $A$  se e solo se, per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m}$  di  $R$ ,  $M_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$ .

### 7.2.1 Lemmi geometrici

**Lemma 7.13.** Sia  $R$  un anello noetheriano e siano  $M, N$  due  $R$ -moduli, con  $M$  finitamente generato.

1. Se  $\varphi: M \rightarrow N$  è tale che  $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$  è la mappa nulla, allora esiste  $f$  in  $R \setminus \mathfrak{m}$  tale che  $\varphi_f = 0$ .
2. Se  $\psi: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ , allora esistono  $f$  in  $R \setminus \mathfrak{m}$  e  $\varphi: M_f \rightarrow N_f$  tali che  $\psi$  è la localizzazione di  $\varphi$ .
3. Se  $N$  è finitamente generato e  $\psi: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$  è un isomorfismo, allora esistono  $f$  in  $R \setminus \mathfrak{m}$  e un isomorfismo  $\varphi: M_f \rightarrow N_f$ .

*Dimostrazione.*

La dimostrazione è simile a quella di localmente libero implica proiettivo (6.33).

1. Siano  $x_1, \dots, x_k$  dei generatori di  $M$ . Poiché  $\varphi_{\mathfrak{m}} = 0$ , si ha  $\varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_k) = 0$  in  $N_{\mathfrak{m}}$ , quindi esiste  $f \notin \mathfrak{m}$  tale che  $f\varphi(x_1) = \dots = f\varphi(x_k) = 0$  in  $N$ . Allora  $\varphi_f = 0$ .
2. Consideriamo il diagramma

$$A^h \longrightarrow A^k \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_{\mathfrak{m}}^h & \longrightarrow & A_{\mathfrak{m}}^k & \longrightarrow & M_{\mathfrak{m}} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & N_{\mathfrak{m}} & & \end{array}$$

e scriviamo  $\psi(x_i) = y_i/f$  con  $f \notin \mathfrak{m}$  e  $y_i \in N$ . In particolare gli  $\psi(x_i)$  sono in  $N_f$ . Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} A_f^h & \xrightarrow{\beta_f} & A_f^k & \xrightarrow{\alpha_f} & M_f \longrightarrow 0 \\ & & \searrow \phi & & \downarrow \\ & & & & N_f \end{array}$$

dove  $\phi(e_i) = y_i/f$ . Segue per esattezza della prima riga che  $\phi_{\mathfrak{m}} \circ \beta_{\mathfrak{m}} = 0$  e quindi per il punto 1. esiste  $g \notin \mathfrak{m}$  tale che

$$(\phi_g \circ (\beta_f)_g): A_{fg}^h \rightarrow N_{fg}$$

è la mappa nulla. A meno di sostituire  $f$  con  $fg$ , possiamo assumere che  $\phi \circ \beta_f = 0$  e quindi otteniamo una mappa  $\varphi: M_f = A_f^k / \text{Imm}(\beta_f) \rightarrow N_f$  per il primo teorema di omomorfismo. Per costruzione  $\varphi_{\mathfrak{m}} = \psi$  come voluto.

3. Per il punto 2. possiamo sollevare  $\psi$  e  $\psi^{-1}$  a  $\varphi: M_f \rightarrow N_f$  e  $\tilde{\varphi}: N_f \rightarrow M_f$  (scegliendo un opportuno  $f$ ). Notiamo che  $(\varphi \circ \tilde{\varphi} - id_{N_f})_{\mathfrak{m}} = \psi \circ \psi^{-1} - id_{N_{\mathfrak{m}}} = 0$ , quindi per il punto 1.  $\varphi \circ \tilde{\varphi} = id_{N_f}$  a meno di localizzare ulteriormente. Analogamente sistemiamo anche l'altra composizione.

□

**Osservazione 7.14.** Geometricamente, il lemma afferma che il comportamento su una spiga di un fascio coerente determina il comportamento in un intorno.

**Lemma 7.15.** Siano  $f, g$  in  $R$  coprimi (cioè  $(f, g) = R$ ) e sia  $M$  un  $R$ -modulo. Allora  $M$  è il prodotto fibrato di  $M_f$  e  $M_g$  su  $M_{fg}$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{b} & M_f \\ a \downarrow & \lrcorner & \downarrow \alpha \\ M_g & \xrightarrow{\beta} & M_{fg} \end{array}$$

cioè

$$M \cong \{(x, y) \in M_f \times M_g : \alpha(x) = \beta(y)\}$$

tramite la mappa  $m \mapsto (a(m), b(m))$ .

*Dimostrazione.*

Verifichiamo iniettività e suriettività:

- [inj.] Se esiste  $h$  tale che  $f^h m = 0$  e  $g^h m = 0$ , poiché esistono  $u, v$  in  $R$  tali che  $uf^h + vg^h = 1$ , si ottiene  $m = (uf^h + vg^h)m = 0$ .
- [surj.] Sia  $(x, y)$  in  $M_f \times M_g$  tale che  $\alpha(x) = \beta(y)$ . Scriviamo  $x = z/f^s$  e  $y = w/g^s$  con  $z, w$  in  $M$ . Allora esiste  $t \geq s$  tale che  $(fg)^t(z/f^s - w/g^s) = 0$ , cioè in  $M$  si ha l'uguaglianza  $f^{t-s}g^tz = f^tg^{t-s}w$ . Come prima, esistono  $u, v$  tali che  $uf^t + vg^t = 1$ . Sia  $m = zuf^{t-s} + wvg^{t-s}$  e verifichiamo che  $x = a(m)$  e  $y = b(m)$ : In  $M_f$

$$x = (uf^t + vg^t)x = zuf^{t-s} + \frac{zvg^t}{f^s} = zuf^{t-s} + wvg^{t-s} = m.$$

Analogamente si trova  $y = m$  in  $M_g$  come voluto.

□

**Osservazione 7.16.** Geometricamente, il lemma afferma che possiamo ricostruire un fascio quasicoerente a partire dalle sue restrizioni su un ricoprimento.

**Lemma 7.17.** Siano  $f, g$  in  $R$  coprimi e siano  $M, N$  due  $R$ -moduli. Supponiamo di avere un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{\varphi} & N_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{fg} & \longrightarrow & N_{fg} \\ \uparrow & & \uparrow \\ M_g & \xrightarrow{\psi} & N_g \end{array}$$

Allora esiste una mappa  $\chi: M \rightarrow N$  tale che  $\chi_f = \varphi$  e  $\chi_g = \psi$ .

*Dimostrazione.*

Considerando il diagramma seguente, l'esistenza di  $\chi$  segue dal lemma precedente.

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\quad} & M_f & & \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 M_g & \xrightarrow{\quad} & M_{fg} & \xrightarrow{\quad} & N \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & N_g & \xrightarrow{\beta} & N_{fg}
 \end{array}$$

□

**Osservazione 7.18.** Geometricamente, il lemma afferma che possiamo incollare morfismi di fasci quasicoerenti definiti su un ricoprimento che coincidono sulle intersezioni.

### 7.2.2 Lemmi su polinomi invertibili a coefficienti in algebra

**Notazione.** Sia  $E$  una  $B$ -algebra (eventualmente non commutativa) con centro  $B$ . Definiamo

$$E[t]^u = \{f(t) \in E[t] \mid f(0) = 1, \text{ invertibili}\}.$$

**Lemma 7.19.** Sia  $\theta(t) \in E_f[t]^u$ . Per  $k \gg 0$  si ha

$$\theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} \in E[x, y][t]^u$$

*Dimostrazione.*

Sostituendo  $x + y = t$  in  $\theta(t)$  e sottraendo il termine noto rispetto a  $y$  troviamo che esiste  $\varphi \in E_f[x, y]$  tale che

$$\theta(x + y) - \theta(x) = y\varphi(x, y).$$

Espandiamo l'elemento nel testo del lemma usando la relazione appena ricavata:

$$\begin{aligned}
 \theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} &= (\theta(xt + yf^k t) - \theta(xt) + \theta(xt))\theta(xt)^{-1} = \\
 &= yf^k t \underbrace{\varphi(xt, yf^k t)}_{\in E_f[x, y, t]} \theta(xt)^{-1} + 1.
 \end{aligned}$$

Per definizione di localizzazione, per  $k \gg 0$ , esiste  $\beta \in E[x, y, t]$  tale che<sup>4</sup>

$$\beta(x, y, t) = f^k \varphi(xt, yf^k t) \theta(xt)^{-1},$$

dunque

$$\theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} = 1 + yt\beta(x, y, t) \in E[x, y][t].$$

Per un conto analogo ( $h \gg 0$ )

$$\theta(xt)\theta((x + f^h y)t)^{-1} = 1 + ty\gamma(x, y, t) \in E[x, y][t].$$

<sup>4</sup>L' $f^k$  nel secondo argomento di  $\varphi$  non causa problemi, anzi per  $k \gg 0$  contribuisce a cancellare le eventuali  $f$  al denominatore dei coefficienti di  $\varphi$ .

Semplifichiamo la notazione ponendo

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \theta(xt)\theta((x + f^h y)t)^{-1} = 1 + ty\gamma \\ \tilde{\beta} &= \theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} = 1 + ty\beta.\end{aligned}$$

Per definizione (con  $k = h$ )  $\tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1$  in  $E_f[x, y, t]$ . Per le formule in  $E[x, y, t]$  appena trovate si ha

$$\tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1 + y(t\gamma + t\beta + t^2 y\beta\gamma) \doteq 1 + y\delta$$

quindi mettendo i due fatti assieme  $f^i\delta = 0$  per  $i$  grande. A meno di sostituire  $y$  con  $f^i y$  (cioè semplicemente aumentare la potenza di  $f$  che moltiplica  $y$ ) otteniamo che  $\tilde{\gamma}\tilde{\beta} = 1$  in  $E[x, y][t]$ . Otteniamo l'identità  $\tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1$  in  $E[x, y][t]$  in modo analogo.

Questo mostra che per  $k \gg 0$ ,  $\tilde{\beta} = \theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1}$  è inevitabile. Valutando  $\tilde{\beta}$  in  $t = 0$  troviamo  $\theta(0)\theta(0)^{-1} = 1$  come voluto.  $\square$

**Lemma 7.20.** Per ogni  $f, g \in B$  con  $(f, g) = B$

$$E_{fg}[t]^u \cong E_f[t]^u E_g[t]^u$$

*Dimostrazione.*

Se  $k \gg 0$  e  $a = b + h^k y$  allora se<sup>5</sup>  $\theta \in \tilde{E}_h[t]^u$  si ha per il lemma (7.19)

$$\theta(at)\theta(bt)^{-1} \in \tilde{E}[t]^u.$$

Se ora  $\theta(t) \in E_{fg}[t]^u$  allora scriviamo (ricordiamo che  $\theta(0) = id$ )

$$\theta(t) = \underbrace{\theta(t)\theta(bt)^{-1}}_{\in E_f[t]^u} \underbrace{\theta(bt)\theta(0)^{-1}}_{\in E_g[t]^u}$$

dove, per quanto detto, i contenimenti valgono se  $b = 1 \pmod{f^k}$  e  $b = 0 \pmod{g^k}$  per  $k \gg 0$ , ma dato che  $(f, g) = B$  possiamo trovare un tale  $b$  per il teorema cinese del resto.  $\square$

### 7.2.3 Dimostrazione

**Teorema 7.21** (di incollamento di Quillen). Siano  $R, A$  anelli noetheriani dove  $A$  è una  $R$ -algebra. Sia  $M$  un  $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulo finitamente generato.

Allora  $M$  è esteso da  $A$  se e solo se, per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m}$  di  $R$ ,  $M_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$ .

*Dimostrazione.*

Chiaramente se  $M$  è esteso da  $A$  allora per esattezza della localizzazione sappiamo anche che  $M_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$  per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale di  $R$ . Mostriamo l'altra implicazione. Definiamo il seguente oggetto:

$$Q(M) := \{f \in R \mid M_f \text{ è esteso da } A_f\}$$

e diamo un nome ai seguenti enunciati:

---

<sup>5</sup>scriviamo  $\tilde{E}$  per indicare che l'algebra non è necessariamente quella del testo. Sotto infatti useremo  $\tilde{E} = E_f$  e  $\tilde{E} = E_g$ .

$(\alpha_n)$   $Q(M)$  è un ideale.

$(\beta_n)$  Se  $M_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$  per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale in  $R$  allora  $M$  è esteso da  $A$ .

dove l'indice  $n$  è il numero di variabili come nell'enunciato. La tesi è che valga  $(\beta_n)$  per ogni  $n \geq 1$ . Possiamo definire formalmente anche  $(\beta_0)$  ma la tesi in quel caso è triviale perché avremmo  $N = M \otimes_R R = M$ .

$(\alpha_n) \implies (\beta_n)$  Siano

$$N := M/(t_1, \dots, t_n)M \quad \text{e} \quad N_{\mathfrak{m}} := M_{\mathfrak{m}}/(t_1, \dots, t_n)M_{\mathfrak{m}}.$$

Per ogni  $\mathfrak{m}$  esiste un isomorfismo  $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]$  di  $A_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]$ -moduli ed esiste un  $f_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$  tale che  $\varphi_{f_{\mathfrak{m}}}: M_{f_{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\sim} N_{f_{\mathfrak{m}}}$  è un isomorfismo per il punto 3. del lemma (7.13). Quindi  $f_{\mathfrak{m}}$  è in  $Q(M)$  per ogni  $\mathfrak{m}$  e quindi  $Q(M)$  non è contenuto in alcun ideale massimale  $\mathfrak{m}$ . In particolare  $Q(M) = R$ , cioè  $1 \in Q(M)$ , da cui concludiamo che  $M$  è esteso da  $A$ .

$(\beta_1), (\beta_{n-1}) \implies (\beta_n)$  Sia  $N = M/(t_1, \dots, t_n)M$ . Consideriamo  $A' := A[t_1, \dots, t_{n-1}]$  e l' $A'$ -modulo  $M' := M/t_n M$ . Localizzando  $M'$  rispetto a  $\mathfrak{m}$  si ottiene

$$M'_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}/t_n M_{\mathfrak{m}} \cong \frac{N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]}{t_n N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]} \cong N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_{n-1}].$$

Quindi  $M'_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$  per ogni massimale di  $R$ , dunque per  $(\beta_{n-1})$   $M'$  è esteso da  $A$ , cioè  $M' \cong N[t_1, \dots, t_{n-1}]$ .

Grazie a questo risultato abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathfrak{m}} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & M'_{\mathfrak{m}}[t_n] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{\sim} & N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n] \end{array}$$

dove la prima freccia verticale è un isomorfismo per ipotesi, la seconda è un isomorfismo per quanto appena detto e l'orizzontale in fondo è l'identità. Segue che  $M \cong M'[t_n]$ .

Osserviamo che è possibile applicare  $(\beta_1)$  ad  $A'[t_n]$  e a  $M$  in quanto  $M_{\mathfrak{m}}/t_n M_{\mathfrak{m}} = M'_{\mathfrak{m}}$  e

$$M_{\mathfrak{m}} \cong N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n] \cong N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n] \cong M'_{\mathfrak{m}}[t_n]$$

per quanto detto. Quindi  $M$  è esteso da  $A'$ , cioè

$$M \cong M/t_n M[t_n] = M'[t_n] = N[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n]$$

come voluto.

$(\alpha_1)$  Scriviamo  $t = t_1$  per comodità e poniamo  $N = M/tM$ .

Sia  $f$  in  $Q(M)$  e  $g \in R$  qualsiasi. Per definizione  $M_f \cong N_f[t]$  e per esattezza della localizzazione segue  $M_{fg} \cong N_{fg}[t]$ , cioè  $fg \in Q(M)$ .

Mostriamo ora che se  $f, g$  sono in  $Q(M)$  allora lo è anche  $f+g$ , cioè vogliamo mostrare che  $M_{f+g} \cong N_{f+g}[t]$ .

Osserviamo che  $(f, g)R_{f+g} = R_{f+g}$ , quindi a meno di sostituire  $R$  con  $R_{f+g}$  ci siamo ricondotti a mostrare che se  $(f, g) = R$  e<sup>6</sup>  $f, g \in Q(M)$  allora  $M$  è esteso da  $A$ . Per il lemma (7.15) ci basta dunque mostrare che  $N[t]$  è isomorfo a  $M_f \oplus_{M_{f,g}} M_g$ . Grazie al lemma (7.17), un modo per farlo è mostrare che esiste un diagramma commutativo della forma

$$\begin{array}{ccccc} M_f & \longrightarrow & M_{f,g} & \longleftarrow & M_g \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ N_f[t] & \longrightarrow & N_{f,g}[t] & \longleftarrow & N_g[t] \end{array}$$

Poiché  $f, g \in Q(M)$  esistono degli isomorfismi  $\varphi : M_f \rightarrow N_f[t]$  e  $\psi : M_g \rightarrow N_g[t]$ , che inducono isomorfismi  $\varphi_1, \psi_1 : M_{f,g} \rightarrow N_{f,g}[t]$ . Diagrammaticamente

$$\begin{array}{ccccccc} M_f & \longrightarrow & M_{f,g} & \longleftarrow & M_g \\ \varphi \downarrow \sim & & \swarrow \sim & \searrow \sim & \sim \downarrow \psi \\ N_f[t] & \longrightarrow & N_{f,g}[t] & \xrightarrow{\theta} & N_{f,g}[t] & \longrightarrow & N_g[t] \end{array}$$

dove  $\theta = \psi_1 \circ \varphi_1^{-1}$ . Se  $\theta = id_{N_{f,g}[t]}$  allora avremmo concluso per quanto detto, quindi il nostro obiettivo è sostituire  $\varphi$  e  $\psi$  con opportune  $\varphi'$  e  $\psi'$  tali che la mappa indotta su  $N_{f,g}[t]$  sia effettivamente l'identità.

Notiamo che

$$\begin{aligned} \theta \in \text{End}_{A_{f,g}[t]}(N_{f,g}[t]) &= \text{Hom}_{A_{f,g}}(N_{f,g}, N_{f,g}[t]) = \\ &= \text{Hom}_{A_{f,g}}(N_{f,g}, N_{f,g})[t] \stackrel{(6.32)}{\cong} (\text{Hom}_A(N, N))_{f,g}[t]. \end{aligned}$$

Se  $E = \text{Hom}_A(N, N)$  allora abbiamo mostrato che  $\theta \in E_{f,g}[t]^u$  infatti è un isomorfismo per costruzione e  $\theta(0) = id_N$  in quanto  $N$  è il prodotto fibrato di  $N_f$  e  $N_g$  su  $N_{f,g}$  per le mappe di localizzazione (7.15).

Per il lemma (7.20) esistono dunque  $\alpha \in E_f[t]^u$  e  $\beta \in E_g[t]^u$  tali che  $\theta = \beta\alpha$ , le quali ci permettono di costruire il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} & & M_f & \longrightarrow & M_{f,g} & \longleftarrow & M_g \\ & \swarrow \varphi' & \downarrow \varphi & & \swarrow \beta\alpha & \searrow \psi & \swarrow \psi' \\ N_f[t] & \xleftarrow{\alpha} & N_f[t] & \longrightarrow & N_{f,g}[t] & \xrightarrow{\beta\alpha} & N_{f,g}[t] & \xleftarrow{\psi^{-1}} & N_g[t] \end{array}$$

Sostituendo  $\varphi$  con  $\varphi' = \alpha \circ \varphi$  e  $\psi$  con  $\psi' = \beta^{-1} \circ \psi$  allora il  $\theta$  che inducono è

$$\beta^{-1} \circ \psi_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \alpha^{-1} = \beta^{-1} \circ \theta \circ \alpha^{-1} = \beta^{-1} \circ \beta \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = id_{N_{f,g}[t]}$$

come voluto. □

### 7.3 Coomologia di Čech di fibrati su rette proiettive

Fissato un anello noetheriano  $A$  poniamo  $X = \text{Spec } A$  e scriviamo  $\mathbb{P}_A^1 = X \times \mathbb{P}^1$ . Fissiamo il ricoprimento standard  $U_0 = \mathbb{P}_A^1 \setminus \{\infty\}$  e  $U_\infty = \mathbb{P}_A^1 \setminus \{0\}$ . Un fibrato vettoriale  $\mathfrak{M}$  su  $\mathbb{P}_A^1$  è dato da due moduli proiettivi finitamente generati  $M_0$  su  $A[t]$  e  $M_\infty$  su  $A[t^{-1}]$  tali che  $M_{0,\infty} := (M_0)_t \cong (M_\infty)_{t^{-1}}$ .

<sup>6</sup>va bene perché  $Q(M) \subseteq Q(M_{f+g})$

**Notazione.** Poniamo  $H^0(\mathfrak{M}) := \Gamma(\mathbb{P}_A^1, \mathfrak{M})$ .

Consideriamo ora la mappa

$$\begin{aligned} M_0 \oplus M_\infty &\longrightarrow M_{0,\infty} \\ (x, y) &\longmapsto (x|_{U_{0,\infty}} - y|_{U_{0,\infty}}) \end{aligned}$$

cioè prendiamo la differenza delle immagini di  $x$  e  $y$  nella localizzazioni  $(M_0)_t$  e  $(M_\infty)_{t^{-1}}$ , che identifichiamo applicando implicitamente un opportuno isomorfismo a (senza perdita di generalità)  $y/1$ .

**Definizione 7.22.** Definiamo il **primo gruppo di coomologia (di Čech)** del fibrato  $\mathfrak{M}$  come

$$H^1(\mathfrak{M}) = \text{coker}(M_0 \oplus M_\infty \rightarrow M_{0,\infty}).$$

**Osservazione 7.23.** Per definizione abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(\mathfrak{M}) \rightarrow M_0 \oplus M_\infty \rightarrow M_{0,\infty} \rightarrow H^1(\mathfrak{M}) \rightarrow 0$$

dove l'identità  $H^0(\mathfrak{M}) = \ker(M_0 \oplus M_\infty \rightarrow M_{0,\infty})$  corrisponde alla decomposizione di sezioni su un ricoprimento (6.26), infatti essere nel nucleo corrisponde esattamente al rispettare l'opportuna proprietà di cociclo.

**Notazione.** Definiamo

$$\overline{\mathfrak{M}_n} := \mathfrak{M} \otimes \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$$

**Osservazione 7.24.** Per un opportuno  $\ell_n$  abbiamo  $\overline{\mathfrak{M}_n} \cong \overline{\mathfrak{M}}^{\ell_n}$ . In particolare  $H^i(\overline{\mathfrak{M}_n}) = (H^i(\mathfrak{M}))^{\ell_n}$ .

**Osservazione 7.25 (Successione esatta lunga).** Consideriamo una successione esatta corta di fibrati vettoriali su  $\mathbb{P}_A^1$

$$0 \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{P} \rightarrow 0$$

cioè abbiamo il seguente diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_0 \oplus M_\infty & \longrightarrow & N_0 \oplus N_\infty & \longrightarrow & P_0 \oplus P_\infty \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_{0,\infty} & \longrightarrow & N_{0,\infty} & \longrightarrow & P_{0,\infty} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove le mappe verticali sono come nella definizione di  $H^1$ . In particolare possiamo estendere il diagramma inserendo i nuclei e i conuclei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{M}) & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{N}) & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_0 \oplus M_\infty & \longrightarrow & N_0 \oplus N_\infty & \longrightarrow & P_0 \oplus P_\infty \longrightarrow 0 \\ & & \dashdown & & \dashdown & & \dashdown \\ 0 & \longrightarrow & M_{0,\infty} & \longrightarrow & N_{0,\infty} & \longrightarrow & P_{0,\infty} \longrightarrow 0 \\ & & \dashdown & & \dashdown & & \dashdown \\ & & H^1(\mathfrak{M}) & \longrightarrow & H^1(\mathfrak{N}) & \longrightarrow & H^1(\mathfrak{P}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove la freccia tratteggiata è quella del lemma del serpente. Questo restituisce una successione esatta lunga

$$0 \rightarrow H^0(\mathfrak{M}) \rightarrow H^0(\mathfrak{N}) \rightarrow H^0(\mathfrak{P}) \rightarrow H^1(\mathfrak{M}) \rightarrow H^1(\mathfrak{N}) \rightarrow H^1(\mathfrak{P}) \rightarrow 0$$

**Esercizio 7.26.** Per  $\mathcal{O}(n)$ , si ha

$$H^0(\mathcal{O}(n)) = \begin{cases} 0 & n \leq -1 \\ A^{n+1} & n \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad H^1(\mathcal{O}(n)) = \begin{cases} 0 & n \geq -1 \\ A^{-n-1} & n \leq -2 \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

Il caso di  $H^0$  segue facendo lo stesso conto della proposizione (6.42) sostituendo  $\mathbb{K}$  con  $A$ . I rispettivi  $H^1$  si calcolano sfruttando l'esattezza di

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}(n)) \rightarrow A[t] \oplus A[t^{-1}] \rightarrow A[t, t^{-1}] \rightarrow H^1(\mathcal{O}(n)) \rightarrow 0$$

□

**Osservazione 7.27** (Fuori programma). Il fatto che vale sempre

$$\operatorname{rnk} H^0(\mathcal{O}(n)) - \operatorname{rnk} H^1(\mathcal{O}(n)) = n + 1$$

non è una coincidenza. Ci dice che  $t + 1$  è il polinomio di Hilbert di  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ .

## 7.4 Teoremi di Horrocks

**Notazione.** Scriviamo  $R\langle t \rangle$  per indicare la localizzazione di  $R[t]$  ai polinomi monici<sup>7</sup>

Per dimostrare il teorema di Quillen-Suslin facciamo uso del seguente risultato:

**Teorema 7.28** (Horrocks algebrico globale). Sia  $M$  un  $A[t]$  modulo proiettivo finitamente generato. Se  $M\langle t \rangle$  è libero allora  $M$  è libero.

Esso si inserisce in un gruppo di quattro risultati che prendono tutti il nome da Horrocks. Gli altri tre sono

**Teorema 7.29** (Horrocks algebrico locale). Sia  $M$  un  $A[t]$  modulo proiettivo finitamente generato con  $A$  locale. Se  $M\langle t \rangle$  è libero allora  $M$  è libero.

**Teorema 7.30** (Horrocks geometrico globale). Se  $E$  è un fibrato vettoriale su  $\mathbb{P}_A^1$  allora  $E|_{\mathbb{A}_A^1}$  è banale.

**Teorema 7.31** (Horrocks geometrico locale). Se  $E$  è un fibrato vettoriale su  $\mathbb{P}_A^1$  con  $A$  locale, allora  $E|_{\mathbb{A}_A^1}$  è banale.

<sup>7</sup>formano una parte moltiplicativa perché 1 è monico, 0 non è monico e il coefficiente di testa di un prodotto di polinomi è il prodotto dei coefficienti di testa, ma  $1 \cdot 1 = 1$ .

Vale il seguente diagramma di implicazioni

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Incollamento Suslin} & \\
 HGL & \xrightarrow{\quad \downarrow \quad} & HGG \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 HAL & \xrightarrow{\quad \quad} & HAG \xrightarrow{\quad \text{Quillen Suslin} \quad}
 \end{array}$$

Per raggiungere il teorema di Quillen-Suslin mostriamo le implicazioni rosse e Horrocks geometrico locale.

#### 7.4.1 Dimostrazione Horrocks geometrico locale

**Osservazione 7.32.** Se  $\mathfrak{M}$  è un fibrato vettoriale su  $\mathbb{P}_A^1$  allora osserviamo che  $\mathfrak{M}|_{\mathbb{A}_A^1} = M_0$  è libero se e solo se

$$\mathfrak{M}(n)|_{\mathbb{A}_A^1} = \mathfrak{M}|_{\mathbb{A}_A^1} \otimes \mathcal{O}_A(n)|_{\mathbb{A}_A^1} = M_0 \otimes_{A[t]} A[t] = M_0$$

è libero, indipendentemente da  $n$ .

Grazie a questa osservazione, ai fini di dimostrare HGL, possiamo supporre<sup>8</sup>

$$\overline{\mathfrak{M}} = \mathcal{O}(0)^k \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{O}(n_i), \quad n_i > 0.$$

**Proposizione 7.33.** Sotto queste ipotesi  $H^1(\overline{\mathfrak{M}}_n) = 0$  per ogni  $n \geq 0$ .

*Dimostrazione.*

Per  $n = 0$  il risultato segue dell'esercizio (7.26), in quanto in questo caso  $H^1(\overline{\mathfrak{M}})$  è somma di moduli banali ( $H^1(\mathcal{O}(k)) = 0$  per ogni  $k \geq 0$ ). Per  $n \geq 1$  basta notare che

$$H^1(\overline{\mathfrak{M}}_n) \stackrel{(7.24)}{\cong} H^1(\overline{\mathfrak{M}})^{\ell_0} = 0$$

per quanto appena detto. □

**Proposizione 7.34.**  $H^1(\mathfrak{M}) = 0$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $H^1(\mathfrak{M})$  è un  $A$ -modulo finitamente generato, infatti considerando la successione esatta

$$M_0 \oplus M_\infty \rightarrow M_{0,\infty} \rightarrow H^1(\mathfrak{M}) \rightarrow 0$$

se  $\{v_i\}$  sono generatori per  $M_0$  e  $\{u_j\}$  per  $M_\infty$  allora le loro immagini generano il nucleo di  $M_{0,\infty} \rightarrow H^1(\mathfrak{M})$ , quindi otteniamo una nuova successione esatta corta

$$0 \rightarrow \langle v_i - u_j \rangle \rightarrow M_{0,\infty} \rightarrow H^1(\mathfrak{M}) \rightarrow 0$$

<sup>8</sup>non occorre specificare quale massimale  $\mathfrak{m}$  scegliamo perché  $A$  è un anello locale.

e dato che  $M_{0,\infty}$  è finitamente generato anche i termini laterali, e quindi in particolare anche  $H^1(\mathfrak{M})$ , sono finitamente generati.

Considerando ora nuovamente la successione esatta

$$M_0 \oplus M_\infty \rightarrow M_{0,\infty} \rightarrow H^1(\mathfrak{M}) \rightarrow 0$$

e tensorizzandola per  $A/\mathfrak{m}$ , otteniamo la successione esatta

$$\frac{M_0}{\mathfrak{m}M_0} \oplus \frac{M_\infty}{\mathfrak{m}M_\infty} \rightarrow \frac{M_{0,\infty}}{\mathfrak{m}M_{0,\infty}} \rightarrow \frac{H^1(\mathfrak{M})}{\mathfrak{m}H^1(\mathfrak{M})} \rightarrow 0$$

ma per definizione di  $\overline{\mathfrak{M}}$  si ha

$$\frac{M_0}{\mathfrak{m}M_0} \oplus \frac{M_\infty}{\mathfrak{m}M_\infty} \rightarrow \frac{M_{0,\infty}}{\mathfrak{m}M_{0,\infty}} \rightarrow H^1(\overline{\mathfrak{M}}) \rightarrow 0$$

quindi  $\frac{H^1(\mathfrak{M})}{\mathfrak{m}H^1(\mathfrak{M})} \cong H^1(\overline{\mathfrak{M}}) = 0$ , dunque  $H^1(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}H^1(\mathfrak{M})$  e quindi per Nakayama otteniamo  $H^1(\mathfrak{M}) = 0$  in quanto modulo finitamente generato.  $\square$

**Proposizione 7.35.** 1.  $H^1(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^n) = 0$  per ogni  $n \geq 0$ .

2. La mappa  $H^0(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^n) \rightarrow H^0(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^{n-1})$  è suriettiva.

*Dimostrazione.*

Dimostriamo entrambe le proposizioni simultaneamente per induzione su  $n$ .

Consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n \rightarrow A/\mathfrak{m}^n \rightarrow A/\mathfrak{m}^{n-1} \rightarrow 0$$

e tensorizziamola con  $\mathfrak{M}$ , ottenendo

$$0 \rightarrow \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n \rightarrow \mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^n \rightarrow \mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^{n-1} \rightarrow 0,$$

da cui troviamo la successione esatta lunga (7.25)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\overline{\mathfrak{M}_{n-1}}) & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}^n}) & \longrightarrow & H^0(\mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}^{n-1}}) \\ & & & & & \downarrow & \\ & & H^1(\mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}^{n-1}}) & \longleftarrow & H^1(\mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}^n}) & \longleftarrow & H^1(\overline{\mathfrak{M}_{n-1}}) \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

dove  $H^1(\overline{\mathfrak{M}_{n-1}}) = 0$  per la proposizione (7.33) e  $H^1(\mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}^{n-1}}) = 0$  per ipotesi induttiva<sup>9</sup>.

La suriettività della mappa nella richiesta segue dall'esattezza e dal fatto che  $H^1(\overline{\mathfrak{M}_{n-1}}) = 0$ .  $\square$

---

<sup>9</sup>  $H^1(\mathfrak{M} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}^n}) = H^1(\mathfrak{M}) = 0$  per la proposizione precedente quindi abbiamo un passo base.

Citiamo il seguente

**Teorema 7.36.** Si ha il seguente isomorfismo

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^0(\mathfrak{M})/\mathfrak{m}^n H^0(\mathfrak{M}) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^0(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^n),$$

dove il sistema proiettivo è dato dalle proiezioni

$$H^0(\mathfrak{M})/\mathfrak{m}^n H^0(\mathfrak{M}) \rightarrow H^0(\mathfrak{M})/\mathfrak{m}^{n-1} H^0(\mathfrak{M}).$$

per dimostrare che

**Proposizione 7.37.** La mappa

$$H^0(\mathfrak{M}) \rightarrow H^0(\overline{\mathfrak{M}}) = H^0(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m})$$

definita da

$$s \mapsto \bar{s} \in \mathcal{O}(0)^h \oplus \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$$

è suriettiva.

*Dimostrazione.*

Basta osservare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim H^0(\mathfrak{M})/\mathfrak{m}^n H^0(\mathfrak{M}) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim H^0(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}^n) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H^0(\mathfrak{M} \otimes A/\mathfrak{m}) \end{array}$$

dove la mappa verticale è suriettiva perché è la mappa nel punto 2. di (7.35).  $\square$

**Osservazione 7.38.** Geometricamente, questa proposizione afferma che possiamo estendere una sezione globale del fibrato a  $\{\mathfrak{m}\} \times \mathbb{P}^1$  ad una sezione globale di tutto il fibrato.

**Lemma 7.39.** Se  $\bar{s} \in H^0(\overline{\mathfrak{M}})$  è non nulla e  $s \mapsto \bar{s}$  per la mappa della proposizione (7.37), allora  $s$  non è mai nulla.

*Dimostrazione.*

“Non si annulla mai” significa che la classe  $\bar{s}_x \in \mathfrak{M}_x := \mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}} k(x)$  non è mai nulla per ogni punto  $x \in \mathbb{P}^1_A$ . Supponiamo per assurdo che  $\bar{s}_p = 0$ . Segue che  $\bar{s}_x = 0$  per  $x$  un qualsiasi punto chiuso che specializza  $p$ . Dato che la mappa  $\mathbb{P}^1_A \rightarrow \text{Spec } A$  è chiusa in quanto  $\mathbb{P}^1$  è una varietà completa, la proiezione di  $x$  in  $\text{Spec } A$  deve essere un punto chiuso, quindi  $\mathfrak{m}$  dato che  $A$  è locale.

Segue dunque che  $x \in \{\mathfrak{m}\} \times \mathbb{P}^1$ , e quindi  $\bar{s}_x = \bar{s}$ , che per ipotesi è non nulla, portandoci all'assurdo cercato.  $\square$

Ricordiamo questo cruciale lemma di algebra commutativa

**Lemma 7.40.** Sia  $(B, \mathfrak{m})$  un anello locale e sia  $L$  un  $B$ -modulo libero finitamente generato. Se  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  è una  $(B/\mathfrak{m})$ -base di  $L/\mathfrak{m}L$ , allora  $x_1, \dots, x_n$  è una  $B$ -base di  $L$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la mappa suriettiva  $B^n \rightarrow L$  data da  $e_i \mapsto x_i$ . Per proiettività abbiamo una decomposizione  $B^n = L \oplus L'$ , da cui  $B^n/\mathfrak{m}B^n \cong L/\mathfrak{m}L'$ . Ciò implica che  $L'/\mathfrak{m}L' = 0$  e per Nakayama  $L' = 0$ .  $\square$

**Corollario 7.41.** Siano  $B$  è un anello noetheriano,  $M$  un  $B$ -modulo proiettivo e  $s$  un elemento di  $M$ . Se  $0 \neq \bar{s}_{\mathfrak{m}}$  in  $M/\mathfrak{m}M$  per ogni ideale massimale  $\mathfrak{m}$  di  $B$ , allora  $M/sM$  è proiettivo.

*Dimostrazione.*

Ricordiamo (6.33) che  $M/sM$  è proiettivo se e solo se  $(M/sM)_{\mathfrak{m}}$  (e quindi  $M_{\mathfrak{m}}/sM_{\mathfrak{m}}$ ) è libero per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale in  $B$ . Dato che  $\bar{s}_{\mathfrak{m}} \neq 0$  in  $M/\mathfrak{m}M = M \otimes B/\mathfrak{m}$ , possiamo completarlo ad una base di  $M \otimes B/\mathfrak{m}$ , che per il lemma precedente si estende ad una base di  $M_{\mathfrak{m}}$  il cui primo elemento è  $s_{\mathfrak{m}}$ . In particolare

$$M_{\mathfrak{m}}/sM_{\mathfrak{m}} \cong \bigoplus_{i=2}^N B_{\mathfrak{m}} e_i$$

in quanto  $M_{\mathfrak{m}} = B_{\mathfrak{m}} s \oplus \bigoplus_{i=2}^N B_{\mathfrak{m}} e_i$ .  $\square$

*Dimostrazione (Horrocks geometrico locale 7.31).*

Procediamo per induzione sul rango di  $\mathfrak{M}$ . Se  $\text{rnk } \mathfrak{M} = 0$  non c'è nulla da dimostrare e la tesi vale.

Sia  $\bar{s} \in H^0(\overline{\mathfrak{M}})$  non nulla e sia  $s$  una sua preimmagine in  $s$  come per la proposizione (7.37). Poiché  $s$  non è mai nulla per il lemma (7.39), il quoziente  $\mathfrak{N} := \mathfrak{M}/(s)$  è un fibrato vettoriale (per il corollario (7.41) applicato a  $B = A[t]$  e  $B = A[t^{-1}]$ ) di rango inferiore a  $\mathfrak{M}$ . Consideriamo la successione esatta di fibrati

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_A}(0) \xrightarrow{s} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} \rightarrow 0$$

Per ipotesi induttiva  $\mathfrak{N}|_{\mathbb{A}^1_A}$  è banale. Se  $M_0$  è il modulo proiettivo che corrisponde a  $\mathfrak{M}|_{\mathbb{A}^1_A}$  e  $N$  quello che corrisponde a  $\mathfrak{N}|_{\mathbb{A}^1_A}$  allora la successione esatta sopra si restringe alla successione esatta corta

$$0 \rightarrow A[t] \rightarrow M_0 \rightarrow N \cong A[t]^{h-1} \rightarrow 0.$$

Essendo  $N$  libero, e quindi proiettivo, la successione spezza, ovvero  $M_0 \cong A[t]^h$ .  $\square$

### 7.4.2 Implicazioni verso Horrocks algebrico globale

**Proposizione 7.42.** Horrocks geometrico locale implica Horrocks geometrico globale.

*Dimostrazione.*

Siano  $U_0 = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})_A = \text{Spec } A[t]$  e  $U_\infty = (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})_A = \text{Spec } A[t^{-1}]$ .

Dare un fibrato vettoriale  $\mathfrak{M}$  è come dare (7.15) moduli proiettivi finitamente generati  $M_0$  su  $A[t]$  e  $M_\infty$  e  $A[t^{-1}]$  tali che

$$(M_0)_t \cong (M_\infty)_{t^{-1}}.$$

Per avere la tesi vogliamo che  $\mathfrak{M}$  sia banale quando ristretto a  $U_0$ , cioè che  $M_0$  sia esteso da  $A$ .

Per il teorema di incollamento di Quillen (7.21) basta mostrare che  $(M_0)_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$  per ogni  $\mathfrak{m}$  massimale in  $A$ . Osserviamo che localizzare<sup>10</sup>  $\mathfrak{M}$  a  $\mathfrak{m}$  restituisce comunque un fibrato (stavolta su  $\mathbb{P}_{A_{\mathfrak{m}}}^1$ ), definito dai moduli  $(M_0)_{\mathfrak{m}}$  e  $(M_\infty)_{\mathfrak{m}}$  (definiscono un fibrato perché per esattezza della localizzazione  $(M_0)_{\mathfrak{m},t} \cong (M_\infty)_{\mathfrak{m},t^{-1}}$ ). Per il teorema di Horrocks geometrico locale (7.31) si ha che  $(M_0)_{\mathfrak{m}}$  è esteso da  $A_{\mathfrak{m}}$  come voluto.  $\square$

**Proposizione 7.43.** Horrocks geometrico globale implica Horrocks algebrico globale.

*Dimostrazione.*

Per ipotesi  $M\langle t \rangle$  è libero, quindi esiste  $f \in A[t]$  monico tale che  $M_f$  è libero (il minimo comune denominatore di una base di  $M\langle t \rangle$ ).

Vogliamo costruire un fibrato vettoriale su  $\mathbb{P}_A^1$  tale che la sua restrizione a  $\mathbb{A}_A^1 = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})_A$  sia uguale a  $M$ , così facendo, per Horrocks geometrico globale (7.30), avremo mostrato che  $M$  corrisponde al fibrato banale su  $A[t]$ .

Sia  $X = \text{Spec } A$ . Essendo un modulo proiettivo finitamente generato su  $A[t]$ ,  $M$  corrisponde ad un fibrato vettoriale su

$$X \times \mathbb{A}^1 \supseteq U = (X \times \mathbb{A}^1) \setminus V(f)$$

e che  $M_f$  corrisponde alla restrizione di questo fibrato a  $U$ , che quindi è il fibrato banale su  $U$  dato che  $M_f$  è libero. Definiamo i seguenti aperti di  $X \times \mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned} V &= (X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})) \setminus V(f) \\ W &= X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) = X \times \mathbb{A}^1 \end{aligned}$$

e notiamo che  $U$  è la loro intersezione, cioè abbiamo un diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} U & \xhookrightarrow{\quad} & V \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ W & \xhookrightarrow{\quad} & X \times \mathbb{P}^1 \end{array}$$

<sup>10</sup>tensorizzare con  $A_{\mathfrak{m}}[t]$

Se su  $W$  consideriamo il fibrato  $M$  e su  $V$  consideriamo il fibrato banale dello stesso rango allora notiamo che questi si incollano in quanto su  $W \cap V = U$  entrambi i fibrati si restringono al fibrato banale su  $U$ . Poiché  $W$  e  $V$  formano un ricoprimento di  $X \times \mathbb{P}^1$  ( $f$  non si annulla all'infinito perché è monico) abbiamo definito un fibrato vettoriale  $\mathfrak{M}$  su tutto  $\mathbb{P}_A^1$  tale che  $M = M_0$ .

Per il teorema di Horrocks geometrico globale (7.30) questo mostra che  $M = M_0$  è esteso da  $A$ , quindi per mostrare che  $M_0$  è libero basta mostrare che  $N = M_0/tM_0$  è un  $A$ -modulo libero. Poiché  $M_0$  deriva da un fibrato su  $X \times \mathbb{P}^1$ , che si scrive come incollamento di  $M_0$  e  $M_\infty$ , vale la seguente catena di isomorfismi

$$N = \frac{M_0}{tM_0} \cong \frac{M_0}{(t-1)M_0} \xrightarrow{s:=t^{-1}} \frac{M_\infty}{(1-s)M_\infty} \cong \frac{M_\infty}{sM_\infty}.$$

Se  $f$  come prima è monico di grado  $n$  e  $g(s)$  è tale che  $g(t^{-1})t^n = f(t)$ , si può verificare che

$$V = X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \setminus V(f) = X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \setminus V(g).$$

Per costruzione  $g(0) = 1 \neq 0$  quindi  $\frac{M_\infty}{sM_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{sM_\infty}\right)_g$ , ma su  $V$  sappiamo che  $\mathfrak{M}$  è banale, cioè  $(M_\infty)_g$  è un  $A[s]$ -modulo libero. Dunque

$$\frac{M_\infty}{sM_\infty} \cong \frac{(M_\infty)_g}{s(M_\infty)_g} = (M_\infty)_g \otimes_{A[s]} A \cong A[s]^{\oplus r} \otimes_{A[s]} A \cong A^r$$

è un  $A$ -modulo libero e quindi  $N$  è libero seguendo la catena di isomorfismi.  $\square$

#### 7.4.3 Dimostrazione di Quillen-Suslin

**Lemma 7.44.** Se  $R$  è un PID allora  $R\langle t \rangle$  è un PID.

*Dimostrazione.*

Sia  $\mathfrak{q}$  un ideale primo in  $R[t]$  e sia  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$   $\stackrel{R \text{ PID}}{=} (p)$ . Consideriamo due casi:

**$p \neq 0$**  Dato che  $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{q}$ , l'estensione  $\mathfrak{p}[t]$  di  $\mathfrak{p}$  a  $R[t]$  è contenuta in  $\mathfrak{q}$ . Abbiamo dunque un omomorfismo iniettivo

$$\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}[t]} \hookrightarrow \frac{R[t]}{\mathfrak{p}[t]} = R/(p)[t]$$

dove  $R/(p)$  è un campo per ipotesi. Dato che  $(R/(p))[t]$  è un PID e  $\mathfrak{q}/(\mathfrak{p}[t])$  si identifica con un suo ideale, segue che

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}[t] = (p) \text{ oppure } \mathfrak{q} = (p, f(t))$$

per qualche  $f(t)$  monico. In entrambi i casi nella localizzazione  $R\langle t \rangle$  si ha che  $\mathfrak{q} = (p)$ .

**$p = 0$**  Sia  $S = R \setminus \{0\}$ . Allora  $\mathfrak{q}$  è contenuto<sup>11</sup> in

$$S^{-1}\mathfrak{q} = (f(t)) \subset S^{-1}R[t] = \text{Frac}(R)[t],$$

con  $f(t) = \sum_i a_i t^i$  in  $\mathfrak{q}$ . Sia  $d := \gcd(a_i)$  e sia  $g = f/d$ . Poiché  $g \in R[t]$ , per primalità di  $\mathfrak{q}$  necessariamente  $g \in \mathfrak{q}$ .

Mostriamo che  $\mathfrak{q} = (g(t))$ : se  $h$  è un elemento di  $\mathfrak{q}$  allora  $h = f\ell_1 \stackrel{\ell_1 \div d\ell_1}{=} g\ell$  per qualche  $\ell_1$  in  $\text{Frac}(R)[t]$ . Poiché  $g \in R[t]$  e  $g\ell = h \in R[t]$ , per il lemma di Gauss  $\ell$  è in  $R[t]$  e quindi  $h \in (g)$  come ideale in  $R[t]$ .

<sup>11</sup>questo ideale è un primo ben definito di  $S^{-1}R[t]$  perché  $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$  per ipotesi.

In conclusione, localizzando rispetto ai polinomi monici ogni ideale di  $R[t]$  diventa principale.  $\square$

**Teorema 7.45** (Quillen-Suslin). Se  $R$  è un PID e  $M$  è proiettivo finitamente generato su  $R[t_1, \dots, t_n]$ , allora  $M$  è libero.

*Dimostrazione.*

Procediamo per induzione su  $n$ .

- n = 0 Se  $M$  è un modulo proiettivo finitamente generato su  $R$  PID allora è anche libero per noti risultati di algebra commutativa.
- n > 0 Se  $M$  è un  $R[t_1, \dots, t_n]$  modulo proiettivo finitamente generato allora  $M\langle t_1 \rangle$  è un  $R\langle t_1 \rangle [t_2, \dots, t_n]$ -modulo proiettivo finitamente generato. Dato che  $R\langle t_1 \rangle$  è un PID (7.44), per ipotesi induttiva questo mostra che  $M\langle t_1 \rangle$  è libero. Ora considero  $A = R[t_2, \dots, t_n]$  e noto che  $M$  è un  $A[t_1]$  modulo proiettivo finitamente generato per ipotesi, inoltre abbiamo mostrato che  $M\langle t_1 \rangle$  è libero, quindi per il teorema di Horrocks algebrico globale (7.28) si ha che  $M$  è libero.

$\square$

**Osservazione 7.46.** Effettivamente nell'implicazione  $HAG \implies$  Quillen-Suslin usiamo solo anelli di polinomi quindi come avevamo anticipato non serve davvero la teoria degli schemi per formalizzare questa dimostrazione.