

Gruppi algebrici lineari

Corso del prof. Maffei Andrea

Antonio Di Nunzio e Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Prerequisiti | 3 |
| 1 | Teoria delle rappresentazioni | 4 |
| 1.1 | Definizioni | 4 |
| 1.2 | Costruzioni principali | 5 |
| 1.3 | Rappresentazioni semplici e semisemplici | 8 |
| 2 | Geometria Algebrica | 11 |
| 2.1 | Varietà affini immerse | 11 |
| 2.2 | Varietà algebriche e morfismi | 14 |
| 2.3 | Connessione e Irriducibilità | 16 |
| 2.4 | Dimensione di una varietà algebrica | 19 |
| II | Gruppi algebrici | 20 |
| 3 | Gruppi algebrici | 21 |
| 3.1 | Definizioni generali | 21 |
| 3.1.1 | Componente connessa dell'identità | 24 |
| 3.2 | Gruppi algebrici affini sono lineari | 25 |
| 4 | Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile | 28 |
| 4.1 | Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti | 29 |
| 4.2 | Decomposizione di Jordan | 32 |
| 4.3 | Gruppi unipotenti | 37 |
| 4.3.1 | Esponenziale e logaritmo | 39 |
| 4.4 | Gruppi completamente riducibili | 40 |

Introduzione

Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di $GL(n)$ definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

Esempio 0.1. Il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ agisce su \mathbb{C}^2 , e quindi anche sulle funzioni definite su \mathbb{C}^2 , infatti se $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

Domanda: come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x, y]_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d \rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio $V_2 = \mathbb{C}[x, y]_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$. I suoi elementi sono $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$. Segue che $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$ sono le funzioni polinomiali su V_2 . Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$.

Parte I

Prerequisiti

Capitolo 1

Teoria delle rappresentazioni

1.1 Definizioni

Definizione 1.1 (Rappresentazione). Sia G un gruppo e \mathbb{K} un campo. Una **rappresentazione** di G su \mathbb{K} (o **G -modulo**) è un \mathbb{K} -spazio vettoriale V munito di una azione \mathbb{K} -lineare di G , cioè esiste una mappa

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

con le proprietà^a

- $e \cdot v = v$
- $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$
- $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda g \cdot u + \mu g \cdot v$

^ain futuro potrò abbreviare omettendo il \cdot .

Osservazione 1.2. Dare una rappresentazione è equivalente a dare un morfismo di gruppi $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ dove $\rho(g)v = g \cdot v$.

Definizione 1.3 (Sottorappresentazione). Dato $U \subseteq V$ con V rappresentazione di G , U è una **sottorappresentazione** se U è sottospazio vettoriale G -invariante.

Osservazione 1.4. Data $U \subseteq V$ sottorappresentazione, possiamo definire una struttura naturale di rappresentazione su $W = V/U$ ponendo

$$g[v] = [gv].$$

Definizione 1.5 (Morfismo di G -rappresentazioni). Se V_1, V_2 sono rappresentazioni di G e abbiamo $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineare, diciamo che φ è un **morfismo di G -rappresentazioni o di G -moduli** se

$$\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1).$$

Esempio 1.6. Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $U \subseteq V$ è morfismo di G -moduli

Esempio 1.7. Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $V \rightarrow V/U$ è morfismo di G -moduli

Osservazione 1.8. La mappa $\pi : V \rightarrow V/U$ è tale che per ogni $\varphi : V \rightarrow V'$ di G -moduli, se $\varphi(U) = 0$ allora esiste $\chi : V/U \rightarrow V'$ di G -moduli t.c. $\varphi = \chi \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/U \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \varphi & \nearrow \chi & \\ & & & & V' & & \end{array}$$

Definizione 1.9 (Invarianti e coinvarianti). Sia V un G -modulo. Definiamo lo **spazio degli invarianti** come

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \forall g \in G\}.$$

Si ha che V^G è una sottorappresentazione di cui G agisce banalmente. Analogamente definiamo lo **spazio dei coinvarianti** come

$$V_G = V / \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Notiamo che $\langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$ è effettivamente una sottorappresentazione ($h(v - gv) = hv - (hgh^{-1})(hv)$), quindi questo quoziente è ben definito. Notiamo che G agisce banalmente anche V_G .

Notazione. Se V e W sono G -moduli, poniamo

$$\text{Hom}_G(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ di } G\text{-moduli}\}.$$

Notiamo che è un \mathbb{K} -spazio vettoriale.

1.2 Costruzioni principali

Se V_i sono rappresentazioni di G , $\bigoplus_i V_i$ e $\prod_i V_i$ sono rappresentazioni di G . Inoltre $\bigoplus_i V_i$ è sottorappresentazione di $\prod_i V_i$.

Osservazione 1.10 (Proprietà universale). Consideriamo le inclusioni di G -moduli

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus V_i \\ v_i & \longmapsto & (w_j) \end{array}, \quad \text{dove } w_j = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $\varphi_i : V_i \rightarrow W$ è di G -moduli allora esiste un'unica $\psi : \bigoplus V_i \rightarrow W$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \bigoplus V_i \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \psi \\ & & W \end{array}$$

Vale una proprietà duale per il prodotto.

Definizione 1.11 (Rappresentazione duale). Se V è G -modulo, definiamo una azione di G su V^* definendo $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$. Come notazione useremo

$$\langle g\varphi, v \rangle = \langle \varphi, g^{-1}v \rangle.$$

La rappresentazione così definita è detta **duale** alla rappresentazione V .

Osservazione 1.12. $\langle g\varphi, gv \rangle = \langle \varphi, v \rangle$.

Definizione 1.13 (Prodotto tensore). Se V e W rappresentazioni di G , definiamo una azione sul prodotto tensore ponendo

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

Definizione 1.14 (Omomorfismi). Se V e W rappresentazioni di G , definiamo una azione su $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ponendo

$$(gL)(v) = g(L(g^{-1}v)).$$

Osservazione 1.15. $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \{L \mid gL = L\}$, ma

$$gL = L \iff g(L(g^{-1}v)) = gL(v) = L(v) \iff L(g^{-1}v) = g^{-1}L(v)$$

e poiché questo vale per ogni $g \in G$ ricaviamo che

$$(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \text{Hom}_G(V, W).$$

Ricordiamo che esiste

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \varphi \otimes w & \longmapsto & \{v \mapsto \varphi(v)w\} \end{array}$$

Osservazione 1.16. Φ è iniettiva e $\text{Imm } \Phi = \{L : V \rightarrow W \mid \text{rk } L < \infty\}$

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

Domanda: Φ è di G -moduli?

Dimostrazione.

Per linearità basta considerare elementi della forma $\varphi \otimes w$.

$$\Phi(g(\varphi \otimes w))(v) = \Phi(g\varphi \otimes gw)(v) = g\varphi(v)gw = \varphi(g^{-1}v)gw = g(\Phi(\varphi \otimes w))(v).$$

□

Definizione 1.17 (Tensori simmetrici e antisimmetrici). Definiamo

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-volte}}$$

$$S^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes x_b \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_b \otimes x_a \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

$$\bigwedge^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes v \otimes v \otimes x_{a+3} \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

Per il prodotto simmetrico vale una proprietà universale analoga a quella del prodotto tensore, dove al posto di mappe multilineari qualsiasi consideriamo multilineari simmetriche (se $V^n \rightarrow W$ multilineare simmetrica, abbiamo $F : V^{\otimes n} \rightarrow W$ che passa al quoziente diventando $H : S^n V \rightarrow W$, l'unicità segue dall'unicità di F e suriettività di $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$).

Un ragionamento completamente analogo vale per $\bigwedge^n V$.

Osservazione 1.18. Se V è un G -modulo, per quanto detto sul prodotto tensore, $V^{\otimes n}$ è una rappresentazione e quindi anche $S^n V$ e $\bigwedge^n V$ lo sono in quanto suoi quozienti.

Definizione 1.19 (Algebra tensoriale). Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e poniamo $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Definiamo l'**algebra tensoriale** come

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

dove il prodotto è indotto da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

In modo analogo costruiamo l'**algebra simmetrica** SV e l'**algebra antisimmetrica** $\bigwedge V$.

Osservazione 1.20. $SV \cong \mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$ dove $\{x_i\}_{i \in I}$ è una base di V .

Definizione 1.21 (Algebra associativa universale). Sia V uno spazio vettoriale, l'**algebra associativa universale** su V consiste in una \mathbb{K} -algebra^a A e un morfismo $\alpha : V \rightarrow A$ tale che

1. α è \mathbb{K} -lineare
2. per ogni B algebra associativa e per ogni $\beta : V \rightarrow B$ \mathbb{K} -lineare esiste un unico morfismo ψ di \mathbb{K} -algebre tale che

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow \beta & \downarrow \psi \\ & & B \end{array}$$

^a $\mathbb{K} \subseteq A$, A anello con unità e $\mathbb{K} \subseteq Z(A)$

Osservazione 1.22. Se una algebra associativa universale esiste allora è unica a meno di isomorfismo perché abbiamo dato una proprietà universale.

Osservazione 1.23. Un'algebra associativa universale esiste per ogni V ed è data dall'algebra tensoriale e l'inclusione $V \xrightarrow{id} V^{\otimes 1} \subseteq TV$.

Dimostrazione.

Sia B un'algebra associativa e sia $\beta : V \rightarrow B$ lineare. Definiamo

$$F : \begin{array}{ccc} TV & \longrightarrow & B \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \beta(v_1) \cdots \beta(v_n) \end{array}$$

La buona definizione segue dal fatto che il prodotto in un'algebra è multilineare. \square

Osservazione 1.24. Dato V spazio vettoriale possiamo definire analogamente a prima l'algebra associativa universale simmetrica e l'algebra associativa universale antisimmetrica e un loro modello è dato da SV e $\bigwedge V$ rispettivamente.

1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici

Definizione 1.25 (Rappresentazione semplice). Una rappresentazione S di G si dice **semplice** se $S \neq 0$ e se non ha sottorappresentazioni non banali.

Lemma 1.26 (Lemma di Schur). Sia S una rappresentazione semplice di G .

1. Ogni morfismo di G -moduli non nullo $\varphi : S \rightarrow S$ è invertibile.
2. L'insieme $\text{End}_G(S)$ è un corpo e si ha $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S))$.

Dimostrazione.

Per il primo punto, osserviamo che $\ker \varphi$ è un sottomodulo di S che non può essere uguale a S , quindi è 0. Analogamente $\text{Im } \varphi = S$. Per il secondo punto, sia $F =$

$\text{End}_G(S)$. La moltiplicazione per un elemento λ di \mathbb{K} è in F e commuta con tutto F . Infine, se φ è un elemento non nullo di F , per il primo punto φ è invertibile e l'inverso è un omomorfismo di G -moduli. \square

Esempio 1.27. Assumiamo \mathbb{K} algebricamente chiuso e $\dim_{\mathbb{K}}(S) < +\infty$. Allora abbiamo un contenimento $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S)) \subseteq \text{End}_G(S)$. Poiché la dimensione di $\text{End}_G(S)$ su \mathbb{K} è finita e \mathbb{K} è algebricamente chiuso, si ottiene $\mathbb{K} = \text{End}_G(S)$.

Esercizio 1.28. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supponiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(S)$ sia al più numerabile. Mostrare che $\text{End}_G(S) = \mathbb{C}$.

Esempio 1.29. Sia $G = C_2 = \{1, \sigma\}$ e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$. Allora la rappresentazione $V = \mathbb{K}^2$ di G data da

$$[\sigma]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è somma di rappresentazioni semplici.

Definizione 1.30. Sia V una rappresentazione di G .

1. V si dice **semisemplice** se è somma diretta di rappresentazioni semplici.
2. V si dice **completamente riducibile** se per ogni sottorappresentazione W di V esiste una sottorappresentazione U di V tale che $V = U \oplus W$.

Esempio 1.31. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la rappresentazione $V = \mathbb{C}^2$ del gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

non è completamente riducibile: consideriamo la sottorappresentazione di V data da $W = \mathbb{C}e_1$; se esistesse $U = \mathbb{C}v_2$ tale che $V = U \oplus W$, allora nella base e_1, v_2 tutte gli elementi g in G sarebbero diagonali

$$[g]_{e_1, v_2}^{e_1, v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonale se $x \neq 0$.

Proposizione 1.32. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. V è somma diretta di rappresentazioni semplici;
2. V è somma di rappresentazioni semplici.

Inoltre, le precedenti condizioni implicano la seguente.

3. V è completamente riducibile.

Dimostrazione.

Chiaramente la prima condizione implica la seconda. Proviamo il viceversa. Sia $V = \sum_{i \in I} S_i$ con S_i semplici. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I : \sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j \right\}.$$

La famiglia \mathcal{F} è non vuota in quanto contiene il singoletto $\{i\}$ per ogni i in I . Inoltre \mathcal{F} è ordinata parzialmente per inclusione: mostriamo che ogni catena $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di \mathcal{F} ammette il maggiorante $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ in \mathcal{F} . Basta mostrare che, per ogni $H \subseteq J$ finito, la somma $\sum_{h \in H} S_h$ è diretta. Poiché H è finito, si ha $H \subseteq J_\alpha$ per qualche α in A , dunque la somma $\sum_{j \in J_\alpha} S_j$ è diretta. A questo punto, per il Lemma di Zorn esiste un elemento M in \mathcal{F} massimale. Mostriamo che $V = \bigoplus_{j \in M} S_j$. Per assurdo assumiamo $W \doteq \bigoplus_{j \in M} S_j \subsetneq V$ e sia S_0 tale che $S_0 \not\subseteq W$. Allora $S_0 \cap W \subseteq S_0$ e $S_0 \oplus W \subset V$, allora $\widetilde{M} = M \cup \{0\}$ è in \mathcal{F} , contro la massimalità di M in \mathcal{F} .

L'implicazione 1. \Rightarrow 3. è lasciata per esercizio. □

Capitolo 2

Geometria Algebrica

In questa sezione, assumeremo sempre \mathbb{K} algebricamente chiuso.

2.1 Varietà affini immerse

Definizione 2.1. Un sottoinsieme X di \mathbb{K}^n si dice una **varietà algebrica affine (immersa)** se esistono f_1, \dots, f_h in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che

$$X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f_1(v) = \dots = f_h(v) = 0\}.$$

Data una varietà algebrica affine immersa X , denotiamo

$$I(X) \doteq \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } v \in X\}.$$

L'insieme $I(X)$ risulta un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Viceversa, se J è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, denotiamo

$$V(J) \doteq \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } f \in J\}.$$

Richiamiamo inoltre il classico Teorema degli Zeri di Hilbert.

Notazione. Nel seguito, denoteremo con P l'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Teorema 2.2 (Nullstellensatz). Se \mathbb{K} è un campo algebricamente chiuso e I, J sono ideali di P allora

$$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

In particolare abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{varietà algebriche affini immerse in } \mathbb{K}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Esempio 2.3. Vediamo qualche controesempio classico.

- Se \mathbb{K} non è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz non vale: ad esempio per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il polinomio $X^2 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ genera un ideale proprio (massimale) J tale che $V(J) = \emptyset$.
- La corrispondenza precedente non vale per gli ideali in generale: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, l'ideale $J = (x^2)$ è tale che $V(J) = \{0\}$, ma $I(V(J)) = (x) \neq J$.

Vediamo ora alcune conseguenze del Nullstellensatz.

1. Gli ideali massimali di P sono tutti e solo quelli della forma $\mathfrak{m}_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in \mathbb{K}^n .

Dimostrazione.

Che i precedenti siano tutti ideali massimali è evidente, mostriamo che sono i soli. Sia \mathfrak{m} un ideale massimale di P . Allora $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ (in quanto altrimenti avremmo $P = I(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$), dunque esiste un α in \mathbb{K}^n appartenente a $V(\mathfrak{m})$. Ma allora $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$ e per massimalità di \mathfrak{m}_α si ottiene l'uguaglianza. \square

2. Sia $I \subseteq P$ e sia α in $V(I)$. Allora $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$ e in generale

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I\}.$$

Ricordiamo inoltre (mostrarlo per esercizio) che se I è un ideale di P , allora si ha

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \text{Max}(P) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

Definizione 2.4. Sia X una varietà algebrica affine immersa in \mathbb{K}^n . Si definisce l'**anello delle coordinate** di X come il quoziente

$$\mathbb{K}[X] = P/I(X) = \{f|_X : f \in P\}.$$

Ricordiamo che su \mathbb{K}^n è definita una topologia, detta **topologia di Zariski**, in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi $V(I)$ al variare degli ideali I in P . Ricordiamo infatti che, se I, J sono ideali di P , allora

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$;
- $\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V(\sum_{i \in I} I_i)$.

Esempio 2.5. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, i chiusi sono gli insiemi con un numero finito di punti, oppure tutto \mathbb{C} .

Definizione 2.6. Sia f un elemento di P . Si definisce l'**aperto principale** relativo a f come

$$(\mathbb{K}^n)_f \doteq \mathbb{K}^n \setminus V(f) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Se $U = \mathbb{K}^n \setminus V(I)$ è un aperto e α è in U , allora esiste f in P tale che $\alpha \in (\mathbb{K}^n)_f \subseteq U$. Infatti $I = (f_1, \dots, f_h)$, $V(I) \subseteq V(f_i)$ e $(\mathbb{K}^n)_{f_i} = \mathbb{K}^n \setminus V(f_i) \subseteq U$.

Dotiamo ogni varietà algebrica affine immersa in \mathbb{K}^n della topologia di sottospazio. Inoltre, definiamo

$$X_f \doteq (\mathbb{K}^n)_f \cap X = \{\alpha \in X : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Osservazione 2.7. L'insieme

$$\left\{ \frac{g}{f^n} : g \in P \right\}$$

è ben definito su $(\mathbb{K}^n)_f$.

Definizione 2.8 (Funzioni regolari). Sia U un aperto di \mathbb{K}^n . Si definisce l'insieme delle **funzioni regolari** su U come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall \alpha \in U \exists g, h \in P : g(\alpha) \neq 0 \text{ e } f = h/g^n \text{ su } U \cap X_g\}.$$

Lemma 2.9. Sia X varietà affine immersa, allora

1. $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}[X]$
2. Se $g \in \mathbb{K}[X]$ allora $\mathcal{O}(X_g) = \mathbb{K}[X]_g$

Dimostrazione.

Intanto l'affermazione 2. implica l'affermazione 1. scegliendo $g \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Osserviamo che se abbiamo una funzione della forma f/g^n allora essa appartiene a $\mathcal{O}(X_g)$, quindi basta mostrare che se $\varphi \in \mathcal{O}(X_g)$ allora $\varphi \in \mathbb{K}[X]_g$. Per definizione, per ogni $\alpha \in X_g$ esistono h e k tali che $\varphi = k/h$ in $X_g \cap X_h = X_{gh}$.

Abbiamo dunque un ricoprimento $X_g = \bigcup X_{gh_i}$ dove $\varphi = k_i/h_i$ su X_{gh_i} . Sia $I = (h_i)$ l'ideale in $\mathbb{K}[X]_g$ generato dagli h_i . Se per assurdo $I \neq \mathbb{K}[X]_g$ allora esiste un massimale \mathfrak{m} che contiene I . Un massimale corrisponde ad un punto $\alpha \in X_g \subseteq X$ ma, poiché X_g è ricoperto dagli X_{gh_i} , esiste un indice i_0 tale che $\alpha \in X_{gh_{i_0}}$ e questo è assurdo perché vorrebbe dire

$$h_{i_0} \notin \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I \ni h_{i_0}.$$

Questo mostra che $I = \mathbb{K}[X]_g$. Possiamo dunque scrivere¹ $1 = \sum \alpha_i h_i$ per opportuni α_i . Segue che $\varphi = \sum \alpha_i h_i \varphi = \sum \alpha_i k_i$ in $\mathbb{K}[X]_g$, infatti dove $h_i \neq 0$ abbiamo $\varphi = k_i/h_i$ e quindi $h_i \varphi = k_i$, se invece $h_i(x) = 0$ si ha che $h_i(x) \varphi(x) = 0 = k_i(0)$, perché se così non fosse, poiché $x \in X_{h_j}$ per qualche $j \neq i$, si ha che

$$k_j/h_j = k_i/h_i \iff h_i k_j = k_i h_j$$

su $X_{h_i h_j}$ e quindi valutando in x abbiamo $k_i(x) h_j(x) = 0$ con $h_j(x) \neq 0$. □

¹nota che la somma è finita per definizione di ideale generato.

2.2 Varietà algebriche e morfismi

Definizione 2.10 (Varietà algebrica). Spazio topologico compatto X tale che per ogni aperto U abbiamo un insieme di funzioni $\mathcal{O}_X(U) \subseteq C^0(X \rightarrow \mathbb{K})$ tale che

1. Se $U \subseteq V$ e $f \in \mathcal{O}_X(V)$ allora $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$.
2. Se $V = \bigcup U_\alpha$ e $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ è tale che $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ per ogni α allora $f \in \mathcal{O}_X(V)$.
3. (X, \mathcal{O}_X) è localmente isomorfo ad una varietà affine immersa, cioè per ogni $x \in X$ esiste un intorno U e un omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow Y$ con Y affine tale che per ogni V aperto di U si ha $\varphi(V) = W$ aperto e $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ è un isomorfismo.

Esempio 2.11. Sia $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2} \supseteq V_{\det} = \text{GL}(n) = X$. Se U è un aperto di X pongo $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_V(U)$. Dimostriamo che X è localmente isomorfo ad una varietà affine (in realtà possiamo mostrare che è isomorfo ad una varietà affine globalmente):

Sia $Y \subseteq \mathbb{K}^{n^2+1} = V_{x_{ij}} \times \mathbb{K}_t$ definito dall'equazione $d(x_{ij})t = 1$. La mappa

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ (x_{ij}) & \longmapsto & (x_{ij}, \frac{1}{\det(x_{ij})}) \end{array}$$

risulta essere un isomorfismo.

Proposizione 2.12. Se X è una varietà affine immersa in \mathbb{K}^N , X_f è una varietà isomorfa ad una varietà affine immersa Y data da $V(\{f(x), f(x)t - 1\}_{f \in I(X)}) \subseteq \mathbb{K}_x^N \times \mathbb{K}_t$.

Dimostrazione.

ESERCIZIO. □

Esempio 2.13. Sia $X = \mathbb{P}^1$. Come spazio topologico, i chiusi sono \mathbb{P}^1, \emptyset e sottoinsiemi finiti di punti. Per ogni U aperto di \mathbb{P}^1 poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \circ \varphi_1 \in \mathcal{O}(\varphi_1^{-1}(U)), f \circ \varphi_2 \in \mathcal{O}(\varphi_2^{-1}(U))\}$$

dove

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [t : 1] \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1 : t] \end{array}.$$

Definizione 2.14 (Funzione regolare). Se $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ sono varietà, la mappa $\varphi : X \rightarrow Y$ è **regolare** se

1. φ è continua
2. Per ogni W aperto di Y , se $f \in \mathcal{O}_Y(W)$ allora $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(W))$

Definizione 2.15 (Varietà affine). (X, \mathcal{O}_X) è una **varietà affine** se è isomorfa ad una varietà affine immersa.

Se X è una varietà affine immersa, un morfismo $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ induce un omomorfismo di anelli

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

in particolare possiamo definire $f_i = \varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi$ in $\mathbb{K}[X]$ tali che $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ per definizione.

Viceversa, dati $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X]$ si ha che $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ è una mappa regolare.

Cont. Ovvio.

Pullback Sia $U = D(g) \subseteq \mathbb{K}^n$. Notiamo che

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid h(x) \div g(f_1(x), \dots, f_n(x)) \neq 0\} = X_h$$

Se $\alpha : U \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare, $\alpha = \ell/g^n$ con $\ell \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, quindi

$$\alpha \circ \varphi = \text{frac}(\ell(f_1, \dots, f_n)h^n)$$

che è un elemento di $\mathcal{O}(X_h)$ come voluto.

Proposizione 2.16 (Morfismi verso affine). Se Y è una varietà affine allora un morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ è univocamente determinato dall'omomorfismo $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$.

Dimostrazione.

Sia $\psi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \psi & \downarrow \subseteq \\ & & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Notiamo che φ è morfismo se e solo se ψ lo è. Se $\psi(X) \subseteq Y$ e $f \in I(Y)$ allora $\psi^*(f) = f \circ \varphi = 0$, quindi abbiamo un diagramma di algebre.

Viceversa se un morfismo di algebre sollevo e bla bla bla trovo morfismo di varietà. \square

Definizione 2.17 (Prodotto). Siano X, Y varietà affini immerse in \mathbb{K}_x^ℓ e \mathbb{K}_y^m rispettivamente, allora $X \times Y \subseteq \mathbb{K}_{(x,y)}^{\ell+m}$ è una varietà, data da

$$X \times Y = V(\{f(x), g(y)\}_{f \in I(X), g \in I(Y)}) \subseteq \mathbb{K}^\ell \times \mathbb{K}^m.$$

Proposizione 2.18. $\mathbb{K}[X \times Y] \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$

Dimostrazione.

L'anello delle coordinate del prodotto di due varietà affini è dato da

$$\mathbb{K}[X \times Y] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell]}{f(x), g(y)} \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

Infatti abbiamo un morfismo bilineare da $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$ dato dal prodotto dei polinomi. Il morfismo indotto Φ è surgettivo perché $x_i = \Phi(x_i \times 1)$ e $y_i = \Phi(1 \otimes y_i)$, quindi abbiamo i generatori. Per l'iniettività procediamo per casi

- Supponiamo $X = \mathbb{K}^\ell$ e $Y = \mathbb{K}^m$, allora abbiamo una inversa di Φ data da

$$x_i \mapsto x_i \otimes 1, \quad y_i \mapsto 1 \otimes y_i$$

- Scrivendo $\mathbb{K}[X \times Y]$ come $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, y_\ell]}{(f(x), g(y))}$ abbiamo un morfismo dal numeratore verso $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$ ben definito e notiamo che il nucleo è esattamente $(f(x), g(y))$. (dimostrare che prototensore di \mathbb{K} -algebre ridotte finitamente generate è ridotta.)

□

Definizione 2.19 (Prodotto fibrato). Se X, Y, Z varietà affini e morfismi $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$, definiamo $W = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$.

$$\begin{array}{ccc} W & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Osservazione 2.20. Notiamo che W è un chiuso, infatti è luogo di zeri di $f(x) - g(y)$ in $X \times Y$. Osserviamo però che queste equazioni non sono ridotte a priori.

2.3 Connessione e Irriducibilità

Sia X uno spazio topologico connesso. Allora

1. Se $Y \subset X$ è connesso, allora \overline{Y} è connesso.
2. Se $\varphi : X \rightarrow Y$ è continua, allora $\varphi(X)$ è connesso.

Esercizio 2.21. Se X è una varietà algebrica affine, allora

$$X \text{ sconnesso} \iff \mathbb{K}[X] = A \times B.$$

Esercizio 2.22. Siano X, Y due varietà affini connesse. Allora $X \times Y$ è connessa. [Attenzione: la topologia di $X \times Y$ non è la topologia prodotto!]

Esercizio 2.23. Se X è una varietà, allora X ha un numero finito di componenti connesse. In particolare le componenti connesse sono chiuse e aperte.

Definizione 2.24. Uno spazio topologico X si dice **riducibile** se esistono due sottospazi chiusi propri Z e W di X tali che $X = Z \cup W$. Lo spazio X si dice **irriducibile** se non è riducibile.

Osservazione 2.25. Se X è uno spazio di Hausdorff irriducibile, allora X è un punto.

Dimostrazione.

Se x, y sono punti distinti di X , allora esistono due intorni disgiunti U_x e U_y di x e y rispettivamente. Posti $Z = X \setminus U_y$ e $W = X \setminus U_x$, si ottiene $X = Z \cup W$. \square

Osservazione 2.26. Sia X una varietà affine. Allora X è irriducibile se e solo se l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ è un dominio d'integrità.

Dimostrazione.

Siano f, g in $\mathbb{K}[X]$ tali che $fg = 0$. Consideriamo $Z = V(f)$ e $W = V(g)$. Allora Z e W sono due chiusi tali che $X = Z \cup W$, dunque $X = Z$ oppure $X = W$, cioè $f = 0$ oppure $g = 0$. \square

Esempio 2.27. La varietà $X = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : xy = 0\}$ non è irriducibile.

Osservazione 2.28. Se Y è un sottospazio irriducibile di una varietà affine X , allora \overline{Y} è irriducibile. Se inoltre $\varphi: Y \rightarrow X$ è una mappa continua, allora $\varphi(Y)$ è irriducibile. Infine, se X e Y sono spazi topologici irriducibili, allora $X \times Y$ è uno spazio topologico irriducibile.

Sia X una varietà affine. Ricordiamo che esiste una bigezione tra gli ideali radicali di $\mathbb{K}[X]$ e le sottovarietà chiuse di X , data da $I \mapsto V(I)$ e viceversa $Y \mapsto I(Y)$.

Osservazione 2.29. Sia I un ideale di $\mathbb{K}[X]$. Allora

$$V(I) \text{ è irriducibile} \iff I \text{ è un ideale primo.}$$

Ricordiamo che, se I è un ideale radicale allora $V(I)$, come spazio topologico, è omeomorfo alla varietà affine avente come anello di coordinate $\mathbb{K}[X]/I$. L'insieme $V(I)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti I . D'altra parte, gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]/I$ sono gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti I . Se $\pi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]/I$ è la proiezione canonica, si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X] \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X]/I\} \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & \mathfrak{m}/I \\ \pi^{-1}(M) & \longleftarrow & M \end{array}$$

Definizione 2.30. Uno spazio topologico X si dice **Noetheriano** se ogni successione

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

di sottospazi chiusi di X stabilizza.

Osservazione 2.31. Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.

Dimostrazione.

Se $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ è una successione di sottospazi chiusi di X , allora si ha una successione

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq \dots$$

di ideali di $\mathbb{K}[X]$ che stabilizza perché $\mathbb{K}[X]$ è Noetheriano. Quindi anche la successione $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ stabilizza. \square

Osservazione 2.32. Ogni varietà è uno spazio topologico Noetheriano.

Dimostrazione.

Scrivendo $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ con X_i aperti affini e data una successione di chiusi $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$, si ha una successione $Z_1 \cap X_i \supseteq Z_2 \cap X_i \supseteq \dots \supseteq Z_n \cap X_i \supseteq \dots$ che stabilizza per ogni i . Allora esiste un N tale che $Z_n \cap X_i = Z_N \cap X_i$ per ogni $n \geq N$ e per ogni i , da cui $Z_n = Z_N$ per ogni $n \geq N$. \square

Proposizione 2.33. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora esistono dei sottospazi Y_1, \dots, Y_n chiusi e irriducibili di X tali che $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$. Inoltre, se $Y_i \not\subseteq Y_j$ per ogni $i \neq j$, una tale decomposizione di X è unica, e i sottospazi Y_i si dicono le **componenti irriducibili** di X .

Dimostrazione.

Consideriamo la famiglia \mathcal{F} dei chiusi di X che non possono essere scritti come unione di un numero finito di chiusi irriducibili. Mostriamo che \mathcal{F} è vuota.

Supponiamo per assurdo che \mathcal{F} sia non vuota. Poiché ogni catena in \mathcal{F} ammette un minimo, per il Lemma di Zorn esiste un elemento minimale Z in \mathcal{F} . Per costruzione, Z è riducibile, quindi possiamo scrivere $Z = C \cup D$ con C, D sottospazi chiusi e propri di Z . Poiché Z è un elemento minimale, C, D non sono in \mathcal{F} , quindi ammettono una decomposizione finita in chiusi irriducibili, ma allora anche Z ammette una tale decomposizione.

Supponiamo ora che X ammetta due decomposizioni in chiusi irriducibili

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_m = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$$

tali che $Y_i \not\subseteq Y_j$ e $Z_i \not\subseteq Z_j$ per ogni $i \neq j$. Poiché

$$Y_i = Y_i \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n) = Y_i \cap Z_1 \cup \dots \cup Y_i \cap Z_n$$

e poiché Y_i è irriducibile, si ha $Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)}$. Analogamente, $Z_j \subseteq Y_{\beta(j)}$. Allora $\beta \circ \alpha = id$, infatti

$$Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)} \subseteq Y_{\beta(\alpha(i))} = Y_i.$$

Analogamente $\alpha \circ \beta = id$ e ciò conclude. \square

Osservazione 2.34 (Componenti irriducibili corrispondono a primi minimali). Siano I, J_α ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che i J_α siano primi contenuti in I . Siano $X = V(I)$ e $Y_\alpha = V(J_\alpha)$. Allora

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n,$$

dove J_1, \dots, J_n sono i primi minimali contenenti I . Sappiamo dal corso di Algebra 2 che i primi minimali sono in numero finito.

Esempio 2.35. $I = (zx, zy)$. $p_1 = (z)$ è il piano, $p_2 = (x, y)$ è la retta, $X = V(p_1) \cup V(p_2)$.

2.4 Dimensione di una varietà algebrica

Definizione 2.36. Sia X uno spazio topologico. Definiamo la **dimensione (di Krull)** di X come

$$\sup \{n \in \mathbb{N} : \text{esiste una catena di chiusi irriducibili } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n\}.$$

Denotiamo questo numero $\dim X$.

Osservazione 2.37. Se X è una varietà affine, per quanto già visto si ha

$$\dim(X) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } P_0, \dots, P_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \dots \supsetneq P_n\}.$$

Teorema 2.38. Ogni varietà affine ha dimensione finita.

Poiché l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ di una varietà affine irriducibile X è un dominio d'integrità, possiamo considerare il suo campo dei quozienti, che indichiamo con K_X .

Definizione 2.39 (Altezza). Se \mathfrak{p} è un ideale primo di $\mathbb{K}[X]$, la sua **altezza** è definita come

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) \doteq \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } \mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

Teorema 2.40. Sia X una varietà affine irriducibile. Allora

1. $\dim(X) = \text{tr deg}_{\mathbb{K}}(K_X)$.
2. Se \mathfrak{p} è un ideale primo di $K[X]$ e $Y = V(\mathfrak{p})$, allora
$$\dim(X) = \dim(Y) + \text{ht}(\mathfrak{p}).$$
3. Se f è un elemento non nullo e non invertibile di $\mathbb{K}[X]$, allora $V(f)$ è un chiuso di X . Se la sua decomposizione in componenti irriducibili è data da $V(f) = Y_1 \cup \dots \cup Y_h$, allora

$$\dim(Y_i) = \dim(X) - 1.$$

Parte II

Gruppi algebrici

Capitolo 3

Gruppi algebrici

3.1 Definizioni generali

Definizione 3.1 (Gruppo algebrico lineare). Un gruppo G è un **gruppo algebrico lineare** se è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ per qualche n definito da equazioni polinomiali.

Definizione 3.2 (Gruppo algebrico affine). Un gruppo G è un **gruppo algebrico affine** se G è una varietà affine e le operazioni prodotto

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

e inverso

$$i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

sono morfismi di varietà.

Osservazione 3.3. Il prodotto $\mu : \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \rightarrow \mathrm{GL}(n)$ è un morfismo di varietà, infatti

$$(x_{ij})(y_{ij}) = \left(\sum_h x_{i,h} y_{h,j} \right)$$

è definito da equazioni polinomiali nelle entrate.

Similmente per l'operazione di inverso, infatti $(x_{ij})^{-1} = \mathrm{Adj}(x_{ij}) \cdot (\det(x_{ij}))^{-1}$. Le entrate della matrice aggiunta classica sono dei determinanti e quindi polinomiali, mentre l'inversa del determinante della matrice di partenza è una funzione regolare perché siamo su $\mathrm{GL}(n) = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \setminus V(\det)$.

Esempio 3.4. I gruppi $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{GL}(1) = \mathbb{G}_m$ e $\mathrm{SL}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ sono evidentemente gruppi algebrici lineari.

Esempio 3.5. Il gruppo

$$\mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un gruppo algebrico lineare (definito da $x_{11} = x_{22} = 1$ e $x_{21} = 0$). Notiamo però che

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi questo gruppo lo si può interpretare come $(\mathbb{K}, +)$, dando una realizzazione di questo come gruppo algebrico lineare.

Definizione 3.6 (Azione regolare di gruppo algebrico). Sia G un gruppo algebrico affine e sia X una varietà affine qualsiasi. Se G agisce su X affermiamo che questa azione è **regolare** se $\sigma : G \times X \rightarrow X$ è un morfismo di varietà algebriche.

Definizione 3.7 (Rappresentazione regolare). Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} e l'azione di G è lineare diciamo che V è una **rappresentazione regolare finito dimensionale** di G .

Se V è una rappresentazione di G (di dimensione qualsiasi) diciamo che è **regolare** se

1. per ogni $v \in V$ si ha $\dim \langle gv \rangle_{g \in G} < \infty$
2. per ogni $W \subseteq V$ sottospazio di dimensione finita, W è una rappresentazione regolare finito dimensionale.

Osservazione 3.8. Se G è un gruppo algebrico affine, ai morfismi di moltiplicazione μ e inverso i corrispondono omomorfismi di \mathbb{K} -algebre

$$\mu^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & (x \otimes y) \mapsto f(xy) \end{array}, \quad i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}$$

Osservazione 3.9. Se σ è una azione $G \times X \rightarrow X$ allora

$$\sigma^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & (g, x) \mapsto f(gx) \end{array}$$

Osservazione 3.10. La proprietà associativa si può esprimere tramite il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{id_G \times \mu} & G \times G \\ \mu \times id_G \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Quindi abbiamo una proprietà analoga sulla comoltiplicazione μ^* considerando il diagramma indotto.

Osservazione 3.11. Se $X = V$ è una rappresentazione regolare fin.dim. e $\sigma : G \times V \rightarrow V$ abbiamo un omomorfismo di algebre

$$\sigma^* : \mathbb{K}[V] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[V]$$

Ricordiamo però che $\mathbb{K}[V] = SV^*$, quindi possiamo restringere σ^* a solo $V^* \subseteq SV^*$.

Lemma 3.12. $\sigma^*(V^*) \subseteq \mathbb{K}[G] \otimes V^*$.

Dimostrazione.

Sia e_1, \dots, e_n una base di V e $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base duale. Se g agisce come (g_{ij}) su V e $v = \sum v_i e_i$ allora

$$\begin{aligned} \sigma^* \varphi_k(g, v) &= \varphi_k(gv) = \varphi_k\left(\sum g_{ij} v_j e_i\right) = \\ &= \sum g_{ij} v_j \varphi_k(e_i) = \sum g_{kj} v_j = \\ &= \left(\sum x_{kj} \otimes \varphi_j\right)(g, v), \end{aligned}$$

dove $x_{kj} \in \mathbb{K}[G]$ è la funzione che per ogni g restituisce g_{kj} . □

Lemma 3.13. Sia G che agisce su X in modo regolare con entrambi affini. Allora

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione di G con azione data da

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione regolare
- $\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di G .

Dimostrazione.

Se $f \in \mathbb{K}[X]$ allora $\dim \langle Gf \rangle < \infty$. Notiamo che $\sigma(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \beta_i$ con somma finita. Notiamo che, per definizione

$$f(gx) = \sum_i \alpha_i(g) \beta_i(x)$$

quindi

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) = \sum \alpha_i(g^{-1}) \beta_i(x) \iff gf = \sum_{i=1}^k \alpha_i(g^{-1}) \beta_i \in \langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$$

Questo mostra che $\dim \langle Gf \rangle$ è finita.

Vogliamo dimostrare che su $W \subseteq \mathbb{K}[X]$ di dimensione finita l'azione di G è regolare, cioè voglio mostrare che per ogni $\varphi \in W^*$ (generatori di $SW^* = \mathbb{K}[W]$) si ha $\varphi(gf)$ regolare.

Sia f_1, \dots, f_k una base di W . Poiché sono una base $\sigma^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes f_j$. Se $\varphi(f_i) = \lambda_i$ abbiamo che $\psi = \sigma^* \varphi$ è tale che

$$\psi(g, f_i) = \varphi(gf_i) = \varphi\left(\sum \alpha_{ij}(g^{-1}) f_j\right) = \sum \alpha_{ij}(g^{-1}) \lambda_j$$

□

3.1.1 Componente connessa dell'identità

Proposizione 3.14. Sia G un gruppo algebrico affine e sia G^0 la componente connessa di e_G . Allora G^0 è un sottogruppo normale chiuso.

Dimostrazione.

Sicuramente G^0 è chiuso in quanto componente connessa. L'insieme $G^0 \times G^0$ è connesso e la mappa

$$m^0 = m|_{G^0 \times G^0} : G^0 \times G^0 \longrightarrow G$$

ha immagine connessa in G . Poiché e_G è nell'immagine di m^0 , si ha $\text{Imm}(m^0) = G^0$. Dato g in G , si ha

$$gG^0g^{-1} \subset G^0,$$

infatti la mappa

$$AD_g : \begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

è continua e fissa e_G , quindi $\text{Imm}(AD_g) \subset G^0$. □

Esercizio 3.15. Il sottogruppo G^0 è irriducibile.

Citiamo il seguente teorema:

Teorema 3.16 (Chevalley). Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è una mappa regolare tra due varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\varphi(X)$.

Osservazione 3.17. Se G è un gruppo algebrico, allora esistono g_1, \dots, g_k in G tali che

$$G = G^0 \cup G^0 g_1 \cup \dots \cup G^0 g_k.$$

La precedente è una decomposizione in componenti connesse e irriducibili.

Proposizione 3.18. Se $\varphi: G \rightarrow H$ è un morfismo di gruppi algebrici affini, allora $\varphi(G)$ è un chiuso di H .

Dimostrazione.

Sfruttando la decomposizione dell'Osservazione (3.17), abbiamo

$$\varphi(G) = \varphi(G^0) \cup \varphi(G^0 g_1) \cup \dots \cup \varphi(G^0 g_k),$$

quindi basta mostrare che $\varphi(G^0)$ è chiuso. In particolare, possiamo ricondurci al caso $G = G^0$.

Il sottogruppo $X = \overline{\varphi(G)}$ di H è irriducibile, e per il Teorema di Chevalley (3.16) esiste un aperto U di X contenuto in $\varphi(G)$. Mostriamo che $X = \varphi(G)$. Poiché X e $\varphi(G)$ sono sottogruppi di H , si ha

$$U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X$$

Se x è un elemento di X , poiché $i(U) = U^{-1}$ è un aperto di X , anche xU^{-1} è un aperto di X . Per irriducibilità di X , si ha $U \cap xU^{-1} \neq \emptyset$, quindi esistono u, v in U tali che $x = uv$, da cui $X = U \cdot U = \varphi(G)$. □

3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari

Osservazione 3.19 (Punti e ideali massimali sono la stessa cosa). Nella situazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

abbiamo una corrispondente mappa di algebre

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Notiamo che

$$\varphi(\alpha) = \beta \iff \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta$$

dove \mathfrak{m}_α e \mathfrak{m}_β sono i massimali che corrispondono ai rispettivi punti.

Dimostrazione.

Basta notare che le seguenti sono equivalenze

$$\begin{aligned} f &\in \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) \\ f \circ \varphi &\in \mathfrak{m}_\alpha \\ (f \circ \varphi)(\alpha) &= 0 \\ f(\varphi(\alpha)) &= 0 \\ f &\in \mathfrak{m}_{\varphi(\alpha)} = \mathfrak{m}_\beta \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.20. Siano X e Y affini e sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo. Se $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ è surgettiva allora $\varphi(X)$ è chiuso.

Dimostrazione.

Sia $I = \ker \psi$ e mostriamo che $\varphi(X) = V(I)$:

⊆ Se $x \in X$ e $f \in I$ allora $f(\varphi(x)) = \psi(f)(x) = 0$, quindi $\varphi(x) \in V(I)$.

⊇ Sia $\beta \in V(I)$, allora $I \subseteq \mathfrak{m}_\beta$. Notiamo che $\psi : \mathbb{K}[Y]/I \rightarrow \mathbb{K}[X]$ è un isomorfismo e sotto questo isomorfismo

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\beta/I,$$

dunque

$$\mathbb{K} \cong \frac{\mathbb{K}[Y]}{\mathfrak{m}_\beta} \xrightarrow{\psi} \frac{\mathbb{K}[X]}{\psi(\mathfrak{m}_\beta)}.$$

Abbiamo quindi mostrato che $\psi(\mathfrak{m}_\beta)$ è un massimale, dunque per il Nullstellensatz esiste $\alpha \in X$ tale che $\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha$. Concludiamo notando che

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha \implies \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta \iff \varphi(\alpha) = \beta.$$

□

Proposizione 3.21. Se X, Y affini, $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ mappe corrispondenti, se G agisce su X e Y allora si ha che φ è G -equivariante se e solo se ψ è G -equivariante.

Dimostrazione.

Diamo le due implicazioni:

\Rightarrow Segue calcolando

$$\begin{aligned}\psi(g \cdot f)(x) &= (g \cdot f)(\varphi(x)) = f(g^{-1} \cdot \varphi(x)) = \\ &= f(\varphi(g^{-1}x)) = \psi(f)(g^{-1}x) = \\ &= (g \cdot \psi(f))(x).\end{aligned}$$

\Leftarrow Vogliamo mostrare che $\varphi(gx) = g\varphi(x)$. Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni $f \in \mathbb{K}[Y]$ si ha $f(g\varphi(x)) = f(\varphi(gx))$.

$$f(g\varphi(x)) = (g^{-1}f)(\varphi(x)) = \psi(g^{-1}f)(x) = (g^{-1}\psi(f))(x) = \psi(f)(gx) = f(\varphi(gx)).$$

□

Teorema 3.22. Se X è affine e G agisce su X allora esiste una rappresentazione di dimensione finita V di G e $i : X \rightarrow V$ iniettiva che è G -equivariante

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

Teorema 3.23. Ogni gruppo affine è lineare.

Dimostrazione.

Consideriamo l'azione di G su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Questa rende $\mathbb{K}[G]$ una rappresentazione di G . Notiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata, con generatori f_1, \dots, f_n . Notiamo che esiste V uno spazio vettoriale di dimensione finita che contiene f_1, \dots, f_n che è stabile per l'azione di G e una rappresentazione regolare di G .

Supponiamo f_1, \dots, f_N base di V . Sia

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G \times G] \\ f & \longmapsto & (g, h) \mapsto f(gh) \end{array}$$

e scriviamo $\mu(f_j) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j} \otimes f_i$.

$$(gf_j)(h) = f_j(g^{-1}h) = \mu(f)(g^{-1}, h) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})f_i(h).$$

Poniamo $\alpha_{i,j}(g) = \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})$. Consideriamo ora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{GL}(V) \\ g & \longmapsto & [g]_{\{f_j\}}^{\{f_j\}} = (\alpha_{i,j}(g)) \end{array}$$

che a livello di algebre diventa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[x_{i,j}, \det^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ x_{i,j} & \longmapsto & \alpha_{i,j} \end{array}.$$

Dalla definizione è evidente che φ è una mappa regolare. Se mostriamo che φ è iniettiva e che ψ è surgettiva allora per (3.20) avremo che $\varphi(G)$ è un chiuso, quindi φ identifica G con un chiuso di $\mathrm{GL}(V)$, rendendo G un gruppo algebrico lineare.

Siano $g, h \in G$ tali che $\alpha_{i,j}(g) = \alpha_{i,j}(h)$ per ogni i, j , allora $gf_j = hf_j$ per ogni j , quindi g e h hanno lo stesso effetto su $\mathbb{K}[G]$, in particolare¹

$$f(g^{-1}) = (gf)(e) = (hf)(e) = g(h^{-1})$$

per ogni $f \in \mathbb{K}[G]$, e questo significa che $g^{-1} = h^{-1}$, cioè $g = h$, mostrando l'injectività.

Notiamo che per ogni $g \in G$

$$f_j(g^{-1}) = (gf_j)(e) = \sum \alpha_{i,j}(g) \underbrace{f_j(e)}_{\in \mathbb{K}}.$$

Questo mostra che i generatori f_j di $\mathbb{K}[G]$ appartengono all'immagine di ψ (perché combinazioni lineari delle $\alpha_{i,j}$), quindi ψ è surgettiva. \square

Ricordiamo il

Teorema 3.24 (di Chevalley). Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ morfismo di varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\overline{\varphi(X)}$.

Corollario 3.25. Se G e H gruppi algebrici affini con $\varphi : G \rightarrow H$ morfismo di gruppi algebrici allora $\varphi(G)$ è un chiuso di H .

Dimostrazione.

Sia $T = \varphi(G) \subseteq H$. Vogliamo mostrare che $T = \overline{T} \subseteq H$. Per Chevalley (3.16), $T \supseteq U$ per U aperto di \overline{T} . Notiamo che \overline{T} è un sottogruppo di H . Dunque per ogni $t \in \overline{T}$, $tU \subseteq \overline{T}$.

Poiché la moltiplicazione per t è un omeomorfismo, U e tU sono aperti di \overline{T} , quindi per irriducibilità $U \cap tU \neq \emptyset$, dunque esiste $g, h \in U$ tali che $g = th$, cioè $t = gh^{-1} \in T$ e dato che t era un generico elemento di T abbiamo finito. \square

¹ e è l'identità di G

Capitolo 4

Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile

Proposizione 4.1 (Semisemplice uguale completamente riducibile). Per le rappresentazioni regolari di G abbiamo che se essa è completamente riducibile allora è semisemplice, cioè le due condizioni sono equivalenti in questo caso.

Dimostrazione.

Se V è una rappresentazione regolare non nulla allora V contiene una sottorappresentazione semplice, infatti basta prendere $W \subseteq V$ di dimensione finita e poi la sottorappresentazione di W di dimensione minima.

Se $W \subseteq V$ allora W e V/W sono completamente riducibili, infatti per completa riducibilità $V = W \oplus U$ per $U \cong V/W$, quindi basta mostrarlo per W . Sia $X \subseteq W$ sottorappresentazione. Poiché $V = X \oplus Y$ (di nuovo applico l'ipotesi su V) allora $W = X \oplus Y \cap W$.

Mostriamo ora che V è semisemplice. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigoplus_{i \in I} S_i \subseteq V \right\}$$

con S_i tutti semplici e ordine su \mathcal{F} dato da

$$\bigoplus_{i \in I} S_i \preceq \bigoplus_{j \in J} T_j \iff I \subseteq J \text{ e } S_i = T_i \text{ per } i \in I.$$

Ogni catena ammette maggiorante dato sommando sull'unione degli indici. Sia allora $W = \bigoplus S_i \subseteq V$ massimale e scriviamo $V = W \oplus U$. Se $W \neq (0)$ allora esiste una sottorappresentazione semplice $S \subseteq U$ e quindi $W' = W \oplus S$ sarebbe maggiore di W , assurdo. \square

Vorremmo capire per quali gruppi G le rappresentazioni regolari sono semisemplici.

4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti

Definizione 4.2 (Elementi unipotenti, nilpotenti e semisemplici). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $g \in \text{End}(V)$. Affermiamo che g è

- **semisemplice** se è diagonalizzabile
- **nilpotente** se $g^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$
- **unipotente** se $(g - id_V)^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$

Osservazione 4.3. Se g è invertibile allora \mathbb{Z} agisce su V come

$$n \cdot v = g^n v,$$

quindi la definizione di semisemplice si sposa bene con quella già data in quanto g induce una decomposizione in autospazi g -invarianti.

Definizione 4.4 (Endomorfismo localmente finito). Siano V uno spazio vettoriale e $g \in \text{End}(V)$. g è **localmente finito** se per ogni $v \in V$ esiste W di dimensione finita g -stabile con $v \in W$. In tal caso diciamo che

- g è **semisemplice** se $g|_W$ è semisemplice per ogni $W \subseteq V$ g -stabile di dimensione finita.
- g è **nilpotente** se $g|_W$ è nilpotente per ogni $W \subseteq V$ g -stabile di dimensione finita.
- g è **unipotente** se $g|_W$ è unipotente per ogni $W \subseteq V$ g -stabile di dimensione finita.

Definizione 4.5 (Semisemplice, unipotente e nilpotente per gruppi algebrici). Se G è un gruppo algebrico e $g \in G$ allora g è

- **semisemplice** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è semisemplice, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è semisemplice
- **unipotente** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è unipotente, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è unipotente
- **nilpotente** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è nilpotente, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è nilpotente.

Lemma 4.6 (Semisemplice/unipotente/nilpotente passano alle costruzioni lineari). Siano $g \in \text{End}(V)$ e $h \in \text{End}(W)$ con V e W localmente finite. Allora

- Se g e h semisemplici allora

$g \oplus h : V \oplus W \rightarrow V \oplus W$ è semisemplice

$g \otimes h : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ è semisemplice

- Se $U \subseteq V$ è stabile per g e g semisemplice allora $g|_U$ e $\bar{g} : V/U \rightarrow V/U$ sono semisemplici.
- Se g è semisemplice allora l'azione di g su SV è semisemplice
- Se $\dim V$ è finita e g è semisemplice allora V^* è semisemplice.

Valgono anche gli analoghi per unipotente e nilpotente.

Dimostrazione.

Tante verifiche noiose, riportiamo giusto quelle per $g \otimes h$:

Se V e W hanno dimensione finita allora esistono basi di autovettori per g e h

$$gv_i = \lambda_i v_i, \quad hw_i = \mu_i v_i$$

Allora

$$(g \otimes h)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$

quindi $v_i \otimes w_j$ è ancora base di autovettori. Se invece V e W hanno dimensione infinita e $U \subseteq V \otimes W$ di dimensione finita allora gli elementi di base di U appartengono a prodotti tensore di sottospazi di dimensione finita di V e W , quindi ingrandendo in modo tale da tener conto di tutta la base ricaviamo $U \subseteq \widetilde{V} \otimes \widetilde{W}$ con \widetilde{V} e \widetilde{W} di dimensione finita, ora ci restringiamo sottospazi stabili di \widetilde{V} e \widetilde{W} e con calma ci rimettiamo nelle ipotesi finite. \square

Lemma 4.7 (Rappresentazioni finite si immergono in $\mathbb{K}[G]^n$). Sia V una rappresentazione di dimensione finita di G , allora abbiamo una iniezione

$$f : V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^n$$

G -equivariante

Dimostrazione.

Sia v_1, \dots, v_n una base di V e sia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base duale. Definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}[G]^n \\ v & \longmapsto & (\varphi_1 \otimes v, \dots, \varphi_n \otimes v) \end{array}$$

dove se $\varphi \in V^*$ e $v \in V$ poniamo

$$(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g^{-1}v).$$

G-equivariante Vogliamo $\psi(gv) = g\psi(v)$, cioè $g(\varphi \otimes v) = \varphi \otimes gv$. Allora calcoliamo

$$(g(\varphi \otimes v))(h) = (\varphi \otimes v)(g^{-1}h) = \varphi(h^{-1}gv) = (\varphi \otimes gv)(h)$$

iniettiva Supponiamo $\psi(v) = 0$, allora per ogni i

$$0 = (\varphi_i \otimes v)(e) = \varphi_i(v)$$

ma φ_i era una base del duale, quindi $v = 0$.

□

Osservazione 4.8. Se $gv = (\alpha_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n} v$ allora $\varphi_i \otimes v_j = \alpha_{i,j}$.

Corollario 4.9. Se $g \in G$ allora

- g è semisemplice se e solo se l'azione di g su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice
- g è unipotente se e solo se l'azione di g su $\mathbb{K}[G]$ è unipotente

Dimostrazione.

Facciamo il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Dobbiamo verificare che l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita V è semisemplice. Per il lemma (4.7) abbiamo che $V \subseteq \mathbb{K}[G]^n$ e questo è semisemplice quindi anche g lo è per il secondo punto del lemma (4.6)

□

Lemma 4.10 (Criterio per semisemplice/unipotente in gruppi lineari). Se $G \subseteq GL(V)$ è un sottogruppo chiuso per V di dimensione finita allora

- $g \in G$ è semisemplice se e solo se l'azione di g su V è semisemplice.
- $g \in G$ è unipotente se e solo se l'azione di g su V è unipotente.

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni per il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Verifichiamo che l'azione su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Osserviamo che

$$\mathbb{K}[GL(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$$

è surgettivo e G -equivariante quindi basta far vedere che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[GL(V)]$.

$$\mathbb{K}[GL(V)] = \mathbb{K}[End(V)] [\det^{-1}]$$

Verifichiamo che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\text{End}(V)] = S(\text{End}(V)^*)$. Per il lemma (4.6) basta verificare che g agisce in modo semisemplice su $\text{End}(V)^*$ o equivalentemente su $\text{End}(V)$ per lo stesso lemma. Ricordiamo che g agisce tramite la moltiplicazione a sinistra.

Se $\dim V = n$ allora $\text{End}(V)$ con l'azione di moltiplicazione a sinistra di g è uguale a considerare l'azione di g su $V^{\oplus n}$ dove la corrispondenza è data dal fatto che l'azione per moltiplicazione a sinistra agisce sulle colonne della matrice a destra per restituire le colonne della matrice risultato.

Poiché g agiva in modo semisemplice su V , agisce in modo semisemplice anche sulla somma che abbiamo considerato, quindi mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$.

Sia ora $W \subseteq \mathbb{K}[\text{End}(V)][\det^{-1}]$ un sottospazio di dimensione finita, in particolare

$$W \subseteq \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \quad \text{per qualche } N$$

Consideriamo allora l'azione di g su $\mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K}$ dove sulla copia di \mathbb{K} abbiamo $g\lambda = (\det g)^{-N} \lambda$. Abbiamo una mappa G -equivariante surgettiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \\ f \otimes \lambda & \longmapsto & \frac{\lambda}{(\det)^N} f \end{array}$$

quindi, poiché g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$ e su \mathbb{K} , si ha che agisce in modo semisemplice su $\frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)]$ e quindi su W .

Mettendo tutto insieme, abbiamo mostrato che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[G]$ e questo conclude per il corollario (4.9). □

4.2 Decomposizione di Jordan

Proposizione 4.11. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita e sia T un endomorfismo di V . Allora

1. Esistono e sono unici S semisemplice e N nilpotente in $\text{End}(V)$ tali che $T = S + N$ e $SN = NS$.

Gli endomorfismi S e N si dicono **parte semisemplice** e **parte nilpotente** di T e li denoteremo T_s e T_n rispettivamente.

2. Esistono f, g in $\mathbb{K}[x]$, con $f(0) = g(0) = 0$, tali che $S = f(T)$ e $N = g(T)$.
3. Se W è un sottospazio T -stabile di V , allora W è S -stabile e N -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_n = N|_W.$$

4. Se V' è un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita, T' è un endomorfismo di V' e $L: V \rightarrow V'$ è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_n = T'_n \circ L.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo i vari punti.

1. Scriviamo T in forma di Jordan e poniamo S la parte diagonale di T (che è quindi semisemplice). Posto $N = T - S$, si ha che N è nilpotente e $SN = NS$.

Mostriamo ora l'unicità: se S' e N' sono tali che $T = S' + N' = S + N$ e $S'N' = N'S'$, allora S, S', N, N' commutano con T , quindi S', N' commutano con S, N . Osservando che $S - S' = N' - N$, dove il primo membro è diagonale e il secondo è nilpotente, troviamo $S = S'$ e $N = N'$.

2. Consideriamo il polinomio caratteristico p_T di T e scriviamolo nella forma

$$p_T(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{n_i},$$

dove i λ_i sono distinti. Cerchiamo un polinomio $f(t)$ in $\mathbb{K}[t]$ tale che

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0 & (\text{mod } (t)) \\ f(t) \equiv \lambda_i & (\text{mod } (t - \lambda_i)^{n_i}) \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Tale polinomio esiste per il teorema cinese del resto. Inoltre soddisfa $f(T) = S$. Infatti, sul singolo blocco di Jordan J_i relativo all'autovalore λ_i (di taglia $m_i \leq n_i$), si ha che $f(T) = \lambda_i I$. Poiché $N = T - S$, posto $g(t) = t - f(t)$, si ha $N = g(T)$.

3. Poiché $S = f(T)$ e $N = g(T)$, se W è T -stabile, lo sono chiaramente anche S e N . Siano ora $t = T|_W$, $s = S|_W$ e $n = N|_W$. Allora $t = s + n$, $sn = ns$ e, per il lemma (4.6), s è semisemplice e n è nilpotente. Quindi la tesi discende dall'unicità della decomposizione.
4. Se L è iniettiva (o suriettiva), allora V è un sottospazio (o un quoziente) di V' , e la tesi discende dal punto precedente (nel caso del quoziente è analogo considerando la stabilità degli elementi semisemplici e nilpotenti). Nel caso generale, consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{L_1} & V \oplus V' & \xrightarrow{L_2} & V' \\ \downarrow T & & \downarrow T'' = T \oplus T' & & \downarrow T' \\ V & \longrightarrow & V \oplus V' & \longrightarrow & V' \end{array}$$

dove $L_1: v \mapsto (v, L(v))$ e $L_2: (v, w) \mapsto w$. Per commutatività, si ha $L_1 \circ T_s = T_s'' \circ L_1$ e $L_2 \circ T_s'' = T_s' \circ L_2$. Deduciamo quindi che

$$L \circ T_s = L_2 \circ L_1 \circ T_s = L_2 \circ T_s'' \circ L_1 = T_s' \circ L_2 \circ L_1 = T_s' \circ L.$$

Per il caso nilpotente la dimostrazione è analoga. \square

Vale una decomposizione analoga nel caso moltiplicativo, sostituendo elementi nilpotenti con elementi unipotenti.

Proposizione 4.12. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita e sia T in $\text{GL}(V)$. Allora

1. Esistono e sono uniche S semisemplice e U unipotente tali che $T = SU = US$, date da $S = T_S$ e $U = T_U$
2. Esistono f, g in $\mathbb{K}[x]$ tali che $S = f(T)$ e $U = g(T)$.
3. Se W è un sottospazio T -stabile di V , allora W è S -stabile e U -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_u = U|_W.$$

4. Se V' è un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita, T' è un endomorfismo di V' e $L: V \rightarrow V'$ è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_u = T'_u \circ L.$$

Dimostrazione.

Per analogia con la proposizione precedente, ci limitiamo a dimostrare il primo punto. Partendo dalla decomposizione additiva, si ha

$$T = S + N = S(I + S^{-1}N).$$

Poiché $S^{-1}N$ è nilpotente, l'elemento $U = I + S^{-1}N$ è unipotente. Mostriamo l'unicità: se S' e U' sono tali che $T = S'U'$, posto $U' = I + M$ con M nilpotente, si ha $T = S' + S'M$. Quindi l'unicità discende da quella del caso additivo. \square

Vogliamo ora estendere quanto fatto al caso localmente finito. Ricordiamo che un'applicazione lineare $T: V \rightarrow V$ è *localmente finita* se per ogni v in V esiste un sottospazio W di V di dimensione finita contenente v e T -stabile.

Teorema 4.13. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale e sia $T: V \rightarrow V$ lineare, invertibile e localmente finita. Allora esistono e sono unici S semisemplice e U unipotente tali che $T = SU = US$.

Dimostrazione.

Mostriamo dapprima l'esistenza. Per ogni v in V , sia W un sottospazio di V di dimensione finita contenente v e T -stabile. Consideriamo la restrizione $T|_W$ in $\text{GL}(W)$. Consideriamo allora gli elementi $S_W = (T|_W)_s$ e $U_W = (T|_W)_u$ dati dalla Proposizione (4.12) e definiamo $S(v) = S_W(v)$. Osserviamo che $S(v)$ non dipende dalla scelta di W . Infatti, se W è contenuto in un W' , allora $S_{W'}|_W = S_W$. Procedendo in modo analogo per U , otteniamo l'esistenza.

Osserviamo che S e U costruite soddisfano le proprietà 3 e 4 dell'enunciato precedente.

Verifichiamo ad esempio la 4. Mostriamo che, con la notazione della Proposizione (4.12), si ha $LS = S'L$. Per ogni v in V , consideriamo un sottospazio W di dimensione finita, contenente v e T -stabile. Sia $W' = L(W)$. Allora

$$S'(W') = S'L(W) = LS(W) \subseteq L(W) = W'.$$

È quindi sufficiente mostrare che

$$L|_W \circ S|_W(v) = S'|_{W'} \circ L|_W(v),$$

ma ciò segue dal caso di dimensione finita.

Mostriamo ora l'unicità. Assumiamo $T = su = us$ e mostriamo che $S = s$ e $U = u$. Osserviamo che S, U commutano con s, u . Infatti, per il punto 4, sappiamo che $LS = SL$ e $LU = UL$. Allora dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L=s} & V \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ V & \xrightarrow{L=s} & V \end{array}$$

ricaviamo $Ss = sS$ e $Us = sU$. Analogamente troviamo $Uu = uU$ e $Su = uS$. Scriviamo ora $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}(S)$. Poiché $V_{\lambda}(S)$ è stabile per U, s, u , lo spazio

$$V_{\lambda, \mu}(S, s) = \{v \in V : Sv = \lambda v, sv = \mu v\}$$

è stabile per U e u . Supponiamo per assurdo che esistano λ, μ distinti tali che $V_{\lambda, \mu} \neq 0$. Allora, poiché U e u sono unipotenti, si ha $(V_{\lambda, \mu}(S, s))^U \neq 0$ e, poiché U e u commutano, si ha anche $((V_{\lambda, \mu}(S, s))^U)^u \neq 0$. Scegliendo v non nullo in $((V_{\lambda, \mu}(S, s))^U)^u$, si ottiene $T(v) = SU(v) = S(v) = \lambda v$, ma anche $T(v) = su(v) = s(v) = \mu v$, contro l'ipotesi che λ e μ sono distinti. \square

Teorema 4.14 (Decomposizione di Jordan). Sia G un gruppo algebrico e sia g un elemento di G . Allora esistono e sono unici s, u in G tali che s è semisemplice, u è unipotente e $g = su = us$.

Dimostrazione.

Assumiamo che G sia un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(W)$. $G = V(I)$ con $I \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo l'esistenza di s e u . Poiché g è in $\mathrm{GL}(W)$, possiamo scrivere (4.12) $g = su = us$ con u unipotente e s semisemplice in $\mathrm{GL}(W)$ (cioè s agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ e u agisce in modo unipotente su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$). In particolare $g = su$ è la decomposizione di Jordan per l'azione di g su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo che effettivamente u e s sono in G verificando che annullano ogni elemento f di I . Osserviamo che I è stabile per l'azione di g (e in generale per l'azione di G), infatti, per ogni h in G si ha $(gf)(h) = f(g^{-1}h) = 0$. Poiché s è la parte semisemplice di g , $s(I)$ è contenuto in I e se f è un elemento di I , si ha sf è 0 su G . D'altro canto, valutando sull'elemento neutro e di G , troviamo

$$0 = (sf)(e) = f(s^{-1}),$$

dunque s^{-1} (e quindi s) è in G . L'unicità segue direttamente dal fatto che la decomposizione è unica in $\mathrm{GL}(W)$. \square

Notazione. Denotiamo $g_s = s$ e $g_u = u$.

Esercizio 4.15. Se $\varphi: G \rightarrow G'$ è un morfismo di gruppi algebrici, allora $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ e $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$.

Esercizio 4.16. Sia \mathbb{K} un campo perfetto (assumiamo per l'esercizio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Consideriamo l'inclusione

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Sia G un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definito da un'equazione a coefficienti in \mathbb{R} . Sia $G_{\mathbb{R}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Consideriamo un elemento g in $G_{\mathbb{R}}$. Mostrare che g_s e g_u sono in $G_{\mathbb{R}}$.

4.3 Gruppi unipotenti

Definizione 4.17. Un gruppo G si dice **unipotente** se ogni suo elemento è unipotente.

Lemma 4.18. Se G è tale che l'unica rappresentazione irriducibile di G è banale allora G si immerge nel gruppo delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale, cioè

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimostrazione.

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita per cui G è un sottogruppo di $\text{GL}(V)$. Sia W una sottorappresentazione di V non banale. Allora $W = \mathbb{K}v_1$ e $gv_1 = v_1$ per ogni g in G . Consideriamo il quoziente $V_1 = V/\langle v_1 \rangle$. Allora esiste v_2 in V tale che per ogni g in G si ha $gv_2 \equiv v_2 \pmod{V_1}$. Procedendo in questo modo, possiamo scegliere una base v_1, \dots, v_n di V , rispetto alla quale risulta chiaramente $G \subseteq U_n$. \square

Teorema 4.19. Sia \mathbb{K} algebricamente chiuso, V spazio vettoriale di dimensione finita, $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ che sia una \mathbb{K} -algebra associativa. Se V è un A -modulo semplice allora $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Dimostrazione.

Sia v_1, \dots, v_n una base di V . Se $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ allora vogliamo mostrare che $Av = V^n$.

Poiché V è semplice, V^n è somma di rappresentazioni semplici, quindi per la proposizione (1.32) si ha che V^n è semisemplice e quindi completamente riducibile. Possiamo allora scrivere $V^n = Av \oplus P$ per P un A -sottomodulo. Sia $\pi_P : V^n \rightarrow V^n$ la proiezione su P e notiamo che essa ammette una decomposizione a blocchi

$$\pi_P = (\alpha_{ij})_{i,j} \quad \text{per degli endomorfismi } \alpha_{ij} : V \rightarrow V$$

dove il dominio di α_{ij} è la j -esima copia di V in V^n e il codominio è l' i -esima copia.

Quindi $\alpha_{ij} \in \text{End}_A(V)$ con V spazio vettoriale su \mathbb{K} algebricamente chiuso. Per il lemma di Schur (1.26) questi endomorfismi sono le costanti.

Ricordando che $V^n = Av \oplus P$, si ha necessariamente $\pi_P(v) = 0$ per definizione di π_P , quindi per ogni i abbiamo $\sum \alpha_{ij}v_j = 0$. Poiché gli v_j sono una base e gli endomorfismi α_{ij} sono costanti, per indipendenza lineare questo significa che per ogni i e ogni j si ha $\alpha_{ij} = 0$. Segue dunque che $\pi_P = 0$ e quindi $P = \text{Imm } \pi_P = \{0\}$, cioè $V^n = Av$. \square

Esercizio 4.20. Trova un controesempio per \mathbb{K} non algebricamente chiuso.

Teorema 4.21. Un gruppo G è unipotente se e solo se l'unica rappresentazione irriducibile di G è quella banale.

Dimostrazione.

Diamo le due implicazioni

\Leftarrow Se G ha questa proprietà allora per il lemma (4.18) abbiamo

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e chiaramente un gruppo di questa forma è unipotente.

\Rightarrow Sia V una rappresentazione semplice di G di dimensione n . Allora $\text{tr}(g_V) = n$ per ogni $g \in G$ (perché si immerge nelle triangolari superiori), quindi

$$\forall g_V, h_V \in G, \quad \text{tr}((g_V - 1)h_V) = \text{tr}(g_V h_V - h_V) = 0.$$

Se A è il \mathbb{K} -spazio vettoriale generato da G , $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ed è un'algebra associativa. Poiché V è semplice per A (in quanto semplice per G e $A = \text{Span}_{\mathbb{K}}(G)$), si ha per il teorema (4.19) si ha $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Segue per linearità della traccia che $\text{tr}((g_V - 1)a) = 0$ per ogni $a \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$, da cui $(g_V - 1) = 0$, cioè G agisce banalmente.

□

Corollario 4.22. Se G è unipotente, allora è contenuto nel gruppo U_n delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale principale.

Osservazione 4.23. Consideriamo il gruppo $(\mathbb{C}, +)$. Questo è un gruppo unipotente perché possiamo vederlo in $\text{GL}(2)$ tramite la rappresentazione

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche una rappresentazione data da

$$\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}(1), \quad x \mapsto e^{\alpha x}.$$

La differenza tra i due casi è che da una rappresentazione V non possiamo costruire tutte le funzioni di $C^\infty(\mathbb{C})$, ma solo quelle di $\mathbb{C}[G]$ (con $G = \mathbb{C}$).

Corollario 4.24. Se V è una rappresentazione di G non nulla allora $V^G \neq 0$.

Corollario 4.25. Se G è unipotente allora G è nilpotente come gruppo, cioè definiamo iterativamente $G^{(0)} = G$ e $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G]$ allora esiste n tale che $G^{(n)} = \{id_G\}$.

Dimostrazione.

Basta immergere G in $U(n)$ e notare che sottogruppi di triangolari superiori con 1 sulla diagonale hanno questa proprietà. \square

Esempio 4.26. Il gruppo $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = C_p$ con $\text{char } \mathbb{K} = p$ è un gruppo unipotente, perché si può scrivere come

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

Osservazione 4.27. Se $G = U(n)$ con $\text{char } \mathbb{K} = p$ allora $g^{p^n} = id_G$.

4.3.1 Esponenziale e logaritmo

Notazione. Definiamo lo spazio vettoriale

$$N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definizione 4.28 (Esponenziale). Definiamo la mappa **esponenziale**

$$\exp : \begin{array}{ccc} N(n) & \longrightarrow & U(n) \\ M & \longmapsto & \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} M^i \end{array}.$$

Osservazione 4.29. La mappa esponenziale appena definita è algebrica. Inoltre rispetta le usuali proprietà:

- $\exp((\lambda + \mu)M) = \exp(\lambda M) \exp(\mu M)$
- Se $M_1 M_2 = M_2 M_1$ allora $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1) \exp(M_2)$.

Definizione 4.30 (Logaritmo). Definiamo la mappa **logaritmo**

$$\log : \begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & N(n) \\ B & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} (M - I_n)^i \end{array}.$$

Osservazione 4.31. \log e \exp sono mappe algebriche e inverse. Sono anche in realtà la definizione usuale, solo che per matrici in $N(n)$ e $U(n)$ queste somme finite coincidono con la definizione in serie.

Notazione. Se $G \subseteq U(n)$ definiamo $X = \log(G)$ e notiamo che X è isomorfo a G come varietà.

Proposizione 4.32. Se $g \in G \setminus \{id_G\}$ allora, ponendo

$$\overline{\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = H \subseteq G,$$

si ha $H \cong \mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$.

Dimostrazione.

Poiché $g \neq id_G$, $\log g = x \neq 0$, inoltre $\log(g^n) = nx$. Notiamo dunque che da $nx \neq 0$ per ogni n ricaviamo $g^n \neq 1_G$ per ogni n . Se $Y = \mathbb{K}x$ allora

$$\log(H) = \log(\overline{\{g^n\}}) = \overline{\{nx\}} \subseteq Y$$

Poiché Y è una retta e $\{nx\}$ sono infiniti, $\overline{nx} = Y$ per come sono fatti i chiusi di Zariski di \mathbb{A}^1 , quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\longrightarrow H = \exp(Y) \\ \lambda &\longmapsto \exp(\lambda x) \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi tra \mathbb{K} e H . □

Esercizio 4.33. Se $\text{char } \mathbb{K} = 0$ e G unipotente abeliano allora $G \cong \mathbb{K}^n$.

Fatto 4.34. Se $\text{char } \mathbb{K} = p$ e $g^p = id$ per ogni $g \in G$ abeliano connesso allora G è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^n$.

Esempio 4.35. Se $\text{char } \mathbb{K} = p$ poniamo $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{p} \binom{p}{i}$ per $i \in \{0, \dots, p-1\}$ e definiamo α_i come l'immagine di $\tilde{\alpha}_i$ in \mathbb{K} .

Definiamo¹

$$c: \begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i a^i b^{p-1-i} \end{aligned}$$

e notiamo che

$$c(a, b)c(a+b, c) = c(b, c)c(a, b+c) \implies c(a, 0) = c(a, b) = 0,$$

quindi se $G = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ con prodotto

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + c(a, a'))$$

allora G è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^2$ come gruppo.

(QUESTO DOVREBBE ESSERE UN CONTROESEMPIO DI QUALCOSA???)

4.4 Gruppi completamente riducibili

Definizione 4.36. Un gruppo è **completamente riducibile** se ogni sua rappresentazione regolare è semisemplice.

Osservazione 4.37. Basta anche chiedere “ogni rappresentazione regolare *finita* è semisemplice”.

Osservazione 4.38. G è completamente riducibile se e solo se $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Dimostrazione.

$\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di G quindi una implicazione è ovvia. Se V ha dimensione n e $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice allora per l'immersione (4.7) $V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^m$ si ha che V è semisemplice (4.6). □

¹moralmente $c(a, b) = \frac{(a+b)^p - a^p - b^p}{p}$, che non potremmo fare direttamente in \mathbb{K} per l'identità del binomio ingenuo

Definizione 4.39. Un gruppo G è un **toro (algebrico)** se $G \cong (\mathbb{G}_m)^n$.

Osservazione 4.40. Ricordando che $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ notiamo che

$$\mathbb{K}[\mathbb{G}_m^n] = \mathbb{K}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

Questo spazio ha una base data da $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$ per $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Osservazione 4.41. Se $g = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $h = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ sono elementi di $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{K}^\times)^n$ si ha che

$$\begin{aligned} (gt^\alpha)(h) &= t^\alpha(g^{-1}h) = t^\alpha(\lambda_1^{-1}\mu_1, \dots, \lambda_n^{-1}\mu_n) = \\ &= (\lambda_1^{-1}\mu_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_n^{-1}\mu_n)^{\alpha_n} = \\ &= \lambda^{-\alpha} \mu^\alpha = \\ &= (\lambda^{-\alpha} t^\alpha)h. \end{aligned}$$

Segue che $gt^\alpha = \lambda^{-\alpha} t^\alpha$ e che quindi i t^α sono autovettori per ogni $g \in G$. Poiché

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K}t^\alpha$$

e ogni $\mathbb{K}t^\alpha$ è semisemplice, segue (4.6) che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Quindi le rappresentazioni semplici di G sono di dimensione 1 e sono date da $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}t^{-\alpha}$ con $gz = t^\alpha(g)z$

Lemma 4.42. Se $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ allora G è completamente riducibile se e solo se $V^{\otimes n}$ è semisemplice per ogni n

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

\Rightarrow Ovvio

\Leftarrow La dimostrazione è del tutto analoga a quella esposta per il lemma (4.10). Dimostriamo che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Dato il morfismo $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$ basta mostrare che $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$ è semisemplice. Scriviamo

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}].$$

$\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ è un quoziente di somme di rappresentazioni della forma $(V^*)^{\otimes m}$ e quindi è quoziente di $(V^* \oplus \dots \oplus V^*)^{\otimes m}$ e dato che V^* è semisemplice ho finito.

□

Corollario 4.43. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è tale che se $g \in G$ allora $\bar{g} \in G$, allora G è completamente riducibile.

Dimostrazione.

Sia $V = \mathbb{C}^n$ e dimostriamo che $V^{\otimes m}$ è semisemplice per ogni m , cioè che per ogni $U \subseteq V^{\otimes m}$ che sia G -stabile esiste W G -stabile tale che $V^{\otimes m} = U \oplus W$.

Consideriamo il caso $m = 1$. Definiamo la forma hermitiana

$$h((x_i)(y_i)) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

Se $U \subseteq V$, poniamo $W = U^\perp$ rispetto a questa forma. Chiaramente $V = U \oplus U^\perp$, quindi vogliamo mostrare che U G -stabile implica U^\perp G -stabile.

$$h(gw, u) = \bar{w}^\top \bar{g}^\top u = h(w, \underbrace{\bar{g}^\top u}_{\in U}) \stackrel{w \in U^\perp}{=} 0.$$

Per il caso generale l'idea è la stessa ma usiamo

$$h_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^m h(v_i, u_i).$$

Si conclude usando la tesi per h . □

Esempio 4.44. Sia $G \in \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n), O(n)\}$, allora G è completamente riducibile. Per $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ questo è ovvio. Per $O(n) = \{g^\top g = id\}$ basta mostrare che se $g^\top g = id$ allora $\bar{g}^\top \bar{g} = id$, ma questo è chiaro.

Anche $SO(n)$ e $S_p(2n)$ hanno questa proprietà, dove

$$S_p(2n) = \{g \mid gJg^\top = J\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.45. Sia $\mathrm{char} \mathbb{K} = p = 2$ e consideriamo $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$. Esso ammette una rappresentazione semplice $V = \mathbb{K}^2$. Sia x, y una base di V e consideriamo l'azione data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = ax + by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y = cx + dy.$$

Consideriamo ora $S^2V = \langle X^2, xy, y^2 \rangle$. Per questioni di caratteristica 2, $gx^2 = (gx)^2$. Notiamo allora che $W = \langle x^2, y^2 \rangle$ è una sottorappresentazione di S^2V che non ammette un complementare.

Esercizio 4.46. Se G è completamente riducibile allora G non ha sottogruppi unipotent normali.

Esercizio 4.47. Se $\mathrm{char} \mathbb{K} = p$ allora $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ non sono completamente riducibili.