

# Gruppi algebrici lineari

Corso del prof. Maffei Andrea

Antonio Di Nunzio e Francesco Sorce

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
A.A. 2024/25

# Indice

<b>I</b>	<b>Prerequisiti</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Teoria delle rappresentazioni</b>	<b>5</b>
1.1	Definizioni . . . . .	5
1.2	Costruzioni principali . . . . .	6
1.3	Rappresentazioni semplici e semisemplici . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Geometria Algebrica</b>	<b>12</b>
2.1	Varietà affini immerse . . . . .	12
2.2	Varietà algebriche e morfismi . . . . .	15
2.3	Connessione e Irriducibilità . . . . .	17
2.4	Dimensione di una varietà algebrica . . . . .	20
2.5	Varietà liscie . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Gruppi algebrici</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Gruppi algebrici</b>	<b>26</b>
3.1	Definizioni generali . . . . .	26
3.1.1	Componente connessa dell'identità . . . . .	29
3.2	Gruppi algebrici affini sono lineari . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile</b>	<b>33</b>
4.1	Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti . . . . .	34
4.2	Decomposizione di Jordan . . . . .	37
4.3	Gruppi unipotenti . . . . .	42
4.3.1	Esponenziale e logaritmo . . . . .	44
4.4	Gruppi completamente riducibili . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Quozienti</b>	<b>50</b>
5.1	Costruzione dei quozienti . . . . .	50
5.2	Sottogruppi generati e contenimenti . . . . .	55
5.3	Varietà complete . . . . .	58
5.3.1	Punto fisso di Borel . . . . .	58
5.3.2	Sottogruppi parabolici e di Borel . . . . .	60
5.4	Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici . . . . .	62
5.4.1	Matrici invertibili . . . . .	62
5.4.2	Matrici ortogonali speciali . . . . .	64
5.4.3	Matrici del gruppo lineare speciale . . . . .	66

<b>III</b>	<b>Fibrati</b>	<b>70</b>
<b>6</b>	<b>Fibrati vettoriali</b>	<b>71</b>
6.1	Cocicli e banalizzazioni . . . . .	72
6.2	Sezioni di un fibrato . . . . .	74
6.2.1	Fibrati lineari sulla retta proiettiva . . . . .	75
6.2.2	Fibrati vettoriali su varietà affini . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Fibrati con azione di gruppo</b>	<b>78</b>
7.1	Classificazione dei fibrati vettoriali equivarianti . . . . .	78

# Introduzione

## Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di  $GL(n)$  definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

**Esempio 0.1.** Il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  agisce su  $\mathbb{C}^2$ , e quindi anche sulle funzioni definite su  $\mathbb{C}^2$ , infatti se  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$  abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

**Domanda:** come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x, y]_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d \rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio  $V_2 = \mathbb{C}[x, y]_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ . I suoi elementi sono  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ . Segue che  $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$  sono le funzioni polinomiali su  $V_2$ . Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante  $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$ .

# Parte I

## Prerequisiti

# Capitolo 1

## Teoria delle rappresentazioni

### 1.1 Definizioni

**Definizione 1.1** (Rappresentazione). Sia  $G$  un gruppo e  $\mathbb{K}$  un campo. Una **rappresentazione** di  $G$  su  $\mathbb{K}$  (o  **$G$ -modulo**) è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $V$  munito di una azione  $\mathbb{K}$ -lineare di  $G$ , cioè esiste una mappa

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

con le proprietà<sup>a</sup>

- $e \cdot v = v$
- $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$
- $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda g \cdot u + \mu g \cdot v$

<sup>a</sup>in futuro potrò abbreviare omettendo il  $\cdot$ .

**Osservazione 1.2.** Dare una rappresentazione è equivalente a dare un morfismo di gruppi  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  dove  $\rho(g)v = g \cdot v$ .

**Definizione 1.3** (Sottorappresentazione). Dato  $U \subseteq V$  con  $V$  rappresentazione di  $G$ ,  $U$  è una **sottorappresentazione** se  $U$  è sottospazio vettoriale  $G$ -invariante.

**Osservazione 1.4.** Data  $U \subseteq V$  sottorappresentazione, possiamo definire una struttura naturale di rappresentazione su  $W = V/U$  ponendo

$$g[v] = [gv].$$

**Definizione 1.5** (Morfismo di  $G$ -rappresentazioni). Se  $V_1, V_2$  sono rappresentazioni di  $G$  e abbiamo  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  lineare, diciamo che  $\varphi$  è un **morfismo di  $G$ -rappresentazioni o di  $G$ -moduli** se

$$\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1).$$

**Esempio 1.6.** Se  $U \subseteq V$  è una sottorappresentazione,  $U \subseteq V$  è morfismo di  $G$ -moduli

**Esempio 1.7.** Se  $U \subseteq V$  è una sottorappresentazione,  $V \rightarrow V/U$  è morfismo di  $G$ -moduli

**Osservazione 1.8.** La mappa  $\pi : V \rightarrow V/U$  è tale che per ogni  $\varphi : V \rightarrow V'$  di  $G$ -moduli, se  $\varphi(U) = 0$  allora esiste  $\chi : V/U \rightarrow V'$  di  $G$ -moduli t.c.  $\varphi = \chi \circ \pi$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/U \longrightarrow 0 \\ & & & \searrow & \downarrow \varphi & \nearrow \chi & \\ & & & 0 & V' & & \end{array}$$

**Definizione 1.9** (Invarianti e coinvarianti). Sia  $V$  un  $G$ -modulo. Definiamo lo **spazio degli invarianti** come

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \forall g \in G\}.$$

Si ha che  $V^G$  è una sottorappresentazione di cui  $G$  agisce banalmente. Analogamente definiamo lo **spazio dei coinvarianti** come

$$V_G = V / \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Notiamo che  $\langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$  è effettivamente una sottorappresentazione ( $h(v - gv) = hv - (hgh^{-1})(hv)$ ), quindi questo quoziente è ben definito. Notiamo che  $G$  agisce banalmente anche  $V_G$ .

**Notazione.** Se  $V$  e  $W$  sono  $G$ -moduli, poniamo

$$\text{Hom}_G(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ di } G\text{-moduli}\}.$$

Notiamo che è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale.

## 1.2 Costruzioni principali

Se  $V_i$  sono rappresentazioni di  $G$ ,  $\bigoplus_i V_i$  e  $\prod_i V_i$  sono rappresentazioni di  $G$ . Inoltre  $\bigoplus_i V_i$  è sottorappresentazione di  $\prod_i V_i$ .

**Osservazione 1.10** (Proprietà universale). Consideriamo le inclusioni di  $G$ -moduli

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus V_i \\ v_i & \longmapsto & (w_j) \end{array}, \quad \text{dove } w_j = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se  $\varphi_i : V_i \rightarrow W$  è di  $G$ -moduli allora esiste un'unica  $\psi : \bigoplus V_i \rightarrow W$  che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \bigoplus V_i \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \psi \\ & & W \end{array}$$

Vale una proprietà duale per il prodotto.

**Definizione 1.11** (Rappresentazione duale). Se  $V$  è  $G$ -modulo, definiamo una azione di  $G$  su  $V^*$  definendo  $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$ . Come notazione useremo

$$\langle g\varphi, v \rangle = \langle \varphi, g^{-1}v \rangle.$$

La rappresentazione così definita è detta **duale** alla rappresentazione  $V$ .

**Osservazione 1.12.**  $\langle g\varphi, gv \rangle = \langle \varphi, v \rangle$ .

**Definizione 1.13** (Prodotto tensore). Se  $V$  e  $W$  rappresentazioni di  $G$ , definiamo una azione sul prodotto tensore ponendo

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

**Definizione 1.14** (Omomorfismi). Se  $V$  e  $W$  rappresentazioni di  $G$ , definiamo una azione su  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  ponendo

$$(gL)(v) = g(L(g^{-1}v)).$$

**Osservazione 1.15.**  $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \{L \mid gL = L\}$ , ma

$$gL = L \iff g(L(g^{-1}v)) = gL(v) = L(v) \iff L(g^{-1}v) = g^{-1}L(v)$$

e poiché questo vale per ogni  $g \in G$  ricaviamo che

$$(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \text{Hom}_G(V, W).$$

Ricordiamo che esiste

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \varphi \otimes w & \longmapsto & \{v \mapsto \varphi(v)w\} \end{array}$$

**Osservazione 1.16.**  $\Phi$  è iniettiva e  $\text{Imm } \Phi = \{L : V \rightarrow W \mid \text{rk } L < \infty\}$

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO

□

**Domanda:**  $\Phi$  è di  $G$ -moduli?



*Dimostrazione.*

Per linearità basta considerare elementi della forma  $\varphi \otimes w$ .

$$\Phi(g(\varphi \otimes w))(v) = \Phi(g\varphi \otimes gw)(v) = g\varphi(v)gw = \varphi(g^{-1}v)gw = g(\Phi(\varphi \otimes w))(v).$$

□

**Definizione 1.17** (Tensori simmetrici e antisimmetrici). Definiamo

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-volte}}$$

$$S^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes x_b \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_b \otimes x_a \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

$$\bigwedge^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes v \otimes v \otimes x_{a+3} \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

Per il prodotto simmetrico vale una proprietà universale analoga a quella del prodotto tensore, dove al posto di mappe multilineari qualsiasi consideriamo multilineari simmetriche (se  $V^n \rightarrow W$  multilineare simmetrica, abbiamo  $F : V^{\otimes n} \rightarrow W$  che passa al quoziente diventando  $H : S^n V \rightarrow W$ , l'unicità segue dall'unicità di  $F$  e suriettività di  $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$ ).

Un ragionamento completamente analogo vale per  $\bigwedge^n V$ .

**Osservazione 1.18.** Se  $V$  è un  $G$ -modulo, per quanto detto sul prodotto tensore,  $V^{\otimes n}$  è una rappresentazione e quindi anche  $S^n V$  e  $\bigwedge^n V$  lo sono in quanto suoi quozienti.

**Definizione 1.19** (Algebra tensoriale). Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e poniamo  $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ . Definiamo l'**algebra tensoriale** come

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

dove il prodotto è indotto da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

In modo analogo costruiamo l'**algebra simmetrica**  $SV$  e l'**algebra antisimmetrica**  $\bigwedge V$ .

**Osservazione 1.20.**  $SV \cong \mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$  dove  $\{x_i\}_{i \in I}$  è una base di  $V$ .

**Definizione 1.21** (Algebra associativa universale). Sia  $V$  uno spazio vettoriale, l'**algebra associativa universale** su  $V$  consiste in una  $\mathbb{K}$ -algebra<sup>a</sup>  $A$  e un morfismo  $\alpha : V \rightarrow A$  tale che

1.  $\alpha$  è  $\mathbb{K}$ -lineare
2. per ogni  $B$  algebra associativa e per ogni  $\beta : V \rightarrow B$   $\mathbb{K}$ -lineare esiste un unico morfismo  $\psi$  di  $\mathbb{K}$ -algebre tale che

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow \beta & \downarrow \psi \\ & & B \end{array}$$

---

<sup>a</sup> $\mathbb{K} \subseteq A$ ,  $A$  anello con unità e  $\mathbb{K} \subseteq Z(A)$

**Osservazione 1.22.** Se una algebra associativa universale esiste allora è unica a meno di isomorfismo perché abbiamo dato una proprietà universale.

**Osservazione 1.23.** Un'algebra associativa universale esiste per ogni  $V$  ed è data dall'algebra tensoriale e l'inclusione  $V \xrightarrow{id} V^{\otimes 1} \subseteq TV$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $B$  un'algebra associativa e sia  $\beta : V \rightarrow B$  lineare. Definiamo

$$F : \begin{array}{ccc} TV & \longrightarrow & B \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \beta(v_1) \cdots \beta(v_n) \end{array}$$

La buona definizione segue dal fatto che il prodotto in un'algebra è multilineare.  $\square$

**Osservazione 1.24.** Dato  $V$  spazio vettoriale possiamo definire analogamente a prima l'algebra associativa universale simmetrica e l'algebra associativa universale antisimmetrica e un loro modello è dato da  $SV$  e  $\bigwedge V$  rispettivamente.

## 1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici

**Definizione 1.25** (Rappresentazione semplice). Una rappresentazione  $S$  di  $G$  si dice **semplice** se  $S \neq 0$  e se non ha sottorappresentazioni non banali.

**Lemma 1.26** (Lemma di Schur). Sia  $S$  una rappresentazione semplice di  $G$ .

1. Ogni morfismo di  $G$ -moduli non nullo  $\varphi : S \rightarrow S$  è invertibile.
2. L'insieme  $\text{End}_G(S)$  è un corpo e si ha  $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S))$ .

*Dimostrazione.*

Per il primo punto, osserviamo che  $\ker \varphi$  è un sottomodulo di  $S$  che non può essere uguale a  $S$ , quindi è 0. Analogamente  $\text{Im } \varphi = S$ . Per il secondo punto, sia  $F =$

$\text{End}_G(S)$ . La moltiplicazione per un elemento  $\lambda$  di  $\mathbb{K}$  è in  $F$  e commuta con tutto  $F$ . Infine, se  $\varphi$  è un elemento non nullo di  $F$ , per il primo punto  $\varphi$  è invertibile e l'inverso è un omomorfismo di  $G$ -moduli.  $\square$

**Esempio 1.27.** Assumiamo  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso e  $\dim_{\mathbb{K}}(S) < +\infty$ . Allora abbiamo un contenimento  $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S)) \subseteq \text{End}_G(S)$ . Poiché la dimensione di  $\text{End}_G(S)$  su  $\mathbb{K}$  è finita e  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, si ottiene  $\mathbb{K} = \text{End}_G(S)$ .

**Esercizio 1.28.** Nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , supponiamo che  $\dim_{\mathbb{C}}(S)$  sia al più numerabile. Mostrare che  $\text{End}_G(S) = \mathbb{C}$ .

**Esempio 1.29.** Sia  $G = C_2 = \{1, \sigma\}$  e  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$ . Allora la rappresentazione  $V = \mathbb{K}^2$  di  $G$  data da

$$[\sigma]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è somma di rappresentazioni semplici.

**Definizione 1.30.** Sia  $V$  una rappresentazione di  $G$ .

1.  $V$  si dice **semisemplice** se è somma diretta di rappresentazioni semplici.
2.  $V$  si dice **completamente riducibile** se per ogni sottorappresentazione  $W$  di  $V$  esiste una sottorappresentazione  $U$  di  $V$  tale che  $V = U \oplus W$ .

**Esempio 1.31.** Nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la rappresentazione  $V = \mathbb{C}^2$  del gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

non è completamente riducibile: consideriamo la sottorappresentazione di  $V$  data da  $W = \mathbb{C}e_1$ ; se esistesse  $U = \mathbb{C}v_2$  tale che  $V = U \oplus W$ , allora nella base  $e_1, v_2$  tutte gli elementi  $g$  in  $G$  sarebbero diagonali

$$[g]_{e_1, v_2}^{e_1, v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ma  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  non è diagonale se  $x \neq 0$ .

**Proposizione 1.32.** Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1.  $V$  è somma diretta di rappresentazioni semplici;
2.  $V$  è somma di rappresentazioni semplici.

Inoltre, le precedenti condizioni implicano la seguente.

3.  $V$  è completamente riducibile.

*Dimostrazione.*

Chiaramente la prima condizione implica la seconda. Proviamo il viceversa. Sia  $V = \sum_{i \in I} S_i$  con  $S_i$  semplici. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I : \sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j \right\}.$$

La famiglia  $\mathcal{F}$  è non vuota in quanto contiene il singoletto  $\{i\}$  per ogni  $i$  in  $I$ . Inoltre  $\mathcal{F}$  è ordinata parzialmente per inclusione: mostriamo che ogni catena  $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$  di  $\mathcal{F}$  ammette il maggiorante  $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$  in  $\mathcal{F}$ . Basta mostrare che, per ogni  $H \subseteq J$  finito, la somma  $\sum_{h \in H} S_h$  è diretta. Poiché  $H$  è finito, si ha  $H \subseteq J_\alpha$  per qualche  $\alpha$  in  $A$ , dunque la somma  $\sum_{j \in J_\alpha} S_j$  è diretta. A questo punto, per il Lemma di Zorn esiste un elemento  $M$  in  $\mathcal{F}$  massimale. Mostriamo che  $V = \bigoplus_{j \in M} S_j$ . Per assurdo assumiamo  $W \doteq \bigoplus_{j \in M} S_j \subsetneq V$  e sia  $S_0$  tale che  $S_0 \not\subseteq W$ . Allora  $S_0 \cap W \subseteq S_0$  e  $S_0 \oplus W \subset V$ , allora  $\widetilde{M} = M \cup \{0\}$  è in  $\mathcal{F}$ , contro la massimalità di  $M$  in  $\mathcal{F}$ .

L'implicazione 1.  $\Rightarrow$  3. è lasciata per esercizio. □

## Capitolo 2

# Geometria Algebrica

In questa sezione, assumeremo sempre  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso.

### 2.1 Varietà affini immerse

**Definizione 2.1.** Un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{K}^n$  si dice una **varietà algebrica affine (immersa)** se esistono  $f_1, \dots, f_h$  in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tali che

$$X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f_1(v) = \dots = f_h(v) = 0\}.$$

Data una varietà algebrica affine immersa  $X$ , denotiamo

$$I(X) \doteq \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } v \in X\}.$$

L'insieme  $I(X)$  risulta un ideale di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Viceversa, se  $J$  è un ideale di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , denotiamo

$$V(J) \doteq \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } f \in J\}.$$

Richiamiamo inoltre il classico Teorema degli Zeri di Hilbert.

**Notazione.** Nel seguito, denoteremo con  $P$  l'anello  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Teorema 2.2** (Nullstellensatz). Se  $\mathbb{K}$  è un campo algebricamente chiuso e  $I, J$  sono ideali di  $P$  allora

$$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

In particolare abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{varietà algebriche affini immerse in } \mathbb{K}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$$

**Esempio 2.3.** Vediamo qualche controesempio classico.

- Se  $\mathbb{K}$  non è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz non vale: ad esempio per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il polinomio  $X^2 + 1$  in  $\mathbb{R}[X]$  genera un ideale proprio (massimale)  $J$  tale che  $V(J) = \emptyset$ .
- La corrispondenza precedente non vale per gli ideali in generale:  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $n = 1$ , l'ideale  $J = (x^2)$  è tale che  $V(J) = \{0\}$ , ma  $I(V(J)) = (x) \neq J$ .

Vediamo ora alcune conseguenze del Nullstellensatz.

1. Gli ideali massimali di  $P$  sono tutti e solo quelli della forma  $\mathfrak{m}_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ , con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  in  $\mathbb{K}^n$ .

*Dimostrazione.*

Che i precedenti siano tutti ideali massimali è evidente, mostriamo che sono i soli. Sia  $\mathfrak{m}$  un ideale massimale di  $P$ . Allora  $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$  (in quanto altrimenti avremmo  $P = I(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ), dunque esiste un  $\alpha$  in  $\mathbb{K}^n$  appartenente a  $V(\mathfrak{m})$ . Ma allora  $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$  e per massimalità di  $\mathfrak{m}_\alpha$  si ottiene l'uguaglianza.  $\square$

2. Sia  $I \subseteq P$  e sia  $\alpha$  in  $V(I)$ . Allora  $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$  e in generale

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I\}.$$

Ricordiamo inoltre (mostrarlo per esercizio) che se  $I$  è un ideale di  $P$ , allora si ha

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \text{Max}(P) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

**Definizione 2.4.** Sia  $X$  una varietà algebrica affine immersa in  $\mathbb{K}^n$ . Si definisce l'**anello delle coordinate** di  $X$  come il quoziente

$$\mathbb{K}[X] = P/I(X) = \{f|_X : f \in P\}.$$

Ricordiamo che su  $\mathbb{K}^n$  è definita una topologia, detta **topologia di Zariski**, in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi  $V(I)$  al variare degli ideali  $I$  in  $P$ . Ricordiamo infatti che, se  $I, J$  sono ideali di  $P$ , allora

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ ;
- $\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V(\sum_{i \in I} I_i)$ .

**Esempio 2.5.** Nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $n = 1$ , i chiusi sono gli insiemi con un numero finito di punti, oppure tutto  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.6.** Sia  $f$  un elemento di  $P$ . Si definisce l'**aperto principale** relativo a  $f$  come

$$(\mathbb{K}^n)_f \doteq \mathbb{K}^n \setminus V(f) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Se  $U = \mathbb{K}^n \setminus V(I)$  è un aperto e  $\alpha$  è in  $U$ , allora esiste  $f$  in  $P$  tale che  $\alpha \in (\mathbb{K}^n)_f \subseteq U$ . Infatti  $I = (f_1, \dots, f_h)$ ,  $V(I) \subseteq V(f_i)$  e  $(\mathbb{K}^n)_{f_i} = \mathbb{K}^n \setminus V(f_i) \subseteq U$ .

Dotiamo ogni varietà algebrica affine immersa in  $\mathbb{K}^n$  della topologia di sottospazio. Inoltre, definiamo

$$X_f \doteq (\mathbb{K}^n)_f \cap X = \{\alpha \in X : f(\alpha) \neq 0\}.$$

**Osservazione 2.7.** L'insieme

$$\left\{ \frac{g}{f^n} : g \in P \right\}$$

è ben definito su  $(\mathbb{K}^n)_f$ .

**Definizione 2.8** (Funzioni regolari). Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{K}^n$ . Si definisce l'insieme delle **funzioni regolari** su  $U$  come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall \alpha \in U \exists g, h \in P : g(\alpha) \neq 0 \text{ e } f = h/g^n \text{ su } U \cap X_g\}.$$

**Lemma 2.9.** Sia  $X$  varietà affine immersa, allora

1.  $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}[X]$
2. Se  $g \in \mathbb{K}[X]$  allora  $\mathcal{O}(X_g) = \mathbb{K}[X]_g$

*Dimostrazione.*

Intanto l'affermazione 2. implica l'affermazione 1. scegliendo  $g \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

Osserviamo che se abbiamo una funzione della forma  $f/g^n$  allora essa appartiene a  $\mathcal{O}(X_g)$ , quindi basta mostrare che se  $\varphi \in \mathcal{O}(X_g)$  allora  $\varphi \in \mathbb{K}[X]_g$ . Per definizione, per ogni  $\alpha \in X_g$  esistono  $h$  e  $k$  tali che  $\varphi = k/h$  in  $X_g \cap X_h = X_{gh}$ .

Abbiamo dunque un ricoprimento  $X_g = \bigcup X_{gh_i}$  dove  $\varphi = k_i/h_i$  su  $X_{gh_i}$ . Sia  $I = (h_i)$  l'ideale in  $\mathbb{K}[X]_g$  generato dagli  $h_i$ . Se per assurdo  $I \neq \mathbb{K}[X]_g$  allora esiste un massimale  $\mathfrak{m}$  che contiene  $I$ . Un massimale corrisponde ad un punto  $\alpha \in X_g \subseteq X$  ma, poiché  $X_g$  è ricoperto dagli  $X_{gh_i}$ , esiste un indice  $i_0$  tale che  $\alpha \in X_{gh_{i_0}}$  e questo è assurdo perché vorrebbe dire

$$h_{i_0} \notin \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I \ni h_{i_0}.$$

Questo mostra che  $I = \mathbb{K}[X]_g$ . Possiamo dunque scrivere<sup>1</sup>  $1 = \sum \alpha_i h_i$  per opportuni  $\alpha_i$ . Segue che  $\varphi = \sum \alpha_i h_i \varphi = \sum \alpha_i k_i$  in  $\mathbb{K}[X]_g$ , infatti dove  $h_i \neq 0$  abbiamo  $\varphi = k_i/h_i$  e quindi  $h_i \varphi = k_i$ , se invece  $h_i(x) = 0$  si ha che  $h_i(x) \varphi(x) = 0 = k_i(0)$ , perché se così non fosse, poiché  $x \in X_{h_j}$  per qualche  $j \neq i$ , si ha che

$$k_j/h_j = k_i/h_i \iff h_i k_j = k_i h_j$$

su  $X_{h_i h_j}$  e quindi valutando in  $x$  abbiamo  $k_i(x) h_j(x) = 0$  con  $h_j(x) \neq 0$ . □

<sup>1</sup>nota che la somma è finita per definizione di ideale generato.

## 2.2 Varietà algebriche e morfismi

**Definizione 2.10** (Varietà algebrica). Spazio topologico compatto  $X$  tale che per ogni aperto  $U$  abbiamo un insieme di funzioni  $\mathcal{O}_X(U) \subseteq C^0(X \rightarrow \mathbb{K})$  tale che

1. Se  $U \subseteq V$  e  $f \in \mathcal{O}_X(V)$  allora  $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$ .
2. Se  $V = \bigcup U_\alpha$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  è tale che  $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$  per ogni  $\alpha$  allora  $f \in \mathcal{O}_X(V)$ .
3.  $(X, \mathcal{O}_X)$  è localmente isomorfo ad una varietà affine immersa, cioè per ogni  $x \in X$  esiste un intorno  $U$  e un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow Y$  con  $Y$  affine tale che per ogni  $V$  aperto di  $U$  si ha  $\varphi(V) = W$  aperto e  $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  è un isomorfismo.

**Esempio 2.11.** Sia  $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2} \supseteq V_{\det} = \text{GL}(n) = X$ . Se  $U$  è un aperto di  $X$  pongo  $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_V(U)$ . Dimostriamo che  $X$  è localmente isomorfo ad una varietà affine (in realtà possiamo mostrare che è isomorfo ad una varietà affine globalmente):

Sia  $Y \subseteq \mathbb{K}^{n^2+1} = V_{x_{ij}} \times \mathbb{K}_t$  definito dall'equazione  $d(x_{ij})t = 1$ . La mappa

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ (x_{ij}) & \longmapsto & (x_{ij}, \frac{1}{\det(x_{ij})}) \end{array}$$

risulta essere un isomorfismo.

**Proposizione 2.12.** Se  $X$  è una varietà affine immersa in  $\mathbb{K}^N$ ,  $X_f$  è una varietà isomorfa ad una varietà affine immersa  $Y$  data da  $V(\{f(x), f(x)t - 1\}_{f \in I(X)}) \subseteq \mathbb{K}_x^N \times \mathbb{K}_t$ .

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO. □

**Esempio 2.13.** Sia  $X = \mathbb{P}^1$ . Come spazio topologico, i chiusi sono  $\mathbb{P}^1, \emptyset$  e sottoinsiemi finiti di punti. Per ogni  $U$  aperto di  $\mathbb{P}^1$  poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \circ \varphi_1 \in \mathcal{O}(\varphi_1^{-1}(U)), f \circ \varphi_2 \in \mathcal{O}(\varphi_2^{-1}(U))\}$$

dove

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [t : 1] \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1 : t] \end{array}.$$

**Definizione 2.14** (Funzione regolare). Se  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  sono varietà, la mappa  $\varphi : X \rightarrow Y$  è **regolare** se

1.  $\varphi$  è continua
2. Per ogni  $W$  aperto di  $Y$ , se  $f \in \mathcal{O}_Y(W)$  allora  $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(W))$



**Definizione 2.15** (Varietà affine).  $(X, \mathcal{O}_X)$  è una **varietà affine** se è isomorfa ad una varietà affine immersa.

Se  $X$  è una varietà affine immersa, un morfismo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  induce un omomorfismo di anelli

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

in particolare possiamo definire  $f_i = \varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi$  in  $\mathbb{K}[X]$  tali che  $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  per definizione.

Viceversa, dati  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X]$  si ha che  $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  è una mappa regolare.

Cont. Ovvio.

Pullback Sia  $U = D(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ . Notiamo che

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid h(x) \div g(f_1(x), \dots, f_n(x)) \neq 0\} = X_h$$

Se  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{K}$  è regolare,  $\alpha = \ell/g^n$  con  $\ell \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , quindi

$$\alpha \circ \varphi = \text{frac}(\ell(f_1, \dots, f_n)h^n)$$

che è un elemento di  $\mathcal{O}(X_h)$  come voluto.

**Proposizione 2.16** (Morfismi verso affine). Se  $Y$  è una varietà affine allora un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  è univocamente determinato dall'omomorfismo  $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\psi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \psi & \downarrow \subseteq \\ & & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Notiamo che  $\varphi$  è morfismo se e solo se  $\psi$  lo è. Se  $\psi(X) \subseteq Y$  e  $f \in I(Y)$  allora  $\psi^*(f) = f \circ \varphi = 0$ , quindi abbiamo un diagramma di algebre.

Viceversa se un morfismo di algebre sollevo e bla bla bla trovo morfismo di varietà.  $\square$

**Definizione 2.17** (Prodotto). Siano  $X, Y$  varietà affini immerse in  $\mathbb{K}_x^\ell$  e  $\mathbb{K}_y^m$  rispettivamente, allora  $X \times Y \subseteq \mathbb{K}_{(x,y)}^{\ell+m}$  è una varietà, data da

$$X \times Y = V(\{f(x), g(y)\}_{f \in I(X), g \in I(Y)}) \subseteq \mathbb{K}^\ell \times \mathbb{K}^m.$$

**Proposizione 2.18.**  $\mathbb{K}[X \times Y] \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$

*Dimostrazione.*

L'anello delle coordinate del prodotto di due varietà affini è dato da

$$\mathbb{K}[X \times Y] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell]}{f(x), g(y)} \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

Infatti abbiamo un morfismo bilineare da  $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$  dato dal prodotto dei polinomi. Il morfismo indotto  $\Phi$  è surgettivo perché  $x_i = \Phi(x_i \times 1)$  e  $y_i = \Phi(1 \otimes y_i)$ , quindi abbiamo i generatori. Per l'iniettività procediamo per casi

- Supponiamo  $X = \mathbb{K}^\ell$  e  $Y = \mathbb{K}^m$ , allora abbiamo una inversa di  $\Phi$  data da

$$x_i \mapsto x_i \otimes 1, \quad y_i \mapsto 1 \otimes y_i$$

- Scrivendo  $\mathbb{K}[X \times Y]$  come  $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, y_\ell]}{(f(x), g(y))}$  abbiamo un morfismo dal numeratore verso  $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$  ben definito e notiamo che il nucleo è esattamente  $(f(x), g(y))$ . (dimostrare che prototensore di  $\mathbb{K}$ -algebre ridotte finitamente generate è ridotta.)

□

**Definizione 2.19** (Prodotto fibrato). Se  $X, Y, Z$  varietà affini e morfismi  $f : X \rightarrow Z$  e  $g : Y \rightarrow Z$ , definiamo  $W = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$ .

$$\begin{array}{ccc} W & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

**Osservazione 2.20.** Notiamo che  $W$  è un chiuso, infatti è luogo di zeri di  $f(x) - g(y)$  in  $X \times Y$ . Osserviamo però che queste equazioni non sono ridotte a priori.

## 2.3 Connessione e Irriducibilità

Sia  $X$  uno spazio topologico connesso. Allora

1. Se  $Y \subset X$  è connesso, allora  $\overline{Y}$  è connesso.
2. Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è continua, allora  $\varphi(X)$  è connesso.

**Esercizio 2.21.** Se  $X$  è una varietà algebrica affine, allora

$$X \text{ sconnesso} \iff \mathbb{K}[X] = A \times B.$$

**Esercizio 2.22.** Siano  $X, Y$  due varietà affini connesse. Allora  $X \times Y$  è connessa. [Attenzione: la topologia di  $X \times Y$  non è la topologia prodotto!]

**Esercizio 2.23.** Se  $X$  è una varietà, allora  $X$  ha un numero finito di componenti connesse. In particolare le componenti connesse sono chiuse e aperte.

**Definizione 2.24.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **riducibile** se esistono due sottospazi chiusi propri  $Z$  e  $W$  di  $X$  tali che  $X = Z \cup W$ . Lo spazio  $X$  si dice **irriducibile** se non è riducibile.

**Osservazione 2.25.** Se  $X$  è uno spazio di Hausdorff irriducibile, allora  $X$  è un punto.

*Dimostrazione.*

Se  $x, y$  sono punti distinti di  $X$ , allora esistono due intorni disgiunti  $U_x$  e  $U_y$  di  $x$  e  $y$  rispettivamente. Posti  $Z = X \setminus U_y$  e  $W = X \setminus U_x$ , si ottiene  $X = Z \cup W$ .  $\square$

**Osservazione 2.26.** Sia  $X$  una varietà affine. Allora  $X$  è irriducibile se e solo se l'anello delle coordinate  $\mathbb{K}[X]$  è un dominio d'integrità.

*Dimostrazione.*

Siano  $f, g$  in  $\mathbb{K}[X]$  tali che  $fg = 0$ . Consideriamo  $Z = V(f)$  e  $W = V(g)$ . Allora  $Z$  e  $W$  sono due chiusi tali che  $X = Z \cup W$ , dunque  $X = Z$  oppure  $X = W$ , cioè  $f = 0$  oppure  $g = 0$ .  $\square$

**Esempio 2.27.** La varietà  $X = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : xy = 0\}$  non è irriducibile.

**Osservazione 2.28.** Se  $Y$  è un sottospazio irriducibile di una varietà affine  $X$ , allora  $\overline{Y}$  è irriducibile. Se inoltre  $\varphi: Y \rightarrow X$  è una mappa continua, allora  $\varphi(Y)$  è irriducibile. Infine, se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici irriducibili, allora  $X \times Y$  è uno spazio topologico irriducibile.

Sia  $X$  una varietà affine. Ricordiamo che esiste una bigezione tra gli ideali radicali di  $\mathbb{K}[X]$  e le sottovarietà chiuse di  $X$ , data da  $I \mapsto V(I)$  e viceversa  $Y \mapsto I(Y)$ .

**Osservazione 2.29.** Sia  $I$  un ideale di  $\mathbb{K}[X]$ . Allora

$$V(I) \text{ è irriducibile} \iff I \text{ è un ideale primo.}$$

Ricordiamo che, se  $I$  è un ideale radicale allora  $V(I)$ , come spazio topologico, è omeomorfo alla varietà affine avente come anello di coordinate  $\mathbb{K}[X]/I$ . L'insieme  $V(I)$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali massimali di  $\mathbb{K}[X]$  contenenti  $I$ . D'altra parte, gli ideali massimali di  $\mathbb{K}[X]/I$  sono gli ideali massimali di  $\mathbb{K}[X]$  contenenti  $I$ . Se  $\pi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]/I$  è la proiezione canonica, si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X] \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X]/I\} \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & \mathfrak{m}/I \\ \pi^{-1}(M) & \longleftarrow & M \end{array}$$

**Definizione 2.30.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **Noetheriano** se ogni successione

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

di sottospazi chiusi di  $X$  stabilizza.

**Osservazione 2.31.** Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.

*Dimostrazione.*

Se  $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$  è una successione di sottospazi chiusi di  $X$ , allora si ha una successione

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq \dots$$

di ideali di  $\mathbb{K}[X]$  che stabilizza perché  $\mathbb{K}[X]$  è Noetheriano. Quindi anche la successione  $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$  stabilizza.  $\square$

**Osservazione 2.32.** Ogni varietà è uno spazio topologico Noetheriano.

*Dimostrazione.*

Scrivendo  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$  con  $X_i$  aperti affini e data una successione di chiusi  $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ , si ha una successione  $Z_1 \cap X_i \supseteq Z_2 \cap X_i \supseteq \dots \supseteq Z_n \cap X_i \supseteq \dots$  che stabilizza per ogni  $i$ . Allora esiste un  $N$  tale che  $Z_n \cap X_i = Z_N \cap X_i$  per ogni  $n \geq N$  e per ogni  $i$ , da cui  $Z_n = Z_N$  per ogni  $n \geq N$ .  $\square$

**Proposizione 2.33.** Sia  $X$  uno spazio topologico Noetheriano. Allora esistono dei sottospazi  $Y_1, \dots, Y_n$  chiusi e irriducibili di  $X$  tali che  $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ . Inoltre, se  $Y_i \not\subseteq Y_j$  per ogni  $i \neq j$ , una tale decomposizione di  $X$  è unica, e i sottospazi  $Y_i$  si dicono le **componenti irriducibili** di  $X$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}$  dei chiusi di  $X$  che non possono essere scritti come unione di un numero finito di chiusi irriducibili. Mostriamo che  $\mathcal{F}$  è vuota.

Supponiamo per assurdo che  $\mathcal{F}$  sia non vuota. Poiché ogni catena in  $\mathcal{F}$  ammette un minimo, per il Lemma di Zorn esiste un elemento minimale  $Z$  in  $\mathcal{F}$ . Per costruzione,  $Z$  è riducibile, quindi possiamo scrivere  $Z = C \cup D$  con  $C, D$  sottospazi chiusi e propri di  $Z$ . Poiché  $Z$  è un elemento minimale,  $C, D$  non sono in  $\mathcal{F}$ , quindi ammettono una decomposizione finita in chiusi irriducibili, ma allora anche  $Z$  ammette una tale decomposizione.

Supponiamo ora che  $X$  ammetta due decomposizioni in chiusi irriducibili

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_m = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$$

tali che  $Y_i \not\subseteq Y_j$  e  $Z_i \not\subseteq Z_j$  per ogni  $i \neq j$ . Poiché

$$Y_i = Y_i \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n) = Y_i \cap Z_1 \cup \dots \cup Y_i \cap Z_n$$

e poiché  $Y_i$  è irriducibile, si ha  $Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)}$ . Analogamente,  $Z_j \subseteq Y_{\beta(j)}$ . Allora  $\beta \circ \alpha = id$ , infatti

$$Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)} \subseteq Y_{\beta(\alpha(i))} = Y_i.$$

Analogamente  $\alpha \circ \beta = id$  e ciò conclude.  $\square$

**Osservazione 2.34** (Componenti irriducibili corrispondono a primi minimali). Siano  $I, J_\alpha$  ideali di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tali che i  $J_\alpha$  siano primi contenuti in  $I$ . Siano  $X = V(I)$  e  $Y_\alpha = V(J_\alpha)$ . Allora

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n,$$

dove  $J_1, \dots, J_n$  sono i primi minimali contenenti  $I$ . Sappiamo dal corso di Algebra 2 che i primi minimali sono in numero finito.

**Esempio 2.35.**  $I = (zx, zy)$ .  $p_1 = (z)$  è il piano,  $p_2 = (x, y)$  è la retta,  $X = V(p_1) \cup V(p_2)$ .

## 2.4 Dimensione di una varietà algebrica

**Definizione 2.36.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Definiamo la **dimensione (di Krull)** di  $X$  come

$$\sup \{n \in \mathbb{N} : \text{esiste una catena di chiusi irriducibili } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n\}.$$

Denotiamo questo numero  $\dim X$ .

**Osservazione 2.37.** Se  $X$  è una varietà affine, per quanto già visto si ha

$$\dim(X) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } P_0, \dots, P_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \dots \supsetneq P_n\}.$$

**Teorema 2.38.** Ogni varietà affine ha dimensione finita.

Poiché l'anello delle coordinate  $\mathbb{K}[X]$  di una varietà affine irriducibile  $X$  è un dominio d'integrità, possiamo considerare il suo campo dei quozienti, che indichiamo con  $K_X$ .

**Definizione 2.39** (Altezza). Se  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo di  $\mathbb{K}[X]$ , la sua **altezza** è definita come

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) \doteq \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } \mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

**Teorema 2.40.** Sia  $X$  una varietà affine irriducibile. Allora

1.  $\dim(X) = \text{tr deg}_{\mathbb{K}}(K_X)$ .
2. Se  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo di  $K[X]$  e  $Y = V(\mathfrak{p})$ , allora
$$\dim(X) = \dim(Y) + \text{ht}(\mathfrak{p}).$$
3. Se  $f$  è un elemento non nullo e non invertibile di  $\mathbb{K}[X]$ , allora  $V(f)$  è un chiuso di  $X$ . Se la sua decomposizione in componenti irriducibili è data da  $V(f) = Y_1 \cup \dots \cup Y_h$ , allora

$$\dim(Y_i) = \dim(X) - 1.$$

## 2.5 Varietà lisce

**Notazione.** Sia  $X$  una varietà (affine) e sia  $x$  un punto di  $X$ . In questa sezione poniamo  $A = \mathbb{K}[X]$  e  $\mathfrak{m}_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ .

**Definizione 2.41.** Lo spazio cotangente di  $X$  nel punto  $x$  è il quoziente

$$T_x^*X := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Dato un elemento  $f$  in  $A$ , definiamo il **differenziale** di  $f$  come la classe

$$df := [f - f(x)] \in T_x^*X.$$

Lo spazio tangente di  $X$  nel punto  $x$  è il duale

$$T_xX = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$$

dello spazio cotangente di  $X$  in  $x$ .

**Definizione 2.42.** Una **derivazione** su  $A$  è una funzione  $\partial: A \rightarrow \mathbb{K}$  che soddisfa la seguente proprietà

$$\partial(fg) = f(x)\partial g + g(x)\partial f.$$

Indichiamo con  $\text{Der}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$  l'insieme delle derivazioni su  $A$ .

**Esercizio 2.43.** La mappa  $T_xX \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$  definita da  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ , dove

$$\tilde{\varphi}(a + \mu) = \varphi(\mu)$$

definisce una bigezione (stiamo usando la decomposizione  $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}_x$ ).

**Esempio 2.44.** Se  $X = \mathbb{K}$  e  $p$  è un punto di  $\mathbb{K}$ , allora  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x - p)$  e  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{K}(x - p) = \mathbb{K}d_px$ .

**Esempio 2.45.** Se  $X = \mathbb{K}^n$  e  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , allora  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$  e si ha

$$\text{Der}_p(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

**Esempio 2.46.** Se  $X = V(I)$  è contenuta in  $\mathbb{K}^n$  e  $p$  è un punto di  $X$ , allora  $I \subseteq \mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ . Posto  $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$ , si ha

$$\frac{\bar{\mathfrak{m}}}{\bar{\mathfrak{m}}^2} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I}$$

e si ha un'immersione

$$\text{Der}_p(A/I, \mathbb{K}) = \{\partial \in \text{Der}_p(A, \mathbb{K}) : \partial(I) = 0\} \hookrightarrow \text{Der}_p(A, \mathbb{K})$$

data da  $\partial \mapsto \partial \circ \pi$ , dove  $\pi: A \rightarrow A/I$  è la proiezione canonica.

**Osservazione 2.47.** Se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è un morfismo di varietà e  $p$  è un punto di  $X$ , posto  $q = \varphi(p)$  si ha una mappa

$$d_p\varphi: T_pX \rightarrow T_pY$$

definita tramite

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_p(A, \mathbb{K}) & \rightarrow & \text{Der}_q(B, \mathbb{K}) \\ \partial & \mapsto & \partial \circ \varphi \end{array}$$

dove  $B = \mathbb{K}[Y]$ .

**Esempio 2.48.** Se  $Y = \mathbb{K}$  e  $\varphi(p) = q$ , la mappa  $d_p\varphi: T_pX \rightarrow T_q\mathbb{K} = \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x}|_q$  è definita da  $\partial \mapsto \tilde{\partial}$ , dove

$$\tilde{\partial}(f) = \partial(f \circ \varphi).$$

Se  $\tilde{\partial}(x) = \lambda$ , allora  $\tilde{\partial} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}|_q$ .

**Osservazione 2.49.** Se  $X$  è affine e  $\varphi$  è in  $A$ , allora  $\varphi$  definisce una mappa  $\mathbb{K}[x] \rightarrow A$  data da  $g \mapsto g \circ \varphi$ . In particolare  $x \mapsto \varphi$ . Quindi

$$\tilde{\partial}(x) = \partial(x \circ \varphi) = \partial(\varphi).$$

**Osservazione 2.50.** Nel caso di  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): X \rightarrow \mathbb{K}^n$ , si ha

$$d_p\varphi: \begin{array}{ccc} T_pX & \longrightarrow & T_q\mathbb{K}^n \\ \partial & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \partial(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_q \end{array}$$

Nel caso in cui  $X$  sia  $\mathbb{K}^m$  (con coordinata  $y$ ), si ha

$$d_p\varphi: \begin{array}{ccc} T_p\mathbb{K}^m & \longrightarrow & T_q\mathbb{K}^n \\ \frac{\partial}{\partial y_j}|_p & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}|_p \frac{\partial}{\partial x_i}|_q \end{array}$$

cioè  $d_p\varphi = \mathcal{D}_p\varphi$  a meno di rinominare i vettori base.

**Teorema 2.51.** Se  $X$  è una varietà irriducibile di dimensione  $n$ , allora

$$\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim T_pX \geq n.$$

**Definizione 2.52.** Sia  $X$  una varietà di dimensione  $n$ . Un punto  $p$  di  $X$  si dice **liscio** se  $\dim \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = n$ .

**Osservazione 2.53.** Se  $X$  è una varietà irriducibile di dimensione  $d$  contenuta in  $\mathbb{K}^n$ , consideriamo il punto  $p = 0$  in  $X$ . Vogliamo capire se  $0$  è liscio. Scriviamo  $X = V(I)$ , con  $I = (f_1, \dots, f_r)$ . In questo caso  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 = (x_1, \dots, x_n)$ . I generatori  $f_i$  di  $I$  si scrivono come  $f_i = \ell_i + f_{1,i}$  con  $\ell_i$  lineare omogeneo e  $f_{1,i}$  di grado superiore a  $\deg(\ell_i)$ . Quindi  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + \mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$ , da cui

$$\frac{\overline{\mathfrak{m}}}{\overline{\mathfrak{m}^2}} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle} = \frac{\mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n}{\langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle}.$$

Dunque  $X$  è liscio in  $0$  se  $\dim_{\mathbb{K}} \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle = n - d$ .

**Esempio 2.54.** Consideriamo  $X$  la curva affine definita dall'equazione  $y^2 = x^3$  (notiamo che  $\dim X = 1$ ). Posto  $f = y^2 - x^3$ , si ha<sup>2</sup>

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{0},$$

<sup>2</sup> $y^2 - x^3$  non ha parte lineare

che ha dimensione 2, quindi  $X$  non è liscia in  $(0, 0)$ . Se invece consideriamo  $X$  definita da  $y^2 = x^3 + x$ , allora

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{x}$$

che ha dimensione 1, quindi  $X$  è liscia in 0.

**Esempio 2.55.** Se  $X = V(I)$  in  $\mathbb{K}^n$ , con  $I = (f_1, \dots, f_r)$ , consideriamo la mappa

$$f = (f_1, \dots, f_r): \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r.$$

Allora

$$d_0 f : \begin{array}{ccc} T_0 \mathbb{K}_x^n & \longrightarrow & T_0 \mathbb{K}_y^r \\ \partial & \longmapsto & \sum_j \partial(f_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_0 \end{array}$$

e

$$T_0 X = \{\partial: \partial(I) = 0\} = \{\partial: \partial(f_j) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, r\} = \ker d_0 f.$$

**Teorema 2.56.** Se  $X$  è una varietà, allora esiste un aperto  $U$  in  $X$  costituito da punti lisci.

**Teorema 2.57** (Zariski). Supponiamo  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ . Se  $X$  è irriducibile e  $Y$  è liscia, ogni morfismo  $\varphi: X \rightarrow Y$  biiettivo è un isomorfismo.

In caratteristica  $p$  il teorema va enunciato in modo diverso:  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_p}$ ,  $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  definito da  $x \mapsto x^p$ .

**Definizione 2.58.** Sia  $\varphi: X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà lisce. Diciamo che  $\varphi$  è **liscio** in un punto  $p$  di  $X$  se la mappa  $d_p \varphi: T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$  è surgettiva.

**Teorema 2.59.** Assumiamo  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ . Se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è un morfismo **dominante** di varietà lisce (cioè  $\overline{\varphi(X)} = Y$ ), allora esiste un aperto non vuoto  $U$  di  $Y$  tale che la restrizione

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$$

è liscia.

**Teorema 2.60.** Ogni mappa  $\varphi: X \rightarrow Y$  liscia è aperta. Inoltre, per ogni varietà  $Z$  (non necessariamente liscia), la mappa

$$(\varphi, id): X \times Z \rightarrow Y \times Z$$

è aperta.



**Teorema 2.61.** Siano  $X$  e  $Y$  varietà lisce e  $\varphi : X \rightarrow Y$  una mappa liscia tale che  $d\varphi_x$  è surgettivo per ogni  $x \in X$ , allora

1.  $X_y = \varphi^{-1}(y)$  è una varietà liscia di dimensione  $\dim X - \dim Y$
2. Se  $x \in X_y$  allora

$$0 \rightarrow T_x X_y \rightarrow T_x X \xrightarrow{d\varphi_x} T_y Y \rightarrow 0$$

Parte II

**Gruppi algebrici**

## Capitolo 3

# Gruppi algebrici

### 3.1 Definizioni generali

**Definizione 3.1** (Gruppo algebrico lineare). Un gruppo  $G$  è un **gruppo algebrico lineare** se è un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(n)$  per qualche  $n$  definito da equazioni polinomiali.

**Definizione 3.2** (Gruppo algebrico affine). Un gruppo  $G$  è un **gruppo algebrico affine** se  $G$  è una varietà affine e le operazioni prodotto

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

e inverso

$$i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

sono morfismi di varietà.

**Osservazione 3.3.** Il prodotto  $\mu : \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \rightarrow \mathrm{GL}(n)$  è un morfismo di varietà, infatti

$$(x_{ij})(y_{ij}) = \left( \sum_h x_{i,h} y_{h,j} \right)$$

è definito da equazioni polinomiali nelle entrate.

Similmente per l'operazione di inverso, infatti  $(x_{ij})^{-1} = \mathrm{Adj}(x_{ij}) \cdot (\det(x_{ij}))^{-1}$ . Le entrate della matrice aggiunta classica sono dei determinanti e quindi polinomiali, mentre l'inversa del determinante della matrice di partenza è una funzione regolare perché siamo su  $\mathrm{GL}(n) = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \setminus V(\det)$ .

**Esempio 3.4.** I gruppi  $\mathrm{GL}(n)$ ,  $\mathrm{GL}(1) = \mathbb{G}_m$  e  $\mathrm{SL}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$  sono evidentemente gruppi algebrici lineari.

**Esempio 3.5.** Il gruppo

$$\mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un gruppo algebrico lineare (definito da  $x_{11} = x_{22} = 1$  e  $x_{21} = 0$ ). Notiamo però che

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi questo gruppo lo si può interpretare come  $(\mathbb{K}, +)$ , dando una realizzazione di questo come gruppo algebrico lineare.

**Definizione 3.6** (Azione regolare di gruppo algebrico). Sia  $G$  un gruppo algebrico affine e sia  $X$  una varietà affine qualsiasi. Se  $G$  agisce su  $X$  affermiamo che questa azione è **regolare** se  $\sigma : G \times X \rightarrow X$  è un morfismo di varietà algebriche.

**Definizione 3.7** (Rappresentazione regolare). Se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K}$  e l'azione di  $G$  è lineare diciamo che  $V$  è una **rappresentazione regolare finito dimensionale** di  $G$ .

Se  $V$  è una rappresentazione di  $G$  (di dimensione qualsiasi) diciamo che è **regolare** se

1. per ogni  $v \in V$  si ha  $\dim \langle gv \rangle_{g \in G} < \infty$
2. per ogni  $W \subseteq V$  sottospazio di dimensione finita,  $W$  è una rappresentazione regolare finito dimensionale.

**Osservazione 3.8.** Se  $G$  è un gruppo algebrico affine, ai morfismi di moltiplicazione  $\mu$  e inverso  $i$  corrispondono omomorfismi di  $\mathbb{K}$ -algebre

$$\mu^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & (x \otimes y) \mapsto f(xy) \end{array}, \quad i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}$$

**Osservazione 3.9.** Se  $\sigma$  è una azione  $G \times X \rightarrow X$  allora

$$\sigma^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & (g, x) \mapsto f(gx) \end{array}$$

**Osservazione 3.10.** La proprietà associativa si può esprimere tramite il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{id_G \times \mu} & G \times G \\ \mu \times id_G \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Quindi abbiamo una proprietà analoga sulla comoltiplicazione  $\mu^*$  considerando il diagramma indotto.

**Osservazione 3.11.** Se  $X = V$  è una rappresentazione regolare fin.dim. e  $\sigma : G \times V \rightarrow V$  abbiamo un omomorfismo di algebre

$$\sigma^* : \mathbb{K}[V] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[V]$$

Ricordiamo però che  $\mathbb{K}[V] = SV^*$ , quindi possiamo restringere  $\sigma^*$  a solo  $V^* \subseteq SV^*$ .

**Lemma 3.12.**  $\sigma^*(V^*) \subseteq \mathbb{K}[G] \otimes V^*$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $e_1, \dots, e_n$  una base di  $V$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  la base duale. Se  $g$  agisce come  $(g_{ij})$  su  $V$  e  $v = \sum v_i e_i$  allora

$$\begin{aligned} \sigma^* \varphi_k(g, v) &= \varphi_k(gv) = \varphi_k\left(\sum g_{ij} v_j e_i\right) = \\ &= \sum g_{ij} v_j \varphi_k(e_i) = \sum g_{kj} v_j = \\ &= \left(\sum x_{kj} \otimes \varphi_j\right)(g, v), \end{aligned}$$

dove  $x_{kj} \in \mathbb{K}[G]$  è la funzione che per ogni  $g$  restituisce  $g_{kj}$ . □

**Lemma 3.13.** Sia  $G$  che agisce su  $X$  in modo regolare con entrambi affini. Allora

- $\mathbb{K}[X]$  è una rappresentazione di  $G$  con azione data da

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

- $\mathbb{K}[X]$  è una rappresentazione regolare
- $\mathbb{K}[G]$  è una rappresentazione regolare di  $G$ .

*Dimostrazione.*

Se  $f \in \mathbb{K}[X]$  allora  $\dim \langle Gf \rangle < \infty$ . Notiamo che  $\sigma(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \beta_i$  con somma finita. Notiamo che, per definizione

$$f(gx) = \sum_i \alpha_i(g) \beta_i(x)$$

quindi

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) = \sum \alpha_i(g^{-1}) \beta_i(x) \iff gf = \sum_{i=1}^k \alpha_i(g^{-1}) \beta_i \in \langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$$

Questo mostra che  $\dim \langle Gf \rangle$  è finita.

Vogliamo dimostrare che su  $W \subseteq \mathbb{K}[X]$  di dimensione finita l'azione di  $G$  è regolare, cioè voglio mostrare che per ogni  $\varphi \in W^*$  (generatori di  $SW^* = \mathbb{K}[W]$ ) si ha  $\varphi(gf)$  regolare.

Sia  $f_1, \dots, f_k$  una base di  $W$ . Poiché sono una base  $\sigma^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes f_j$ . Se  $\varphi(f_i) = \lambda_i$  abbiamo che  $\psi = \sigma^* \varphi$  è tale che

$$\psi(g, f_i) = \varphi(gf_i) = \varphi\left(\sum \alpha_{ij}(g^{-1}) f_j\right) = \sum \alpha_{ij}(g^{-1}) \lambda_j$$

□

### 3.1.1 Componente connessa dell'identità

**Proposizione 3.14.** Sia  $G$  un gruppo algebrico affine e sia  $G^0$  la componente connessa di  $e_G$ . Allora  $G^0$  è un sottogruppo normale chiuso.

*Dimostrazione.*

Sicuramente  $G^0$  è chiuso in quanto componente connessa. L'insieme  $G^0 \times G^0$  è connesso e la mappa

$$m^0 = m|_{G^0 \times G^0} : G^0 \times G^0 \longrightarrow G$$

ha immagine connessa in  $G$ . Poiché  $e_G$  è nell'immagine di  $m^0$ , si ha  $\text{Imm}(m^0) = G^0$ . Dato  $g$  in  $G$ , si ha

$$gG^0g^{-1} \subset G^0,$$

infatti la mappa

$$AD_g : \begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

è continua e fissa  $e_G$ , quindi  $\text{Imm}(AD_g) \subset G^0$ . □

**Osservazione 3.15.** In gruppo algebrico affine le componenti connesse sono irriducibili.

**Esercizio 3.16.** Il sottogruppo  $G^0$  è irriducibile.

Citiamo il seguente teorema:

**Teorema 3.17** (Chevalley). Se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è una mappa regolare tra due varietà, allora  $\varphi(X)$  contiene un aperto di  $\varphi(X)$ .

**Osservazione 3.18.** Se  $G$  è un gruppo algebrico, allora esistono  $g_1, \dots, g_k$  in  $G$  tali che

$$G = G^0 \cup G^0g_1 \cup \dots \cup G^0g_k.$$

La precedente è una decomposizione in componenti connesse e irriducibili.

**Proposizione 3.19.** Se  $\varphi: G \rightarrow H$  è un morfismo di gruppi algebrici affini, allora  $\varphi(G)$  è un chiuso di  $H$ .

*Dimostrazione.*

Sfruttando la decomposizione dell'Osservazione (3.18), abbiamo

$$\varphi(G) = \varphi(G^0) \cup \varphi(G^0g_1) \cup \dots \cup \varphi(G^0g_k),$$

quindi basta mostrare che  $\varphi(G^0)$  è chiuso. In particolare, possiamo ricondurci al caso  $G = G^0$ .

Il sottogruppo  $X = \overline{\varphi(G)}$  di  $H$  è irriducibile, e per il Teorema di Chevalley (3.17)

esiste un aperto  $U$  di  $X$  contenuto in  $\varphi(G)$ . Mostriamo che  $X = \varphi(G)$ . Poiché  $X$  e  $\varphi(G)$  sono sottogruppi di  $H$ , si ha

$$U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X$$

Se  $x$  è un elemento di  $X$ , poiché  $i(U) = U^{-1}$  è un aperto di  $X$ , anche  $xU^{-1}$  è un aperto di  $X$ . Per irriducibilità di  $X$ , si ha  $U \cap xU^{-1} \neq \emptyset$ , quindi esistono  $u, v$  in  $U$  tali che  $x = uv$ , da cui  $X = U \cdot U = \varphi(G)$ .  $\square$

## 3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari

**Osservazione 3.20** (Punti e ideali massimali sono la stessa cosa). Nella situazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

abbiamo una corrispondente mappa di algebre

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Notiamo che

$$\varphi(\alpha) = \beta \iff \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta$$

dove  $\mathfrak{m}_\alpha$  e  $\mathfrak{m}_\beta$  sono i massimali che corrispondono ai rispettivi punti.

*Dimostrazione.*

Basta notare che le seguenti sono equivalenze

$$\begin{aligned} f &\in \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) \\ f \circ \varphi &\in \mathfrak{m}_\alpha \\ (f \circ \varphi)(\alpha) &= 0 \\ f(\varphi(\alpha)) &= 0 \\ f &\in \mathfrak{m}_{\varphi(\alpha)} = \mathfrak{m}_\beta \end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 3.21.** Siano  $X$  e  $Y$  affini e sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morfismo. Se  $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  è surgettiva allora  $\varphi(X)$  è chiuso.

*Dimostrazione.*

Sia  $I = \ker \psi$  e mostriamo che  $\varphi(X) = V(I)$ :

$\subseteq$  Se  $x \in X$  e  $f \in I$  allora  $f(\varphi(x)) = \psi(f)(x) = 0$ , quindi  $\varphi(x) \in V(I)$ .

$\supseteq$  Sia  $\beta \in V(I)$ , allora  $I \subseteq \mathfrak{m}_\beta$ . Notiamo che  $\psi : \mathbb{K}[Y]/I \rightarrow \mathbb{K}[X]$  è un isomorfismo e sotto questo isomorfismo

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\beta/I,$$

dunque

$$\mathbb{K} \cong \frac{\mathbb{K}[Y]}{\mathfrak{m}_\beta} \xrightarrow{\psi} \frac{\mathbb{K}[X]}{\psi(\mathfrak{m}_\beta)}.$$

Abbiamo quindi mostrato che  $\psi(\mathfrak{m}_\beta)$  è un massimale, dunque per il Nullstellensatz esiste  $\alpha \in X$  tale che  $\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha$ . Concludiamo notando che

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha \implies \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta \iff \varphi(\alpha) = \beta.$$

□

**Proposizione 3.22.** Se  $X, Y$  affini,  $\varphi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  mappe corrispondenti, se  $G$  agisce su  $X$  e  $Y$  allora si ha che  $\varphi$  è  $G$ -equivariante se e solo se  $\psi$  è  $G$ -equivariante.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni:

⇒ Segue calcolando

$$\begin{aligned} \psi(g \cdot f)(x) &= (g \cdot f)(\varphi(x)) = f(g^{-1} \cdot \varphi(x)) = \\ &= f(\varphi(g^{-1}x)) = \psi(f)(g^{-1}x) = \\ &= (g \cdot \psi(f))(x). \end{aligned}$$

⇐ Vogliamo mostrare che  $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ . Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni  $f \in \mathbb{K}[Y]$  si ha  $f(g\varphi(x)) = f(\varphi(gx))$ .

$$f(g\varphi(x)) = (g^{-1}f)(\varphi(x)) = \psi(g^{-1}f)(x) = (g^{-1}\psi(f))(x) = \psi(f)(gx) = f(\varphi(gx)).$$

□

**Teorema 3.23.** Se  $X$  è affine e  $G$  agisce su  $X$  allora esiste una rappresentazione di dimensione finita  $V$  di  $G$  e  $i : X \rightarrow V$  iniettiva che è  $G$ -equivariante

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO

□

**Teorema 3.24.** Ogni gruppo affine è lineare.

*Dimostrazione.*

Consideriamo l'azione di  $G$  su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Questa rende  $\mathbb{K}[G]$  una rappresentazione di  $G$ . Notiamo che  $\mathbb{K}[G]$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata, con generatori  $f_1, \dots, f_n$ . Notiamo che esiste  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita che contiene  $f_1, \dots, f_n$  che è stabile per l'azione di  $G$  e una rappresentazione regolare di  $G$ .



Supponiamo  $f_1, \dots, f_N$  base di  $V$ . Sia

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G \times G] \\ f & \longmapsto & (g, h) \mapsto f(gh) \end{array}$$

e scriviamo  $\mu(f_j) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j} \otimes f_i$ .

$$(gf_j)(h) = f_j(g^{-1}h) = \mu(f)(g^{-1}, h) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})f_i(h).$$

Poniamo  $\alpha_{i,j}(g) = \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})$ . Consideriamo ora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{GL}(V) \\ g & \longmapsto & [g]_{\{f_j\}}^{\{f_j\}} = (\alpha_{i,j}(g)) \end{array}$$

che a livello di algebre diventa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\text{GL}(V)] = \mathbb{K}[x_{i,j}, \det^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ x_{i,j} & \longmapsto & \alpha_{i,j} \end{array}.$$

Dalla definizione è evidente che  $\varphi$  è una mappa regolare. Se mostriamo che  $\varphi$  è iniettiva e che  $\psi$  è surgettiva allora per (3.21) avremo che  $\varphi(G)$  è un chiuso, quindi  $\varphi$  identifica  $G$  con un chiuso di  $\text{GL}(V)$ , rendendo  $G$  un gruppo algebrico lineare.

Siano  $g, h \in G$  tali che  $\alpha_{i,j}(g) = \alpha_{i,j}(h)$  per ogni  $i, j$ , allora  $gf_j = hf_j$  per ogni  $j$ , quindi  $g$  e  $h$  hanno lo stesso effetto su  $\mathbb{K}[G]$ , in particolare<sup>1</sup>

$$f(g^{-1}) = (gf)(e) = (hf)(e) = g(h^{-1})$$

per ogni  $f \in \mathbb{K}[G]$ , e questo significa che  $g^{-1} = h^{-1}$ , cioè  $g = h$ , mostrando l'injectività.

Notiamo che per ogni  $g \in G$

$$f_j(g^{-1}) = (gf_j)(e) = \sum \alpha_{i,j}(g) \underbrace{f_j(e)}_{\in \mathbb{K}}.$$

Questo mostra che i generatori  $f_j$  di  $\mathbb{K}[G]$  appartengono all'immagine di  $\psi$  (perché combinazioni lineari delle  $\alpha_{i,j}$ ), quindi  $\psi$  è surgettiva.  $\square$

Ricordiamo il

**Teorema 3.25** (di Chevalley). Sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  morfismo di varietà, allora  $\varphi(X)$  contiene un aperto di  $\varphi(X)$ .

**Corollario 3.26.** Se  $G$  e  $H$  gruppi algebrici affini con  $\varphi : G \rightarrow H$  morfismo di gruppi algebrici allora  $\varphi(G)$  è un chiuso di  $H$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $T = \varphi(G) \subseteq H$ . Vogliamo mostrare che  $T = \overline{T} \subseteq H$ . Per Chevalley (3.17),  $T \supseteq U$  per  $U$  aperto di  $\overline{T}$ . Notiamo che  $\overline{T}$  è un sottogruppo di  $H$ . Dunque per ogni  $t \in \overline{T}$ ,  $tU \subseteq \overline{T}$ .

Poiché la moltiplicazione per  $t$  è un omeomorfismo,  $U$  e  $tU$  sono aperti di  $\overline{T}$ , quindi per irriducibilità  $U \cap tU \neq \emptyset$ , dunque esiste  $g, h \in U$  tali che  $g = th$ , cioè  $t = gh^{-1} \in T$  e dato che  $t$  era un generico elemento di  $T$  abbiamo finito.  $\square$

<sup>1</sup> $e$  è l'identità di  $G$

## Capitolo 4

# Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile

**Proposizione 4.1** (Semisemplice uguale completamente riducibile). Per le rappresentazioni regolari di  $G$  abbiamo che se essa è completamente riducibile allora è semisemplice, cioè le due condizioni sono equivalenti in questo caso.

*Dimostrazione.*

Se  $V$  è una rappresentazione regolare non nulla allora  $V$  contiene una sottorappresentazione semplice, infatti basta prendere  $W \subseteq V$  di dimensione finita e poi la sottorappresentazione di  $W$  di dimensione minima.

Se  $W \subseteq V$  allora  $W$  e  $V/W$  sono completamente riducibili, infatti per completa riducibilità  $V = W \oplus U$  per  $U \cong V/W$ , quindi basta mostrarlo per  $W$ . Sia  $X \subseteq W$  sottorappresentazione. Poiché  $V = X \oplus Y$  (di nuovo applico l'ipotesi su  $V$ ) allora  $W = X \oplus Y \cap W$ .

Mostriamo ora che  $V$  è semisemplice. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigoplus_{i \in I} S_i \subseteq V \right\}$$

con  $S_i$  tutti semplici e ordine su  $\mathcal{F}$  dato da

$$\bigoplus_{i \in I} S_i \preceq \bigoplus_{j \in J} T_j \iff I \subseteq J \text{ e } S_i = T_i \text{ per } i \in I.$$

Ogni catena ammette maggiorante dato sommando sull'unione degli indici. Sia allora  $W = \bigoplus S_i \subseteq V$  massimale e scriviamo  $V = W \oplus U$ . Se  $W \neq (0)$  allora esiste una sottorappresentazione semplice  $S \subseteq U$  e quindi  $W' = W \oplus S$  sarebbe maggiore di  $W$ , assurdo.  $\square$

Vorremmo capire per quali gruppi  $G$  le rappresentazioni regolari sono semisemplici.

## 4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti

**Definizione 4.2** (Elementi unipotenti, nilpotenti e semisemplici). Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $g \in \text{End}(V)$ . Affermiamo che  $g$  è

- **semisemplice** se è diagonalizzabile
- **nilpotente** se  $g^n = 0$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$
- **unipotente** se  $(g - id_V)^n = 0$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$

**Osservazione 4.3.** Se  $g$  è invertibile allora  $\mathbb{Z}$  agisce su  $V$  come

$$n \cdot v = g^n v,$$

quindi la definizione di semisemplice si sposa bene con quella già data in quanto  $g$  induce una decomposizione in autospazi  $g$ -invarianti.

**Definizione 4.4** (Endomorfismo localmente finito). Siano  $V$  uno spazio vettoriale e  $g \in \text{End}(V)$ .  $g$  è **localmente finito** se per ogni  $v \in V$  esiste  $W$  di dimensione finita  $g$ -stabile con  $v \in W$ . In tal caso diciamo che

- $g$  è **semisemplice** se  $g|_W$  è semisemplice per ogni  $W \subseteq V$   $g$ -stabile di dimensione finita.
- $g$  è **nilpotente** se  $g|_W$  è nilpotente per ogni  $W \subseteq V$   $g$ -stabile di dimensione finita.
- $g$  è **unipotente** se  $g|_W$  è unipotente per ogni  $W \subseteq V$   $g$ -stabile di dimensione finita.

**Definizione 4.5** (Semisemplice, unipotente e nilpotente per gruppi algebrici). Se  $G$  è un gruppo algebrico e  $g \in G$  allora  $g$  è

- **semisemplice** se l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione regolare è semisemplice, cioè l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita è semisemplice
- **unipotente** se l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione regolare è unipotente, cioè l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita è unipotente
- **nilpotente** se l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione regolare è nilpotente, cioè l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita è nilpotente.

**Lemma 4.6** (Semisemplice/unipotente/nilpotente passano alle costruzioni lineari). Siano  $g \in \text{End}(V)$  e  $h \in \text{End}(W)$  con  $V$  e  $W$  localmente finite. Allora

- Se  $g$  e  $h$  semisemplici allora

$g \oplus h : V \oplus W \rightarrow V \oplus W$  è semisemplice

$g \otimes h : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  è semisemplice

- Se  $U \subseteq V$  è stabile per  $g$  e  $g$  semisemplice allora  $g|_U$  e  $\bar{g} : V/U \rightarrow V/U$  sono semisemplici.
- Se  $g$  è semisemplice allora l'azione di  $g$  su  $SV$  è semisemplice
- Se  $\dim V$  è finita e  $g$  è semisemplice allora  $V^*$  è semisemplice.

Valgono anche gli analoghi per unipotente e nilpotente.

*Dimostrazione.*

Tante verifiche noiose, riportiamo giusto quelle per  $g \otimes h$ :

Se  $V$  e  $W$  hanno dimensione finita allora esistono basi di autovettori per  $g$  e  $h$

$$gv_i = \lambda_i v_i, \quad hw_i = \mu_i v_i$$

Allora

$$(g \otimes h)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$

quindi  $v_i \otimes w_j$  è ancora base di autovettori. Se invece  $V$  e  $W$  hanno dimensione infinita e  $U \subseteq V \otimes W$  di dimensione finita allora gli elementi di base di  $U$  appartengono a prodotti tensore di sottospazi di dimensione finita di  $V$  e  $W$ , quindi ingrandendo in modo tale da tener conto di tutta la base ricaviamo  $U \subseteq \widetilde{V} \otimes \widetilde{W}$  con  $\widetilde{V}$  e  $\widetilde{W}$  di dimensione finita, ora ci restringiamo sottospazi stabili di  $\widetilde{V}$  e  $\widetilde{W}$  e con calma ci rimettiamo nelle ipotesi finite.  $\square$

**Lemma 4.7** (Rappresentazioni finite si immergono in  $\mathbb{K}[G]^n$ ). Sia  $V$  una rappresentazione di dimensione finita di  $G$ , allora abbiamo una iniezione

$$f : V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^n$$

$G$ -equivariante

*Dimostrazione.*

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$  e sia  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  la base duale. Definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}[G]^n \\ v & \longmapsto & (\varphi_1 \otimes v, \dots, \varphi_n \otimes v) \end{array}$$

dove se  $\varphi \in V^*$  e  $v \in V$  poniamo

$$(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g^{-1}v).$$

G-equivariante Vogliamo  $\psi(gv) = g\psi(v)$ , cioè  $g(\varphi \otimes v) = \varphi \otimes gv$ . Allora calcoliamo

$$(g(\varphi \otimes v))(h) = (\varphi \otimes v)(g^{-1}h) = \varphi(h^{-1}gv) = (\varphi \otimes gv)(h)$$

iniettiva Supponiamo  $\psi(v) = 0$ , allora per ogni  $i$

$$0 = (\varphi_i \otimes v)(e) = \varphi_i(v)$$

ma  $\varphi_i$  era una base del duale, quindi  $v = 0$ .

□

**Osservazione 4.8.** Se  $gv = (\alpha_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n} v$  allora  $\varphi_i \otimes v_j = \alpha_{i,j}$ .

**Corollario 4.9.** Se  $g \in G$  allora

- $g$  è semisemplice se e solo se l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice
- $g$  è unipotente se e solo se l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[G]$  è unipotente

*Dimostrazione.*

Facciamo il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Dobbiamo verificare che l'azione di  $g$  su ogni rappresentazione di dimensione finita  $V$  è semisemplice. Per il lemma (4.7) abbiamo che  $V \subseteq \mathbb{K}[G]^n$  e questo è semisemplice quindi anche  $g$  lo è per il secondo punto del lemma (4.6)

□

**Lemma 4.10** (Criterio per semisemplice/unipotente in gruppi lineari). Se  $G \subseteq GL(V)$  è un sottogruppo chiuso per  $V$  di dimensione finita allora

- $g \in G$  è semisemplice se e solo se l'azione di  $g$  su  $V$  è semisemplice.
- $g \in G$  è unipotente se e solo se l'azione di  $g$  su  $V$  è unipotente.

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni per il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Verifichiamo che l'azione su  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice. Osserviamo che

$$\mathbb{K}[GL(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$$

è surgettivo e  $G$ -equivariante quindi basta far vedere che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[GL(V)]$ .

$$\mathbb{K}[GL(V)] = \mathbb{K}[End(V)] [\det^{-1}]$$

Verifichiamo che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)] = S(\text{End}(V)^*)$ . Per il lemma (4.6) basta verificare che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\text{End}(V)^*$  o equivalentemente su  $\text{End}(V)$  per lo stesso lemma. Ricordiamo che  $g$  agisce tramite la moltiplicazione a sinistra.

Se  $\dim V = n$  allora  $\text{End}(V)$  con l'azione di moltiplicazione a sinistra di  $g$  è uguale a considerare l'azione di  $g$  su  $V^{\oplus n}$  dove la corrispondenza è data dal fatto che l'azione per moltiplicazione a sinistra agisce sulle colonne della matrice a destra per restituire le colonne della matrice risultato.

Poiché  $g$  agiva in modo semisemplice su  $V$ , agisce in modo semisemplice anche sulla somma che abbiamo considerato, quindi mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$ .

Sia ora  $W \subseteq \mathbb{K}[\text{End}(V)][\det^{-1}]$  un sottospazio di dimensione finita, in particolare

$$W \subseteq \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \quad \text{per qualche } N$$

Consideriamo allora l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K}$  dove sulla copia di  $\mathbb{K}$  abbiamo  $g\lambda = (\det g)^{-N} \lambda$ . Abbiamo una mappa  $G$ -equivariante surgettiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \\ f \otimes \lambda & \longmapsto & \frac{\lambda}{(\det)^N} f \end{array}$$

quindi, poiché  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$  e su  $\mathbb{K}$ , si ha che agisce in modo semisemplice su  $\frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)]$  e quindi su  $W$ .

Mettendo tutto insieme, abbiamo mostrato che  $g$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[G]$  e questo conclude per il corollario (4.9). □

## 4.2 Decomposizione di Jordan

**Proposizione 4.11.** Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $T$  un endomorfismo di  $V$ . Allora

1. Esistono e sono unici  $S$  semisemplice e  $N$  nilpotente in  $\text{End}(V)$  tali che  $T = S + N$  e  $SN = NS$ .

Gli endomorfismi  $S$  e  $N$  si dicono **parte semisemplice** e **parte nilpotente** di  $T$  e li denoteremo  $T_s$  e  $T_n$  rispettivamente.

2. Esistono  $f, g$  in  $\mathbb{K}[x]$ , con  $f(0) = g(0) = 0$ , tali che  $S = f(T)$  e  $N = g(T)$ .
3. Se  $W$  è un sottospazio  $T$ -stabile di  $V$ , allora  $W$  è  $S$ -stabile e  $N$ -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_n = N|_W.$$

4. Se  $V'$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita,  $T'$  è un endomorfismo di  $V'$  e  $L: V \rightarrow V'$  è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_n = T'_n \circ L.$$

*Dimostrazione.*

Dimostriamo i vari punti.

1. Scriviamo  $T$  in forma di Jordan e poniamo  $S$  la parte diagonale di  $T$  (che è quindi semisemplice). Posto  $N = T - S$ , si ha che  $N$  è nilpotente e  $SN = NS$ .

Mostriamo ora l'unicità: se  $S'$  e  $N'$  sono tali che  $T = S + N = S' + N'$  e  $S'N' = N'S'$ , allora  $S, S', N, N'$  commutano con  $T$ , quindi  $S', N'$  commutano con  $S, N$ . Osservando che  $S - S' = N' - N$ , dove il primo membro è diagonale e il secondo è nilpotente, troviamo  $S = S'$  e  $N = N'$ .

2. Consideriamo il polinomio caratteristico  $p_T$  di  $T$  e scriviamolo nella forma

$$p_T(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{n_i},$$

dove i  $\lambda_i$  sono distinti. Cerchiamo un polinomio  $f(t)$  in  $\mathbb{K}[t]$  tale che

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0 & (\text{mod } (t)) \\ f(t) \equiv \lambda_i & (\text{mod } (t - \lambda_i)^{n_i}) \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Tale polinomio esiste per il teorema cinese del resto. Inoltre soddisfa  $f(T) = S$ . Infatti, sul singolo blocco di Jordan  $J_i$  relativo all'autovalore  $\lambda_i$  (di taglia  $m_i \leq n_i$ ), si ha che  $f(T) = \lambda_i I$ . Poiché  $N = T - S$ , posto  $g(t) = t - f(t)$ , si ha  $N = g(T)$ .

3. Poiché  $S = f(T)$  e  $N = g(T)$ , se  $W$  è  $T$ -stabile, lo sono chiaramente anche  $S$  e  $N$ . Siano ora  $t = T|_W$ ,  $s = S|_W$  e  $n = N|_W$ . Allora  $t = s + n$ ,  $sn = ns$  e, per il lemma (4.6),  $s$  è semisemplice e  $n$  è nilpotente. Quindi la tesi discende dall'unicità della decomposizione.
4. Se  $L$  è iniettiva (o suriettiva), allora  $V$  è un sottospazio (o un quoziente) di  $V'$ , e la tesi discende dal punto precedente (nel caso del quoziente è analogo considerando la stabilità degli elementi semisemplici e nilpotenti). Nel caso generale, consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{L_1} & V \oplus V' & \xrightarrow{L_2} & V' \\ \downarrow T & & \downarrow T'' = T \oplus T' & & \downarrow T' \\ V & \longrightarrow & V \oplus V' & \longrightarrow & V' \end{array}$$

dove  $L_1: v \mapsto (v, L(v))$  e  $L_2: (v, w) \mapsto w$ . Per commutatività, si ha  $L_1 \circ T_s = T_s'' \circ L_1$  e  $L_2 \circ T_s'' = T_s' \circ L_2$ . Deduciamo quindi che

$$L \circ T_s = L_2 \circ L_1 \circ T_s = L_2 \circ T_s'' \circ L_1 = T_s' \circ L_2 \circ L_1 = T_s' \circ L.$$

Per il caso nilpotente la dimostrazione è analoga.  $\square$

Vale una decomposizione analoga nel caso moltiplicativo, sostituendo elementi nilpotenti con elementi unipotenti.

**Proposizione 4.12.** Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $T$  in  $\text{GL}(V)$ . Allora

1. Esistono e sono uniche  $S$  semisemplice e  $U$  unipotente tali che  $T = SU = US$ , date da  $S = T_S$  e  $U = T_U$
2. Esistono  $f, g$  in  $\mathbb{K}[x]$  tali che  $S = f(T)$  e  $U = g(T)$ .
3. Se  $W$  è un sottospazio  $T$ -stabile di  $V$ , allora  $W$  è  $S$ -stabile e  $U$ -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_u = U|_W.$$

4. Se  $V'$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita,  $T'$  è un endomorfismo di  $V'$  e  $L: V \rightarrow V'$  è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_u = T'_u \circ L.$$

*Dimostrazione.*

Per analogia con la proposizione precedente, ci limitiamo a dimostrare il primo punto. Partendo dalla decomposizione additiva, si ha

$$T = S + N = S(I + S^{-1}N).$$

Poiché  $S^{-1}N$  è nilpotente, l'elemento  $U = I + S^{-1}N$  è unipotente. Mostriamo l'unicità: se  $S'$  e  $U'$  sono tali che  $T = S'U'$ , posto  $U' = I + M$  con  $M$  nilpotente, si ha  $T = S' + S'M$ . Quindi l'unicità discende da quella del caso additivo.  $\square$

Vogliamo ora estendere quanto fatto al caso localmente finito. Ricordiamo che un'applicazione lineare  $T: V \rightarrow V$  è *localmente finita* se per ogni  $v$  in  $V$  esiste un sottospazio  $W$  di  $V$  di dimensione finita contenente  $v$  e  $T$ -stabile.

**Teorema 4.13.** Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e sia  $T: V \rightarrow V$  lineare, invertibile e localmente finita. Allora esistono e sono unici  $S$  semisemplice e  $U$  unipotente tali che  $T = SU = US$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo dapprima l'esistenza. Per ogni  $v$  in  $V$ , sia  $W$  un sottospazio di  $V$  di dimensione finita contenente  $v$  e  $T$ -stabile. Consideriamo la restrizione  $T|_W$  in  $\text{GL}(W)$ . Consideriamo allora gli elementi  $S_W = (T|_W)_s$  e  $U_W = (T|_W)_u$  dati dalla Proposizione (4.12) e definiamo  $S(v) = S_W(v)$ . Osserviamo che  $S(v)$  non dipende dalla scelta di  $W$ . Infatti, se  $W$  è contenuto in un  $W'$ , allora  $S_{W'}|_W = S_W$ . Procedendo in modo analogo per  $U$ , otteniamo l'esistenza.

Osserviamo che  $S$  e  $U$  costruite soddisfano le proprietà 3 e 4 dell'enunciato precedente.

Verifichiamo ad esempio la 4. Mostriamo che, con la notazione della Proposizione (4.12), si ha  $LS = S'L$ . Per ogni  $v$  in  $V$ , consideriamo un sottospazio  $W$  di dimensione finita, contenente  $v$  e  $T$ -stabile. Sia  $W' = L(W)$ . Allora

$$S'(W') = S'L(W) = LS(W) \subseteq L(W) = W'.$$



È quindi sufficiente mostrare che

$$L|_W \circ S|_W(v) = S'|_{W'} \circ L|_W(v),$$

ma ciò segue dal caso di dimensione finita.

Mostriamo ora l'unicità. Assumiamo  $T = su = us$  e mostriamo che  $S = s$  e  $U = u$ . Osserviamo che  $S, U$  commutano con  $s, u$ . Infatti, per il punto 4, sappiamo che  $LS = SL$  e  $LU = UL$ . Allora dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L=s} & V \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ V & \xrightarrow{L=s} & V \end{array}$$

ricaviamo  $Ss = sS$  e  $Us = sU$ . Analogamente troviamo  $Uu = uU$  e  $Su = uS$ . Scriviamo ora  $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}(S)$ . Poiché  $V_{\lambda}(S)$  è stabile per  $U, s, u$ , lo spazio

$$V_{\lambda, \mu}(S, s) = \{v \in V : Sv = \lambda v, sv = \mu v\}$$

è stabile per  $U$  e  $u$ . Supponiamo per assurdo che esistano  $\lambda, \mu$  distinti tali che  $V_{\lambda, \mu} \neq 0$ . Allora, poiché  $U$  e  $u$  sono unipotenti, si ha  $(V_{\lambda, \mu}(S, s))^U \neq 0$  e, poiché  $U$  e  $u$  commutano, si ha anche  $((V_{\lambda, \mu}(S, s))^U)^u \neq 0$ . Scegliendo  $v$  non nullo in  $((V_{\lambda, \mu}(S, s))^U)^u$ , si ottiene  $T(v) = SU(v) = S(v) = \lambda v$ , ma anche  $T(v) = su(v) = s(v) = \mu v$ , contro l'ipotesi che  $\lambda$  e  $\mu$  sono distinti.  $\square$

**Teorema 4.14** (Decomposizione di Jordan). Sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $g$  un elemento di  $G$ . Allora esistono e sono unici  $s, u$  in  $G$  tali che  $s$  è semisemplice,  $u$  è unipotente e  $g = su = us$ .

*Dimostrazione.*

Assumiamo che  $G$  sia un sottogruppo chiuso di  $\mathrm{GL}(W)$ .  $G = V(I)$  con  $I \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ . Mostriamo l'esistenza di  $s$  e  $u$ . Poiché  $g$  è in  $\mathrm{GL}(W)$ , possiamo scrivere (4.12)  $g = su = us$  con  $u$  unipotente e  $s$  semisemplice in  $\mathrm{GL}(W)$  (cioè  $s$  agisce in modo semisemplice su  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$  e  $u$  agisce in modo unipotente su  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ ). In particolare  $g = su$  è la decomposizione di Jordan per l'azione di  $g$  su  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ . Mostriamo che effettivamente  $u$  e  $s$  sono in  $G$  verificando che annullano ogni elemento  $f$  di  $I$ . Osserviamo che  $I$  è stabile per l'azione di  $g$  (e in generale per l'azione di  $G$ ), infatti, per ogni  $h$  in  $G$  si ha  $(gf)(h) = f(g^{-1}h) = 0$ . Poiché  $s$  è la parte semisemplice di  $g$ ,  $s(I)$  è contenuto in  $I$  e se  $f$  è un elemento di  $I$ , si ha  $sf$  è 0 su  $G$ . D'altro canto, valutando sull'elemento neutro  $e$  di  $G$ , troviamo

$$0 = (sf)(e) = f(s^{-1}),$$

dunque  $s^{-1}$  (e quindi  $s$ ) è in  $G$ . L'unicità segue direttamente dal fatto che la decomposizione è unica in  $\mathrm{GL}(W)$ .  $\square$

**Notazione.** Denotiamo  $g_s = s$  e  $g_u = u$ .

**Esercizio 4.15.** Se  $\varphi: G \rightarrow G'$  è un morfismo di gruppi algebrici, allora  $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$  e  $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$ .

**Esercizio 4.16.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo perfetto (assumiamo per l'esercizio  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Consideriamo l'inclusione

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Sia  $G$  un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  definito da un'equazione a coefficienti in  $\mathbb{R}$ . Sia  $G_{\mathbb{R}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ . Consideriamo un elemento  $g$  in  $G_{\mathbb{R}}$ . Mostrare che  $g_s$  e  $g_u$  sono in  $G_{\mathbb{R}}$ .

## 4.3 Gruppi unipotenti

**Definizione 4.17.** Un gruppo  $G$  si dice **unipotente** se ogni suo elemento è unipotente.

**Lemma 4.18.** Se  $G$  è tale che l'unica rappresentazione irriducibile di  $G$  è banale allora  $G$  si immerge nel gruppo delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale, cioè

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Dimostrazione.*

Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita per cui  $G$  è un sottogruppo di  $\text{GL}(V)$ . Sia  $W$  una sottorappresentazione di  $V$  non banale. Allora  $W = \mathbb{K}v_1$  e  $gv_1 = v_1$  per ogni  $g$  in  $G$ . Consideriamo il quoziente  $V_1 = V/\langle v_1 \rangle$ . Allora esiste  $v_2$  in  $V$  tale che per ogni  $g$  in  $G$  si ha  $gv_2 \equiv v_2 \pmod{V_1}$ . Procedendo in questo modo, possiamo scegliere una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$ , rispetto alla quale risulta chiaramente  $G \subseteq U_n$ .  $\square$

**Teorema 4.19.** Sia  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso,  $V$  spazio vettoriale di dimensione finita,  $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  che sia una  $\mathbb{K}$ -algebra associativa. Se  $V$  è un  $A$ -modulo semplice allora  $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ . Se  $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$  allora vogliamo mostrare che  $Av = V^n$ .

Poiché  $V$  è semplice,  $V^n$  è somma di rappresentazioni semplici, quindi per la proposizione (1.32) si ha che  $V^n$  è semisemplice e quindi completamente riducibile. Possiamo allora scrivere  $V^n = Av \oplus P$  per  $P$  un  $A$ -sottomodulo. Sia  $\pi_P : V^n \rightarrow V^n$  la proiezione su  $P$  e notiamo che essa ammette una decomposizione a blocchi

$$\pi_P = (\alpha_{ij})_{i,j} \quad \text{per degli endomorfismi } \alpha_{ij} : V \rightarrow V$$

dove il dominio di  $\alpha_{ij}$  è la  $j$ -esima copia di  $V$  in  $V^n$  e il codominio è l' $i$ -esima copia.

Quindi  $\alpha_{ij} \in \text{End}_A(V)$  con  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso. Per il lemma di Schur (1.26) questi endomorfismi sono le costanti.

Ricordando che  $V^n = Av \oplus P$ , si ha necessariamente  $\pi_P(v) = 0$  per definizione di  $\pi_P$ , quindi per ogni  $i$  abbiamo  $\sum \alpha_{ij}v_j = 0$ . Poiché gli  $v_j$  sono una base e gli endomorfismi  $\alpha_{ij}$  sono costanti, per indipendenza lineare questo significa che per ogni  $i$  e ogni  $j$  si ha  $\alpha_{ij} = 0$ . Segue dunque che  $\pi_P = 0$  e quindi  $P = \text{Imm } \pi_P = \{0\}$ , cioè  $V^n = Av$ .  $\square$

**Esercizio 4.20.** Trova un controesempio per  $\mathbb{K}$  non algebricamente chiuso.

**Teorema 4.21.** Un gruppo  $G$  è unipotente se e solo se l'unica rappresentazione irriducibile di  $G$  è quella banale.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni

$\Leftarrow$  Se  $G$  ha questa proprietà allora per il lemma (4.18) abbiamo

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e chiaramente un gruppo di questa forma è unipotente.

$\Rightarrow$  Sia  $V$  una rappresentazione semplice di  $G$  di dimensione  $n$ . Allora  $\text{tr}(g_V) = n$  per ogni  $g \in G$  (perché si immerge nelle triangolari superiori), quindi

$$\forall g_V, h_V \in G, \quad \text{tr}((g_V - 1)h_V) = \text{tr}(g_V h_V - h_V) = 0.$$

Se  $A$  è il  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale generato da  $G$ ,  $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  ed è un'algebra associativa. Poiché  $V$  è semplice per  $A$  (in quanto semplice per  $G$  e  $A = \text{Span}_{\mathbb{K}}(G)$ ), si ha per il teorema (4.19) si ha  $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

Segue per linearità della traccia che  $\text{tr}((g_V - 1)a) = 0$  per ogni  $a \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$ , da cui  $(g_V - 1) = 0$ , cioè  $G$  agisce banalmente.

□

**Corollario 4.22.** Se  $G$  è unipotente, allora è contenuto nel gruppo  $U_n$  delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale principale.

**Osservazione 4.23.** Consideriamo il gruppo  $(\mathbb{C}, +)$ . Questo è un gruppo unipotente perché possiamo vederlo in  $\text{GL}(2)$  tramite la rappresentazione

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche una rappresentazione data da

$$\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}(1), \quad x \mapsto e^{\alpha x}.$$

La differenza tra i due casi è che da una rappresentazione  $V$  non possiamo costruire tutte le funzioni di  $C^\infty(\mathbb{C})$ , ma solo quelle di  $\mathbb{C}[G]$  (con  $G = \mathbb{C}$ ).

**Corollario 4.24.** Se  $V$  è una rappresentazione di  $G$  non nulla allora  $V^G \neq 0$ .

**Corollario 4.25.** Se  $G$  è unipotente allora  $G$  è nilpotente come gruppo, cioè definiamo iterativamente  $G^{(0)} = G$  e  $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G]$  allora esiste  $n$  tale che  $G^{(n)} = \{id_G\}$ .

*Dimostrazione.*

Basta immergere  $G$  in  $U(n)$  e notare che sottogruppi di triangolari superiori con 1 sulla diagonale hanno questa proprietà.  $\square$

**Esempio 4.26.** Il gruppo  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = C_p$  con  $\text{char } \mathbb{K} = p$  è un gruppo unipotente, perché si può scrivere come

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

**Osservazione 4.27.** Se  $G = U(n)$  con  $\text{char } \mathbb{K} = p$  allora  $g^{p^n} = id_G$ .

### 4.3.1 Esponenziale e logaritmo

**Notazione.** Definiamo lo spazio vettoriale

$$N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Definizione 4.28** (Esponenziale). Definiamo la mappa **esponenziale**

$$\exp : \begin{array}{ccc} N(n) & \longrightarrow & U(n) \\ M & \longmapsto & \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} M^i \end{array}.$$

**Osservazione 4.29.** La mappa esponenziale appena definita è algebrica. Inoltre rispetta le usuali proprietà:

- $\exp((\lambda + \mu)M) = \exp(\lambda M) \exp(\mu M)$
- Se  $M_1 M_2 = M_2 M_1$  allora  $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1) \exp(M_2)$ .

**Definizione 4.30** (Logaritmo). Definiamo la mappa **logaritmo**

$$\log : \begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & N(n) \\ B & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} (M - I_n)^i \end{array}.$$

**Osservazione 4.31.**  $\log$  e  $\exp$  sono mappe algebriche e inverse. Sono anche in realtà la definizione usuale, solo che per matrici in  $N(n)$  e  $U(n)$  queste somme finite coincidono con la definizione in serie.

**Notazione.** Se  $G \subseteq U(n)$  definiamo  $X = \log(G)$  e notiamo che  $X$  è isomorfo a  $G$  come varietà.

**Proposizione 4.32.** Se  $g \in G \setminus \{id_G\}$  allora, ponendo

$$\overline{\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = H \subseteq G,$$

si ha  $H \cong \mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $g \neq id_G$ ,  $\log g = x \neq 0$ , inoltre  $\log(g^n) = nx$ . Notiamo dunque che da  $nx \neq 0$  per ogni  $n$  ricaviamo  $g^n \neq 1_G$  per ogni  $n$ . Se  $Y = \mathbb{K}x$  allora

$$\log(H) = \log(\overline{\{g^n\}}) = \overline{\{nx\}} \subseteq Y$$

Poiché  $Y$  è una retta e  $\{nx\}$  sono infiniti,  $\overline{nx} = Y$  per come sono fatti i chiusi di Zariski di  $\mathbb{A}^1$ , quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\longrightarrow H = \exp(Y) \\ \lambda &\longmapsto \exp(\lambda x) \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi tra  $\mathbb{K}$  e  $H$ . □

**Esercizio 4.33.** Se  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  e  $G$  unipotente abeliano allora  $G \cong \mathbb{K}^n$ .

**Fatto 4.34.** Se  $\text{char } \mathbb{K} = p$  e  $g^p = id$  per ogni  $g \in G$  abeliano connesso allora  $G$  è unipotente e  $G \cong \mathbb{K}^n$ .

**Esempio 4.35.** Se  $\text{char } \mathbb{K} = p$  poniamo  $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{p} \binom{p}{i}$  per  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  e definiamo  $\alpha_i$  come l'immagine di  $\tilde{\alpha}_i$  in  $\mathbb{K}$ .

Definiamo<sup>1</sup>

$$c: \begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i a^i b^{p-1-i} \end{aligned}$$

e notiamo che

$$c(a, b)c(a+b, c) = c(b, c)c(a, b+c) \implies c(a, 0) = c(a, b) = 0,$$

quindi se  $G = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  con prodotto

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + c(a, a'))$$

allora  $G$  è unipotente e  $G \cong \mathbb{K}^2$  come gruppo.

(QUESTO DOVREBBE ESSERE UN CONTROESEMPIO DI QUALCOSA???)

## 4.4 Gruppi completamente riducibili

**Definizione 4.36.** Un gruppo è **completamente riducibile** se ogni sua rappresentazione regolare è semisemplice.

**Osservazione 4.37.** Basta anche chiedere “ogni rappresentazione regolare *finita* è semisemplice”.

**Osservazione 4.38.**  $G$  è completamente riducibile se e solo se  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice.

*Dimostrazione.*

$\mathbb{K}[G]$  è una rappresentazione regolare di  $G$  quindi una implicazione è ovvia. Se  $V$  ha dimensione  $n$  e  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice allora per l'immersione (4.7)  $V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^m$  si ha che  $V$  è semisemplice (4.6). □

<sup>1</sup>moralmente  $c(a, b) = \frac{(a+b)^p - a^p - b^p}{p}$ , che non potremmo fare direttamente in  $\mathbb{K}$  per l'identità del binomio ingenuo

**Definizione 4.39.** Un gruppo  $G$  è un **toro (algebrico)** se  $G \cong (\mathbb{G}_m)^n$ .

**Osservazione 4.40.** Ricordando che  $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$  notiamo che

$$\mathbb{K}[\mathbb{G}_m^n] = \mathbb{K}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

Questo spazio ha una base data da  $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$  per  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ .

**Proposizione 4.41** (Tori algebrici sono semisemplici). Se  $G$  toro algebrico allora  $G$  è semisemplice.

*Dimostrazione.*

Se  $g = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $h = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  sono elementi di  $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{K}^\times)^n$  si ha che

$$\begin{aligned} (gt^\alpha)(h) &= t^\alpha(g^{-1}h) = t^\alpha(\lambda_1^{-1}\mu_1, \dots, \lambda_n^{-1}\mu_n) = \\ &= (\lambda_1^{-1}\mu_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_n^{-1}\mu_n)^{\alpha_n} = \\ &= \lambda^{-\alpha} \mu^\alpha = \\ &= (\lambda^{-\alpha} t^\alpha)h. \end{aligned}$$

Segue che  $gt^\alpha = \lambda^{-\alpha} t^\alpha$  e che quindi i  $t^\alpha$  sono autovettori per ogni  $g \in G$ . Poiché

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K}t^\alpha$$

e ogni  $\mathbb{K}t^\alpha$  è semisemplice, segue (4.6) che  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice.

Quindi le rappresentazioni semplici di  $G$  sono di dimensione 1 e sono date da  $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}t^{-\alpha}$  con  $gz = t^\alpha(g)z$  □

**Lemma 4.42.** Se  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$  allora  $G$  è completamente riducibile se e solo se  $V^{\otimes n}$  è semisemplice per ogni  $n$

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

$\Rightarrow$  Ovvio

$\Leftarrow$  La dimostrazione è del tutto analoga a quella esposta per il lemma (4.10). Dimostriamo che  $\mathbb{K}[G]$  è semisemplice. Dato il morfismo  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \rightarrow \mathbb{K}[G]$  basta mostrare che  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$  è semisemplice. Scriviamo

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}].$$

$\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$  è un quoziente di somme di rappresentazioni della forma  $(V^*)^{\otimes m}$  e quindi è quoziente di  $(V^* \oplus \cdots \oplus V^*)^{\otimes m}$  e dato che  $V^*$  è semisemplice ho finito. □

**Corollario 4.43.** Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  è tale che se  $g \in G$  allora  $\bar{g} \in G$ , allora  $G$  è completamente riducibile.

*Dimostrazione.*

Sia  $V = \mathbb{C}^n$  e dimostriamo che  $V^{\otimes m}$  è semisemplice per ogni  $m$ , cioè che per ogni  $U \subseteq V^{\otimes m}$  che sia  $G$ -stabile esiste  $W$   $G$ -stabile tale che  $V^{\otimes m} = U \oplus W$ .

Consideriamo il caso  $m = 1$ . Definiamo la forma hermitiana

$$h((x_i)(y_i)) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Se  $U \subseteq V$ , poniamo  $W = U^\perp$  rispetto a questa forma. Chiaramente  $V = U \oplus U^\perp$ , quindi vogliamo mostrare che  $U$   $G$ -stabile implica  $U^\perp$   $G$ -stabile.

$$h(gw, u) = \overline{w}^\top \bar{g}^\top u = h(w, \underbrace{\bar{g}^\top u}_{\in U}) \stackrel{w \in U^\perp}{=} 0.$$

Per il caso generale l'idea è la stessa ma usiamo

$$h_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^m h(v_i, u_i).$$

Si conclude usando la tesi per  $h$ . □

**Esempio 4.44.** Sia  $G \in \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{O}(n)\}$ , allora  $G$  è completamente riducibile. Per  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$  questo è ovvio. Per  $\mathrm{O}(n) = \{g^\top g = id\}$  basta mostrare che se  $g^\top g = id$  allora  $\bar{g}^\top \bar{g} = id$ , ma questo è chiaro.

Anche  $\mathrm{SO}(n)$  e  $\mathrm{S}_p(2n)$  hanno questa proprietà, dove

$$\mathrm{S}_p(2n) = \{g \mid gJg^\top = J\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 4.45.** Sia  $\mathrm{char} \mathbb{K} = p = 2$  e consideriamo  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ . Esso ammette una rappresentazione semplice  $V = \mathbb{K}^2$ . Sia  $x, y$  una base di  $V$  e consideriamo l'azione data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = ax + by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y = cx + dy.$$

Consideriamo ora  $S^2V = \langle X^2, xy, y^2 \rangle$ . Per questioni di caratteristica 2,  $gx^2 = (gx)^2$ . Notiamo allora che  $W = \langle x^2, y^2 \rangle$  è una sottorappresentazione di  $S^2V$  che non ammette un complementare.

**Esercizio 4.46.** Se  $\mathrm{char} \mathbb{K} = p$  allora  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$  e  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  non sono completamente riducibili.

**Proposizione 4.47.** Se  $G$  è completamente riducibile allora  $G$  non ha sottogruppi unipotenti normali non banali.



*Dimostrazione.*

Sia  $W$  tale che  $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$  (definizione di gruppo algebrico lineare).

Sia  $V$  una rappresentazione irriducibile di  $G$  e sia  $U \subseteq G$  un sottogruppo normale unipotente. Poiché  $V \neq (0)$  e  $U$  unipotente,  $V^U \neq 0$  per il corollario (4.24). Poiché  $U$  è normale  $V^U$  è stabile per  $G$  e quindi  $V^U = V$ , cioè  $U$  agisce banalmente su tutte le rappresentazioni irriducibili. Questo mostra che per la mappa  $G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  si ha che  $U$  finisce in  $\{id_W\}$  perché  $G$  è completamente riducibile, ma questa mappa è iniettiva e quindi  $U = \{1_G\}$ .  $\square$

**Definizione 4.48** (Caratteri di un gruppo). Dato un gruppo algebrico  $G$  definiamo un **carattere** di  $G$  come un omomorfismo di gruppi

$$\alpha : G \rightarrow \mathrm{GL}(1) = \mathbb{K}^\times.$$

L'insieme dei caratteri  $X(G)$  forma un gruppo abeliano:

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) = \beta(g)\alpha(g) = (\beta\alpha)(g).$$

**Teorema 4.49.** Sia  $G$  un gruppo abeliano connesso completamente riducibile, allora  $G$  è un toro algebrico.

*Dimostrazione.*

Notiamo che ogni elemento di  $G$  è semisemplice: se  $g \in G$  allora per la decomposizione di Jordan (4.12) si ha  $g = su$  con  $u$  unipotente in  $G$ . Poiché  $G$  è abeliano,  $\langle u \rangle$  è un suo sottogruppo normale, quindi per la proposizione sopra (4.47) si ha che  $\langle u \rangle = \{1_G\}$ , cioè  $u = 1_G$ . Dunque  $g = s1_G = s$ , cioè  $g$  è semisemplice.

Poiché  $G$  è abeliano, gli elementi commutano. Dato che ogni elemento è semisemplice (cioè in ogni rappresentazione è diagonalizzabile), si ha che per ogni rappresentazione esiste una base di autovettori dove ogni elemento di  $G$  è *simultaneamente* diagonalizzabile. In particolare le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.

Consideriamo allora una decomposizione di  $\mathbb{K}[G]$  che rende ogni elemento di  $G$  diagonalizzabile

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$$

dove  $\mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$  sono le funzioni regolari  $f$  tali che  $gf = \alpha(g)f$ . Notiamo che

$$\alpha(gh)f = (gh)f = g(hf) = g(\alpha(h)f) = \alpha(h)gf = \alpha(h)\alpha(g)f$$

quindi  $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ . Questo ci permette di identificare questa decomposizione con

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in X(G)} V_\alpha, \quad \text{dove } V_\alpha = \{f \in \mathbb{K}[G] \mid gh = \alpha(g)h\}.$$

Per ogni carattere  $\alpha \in X(G)$  definiamo  $f_\alpha = \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times) \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}) = \mathbb{K}[G]$ . Sfruttando il fatto che  $\alpha$  è un omomorfismo si ha  $f_\alpha \in V_\alpha$ , infatti

$$\begin{aligned} (gf_\alpha)(x) &= f_\alpha(g^{-1}x) = \alpha^{-1}(g^{-1}x) = (\alpha(g^{-1}x))^{-1} = \\ &= (\alpha(g)^{-1}\alpha(x))^{-1} = (\alpha(x))^{-1}\alpha(g) = \\ &= \alpha(g)\alpha^{-1}(x) = \\ &= \alpha(g)f_\alpha(x). \end{aligned}$$

Se  $h$  ha carattere  $\alpha$ , cioè  $gh = \alpha(g)h$ , allora per ogni  $g \in G$

$$\frac{h(1_G)}{f_\alpha(1_G)} = \frac{\alpha(g^{-1})h(1_G)}{\alpha(g^{-1})f_\alpha(1_G)} = \frac{g^{-1}h(1_G)}{g^{-1}f_\alpha(1_G)} = \frac{h(g1_G)}{f_\alpha(g1_G)} = \frac{h(g)}{f_\alpha(g)},$$

cioè  $h$  è un multiplo di  $f_\alpha$  (in particolare  $n_\alpha = 1$  nella scrittura sopra).

Mostriamo che  $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$  per qualche  $n$  mostrando che è un gruppo abeliano finitamente generato libero da torsione:

fin.gen. Sappiamo che  $\mathbb{K}[G]$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata quindi consideriamo dei generatori  $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_m}$ . Come  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale,  $\mathbb{K}[G]$  è generato da elementi della forma

$$f_{\alpha_1}^{n_1} \dots f_{\alpha_m}^{n_m},$$

il quale ha carattere  $\prod \alpha_i^{n_i}$ . Questo mostra che i caratteri  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sono dei generatori di  $X(G)$ .

tor.free E Per assurdo supponiamo  $\alpha^N = 1$  ma  $\alpha \neq 1$ , cioè  $\alpha(g)^N = 1$  per ogni  $g \in G$ . Notiamo che

$$G = \coprod_{\omega \text{ t.c. } \omega^N=1} \{g \mid \alpha(g) = \omega\},$$

ma poiché  $G$  è connesso, questa unione disgiunta deve consistere di un solo termine, mostrando che  $\alpha$  assume solo il valore 1 contraddicendo le ipotesi.

Abbiamo quindi mostrato che  $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$ . Sia  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  una sua base. Se scriviamo  $x_i = f_{\alpha_i}$  troviamo

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \langle f_\alpha \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

e in questa decomposizione il prodotto è esattamente quello che ci aspetteremmo. Se scriviamo  $\alpha = \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}$  allora  $f_\alpha = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ , dunque abbiamo proprio mostrato che

$$\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{K}[(\mathbb{K}^\times)^n].$$

Essendo sia  $G$  che  $(\mathbb{K}^\times)^n$  affini questo mostra che sono isomorfi. □

## Capitolo 5

# Quozienti

### 5.1 Costruzione dei quozienti

**Lemma 5.1.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e  $H$  sottogruppo di  $G$ , allora

1. Esistono una rappresentazione di dimensione finita  $V$  di  $G$  e una retta  $L \subseteq V$  tali che  $H = \text{stab}_G L = \{g \in G \mid g(L) = L\}$
2. Se  $H$  è normale allora  $V$  si può scegliere in modo che sia somma dei  $V_\alpha$  per  $\alpha \in X(H)$  e  $V_\alpha = \{v \in V \mid h \cdot v = \alpha(h)v\}$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo le due affermazioni

1. Sia  $I_H \subseteq \mathbb{K}[G]$  l'ideale che definisce  $H$ , allora

$$H = \{g \in G \mid g(I_H) = I_H\}$$

$\subseteq$  Se  $g \in H$  e  $f \in I_H$  allora  $gf(k) = f(g^{-1}k)$ , quindi se  $k \in H$  allora  $g^{-1}k \in H$  e quindi questa funzione vale 0, cioè  $gf \in I_H$ . L'altra inclusione segue dallo stesso ragionamento fatto su  $g^{-1}$ .

$\supseteq$  Se  $g^{-1}(I_H) \subseteq I_H$  allora per ogni  $f \in I_H$

$$f(g) = \underbrace{(g^{-1}f)(e)}_{\in I_H} = 0$$

cioè  $g \in H$ .

Consideriamo ora dei generatori  $f_1, \dots, f_m$  per  $I_H$  e sia  $V_0 \subseteq \mathbb{K}[G]$  una  $G$ -sotto-rappresentazione di dimensione finita che contiene ogni  $f_i$ . Consideriamo il sottospazio vettoriale  $W_0 = I_H \cap V_0$  e notiamo che

$$H = \{g \in G \mid g(W_0) = W_0\}.$$

$\subseteq$  Ovvio per quanto detto sopra.

$\supseteq$  Se  $g(W_0) = W_0$  allora  $g(I_H) = I_H$ , infatti  $g(I_H) \subseteq I_H$  ovvio per costruzione di  $W_0$ , l'altra inclusione segue dal fatto che  $g(W_0) = W_0 \iff g^{-1}(W_0) = W_0$ .

Sia  $\dim W_0 = m$ . Poniamo

$$V = \bigwedge^m V_0, \quad L = \bigwedge^m W_0 \subseteq \bigwedge^m V_0.$$

Per concludere basta mostrare che

$$H = \{g \in G \mid g(L) = L\}$$

$\boxed{\subseteq}$  Se  $g(W_0) = W_0$  allora chiaramente

$$g(L) = g\left(\bigwedge^m W_0\right) = \bigwedge^m g(W_0) = \bigwedge^m W_0 = L.$$

$\boxed{\supseteq}$  Notiamo che se  $u_1, \dots, u_m$  è una base di  $U \subseteq V$  sottospazio vettoriale allora

$$U = \{u \in V \mid u \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_m = 0\}.$$

Fissiamo una base  $w_1, \dots, w_m$  di  $W_0$  e osserviamo che  $gw_1, \dots, gw_m$  è una base di  $g(W_0)$ . Se  $g(L) = L$  allora per definizione

$$\langle gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m \rangle = \langle w_1 \wedge \dots \wedge w_m \rangle,$$

quindi per il criterio appena citato si ha che

$$\begin{aligned} W_0 &= \{v \in V \mid v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_m = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid v \wedge gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m = 0\} = g(W_0). \end{aligned}$$

2. Sia  $V' = \bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha \subseteq V$  con  $V$  di prima. Mostriamo che  $V'$  è  $G$ -invariante: Se  $v_\alpha \in V_\alpha$  per  $\alpha \in X(H)$ ,  $h \in H$  e  $g \in G$  allora

$$h \cdot (gv_\alpha) = (gg^{-1}hg) \cdot v_\alpha = g(\alpha(g^{-1}hg)v_\alpha) = \alpha(g^{-1}hg)gv_\alpha,$$

cioè  $gv_\alpha$  è un autovettore per l'azione di  $h$  per un qualsiasi  $g \in G$  e  $h \in H$ , ovvero  $V'$  è  $G$ -invariante.

Per concludere è dunque sufficiente mostrare che  $L \subseteq V'$ , ma abbiamo già visto che

$$g(w_1 \wedge \dots \wedge w_m) = gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m = \lambda(g)w_1 \wedge \dots \wedge w_m$$

per qualche  $\lambda(g)$  per ogni  $g \in H$ , quindi  $L \subseteq V_\lambda$ .

□

Siano  $H < G$  e  $L, V$  come nel lemma. Allora  $L \in \mathbb{P}(V)$  per definizione di spazio proiettivo. Definiamo la varietà proiettiva

$$Y = \overline{G \cdot L} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

e scriviamo  $X = G \cdot L$ . Mostriamo che  $X$  è aperto: data la mappa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Y \\ g & \longmapsto & gL \end{array},$$

per Chevalley (3.17) si ha che  $X$  contiene un aperto  $U$  di  $Y$ . Se  $x \in U \subseteq X$  allora  $gx \in gU \subseteq X$  quindi

$$X = \bigcup_{g \in G} gU \text{ è aperto.}$$

Insiemeisticamente si ha  $X = G \cdot L = G / \text{stab}_G(L) = G/H$ , quindi prendere la chiusura è in un qualche modo il minimo indispensabile per rendere  $G/H$  una varietà.

**Esercizio 5.2.** Sia  $G = \mathrm{GL}(2)$  e  $H = B(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ . Sia  $V = \mathbb{K}^2$  e  $L = \mathbb{K}e_1$ , allora effettivamente  $H = \mathrm{stab}_G(L)$  e  $G \cdot L = \mathbb{P}(V)$  (ogni retta si ottiene da  $L$  applicando una trasformazione lineare), quindi  $G/H \leftrightarrow \mathbb{P}(V)$ .

**Esercizio 5.3.** Sia  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  e  $H = O(n, \mathbb{C})$ . Sia  $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$  lo spazio delle matrici simmetriche. Se  $A \in V$  e  $g \in G$  agisce su  $A$  tramite

$$g \cdot A = gAg^\top$$

allora  $H = \mathrm{stab}_G(I_n)$  (stabilizzatore della matrice identità).

$$X = G \cdot I_n = \{gg^\top \mid g \in \mathrm{GL}(n)\} = \{A \in \mathrm{Sym}(n) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq \overline{G \cdot I_n} = Y \subseteq \mathbb{P}(V).$$

**Proposizione 5.4.** Se  $H$  è normale,  $G/H$  è un gruppo algebrico affine.

*Dimostrazione.*

Costruiamo  $L$  e  $V = \bigoplus V_\alpha$  come nel punto 2. del lemma (5.1). Sia

$$W = \{T : V \rightarrow V \mid \forall \alpha \in X(H), T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha\}$$

e notiamo che  $G$  agisce su  $W$  come  $gT = g \circ T \circ g^{-1}$ . Per rendere valido quanto detto dobbiamo verificare che  $gTg^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha$ , ma questo segue dal fatto che se  $g^{-1}(V_\alpha) = V_\beta$  allora

$$gTg^{-1}(V_\alpha) = gT(V_\beta) \subseteq gV_\beta = V_\alpha.$$

Notiamo ora che

$$\left\{ g \in G \mid g|_W = id_W \right\} = \left\{ g \in G \mid g|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha} \forall \alpha \in X(H) \right\} = H,$$

la seconda uguaglianza segue dalla definizione di carattere mentre la prima si ricava osservando le matrici associate agli elementi di  $g$  visti come automorfismi di  $V$ : gli elementi di  $W$  sono diagonali a blocchi e ciò che commuta<sup>1</sup> con tutte le diagonali a blocchi sono le cose che sono multiplo di identità su ogni blocco.

Abbiamo dunque costruito un omomorfismo di gruppi algebrici  $\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  il cui nucleo è  $H$ . Poiché  $\varphi(G)$  è un sottogruppo chiuso di  $\mathrm{GL}(W)$  per Chevalley (3.19) si ha che  $G/H \cong \varphi(G)$  eredita la struttura di gruppo algebrico lineare da  $\varphi(G)$ .  $\square$

**Osservazione 5.5.** Se  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e  $\pi : G \rightarrow X = G \cdot L$ , allora  $\pi$  è  $G$ -equivariante e induce una bigezione tra  $G/H$  e  $X$ .

Nel seguito supporremo  $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ .

<sup>1</sup> $g|_W = id_W$  significa che per ogni  $T \in W$   $gTg^{-1} = T$ , cioè  $gT = Tg$ .

**Proposizione 5.6.** Se  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e  $\pi: G \rightarrow X$  una mappa  $H$ -equivariante, valgono le seguenti proprietà.

1. Per ogni varietà  $Z$ , la mappa

$$G \times Z \xrightarrow{(\pi, id)} X \times Z$$

è aperta.

2. Per ogni aperto  $U$  di  $X$ , si ha un isomorfismo

$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U)))^H.$$

*Dimostrazione.*

Notiamo che  $\pi: G \rightarrow X$  induce una bigezione insiemistica tra  $G/H$  e  $X$ . Poiché per ogni varietà  $Z$  la mappa  $(\pi, id): G \times Z \rightarrow X \times Z$  è liscia ( $\pi$  è liscia), tale mappa è anche aperta (2.60).

Sia  $U$  un aperto di  $X$ , poniamo  $V = \pi^{-1}(U)$ , e consideriamo la mappa

$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_G(V)^H.$$

Osserviamo che tale mappa è iniettiva, infatti se  $f(\pi(x)) = 0$  per ogni  $x$  in  $V = \pi^{-1}(U)$ , si ha  $f(y) = 0$  per ogni  $y$  in  $U$ , per cui  $f = 0$ .

Mostriamo che la mappa  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  è surgettiva. Posso ridurmi al caso  $U$  irriducibile:

In  $G$  le componenti connesse coincidono con le componenti irriducibili (3.15). Lo stesso vale per  $X$ , infatti se  $G^0$  è la componente connessa di  $1_G$  allora da  $X = G/H$  troviamo che  $X^0 = G^0/H \cap G^0$  è aperto e  $X$  è unione finita disgiunta dei traslati di  $X^0$  ( $G$  ha finite componenti irriducibili per Noetherianità).

Se  $U$  è un aperto di  $X$  allora

$$X = X^0 \sqcup g_1 X^0 \sqcup \dots \sqcup g_n X^0 \implies U = U \cap X^0 \sqcup \dots \sqcup U \cap g_n X^0.$$

Poiché  $X^0$  irriducibile i suoi aperti sono irriducibili, quindi per località della verifica di surgettività sui pullback per aperti di  $X^0$ , ci siamo quindi ricondotti al caso  $X$  e  $U$  irriducibili.

Sia  $f: V \rightarrow \mathbb{K}$  regolare  $H$ -equivariante e consideriamo il grafico  $\Gamma(f) \subseteq V \times \mathbb{K}$ . Sia  $g$  la fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & U = V/H \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

Decomponiamo  $V$  in irriducibili  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$  e per irriducibilità di  $U$  deve essere il caso che  $H$  agisce transitivamente su  $\{V_1, \dots, V_n\}$ .

Per il punto 1.,  $(\pi, id): G \times \mathbb{K} \rightarrow X \times \mathbb{K}$  è una mappa aperta, quindi la restrizione  $\psi: V \times \mathbb{K} \rightarrow U \times \mathbb{K}$  resta aperta perché  $V \times \mathbb{K}$  è un aperto di  $G \times \mathbb{K}$ . Segue che<sup>2</sup>  $\psi(\Gamma(f)) = \Gamma(g)$  è un chiuso di  $U \times \mathbb{K}$ . In realtà notando che  $\Gamma(g)$  è  $H$  invariante e che esso è immagine di  $\Gamma(f) = \bigsqcup \Gamma(f) \cap V_i$  si ha che in realtà possiamo scrivere  $\Gamma(g)$

<sup>2</sup>Se  $(v, f(v)) \in \Gamma(f)$  allora  $\psi(v, f(v)) = (\pi(v), f(v)) = (\pi(v), g(\pi(v)))$ .

solo come immagine di un singolo  $\Gamma(f) \cap V_i$ , in particolare è irriducibile (altrimenti potremmo decomporre  $V$  ulteriormente).

Consideriamo ora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(g) & \hookrightarrow & U \times \mathbb{K} \\ & \searrow q & \downarrow p_U \\ & & U \end{array}$$

dove  $p_U$  è la proiezione su  $U$  e  $q$  è la restrizione a  $\Gamma(g)$ . Chiaramente  $q$  è regolare in quanto composizione di regolari.  $q$  è anche bigettiva perché  $(u, g(u)) \mapsto u$  può essere facilmente invertita. Poiché  $U$  è liscio e  $\Gamma(g)$  irriducibile, per il teorema di Zariski (2.57) si ha che  $q$  è un isomorfismo, quindi la mappa  $u \mapsto (u, g(u))$  un morfismo e in particolare  $g$  stesso è un morfismo. Questo mostra che  $\pi^*$  effettivamente è surgettiva perché abbiamo trovato  $g \in \mathcal{O}_X(U)$  tale che  $\pi^*(g) = g \circ \pi = f$ .  $\square$

**Teorema 5.7.** Per ogni  $G$ -varietà  $Y$  e per ogni  $y_0$  in  $Y$  tale che  $H$  è contenuto in  $\text{stab}_G(y_0)$ , vale la seguente proprietà: se  $\varphi: G \rightarrow Y$  è la mappa definita da  $\varphi(g) = gy_0$ , allora esiste un'unica  $\psi: X \rightarrow Y$  tale che  $\psi \circ \pi = \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & X \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \psi \\ & & Y \end{array}$$

*Dimostrazione.*

Insiemeisticamente, la mappa  $\psi: gH \mapsto gy_0$  è definita. Inoltre  $\psi$  è continua: se  $U$  è un aperto di  $Y$ , allora

$$\psi^{-1}(U) = \pi(\pi^{-1}(\psi^{-1}(U))) = \pi(\varphi^{-1}(U)),$$

che è aperto. Dato un aperto  $U$  di  $Y$ , verifichiamo che l'immagine della mappa

$$\psi^*: \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \text{Hom}_{(\text{Set})}(\psi^{-1}(U), \mathbb{K})$$

è contenuta nell'insieme delle funzioni regolari su  $X$ . Consideriamo una funzione  $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ . Allora  $\tilde{f} := f \circ \psi \circ \pi = f \circ \varphi$  è in  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$  in quanto  $\varphi$  è un morfismo di varietà. Mostriamo che in realtà è in  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))^H$ . Sia  $\lambda$  in  $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$  e sia  $h$  in  $H$ . Allora per ogni  $x$  in  $G$  si ha

$$(h\tilde{f})(x) = \tilde{f}(xh) = f(\varphi(xh)) = f(xhy_0) = f(xy_0) = f(\varphi(x)) = \tilde{f}(x).$$

$\square$

**Definizione 5.8.** Una varietà è **omogenea** rispetto al gruppo  $G$  se l'azione di  $G$  su  $X$  è transitiva.

**Corollario 5.9.** Se  $X$  è una varietà omogenea rispetto a  $G$ , allora  $X$  è liscia.

*Dimostrazione.*

Poiché  $X$  ha un aperto  $U$  di punti lisci, la tesi segue dal fatto che  $X = \bigcup_{g \in G} gU$ .  $\square$

**Corollario 5.10.** Se  $X$  e  $Y$  sono varietà omogenee per  $G$  e  $\varphi: X \rightarrow Y$  è  $G$ -equivariante, allora  $\varphi$  è liscia.

*Dimostrazione.*

Sicuramente  $\varphi$  è surgettiva, perché  $X$  e  $Y$  sono varietà omogenee per  $G$  e  $\varphi$  è  $G$ -equivariante. Per il teorema (2.59) esiste un aperto non vuoto  $U$  di  $Y$  tale che  $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$  è liscia. Allora si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(gU) & \xrightarrow{\varphi|_{g\varphi^{-1}(U)}} & gU \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}} & U \end{array}$$

Poiché  $Y = \bigcup gU$ ,  $\varphi$  è liscia in ogni punto e quindi è liscia.  $\square$

## 5.2 Sottogruppi generati e contenimenti

**Lemma 5.11.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e siano  $X_i$  delle varietà irriducibili. Siano  $\varphi_i: X_i \rightarrow G$  tali che  $1_G \in \text{Imm } \varphi_i$  per ogni  $i$ . Poniamo  $Y_i = \varphi_i(X_i)$ . Sia  $H = \langle \{Y_i\}_i \rangle$  il sottogruppo generato dalle immagini delle  $\varphi_i$ . Allora

1.  $H$  è chiuso
2. esistono  $i_1, \dots, i_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  tali che

$$H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{i_n}^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_j \in \{1, -1\}$$

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $X_i = Y_i \subseteq G$  e supponiamo che tra le  $X_i$  compaiano anche le  $X_i^{-1}$  (così evitiamo gli  $\varepsilon$ ).

Definiamo iterativamente

$$\begin{array}{ll} Z_1 = X_1, & W_1 = \overline{Z_1}, \\ Z_2 = X_1 \cdot X_2, & W_2 = \overline{Z_2}, \\ \vdots & \vdots \\ Z_n = X_1 \cdots X_n, & W_n = \overline{Z_n}, \\ Z_{n+1} = X_1 \cdots X_n X_1, & W_{n+1} = \overline{Z_{n+1}}, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$



Notiamo che  $Z_i$  è l'immagine di  $X_1 \times \cdots \times X_i \rightarrow G$ , quindi  $Z_i$  è irriducibile per ogni  $i$ , dunque anche  $W_i = \overline{Z_i}$  è irriducibile.

Notiamo ora che  $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq G$  è una catena di chiusi, ma dato che  $G$  ha dimensione finita essa stabilizza, cioè esiste  $N$  tale che  $W_N = W_{N+1}$ , ovvero  $W_N \cdot X_i \subseteq W_N$  per ogni  $i$ .

Allora  $W_N Z_N \subseteq W_N$  cioè  $W_N \cdot W_N \subseteq W_N$  perché  $W_N$  è chiuso. Quindi<sup>3</sup>  $W_N^{-1} \subseteq W_N$  e in particolare  $Z_N^{-1} \subseteq W_N$ , ma  $Z_N^{-1} = X_N^{-1} \cdots X_1^{-1} = X_{i_1} \cdots X_{i_N}$ , cioè mettendo tutto insieme  $H \subseteq W_N$ .

Mostriamo che  $W_N = Z_N \cdot Z_N$ : abbiamo una mappa

$$\underbrace{X_1 \times \cdots \times X_N}_{\text{irrid.}} \rightarrow Z_N \rightarrow W_N,$$

quindi per Chevalley (3.17)  $Z_N \supseteq U$  per  $U$  aperto non vuoto di  $W_N$ , dunque  $U \cdot U = W_N$  perché  $W_N$  è irriducibile.

Questo mostra che  $W_N \subseteq H$  ma ci sono tutti gli elementi di  $H$  quindi effettivamente  $H = W_N$ .  $\square$

**Osservazione 5.12** (Dimensione del quoziente). Sia  $\varphi : G \rightarrow G/H$  e ricordiamo che una mappa di questo tipo è liscia per omogeneità. Allora per il teorema (2.61) abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e H \rightarrow T_e G \xrightarrow{d\varphi_e} T_e(G/H) \rightarrow 0$$

e sappiamo che  $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$ .

**Proposizione 5.13.** Supponiamo  $\text{char } \mathbb{K} = 0$ . Siano  $H, K \subseteq G$  sottogruppi connessi, allora

$$H \subseteq K \iff T_e H \subseteq T_e K \text{ in } T_e G.$$

*Dimostrazione.*

L'implicazione  $\implies$  è ovvia quindi basta mostrare l'altra.

Sia  $X = H \cdot K \subseteq G$  e notiamo che è omogeneo rispetto all'azione di  $H \times K$  data da  $(h, k) \cdot g = h g k^{-1}$ . Osserviamo che  $X$  è aperto in  $\overline{X} \subseteq G$  per Chevalley (3.17) (contiene un aperto della chiusura ed è omogeneo in quanto orbita di  $e$ ). Si ha

$$X \cong \frac{H \times K}{\text{stab}_{H \times K}(e)}.$$

Studiando lo stabilizzatore notiamo che

$$\text{stab}_{H \times K}(e) = \{(h, k) \mid h k^{-1} = e\} = \{(h, k) \mid h = k\} \cong H \cap K,$$

dunque per il teorema (2.61) abbiamo  $\dim X = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$  e una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e(H \cap K) \rightarrow T_e(H \times K) \rightarrow T_e X \rightarrow 0$$

da cui segue  $\dim T_e X = \dim T_e H + \dim T_e K - \dim T_e(H \cap K)$ .

<sup>3</sup>  $Z_N^{-1} W_N \subseteq W_N \implies \overline{Z_N^{-1}} \subseteq W_N \implies \overline{Z_N^{-1}} = \overline{Z_N}^{-1} = W_N^{-1}$ .

Se  $T_e X = T_e H + T_e K$  allora

$$\dim(T_e X) = \dim(T_e H + T_e K) \stackrel{T_e H \subseteq T_e K}{=} \dim T_e K,$$

dunque

$$\dim X = \dim T_e X = \dim T_e K = \dim K$$

e quindi  $K \subseteq X \subseteq \overline{X}$  con  $K$  e  $\overline{X}$  irriducibili della stessa dimensione, dunque  $K = X = \overline{X}$ , e poiché  $X = H \cdot K$  questo mostra

$$K = X = H \cdot K \implies H \subseteq K$$

che è la tesi.

Per concludere basta dunque dimostrare che  $T_e X = T_e H + T_e K$ . Consideriamo la composizione

$$\begin{array}{ccccc} H \times K & \rightarrow & H \times K & \rightarrow & X \\ (h, k) & \mapsto & (h, k^{-1}) & & \\ & & (h', k') & \mapsto & h'(k'^{-1}) \end{array}$$

che è la mappa di moltiplicazione  $\mu|_{H \times K}$ . Dal teorema (2.61) ricaviamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e(\text{stab}_{H \times K}(e)) \rightarrow \underbrace{T_e(H \times K)}_{T_e H \times T_e K} \rightarrow T_e X \rightarrow 0$$

In particolare  $d(\mu|_{H \times K})_{(e,e)}$  è surgettiva, quindi per concludere basta mostrare che

$$d(\mu|_{H \times K})_{(e,e)}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

Dato che  $G \subseteq \text{GL}(n)$  è sufficiente che la tesi valga per  $\text{GL}(n)$  e  $d\mu_{(e,e)}$ . Notiamo che  $\text{Mat}_{n \times n} = T_I \text{GL}(n)$  dove l'identificazione è data da

$$(a_{i,j}) \longleftrightarrow \left( a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I \right)$$

Traduciamo allora  $d\mu_{(e,e)}$  in queste coordinate: se

$$d\mu_{(e,e)} \begin{array}{ccc} \text{Mat}_{n \times n} \times \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & \text{Mat}_{n \times n} \\ ((a_{i,j}), (b_{i,j})) & \longmapsto & (c_{i,j}) \end{array}$$

allora

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(x_{i,j} \circ \mu) \Big|_I = \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \left( \sum_{\ell} y_{i,\ell} z_{\ell,j} \right) \Big|_I = \\ &= \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,\ell}}(y_{i,\ell}) z_{\ell,j} \Big|_I + \sum_{\ell} y_{i,\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(z_{\ell,j}) \Big|_I \stackrel{(\star)}{=} \\ &= \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,\ell}) \Big|_I \delta_{\ell,j} + \sum_{\ell} \delta_{i,\ell} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{\ell,j}) \Big|_I = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,j}) \Big|_I + \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j}) \Big|_I = \\ &= a_{i,j} + b_{i,j} \end{aligned}$$

dove il passaggio  $(\star)$  segue perché stiamo interpretando quei differenziali come derivazioni.  $\square$

## 5.3 Varietà complete

**Definizione 5.14** (Varietà separata).  $X$  è **separata** se la diagonale  $X \rightarrow X \times X$  è un morfismo chiuso.

Supporremo che sia tutto separato.

**Definizione 5.15** (Varietà completa).  $X$  è **completa** se per ogni  $Z$  varietà,  $\pi : X \times Z \rightarrow Z$  è un morfismo chiuso.

**Osservazione 5.16.** Se  $X$  è irriducibile e completa allora  $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  regolare e consideriamo  $\Gamma(f) \subseteq X \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ . Questa proiezione è chiusa quindi  $\pi(\Gamma(f)) = f(X)$  è un chiuso irriducibile (immagine di irriducibile) di  $\mathbb{K}$ . Ma i chiusi irriducibili di  $\mathbb{K}$  non vuoti sono o tutto  $\mathbb{K}$  o solo un punto.

Consideriamo ora  $W = \{(x, y) \in X \times \mathbb{K} \mid yf(x) = 1\}$ . Se  $f(X) = \mathbb{K}$  allora l'immagine di  $W$  tramite la proiezione  $X \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  è  $\mathbb{K}^\times$ , che non è chiuso in  $\mathbb{K}$ , assurdo.

Quindi  $f(X)$  è un solo punto, cioè  $f$  è costante.  $\square$

**Corollario 5.17.** Se  $X$  è completa, affine e connessa allora  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}$  significa che  $X$  è un solo punto  $\{(0)\}$ .  
In generale le affini complete sono un numero finito di punti.

**Teorema 5.18** (I proiettivi sono completi). Se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita,  $\mathbb{P}(V)$  è completa.

Moralmente “completo=compatto” in senso classico, per esempio valgono:

**Osservazione 5.19.** Se  $X$  è completa e  $Z \subseteq X$  chiuso allora  $Z$  è completo.

**Osservazione 5.20.** Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è surgettiva e  $X$  è completa allora  $Y$  è completa

### 5.3.1 Punto fisso di Borel

**Proposizione 5.21** (Esiste orbita chiusa). Se  $K$  è un gruppo che agisce su una varietà  $Y$  allora  $K$  ha un'orbita chiusa in  $Y$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo un'orbita che ha dimensione minima  $Z = G \cdot y$ . Notiamo che  $Gy$  è un

aperto denso di  $\bar{Z}$  per Chevalley (3.17) (contiene un aperto ed è omogeneo), quindi  $\dim \bar{Z} \setminus Z < \dim Z$ , ma se questa differenza è non vuota allora  $G$  agisce su questa differenza e quindi esiste un'orbita di dimensione più piccola.

Dunque  $\bar{Z} \setminus Z = \emptyset$ , cioè  $\bar{Z} = Z$ .  $\square$

**Teorema 5.22** (Punto fisso di Borel). Se  $G$  è un gruppo risolubile connesso che agisce su una varietà completa allora  $G$  ha un punto fisso.

*Dimostrazione.*

Se  $\dim G = 0$  allora  $G$  è un singolo punto e quindi è l'indetità e agisce banalmente.

Supponiamo  $\dim G > 0$ . Sia  $H = [G, G]$  il sottogruppo dei commutatori. Questo è un sottogruppo algebrico connesso. Dato che  $G$  è risolubile,  $H \subsetneq G$ , quindi per ipotesi induttiva  $X^H \neq \emptyset$ .

Notiamo ora che su  $X^H$  agisce  $A = G/H$ , quindi su  $X^H$  abbiamo un'orbita chiusa (5.21)  $A \cdot x \subseteq X^H \subseteq X$ . Notiamo che  $A \cdot x$  è completa perché chiuso di  $X$  completa, ma  $A \cdot x = A / \text{stab}_A x$ , quindi è anche una varietà affine.  $A \cdot x$  è anche connessa perché  $A$  è connesso in quanto  $G$  lo è.

$A \cdot x$  è affine, completa e connessa, quindi è un punto, cioè  $x$  è un punto fisso per  $A$  in  $X^H$ , ma allora  $x$  è un punto fisso per  $G$ .  $\square$

**Esempio 5.23.** Consideriamo  $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^n$  come segue:

$$\lambda \cdot [x_0 : \cdots : x_n] = [x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda^n x_n]$$

Questa azione ha come punti fissi quelli della forma  $[0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$ .

Ricordiamo che  $B_n$  è il sottogruppo di  $\text{GL}(n)$  costituito dalle matrici triangolari superiori.

**Corollario 5.24.** Se  $G$  è connesso, sono tra loro equivalenti

1.  $G$  è risolubile.
2. Le uniche rappresentazioni irriducibili di  $G$  sono di dimensione 1.
3. Esiste un intero positivo  $n$  tale che  $G$  è contenuto in  $B_n$ .

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $G$  risolubile e mostriamo il punto 1. Sia  $V$  una rappresentazione irriducibile di  $G$ . Allora  $\mathbb{P}(V)^G$  è non vuoto e dunque per il teorema del punto fisso (5.22) esiste una retta  $\ell$  in  $V$  tale che  $G \cdot \ell = \ell$ . Quindi  $\ell = V$ , da cui  $\dim V = 1$ .

Mostriamo l'implicazione  $2 \Rightarrow 3$ . Assumiamo  $G$  contenuto in  $\text{GL}(V)$  per qualche  $V$ . Sia  $F_1$  una sottorappresentazione irriducibile di dimensione 1. Allora  $G$  agisce su  $V/F_1$ . Allora esiste una retta  $F_2/F_1$  in  $V/F_1$  tale che  $GF_2/F_1 \subseteq F_2/F_1$ . Procedendo induttivamente, troviamo una bandiera

$$0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = V$$

tale che  $GF_i = F_i$  con  $\dim F_i = i$ . Se  $v_1, \dots, v_n$  è una base compatibile con tale bandiera (cioè  $v_i \in F_i$  per ogni indice  $i$ ), allora abbiamo un'immersione  $G \hookrightarrow B_n$  definita da  $g \mapsto [g]_{\underline{v}}$ .

Infine, l'implicazione  $3 \Rightarrow 1$  è immediata perché  $B_n$  è risolubile.  $\square$

### 5.3.2 Sottogruppi parabolici e di Borel

**Definizione 5.25.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e  $P \subseteq G$  sottogruppo chiuso.

1.  $P$  si dice **parabolico** se  $G/P$  è completo
2.  $B \subseteq G$  si dice **sottogruppo di Borel** se è un sottogruppo risolubile connesso massimale.

**Osservazione 5.26.** Se  $P$  è un sottogruppo parabolico,  $G/P \subseteq \mathbb{P}(V)$  per qualche  $V$ .

*Dimostrazione.*

Ricorda (5.1) che esistono una rappresentazione  $V$  di  $G$  e una retta  $L \subseteq V$  tali che  $\text{stab}_G L = P$ . Per questa rappresentazione  $G/P = G \cdot L \subseteq \mathbb{P}(V)$ .

Notiamo che l'immagine di  $G/P$  in  $\mathbb{P}(V)$  è chiusa, infatti se  $\Gamma$  è il grafico di  $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$  allora esso è contenuto in  $G/P \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  e per definizione di sottogruppo parabolico  $G/P$  è completa.

Questo mostra che  $G/P$  è una sottovarietà di  $\mathbb{P}(V)$ .  $\square$

**Esempio 5.27.** Sia  $G = \text{GL}(n)$ ,  $B \subseteq G$  le matrici triangolari superiori, diagonale inclusa.

$$G/B = \{0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = \mathbb{K}^n \mid \dim F_i = i\}$$

**Lemma 5.28.**  $G$  è un gruppo connesso e risolubile se e solo se  $G$  non ha sottogruppi parabolici propri.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni

$\Rightarrow$  Sia  $P \subseteq G$  parabolico. Per il teorema del punto fisso di Borel (5.22) si ha che  $G/P$  ha un punto fisso per  $G$ , ma per omogeneità questo significa che  $G/P$  consiste di un solo punto, cioè  $P = G$ .

$\Leftarrow$  Sia  $P = G^0$  e mostriamo che  $G/G^0$  è completo, questo basta perché in tal caso  $G^0$  è parabolico e quindi per ipotesi  $G^0 = G$ .

Per il corollario (5.24) basta dimostrare che le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1: se  $V$  irriducibile,  $G$  agisce su  $\mathbb{P}(V)$  e ha un'orbita chiusa  $G \cdot \ell \subseteq \mathbb{P}(V)$  per (5.21). Sia  $P = \text{stab}_G(\ell)$ , questo gruppo deve essere parabolico perché il quoziente è  $G\ell$  orbita chiusa ma allora  $P = G$  e per irriducibilità questo mostra  $V = \ell$ .  $\square$

**Teorema 5.29.** Sia  $G$  un gruppo algebrico.

1. Se  $B$  è un sottogruppo di Borel di  $G$ , allora  $B$  è parabolico.
2. Se  $B$  è un sottogruppo di Borel di  $G$  e  $P$  è un sottogruppo parabolico di  $G$ , allora esiste  $g$  in  $G$  tale che  $gBg^{-1}$  è contenuto in  $P$ .
3. Tutti i sottogruppi di Borel sono coniugati.

*Dimostrazione.*

Mostriamo contemporaneamente il primo e il secondo punto.

Osserviamo che è sufficiente mostrare che  $G^0/B$  è completo, infatti, se  $G = \coprod_i g_i G^0$ , allora  $G/B = \coprod_i g_i G^0/B$ . Possiamo quindi assumere che  $G$  sia connesso.

Se  $G$  è risolubile, allora per per definizione di sottogruppo di Borel  $G = B$  e si conclude. Se  $G$  non è risolubile, allora per il lemma (5.28) esiste un sottogruppo parabolico proprio  $P$  di  $G$ . Possiamo quindi considerare l'azione di  $B$  su  $G/P$ , la quale ha un punto fisso (5.22), cioè esiste un  $g$  in  $G$  tale che  $gBg^{-1}P = P$ , ovvero  $gBg^{-1} \subseteq P$ . Ciò in particolare mostra il secondo punto.

Possiamo assumere  $B \subseteq P \subsetneq G$ , per cui  $B$  è un sottogruppo di Borel di  $P$ . A questo punto procediamo per induzione sulla dimensione di  $G$ . Poiché  $\dim P < \dim G$ , abbiamo che  $B$  è un sottogruppo parabolico di  $P$  per ipotesi induttiva, quindi  $P/B$  è completa e  $G/P$  è completa. Avendo mostrato che  $B$  è parabolico in  $P$  e che  $P$  è parabolico in  $G$ , per il lemma (5.31) si ha che  $B$  è parabolico in  $G$ .

Infine, per il terzo punto, siano  $B, B'$  due sottogruppi di Borel di  $G$ . Allora esiste  $g$  in  $G$  tale che  $gBg^{-1} \subseteq B'$  per il punto 2. Poiché  $gBg^{-1}$  e  $B'$  sono sottogruppi connessi, risolubili e massimali, concludiamo che  $gBg^{-1} = B'$ .  $\square$

**Corollario 5.30.** Se  $B \subseteq G$  è parabolico, connesso e risolubile allora è di Borel.

*Dimostrazione.*

Per il punto 2. del teorema (5.29) si ha che  $B$  contiene un sottogruppo di Borel, ma essendo connesso e risolubile deve essere già un sottogruppo di Borel per massimalità.  $\square$

**Lemma 5.31.** Siano  $G$  un gruppo algebrico,  $P \subseteq Q$  due sottogruppi tali che  $Q$  è parabolico in  $G$  e  $P$  è parabolico in  $Q$ . Allora  $P$  è parabolico in  $G$ .

*Dimostrazione.*

Data una varietà arbitraria  $Z$ , mostriamo che la mappa  $\pi_Z: G/P \times Z \rightarrow Z$  è chiusa. Sia  $A$  un chiuso in  $G/P \times Z$ . Sia  $A'$  l'immagine inversa di  $A$  rispetto la proiezione  $\pi_1: G \times Z \rightarrow G/P \times Z$ . Allora  $A'$  è chiuso e  $A' \cdot P = A'$ . Se mostriamo che  $A' \cdot Q = A'$ , abbiamo concluso, infatti, considerando la composizione

$$\begin{array}{ccccc} G \times Z & \rightarrow & G/Q \times Z & \rightarrow & Z \\ A' & \rightarrow & A'' & \rightarrow & \pi_Z(A) \end{array}$$

l'immagine di  $A'$  tramite la prima mappa è un certo  $A''$ , che viene mandato in  $\pi_Z(A)$ . Sia  $A''' = A' \cdot Q$ . Mostriamo che  $A'''$  è chiuso (ciò permette di concludere per quanto appena detto). Consideriamo la mappa

$$\varphi: \begin{array}{ccc} Q \times G \times X & \longrightarrow & G \\ (q, g, x) & \longmapsto & (gq, x) \end{array}$$

Allora  $A^{IV} := \varphi^{-1}(A')$  è chiuso ed è stabile per l'azione a destra di  $P$  su  $Q$ , cioè se  $(q, g, x)$  è in  $A^{IV}$ , allora  $(gp, g, x)$  è in  $A^{IV}$ . Infatti se  $(gq, x)$  è in  $A'$ , allora anche  $(gqp, x)$  è in  $A'$ . Ragionando come prima, abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} Q \times G \times Z & \rightarrow & Q/P \times G \times Z & \rightarrow & G \times Z \\ A^{IV} & \rightarrow & \text{imm chiusa} & \rightarrow & A^V \text{chiuso} \end{array}$$

dove

$$A^V = \{(g, x) \in G \times X : \exists q \in Q, (gq, x) \in A'\} = A' \cdot Q.$$

A questo punto  $A' \cdot Q$  è chiuso e concludiamo come prima.  $\square$

Con tecniche simili, è possibile mostrare il seguente risultato.

**Teorema 5.32.** Se  $G$  è un gruppo algebrico connesso,  $B$  un sottogruppo di Borel di  $G$  e  $P$  un sottogruppo parabolico di  $G$ , allora

1.  $N_G(B) = B$  e  $N_G(P) = P$ .
2.  $P$  è connesso.

Sia  $\mathcal{B}$  la famiglia dei sottogruppi di Borel di un gruppo algebrico  $G$ . Allora  $G$  agisce per coniugio (e transitivamente) su  $\mathcal{B}$ . Per il Teorema (5.32) abbiamo  $\text{stab}_G(B) = N_G(B) = B$ , da cui deduciamo il seguente risultato.

**Corollario 5.33.** Sia  $B$  un sottogruppo di Borel di un gruppo algebrico  $G$ . Esiste una corrispondenza biunivoca tra la famiglia  $\mathcal{B}$  e il quoziente  $G/B$ , data da

$$\begin{aligned} G/B &\longrightarrow \mathcal{B} \\ gB &\longmapsto gBg^{-1}. \end{aligned}$$

## 5.4 Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici

Citiamo il seguente teorema per la sua utilità in alcuni degli esempi:

**Teorema 5.34** (Witt). Se  $V$  spazio vettoriale,  $b$  forma simmetrica non degenera,  $W_1, W_2$  sottospazi di  $V$  e  $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$  isomorfismo che preserva  $b$ , allora  $\varphi$  si estende a  $V$  e continua a preservare  $b$ .

### 5.4.1 Matrici invertibili

Fissiamo  $G = \text{GL}(n)$ .

**Esempio 5.35** (Borel di  $\text{GL}(n)$  sono le matrici triangolari). Consideriamo il sottogruppo  $B_n$  di  $G$ . Sappiamo che  $B_n$  è connesso e risolubile. Mostriamo che è massimale (e quindi un sottogruppo di Borel).

Sia  $H$  un sottogruppo risolubile connesso contenente  $B_n$ . Essendo risolubile e connesso,  $H$  si triangolarizza rispetto a una bandiera  $F_1 \subset \dots \subset F_n$ . Poiché  $H \cdot F_i = F_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si ha anche  $B \cdot F_i = F_i$  per ogni indice  $i$ . Poiché  $B_n$  è lo stabilizzatore in  $G$  della bandiera  $F_1 \subset \dots \subset F_n$ , si ottiene  $H = B_n$ .

**Esempio 5.36** (Sottogruppi parabolici di  $\text{GL}(n)$ ). Abbiamo visto che se  $P$  è un sottogruppo di  $G$  contenente  $B_n$ , allora  $P$  è un sottogruppo parabolico di  $G$ . Se  $P$  è il sottogruppo costituito dalle matrici triangolari superiori con blocchi sulla diagonale di

tipo  $h \times h$  e  $k \times k$ , sappiamo che  $G/P$  è in corrispondenza biunivoca con  $\text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$ , sulla quale  $G$  agisce transitivamente e per cui  $\text{stab}_G \langle e_1, \dots, e_h \rangle = P$ . Quindi  $\text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$  è una varietà proiettiva. Vogliamo descrivere una sua immersione esplicita in  $\mathbb{P}(V)$  per qualche spazio vettoriale  $V$ . Per farlo, dobbiamo trovare uno spazio vettoriale  $V$  contenente una retta  $L$  fissata da  $P$ . Consideriamo  $V = \bigwedge^h(\mathbb{K}^n)$  e  $L = \bigwedge^h W$ , dove  $W$  è il sottospazio generato da  $e_1, \dots, e_h$ . Abbiamo già visto che, fissato  $g$  in  $G$ , si ha  $gL = L$  se e solo se  $gW = W$ . Quindi  $\text{stab}_G L = \text{stab}_G W = P$ . Dunque

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & \bigwedge^h U & & \\
 & & & & \\
 gW & & \text{Gr}(h, \mathbb{K}^n) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(V) \\
 \uparrow & & \updownarrow & & \\
 & & G/P & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(v) \\
 & & & & \\
 g & \xrightarrow{\quad} & gL = (g \bigwedge^h W) = (\bigwedge^h gW) & & 
 \end{array}$$

Descriviamo questa mappa in coordinate. Presa

$$U = (v_1 | \dots | v_h) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_h = \sum_{i_1 < \dots < i_h} p_{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}$$

dove  $p_{i_1, \dots, i_h}$  è il determinante del minore di  $(v_1 | \dots | v_h)$  identificato dalle righe  $i_1, \dots, i_h$  e

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_h = \det(v_1 | \dots | v_h) e_1 \wedge \dots \wedge e_h.$$

Quindi si ha

$$U = \langle v_1, \dots, v_h \rangle \longrightarrow [p_I(v_1, \dots, v_h)]_{I=\{i_1 < \dots < i_h\}}$$

Se  $U = \langle w_1, \dots, w_h \rangle$ , allora esiste una matrice invertibile  $A$  di taglia  $h$  tale che  $MA = N$ , dove  $N = (w_1 | \dots | w_h)$ . Si ha

$$\begin{aligned}
 p_I(M) &= \det(M_{i_1, \dots, i_h}) \\
 p_I(N) &= \det(N_{i_1, \dots, i_h}) = \det(M_{i_1, \dots, i_h} \cdot A) = p_I(M) \det(A).
 \end{aligned}$$

Infine  $(v) \longrightarrow [p_I(M)]$  e  $(w) \longrightarrow [p_I(N)] = [p_I(M) \det(A)] = [p_I(M)]$ .

**Esempio 5.37** (Parabolici di  $\text{GL}(n)$ ). Sia  $P \supseteq B$  con  $P$  parabolico e  $B$  di Borel,  $P$  connesso.

Guardiamo  $T_e P$  e notiamo che  $T_e P \supseteq T_e B = \{\text{triang. sup.}\}$ . Sia  $A = (a_{i,j}) \in T_e P$ . Si ha che  $B$  agisce per coniugio su  $P$ . In particolare se fissiamo  $b \in B$  allora definiamo

$$Ad_b : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ p & \longmapsto & bpb^{-1} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad Ad_b : \begin{array}{ccc} T_e P & \longrightarrow & E_e P \\ C & \longmapsto & bCb^{-1} \end{array}$$

quindi  $T_e P \subseteq T_e \text{GL}(n) = \text{Mat}_{n \times n}$  è stabile per  $Ad_b$  per ogni  $b \in B$ . Se  $b = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  allora

$$Ad_b(A) = (\lambda_i \lambda_j^{-1} a_{i,j})$$

se  $a_{i,j} \neq 0$  allora  $E_{i,j} \in T_e P$



### 5.4.2 Matrici ortogonali speciali

Ora consideriamo  $G = \text{SO}(n)$ . Cerchiamo di capire come è definito questo gruppo

$$\boxed{n=1} \quad G = \{1\}.$$

$\boxed{n=2}$  Scegliamo la forma quadratica  $q(x, y) = xy$ . Lo stabilizzatore di tale forma è dato da

$$\left\{ A \in \text{SO}(2) : A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Imponendo che  $A$  sia nello stabilizzatore della forma  $q$ , si trova  $b = c = 0$ . Poiché  $\det(A) = 1$ , troviamo  $d = a^{-1}$  e quindi  $\text{SO}(2)$  è isomorfo a  $\mathbb{K}^\times$ .

$\boxed{n=3}$  Mostriamo che

$$\text{SO}(3) \cong \text{SL}(2)/\{\pm I\}.$$

**Proposizione 5.38.**  $\text{SO}(3) \cong \text{SL}(2)/\{\pm I\}$ .

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $\text{SL}(2)$  agisce su  $W := \mathbb{K}^2$ . Consideriamo la rappresentazione  $W \otimes W = S^2W \oplus \bigwedge^2 V$ . Consideriamo la forma bilineare e simmetrica

$$b(u \otimes u', v \otimes v') = \det(u, v) \det(u', v').$$

Tale forma è  $\text{SL}(2)$ -invariante, infatti, se  $g$  è in  $\text{SL}(2)$ , allora  $\det(g) = 1$  e quindi

$$\begin{aligned} b(gu \otimes gu', gv \otimes gv') &= \det(gu, gv) \det(gu', gv') = \\ &= \det(g)^2 b(u \otimes u', v \otimes v') = \\ &= b(u \otimes u', v \otimes v'). \end{aligned}$$

Fissiamo una base  $e_{11} = e_1 \otimes e_1$ ,  $e_{12} = e_1 \otimes e_2$ ,  $e_{21} = e_2 \otimes e_1$ ,  $e_{22} = e_2 \otimes e_2$ . Allora

$$[b]_{e_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare  $b$  è non degenere. Inoltre, anche la restrizione  $\beta := b|_{S^2W}$  è non degenere, in quanto  $S^2W = \langle e_{11}, e_{22}, e_{12} + e_{21} \rangle$ . Abbiamo quindi definito una mappa

$$\text{SL}(2) \rightarrow \text{SO}(\beta).$$

Imponendo  $ge_{11} = e_{11}$  e  $ge_{22} = e_{22}$ , troviamo  $g = \pm I$ , quindi abbiamo un'immersione  $\text{SL}(2)/\{\pm I\} \hookrightarrow \text{SO}(\beta)$ . Mostriamo che è suriettiva. Osserviamo che  $\text{GL}(2)$  è isomorfo (come varietà) a  $\text{SL}(2) \times \mathbb{K}^\times$  tramite la mappa  $(A, \lambda) \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Quindi  $\dim \text{SL}(2) = 3$ . Calcoliamo la dimensione di  $\text{SO}(\beta)$  (e in generale di  $\text{SO}(n)$ ). Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & \text{Mat}_{n \times n} \\ A & \longmapsto & A^\top A \end{array}.$$

Allora  $O(n) = \varphi^{-1}(I)$ . Quindi abbiamo una mappa tra gli spazi tangenti a  $I$  data da

$$T : \begin{array}{ccc} T_I \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & T_I \text{Mat}_{n \times n} \\ B & \longmapsto & B + B^\top \end{array}$$

Quindi  $T_I O(n) = \ker T$ . Quindi  $\dim SO(n) = \binom{n}{2}$  e in particolare  $\dim SO(3) = 3 = \dim SL(2)$ . Inoltre, il quoziente  $SL(2)/\{\pm I\}$  coincide con la componente connessa di  $SO(\beta)$ , quindi è sufficiente mostrare che  $SO(\beta)$  (e più in generale  $SO(n)$ ) è connesso.

Procediamo per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  e  $n = 2$  sappiamo già che ciò è vero. Assumiamo  $n > 2$ . Consideriamo la forma quadratica standard rappresentata dalla matrice identità, consideriamo  $e_1$  in  $\mathbb{K}^n$  e

$$Y := SO(n) \cdot e_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \right\}$$

Poiché il polinomio  $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$  è irriducibile, la varietà  $Y$  è connessa. Inoltre si ha  $Y \cong SO(n)/SO(n-1)$ , che, in quanto connesso, ci permette di concludere.  $\square$

Ricordiamo che  $SO(3) \cong SL(2)/\{\pm I\}$ . Sia

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subseteq SL(2)$$

Notiamo che  $SL(2)$  agisce su  $\mathbb{P}^1$  transitivamente e che lo stabilizzatore di  $[e_1]$  è  $B$ .

Più precisamente, sia  $V = \mathbb{K}^2$  e  $L = [e_1] \in \mathbb{P}(V)$ . Poniamo

$$W = S^n \mathbb{K}^2 = S^n V$$

e, notando che  $e_1^n \in W$ , si ha  $\text{stab}_G[e_1^n] = B$ .

Possiamo descrivere il quoziente anche come

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1 \cong G/B = G[e_1^n] \subseteq \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(S^n V)$$

dove l'immersione è data da  $v \mapsto v^n$ . Questa mappa è un morfismo equivariante e una immersione chiusa  $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$ .

**Osservazione 5.39.** Se  $n = 2$  allora

$$SO(3)/B_{SO(3)} = \frac{SL(2)/\pm id}{B_{SL}/\pm id} = \frac{SL(2)}{B_{SL}}.$$

Lo spazio  $V = \mathbb{K}^2$  non è una rappresentazione di  $SO(3)$  perché  $-id$  non agisce banalmente, ma  $S^2 V$  è una rappresentazione di  $SO(3)$ .

**Esempio 5.40.** Consideriamo la forma quadratica  $x_1 x_3 = x_2^2$ , lo spazio  $V = \mathbb{K}^3$  e la retta  $L = \mathbb{K}(1 \ 0 \ 0)^\top$ . In  $\mathbb{P}(V)$  si ha che  $G \cdot L$  è la quadrica  $Q : x_1 x_3 = x_2^2$  per il teorema di Witt (5.34).

Notiamo anche che  $\text{stab}(L) = B$ , quindi abbiamo una mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Q \\ [a : b] & \longmapsto & [a^2 : ab : b^2] \end{array}.$$

### 5.4.3 Matrici del gruppo lineare speciale

Sia  $G = \mathrm{SL}(n)$  e ricordiamo che il sottogruppo delle matrici triangolari superiori  $B$  è un sottogruppo di Borel.

$$G/B \cong \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}$$

**Definizione 5.41.** Definiamo la **varietà delle bandiere** di taglia  $n$  come

$$\mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}(n)} = \mathrm{SL}(n)/B_{\mathrm{SL}(n)} = \mathcal{F}\ell = \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}.$$

Vogliamo un risultato analogo per  $\mathrm{SO}(n)$

**Osservazione 5.42.** Se consideriamo la forma quadratica  $q = x_1^2 + \cdots + x_n^2$  e interseco  $\mathrm{SO}(n) = \{A \mid A^\top A = I, \det A = 1\}$  con  $B_{\mathrm{SL}(n)}$  troviamo

$$T^\top T = I \quad e \quad T \text{ triangolare superiore} \implies T \text{ diagonale con entrate } \pm 1.$$

Consideriamo la forma quadratica associata a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

da cui  $\mathrm{SO}(n) = \{A \mid AJA^\top = J, \det A = 1\}$ .

**Proposizione 5.43.** Il sottogruppo di questo  $\mathrm{SO}(n)$  dato da

$$B = B_{\mathrm{SO}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), A \text{ triang. sup.} \right\},$$

dove  $M^{at}$  indica la trasposta di  $M$  rispetto all'altra diagonale, è un sottogruppo di Borel.

*Dimostrazione.*

Assumiamo  $n = 2m$ , il caso dispari è simile.

Notiamo che  $Jg^\top J = g^{at}$ , cioè la trasposta di  $g$  rispetto all'altra diagonale. Scrivendo  $g$  triangolare superiore evidenziando blocchi di dimensione  $m$  troviamo

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Poiché  $g \in \mathrm{SO}(n)$  significa che  $gg^{at} = id$  con determinante 1,  $g$  triangolare superiore appartiene a  $\mathrm{SO}(n)$  se

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{at} & B^{at} \\ 0 & A^{at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^{at} & AB^{at} + BA^{at} \\ 0 & DA^{at} \end{pmatrix}$$

ovvero se  $D = (A^{at})^{-1}$  e  $(BA^{at})^{at} = -(BA^{at})$ . Il determinante di  $g$  è automaticamente 1 perché<sup>4</sup>  $\det D = (\det A)^{-1}$ . Dunque l'intersezione tra  $\mathrm{SO}(n)$  e le triangolari superiori è

$$B = B_{\mathrm{SO}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), A \text{ triang. sup.} \right\}.$$

Notiamo che  $B_{\mathrm{SO}}$  è risolubile e connesso<sup>5</sup>. Se dimostriamo che  $B$  è parabolico allora è un sottogruppo di Borel per (5.30).

Sia  $\mathcal{E}$  la bandiera data dai vettori di base

$$E_1 = \langle e_1 \rangle \subseteq E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \cdots \subseteq E_n = \langle e_1, \dots, e_{2m} \rangle = \mathbb{K}^n.$$

Notiamo che  $\mathrm{stab}_{\mathrm{GL}(n)}(\mathcal{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)}$  e che  $\mathrm{stab}_{O(n)}(\mathcal{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)} \cap O(n) = B_{O(n)} = B_{\mathrm{SO}(n)}$ , dove l'ultima uguaglianza segue perché tutte le matrici ortogonali triangolari superiori per la forma associata a  $J$  hanno già determinante 1. Notiamo che

$$O(n)\mathcal{E} \subseteq \{0 = F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_{2m} \mid \dim F_i = i, F_{m-i}^\perp = F_{m+i} \forall i \in \{0, \dots, m\}\} \subseteq \mathcal{F}\ell.$$

Per il teorema di Estensione di Witt (5.34) si ha che  $O(n)\mathcal{E}$  è esattamente lo spazio delle bandiere di quella forma, che chiamiamo  $\mathcal{F}_O$  e notiamo che è un chiuso di  $\mathcal{F}\ell$ .

Vogliamo dimostrare che  $\mathcal{F}_{\mathrm{SO}}$  è chiuso. Sia

$$\mathcal{G}_O = \{g \in \mathrm{GL}(n) \mid gB_{\mathrm{GL}} \in \mathcal{F}_O\}$$

Poiché  $\mathcal{F}\ell = \mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}}$  basta mostrare che  $\mathcal{G}_O$  è chiuso. Sia  $g = (v_1 \mid \cdots \mid v_{2m})$  e notiamo che  $g \in \mathcal{G}_O$  se  $b(v_i, v_j) = 0$  per  $i, j \leq m$ ,  $b(v_{m+\alpha}, v_i) = 0$  per  $i \leq m - \alpha$  e  $b(v_i, v_j) = 0$  se  $i + j \leq 2m$ . Queste sono condizioni chiuse quindi  $\mathcal{G}_O$  è chiuso. Questo mostra che

$$O(n)/B_{\mathrm{SO}(n)}$$

è proiettivo. □

**Osservazione 5.44.** Con le notazioni di sopra,

$$O(n) = \frac{\mathrm{SO}(n) \sqcup g\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}(n)}}$$

per una qualsiasi  $g$  tale che  $\det g = -1$ ,  $g \in O(n)$ , dunque

$$\frac{O(n)}{B_{\mathrm{SO}}} = \frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}} \sqcup g \frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}}$$

e quindi  $\frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}}$  è proiettivo.

Vogliamo descrivere la componente data da  $\mathrm{SO}(2m)/B$ .

**Teorema 5.45.** Sia  $V = \mathbb{K}^{2m}$  munito di una forma bilineare, simmetrica e non degenera  $b(\cdot, \cdot)$ . Siano  $L, M$  sottospazi isotropi (lagrangiani) di  $V$  tali che  $\dim L = \dim M$ . Allora

$$\exists g \in \mathrm{SO}(V): gL = M \iff \dim(L \cap M) \equiv m \pmod{2}.$$

<sup>4</sup> $\det M^{at} = \det(JM^\top J) = 1 \cdot \det M^\top \cdot 1 = \det M$ .

<sup>5</sup>connesso perché immagine di  $\{\text{triang. sup. invertibili}\} \times \{\text{antisimmetriche per l'altra diagonale}\}$

*Dimostrazione.*

Scegliamo una base  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m}$  di  $V$  tale che  $e_1, \dots, e_m$  è base di  $L$  e tale che  $b$  è rappresentata in questa base dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre  $L' = \langle e_1, \dots, e_{m-1}, e_{2m} \rangle$ . Notiamo che  $L'$  è isotropo. Mostriamo che se  $g$  è un elemento di  $\text{SO}(2m)$ , allora

$$\dim(gL \cap L) \equiv m \pmod{2} \quad (5.4.1)$$

$$\dim(gL \cap L') \not\equiv m \pmod{2} \quad (5.4.2)$$

Iniziamo mostrando la (5.4.1). Sia  $P$  il sottogruppo di  $\text{SO}(V)$  costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Notiamo che una matrice di questa forma è in  $\text{SO}(V)$  se e solo se  $A^\top = C^{-1}$  e  $B^\top C + C^\top B = 0$ , per cui

$$\dim P = \dim \text{GL}(m) + \binom{m}{2} = m^2 + \binom{m}{2}.$$

Sia  $U$  il sottogruppo di  $\text{SO}(V)$  costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix}$$

Osserviamo che una matrice di questo tipo appartiene a  $\text{SO}(V)$  se e solo se  $X^\top = -X$ , cioè se e solo  $X$  è antisimmetrica, quindi  $\dim U = \binom{m}{2}$ . Ne consegue che  $\dim P + \dim U = 2m^2 - m$ . Ricordiamo che  $\dim \text{SO}(2m) = \dim \text{O}(2m) = 2m^2 - m$ , infatti la mappa

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(2m) & \longrightarrow & \text{Sim}(2m) \\ A & \longmapsto & AA^\top \end{array}$$

è surgettiva e ha nucleo  $\text{O}(2m)$ , che quindi ha dimensione  $4m^2 - \binom{2m+1}{2} = 2m^2 - m$ . Consideriamo la mappa  $U \times P \rightarrow \text{SO}(V)$  data da

$$\begin{array}{ccccc} U \times P & \xrightarrow{\sim} & U \times P & \longrightarrow & \text{SO}(V) \\ (u, p^{-1}) & \longmapsto & (u, p) & \longmapsto & uIp \\ (u, p) & \longmapsto & (u, p^{-1}) & \longmapsto & uIp^{-1} \end{array}$$

Ora  $UP$  è aperto in  $\overline{UP}$  e poiché  $U \cap P = \{I_{2m}\}$ , si ha

$$\dim(UP) = \dim(U \times P) = \dim \text{SO}(2m),$$

da cui  $\overline{UP} = \text{SO}(2m)$ . Consideriamo gli aperti  $V_1 = UP$  e  $V_2 = PU$  in  $\text{SO}(2m)$ . Mostriamo che  $V_2 V_1 = \text{SO}(2m)$ . Sia  $g$  in  $\text{SO}(2m)$  e sia  $v_2$  nell'intersezione  $V_2 \cap gV_2$  (che è non vuota in quanto  $V_1$  e  $V_2$  sono aperti in una varietà irriducibile). Allora  $v_2 = gv'_2$  per qualche  $v'_2$  in  $V_2$ . Poiché  $(v'_2)^{-1} \in UP = V_1$ , si ha  $g = v_2(v'_2)^{-1} \in V_2 V_1$ . Ne deduciamo che

$$\text{SO}(2m) = PU \cdot UP = PUP$$

e quindi, posto  $g = p_1 u p_2$ , si ha

$$\dim(gL \cap L) = \dim(p_1 u p_2 L \cap L) = \dim(u p_2 L \cap p_1^{-1} L) = \dim(uL \cap L).$$

Quindi ci siamo ridotti a considerare il caso di un elemento

$$u = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} \in U.$$

Osserviamo che, poiché  $L = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ , si ha

$$uL = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} e_i, \ i = 1, \dots, m \right\},$$

quindi

$$uL \cap L = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} v \\ Xv \end{pmatrix}, \ v \in \mathbb{K}^m : Xv = 0 \right\} \cong \ker X,$$

da cui  $\dim(uL \cap L) = \dim(\ker X) = m - \text{rk}(X) \equiv m \pmod{2}$  perché le matrici antisimmetriche hanno rango pari.

Mostriamo la (5.4.2). Sia  $g$  un elemento in  $O(2m)$ . Sappiamo che se  $g$  è in  $SO(2m)$ , allora  $\dim(gL \cap L) \equiv m \pmod{2}$ ; se invece  $g$  non è in  $SO(2m)$ , allora  $\dim(gL \cap L) \not\equiv m \pmod{2}$ . Sia  $h$  in  $O(2m) \setminus SO(2m)$  che scambia  $e_m$  con  $e_{2m}$  e lascia fissi gli altri  $e_i$ . Allora  $L' = hL$  ed esiste  $\tilde{g}$  in  $SO(2m)$  tale che  $g = h\tilde{g}$ . Dunque

$$\dim(gL \cap L) = \dim(h\tilde{g}L \cap L) = \dim(\tilde{g}L \cap L') \not\equiv m \pmod{2}$$

e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Esempio 5.46** (Caso  $m = 1$ ). Consideriamo  $V = \mathbb{K}^2$  munito della forma bilineare la cui forma quadratica associata è data da  $xy$ . Allora i sottospazi isotropi  $\mathbb{K}e_1$  e  $\mathbb{K}e_2$  si intersecano banalmente e quindi non vengono scambiati dagli elementi di  $SO(V)$ . In effetti

$$SO(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{K}^\times \right\}.$$

**Esempio 5.47** (Caso  $m = 2$ ). Consideriamo  $\mathbb{K}^4$  con la forma quadratica  $x_1x_4 - x_2x_3$ . Cerchiamo i sottospazi di dimensione 2 contenuti nel radicale della forma: cerchiamo quindi rette in  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$  contenute nella quadrica  $x_1x_4 = x_2x_3$ . Questa quadrica corrisponde a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  tramite la mappa  $([a : b], [c : d]) \mapsto [ac : ad : bc : bd]$ . Il gruppo  $SO(4)$  agisce su ciascun fattore  $\mathbb{P}^1$ , ma non scambia i due fattori tra loro.

## Parte III

# Fibrati

## Capitolo 6

# Fibrati vettoriali

**Definizione 6.1.** Un **fibrato vettoriale** di rango  $m$  su una varietà  $X$  è una mappa  $p: E \rightarrow X$  che soddisfa le seguenti proprietà. Lo spazio

$$E \times_X E := \{(a, b) \in E \times E \mid p(a) = p(b)\}$$

è munito di una mappa somma  $+: E \times_X E \rightarrow E$  e di un prodotto per scalare  $\cdot: \mathbb{K} \times_X E \rightarrow E$  tali che, detta  $q: E \times_X E \rightarrow X$  la proiezione  $q(a, b) := p(a) = p(b)$ , i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{array}{ccc} E \times_X E & \xrightarrow{+} & E \\ & \searrow q \quad \swarrow p & \\ & X & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times_X E & \xrightarrow{\cdot} & E \\ & \searrow p \quad \swarrow p & \\ & X & \end{array}$$

Inoltre vale una condizione di trivializzazione locale, cioè per ogni  $x$  in  $X$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e una mappa lineare sulle fibre tale che

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & U \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_U & \\ & U & \end{array}$$

**Esempio 6.2.**  $X \times \mathbb{K}^m$  con la mappa di proiezione su  $X$  è un fibrato vettoriale, detto **fibrato banale**.

**Esempio 6.3.** Sia  $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$  e consideriamo

$$E = \{(\ell, v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{K}^2 : v \in \ell\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$$

dove la somma è data da  $(\ell, v) + (\ell, w) = (\ell, v + w)$ . Questo è detto il **fibrato tautologico**.

**Esercizio 6.4.** Consideriamo la coppia  $(E, p)$  dell'esempio precedente. Mostrare che

1. È un fibrato vettoriale.



2. Non è il fibrato banale<sup>1</sup>.

## 6.1 Cocicli e banalizzazioni

**Osservazione 6.5.** Se  $p : E \rightarrow X$  è un fibrato vettoriale su  $X$  di rango  $m$  allora esiste un ricoprimento (finito)  $\{U_i\}$  di  $X$  tale che per ogni  $i$

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

**Definizione 6.6** (Cocicli). Dato un ricoprimento  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  di  $X$  definiamo gli **1-cocicli** relativi al ricoprimento come

$$Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) = \{ \{ \alpha_{i,j} \} \mid \alpha_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \text{GL}(m), \alpha_{i,h} = \alpha_{j,h} \alpha_{i,j}, \alpha_{i,i}(u) = I_m \}.$$

**Proposizione 6.7.** Se  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento banalizzante per il fibrato  $p : E \rightarrow X$  allora esso definisce dei cocicli indotti dalle mappe di transizione.

*Dimostrazione.*

Se  $U_{i,j} = U_i \cap U_j$  allora abbiamo degli isomorfismi<sup>2</sup>

$$\varphi_{i,j} = \varphi_j|_{U_{i,j}} \circ \varphi_i|_{U_{i,j}}^{-1} : U_{i,j} \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_{i,j} \times \mathbb{K}^m$$

Sia  $\varphi_{i,j}(u, v) = (u, \alpha_{i,j}(u)(v))$ . Questo definisce delle mappe regolari

$$\alpha_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \text{GL}(m).$$

Notiamo inoltre che su  $U_{i,j,h} \times \mathbb{K}^m$

$$\varphi_{j,h} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_h \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_{i,h}.$$

Vedendo queste identità in termini delle  $\alpha_{i,j}$  abbiamo mostrato

$$\alpha_{i,h}(u) = \alpha_{j,h}(u) \alpha_{i,j}(u).$$

Chiaramente  $\varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = id_{U_i \times \mathbb{K}^m}$  quindi  $\alpha_{i,i}(u) = I_m$ . □

**Proposizione 6.8.** Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento di  $X$ . Una collezione di cocicli  $\alpha \in Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m))$  determina un fibrato vettoriale su  $X$ .

<sup>1</sup>Una intuizione geometrica importante (seppur lontana da essere una dimostrazione) che giustifica la non banalità è che il fibrato banale di rango 1 “topologicamente” è un cilindro mentre il fibrato tautologico è un nastro di Möbius.

<sup>2</sup>da ora in poi eviteremo di scrivere ogni volta le restrizioni

*Dimostrazione.*

Definiamo lo spazio totale come il seguente coprodotto fibrato

$$E_\alpha := \frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{(u, v) \sim (u, \alpha_{i,j}(u)(v))}.$$

Siano  $\psi_i : U_i \times \mathbb{K}^m \rightarrow E_\alpha$  le mappe ovvie verso il coprodotto.

Su  $E_\alpha$  imponiamo la seguente topologia:  $V$  è aperto in  $E_\alpha$  se e solo se  $\psi_i^{-1}(V)$  è aperto in  $U_i \times \mathbb{K}^m$  per ogni  $i$ .

Se  $V$  è aperto in  $E_\alpha$  allora, poiché la regolarità è una condizione locale, si ha

$$f \in \mathcal{O}_{E_\alpha}(V) \iff f \circ \psi_i \in \mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(V)) \quad \forall i.$$

Affermiamo che  $\psi_i$  è iniettiva, aperta e regolare per ogni  $i$ :

**Iniettiva** Supponiamo  $\psi_i(u, v) = \psi_i(u', v')$ , allora

$$U_i \times \mathbb{K}^m \ni (u, v) \sim (u', v') \in U_i \times \mathbb{K}^m \xrightarrow{\alpha_{i,i} = id_{U_i}} u = u', v = v'.$$

**Aperta** Se  $W \subseteq U_i \times \mathbb{K}^m$  aperto e  $\widetilde{W} = \psi_i(W) \subseteq E_\alpha$  allora dobbiamo verificare che  $\psi_j^{-1}(\widetilde{W})$  è aperto per ogni  $j$ . Consideriamo la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} (u, v) &\in \psi_j^{-1}(\widetilde{W}) \subseteq U_j \times \mathbb{K}^m \\ \psi_j(u, v) &\in \widetilde{W} = \psi_i(W) \\ \exists (u', v') &\in W \subseteq U_i \times \mathbb{K}^m \text{ t.c. } \psi_j(u, v) = \psi_i(u', v') \text{ in } E_\alpha \\ \exists (u', v') &\in W \text{ t.c. } U_j \times \mathbb{K}^m \ni (u, v) \sim (u', v') \in U_i \times \mathbb{K}^m \\ (u, \alpha_{j,i}(u)(v)) &\in W \end{aligned}$$

cioè  $\psi_j^{-1}(\widetilde{W})$  è la preimmagine di  $W$  tramite la mappa  $U_{i,j} \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$  che è continua.

**Regolare**  $\psi_i$  è continua per definizione della topologia di  $E_\alpha$ . Essendo la regolarità una condizione locale, per come abbiamo definito la topologia su  $E_\alpha$  anche la condizione sui pullback è chiara.

Abbiamo dunque mostrato che  $\psi_i(U_i \times \mathbb{K}^m) \cong U_i \times \mathbb{K}^m$ .

La struttura vettoriale sulle fibre di  $E_\alpha$  è quella indotta dal coprodotto in modo ovvio.  $\square$

**Osservazione 6.9.** Se  $U_i$  è un aperto di  $X$  che banalizza  $p : E \rightarrow X$  notiamo che possono essere definiti diversi isomorfismi tra  $p^{-1}(U_i)$  e  $U_i \times \mathbb{K}^m$

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_i} \\ \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} \end{array} & U_i \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

In particolare questi definiscono diverse mappe di transizione e diversi cocicli.

Studiamo la “differenza” tra le mappe di transizione

$$\chi_i := \tilde{\varphi}_i \circ \varphi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$$

Come notazione scriviamo  $\chi_i(u, v) = (u, \beta_i(u)(v))$ . Notiamo che

$$\tilde{\varphi}_{i,j} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} = \tilde{\varphi}_j \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} = \chi_j \circ \varphi_{i,j} \circ \chi_i^{-1},$$

quindi in termini di cocicli  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$  o equivalentemente  $\tilde{\alpha}_{i,j} \beta_i = \beta_j \alpha_{i,j}$ .

Questo ci spinge a dare la seguente definizione:

**Definizione 6.10** (Coomologia). Definiamo due cocicli  $\alpha_{i,j}$  e  $\tilde{\alpha}_{i,j}$  *equivalenti* se esiste  $\beta_i : U_i \rightarrow \text{GL}(m)$  tale che  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$ . Definiamo il **primo insieme di coomologia** come

$$H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) = Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) / \sim.$$

**Teorema 6.11.** Se  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento aperto di  $X$  allora abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{Fibrati vett. che si banalizzano su } \mathcal{U}\}_{\text{iso. di fibr.}} \xleftarrow{\sim} H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)).$$

*Dimostrazione.*

Ad un fibrato associo una collezione di cocicli e quindi una classe in coomologia. Questa associazione è ben definita perché cambiando cocicli associati alla stessa banalizzazione essi sono equivalenti.

Cambiare la classe di isomorfismo del fibrato non cambia la classe di coomologia perché l'isomorfismo sugli aperti banalizzanti induce un automorfismo che corrisponde a cambiare cocicli.

Viceversa, dati dei cocicli sappiamo costruire un fibrato come in (6.8). Se  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  sono cocicli equivalenti allora mostriamo che  $E_\alpha \cong E_{\tilde{\alpha}}$  come fibrati. Se  $\beta_i$  sono tali che  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$  allora abbiamo una ovvia mappa tra i fibrati

$$\frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{\sim_\alpha} \xrightarrow{\coprod id_{U_i} \times \beta_i(u)(v)} \frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{\sim_{\tilde{\alpha}}}$$

che si verifica essere un isomorfismo (Esercizio). □

## 6.2 Sezioni di un fibrato

**Definizione 6.12** (Sezioni di un fibrato). Dato un fibrato vettoriale  $p: E \rightarrow X$  e dato un aperto  $U$  di  $X$ , definiamo le **sezioni** di  $U$  come

$$\Gamma(U, E) := \{\sigma : U \rightarrow E \mid p \circ \sigma = id_U\}.$$

**Osservazione 6.13.**  $\Gamma(U, E)$  eredita la somma dal fibrato:

$$(\sigma + \tau)(u) = \sigma(u) + \tau(u)$$

dove il membro di destra è l'immagine della coppia  $(\sigma(u), \tau(u)) \in E \times_X E$  tramite la mappa  $+$ . Se  $f$  è in  $\mathcal{O}_X(U)$  e  $\sigma \in \Gamma(U, E)$ , allora è definito  $f \cdot \sigma$  in modo analogo.

Insieme questi fatti mostrano che  $\Gamma(U, E)$  è un  $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo.

**Esempio 6.14** (Sezioni del fibrato banale).

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{K}^m & \supseteq & U \times \mathbb{K}^m \\ \downarrow & & \downarrow p \quad \curvearrowright \\ X & \supseteq & U \end{array}$$

Consideriamo  $\sigma(u) = (u, \alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u))$ , dove  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{K}$ . Allora

$$\Gamma(U, U \times \mathbb{K}^m) \cong \mathcal{O}_X(U)^m.$$

Studiamo ora le sezioni di un fibrato qualsiasi.

**Proposizione 6.15.** Siano  $p : E \rightarrow X$  un fibrato vettoriale e  $\mathcal{U}$  un ricoprimento banalizzante per questo. Dare  $\sigma \in \Gamma(X, E)$  è equivalente a dare delle  $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^m$  per ogni aperto del ricoprimento che verificano

$$\sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i \quad (\text{condizione di cociclo})$$

dove  $\alpha_{i,j}$  sono dei cocicli per il fibrato.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\varphi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$  e  $\alpha_{i,j}$  come prima. Se  $\sigma \in \Gamma(X, E)$  allora

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma|_{U_i} : U_i \rightarrow E|_{U_i}, \quad \sigma_i := \pi_{\mathbb{K}^m} \circ \varphi_i \circ \tilde{\sigma}_i$$

$$\varphi_i \circ \tilde{\sigma}_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{K}^m \\ u & \longmapsto & (u, \sigma_i(u)) \end{array}$$

Su  $U_{i,j}$  abbiamo

$$\tilde{\sigma}_j = \varphi_{i,j} \circ \tilde{\sigma}_i, \quad \sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i$$

quindi da  $\sigma$  abbiamo trovato delle  $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^m$  che verificano  $\sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i$ .

Viceversa dati questi dati essi si possono incollare a  $\sigma : X \rightarrow E$  perché la condizione di cociclo garantisce che le  $\sigma_i$  coincidano sulle intersezioni degli aperti del ricoprimento.  $\square$

### 6.2.1 Fibrati lineari sulla retta proiettiva

**Notazione.** Scriviamo  $\mathbb{A}^1 \cong U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$  e  $\mathbb{A}^1 \cong U_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ , da cui

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \cong U_{0,\infty} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}.$$

Scriviamo dunque  $\mathbb{K}[U_0] = \mathbb{K}[z]$ ,  $\mathbb{K}[U_\infty] = \mathbb{K}[w]$  e  $\mathbb{K}[U_{0,\infty}] = \mathbb{K}[z, z^{-1}]$  con  $w = z^{-1}$ .

**Osservazione 6.16.** Rispetto a questo ricoprimento i cocicli sono

$$Z^1(\mathcal{U}) = \{\alpha_{0,\infty} : U_{0,\infty} \rightarrow \mathrm{GL}(1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} U_{0,\infty} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(1) \\ z & \longmapsto & \lambda z^n \end{array} \mid n \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{K}^\times \right\}$$

A priori sono mappe della forma  $z \mapsto p(z)$  ma se comparissero più monomi allora ci sarebbero radici diverse da 0, quindi esisterebbe  $a \in U_{0,\infty}$  tale che  $p(a) = 0 \notin \mathrm{GL}(1)$ .

**Osservazione 6.17.** Si ha

$$H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(1)) = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

*Dimostrazione.*

Se  $\alpha = \lambda z^n$  e  $\tilde{\alpha} = \mu z^m$  sono cocicli equivalenti allora esistono  $\beta_0 : U_0 \rightarrow \mathrm{GL}(1)$  e  $\beta_\infty : U_\infty \rightarrow \mathrm{GL}(1)$  tali che

$$\mu z^m = \tilde{\alpha} = \beta_\infty \alpha \beta_0^{-1} = \lambda \beta_\infty \beta_0^{-1} z^n \implies n = m$$

Se  $n = m$  allora possiamo sempre trovare  $\beta_0$  e  $\beta_\infty$ , quindi abbiamo mostrato

$$H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(1)) = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

□

**Proposizione 6.18.** Le sezioni globali dei fibrati lineari su  $\mathbb{P}^1$  sono

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, E_{z^{-n}}) = \begin{cases} \mathbb{K}[z]_n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo due sezioni  $\sigma_0 = f(z)$  e  $\sigma_\infty = g(w)$  tali che  $\sigma_\infty = \alpha_{0,\infty} \sigma_0$ . Per quanto detto possiamo scegliere  $\alpha_{0,\infty} = z^{-n}$ , da cui sull'intersezione  $U_{0,\infty}$  abbiamo

$$g(z^{-1}) = z^{-n} f(z).$$

Scrivendo le espansioni troviamo

$$g(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots \quad z^{-n} f(z) = b_0 z^{-n} + b_1 z^{1-n} + \dots$$

dunque:

$n < 0$  In questo caso imporre uguaglianza impone che ogni coefficiente sia nullo, cioè  $\sigma_0 = \sigma_\infty = 0$  e quindi il  $\sigma$  a cui corrispondono è 0.

$n \geq 0$  Imponendo l'uguaglianza troviamo

$$f(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

cioè un generico polinomio di grado  $n$ .

□

### 6.2.2 Fibrati vettoriali su varietà affini

**Osservazione 6.19.** Se  $X$  è una varietà affine,  $A = \mathbb{K}[X]$  e  $E$  è un fibrato vettoriale di rango  $m$  su  $X$  allora  $M = \Gamma(X, E)$  è un  $A$ -modulo.

**Osservazione 6.20.** Supponiamo che  $E$  si banalizzi su aperti affini  $X_i$  tali che<sup>3</sup>  $\mathbb{K}[X_i] = A_{f_i}$ . Siano  $\alpha_{i,j}$  i cocicli e consideriamo la mappa

$$J : \begin{array}{ccc} \bigoplus_i (A_{f_i})^m & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} (A_{f_i f_j})^m \\ (\sigma_i) & \longmapsto & (\sigma_j - \alpha_{i,j} \sigma_i) \end{array}$$

Per quanto detto  $\Gamma(X, E) = \ker J$ .

**Proposizione 6.21.**  $\Gamma(X_f, E) = \Gamma(X, E)_f$

*Dimostrazione.*

Su  $X_f = U \subseteq X$  abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, E) & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i]^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j}]^m \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(U, E) & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i \cap U]^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j} \cap U]^m \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, E)_f & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i]_f^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j}]_f^m \end{array}$$

□

**Corollario 6.22.** Se  $E$  su  $X_f$  è banale allora

$$\Gamma(X, E)_f \cong \mathbb{K}[X_f]^m = (A_f)^m.$$

**Osservazione 6.23.** Il modulo  $M = \Gamma(X, E)$  è localmente libero, cioè per ogni  $x \in X$  esiste  $f \in A$  tale che  $f(x) \neq 0$  e  $M_f \cong (A_f)^m$ .

<sup>3</sup>ricordiamo che aperti di questo tipo formano una base per la topologia di Zariski.

## Capitolo 7

# Fibrati con azione di gruppo

**Definizione 7.1.** Se  $X$  è una  $G$ -varietà, un  $G$ -fibrato su  $X$  è un fibrato vettoriale  $p: E \rightarrow X$  su  $X$  per cui esiste un'azione lineare di  $G$  su  $E$  tale che  $p$  è  $G$ -equivariante.

**Osservazione 7.2.** In questo caso,  $\Gamma(X, E)$  ha un'azione lineare di  $G$ , data da

$$(g \cdot \sigma)(x) = g(\sigma(g^{-1}x)).$$

Si potrebbe dimostrare che  $G$  agisce in modo regolare su  $\Gamma(X, E)$ , e quindi che  $\Gamma(X, E)$  è una rappresentazione algebrica di  $G$ . (Non lo faremo.)

**Definizione 7.3.** Dati due fibrati vettoriali  $p_1: E_1 \rightarrow X$  e  $p_2: E_2 \rightarrow X$  su  $X$ , un **morfismo di fibrati** è una mappa  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  che preserva la somma e il prodotto per scalare e tale che  $p_2 \circ \varphi = p_1$ . Diciamo che  $\varphi$  è **equivariante** se commuta con  $G$ .

**Osservazione 7.4.** Per ogni  $x_0$  in  $X$ , un morfismo  $\varphi$  definisce una mappa lineare  $\varphi_{x_0}: (E_1)_{x_0} \rightarrow (E_2)_{x_0}$ .

### 7.1 Classificazione dei fibrati vettoriali equivarianti

**Proposizione 7.5.** Le classi di isomorfismo fibrati vettoriali  $G$ -equivarianti di rango  $m$  su  $X = G/H$  sono in corrispondenza con le classi di isomorfismo delle rappresentazioni  $m$ -dimensionali di  $H$ .

*Dimostrazione.*

Costruiamo esplicitamente questa corrispondenza:

Dato un fibrato vettoriale  $G$ -equivariante  $p: E \rightarrow G/H$  e posto  $x_0 = H = e_{G/H}$ , possiamo considerare la fibra  $E_{x_0}$  e chiaramente  $H$  agisce su  $E_{x_0}$ .

Data una rappresentazione  $V$  di  $H$ , consideriamo  $G \times V$  con l'azione di  $H$  data da

$$h(g, v) = (gh^{-1}, hv).$$

Passando al quoziente in  $H$  abbiamo

$$\begin{array}{ccc} E = \frac{G \times V}{H} & \longrightarrow & X = G/H \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ [g, v] & \longmapsto & [g] \end{array}$$

Notiamo che

$$[g, v] + [gh, u] = [g, v] + [g, hu] = [g, v + hu]$$

e che

$$\lambda[g, v] = [g, \lambda v],$$

quindi le fibre hanno una struttura vettoriale.

Per concludere andrebbe mostrato che  $E$  è una varietà algebrica, che la mappa costruita è regolare e che abbiamo la trivializzazione locale.  $\square$

**Esempio 7.6.** Se vogliamo costruire fibrati  $G$ -equivarianti lineari (cioè di rango 1) su  $GL(n)/B_n$ , sappiamo che questi corrispondono alle rappresentazioni 1-dimensionali di  $B_n$

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^\times \\ & \searrow & \nearrow \\ & T = B_n/U_n & \end{array}$$

Quindi queste possono essere caratterizzate attraverso i caratteri del toro.