# Gruppi algebrici lineari

Corso del prof. Maffei Andrea

Antonio Di Nunzio e Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

# Indice

# Introduzione

## Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

**Esempio 0.1.** Il gruppo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ agisce su $\mathbb{C}^2$, e quindi anche sulle funzioni definite su $\mathbb{C}^2$, infatti se $f : \mathbb{C}^2 \to X$ abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

**Domanda:** come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x, y]_d = \left\langle x^d, x^{d-1}y, \cdots, y^d \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio $V_2 = \mathbb{C}[x, y]_2 = \left\langle x^2, xy, y^2 \right\rangle$. I suoi elementi sono $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$. Segue che $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$ sono le funzioni polinomiali su $V_2$. Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$.

# Parte I

# Prerequisiti

# Capitolo 1

# Teoria delle rappresentazioni

## 1.1 Definizioni

**Definizione 1.1** (Rappresentazione)**.** Sia $G$ un gruppo e $\mathbb{K}$ un campo. Una **rappresentazione** di $G$ su $\mathbb{K}$ (o $G$**-modulo**) è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $V$ munito di una azione $\mathbb{K}$-lineare di $G$, cioè esiste una mappa

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g, v) & \longmapsto & g \cdot v \end{array}$$

con le proprietà[a]

- $e \cdot v = v$
- $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$
- $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda g \cdot u + \mu g \cdot v$

[a] in futuro potrò abbreviare omettendo il $\cdot$.

**Osservazione 1.2.** Dare una rappresentazione è equivalente a dare un morfismo di gruppi $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ dove $\rho(g)v = g \cdot v$.

**Definizione 1.3** (Sottorappresentazione)**.** Dato $U \subseteq V$ con $V$ rappresentazione di $G$, $U$ è una **sottorappresentazione** se $U$ è sottospazio vettoriale $G$-invariante.

**Osservazione 1.4.** Data $U \subseteq V$ sottorappresentazione, possiamo definire una struttura naturale di rappresentazione su $W = V/U$ ponendo

$$g[v] = [gv].$$

**Definizione 1.5** (Morfismo di $G$-rappresentazioni)**.** Se $V_1, V_2$ sono rappresentazioni di $G$ e abbiamo $\varphi : V_1 \to V_2$ lineare, diciamo che $\varphi$ è un **morfismo di $G$-rappresentazioni o di $G$-moduli** se

$$\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1).$$

**Esempio 1.6.** Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $U \subseteq V$ è morfismo di $G$-moduli

**Esempio 1.7.** Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $V \to V/U$ è morfismo di $G$-moduli

**Osservazione 1.8.** La mappa $\pi : V \to V/U$ è tale che per ogni $\varphi : V \to V'$ di $G$-moduli, se $\varphi(U) = 0$ allora esiste $\chi : V/U \to V'$ di $G$-moduli t.c. $\varphi = \chi \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & V \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & V/U \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\chi"] & 0 \\
& & V' & &
\end{tikzcd}$$

**Definizione 1.9** (Invarianti e coinvarianti)**.** Sia $V$ un $G$-modulo. Definiamo lo **spazio degli invarianti** come

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \forall g \in G\}.$$

Si ha che $V^G$ è una sottorappresentazione du cui $G$ agisce banalmente.
Analogamente definiamo lo **spazio dei coinvarianti** come

$$V_G = V/ \langle v - gv \mid v \in V, g \in G\rangle_{\mathbb{K}}.$$

Notiamo che $\langle v - gv \mid v \in V, g \in G\rangle$ è effettivamente una sottorappresentazione ($h(v - gv) = hv - (hgh^{-1})(hv)$), quindi questo quoziente è ben definito. Notiamo che $G$ agisce banalmente anche $V_G$.

**Notazione.** Se $V$ e $W$ sono $G$-moduli, poniamo

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ di } G\text{-moduli}\}.$$

Notiamo che è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

## 1.2 Costruzioni principali

Se $V_i$ sono rappresentazioni di $G$, $\bigoplus_i V_i$ e $\prod_i V_i$ sono rappresentazioni di $G$. Inoltre $\bigoplus_i V_i$ è sottorappresentazione di $\prod_i V_i$.

**Osservazione 1.10** (Proprietà universale)**.** Consideriamo le inclusioni di $G$-moduli

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus V_i \\ v_i & \longmapsto & (w_j) \end{array}, \quad \text{dove } w_j = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $\varphi_i : V_i \to W$ è di $G$-moduli allora esiste un'unica $\psi : \bigoplus V_i \to W$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \bigoplus V_i \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Vale una proprietà duale per il prodotto.

**Definizione 1.11** (Rappresentazione duale)**.** Se $V$ è $G$-modulo, definiamo una azione di $G$ su $V^*$ definendo $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$. Come notazione useremo

$$\langle g\varphi, v\rangle = \left\langle \varphi, g^{-1}v\right\rangle.$$

La rappresentazione così definita è detta **duale** alla rappresentazione $V$.

**Osservazione 1.12.** $\langle g\varphi, gv\rangle = \langle \varphi, v\rangle$.

**Definizione 1.13** (Prodotto tensore)**.** Se $V$ e $W$ rappresentazioni di $G$, definiamo una azione sul prodotto tensore ponendo

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

**Definizione 1.14** (Omomorfismi)**.** Se $V$ e $W$ rappresentazioni di $G$, definiamo una azione su $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ponendo

$$(gL)(v) = g(L(g^{-1}v)).$$

**Osservazione 1.15.** $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \{L \mid gL = L\}$, ma

$$gL = L \Longleftrightarrow g(L(g^{-1}v)) = gL(v) = L(v) \Longleftrightarrow L(g^{-1}v) = g^{-1}L(v)$$

e poiché questo vale per ogni $g \in G$ ricaviamo che

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \mathrm{Hom}_G(V, W).$$

Ricordiamo che esiste

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \varphi \otimes w & \longmapsto & \{v \mapsto \varphi(v)w\} \end{array}$$

**Osservazione 1.16.** $\Phi$ è iniettiva e $\mathrm{Imm}\,\Phi = \{L : V \to W \mid \mathrm{rnk}\, L < \infty\}$

*Dimostrazione.*
ESERCIZIO □

**Domanda:** $\Phi$ è di $G$-moduli?

*Dimostrazione.*
Per linearità basta considerare elementi della forma $\varphi \otimes w$.

$$\Phi(g(\varphi \otimes w))(v) = \Phi(g\varphi \otimes gw)(v) = g\varphi(v)gw = \varphi(g^{-1}v)gw = g(\Phi(\varphi \otimes w))(v).$$

□

**Definizione 1.17** (Tensori simmetrici e antisimmetrici)**.** Definiamo

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-volte}}$$
$$S^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes x_b \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_b \otimes x_a \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$
$$\bigwedge^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes v \otimes v \otimes x_{a+3} \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

Per il prodotto simmetrico vale una proprietà universale analoga a quella del prodotto tensore, dove al posto di mappe multilineari qualsiasi consideriamo multilineari simmetriche (se $V^n \to W$ multilineare simmetrica, abbiamo $F : V^{\otimes n} \to W$ che passa al quoziente diventando $H : S^n V \to W$, l'unicità segue dall'unicità di $F$ e suriettività di $V^{\otimes n} \to S^n V$).
Un ragionamento completamente analogo vale per $\bigwedge^n V$.

**Osservazione 1.18.** Se $V$ è un $G$-modulo, per quanto detto sul prodotto tensore, $V^{\otimes n}$ è una rappresentazione e quindi anche $S^n V$ e $\bigwedge^n V$ lo sono in quanto suoi quozienti.

**Definizione 1.19** (Algebra tensoriale)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e poniamo $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Definiamo l'**algebra tensoriale** come

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

dove il prodotto è indotto da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

In modo analogo costruiamo l'**algebra simmetrica** $SV$ e l'**algebra antisimmetrica** $\bigwedge V$.

**Osservazione 1.20.** $SV \cong \mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$ dove $\{x_i\}_{i \in I}$ è una base di $V$.

**Definizione 1.21** (Algebra associativa universale)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale, l'**algebra associativa universale** su $V$ consiste in una $\mathbb{K}$-algebra[a] $A$ e un morfismo $\alpha : V \to A$ tale che

1. $\alpha$ è $\mathbb{K}$-lineare
2. per ogni $B$ algebra associativa e per ogni $\beta : V \to B$ $\mathbb{K}$-lineare esiste un unico morfismo $\psi$ di $\mathbb{K}$-algebre tale che

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

[a] $\mathbb{K} \subseteq A$, $A$ anello con unità e $\mathbb{K} \subseteq Z(A)$

**Osservazione 1.22.** Se una algebra associativa universale esiste allora è unica a meno di isomorfismo perché abbiamo dato una proprietà universale.

**Osservazione 1.23.** Un'algebra associativa universale esiste per ogni $V$ ed è datta dall'algebra tensoriale e l'inclusione $V \overset{id}{\to} V^{\otimes 1} \subseteq TV$.

*Dimostrazione.*
Sia $B$ un'algebra associativa e sia $\beta : V \to B$ lineare. Definiamo

$$F : \begin{array}{ccc} TV & \longrightarrow & B \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \beta(v_1) \cdots \beta(v_n) \end{array}$$

La buona definizione segue dal fatto che il prodotto in un'algebra è multilineare. □

**Osservazione 1.24.** Dato $V$ spazio vettoriale possiamo definire analogamente a prima l'algebra associativa universale simmetrica e l'algebra associativa universale antisimmetrica e un loro modello è dato da $SV$ e $\bigwedge V$ rispettivamente.

## 1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici

**Definizione 1.25** (Rappresentazione semplice)**.** Una rappresentazione $S$ di $G$ si dice **semplice** se $S \neq 0$ e se non ha sottorappresentazioni non banali.

**Lemma 1.26** (Lemma di Schur)**.** Sia $S$ una rappresentazione semplice di $G$.

1. Ogni morfismo di $G$-moduli non nullo $\varphi \colon S \to S$ è invertibile.
2. L'insieme $\mathrm{End}_G(S)$ è un corpo e si ha $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathrm{End}_G(S))$.

*Dimostrazione.*
Per il primo punto, osserviamo che $\ker \varphi$ è un sottomodulo di $S$ che non può essere uguale a $S$, quindi è 0. Analogamente $\mathrm{Imm}\, \varphi = S$. Per il secondo punto, sia $F =$

$\mathrm{End}_G(S)$. La moltiplicazione per un elemento $\lambda$ di $\mathbb{K}$ è in $F$ e commuta con tutto $F$. Infine, se $\varphi$ è un elemento non nullo di $F$, per il primo punto $\varphi$ è invertibile e l'inverso è un omomorfismo di $G$-moduli. $\square$

**Esempio 1.27.** Assumiamo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e $\dim_{\mathbb{K}}(S) < +\infty$. Allora abbiamo un contenimento $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathrm{End}_G(S)) \subseteq \mathrm{End}_G(S)$. Poiché la dimensione di $\mathrm{End}_G(S)$ su $\mathbb{K}$ è finita e $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, si ottiene $\mathbb{K} = \mathrm{End}_G(S)$.

**Esercizio 1.28.** Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supponiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(S)$ sia al più numerabile. Mostrare che $\mathrm{End}_G(S) = \mathbb{C}$.

**Esempio 1.29.** Sia $G = C_2 = \{1, \sigma\}$ e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$. Allora la rappresentazione $V = \mathbb{K}^2$ di $G$ data da

$$[\sigma]_{e_1,e_2}^{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è somma di rappresentazioni semplici.

**Definizione 1.30.** Sia $V$ una rappresentazione di $G$.

1. $V$ si dice **semisemplice** se è somma diretta di rappresentazioni semplici.
2. $V$ si dice **completamente riducibile** se per ogni sottorappresentazione $W$ di $V$ esiste una sottorappresentazione $U$ di $V$ tale che $V = U \oplus W$.

**Esempio 1.31.** Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la rappresentazione $V = \mathbb{C}^2$ del gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

non è completamente riducibile: consideriamo la sottorappresentazione di $V$ data da $W = \mathbb{C}e_1$; se esistesse $U = \mathbb{C}v_2$ tale che $V = U \oplus W$, allora nella base $e_1, v_2$ tutte gli elementi $g$ in $G$ sarebbero diagonali

$$[g]_{e_1,v_2}^{e_1,v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonale se $x \neq 0$.

**Proposizione 1.32.** Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. $V$ è somma diretta di rappresentazioni semplici;
2. $V$ è somma di rappresentazioni semplici.

Inoltre, le precedenti condizioni implicano la seguente.

3. $V$ è completamente riducibile.

*Dimostrazione.*
Chiaramente la prima condizione implica la seconda. Proviamo il viceversa. Sia $V = \sum_{i \in I} S_i$ con $S_i$ semplici. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I \colon \sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j \right\}.$$

La famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota in quanto contiene il singoletto $\{i\}$ per ogni $i$ in $I$. Inoltre $\mathcal{F}$ è ordinata parzialmente per inclusione: mostriamo che ogni catena $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di $\mathcal{F}$ ammette il maggiorante $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ in $\mathcal{F}$. Basta mostrare che, per ogni $H \subseteq J$ finito, la somma $\sum_{h \in H} S_h$ è diretta. Poiché $H$ è finito, si ha $H \subseteq J_\alpha$ per qualche $\alpha$ in $A$, dunque la somma $\sum_{j \in J_\alpha} S_j$ è diretta. A questo punto, per il Lemma di Zorn esiste un elemento $M$ in $\mathcal{F}$ massimale. Mostriamo che $V = \bigoplus_{j \in M} S_j$. Per assurdo assumiamo $W \doteqdot \bigoplus_{j \in M} S_j \subsetneq V$ e sia $S_0$ tale che $S_0 \not\subseteq W$. Allora $S_0 \cap W \subseteq S_0$ e $S_0 \oplus W \subset V$, allora $\widetilde{M} = M \cup \{0\}$ è in $\mathcal{F}$, contro la massimalità di $M$ in $\mathcal{F}$.

L'implicazione 1. $\Rightarrow$ 3. è lasciata per esercizio. $\square$

# Capitolo 2

# Geometria Algebrica

In questa sezione, assumeremo sempre $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso.

## 2.1 Varietà affini immerse

**Definizione 2.1.** Un sottoinsieme $X$ di $\mathbb{K}^n$ si dice una **varità algebrica affine (immersa)** se esistono $f_1, \ldots, f_h$ in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che

$$X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f_1(v) = \ldots = f_h(v) = 0\}.$$

Data una varità algebrica affine immersa $X$, denotiamo

$$I(X) \doteqdot \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } v \in X\}.$$

L'insieme $I(X)$ risulta un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Viceversa, se $J$ è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, denotiamo

$$V(J) \doteqdot \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } f \in J\}.$$

Richiamiamo inoltre il classico Teorema degli Zeri di Hilbert.

**Notazione.** Nel seguito, denoteremo con $P$ l'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

**Teorema 2.2** (Nullstellensatz)**.** Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso e $I, J$ sono ideali di $P$ allora

$$V(I) = V(J) \Longleftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

In particolare abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{varietà algebriche affini immerse in } \mathbb{K}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

**Esempio 2.3.** Vediamo qualche controesempio classico.

- Se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz non vale: ad esempio per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il polinomio $X^2 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ genera un ideale proprio (massimale) $J$ tale che $V(J) = \emptyset$.
- La corrispondenza precedente non vale per gli ideali in generale: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, l'ideale $J = (x^2)$ è tale che $V(J) = \{0\}$, ma $I(V(J)) = (x) \neq J$.

Vediamo ora alcune conseguenze del Nullstellensatz.

1. Gli ideali massimali di $P$ sono tutti e solo quelli della forma $m_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$, con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in $\mathbb{K}^n$.

   *Dimostrazione.*
   Che i precedenti siano tutti ideali massimali è evidente, mostriamo che sono i soli. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di $P$. Allora $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ (in quanto altrimenti avremmo $P = I(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$), dunque esiste un $\alpha$ in $\mathbb{K}^n$ appartenente a $V(\mathfrak{m})$. Ma allora $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$ e per massimalità di $\mathfrak{m}_\alpha$ si ottiene l'uguaglianza. □

2. Sia $I \subseteq P$ e sia $\alpha$ in $V(I)$. Allora $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$ e in generale

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I\}.$$

Ricordiamo inoltre (mostrarlo per esercizio) che se $I$ è un ideale di $P$, allora si ha

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(P) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

**Definizione 2.4.** Sia $X$ una varietà algebrica affine immersa in $\mathbb{K}^n$. Si definisce l'**anello delle coordinate** di $X$ come il quoziente

$$\mathbb{K}[X] = P/I(X) = \{ f|_X : f \in P \}.$$

Ricordiamo che su $\mathbb{K}^n$ è definita una topologia, detta **topologia di Zariski**, in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi $V(I)$ al variare degli ideali $I$ in $P$. Ricordiamo infatti che, se $I, J$ sono ideali di $P$, allora

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$;
- $\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V\left(\sum_{i \in I} I_i\right)$.

**Esempio 2.5.** Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, i chiusi sono gli insiemi con un numero finito di punti, oppure tutto $\mathbb{C}$.

**Definizione 2.6.** Sia $f$ un elemento di $P$. Si definisce l'**aperto principale** relativo a $f$ come

$$(\mathbb{K}^n)_f \doteqdot \mathbb{K}^n \setminus V(f) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Se $U = \mathbb{K}^n \setminus V(I)$ è un aperto e $\alpha$ è in $U$, allora esiste $f$ in $P$ tale che $\alpha \in (\mathbb{K}^n)_f \subseteq U$. Infatti $I = (f_1, \dots, f_h)$, $V(I) \subseteq V(f_i)$ e $(\mathbb{K}^n)_{f_i} = \mathbb{K}^n \setminus V(f_i) \subseteq U$.

Dotiamo ogni varietà algebrica affine immersa in $\mathbb{K}^n$ della topologia di sottospazio. Inoltre, definiamo

$$X_f \doteqdot (\mathbb{K}^n)_f \cap X = \{\alpha \in X \colon f(\alpha) \neq 0\}.$$

**Osservazione 2.7.** L'insieme

$$\left\{ \frac{g}{f^n} : g \in P \right\}$$

è ben definito su $(\mathbb{K}^n)_f$.

**Definizione 2.8** (Funzioni regolari)**.** Sia $U$ un aperto di $\mathbb{K}^n$. Si definisce l'insieme delle **funzioni regolari** su $U$ come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ f \colon U \to \mathbb{K} \mid \forall \alpha \in U \ \exists g, h \in P \colon g(\alpha) \neq 0 \text{ e } f = h/g^n \text{ su } U \cap X_g \}.$$

**Lemma 2.9.** Sia $X$ varietà affine immersa, allora

1. $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}[X]$
2. Se $g \in \mathbb{K}[X]$ allora $\mathcal{O}(X_g) = \mathbb{K}[X]_g$

*Dimostrazione.*
Intanto l'affermazione 2. implica l'affermazione 1. scegliendo $g \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Osserviamo che se abbiamo una funzione della forma $f/g^n$ allora essa appartiene a $\mathcal{O}(X_g)$, quindi basta mostrare che se $\varphi \in \mathcal{O}(X_g)$ allora $\varphi \in \mathbb{K}[X]_g$. Per definizione, per ogni $\alpha \in X_g$ esistono $h$ e $k$ tali che $\varphi = k/h$ in $X_g \cap X_h = X_{gh}$.

Abbiamo dunque un ricoprimento $X_g = \bigcup X_{gh_i}$ dove $\varphi = k_i/h_i$ su $X_{gh_i}$. Sia $I = (h_i)$ l'ideale in $\mathbb{K}[X]_g$ generato dagli $h_i$. Se per assurdo $I \neq \mathbb{K}[X_g]$ allora esiste un massimale $\mathfrak{m}$ che contine $I$. Un massimale corrisponde ad un punto $\alpha \in X_g \subseteq X$ ma, poiché $X_g$ è ricoperto dagli $X_{gh_i}$, esiste un indice $i_0$ tale che $\alpha \in X_{gh_{i_0}}$ e questo è assurdo perché vorrebbe dire

$$h_{i_0} \notin \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I \ni h_{i_0}.$$

Questo mostra che $I = \mathbb{K}[X_g]$. Possiamo dunque scrivere[1] $1 = \sum \alpha_i h_i$ per opportuni $\alpha_i$. Segue che $\varphi = \sum \alpha_i h_i \varphi = \sum \alpha_i k_i$ in $\mathbb{K}[X]_g$, infatti dove $h_i \neq 0$ abbiamo $\varphi = k_i/h_i$ e quindi $h_i \varphi = k_i$, se invece $h_i(x) = 0$ si ha che $h_i(x)\varphi(x) = 0 = k_i(0)$, perché se così non fosse, poiché $x \in X_{h_j}$ per qualche $j \neq i$, si ha che

$$k_j/h_j = k_i/h_i \iff h_i k_j = k_i h_j$$

su $X_{h_i h_j}$ e quindi valutando in $x$ abbiamo $k_i(x)h_j(x) = 0$ con $h_j(x) \neq 0$. □

[1] nota che la somma è finita per definizione di ideale generato.

## 2.2 Varietà algebriche e morfismi

**Definizione 2.10** (Varietà algebrica)**.** Spazio topologico compatto $X$ tale che per ogni aperto $U$ abbiamo un insieme di funzioni $\mathcal{O}_X(U) \subseteq C^0(X \to \mathbb{K})$ tale che

1. Se $U \subseteq V$ e $f \in \mathcal{O}_X(V)$ allora $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$.
2. Se $V = \bigcup U_\alpha$ e $f : V \to \mathbb{K}$ è tale che $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ per ogni $\alpha$ allora $f \in \mathcal{O}_X(V)$.
3. $(X, \mathcal{O}_X)$ è localmente isomorfo ad una varietà affine immersa, cioè per ogni $x \in X$ esiste un intorno $U$ e un omeomorfismo $\varphi : U \to Y$ con $Y$ affine tale che per ogni $V$ aperto di $U$ si ha $\varphi(V) = W$ aperto e $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_X(V)$ è un isomorfismo.

**Esempio 2.11.** Sia $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2} \supseteq V_{\det} = \mathrm{GL}(n) = X$. Se $U$ è un aperto di $X$ pongo $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_V(U)$. Dimostriamo che $X$ è localmente isomorfo ad una varietà affine (in realtà possiamo morstrare che è isomorfo ad una varietà affine globalmente):

Sia $Y \subseteq \mathbb{K}^{n^2+1} = V_{x_{ij}} \times \mathbb{K}_t$ definito dall'equazione $d(x_{ij})t = 1$. La mappa

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ (x_{ij}) & \longmapsto & (x_{ij}, \frac{1}{\det(x_{ij})}) \end{array}$$

risulta essere un isomorfismo.

**Proposizione 2.12.** Se $X$ è una varietà affine immersa in $\mathbb{K}^N$, $X_f$ è una varietà isomorfa ad una varietà affine immersa $Y$ data da $V((\{f(x), f(x)t - 1\}_{f \in I(X)})) \subseteq \mathbb{K}^N_x \times \mathbb{K}_t$.

*Dimostrazione.*
ESERCIZIO. □

**Esempio 2.13.** Sia $X = \mathbb{P}^1$. Come spazio topologico, i chiusi sono $\mathbb{P}^1, \emptyset$ e sottoinsiemi finiti di punti. Per ogni $U$ aperto di $\mathbb{P}^1$ poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{K} \mid f \circ \varphi_1 \in \mathcal{O}(\varphi_1^{-1}(U)), f \circ \varphi_2 \in \mathcal{O}(\varphi_2^{-1}(U)) \right\}$$

dove

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [t:1] \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1:t] \end{array}.$$

**Definizione 2.14** (Funzione regolare)**.** Se $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ sono varietà, la mappa $\varphi : X \to Y$ è **regolare** se

1. $\varphi$ è continua
2. Per ogni $W$ aperto di $Y$, se $f \in \mathcal{O}_Y(W)$ allora $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(W))$

**Definizione 2.15** (Varietà affine)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ è una **varietà affine** se è isomorfa ad una varietà affine immersa.

Se $X$ è una varietà affine immersa, un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ induce un omomorfismo di anelli

$$\varphi^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

in particolare possiamo definire $f_i = \varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi$ in $\mathbb{K}[X]$ tali che $\varphi(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ per definizione.

Viceversa, dati $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{K}[X]$ si ha che $\varphi(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ è una mappa regolare.

Cont. Ovvio.

Pullback Sia $U = D(g) \subseteq \mathbb{K}^n$. Notiamo che

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid h(x) \doteqdot g(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \neq 0\} = X_h$$

Se $\alpha : U \to \mathbb{K}$ è regolare, $\alpha = \ell/g^n$ con $\ell \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, quindi

$$\alpha \circ \varphi = frac\ell(f_1, \cdots, f_n)h^n$$

che è un elemento di $\mathcal{O}(X_h)$ come voluto.

**Proposizione 2.16** (Morfismi verso affine)**.** Se $Y$ è una varietà affine allora un morfismo $\varphi : X \to Y$ è univocamente determinato dall'omomorfismo $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$.

*Dimostrazione.*
Sia $\psi : X \to \mathbb{K}^n$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & Y \arrow[d, "\subseteq"] \\ & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Notiamo che $\varphi$ è morfismo se e solo se $\psi$ lo è. Se $\psi(X) \subseteq Y$ e $f \in I(Y)$ allora $\psi^*(f) = f \circ \varphi = 0$, quindi abbiamo un diagramma di algebre.

Viceversa se un morfismo di algebre sollevo e bla bla bla trovo morfismo di varietà. □

**Definizione 2.17** (Prodotto)**.** Siano $X, Y$ varietà affini immerse in $\mathbb{K}^\ell_x$ e $\mathbb{K}^m_y$ rispettivamente, allora $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{\ell+m}_{(x,y)}$ è una varietà, data da

$$X \times Y = V((\{f(x), g(y)\}_{f \in I(X), g \in I(Y)})) \subseteq \mathbb{K}^\ell \times \mathbb{K}^m.$$

**Proposizione 2.18.** $\mathbb{K}[X \times Y] \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$

*Dimostrazione.*
L'anello delle coordinate del prodotto di due varietà affini è dato da

$$\mathbb{K}[X \times Y] = \frac{\mathbb{K}x_1, \cdots, x_\ell, y_1, \cdots, x_\ell}{f(x), g(y)} \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

Infatti abbiamo un morfismo bilineare da $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X \times Y]$ dato dal prodotto dei polinomi. Il morfismo indotto $\Phi$è surgettivo perché $x_i = \Phi(x_i \times 1)$ e $y_i = \Phi(1 \otimes y_i)$, quindi abbiamo i generatori. Per l'iniettività procediamo per casi

- Supponiamo $X = \mathbb{K}^\ell$ e $Y = \mathbb{K}^m$, allora abbiamo una inversa di $\Phi$ data da

$$x_i \mapsto x_i \otimes 1, \qquad y_i \mapsto 1 \otimes y_i$$

- Scrivendo $\mathbb{K}[X \times Y]$ come $\frac{\mathbb{K}[x_1, \cdots, y_\ell]}{(f(x), g(y))}$ abbiamo un morfismo dal numeratore verso $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$ ben definito e notiamo che il nucleo è esattamente $(f(x), g(y))$. (dimostrare che protto tensore di $\mathbb{K}$-alegbre ridotte finitamente generate è ridotta.)

□

**Definizione 2.19** (Prodotto fibrato)**.** Se $X, Y, Z$ varietà affini e morfismi $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$, definiamo $W = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

**Osservazione 2.20.** Notiamo che $W$ è un chiuso, infatti è luogo di zeri di $f(x) - g(y)$ in $X \times Y$. Osserviamo però che queste equazioni non sono ridotte a priori.

## 2.3 Connessione e Irriducibilità

Sia $X$ uno spazio topologico connesso. Allora

1. Se $Y \subset X$ è connesso, allora $\overline{Y}$ è connesso.
2. Se $\varphi\colon X \to Y$ è continua, allora $\varphi(X)$ è connesso.

**Esercizio 2.21.** Se $X$ è una varietà algebrica affine, allora

$$X \text{ sconnesso} \iff \mathbb{K}[X] = A \times B.$$

**Esercizio 2.22.** Siano $X, Y$ due varietà affini connesse. Allora $X \times Y$ è connessa. [Attenzione: la topologia di $X \times Y$ non è la topologia prodotto!]

**Esercizio 2.23.** Se $X$ è una varietà, allora $X$ ha un numero finito di componenti connesse. In particolare le componenti connesse sono chiuse e aperte.

**Definizione 2.24.** Uno spazio topologico $X$ si dice **riducibile** se esistono due sottospazi chiusi propri $Z$ e $W$ di $X$ tali che $X = Z \cup W$. Lo spazio $X$ si dice **irriducibile** se non è riducibile.

**Osservazione 2.25.** Se $X$ è uno spazio di Hausdorff irriducibile, allora $X$ è un punto.

*Dimostrazione.*
Se $x, y$ sono punti distinti di $X$, allora esistono due intorni disgiunti $U_x$ e $U_y$ di $x$ e $y$ rispettivamente. Posti $Z = X \setminus U_y$ e $W = X \setminus U_x$, si ottiene $X = Z \cup W$. $\square$

**Osservazione 2.26.** Sia $X$ una varietà affine. Allora $X$ è irriducibile se e solo se l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ è un dominio d'integrità.

*Dimostrazione.*
Siano $f, g$ in $\mathbb{K}[X]$ tali che $fg = 0$. Consideriamo $Z = V(f)$ e $W = V(g)$. Allora $Z$ e $W$ sono due chiusi tali che $X = Z \cup W$, dunque $X = Z$ oppure $X = W$, cioè $f = 0$ oppure $g = 0$. $\square$

**Esempio 2.27.** La varietà $X = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \colon xy = 0\}$ non è irriducibile.

**Osservazione 2.28.** Se $Y$ è un sottospazio irriducibile di una varietà affine $X$, allora $\overline{Y}$ è irriducibile. Se inoltre $\varphi\colon Y \to X$ è una mappa continua, allora $\varphi(Y)$ è irriducibile. Infine, se $X$ e $Y$ sono spazi topologici irriducibili, allora $X \times Y$ è uno spazio topologico irriducibile.

Sia $X$ una varietà affine. Ricordiamo che esiste una bigezione tra gli ideali radicali di $\mathbb{K}[X]$ e le sottovarietà chiuse di $X$, data da $I \mapsto V(I)$ e viceversa $Y \mapsto I(Y)$.

**Osservazione 2.29.** Sia $I$ un ideale di $\mathbb{K}[X]$. Allora

$$V(I) \text{ è irriducibile} \quad \Longleftrightarrow \quad I \text{ è un ideale primo.}$$

Ricordiamo che, se $I$ è un ideale radicale allora $V(I)$, come spazio topologico, è omeomorfo alla varietà affine avente come anello di coordinate $\mathbb{K}[X]/I$. L'insieme $V(I)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti $I$. D'altra parte, gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]/I$ sono gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti $I$. Se $\pi\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]/I$ è la proiezione canonica, si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X] \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X]/I\} \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & \mathfrak{m}/I \\ \pi^{-1}(M) & \longleftarrow\!\shortmid & M \end{array}$$

**Definizione 2.30.** Uno spazio topologico $X$ si dice **Noetheriano** se ogni successione

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

di sottospazi chiusi di $X$ stabilizza.

**Osservazione 2.31.** Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.

*Dimostrazione.*
Se $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ è una successione di sottospazi chiusi di $X$, allora si ha una successione

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq \dots$$

di ideali di $\mathbb{K}[X]$ che stabilizza perché $\mathbb{K}[X]$ è Noetheriano. Quindi anche la successione $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ stabilizza. $\square$

**Osservazione 2.32.** Ogni varietà è uno spazio topologico Noetheriano.

*Dimostrazione.*
Scrivendo $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ con $X_i$ aperti affini e data una successione di chiusi $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq \ldots$, si ha una successione $Z_1 \cap X_i \supseteq Z_2 \cap X_i \supseteq \ldots \supseteq Z_n \cap X_i \supseteq \ldots$ che stabilizza per ogni $i$. Allora esiste un $N$ tale che $Z_n \cap X_i = Z_N \cap X_i$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $i$, da cui $Z_n = Z_N$ per ogni $n \geq N$. □

**Proposizione 2.33.** Sia $X$ uno spazio topologico Noetheriano. Allora esistono dei sottospazi $Y_1, \ldots, Y_n$ chiusi e irriducibili di $X$ tali che $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$. Inoltre, se $Y_i \not\subseteq Y_j$ per ogni $i \neq j$, una tale decomposizione di $X$ è unica, e i sottospazi $Y_i$ si dicono le **componenti irriducibili** di $X$.

*Dimostrazione.*
Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ dei chiusi di $X$ che non possono essere scritti come unione di un numero finito di chiusi irriducibili. Mostriamo che $\mathcal{F}$ è vuota.

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$ sia non vuota. Poiché ogni catena in $\mathcal{F}$ ammette un minimo, per il Lemma di Zorn esiste un elemento minimale $Z$ in $\mathcal{F}$. Per costruzione, $Z$ è riducibile, quindi possiamo scrivere $Z = C \cup D$ con $C, D$ sottospazi chiusi e propri di $Z$. Poiché $Z$ è un elemento minimale, $C, D$ non sono in $\mathcal{F}$, quindi ammettono una decomposizione finita in chiusi irriducibili, ma allora anche $Z$ ammette una tale decomposizione.

Supponiamo ora che $X$ ammetta due decomposizioni in chiusi irriducibili

$$X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$$

tali che $Y_i \not\subseteq Y_j$ e $Z_i \not\subseteq Z_j$ per ogni $i \neq j$. Poiché

$$Y_i = Y_i \cap (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n) = Y_i \cap Z_1 \cup \ldots \cup Y_i \cap Z_n$$

e poiché $Y_i$ è irriducibile, si ha $Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)}$. Analogamente, $Z_j \subseteq Y_{\beta(i)}$. Allora $\beta \circ \alpha = id$, infatti

$$Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)} \subseteq Y_{\beta(\alpha(i))} = Y_i.$$

Analogamente $\alpha \circ \beta = id$ e ciò conclude. □

**Osservazione 2.34** (Componenti irriducibili corrispondono a primi minimali)**.** Siano $I, J_\alpha$ ideali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che i $J_\alpha$ siano primi contenti $I$. Siano $X = V(I)$ e $Y_\alpha = V(J_\alpha)$. Allora

$$X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n,$$

dove $J_1, \ldots, J_n$ sono i primi minimali contenenti $I$. Sappiamo dal corso di Algebra 2 che i primi minimali sono in numero finito.

**Esempio 2.35.** $I = (zx, zy)$. $p_1 = (z)$ è il piano, $p_2 = (x, y)$ è la retta, $X = V(p_1) \cup V(p_2)$.

## 2.4 Dimensione di una varietà algebrica

**Definizione 2.36.** Sia $X$ uno spazio topologico. Definiamo la **dimensione (di Krull)** di $X$ come

$$\sup \{n \in \mathbb{N}\colon \text{ esiste una catena di chiusi irriducibili } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n\}.$$

Denotiamo questo numero $\dim X$.

**Osservazione 2.37.** Se $X$ è una varietà affine, per quanto già visto si ha

$$\dim(X) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ esistono primi } P_0, \cdots, P_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \ldots \supsetneq P_n\}.$$

**Teorema 2.38.** Ogni varietà affine ha dimensione finita.

Poiché l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ di una varietà affine irriducibile $X$ è un dominio d'integrità, possiamo considerare il suo campo dei quozienti, che indichiamo con $K_X$.

**Definizione 2.39** (Altezza)**.** Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $\mathbb{K}[X]$, la sua **altezza** è definita come

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \doteqdot \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ esistono primi } \mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

**Teorema 2.40.** Sia $X$ una varietà affine irriducibile. Allora

1. $\dim(X) = \mathrm{tr}\deg_{\mathbb{K}}(K_X)$.
2. Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $K[X]$ e $Y = V(\mathfrak{p})$, allora
$$\dim(X) = \dim(Y) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$
3. Se $f$ è un elemento non nullo e non invertibile di $\mathbb{K}[X]$, allora $V(f)$ è un chiuso di $X$. Se la sua decomposizione in componenti irriducibili è data da $V(f) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_h$, allora
$$\dim(Y_i) = \dim(X) - 1.$$

# Parte II

# Gruppi algebrici

# Capitolo 3

# Gruppi algebrici

## 3.1 Definizioni generali

**Definizione 3.1** (Gruppo algebrico lineare)**.** Un gruppo $G$ è un **gruppo algebrico lineare** se è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ per qualche $n$ definito da equazioni polinomiali.

**Definizione 3.2** (Gruppo algebrico affine)**.** Un gruppo $G$ è un **gruppo algebrico affine** se $G$ è una varietà affine e le operazioni prodotto

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

e inverso

$$i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

sono morfismi di varietà.

**Osservazione 3.3.** Il prodotto $\mu : \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(n)$ è un morfismo di varietà, infatti

$$(x_{ij})(y_{ij}) = \left( \sum_h x_{i,h-i} \right)$$

è definito da equazioni polinomiali nelle entrate.

Similmente per l'operazione di inverso, infatti $(x_{ij})^{-1} = \mathrm{Adj}(x_{ij}) \cdot (\det(x_{ij}))^{-1}$. Le entrate della matrice aggiunta classica sono dei determinanti e quindi polinomiali, mentre l'inversa del determinante della matrice di partenza è una funzione regolare perché siamo su $\mathrm{GL}(n) = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \setminus V(\det)$.

**Esempio 3.4.** I gruppi $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{GL}(1) = \mathbb{G}_m$ e $\mathrm{SL}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ sono evidentemente gruppi algebrici lineari.

**Esempio 3.5.** Il gruppo

$$\mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un gruppo algebrico lineare (definito da $x_{11} = x_{22} = 1$ e $x_{21} = 0$). Notiamo però che

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi questo gruppo lo si può interpretare come $(\mathbb{K}, +)$, dando una realizzazione di questo come gruppo algebrico lineare.

**Definizione 3.6** (Azione regolare di gruppo algebrico)**.** Sia $G$ un gruppo algebrico affine e sia $X$ una varietà affine qualsiasi. Se $G$ agisce su $X$ affermiamo che questa azione è **regolare** se $\sigma : G \times X \to X$ è un morfismo di varietà algebriche.

**Definizione 3.7** (Rappresentazione regolare)**.** Se $V$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e l'azione di $G$ è lineare diciamo che $V$ è una **rappresentazione regolare finito dimensionale** di $G$.
Se $V$ è una rappresentazione di $G$ (di dimensione qualsiasi) diciamo che è **regolare** se

1. per ogni $v \in V$ si ha $\dim \langle gv \rangle_{g \in G} < \infty$
2. per ogni $W \subseteq V$ sottospazio di dimensione finita, $W$ è una rappresentazione regolare finito dimensionale.

**Osservazione 3.8.** Se $G$ è un gruppo algebrico affine, ai morfismi di moltiplicazione $\mu$ e inverso $i$ corrispondono omomorfismi di $\mathbb{K}$-algebre

$$\mu^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & (x \otimes y) \mapsto f(xy) \end{array}, \quad i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}$$

**Osservazione 3.9.** Se $\sigma$ è una azione $G \times X \to X$ allora

$$\sigma^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & (g, x) \mapsto f(gx) \end{array}$$

**Osservazione 3.10.** La proprietà associativa si può esprimere tramite il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "id_G \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times id_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

Quindi abbiamo una proprietà analoga sulla comoltiplicazione $\mu^*$ considerando il diagramma indotto.

**Osservazione 3.11.** Se $X = V$ è una rappresentazione regolare fin.dim. e $\sigma : G \times V \to V$ abbiamo un omomorfismo di algebre

$$\sigma^* : \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[V]$$

Ricordiamo però che $\mathbb{K}[V] = SV^*$, quindi possiamo restringere $\sigma^*$ a solo $V^* \subseteq SV^*$.

**Lemma 3.12.** $\sigma^*(V^*) \subseteq \mathbb{K}[G] \otimes V^*$.

*Dimostrazione.*
Sia $e_1, \cdots, e_n$ una base di $V$ e $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ la base duale. Se $g$ agisce come $(g_{ij})$ su $V$ e $v = \sum v_i e_i$ allora

$$\begin{aligned} \sigma^* \varphi_k(g, v) =& \varphi_k(gv) = \varphi_k \left( \sum g_{ij} v_j e_i \right) = \\ &= \sum g_{ij} v_j \varphi_k(e_i) = \sum g_{kj} v_j = \\ &= \left( \sum x_{kj} \otimes \varphi_j \right) (g, v), \end{aligned}$$

dove $x_{kj} \in \mathbb{K}[G]$ è la funzione che per ogni $g$ restituisce $g_{kj}$. □

**Lemma 3.13.** Sia $G$ che agisce su $X$ in modo regolare con entrambi affini. Allora

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione di $G$ con azione data da

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione regolare
- $\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di $G$.

*Dimostrazione.*
Se $f \in \mathbb{K}[X]$ allora $\dim \langle Gf \rangle < \infty$. Notiamo che $\sigma(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \beta_i$ con somma finita. Notiamo che, per definizione

$$f(gx) = \sum_i \alpha_i(g) \beta_i(x)$$

quindi

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) = \sum \alpha_i(g^{-1}) \beta_i(x) \iff gf = \sum_{i=1}^k \alpha_i(g^{-1}) \beta_i \in \langle \beta_1, \cdots, \beta_k \rangle$$

Questo mostra che $\dim \langle Gf \rangle$ è finita.

Vogliamo dimostrare che su $W \subseteq \mathbb{K}[X]$ di dimensione finita l'azione di $G$ è regolare, cioè voglio mostrare che per ogni $\varphi \in W^*$ (generatori di $SW^* = \mathbb{K}[W]$) si ha $\varphi(gf)$ regolare.

Sia $f_1, \cdots, f_k$ una base di $W$. Poiché sono una base $\sigma^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes f_j$. Se $\varphi(f_i) = \lambda_i$ abbiamo che $\psi = \sigma^* \varphi$ è tale che

$$\psi(g, f_i) = \varphi(gf_i) = \varphi(\sum \alpha_{ij}(g^{-1}) f_j) = \sum \alpha_{ij}(g^{-1}) \lambda_j$$

□

### 3.1.1 Componente connessa dell'identità

**Proposizione 3.14.** Sia $G$ un gruppo algebrico affine e sia $G^0$ la componente connessa di $e_G$. Allora $G^0$ è un sottogruppo normale chiuso.

*Dimostrazione.*
Sicuramente $G^0$ è chiuso in quanto componente connessa. L'insieme $G^0 \times G^0$ è connesso e la mappa
$$m^0 = m|_{G^0 \times G^0} : G^0 \times G^0 \longrightarrow G$$
ha immagine connessa in $G$. Poiché $e_G$ è nell'immagine di $m^0$, si ha $\mathrm{Imm}(m^0) = G^0$.
Dato $g$ in $G$, si ha
$$gG^0g^{-1} \subset G^0,$$
infatti la mappa
$$AD_g : \begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$
è continua e fissa $e_G$, quindi $\mathrm{Imm}(AD_g) \subset G^0$. □

**Esercizio 3.15.** Il sottogruppo $G^0$ è irriducibile.

Citiamo il seguente teorema:

**Teorema 3.16** (Chevalley)**.** Se $\varphi\colon X \to Y$ è una mappa regolare tra due varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\overline{\varphi(X)}$.

**Osservazione 3.17.** Se $G$ è un gruppo algebrico, allora esistono $g_1, \ldots, g_k$ in $G$ tali che
$$G = G^0 \cup G^0 g_1 \cup \ldots \cup G^0 g_k.$$
La precedente è una decomposizione in componenti connesse e irriducibili.

**Proposizione 3.18.** Se $\varphi\colon G \to H$ è un morfismo di gruppi algebrici affini, allora $\varphi(G)$ è un chiuso di $H$.

*Dimostrazione.*
Sfruttando la decomposizione dell'Osservazione (3.17), abbiamo
$$\varphi(G) = \varphi(G^0) \cup \varphi(G^0 g_1) \cup \ldots \cup \varphi(G^0 g_k),$$
quindi basta mostrare che $\varphi(G^0)$ è chiuso. In particolare, possiamo ricondurci al caso $G = G^0$.
Il sottogruppo $X = \overline{\varphi(G)}$ di $H$ è irriducibile, e per il Teorema di Chevalley (3.16) esiste un aperto $U$ di $X$ contenuto in $\varphi(G)$. Mostriamo che $X = \varphi(G)$. Poiché $X$ e $\varphi(G)$ sono sottogruppi di $H$, si ha
$$U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X$$
Se $x$ è un elemento di $X$, poiché $i(U) = U^{-1}$ è un aperto di $X$, anche $xU^{-1}$ è un aperto di $X$. Per irriducibilità di $X$, si ha $U \cap xU^{-1} \neq \emptyset$, quindi esistono $u, v$ in $U$ tali che $x = uv$, da cui $X = U \cdot U = \varphi(G)$. □

## 3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari

**Osservazione 3.19** (Punti e ideali massimali sono la stessa cosa)**.** Nella situazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \cap\mathrel{|} & & \cap\mathrel{|} \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

abbiamo una corrispondente mappa di algebre

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Notiamo che

$$\varphi(\alpha) = \beta \iff \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta$$

dove $\mathfrak{m}_\alpha$ e $\mathfrak{m}_\beta$ sono i massimali che corrispondono ai rispettivi punti.

*Dimostrazione.*
Basta notare che le seguenti sono equivalenze

$$\begin{gathered} f \in \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) \\ f \circ \varphi \in \mathfrak{m}_\alpha \\ (f \circ \varphi)(\alpha) = 0 \\ f(\varphi(\alpha)) = 0 \\ f \in \mathfrak{m}_{\varphi(\alpha)} = \mathfrak{m}_\beta \end{gathered}$$

□

**Proposizione 3.20.** Siano $X$ e $Y$ affini e sia $\varphi : X \to Y$ un morfismo. Se $\psi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ è surgettiva allora $\varphi(X)$ è chiuso.

*Dimostrazione.*
Sia $I = \ker \psi$ e mostriamo che $\varphi(X) = V(I)$:

$\boxed{\subseteq}$ Se $x \in X$ e $f \in I$ allora $f(\varphi(x)) = \psi(f)(x) = 0$, quindi $\varphi(x) \in V(I)$.

$\boxed{\supseteq}$ Sia $\beta \in V(I)$, allora $I \subseteq \mathfrak{m}_\beta$. Notiamo che $\psi : \mathbb{K}[Y]/I \to \mathbb{K}[X]$ è un isomorfismo e sotto questo isomorfismo

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\beta / I,$$

dunque

$$\mathbb{K} \cong \frac{\mathbb{K}[Y]}{\mathfrak{m}_\beta} \overset{\psi}{\cong} \frac{\mathbb{K}[X]}{\psi(\mathfrak{m}_\beta)}.$$

Abbiamo quindi mostrato che $\psi(\mathfrak{m}_\beta)$ è un massimale, dunque per il Nullstellensatz esiste $\alpha \in X$ tale che $\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha$. Concludiamo notando che

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha \implies \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta \iff \varphi(\alpha) = \beta.$$

□

**Proposizione 3.21.** Se $X, Y$ affini, $\varphi : X \to Y$ e $\psi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ mappe corrispondenti, se $G$ agisce su $X$ e $Y$ allora si ha che $\varphi$ è $G$-equivariante se e solo se $\psi$ è $G$-equivariante.

*Dimostrazione.*
Diamo le due implicazioni:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Segue calcolando

$$\begin{aligned}\psi(g \cdot f)(x) =&(g \cdot f)(\varphi(x)) = f(g^{-1} \cdot \varphi(x)) = \\ =&f(\varphi(g^{-1}x)) = \psi(f)(g^{-1}x) = \\ =&(g \cdot \psi(f))(x).\end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Vogliamo mostrare che $\varphi(gx) = g\varphi(x)$. Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni $f \in \mathbb{K}[Y]$ si ha $f(g\varphi(x)) = f(\varphi(gx))$.

$$f(g\varphi(x)) = (g^{-1}f)(\varphi(x)) = \psi(g^{-1}f)(x) = (g^{-1}\psi(f))(x) = \psi(f)(gx) = f(\varphi(gx)).$$

□

**Teorema 3.22.** Se $X$ è affine e $G$ agisce su $X$ allora esiste una rappresentazione di dimensione finita $V$ di $G$ e $i : X \to V$ iniettiva che è $G$-equivariante

*Dimostrazione.*
ESERCIZIO □

**Teorema 3.23.** Ogni gruppo affine è lineare.

*Dimostrazione.*
Consideriamo l'azione di $G$ su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Questa rende $\mathbb{K}[G]$ una rappresentazione di $G$. Notiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, con generatori $f_1, \cdots, f_n$. Notiamo che esiste $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita che contiene $f_1, \cdots, f_n$ che è stabile per l'azione di $G$ e una rappresentazione regolare di $G$.

Supponiamo $f_1, \cdots, f_N$ base di $V$. Sia

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G \times G] \\ f & \longmapsto & (g, h) \mapsto f(gh) \end{array}$$

e scriviamo $\mu(f_j) = \sum \widetilde{\alpha}_{i,j} \otimes f_i$.

$$(gf_j)(h) = f_j(g^{-1}h) = \mu(f)(g^{-1}, h) = \sum \widetilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})f_i(h).$$

Poniamo $\alpha_{i,j}(g) = \widetilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})$. Consideriamo ora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & [g]^{\{f_j\}}_{\{f_j\}} = (\alpha_{i,j}(g)) \end{array}$$

che a livello di algebre diventa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[x_{i,j}, \det^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ x_{i,j} & \longmapsto & \alpha_{i,j} \end{array} .$$

Dalla definizione è evidente che $\varphi$ è una mappa regolare. Se mostriamo che $\varphi$ è iniettiva e che $\psi$ è surgettiva allora per (3.20) avremo che $\varphi(G)$ è un chiuso, quindi $\varphi$ identifica $G$ con un chiuso di $\mathrm{GL}(V)$, rendendo $G$ un gruppo algebrico lineare.

Siano $g, h \in G$ tali che $\alpha_{i,j}(g) = \alpha_{i,j}(h)$ per ogni $i, j$, allora $gf_j = hf_j$ per ogni $j$, quindi $g$ e $h$ hanno lo stesso effetto su $\mathbb{K}[G]$, in particolare[1]

$$f(g^{-1}) = (gf)(e) = (hf)(e) = g(h^{-1})$$

per ogni $f \in \mathbb{K}[G]$, e questo significa che $g^{-1} = h^{-1}$, cioè $g = h$, mostrando l'iniettività.

Notiamo che per ogni $g \in G$

$$f_j(g^{-1}) = (gf_j)(e) = \sum \alpha_{i,j}(g) \underbrace{f_j(e)}_{\in \mathbb{K}}.$$

Questo mostra che i generatori $f_j$ di $\mathbb{K}[G]$ appartengono all'immagine di $\psi$ (perché combinazioni lineari delle $\alpha_{i,j}$), quindi $\psi$ è surgettiva. □

Ricordiamo il

**Teorema 3.24** (di Chevalley)**.** Sia $\varphi : X \to Y$ morfismo di varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\overline{\varphi(X)}$.

**Corollario 3.25.** Se $G$ e $H$ gruppi algebrici affini con $\varphi : G \to H$ morfismo di gruppi algebrici allora $\varphi(G)$ è un chiuso di $H$.

*Dimostrazione.*
Sia $T = \varphi(G) \subseteq H$. Vogliamo mostrare che $T = \overline{T} \subseteq H$. Per Chevalley (3.16), $T \supseteq U$ per $U$ aperto di $\overline{T}$. Notiamo che $\overline{T}$ è un sottogruppo di $H$. Dunque per ogni $t \in \overline{T}$, $tU \subseteq \overline{T}$.

Poiché la moltiplicazione per $t$ è un omeomorfismo, $U$ e $tU$ sono aperti di $\overline{T}$, quindi per irriducibilità $U \cap tU \neq$, dunque esiste $g, h \in U$ tali che $g = th$, cioè $t = gh^{-1} \in T$ e dato che $t$ era un generico elemento di $T$ abbiamo finito. □

[1] $e$ è l'identità di $G$

# Capitolo 4

# Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile

**Proposizione 4.1** (Semisemplice uguale completamente riducibile)**.** Per le rappresentazioni regolari di $G$ abbiamo che se essa è completamente riducibile allora è semisemplice, cioè le due condizioni sono equivalenti in questo caso.

*Dimostrazione.*
Se $V$ è una rappresentazione regolare non nulla allora $V$ contiene una sottorappresentazione semplice, infatti basta prendere $W \subseteq V$ di dimensione finita e poi la sottorappresentazione di $W$ di dimensione minima.

Se $W \subseteq V$ allora $W$ e $V/W$ sono completamente riducibili, infatti per completa riducibilità $V = W \oplus U$ per $U \cong V/W$, quindi basta mostrarlo per $W$. Sia $X \subseteq W$ sottorappresentazione. Poiché $V = X \oplus Y$ (di nuovo applico l'ipotesi su $V$) allora $W = X \oplus Y \cap W$.

Mostriamo ora che $V$ è semisemplice. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigoplus_{i \in I} S_i \subseteq V \right\}$$

con $S_i$ tutti semplici e ordine su $\mathcal{F}$ dato da

$$\bigoplus_{i \in I} S_i \preceq \bigoplus_{j \in J} T_j \iff I \subseteq J \text{ e } S_i = T_i \text{ per } i \in I.$$

Ogni catena ammette maggiorante dato sommando sull'unione degli indici. Sia allora $W = \bigoplus S_i \subseteq V$ massimale e sciviamo $V = W \oplus U$. Se $W \neq (0)$ allora esiste una sottorappresentazione semplice $S \subseteq U$ e quindi $W' = W \oplus S$ sarebbe maggiore di $W$, assurdo. $\square$

Vorremmo capire per quali gruppi $G$ le rappresentazioni regolari sono semisemplici.

## 4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti

**Definizione 4.2** (Elementi unipotenti, nilpotenti e semisemplici)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $g \in \mathrm{End}(V)$. Affermiamo che $g$ è

- **semisemplice** se è diagonalizzabile
- **nilpotente** se $g^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$
- **unipotente** se $(g - id_V)^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$

**Osservazione 4.3.** Se $g$ è invertibile allora $\mathbb{Z}$ agisce su $V$ come

$$n \cdot v = g^n v,$$

quindi la definizione di semisemplice si sposa bene con quella già data in quanto $g$ induce una decomposizione in autospazi $g$-invarianti.

**Definizione 4.4** (Endomorfismo localmente finito)**.** Siano $V$ uno spazio vettoriale e $g \in \mathrm{End}(V)$. $g$ è **localmente finito** se per ogni $v \in V$ esiste $W$ di dimensione finita $g$-stabile con $v \in W$. In tal caso diciamo che

- $g$ è **semisemplice** se $g|_W$ è semisemplice per ogni $W \subseteq V$ $g$-stabile di dimensione finita.
- $g$ è **nilpotente** se $g|_W$ è nilpotente per ogni $W \subseteq V$ $g$-stabile di dimensione finita.
- $g$ è **unipotente** se $g|_W$ è unipotente per ogni $W \subseteq V$ $g$-stabile di dimensione finita.

**Definizione 4.5** (Semisemiplice, unipotente e nilpotente per gruppi algebrici)**.** Se $G$ è un gruppo algebrico e $g \in G$ allora $g$ è

- **semisemplice** se l'azione di $g$ su ogni rappresentazione regolare è semisemplice, cioè l'azione di $g$ su ogni rappresentazione di dimensione finita è semisemplice
- **unipotente** se l'azione di $g$ su ogni rappresentazione regolare è unipotente, cioè l'azione di $g$ su ogni rappresentazione di dimensione finita è unipotente
- **nilpotente** se l'azione di $g$ su ogni rappresentazione regolare è nilpotente, cioè l'azione di $g$ su ogni rappresentazione di dimensione finita è nilpotente.

**Lemma 4.6** (Semisemplice/unipotente/nilpotente passano alle costruzioni lineari)**.** Siano $g \in \mathrm{End}(V)$ e $h \in \mathrm{End}(W)$ con $V$ e $W$ localmente finite. Allora

- Se $g$ e $h$ semisemplici allora
$$g \oplus h : V \oplus W \to V \oplus W \text{ è semisemplice}$$
$$g \otimes h : V \otimes W \to V \otimes W \text{ è semisemplice}$$
- Se $U \subseteq V$ è stabile per $g$ e $g$ semisemplice allora $g|_U$ e $\overline{g} : V/U \to V/U$ sono semisemplici.
- Se $g$ è semisemplice allora l'azione di $g$ su $SV$ è semisemplice
- Se $\dim V$ è finita e $g$ è semisemplice allora $V^*$ è semisemplice.

Valgono anche gli analoghi per unipotente e nilpotente.

*Dimostrazione.*
Tante verifiche noiose, riportiamo giusto quelle per $g \otimes h$:

Se $V$ e $W$ hanno dimensione finita allora esistono basi di autovettori per $g$ e $h$
$$gv_i = \lambda_i v_i, \quad hw_i = \mu_i v_i$$
Allora
$$(g \otimes h)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$
quindi $v_i \otimes w_j$ è ancora base di autovettori. Se invece $V$ e $W$ hanno dimensione infinita e $U \subseteq V \otimes W$ di dimensione finita allora gli elementi di base di $U$ appartengono a prodotti tensore di sottospazi di dimensione finita di $V$ e $W$, quindi ingrandendo in modo tale da tener conto di tutta la base ricaviamo $U \subseteq \widetilde{V} \otimes \widetilde{W}$ con $\widetilde{V}$ e $\widetilde{W}$ di dimensione finita, ora ci restringiamo sottospazi stabili di $\widetilde{V}$ e $\widetilde{W}$ e con calma ci rimettiamo nelle ipotesi finite. $\square$

**Lemma 4.7** (Rappresentazioni finte si immergono in $\mathbb{K}[G]^n$)**.** Sia $V$ una rappresentazione di dimensione finita di $G$, allora abbiamo una iniezione
$$f : V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^n$$
$G$-equivariante

*Dimostrazione.*
Sia $v_1, \cdots, v_n$ una base di $V$ e sia $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ la base duale. Definiamo
$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}[G]^n \\ v & \longmapsto & (\varphi_1 \otimes v, \cdots, \varphi_n \otimes v) \end{array}$$
dove se $\varphi \in V^*$ e $v \in V$ poniamo
$$(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g^{-1}v).$$

$\boxed{G\text{-equivariante}}$ Vogliamo $\psi(gv) = g\psi(v)$, cioè $g(\varphi \otimes v) = \varphi \otimes gv$. Allora calcoliamo

$$(g(\varphi \otimes v))(h) = (\varphi \otimes v)(g^{-1}h) = \varphi(h^{-1}gv) = (\varphi \otimes gv)(h)$$

$\boxed{\text{iniettiva}}$ Supponiamo $\psi(v) = 0$, allora per ogni $i$

$$0 = (\varphi_i \otimes v)(e) = \varphi_i(v)$$

ma $\varphi_i$ era una base del duale, quindi $v = 0$.

□

**Osservazione 4.8.** Se $gv = (\alpha_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n} v$ allora $\varphi_i \otimes v_j = \alpha_{i,j}$.

**Corollario 4.9.** Se $g \in G$ allora

- $g$ è semisemplice se e solo se l'azione di $g$ su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice
- $g$ è unipotente se e solo se l'azione di $g$ su $\mathbb{K}[G]$ è unipotente

*Dimostrazione.*
Facciamo il caso semisemplice

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ovvio

$\boxed{\Longleftarrow}$ Dobbiamo verificare che l'azione di $g$ su ogni rappresentazione di dimensione finita $V$ è semisemplice. Per il lemma (4.7) abbiamo che $V \subseteq \mathbb{K}[G]^n$ e questo è semisemplice quindi anche $g$ lo è per il secondo punto del lemma (4.6)

□

**Lemma 4.10** (Criterio per semisemplice/unipotente in gruppi lineari)**.** Se $G \subseteq GL(V)$ è un sottogruppo chiuso per $V$ di dimensione finita allora

- $g \in G$ è semisemplice se e solo se l'azione di $g$ su $V$ è semisemplice.
- $g \in G$ è unipotente se e solo se l'azione di $g$ su $V$ è unipotente.

*Dimostrazione.*
Diamo le implicazioni per il caso semisemplice

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ovvio

$\boxed{\Longleftarrow}$ Verifichiamo che l'azione su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Osserviamo che

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$$

è surgettivo e $G$-equivariante quindi basta far vedere che $g$ agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$.

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]\left[\det^{-1}\right]$$

Verifichiamo che $g$ agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] = S(\mathrm{End}(V)^*)$. Per il lemma (4.6) basta verificare che $g$ agisce in modo semisemplice su $\mathrm{End}(V)^*$ o equivalentemente su $\mathrm{End}(V)$ per lo stesso lemma. Ricordiamo che $g$ agisce tramite la moltiplicazione a sinistra.

Se $\dim V = n$ allora $\mathrm{End}(V)$ con l'azione di moltiplicazione a sinistra di $g$ è uguale a considerare l'azione di $g$ su $V^{\oplus n}$ dove la corrispondenza è data dal fatto che l'azione per moltiplicazione a sinistra agisce sulle colonne della matrice a destra per restituire le colonne della matrice risultato.

Poiché $g$ agiva in modo semisemplice su $V$, agisce in modo semisemplice anche sulla somma che abbiamo considerato, quindi mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che $g$ agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$.

Sia ora $W \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}]$ un sottospazio di dimensione finita, in particolare

$$W \subseteq \frac{1}{\det^N}\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \quad \text{per qualche } N$$

Consideriamo allora l'azione di $g$ su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \otimes \mathbb{K}$ dove sulla copia di $\mathbb{K}$ abbiamo $g\lambda = (\det g)^{-N}\lambda$. Abbiamo una mappa $G$-equivariante surgettiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \frac{1}{\det^N}\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)] \\ f \otimes \lambda & \longmapsto & \frac{\lambda}{(\det)^N} f \end{array}$$

quindi, poiché $g$ agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ e su $\mathbb{K}$, si ha che agisce in modo semisemplice su $\frac{1}{\det^N}\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ e quindi su $W$.

Mettendo tutto insieme, abbiamo mostrato che $g$ agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[G]$ e questo conclude per il corollario (4.9).

□

## 4.2 Decomposizione di Jordan

**Proposizione 4.11.** Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $T$ un endomorfismo di $V$. Allora

1. Esistono e sono unici $S$ semisemplice e $N$ nilpotente in $\mathrm{End}(V)$ tali che $T = S + N$ e $SN = NS$.

Gli endomorfismi $S$ e $N$ si dicono **parte semisemplice** e **parte nilpotente** di $T$ e li denoteremo $T_s$ e $T_n$ rispettivamente.

2. Esistono $f, g$ in $\mathbb{K}[x]$, con $f(0) = g(0) = 0$, tali che $S = f(T)$ e $N = g(T)$.
3. Se $W$ è un sottospazio $T$-stabile di $V$, allora $W$ è $S$-stabile e $N$-stabile. Inoltre
$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_n = N|_W .$$
4. Se $V'$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita, $T'$ è un endomorfismo di $V'$ e $L\colon V \to V'$ è un'applicazione lineare, allora
$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_n = T'_n \circ L.$$

*Dimostrazione.*
Dimostriamo i vari punti.

1. Scriviamo $T$ in forma di Jordan e poniamo $S$ la parte diagonale di $T$ (che è quindi semisemplice). Posto $N = T - S$, si ha che $N$ è nilpotente e $SN = NS$.

   Mostriamo ora l'unicità: se $S'$ e $N'$ sono tali che $T = S+N = S'+N'$ e $S'N' = N'S'$, allora $S, S', N, N'$ commutano con $T$, quindi $S', N'$ commutano con $S, N$. Osservando che $S - S' = N' - N$, dove il primo membro è diagonale e il secondo è nilpotente, troviamo $S = S'$ e $N = N'$.

2. Consideriamo il polinomio caratteristico $p_T$ di $T$ e scriviamolo nella forma

   $$p_T(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{n_i},$$

   dove i $\lambda_i$ sono distinti. Cerchiamo un polinomio $f(t)$ in $\mathbb{K}[t]$ tale che

   $$\begin{cases} f(t) \equiv 0 & \pmod{t} \\ f(t) \equiv \lambda_i & \pmod{(t-\lambda_i)^{n_i}} \quad \forall i \in \{1, \cdots, r\} \end{cases}$$

   Tale polinomio esiste per il teorema cinese del resto. Inoltre soddisfa $f(T) = S$. Infatti, sul singolo blocco di Jordan $J_i$ relativo all'autovalore $\lambda_i$ (di taglia $m_i \leq n_i$), si ha che $f(T) = \lambda_i I$. Poiché $N = T - S$, posto $g(t) = t - f(t)$, si ha $N = g(T)$.

3. Poiché $S = f(T)$ e $N = g(T)$, se $W$ è $T$-stabile, lo sono chiaramente anche $S$ e $N$. Siano ora $t = T|_W$, $s = S|_W$ e $n = N|_W$. Allora $t = s + n$, $sn = ns$ e, per il lemma (4.6), $s$ è semisemplice e $n$ è nilpotente. Quindi la tesi discende dall'unicità della decomposizione.

4. Se $L$ è iniettiva (o suriettiva), allora $V$ è un sottospazio (o un quoziente) di $V'$, e la tesi discende dal punto precedente (nel caso del quoziente è analogo considerando la stabilità degli elementi semisemplici e nilpotenti). Nel caso generale, consideriamo il diagramma:

   $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L_1"] \arrow[d, "T"] & V \oplus V' \arrow[r, "L_2"] \arrow[d, "T''=T\oplus T'"] & V' \arrow[d, "T'"] \\ V \arrow[r] & V \oplus V' \arrow[r] & V' \end{tikzcd}$$

   dove $L_1 \colon v \mapsto (v, L(v))$ e $L_2 \colon (v, w) \mapsto w$. Per commutatività, si ha $L_1 \circ T_s = T''_s \circ L_1$ e $L_2 \circ T''_s = T'_s \circ L_2$. Deduciamo quindi che

   $$L \circ T_s = L_2 \circ L_1 \circ T_s = L_2 \circ T''_s \circ L_1 = T'_s \circ L_2 \circ L_1 = T'_s \circ L.$$

   Per il caso nilpotente la dimostrazione è analoga. □

Vale una decomposizione analoga nel caso moltiplicativo, sostituendo elementi nilpotenti con elementi unipotenti.

**Proposizione 4.12.** Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $T$ in $\mathrm{GL}(V)$. Allora

1. Esistono e sono uniche $S$ semisemplice e $U$ unipotente tali che $T = SU = US$, date da $S = T_S$ e $U = T_U$
2. Esistono $f, g$ in $\mathbb{K}[x]$ tali che $S = f(T)$ e $U = g(T)$.
3. Se $W$ è un sottospazio $T$-stabile di $V$, allora $W$ è $S$-stabile e $U$-stabile. Inoltre
$$\left(T|_W\right)_s = S|_W \quad \text{e} \quad \left(T|_W\right)_u = U|_W .$$
4. Se $V'$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita, $T'$ è un endomorfismo di $V'$ e $L\colon V \to V'$ è un'applicazione lineare, allora
$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_u = T'_u \circ L.$$

*Dimostrazione.*
Per analogia con la proposizione precedente, ci limitiamo a dimostrare il primo punto. Partendo dalla decomposizione additiva, si ha
$$T = S + N = S(I + S^{-1}N).$$
Poiché $S^{-1}N$ è nilpotente, l'elemento $U = I + S^{-1}N$ è unipotente. Mostriamo l'unicità: se $S'$ e $U'$ sono tali che $T = S'U'$, posto $U' = I + M$ con $M$ nilpotente, si ha $T = S' + S'M$. Quindi l'unicità discende da quella del caso additivo. □

Vogliamo ora estendere quanto fatto al caso localmente finito. Ricordiamo che un'applicazione lineare $T\colon V \to V$ è *localmente finita* se per ogni $v$ in $V$ esiste un sottospazio $W$ di $V$ di dimensione finita contenente $v$ e $T$-stabile.

**Teorema 4.13.** Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $T\colon V \to V$ lineare, invertibile e localmente finita. Allora esistono e sono unici $S$ semisemplice e $U$ unipotente tali che $T = SU = US$.

*Dimostrazione.*
Mostriamo dapprima l'esistenza. Per ogni $v$ in $V$, sia $W$ un sottospazio di $V$ di dimensione finita contenente $v$ e $T$-stabile. Consideriamo la restrizione $T|_W$ in $\mathrm{GL}(W)$. Consideriamo allora gli elementi $S_W = (T|_W)_s$ e $U_W = (T|_W)_u$ dati dalla Proposizione (4.12) e definiamo $S(v) = S_W(v)$. Osserviamo che $S(v)$ non dipende dalla scelta di $W$. Infatti, se $W$ è contenuto in un $W'$, allora $S_{W'}|_W = S_W$. Procedendo in modo analogo per $U$, otteniamo l'esistenza.

Osserviamo che $S$ e $U$ costruite soddisfano le proprietà 3 e 4 dell'enunciato precedente.

> Verifichiamo ad esempio la 4. Mostriamo che, con la notazione della Proposizione (4.12), si ha $LS = S'L$. Per ogni $v$ in $V$, consideriamo un sottospazio $W$ di dimensione finita, contenente $v$ e $T$-stabile. Sia $W' = L(W)$. Allora
> $$S'(W') = S'L(W) = LS(W) \subseteq L(W) = W'.$$

È quindi sufficiente mostrare che

$$L|_W \circ S|_W(v) = S'|_{W'} \circ L|_W(v),$$

ma ciò segue dal caso di dimensione finita.

Mostriamo ora l'unicità. Assumiamo $T = su = us$ e mostriamo che $S = s$ e $U = u$. Osserviamo che $S, U$ commutano con $s, u$. Infatti, per il punto 4, sappiamo che $LS = SL$ e $LU = UL$. Allora dal diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L=s"] \arrow[d, "T"] & V \arrow[d, "T"] \\ V \arrow[r, "L=s"'] & V \end{tikzcd}$$

ricaviamo $Ss = sS$ e $Us = sU$. Analogamente troviamo $Uu = uU$ e $Su = uS$. Scriviamo ora $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(S)$. Poiché $V_\lambda(S)$ è stabile per $U, s, u$, lo spazio

$$V_{\lambda,\mu}(S, s) = \{v \in V : Sv = \lambda v,\ sv = \mu v\}$$

è stabile per $U$ e $u$. Supponiamo per assurdo che esistano $\lambda, \mu$ distinti tali che $V_{\lambda,\mu} \neq 0$. Allora, poiché $U$ e $u$ sono unipotenti, si ha $(V_{\lambda,\mu}(S,s))^U \neq 0$ e, poiché $U$ e $u$ commutano, si ha anche $((V_{\lambda,\mu}(S,s))^U)^u \neq 0$. Scegliendo $v$ non nullo in $((V_{\lambda,\mu}(S,s))^U)^u$, si ottiene $T(v) = SU(v) = S(v) = \lambda v$, ma anche $T(v) = su(v) = s(v) = \mu v$, contro l'ipotesi che $\lambda$ e $\mu$ sono distinti. $\square$

**Teorema 4.14** (Decomposizione di Jordan)**.** Sia $G$ un gruppo algebrico e sia $g$ un elemento di $G$. Allora esistono e sono unici $s, u$ in $G$ tali che $s$ è semisemplice, $u$ è unipotente e $g = su = us$.

*Dimostrazione.*
Assumiamo che $G$ sia un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(W)$. $G = V(I)$ con $I \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo l'esistenza di $s$ e $u$. Poiché $g$ è in $\mathrm{GL}(W)$, possiamo scrivere (4.12) $g = su = us$ con $u$ unipotente e $s$ semisemplice in $\mathrm{GL}(W)$ (cioè $s$ agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ e $u$ agisce in modo unipotente su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$). In particolare $g = su$ è la decomposizione di Jordan per l'azione di $g$ su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo che effettivamente $u$ e $s$ sono in $G$ verificando che annullano ogni elemento $f$ di $I$. Osserviamo che $I$ è stabile per l'azione di $g$ (e in generale per l'azione di $G$), infatti, per ogni $h$ in $G$ si ha $(gf)(h) = f(g^{-1}h) = 0$. Poiché $s$ è la parte semisemplice di $g$, $s(I)$ è contenuto in $I$ e se $f$ è un elemento di $I$, si ha $sf$ è 0 su $G$. D'altro canto, valutando sull'elemento neutro $e$ di $G$, troviamo

$$0 = (sf)(e) = f(s^{-1}),$$

dunque $s^{-1}$ (e quindi $s$) è in $G$. L'unicità segue direttamente dal fatto che la decomposizione è unica in $\mathrm{GL}(W)$. $\square$

**Notazione.** Denotiamo $g_s = s$ e $g_u = u$.

**Esercizio 4.15.** Se $\varphi\colon G \to G'$ è un morfismo di gruppi algebrici, allora $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ e $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$.

**Esercizio 4.16.** Sia $\mathbb{K}$ un campo perfetto (assumiamo per l'esercizio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Consideriamo l'inclusione

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Sia $G$ un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definito da un'equazione a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia $G_{\mathbb{R}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Consideriamo un elemento $g$ in $G_{\mathbb{R}}$. Mostrare che $g_s$ e $g_u$ sono in $G_{\mathbb{R}}$.

## 4.3 Gruppi unipotenti

**Definizione 4.17.** Un gruppo $G$ si dice **unipotente** se ogni suo elemento è unipotente.

**Lemma 4.18.** Se $G$ è tale che l'unica rappresentazione irriducibile di $G$ è banale allora $G$ si immerge nel gruppo delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale, cioè

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Dimostrazione.*
Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita per cui $G$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(V)$. Sia $W$ una sottorappresentazione di $V$ non banale. Allora $W = \mathbb{K}v_1$ e $gv_1 = v_1$ per ogni $g$ in $G$. Consideriamo il quoziente $V_1 = V/\langle v_1 \rangle$. Allora esiste $v_2$ in $V$ tale che per ogni $g$ in $G$ si ha $gv_2 \equiv v_2 \pmod{V_1}$. Procedendo in questo modo, possiamo scegliere una base $v_1, \ldots, v_n$ di $V$, rispetto alla quale risulta chiaramente $G \subseteq U_n$. □

**Teorema 4.19.** Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, $V$ spazio vettoriale di dimensione finita, $A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ che sia una $\mathbb{K}$-algebra associativa. Se $V$ è un $A$-modulo semplice allora $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

*Dimostrazione.*
Sia $v_1, \cdots, v_n$ una base di $V$. Se $v = (v_1, \cdots, v_n) \in V^n$ allora vogliamo mostrare che $Av = V^n$.

Poiché $V$ è semplice, $V^n$ è somma di rappresentazioni semplici, quindi per la proposizione (1.32) si ha che $V^n$ è semisemplice e quindi completamente riducibile. Possiamo allora scrivere $V^n = Av \oplus P$ per $P$ un $A$-sottomodulo. Sia $\pi_P : V^n \to V^n$ la proiezione su $P$ e notiamo che essa ammette una decomposizione a blocchi

$$\pi_P = (\alpha_{ij})_{i,j} \quad \text{per degli endomorfismi } \alpha_{ij} : V \to V$$

dove il dominio di $\alpha_{ij}$ è la $j$-esima copia di $V$ in $V^n$ e il codominio è l'$i$-esima copia.

Quindi $\alpha_{ij} \in \mathrm{End}_A(V)$ con $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Per il lemma di Schur (1.26) questi endomorfismi sono le costanti.

Ricordando ricordando che $V^n = Av \oplus P$, si ha necessariamente $\pi_P(v) = 0$ per definizione di $\pi_P$, quindi per ogni $i$ abbiamo $\sum \alpha_{ij} v_j = 0$. Poiché gli $v_j$ sono una base e gli endomorfismi $\alpha_{ij}$ sono costanti, per indipendenza lineare questo significa che per ogni $i$ e ogni $j$ si ha $\alpha_{ij} = 0$. Segue dunque che $\pi_P = 0$ e quindi $P = \mathrm{Imm}\, \pi_P = \{0\}$, cioè $V^n = Av$. □

**Esercizio 4.20.** Trova un controesempio per $\mathbb{K}$ non algebricamente chiuso.

**Teorema 4.21.** Un gruppo $G$ è unipotente se e solo se l'unica rappresentazione irriducibile di $G$ è quella banale.

*Dimostrazione.*
Diamo le due implicazioni

$\boxed{\Longleftarrow}$ Se $G$ ha questa proprietà allora per il lemma (4.18) abbiamo

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e chiaramente un gruppo di questa forma è unipotente.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sia $V$ una rappresentazione semplice di $G$ di dimensione $n$. Allora $\operatorname{tr}(g_V) = n$ per ogni $g \in G$ (perché si immerge nelle triangolari superiori), quindi

$$\forall g_V, h_V \in G, \qquad \operatorname{tr}((g_V - 1)h_V) = \operatorname{tr}(g_V h_V - h_V) = 0.$$

Se $A$ è il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale generato da $G$, $A \subseteq \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ed è un'algebra associativa. Poiché $V$ è semplice per $A$ (in quanto semplice per $G$ e $A = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(G)$), si ha per il teorema (4.19) si ha $A = \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Segue per linearità della traccia che $\operatorname{tr}((g_V - 1)a) = 0$ per ogni $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$, da cui $(g_v - 1) = 0$, cioè $G$ agisce banalmente.

□

**Corollario 4.22.** Se $G$ è unipotente, allora è contenuto nel gruppo $U_n$ delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale principale.

**Osservazione 4.23.** Consideriamo il gruppo $(\mathbb{C}, +)$. Questo è un gruppo unipotente perché possiamo vederlo in $\mathrm{GL}(2)$ tramite la rappresentazione

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche una rappresentazione data da

$$\mathbb{C} \to \mathrm{GL}(1), \quad x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

La differenza tra i due casi è che da una rappresentazione $V$ non possiamo costruire tutte le funzioni di $C^\infty(\mathbb{C})$, ma solo quelle di $\mathbb{C}[G]$ (con $G = \mathbb{C}$).

**Corollario 4.24.** Se $V$ è una rappresentazione di $G$ non nulla allora $V^G \neq 0$.

**Corollario 4.25.** Se $G$ è unipotente allora $G$ è nilpotente come gruppo, cioè definiamo iterativamente $G^{(0)} = G$ e $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G]$ allora esiste $n$ tale che $G^{(n)} = \{id_G\}$.

*Dimostrazione.*
Basta immergere $G$ in $U(n)$ e notare che sottogruppi di triangolari superiori con 1 sulla diagonale hanno questa proprietà. $\square$

**Esempio 4.26.** Il gruppo $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = C_p$ con $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ è un gruppo unipotente, perché si può scrivere come

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

**Osservazione 4.27.** Se $G = U(n)$ con $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ allora $g^{p^n} = id_G$.

### 4.3.1 Esponenziale e logaritmo

**Notazione.** Definiamo lo spazio vettoriale

$$N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Definizione 4.28** (Esponenziale)**.** Definiamo la mappa **esponenziale**

$$\exp : \begin{array}{ccc} N(n) & \longrightarrow & U(n) \\ M & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} M^i \end{array}.$$

**Osservazione 4.29.** La mappa esponenziale appena definita è algebrica. Inoltre rispetta le usuali proprietà:

- $\exp((\lambda + \mu)M) = \exp(\lambda M)\exp(\mu M)$
- Se $M_1 M_2 = M_2 M_1$ allora $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)$.

**Definizione 4.30** (Logaritmo)**.** Definiamo la mappa **logaritmo**

$$\log : \begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & N(n) \\ B & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (M - I_n)^i \end{array}.$$

**Osservazione 4.31.** log e exp sono mappe algebriche e inverse. Sono anche in realtà la definizione usuale, solo che per matrici in $N(n)$ e $U(n)$ queste somme finite coincidono con la definizione in serie.

**Notazione.** Se $G \subseteq U(n)$ definiamo $X = \log(G)$ e notiamo che $X$ è isomorfo a $G$ come varietà.

**Proposizione 4.32.** Se $g \in G \setminus \{id_G\}$ allora, ponendo

$$\overline{\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = H \subseteq G,$$

si ha $H \cong \mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$.

*Dimostrazione.*
Poiché $g \neq id_G$, $\log g = x \neq 0$, inoltre $\log(g^n) = nx$. Notiamo dunque che da $nx \neq 0$ per ogni $n$ ricaviamo $g^n \neq 1_G$ per ogni $n$. Se $Y = \mathbb{K}x$ allora

$$\log(H) = \log(\overline{\{g^n\}}) = \overline{\{nx\}} \subseteq Y$$

Poiché $Y$ è una retta e $\{nx\}$ sono infiniti, $\overline{nx} = Y$ per come sono fatti i chiusi di Zariski di $\mathbb{A}^1$, quindi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & H = \exp(Y) \\ \lambda & \longmapsto & \exp(\lambda x) \end{array}$$

è un isomorfismo di gruppi tra $\mathbb{K}$ e $H$. □

**Esercizio 4.33.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ e $G$ unipotente abeliano allora $G \cong \mathbb{K}^n$.

**Fatto 4.34.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$ e $g^p = id$ per ogni $g \in G$ abeliano connesso allora $G$ è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^n$.

**Esempio 4.35.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$ poniamo $\widetilde{\alpha}_i = \frac{1}{p}\binom{p}{i}$ per $i \in \{0, \cdots, p-1\}$ e definiamo $\alpha_i$ come l'immagine di $\widetilde{\alpha}_i$ in $\mathbb{K}$.

Definiamo[1]

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a, b) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i a^i b^{p-1} \end{array}$$

e notiamo che

$$c(a, b)c(a + b, c) = c(b, c)c(a, b + c) \implies c(a, 0) = c(a, b) = 0,$$

quindi se $G = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ con prodotto

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + c(a, a'))$$

allora $G$ è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^2$ come gruppo.

(QUESTO DOVREBBE ESSERE UN CONTROESEMPIO DI QUALCOSA???)

## 4.4 Gruppi completamente riducibili

**Definizione 4.36.** Un gruppo è **completamente riducibile** se ogni sua rappresentazione regolare è semisemplice.

**Osservazione 4.37.** Basta anche chiedere "ogni rappresentazione regolare *finita* è semisemplice".

**Osservazione 4.38.** $G$ è completamente riducibile se e solo se $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

*Dimostrazione.*
$\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di $G$ quindi una implicazione è ovvia. Se $V$ ha dimensione $n$ e $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice allora per l'immersione (4.7) $V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^m$ si ha che $V$ è semisemplice (4.6). □

[1] moralmente $c(a, b) = \frac{(a+b)^p - a^p - b^p}{p}$, che non potremmo fare direttamente in $\mathbb{K}$ per l'identità del binomio ingenuo

**Definizione 4.39.** Un gruppo $G$ è un **toro (algebrico)** se $G \cong (\mathbb{G}_m)^n$.

**Osservazione 4.40.** Ricordando che $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ notiamo che

$$\mathbb{K}[\mathbb{G}_m^n] = \mathbb{K}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}].$$

Questo spazio ha una base data da $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$ per $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

**Proposizione 4.41** (Tori algebrici sono semisemplici)**.** Se $G$ toro algebrico allora $G$ è semisemplice.

*Dimostrazione.*
Se $g = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ e $h = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ sono elementi di $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{K}^\times)^n$ si ha che

$$\begin{aligned}(gt^\alpha)(h) =& t^\alpha(g^{-1}h) = t^\alpha(\lambda_1^{-1}\mu_1, \cdots, \lambda_n^{-1}\mu_n) = \\ =& (\lambda_1^{-1}\mu_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_n^{-1}\mu_n)^{\alpha_n} = \\ =& \lambda^{-\alpha}\mu^\alpha = \\ =& (\lambda^{-\alpha}t^\alpha)h.\end{aligned}$$

Segue che $gt^\alpha = \lambda^{-\alpha}t^\alpha$ e che quindi i $t^\alpha$ sono autovettori per ogni $g \in G$. Poiché

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K}t^\alpha$$

e ogni $\mathbb{K}t^\alpha$ è semisemplice, segue (4.6) che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Quindi le rappresentazioni semplici di $G$ sono di dimensione 1 e sono date da $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}t^{-\alpha}$ con $gz = t^\alpha(g)z$ $\square$

**Lemma 4.42.** Se $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ allora $G$ è completamente riducibile se e solo se $V^{\otimes n}$ è semisemplice per ogni $n$

*Dimostrazione.*
Diamo le implicazioni

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ovvio

$\boxed{\Longleftarrow}$ La dimostrazione è del tutto analoga a quella esposta per il lemma (4.10). Dimostriamo che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Dato il morfismo $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$ basta mostrare che $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$ è semisemplice. Scriviamo

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}].$$

$\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ è un quoziente di somme di rappresentazioni della forma $(V^*)^{\otimes m}$ e quindi è quoziente di $(V^* \oplus \cdots, \oplus V^*)^{\otimes m}$ e dato che $V^*$ è semisemplice ho finito.

$\square$

**Corollario 4.43.** Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è tale che se $g \in G$ allora $\overline{g} \in G$, allora $G$ è completamente riducibile.

*Dimostrazione.*
Sia $V = \mathbb{C}^n$ e dimostriamo che $V^{\otimes m}$ è semisemplice per ogni $m$, cioè che per ogni $U \subseteq V^{\otimes m}$ che sia $G$-stabile esiste $W$ $G$-stabile tale che $V^{\otimes m} = U \oplus W$.

Consideriamo il caso $m = 1$. Definiamo la forma hermitiana

$$h((x_i)(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

Se $U \subseteq V$, poniamo $W = U^\perp$ rispetto a questa forma. Chiaramente $V = U \oplus U^\perp$, quindi vogliamo mostrare che $U$ $G$-stabile implica $U^\perp$ $G$-stabile.

$$h(gw, u) = \overline{w}^\top \overline{g}^\top u = h(w, \underbrace{\overline{g}^\top u}_{\in U}) \overset{w \in U^\perp}{=} 0.$$

Per il caso generale l'idea è la stessa ma usiamo

$$h_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^{m} h(v_i, u_i).$$

Si conclude usando la tesi per $h$. □

**Esempio 4.44.** Sia $G \in \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n), O(n)\}$, allora $G$ è completamente riducibile. Per $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ questo è ovvio. Per $O(n) = \left\{g^\top g = id\right\}$ basta mostrare che se $g^\top g = id$ allora $\overline{g}^\top \overline{g} = id$, ma questo è chiaro.

Anche $SO(n)$ e $S_p(2n)$ hanno questa proprietà, dove

$$S_p(2n) = \left\{g \mid gJg^\top = J\right\}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 4.45.** Sia $\operatorname{char} \mathbb{K} = p = 2$ e consideriamo $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$. Esso ammette una rappresentazione semplice $V = \mathbb{K}^2$. Sia $x, y$ una base di $V$ e consideriamo l'azione data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = ax + by, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y = cx + dy.$$

Consideriamo ora $S^2V = \left\langle X^2, xy, y^2 \right\rangle$. Per questioni di caratteristica 2, $gx^2 = (gx)^2$. Notiamo allora che $W = \left\langle x^2, y^2 \right\rangle$ è una sottorappresentazione di $S^2V$ che non ammette un complementare.

**Esercizio 4.46.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$ allora $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ non sono completamente riducibili.

**Proposizione 4.47.** Se $G$ è completamente riducibile allora $G$ non ha sottogruppi unipotenti normali non banali.

*Dimostrazione.*
Sia $W$ tale che $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ (definizione di gruppo algebrico lineare).

Sia $V$ una rappresentazione irriducibile di $G$ e sia $U \subseteq G$ un sottogruppo normale unipotente. Poiché $V \neq (0)$ e $U$ unipotente, $V^U \neq 0$ per il corollario (4.24). Poiché $U$ è normale $V^U$ è stabile per $G$ e quindi $V^U = V$, cioè $U$ agisce banalmente su tutte le rappresentazioni irriducibili. Questo mostra che per la mappa $G \to \mathrm{GL}(W)$ si ha che $U$ finisce in $\{id_W\}$ perché $G$ è completamente riducibile, ma questa mappa è iniettiva e quindi $U = \{1_G\}$. □

**Definizione 4.48** (Caratteri di un gruppo)**.** Dato un gruppo algebrico $G$ definiamo un **carattere** di $G$ come un omomorfismo di gruppi

$$\alpha : G \to \mathrm{GL}(1) = \mathbb{K}^\times.$$

L'insieme dei caratteri $X(G)$ forma un gruppo abeliano:

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) = \beta(g)\alpha(g) = (\beta\alpha)(g).$$

**Teorema 4.49.** Sia $G$ un gruppo abeliano connesso completamente riducibile, allora $G$ è un toro algebrico.

*Dimostrazione.*
Notiamo che ogni elemento di $G$ è semisemplice: se $g \in G$ allora per la decomposizione di Jordan (4.12) si ha $g = su$ con $u$ unipotente in $G$. Poiché $G$ è abeliano, $\langle u \rangle$ è un suo sottogruppo normale, quindi per la proposizione sopra (4.47) si ha che $\langle u \rangle = \{1_G\}$, cioè $u = 1_G$. Dunque $g = s1_G = s$, cioè $g$ è semisemplice.

Poiché $G$ è abeliano, gli elementi commutano. Dato che ogni elemento è semisemplice (cioè in ogni rappresentazione è diagonalizzabile), si ha che per ogni rappresentazione esiste una base di autovettori dove ogni elemento di $G$ è *simultaneamente* diagonalizzabile. In particolare le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.

Consideriamo allora una decomposizione di $\mathbb{K}[G]$ che rende ogni elemento di $G$ diagonalizzabile

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$$

dove $\mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$ sono le funzioni regolari $f$ tali che $gf = \alpha(g)f$. Notiamo che

$$\alpha(gh)f = (gh)f = g(hf) = g(\alpha(h)f) = \alpha(h)gf = \alpha(h)\alpha(g)f$$

quindi $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$. Questo ci permette di identificare questa decomposizione con

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in X(G)} V_\alpha, \qquad \text{dove } V_\alpha = \{h \in \mathbb{K}[G] \mid gh = \alpha(g)h\}.$$

Per ogni carattere $\alpha \in X(G)$ definiamo $f_\alpha = \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times) \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}) = \mathbb{K}[G]$. Sfruttando il fatto che $\alpha$ è un omomorfismo si ha $f_\alpha \in V_\alpha$, infatti

$$\begin{aligned}(gf_\alpha)(x) =& f_\alpha(g^{-1}x) = \alpha^{-1}(g^{-1}x) = (\alpha(g^{-1}x))^{-1} = \\ =&(\alpha(g)^{-1}\alpha(x))^{-1} = (\alpha(x))^{-1}\alpha(g) = \\ =&\alpha(g)\alpha^{-1}(x) = \\ =&\alpha(g)f_\alpha(x).\end{aligned}$$

Se $h$ ha carattere $\alpha$, cioè $gh = \alpha(g)h$, allora per ogni $g \in G$

$$\frac{h(1_G)}{f_\alpha(1_G)} = \frac{\alpha(g^{-1})h(1_G)}{\alpha(g^{-1})f_\alpha(1_G)} = \frac{g^{-1}h(1_G)}{g^{-1}f_\alpha(1_G)} = \frac{h(g1_G)}{f_\alpha(g1_G)} = \frac{h(g)}{f_\alpha(g)},$$

cioè $h$ è un multiplo di $f_\alpha$ (in particolare $n_\alpha = 1$ nella scrittura sopra).

Mostriamo che $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$ per qualche $n$ mostrando che è un gruppo abeliano finitamente generato libero da torsione:

$\boxed{\text{fin.gen.}}$ Sappiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata quindi consideriamo dei generatori $f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_m}$. Come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathbb{K}[G]$ è generato da elementi della forma

$$f_{\alpha_1}^{n_1} \cdots f_{\alpha_m}^{n_m},$$

il quale ha carattere $\prod \alpha_i^{n_i}$. Questo mostra che i caratteri $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ sono dei generatori di $X(G)$.

$\boxed{\text{tor.free}}$ EPer assurdo supponiamo $\alpha^N = 1$ ma $\alpha \neq 1$, cioè $\alpha(g)^N = 1$ per ogni $g \in G$. Notiamo che

$$G = \coprod_{\omega \ t.c. \ \omega^N = 1} \{g \mid \alpha(g) = \omega\},$$

ma poiché $G$ è connesso, questa unione disgiunta deve consistere di un solo termine, mostrando che $\alpha$ assume solo il valore 1 contraddicendo le ipotesi.

Abbiamo quindi mostrato che $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$. Sia $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ una sua base. Se scriviamo $x_i = f_{\alpha_i}$ troviamo

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \langle f_\alpha \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus \langle x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

e in questa decomposizione il prodotto è esattamente quello che ci aspetteremmo. Se scriviamo $\alpha = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_n^{m_n}$ allora $f_\alpha = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, dunque abbiamo proprio mostrato che

$$\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{K}[(\mathbb{K}^\times)^n].$$

Essendo sia $G$ che $(\mathbb{K}^\times)^n$ affini questo mostra che sono isomorfi. $\square$

# Capitolo 5

# Quozienti

## 5.1 Costruzione dei quozienti

**Lemma 5.1.** Sia $G$ un gruppo algebrico e $H$ sottogruppo di $G$, allora

1. Esistono una rappresentazione di dimensione finita $V$ di $G$ e una retta $L \subseteq V$ tali che $H = \operatorname{stab}_G L = \{g \in G \mid g(L) = L\}$
2. Se $H$ è normale allora $V$ si può scegliere in modo che sia somma dei $V_\alpha$ per $\alpha \in X(H)$ e $V_\alpha = \{v \in V \mid h \cdot v = \alpha(h)v\}$.

*Dimostrazione.*
Mostriamo le due affermazioni

1. Sia $I_H \subseteq \mathbb{K}[G]$ l'ideale che definisce $H$, allora

$$H = \{g \in G \mid g(I_H) = I_H\}$$

$\boxed{\subseteq}$ Se $g \in H$ e $f \in I_H$ allora $gf(k) = f(g^{-1}k)$, quindi se $k \in H$ allora $g^{-1}k \in H$ e quindi questa funzione vale 0, cioè $gf \in I_H$. L'altra inclusione segue dallo stesso ragionamento fatto su $g^{-1}$.

$\boxed{\supseteq}$ Se $g^{-1}(I_H) \subseteq I_H$ allora per ogni $f \in I_H$

$$f(g) = \underbrace{(g^{-1}f)}_{\in I_H}(e) = 0$$

cioè $g \in H$.

Consideriamo ora dei generatori $f_1, \cdots, f_m$ per $I_H$ e sia $V_0 \subseteq \mathbb{K}[G]$ una $G$-sottorappresentazione di dimensione finita che contiene ogni $f_i$. Consideriamo il sottospazio vettoriale $W_0 = I_H \cap V_0$ e notiamo che

$$H = \{g \in G \mid g(W_0) = W_0\}.$$

$\boxed{\subseteq}$ Ovvio per quanto detto sopra.

$\boxed{\supseteq}$ Se $g(W_0) = W_0$ allora $g(I_H) = I_H$, infatti $g(I_H) \subseteq I_H$ ovvio per costruzione di $W_0$, l'altra inclusione segue dal fatto che $g(W_0) = W_0 \iff g^{-1}(W_0) = W_0$.

Sia $\dim W_0 = m$. Poniamo

$$V = \bigwedge^m V_0, \quad L = \bigwedge^m W_0 \subseteq \bigwedge^m V_0.$$

Per concludere basta mostrare che

$$H = \{g \in G \mid g(L) = L\}$$

$\boxed{\subseteq}$ Se $g(W_0) = W_0$ allora chiaramente

$$g(L) = g\left(\bigwedge^m W_0\right) = \bigwedge^m g(W_0) = \bigwedge^m W_0 = L.$$

$\boxed{\supseteq}$ Notiamo che se $u_1, \cdots, u_m$ è una base di $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale allora

$$U = \{u \in V \mid u \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_m = 0\}.$$

Fissiamo una base $w_1, \cdots, w_m$ di $W_0$ e osserviamo che $gw_1, \cdots, gw_m$ è una base di $g(W_0)$. Se $g(L) = L$ allora per definizione

$$\langle gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m \rangle = \langle w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \rangle,$$

quindi per il criterio appena citato si ha che

$$\begin{aligned} W_0 &= \{v \in V \mid v \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid u \wedge gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m = 0\} = g(W_0). \end{aligned}$$

2. Sia $V' = \bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha \subseteq V$ con $V$ di prima. Mostriamo che $V'$ è $G$-invariante: Se $v_\alpha \in V_\alpha$ per $\alpha \in X(H)$, $h \in H$ e $g \in G$ allora

$$h \cdot (gv_\alpha) = (gg^{-1}hg) \cdot v_\alpha = g(\alpha(g^{-1}hg)v_\alpha) = \alpha(g^{-1}hg)gv_\alpha,$$

cioè $gv_\alpha$ è un autovettore per l'azione di $h$ per un qualsiasi $g \in G$ e $h \in H$, ovvero $V'$ è $G$-invariante.

Per concludere è dunque sufficiente mostrare che $L \subseteq V'$, ma abbiamo già visto che

$$g(w_1 \wedge \cdots \wedge w_m) = gw_1 \wedge \cdots \wedge gw_m = \lambda(g)w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$$

per qualche $\lambda(g)$ per ogni $g \in H$, quindi $L \subseteq V_\lambda$.

$\square$

Siano $H < G$ e $L, V$ come nel lemma. Allora $L \in \mathbb{P}(V)$ per definizione di spazio proiettivo. Definiamo la varietà proiettiva

$$Y = \overline{G \cdot L} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

e scriviamo $X = G \cdot L$. Mostriamo che $X$ è aperto: data la mappa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Y \\ g & \longmapsto & gL \end{array},$$

per Chevalley (3.16) si ha che $X$ contiene un aperto $U$ di $Y$. Se $x \in U \subseteq X$ allora $gx \in gU \subseteq X$ quindi

$$X = \bigcup_{g \in G} gU \text{ è aperto.}$$

Insiemisticamente si ha $X = G \cdot L = G/\operatorname{stab}_G(L) = G/H$, quindi prendere la chiusura è in un qualche modo il minimo indispensabile per rendere $G/H$ una varietà.

**Esercizio 5.2.** Sia $G = \mathrm{GL}(2)$ e $H = B(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$. Sia $V = \mathbb{K}^2$ e $L = \mathbb{K}e_1$, allora effettivamente $H = \mathrm{stab}_G(L)$ e $G \cdot L = \mathbb{P}(V)$ (ogni retta si ottiene da $L$ applicando una trasformazione lineare), quindi $G/H \leftrightarrow \mathbb{P}(V)$.

**Esercizio 5.3.** Sia $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $H = O(n, \mathbb{C})$. Sia $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ lo spazio delle matrici simmetriche. Se $A \in V$ e $g \in G$ agisce su $A$ tramite

$$g \cdot A = gAg^\top$$

allora $H = \mathrm{stab}_G(I_n)$ (stabilizzatore della matrice identità).

$X = G \cdot I_n = \left\{gg^\top \mid g \in \mathrm{GL}(n)\right\} = \{A \in \mathrm{Sym}(n) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq \overline{G \cdot I_n} = Y \subseteq \mathbb{P}(V)$.

**Proposizione 5.4.** Se $H$ è normale, $G/H$ è un gruppo algebrico affine.

*Dimostrazione.*
Costruiamo $L$ e $V = \bigoplus V_\alpha$ come nel punto 2. del lemma (5.1). Sia

$$W = \{T : V \to V \mid \forall \alpha \in X(H),\ T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha\}$$

e notiamo che $G$ agisce su $W$ come $gT = g \circ T \circ g^{-1}$. Per rendere valido quanto detto dobbiamo verificare che $gTg^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha$, ma questo segue dal fatto che se $g^{-1}(V_\alpha) = V_\beta$ allora

$$gTg^{-1}(V_\alpha) = gT(V_\beta) \subseteq gV_\beta = V_\alpha.$$

Notiamo ora che

$$\left\{g \in G \mid g|_W = id_W\right\} = \left\{g \in G \mid g|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha}\ \forall \alpha \in X(H)\right\} = H,$$

la seconda uguaglianza segue dalla definizione di carattere mentre la prima si ricava osservando le matrici associate agli elementi di $g$ visti come automorfismi di $V$: gli elementi di $W$ sono diagonali a blocchi e ciò che commuta[1] con tutte le diagonali a blocchi sono le cose che sono multiplo di identità su ogni blocco.

Abbiamo dunque costruito un omomorfismo di gruppi algebrici $\varphi : G \to \mathrm{GL}(W)$ il cui nucleo è $H$. Poiché $\varphi(G)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(W)$ per Chevalley (3.18) si ha che $G/H \cong \varphi(G)$ eredita la struttura di gruppo algebrico lineare da $\varphi(G)$. □

[1] $g|_W = id_W$ significa che per ogni $T \in W$ $gTg^{-1} = T$, cioè $gT = Tg$.