

Gruppi algebrici lineari

Corso del prof. Maffei Andrea

Antonio Di Nunzio e Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

I	Prerequisiti	4
1	Teoria delle rappresentazioni	5
1.1	Definizioni	5
1.2	Costruzioni principali	6
1.3	Rappresentazioni semplici e semisemplici	9
2	Geometria Algebrica	12
2.1	Varietà affini immerse	12
2.2	Varietà algebriche e morfismi	15
2.3	Connessione e Irriducibilità	17
2.4	Dimensione di una varietà algebrica	20
2.5	Varietà lisce	20
II	Gruppi algebrici	25
3	Gruppi algebrici	26
3.1	Definizioni generali	26
3.1.1	Componente connessa dell'identità	29
3.2	Gruppi algebrici affini sono lineari	30
4	Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile	33
4.1	Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti	34
4.2	Decomposizione di Jordan	37
4.3	Gruppi unipotenti	42
4.3.1	Esponenziale e logaritmo	44
4.4	Gruppi completamente riducibili	45
5	Quozienti	50
5.1	Costruzione dei quozienti	50
5.2	Sottogruppi generati e contenimenti	55
5.3	Varietà complete	58
5.3.1	Punto fisso di Borel	58
5.3.2	Sottogruppi parabolici e di Borel	60
5.4	Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici	62
5.4.1	Matrici invertibili	62
5.4.2	Matrici ortogonali speciali	64
5.4.3	Matrici del gruppo lineare speciale	66

III	Fibrati	70
6	Fibrati vettoriali	71
6.1	Cocicli e banalizzazioni	72
6.2	Operazioni sui fibrati	75
6.3	Sezioni di un fibrato	76
6.4	Fibrati vettoriali su varietà affini	77
6.4.1	Caratterizzazione con i moduli proiettivi	78
6.5	Fibrati vettoriali sulla retta proiettiva	81
6.5.1	Fibrati lineari	81
6.5.2	Fibrati vettoriali	83
6.6	Fibrati con azione di gruppo	84
7	Teorema di Quillen-Suslin	86
7.1	Teorema di incollamento di Quillen	87
7.1.1	Lemmi geometrici	87
7.1.2	Lemmi su polinomi invertibili a coefficienti in algebra	90
7.1.3	Dimostrazione	91
7.2	Teoremi di Horrocks	93
7.2.1	Dimostrazione Horrocks geometrico locale	94
7.2.2	Implicazioni verso Horrocks algebrico globale	94
7.2.3	Dimostrazione di Quillen-Suslin	95

Introduzione

Di cosa stiamo parlando?

Un **gruppo algebrico lineare** è un sottogruppo di $GL(n)$ definito dall'annullarsi di equazioni polinomiali.

Vogliamo studiare questi gruppi e le loro rappresentazioni.

Esempio 0.1. Il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ agisce su \mathbb{C}^2 , e quindi anche sulle funzioni definite su \mathbb{C}^2 , infatti se $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ abbiamo una azione

$$g(f)(v) = f(g^{-1}v)$$

In particolare notiamo che porta funzioni polinomiali in funzioni polinomiali, in quanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = dx - by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (y) = -cx + ay.$$

Notiamo anche che preserva il grado in quanto manda polinomi lineari in lineari.

Domanda: come funzionano le orbite di questa azione sugli spazi omogenei?

$$\mathbb{C}[x, y]_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d \rangle_{\mathbb{C}}$$

Consideriamo per esempio $V_2 = \mathbb{C}[x, y]_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$. I suoi elementi sono $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$. Segue che $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]$ sono le funzioni polinomiali su V_2 . Possiamo classificare le orbite in termini dell'invariante $\Delta = \alpha\gamma - 4\beta^2$.

Parte I

Prerequisiti

Capitolo 1

Teoria delle rappresentazioni

1.1 Definizioni

Definizione 1.1 (Rappresentazione). Sia G un gruppo e \mathbb{K} un campo. Una **rappresentazione** di G su \mathbb{K} (o **G -modulo**) è un \mathbb{K} -spazio vettoriale V munito di una azione \mathbb{K} -lineare di G , cioè esiste una mappa

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

con le proprietà^a

- $e \cdot v = v$
- $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$
- $g \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda g \cdot u + \mu g \cdot v$

^ain futuro potrò abbreviare omettendo il \cdot .

Osservazione 1.2. Dare una rappresentazione è equivalente a dare un morfismo di gruppi $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ dove $\rho(g)v = g \cdot v$.

Definizione 1.3 (Sottorappresentazione). Dato $U \subseteq V$ con V rappresentazione di G , U è una **sottorappresentazione** se U è sottospazio vettoriale G -invariante.

Osservazione 1.4. Data $U \subseteq V$ sottorappresentazione, possiamo definire una struttura naturale di rappresentazione su $W = V/U$ ponendo

$$g[v] = [gv].$$

Definizione 1.5 (Morfismo di G -rappresentazioni). Se V_1, V_2 sono rappresentazioni di G e abbiamo $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineare, diciamo che φ è un **morfismo di G -rappresentazioni o di G -moduli** se

$$\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1).$$

Esempio 1.6. Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $U \subseteq V$ è morfismo di G -moduli

Esempio 1.7. Se $U \subseteq V$ è una sottorappresentazione, $V \rightarrow V/U$ è morfismo di G -moduli

Osservazione 1.8. La mappa $\pi : V \rightarrow V/U$ è tale che per ogni $\varphi : V \rightarrow V'$ di G -moduli, se $\varphi(U) = 0$ allora esiste $\chi : V/U \rightarrow V'$ di G -moduli t.c. $\varphi = \chi \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/U \longrightarrow 0 \\ & & & \searrow & \downarrow \varphi & \nearrow \chi & \\ & & & 0 & V' & & \end{array}$$

Definizione 1.9 (Invarianti e coinvarianti). Sia V un G -modulo. Definiamo lo **spazio degli invarianti** come

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \forall g \in G\}.$$

Si ha che V^G è una sottorappresentazione di cui G agisce banalmente. Analogamente definiamo lo **spazio dei coinvarianti** come

$$V_G = V / \langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Notiamo che $\langle v - gv \mid v \in V, g \in G \rangle$ è effettivamente una sottorappresentazione ($h(v - gv) = hv - (hgh^{-1})(hv)$), quindi questo quoziente è ben definito. Notiamo che G agisce banalmente anche V_G .

Notazione. Se V e W sono G -moduli, poniamo

$$\text{Hom}_G(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ di } G\text{-moduli}\}.$$

Notiamo che è un \mathbb{K} -spazio vettoriale.

1.2 Costruzioni principali

Se V_i sono rappresentazioni di G , $\bigoplus_i V_i$ e $\prod_i V_i$ sono rappresentazioni di G . Inoltre $\bigoplus_i V_i$ è sottorappresentazione di $\prod_i V_i$.

Osservazione 1.10 (Proprietà universale). Consideriamo le inclusioni di G -moduli

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & \bigoplus V_i \\ v_i & \longmapsto & (w_j) \end{array}, \quad \text{dove } w_j = \begin{cases} v_i & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $\varphi_i : V_i \rightarrow W$ è di G -moduli allora esiste un'unica $\psi : \bigoplus V_i \rightarrow W$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \bigoplus V_i \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \psi \\ & & W \end{array}$$

Vale una proprietà duale per il prodotto.

Definizione 1.11 (Rappresentazione duale). Se V è G -modulo, definiamo una azione di G su V^* definendo $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$. Come notazione useremo

$$\langle g\varphi, v \rangle = \langle \varphi, g^{-1}v \rangle.$$

La rappresentazione così definita è detta **duale** alla rappresentazione V .

Osservazione 1.12. $\langle g\varphi, gv \rangle = \langle \varphi, v \rangle$.

Definizione 1.13 (Prodotto tensore). Se V e W rappresentazioni di G , definiamo una azione sul prodotto tensore ponendo

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

Definizione 1.14 (Omomorfismi). Se V e W rappresentazioni di G , definiamo una azione su $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ponendo

$$(gL)(v) = g(L(g^{-1}v)).$$

Osservazione 1.15. $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \{L \mid gL = L\}$, ma

$$gL = L \iff g(L(g^{-1}v)) = gL(v) = L(v) \iff L(g^{-1}v) = g^{-1}L(v)$$

e poiché questo vale per ogni $g \in G$ ricaviamo che

$$(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \text{Hom}_G(V, W).$$

Ricordiamo che esiste

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \varphi \otimes w & \longmapsto & \{v \mapsto \varphi(v)w\} \end{array}$$

Osservazione 1.16. Φ è iniettiva e $\text{Imm } \Phi = \{L : V \rightarrow W \mid \text{rk } L < \infty\}$

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

Domanda: Φ è di G -moduli?

Dimostrazione.

Per linearità basta considerare elementi della forma $\varphi \otimes w$.

$$\Phi(g(\varphi \otimes w))(v) = \Phi(g\varphi \otimes gw)(v) = g\varphi(v)gw = \varphi(g^{-1}v)gw = g(\Phi(\varphi \otimes w))(v).$$

□

Definizione 1.17 (Tensori simmetrici e antisimmetrici). Definiamo

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{-volte}}$$

$$S^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes x_b \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_b \otimes x_a \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

$$\bigwedge^n V = \frac{V^{\otimes n}}{\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_a \otimes v \otimes v \otimes x_{a+3} \otimes \cdots \otimes x_n \rangle_{\mathbb{K}}}$$

Per il prodotto simmetrico vale una proprietà universale analoga a quella del prodotto tensore, dove al posto di mappe multilineari qualsiasi consideriamo multilineari simmetriche (se $V^n \rightarrow W$ multilineare simmetrica, abbiamo $F : V^{\otimes n} \rightarrow W$ che passa al quoziente diventando $H : S^n V \rightarrow W$, l'unicità segue dall'unicità di F e suriettività di $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$).

Un ragionamento completamente analogo vale per $\bigwedge^n V$.

Osservazione 1.18. Se V è un G -modulo, per quanto detto sul prodotto tensore, $V^{\otimes n}$ è una rappresentazione e quindi anche $S^n V$ e $\bigwedge^n V$ lo sono in quanto suoi quozienti.

Definizione 1.19 (Algebra tensoriale). Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e poniamo $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Definiamo l'**algebra tensoriale** come

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n},$$

dove il prodotto è indotto da

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

In modo analogo costruiamo l'**algebra simmetrica** SV e l'**algebra antisimmetrica** $\bigwedge V$.

Osservazione 1.20. $SV \cong \mathbb{K}[x_i \mid i \in I]$ dove $\{x_i\}_{i \in I}$ è una base di V .

Definizione 1.21 (Algebra associativa universale). Sia V uno spazio vettoriale, l'**algebra associativa universale** su V consiste in una \mathbb{K} -algebra^a A e un morfismo $\alpha : V \rightarrow A$ tale che

1. α è \mathbb{K} -lineare
2. per ogni B algebra associativa e per ogni $\beta : V \rightarrow B$ \mathbb{K} -lineare esiste un unico morfismo ψ di \mathbb{K} -algebre tale che

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow \beta & \downarrow \psi \\ & & B \end{array}$$

^a $\mathbb{K} \subseteq A$, A anello con unità e $\mathbb{K} \subseteq Z(A)$

Osservazione 1.22. Se una algebra associativa universale esiste allora è unica a meno di isomorfismo perché abbiamo dato una proprietà universale.

Osservazione 1.23. Un'algebra associativa universale esiste per ogni V ed è data dall'algebra tensoriale e l'inclusione $V \xrightarrow{id} V^{\otimes 1} \subseteq TV$.

Dimostrazione.

Sia B un'algebra associativa e sia $\beta : V \rightarrow B$ lineare. Definiamo

$$F : \begin{array}{ccc} TV & \longrightarrow & B \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \longmapsto & \beta(v_1) \cdots \beta(v_n) \end{array}$$

La buona definizione segue dal fatto che il prodotto in un'algebra è multilineare. \square

Osservazione 1.24. Dato V spazio vettoriale possiamo definire analogamente a prima l'algebra associativa universale simmetrica e l'algebra associativa universale antisimmetrica e un loro modello è dato da SV e $\bigwedge V$ rispettivamente.

1.3 Rappresentazioni semplici e semisemplici

Definizione 1.25 (Rappresentazione semplice). Una rappresentazione S di G si dice **semplice** se $S \neq 0$ e se non ha sottorappresentazioni non banali.

Lemma 1.26 (Lemma di Schur). Sia S una rappresentazione semplice di G .

1. Ogni morfismo di G -moduli non nullo $\varphi : S \rightarrow S$ è invertibile.
2. L'insieme $\text{End}_G(S)$ è un corpo e si ha $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S))$.

Dimostrazione.

Per il primo punto, osserviamo che $\ker \varphi$ è un sottomodulo di S che non può essere uguale a S , quindi è 0. Analogamente $\text{Im } \varphi = S$. Per il secondo punto, sia $F =$

$\text{End}_G(S)$. La moltiplicazione per un elemento λ di \mathbb{K} è in F e commuta con tutto F . Infine, se φ è un elemento non nullo di F , per il primo punto φ è invertibile e l'inverso è un omomorfismo di G -moduli. \square

Esempio 1.27. Assumiamo \mathbb{K} algebricamente chiuso e $\dim_{\mathbb{K}}(S) < +\infty$. Allora abbiamo un contenimento $\mathbb{K} \subseteq Z(\text{End}_G(S)) \subseteq \text{End}_G(S)$. Poiché la dimensione di $\text{End}_G(S)$ su \mathbb{K} è finita e \mathbb{K} è algebricamente chiuso, si ottiene $\mathbb{K} = \text{End}_G(S)$.

Esercizio 1.28. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supponiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(S)$ sia al più numerabile. Mostrare che $\text{End}_G(S) = \mathbb{C}$.

Esempio 1.29. Sia $G = C_2 = \{1, \sigma\}$ e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$. Allora la rappresentazione $V = \mathbb{K}^2$ di G data da

$$[\sigma]_{e_1, e_2}^{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è somma di rappresentazioni semplici.

Definizione 1.30. Sia V una rappresentazione di G .

1. V si dice **semisemplice** se è somma diretta di rappresentazioni semplici.
2. V si dice **completamente riducibile** se per ogni sottorappresentazione W di V esiste una sottorappresentazione U di V tale che $V = U \oplus W$.

Esempio 1.31. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la rappresentazione $V = \mathbb{C}^2$ del gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

non è completamente riducibile: consideriamo la sottorappresentazione di V data da $W = \mathbb{C}e_1$; se esistesse $U = \mathbb{C}v_2$ tale che $V = U \oplus W$, allora nella base e_1, v_2 tutte gli elementi g in G sarebbero diagonali

$$[g]_{e_1, v_2}^{e_1, v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonale se $x \neq 0$.

Proposizione 1.32. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. V è somma diretta di rappresentazioni semplici;
2. V è somma di rappresentazioni semplici.

Inoltre, le precedenti condizioni implicano la seguente.

3. V è completamente riducibile.

Dimostrazione.

Chiaramente la prima condizione implica la seconda. Proviamo il viceversa. Sia $V = \sum_{i \in I} S_i$ con S_i semplici. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I : \sum_{j \in J} S_j = \bigoplus_{j \in J} S_j \right\}.$$

La famiglia \mathcal{F} è non vuota in quanto contiene il singoletto $\{i\}$ per ogni i in I . Inoltre \mathcal{F} è ordinata parzialmente per inclusione: mostriamo che ogni catena $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di \mathcal{F} ammette il maggiorante $J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ in \mathcal{F} . Basta mostrare che, per ogni $H \subseteq J$ finito, la somma $\sum_{h \in H} S_h$ è diretta. Poiché H è finito, si ha $H \subseteq J_\alpha$ per qualche α in A , dunque la somma $\sum_{j \in J_\alpha} S_j$ è diretta. A questo punto, per il Lemma di Zorn esiste un elemento M in \mathcal{F} massimale. Mostriamo che $V = \bigoplus_{j \in M} S_j$. Per assurdo assumiamo $W \doteq \bigoplus_{j \in M} S_j \subsetneq V$ e sia S_0 tale che $S_0 \not\subseteq W$. Allora $S_0 \cap W \subseteq S_0$ e $S_0 \oplus W \subset V$, allora $\widetilde{M} = M \cup \{0\}$ è in \mathcal{F} , contro la massimalità di M in \mathcal{F} .

L'implicazione 1. \Rightarrow 3. è lasciata per esercizio. □

Capitolo 2

Geometria Algebrica

In questa sezione, assumeremo sempre \mathbb{K} algebricamente chiuso.

2.1 Varietà affini immerse

Definizione 2.1. Un sottoinsieme X di \mathbb{K}^n si dice una **varietà algebrica affine (immersa)** se esistono f_1, \dots, f_h in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che

$$X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid f_1(v) = \dots = f_h(v) = 0\}.$$

Data una varietà algebrica affine immersa X , denotiamo

$$I(X) \doteq \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } v \in X\}.$$

L'insieme $I(X)$ risulta un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Viceversa, se J è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, denotiamo

$$V(J) \doteq \{v \in \mathbb{K}^n \mid f(v) = 0 \text{ per ogni } f \in J\}.$$

Richiamiamo inoltre il classico Teorema degli Zeri di Hilbert.

Notazione. Nel seguito, denoteremo con P l'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Teorema 2.2 (Nullstellensatz). Se \mathbb{K} è un campo algebricamente chiuso e I, J sono ideali di P allora

$$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

In particolare abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{varietà algebriche affini immerse in } \mathbb{K}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Esempio 2.3. Vediamo qualche controesempio classico.

- Se \mathbb{K} non è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz non vale: ad esempio per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il polinomio $X^2 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ genera un ideale proprio (massimale) J tale che $V(J) = \emptyset$.
- La corrispondenza precedente non vale per gli ideali in generale: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, l'ideale $J = (x^2)$ è tale che $V(J) = \{0\}$, ma $I(V(J)) = (x) \neq J$.

Vediamo ora alcune conseguenze del Nullstellensatz.

1. Gli ideali massimali di P sono tutti e solo quelli della forma $\mathfrak{m}_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in \mathbb{K}^n .

Dimostrazione.

Che i precedenti siano tutti ideali massimali è evidente, mostriamo che sono i soli. Sia \mathfrak{m} un ideale massimale di P . Allora $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ (in quanto altrimenti avremmo $P = I(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$), dunque esiste un α in \mathbb{K}^n appartenente a $V(\mathfrak{m})$. Ma allora $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$ e per massimalità di \mathfrak{m}_α si ottiene l'uguaglianza. \square

2. Sia $I \subseteq P$ e sia α in $V(I)$. Allora $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha$ e in generale

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I\}.$$

Ricordiamo inoltre (mostrarlo per esercizio) che se I è un ideale di P , allora si ha

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \text{Max}(P) \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

Definizione 2.4. Sia X una varietà algebrica affine immersa in \mathbb{K}^n . Si definisce l'**anello delle coordinate** di X come il quoziente

$$\mathbb{K}[X] = P/I(X) = \{f|_X : f \in P\}.$$

Ricordiamo che su \mathbb{K}^n è definita una topologia, detta **topologia di Zariski**, in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi $V(I)$ al variare degli ideali I in P . Ricordiamo infatti che, se I, J sono ideali di P , allora

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$;
- $\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V(\sum_{i \in I} I_i)$.

Esempio 2.5. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n = 1$, i chiusi sono gli insiemi con un numero finito di punti, oppure tutto \mathbb{C} .

Definizione 2.6. Sia f un elemento di P . Si definisce l'**aperto principale** relativo a f come

$$(\mathbb{K}^n)_f \doteq \mathbb{K}^n \setminus V(f) = \{\alpha \in \mathbb{K}^n : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Se $U = \mathbb{K}^n \setminus V(I)$ è un aperto e α è in U , allora esiste f in P tale che $\alpha \in (\mathbb{K}^n)_f \subseteq U$. Infatti $I = (f_1, \dots, f_h)$, $V(I) \subseteq V(f_i)$ e $(\mathbb{K}^n)_{f_i} = \mathbb{K}^n \setminus V(f_i) \subseteq U$.

Dotiamo ogni varietà algebrica affine immersa in \mathbb{K}^n della topologia di sottospazio. Inoltre, definiamo

$$X_f \doteq (\mathbb{K}^n)_f \cap X = \{\alpha \in X : f(\alpha) \neq 0\}.$$

Osservazione 2.7. L'insieme

$$\left\{ \frac{g}{f^n} : g \in P \right\}$$

è ben definito su $(\mathbb{K}^n)_f$.

Definizione 2.8 (Funzioni regolari). Sia U un aperto di \mathbb{K}^n . Si definisce l'insieme delle **funzioni regolari** su U come

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall \alpha \in U \exists g, h \in P : g(\alpha) \neq 0 \text{ e } f = h/g^n \text{ su } U \cap X_g\}.$$

Lemma 2.9. Sia X varietà affine immersa, allora

1. $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}[X]$
2. Se $g \in \mathbb{K}[X]$ allora $\mathcal{O}(X_g) = \mathbb{K}[X]_g$

Dimostrazione.

Intanto l'affermazione 2. implica l'affermazione 1. scegliendo $g \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Osserviamo che se abbiamo una funzione della forma f/g^n allora essa appartiene a $\mathcal{O}(X_g)$, quindi basta mostrare che se $\varphi \in \mathcal{O}(X_g)$ allora $\varphi \in \mathbb{K}[X]_g$. Per definizione, per ogni $\alpha \in X_g$ esistono h e k tali che $\varphi = k/h$ in $X_g \cap X_h = X_{gh}$.

Abbiamo dunque un ricoprimento $X_g = \bigcup X_{gh_i}$ dove $\varphi = k_i/h_i$ su X_{gh_i} . Sia $I = (h_i)$ l'ideale in $\mathbb{K}[X]_g$ generato dagli h_i . Se per assurdo $I \neq \mathbb{K}[X]_g$ allora esiste un massimale \mathfrak{m} che contiene I . Un massimale corrisponde ad un punto $\alpha \in X_g \subseteq X$ ma, poiché X_g è ricoperto dagli X_{gh_i} , esiste un indice i_0 tale che $\alpha \in X_{gh_{i_0}}$ e questo è assurdo perché vorrebbe dire

$$h_{i_0} \notin \mathfrak{m}_\alpha \supseteq I \ni h_{i_0}.$$

Questo mostra che $I = \mathbb{K}[X]_g$. Possiamo dunque scrivere¹ $1 = \sum \alpha_i h_i$ per opportuni α_i . Segue che $\varphi = \sum \alpha_i h_i \varphi = \sum \alpha_i k_i$ in $\mathbb{K}[X]_g$, infatti dove $h_i \neq 0$ abbiamo $\varphi = k_i/h_i$ e quindi $h_i \varphi = k_i$, se invece $h_i(x) = 0$ si ha che $h_i(x) \varphi(x) = 0 = k_i(0)$, perché se così non fosse, poiché $x \in X_{h_j}$ per qualche $j \neq i$, si ha che

$$k_j/h_j = k_i/h_i \iff h_i k_j = k_i h_j$$

su $X_{h_i h_j}$ e quindi valutando in x abbiamo $k_i(x) h_j(x) = 0$ con $h_j(x) \neq 0$. □

¹nota che la somma è finita per definizione di ideale generato.

2.2 Varietà algebriche e morfismi

Definizione 2.10 (Varietà algebrica). Spazio topologico compatto X tale che per ogni aperto U abbiamo un insieme di funzioni $\mathcal{O}_X(U) \subseteq C^0(X \rightarrow \mathbb{K})$ tale che

1. Se $U \subseteq V$ e $f \in \mathcal{O}_X(V)$ allora $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$.
2. Se $V = \bigcup U_\alpha$ e $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ è tale che $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ per ogni α allora $f \in \mathcal{O}_X(V)$.
3. (X, \mathcal{O}_X) è localmente isomorfo ad una varietà affine immersa, cioè per ogni $x \in X$ esiste un intorno U e un omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow Y$ con Y affine tale che per ogni V aperto di U si ha $\varphi(V) = W$ aperto e $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ è un isomorfismo.

Esempio 2.11. Sia $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2} \supseteq V_{\det} = \text{GL}(n) = X$. Se U è un aperto di X pongo $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_V(U)$. Dimostriamo che X è localmente isomorfo ad una varietà affine (in realtà possiamo mostrare che è isomorfo ad una varietà affine globalmente):

Sia $Y \subseteq \mathbb{K}^{n^2+1} = V_{x_{ij}} \times \mathbb{K}_t$ definito dall'equazione $d(x_{ij})t = 1$. La mappa

$$\Phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ (x_{ij}) & \longmapsto & (x_{ij}, \frac{1}{\det(x_{ij})}) \end{array}$$

risulta essere un isomorfismo.

Proposizione 2.12. Se X è una varietà affine immersa in \mathbb{K}^N , X_f è una varietà isomorfa ad una varietà affine immersa Y data da $V(\{f(x), f(x)t - 1\}_{f \in I(X)}) \subseteq \mathbb{K}_x^N \times \mathbb{K}_t$.

Dimostrazione.

ESERCIZIO. □

Esempio 2.13. Sia $X = \mathbb{P}^1$. Come spazio topologico, i chiusi sono \mathbb{P}^1, \emptyset e sottoinsiemi finiti di punti. Per ogni U aperto di \mathbb{P}^1 poniamo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \circ \varphi_1 \in \mathcal{O}(\varphi_1^{-1}(U)), f \circ \varphi_2 \in \mathcal{O}(\varphi_2^{-1}(U))\}$$

dove

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [t : 1] \end{array}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longmapsto & [1 : t] \end{array}.$$

Definizione 2.14 (Funzione regolare). Se $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ sono varietà, la mappa $\varphi : X \rightarrow Y$ è **regolare** se

1. φ è continua
2. Per ogni W aperto di Y , se $f \in \mathcal{O}_Y(W)$ allora $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(W))$

Definizione 2.15 (Varietà affine). (X, \mathcal{O}_X) è una **varietà affine** se è isomorfa ad una varietà affine immersa.

Se X è una varietà affine immersa, un morfismo $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ induce un omomorfismo di anelli

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

in particolare possiamo definire $f_i = \varphi^*(x_i) = x_i \circ \varphi$ in $\mathbb{K}[X]$ tali che $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ per definizione.

Viceversa, dati $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[X]$ si ha che $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ è una mappa regolare.

Cont. Ovvio.

Pullback Sia $U = D(g) \subseteq \mathbb{K}^n$. Notiamo che

$$\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \mid h(x) \div g(f_1(x), \dots, f_n(x)) \neq 0\} = X_h$$

Se $\alpha : U \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare, $\alpha = \ell/g^n$ con $\ell \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, quindi

$$\alpha \circ \varphi = \text{frac}(\ell(f_1, \dots, f_n)h^n)$$

che è un elemento di $\mathcal{O}(X_h)$ come voluto.

Proposizione 2.16 (Morfismi verso affine). Se Y è una varietà affine allora un morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ è univocamente determinato dall'omomorfismo $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$.

Dimostrazione.

Sia $\psi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \psi & \downarrow \subseteq \\ & & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Notiamo che φ è morfismo se e solo se ψ lo è. Se $\psi(X) \subseteq Y$ e $f \in I(Y)$ allora $\psi^*(f) = f \circ \varphi = 0$, quindi abbiamo un diagramma di algebre.

Viceversa se un morfismo di algebre sollevo e bla bla bla trovo morfismo di varietà. \square

Definizione 2.17 (Prodotto). Siano X, Y varietà affini immerse in \mathbb{K}_x^ℓ e \mathbb{K}_y^m rispettivamente, allora $X \times Y \subseteq \mathbb{K}_{(x,y)}^{\ell+m}$ è una varietà, data da

$$X \times Y = V(\{f(x), g(y)\}_{f \in I(X), g \in I(Y)}) \subseteq \mathbb{K}^\ell \times \mathbb{K}^m.$$

Proposizione 2.18. $\mathbb{K}[X \times Y] \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$

Dimostrazione.

L'anello delle coordinate del prodotto di due varietà affini è dato da

$$\mathbb{K}[X \times Y] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell]}{f(x), g(y)} \cong \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

Infatti abbiamo un morfismo bilineare da $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$ dato dal prodotto dei polinomi. Il morfismo indotto Φ è surgettivo perché $x_i = \Phi(x_i \times 1)$ e $y_i = \Phi(1 \otimes y_i)$, quindi abbiamo i generatori. Per l'iniettività procediamo per casi

- Supponiamo $X = \mathbb{K}^\ell$ e $Y = \mathbb{K}^m$, allora abbiamo una inversa di Φ data da

$$x_i \mapsto x_i \otimes 1, \quad y_i \mapsto 1 \otimes y_i$$

- Scrivendo $\mathbb{K}[X \times Y]$ come $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, y_\ell]}{(f(x), g(y))}$ abbiamo un morfismo dal numeratore verso $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$ ben definito e notiamo che il nucleo è esattamente $(f(x), g(y))$. (dimostrare che prototensore di \mathbb{K} -algebre ridotte finitamente generate è ridotta.)

□

Definizione 2.19 (Prodotto fibrato). Se X, Y, Z varietà affini e morfismi $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$, definiamo $W = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$.

$$\begin{array}{ccc} W & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Osservazione 2.20. Notiamo che W è un chiuso, infatti è luogo di zeri di $f(x) - g(y)$ in $X \times Y$. Osserviamo però che queste equazioni non sono ridotte a priori.

2.3 Connessione e Irriducibilità

Sia X uno spazio topologico connesso. Allora

1. Se $Y \subset X$ è connesso, allora \overline{Y} è connesso.
2. Se $\varphi : X \rightarrow Y$ è continua, allora $\varphi(X)$ è connesso.

Esercizio 2.21. Se X è una varietà algebrica affine, allora

$$X \text{ sconnesso} \iff \mathbb{K}[X] = A \times B.$$

Esercizio 2.22. Siano X, Y due varietà affini connesse. Allora $X \times Y$ è connessa. [Attenzione: la topologia di $X \times Y$ non è la topologia prodotto!]

Esercizio 2.23. Se X è una varietà, allora X ha un numero finito di componenti connesse. In particolare le componenti connesse sono chiuse e aperte.

Definizione 2.24. Uno spazio topologico X si dice **riducibile** se esistono due sottospazi chiusi propri Z e W di X tali che $X = Z \cup W$. Lo spazio X si dice **irriducibile** se non è riducibile.

Osservazione 2.25. Se X è uno spazio di Hausdorff irriducibile, allora X è un punto.

Dimostrazione.

Se x, y sono punti distinti di X , allora esistono due intorni disgiunti U_x e U_y di x e y rispettivamente. Posti $Z = X \setminus U_y$ e $W = X \setminus U_x$, si ottiene $X = Z \cup W$. \square

Osservazione 2.26. Sia X una varietà affine. Allora X è irriducibile se e solo se l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ è un dominio d'integrità.

Dimostrazione.

Siano f, g in $\mathbb{K}[X]$ tali che $fg = 0$. Consideriamo $Z = V(f)$ e $W = V(g)$. Allora Z e W sono due chiusi tali che $X = Z \cup W$, dunque $X = Z$ oppure $X = W$, cioè $f = 0$ oppure $g = 0$. \square

Esempio 2.27. La varietà $X = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : xy = 0\}$ non è irriducibile.

Osservazione 2.28. Se Y è un sottospazio irriducibile di una varietà affine X , allora \overline{Y} è irriducibile. Se inoltre $\varphi: Y \rightarrow X$ è una mappa continua, allora $\varphi(Y)$ è irriducibile. Infine, se X e Y sono spazi topologici irriducibili, allora $X \times Y$ è uno spazio topologico irriducibile.

Sia X una varietà affine. Ricordiamo che esiste una bigezione tra gli ideali radicali di $\mathbb{K}[X]$ e le sottovarietà chiuse di X , data da $I \mapsto V(I)$ e viceversa $Y \mapsto I(Y)$.

Osservazione 2.29. Sia I un ideale di $\mathbb{K}[X]$. Allora

$$V(I) \text{ è irriducibile} \iff I \text{ è un ideale primo.}$$

Ricordiamo che, se I è un ideale radicale allora $V(I)$, come spazio topologico, è omeomorfo alla varietà affine avente come anello di coordinate $\mathbb{K}[X]/I$. L'insieme $V(I)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti I . D'altra parte, gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]/I$ sono gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X]$ contenenti I . Se $\pi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]/I$ è la proiezione canonica, si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X] \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{Massimali di } \mathbb{K}[X]/I\} \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & \mathfrak{m}/I \\ \pi^{-1}(M) & \longleftarrow & M \end{array}$$

Definizione 2.30. Uno spazio topologico X si dice **Noetheriano** se ogni successione

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

di sottospazi chiusi di X stabilizza.

Osservazione 2.31. Ogni varietà affine è uno spazio topologico Noetheriano.

Dimostrazione.

Se $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ è una successione di sottospazi chiusi di X , allora si ha una successione

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq \dots$$

di ideali di $\mathbb{K}[X]$ che stabilizza perché $\mathbb{K}[X]$ è Noetheriano. Quindi anche la successione $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ stabilizza. \square

Osservazione 2.32. Ogni varietà è uno spazio topologico Noetheriano.

Dimostrazione.

Scrivendo $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ con X_i aperti affini e data una successione di chiusi $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$, si ha una successione $Z_1 \cap X_i \supseteq Z_2 \cap X_i \supseteq \dots \supseteq Z_n \cap X_i \supseteq \dots$ che stabilizza per ogni i . Allora esiste un N tale che $Z_n \cap X_i = Z_N \cap X_i$ per ogni $n \geq N$ e per ogni i , da cui $Z_n = Z_N$ per ogni $n \geq N$. \square

Proposizione 2.33. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora esistono dei sottospazi Y_1, \dots, Y_n chiusi e irriducibili di X tali che $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$. Inoltre, se $Y_i \not\subseteq Y_j$ per ogni $i \neq j$, una tale decomposizione di X è unica, e i sottospazi Y_i si dicono le **componenti irriducibili** di X .

Dimostrazione.

Consideriamo la famiglia \mathcal{F} dei chiusi di X che non possono essere scritti come unione di un numero finito di chiusi irriducibili. Mostriamo che \mathcal{F} è vuota.

Supponiamo per assurdo che \mathcal{F} sia non vuota. Poiché ogni catena in \mathcal{F} ammette un minimo, per il Lemma di Zorn esiste un elemento minimale Z in \mathcal{F} . Per costruzione, Z è riducibile, quindi possiamo scrivere $Z = C \cup D$ con C, D sottospazi chiusi e propri di Z . Poiché Z è un elemento minimale, C, D non sono in \mathcal{F} , quindi ammettono una decomposizione finita in chiusi irriducibili, ma allora anche Z ammette una tale decomposizione.

Supponiamo ora che X ammetta due decomposizioni in chiusi irriducibili

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_m = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$$

tali che $Y_i \not\subseteq Y_j$ e $Z_i \not\subseteq Z_j$ per ogni $i \neq j$. Poiché

$$Y_i = Y_i \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n) = Y_i \cap Z_1 \cup \dots \cup Y_i \cap Z_n$$

e poiché Y_i è irriducibile, si ha $Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)}$. Analogamente, $Z_j \subseteq Y_{\beta(j)}$. Allora $\beta \circ \alpha = id$, infatti

$$Y_i \subseteq Z_{\alpha(i)} \subseteq Y_{\beta(\alpha(i))} = Y_i.$$

Analogamente $\alpha \circ \beta = id$ e ciò conclude. \square

Osservazione 2.34 (Componenti irriducibili corrispondono a primi minimali). Siano I, J_α ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che i J_α siano primi contenuti in I . Siano $X = V(I)$ e $Y_\alpha = V(J_\alpha)$. Allora

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n,$$

dove J_1, \dots, J_n sono i primi minimali contenenti I . Sappiamo dal corso di Algebra 2 che i primi minimali sono in numero finito.

Esempio 2.35. $I = (zx, zy)$. $p_1 = (z)$ è il piano, $p_2 = (x, y)$ è la retta, $X = V(p_1) \cup V(p_2)$.

2.4 Dimensione di una varietà algebrica

Definizione 2.36. Sia X uno spazio topologico. Definiamo la **dimensione (di Krull)** di X come

$$\sup \{n \in \mathbb{N} : \text{esiste una catena di chiusi irriducibili } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n\}.$$

Denotiamo questo numero $\dim X$.

Osservazione 2.37. Se X è una varietà affine, per quanto già visto si ha

$$\dim(X) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } P_0, \dots, P_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \dots \supsetneq P_n\}.$$

Teorema 2.38. Ogni varietà affine ha dimensione finita.

Poiché l'anello delle coordinate $\mathbb{K}[X]$ di una varietà affine irriducibile X è un dominio d'integrità, possiamo considerare il suo campo dei quozienti, che indichiamo con K_X .

Definizione 2.39 (Altezza). Se \mathfrak{p} è un ideale primo di $\mathbb{K}[X]$, la sua **altezza** è definita come

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) \doteq \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esistono primi } \mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n \text{ di } \mathbb{K}[X] : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

Teorema 2.40. Sia X una varietà affine irriducibile. Allora

1. $\dim(X) = \text{tr deg}_{\mathbb{K}}(K_X)$.
2. Se \mathfrak{p} è un ideale primo di $K[X]$ e $Y = V(\mathfrak{p})$, allora
$$\dim(X) = \dim(Y) + \text{ht}(\mathfrak{p}).$$
3. Se f è un elemento non nullo e non invertibile di $\mathbb{K}[X]$, allora $V(f)$ è un chiuso di X . Se la sua decomposizione in componenti irriducibili è data da $V(f) = Y_1 \cup \dots \cup Y_h$, allora

$$\dim(Y_i) = \dim(X) - 1.$$

2.5 Varietà lisce

Notazione. Sia X una varietà (affine) e sia x un punto di X . In questa sezione poniamo $A = \mathbb{K}[X]$ e $\mathfrak{m}_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$.

Definizione 2.41. Lo spazio cotangente di X nel punto x è il quoziente

$$T_x^*X := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Dato un elemento f in A , definiamo il **differenziale** di f come la classe

$$df := [f - f(x)] \in T_x^*X.$$

Lo spazio tangente di X nel punto x è il duale

$$T_xX = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$$

dello spazio cotangente di X in x .

Definizione 2.42. Una **derivazione** su A è una funzione $\partial: A \rightarrow \mathbb{K}$ che soddisfa la seguente proprietà

$$\partial(fg) = f(x)\partial g + g(x)\partial f.$$

Indichiamo con $\text{Der}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ l'insieme delle derivazioni su A .

Esercizio 2.43. La mappa $T_xX \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ definita da $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$, dove

$$\tilde{\varphi}(a + \mu) = \varphi(\mu)$$

definisce una bigezione (stiamo usando la decomposizione $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}_x$).

Esempio 2.44. Se $X = \mathbb{K}$ e p è un punto di \mathbb{K} , allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x - p)$ e $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{K}(x - p) = \mathbb{K}d_px$.

Esempio 2.45. Se $X = \mathbb{K}^n$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ e si ha

$$\text{Der}_p(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Esempio 2.46. Se $X = V(I)$ è contenuta in \mathbb{K}^n e p è un punto di X , allora $I \subseteq \mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$. Posto $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$, si ha

$$\frac{\bar{\mathfrak{m}}}{\bar{\mathfrak{m}}^2} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I}$$

e si ha un'immersione

$$\text{Der}_p(A/I, \mathbb{K}) = \{\partial \in \text{Der}_p(A, \mathbb{K}) : \partial(I) = 0\} \hookrightarrow \text{Der}_p(A, \mathbb{K})$$

data da $\partial \mapsto \partial \circ \pi$, dove $\pi: A \rightarrow A/I$ è la proiezione canonica.

Osservazione 2.47. Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà e p è un punto di X , posto $q = \varphi(p)$ si ha una mappa

$$d_p\varphi: T_pX \rightarrow T_pY$$

definita tramite

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_p(A, \mathbb{K}) & \rightarrow & \text{Der}_q(B, \mathbb{K}) \\ \partial & \mapsto & \partial \circ \varphi \end{array}$$

dove $B = \mathbb{K}[Y]$.

Esempio 2.48. Se $Y = \mathbb{K}$ e $\varphi(p) = q$, la mappa $d_p\varphi: T_pX \rightarrow T_q\mathbb{K} = \mathbb{K} \frac{\partial}{\partial x}|_q$ è definita da $\partial \mapsto \tilde{\partial}$, dove

$$\tilde{\partial}(f) = \partial(f \circ \varphi).$$

Se $\tilde{\partial}(x) = \lambda$, allora $\tilde{\partial} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}|_q$.

Osservazione 2.49. Se X è affine e φ è in A , allora φ definisce una mappa $\mathbb{K}[x] \rightarrow A$ data da $g \mapsto g \circ \varphi$. In particolare $x \mapsto \varphi$. Quindi

$$\tilde{\partial}(x) = \partial(x \circ \varphi) = \partial(\varphi).$$

Osservazione 2.50. Nel caso di $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): X \rightarrow \mathbb{K}^n$, si ha

$$d_p\varphi: \begin{array}{ccc} T_pX & \longrightarrow & T_q\mathbb{K}^n \\ \partial & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \partial(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_q \end{array}$$

Nel caso in cui X sia \mathbb{K}^m (con coordinata y), si ha

$$d_p\varphi: \begin{array}{ccc} T_p\mathbb{K}^m & \longrightarrow & T_q\mathbb{K}^n \\ \frac{\partial}{\partial y_j}|_p & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}|_p \frac{\partial}{\partial x_i}|_q \end{array}$$

cioè $d_p\varphi = \mathcal{D}_p\varphi$ a meno di rinominare i vettori base.

Teorema 2.51. Se X è una varietà irriducibile di dimensione n , allora

$$\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim T_pX \geq n.$$

Definizione 2.52. Sia X una varietà di dimensione n . Un punto p di X si dice **liscio** se $\dim \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = n$.

Osservazione 2.53. Se X è una varietà irriducibile di dimensione d contenuta in \mathbb{K}^n , consideriamo il punto $p = 0$ in X . Vogliamo capire se 0 è liscio. Scriviamo $X = V(I)$, con $I = (f_1, \dots, f_r)$. In questo caso $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 = (x_1, \dots, x_n)$. I generatori f_i di I si scrivono come $f_i = \ell_i + f_{1,i}$ con ℓ_i lineare omogeneo e $f_{1,i}$ di grado superiore a $\deg(\ell_i)$. Quindi $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + \mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$, da cui

$$\frac{\overline{\mathfrak{m}}}{\overline{\mathfrak{m}^2}} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + I} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2 + \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle} = \frac{\mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n}{\langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle}.$$

Dunque X è liscio in 0 se $\dim_{\mathbb{K}} \langle \ell_1, \dots, \ell_r \rangle = n - d$.

Esempio 2.54. Consideriamo X la curva affine definita dall'equazione $y^2 = x^3$ (notiamo che $\dim X = 1$). Posto $f = y^2 - x^3$, si ha²

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{0},$$

² $y^2 - x^3$ non ha parte lineare

che ha dimensione 2, quindi X non è liscia in $(0, 0)$. Se invece consideriamo X definita da $y^2 = x^3 + x$, allora

$$\frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{m}_0^2} = \frac{\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y}{x}$$

che ha dimensione 1, quindi X è liscia in 0.

Esempio 2.55. Se $X = V(I)$ in \mathbb{K}^n , con $I = (f_1, \dots, f_r)$, consideriamo la mappa

$$f = (f_1, \dots, f_r): \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r.$$

Allora

$$d_0 f: \begin{array}{ccc} T_0 \mathbb{K}_x^n & \longrightarrow & T_0 \mathbb{K}_y^r \\ \partial & \longmapsto & \sum_j \partial(f_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_0 \end{array}$$

e

$$T_0 X = \{\partial: \partial(I) = 0\} = \{\partial: \partial(f_j) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, r\} = \ker d_0 f.$$

Teorema 2.56. Se X è una varietà, allora esiste un aperto U in X costituito da punti lisci.

Teorema 2.57 (Zariski). Supponiamo $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$. Se X è irriducibile e Y è liscia, ogni morfismo $\varphi: X \rightarrow Y$ biiettivo è un isomorfismo.

In caratteristica p il teorema va enunciato in modo diverso: $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_p}$, $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ definito da $x \mapsto x^p$.

Definizione 2.58. Sia $\varphi: X \rightarrow Y$ un morfismo di varietà lisce. Diciamo che φ è **liscio** in un punto p di X se la mappa $d_p \varphi: T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$ è surgettiva.

Teorema 2.59. Assumiamo $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$. Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è un morfismo **dominante** di varietà lisce (cioè $\overline{\varphi(X)} = Y$), allora esiste un aperto non vuoto U di Y tale che la restrizione

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$$

è liscia.

Teorema 2.60. Ogni mappa $\varphi: X \rightarrow Y$ liscia è aperta. Inoltre, per ogni varietà Z (non necessariamente liscia), la mappa

$$(\varphi, id): X \times Z \rightarrow Y \times Z$$

è aperta.

Teorema 2.61. Siano X e Y varietà lisce e $\varphi : X \rightarrow Y$ una mappa liscia tale che $d\varphi_x$ è surgettivo per ogni $x \in X$, allora

1. $X_y = \varphi^{-1}(y)$ è una varietà liscia di dimensione $\dim X - \dim Y$
2. Se $x \in X_y$ allora

$$0 \rightarrow T_x X_y \rightarrow T_x X \xrightarrow{d\varphi_x} T_y Y \rightarrow 0$$

Parte II

Gruppi algebrici

Capitolo 3

Gruppi algebrici

3.1 Definizioni generali

Definizione 3.1 (Gruppo algebrico lineare). Un gruppo G è un **gruppo algebrico lineare** se è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n)$ per qualche n definito da equazioni polinomiali.

Definizione 3.2 (Gruppo algebrico affine). Un gruppo G è un **gruppo algebrico affine** se G è una varietà affine e le operazioni prodotto

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

e inverso

$$i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

sono morfismi di varietà.

Osservazione 3.3. Il prodotto $\mu : \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n) \rightarrow \mathrm{GL}(n)$ è un morfismo di varietà, infatti

$$(x_{ij})(y_{ij}) = \left(\sum_h x_{i,h} y_{h,j} \right)$$

è definito da equazioni polinomiali nelle entrate.

Similmente per l'operazione di inverso, infatti $(x_{ij})^{-1} = \mathrm{Adj}(x_{ij}) \cdot (\det(x_{ij}))^{-1}$. Le entrate della matrice aggiunta classica sono dei determinanti e quindi polinomiali, mentre l'inversa del determinante della matrice di partenza è una funzione regolare perché siamo su $\mathrm{GL}(n) = \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \setminus V(\det)$.

Esempio 3.4. I gruppi $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{GL}(1) = \mathbb{G}_m$ e $\mathrm{SL}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ sono evidentemente gruppi algebrici lineari.

Esempio 3.5. Il gruppo

$$\mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un gruppo algebrico lineare (definito da $x_{11} = x_{22} = 1$ e $x_{21} = 0$). Notiamo però che

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi questo gruppo lo si può interpretare come $(\mathbb{K}, +)$, dando una realizzazione di questo come gruppo algebrico lineare.

Definizione 3.6 (Azione regolare di gruppo algebrico). Sia G un gruppo algebrico affine e sia X una varietà affine qualsiasi. Se G agisce su X affermiamo che questa azione è **regolare** se $\sigma : G \times X \rightarrow X$ è un morfismo di varietà algebriche.

Definizione 3.7 (Rappresentazione regolare). Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} e l'azione di G è lineare diciamo che V è una **rappresentazione regolare finito dimensionale** di G .

Se V è una rappresentazione di G (di dimensione qualsiasi) diciamo che è **regolare** se

1. per ogni $v \in V$ si ha $\dim \langle gv \rangle_{g \in G} < \infty$
2. per ogni $W \subseteq V$ sottospazio di dimensione finita, W è una rappresentazione regolare finito dimensionale.

Osservazione 3.8. Se G è un gruppo algebrico affine, ai morfismi di moltiplicazione μ e inverso i corrispondono omomorfismi di \mathbb{K} -algebre

$$\mu^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & (x \otimes y) \mapsto f(xy) \end{array}, \quad i^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ f & \longmapsto & x \mapsto f(x^{-1}) \end{array}$$

Osservazione 3.9. Se σ è una azione $G \times X \rightarrow X$ allora

$$\sigma^* : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & (g, x) \mapsto f(gx) \end{array}$$

Osservazione 3.10. La proprietà associativa si può esprimere tramite il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{id_G \times \mu} & G \times G \\ \mu \times id_G \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Quindi abbiamo una proprietà analoga sulla comoltiplicazione μ^* considerando il diagramma indotto.

Osservazione 3.11. Se $X = V$ è una rappresentazione regolare fin.dim. e $\sigma : G \times V \rightarrow V$ abbiamo un omomorfismo di algebre

$$\sigma^* : \mathbb{K}[V] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[V]$$

Ricordiamo però che $\mathbb{K}[V] = SV^*$, quindi possiamo restringere σ^* a solo $V^* \subseteq SV^*$.

Lemma 3.12. $\sigma^*(V^*) \subseteq \mathbb{K}[G] \otimes V^*$.

Dimostrazione.

Sia e_1, \dots, e_n una base di V e $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base duale. Se g agisce come (g_{ij}) su V e $v = \sum v_i e_i$ allora

$$\begin{aligned} \sigma^* \varphi_k(g, v) &= \varphi_k(gv) = \varphi_k\left(\sum g_{ij} v_j e_i\right) = \\ &= \sum g_{ij} v_j \varphi_k(e_i) = \sum g_{kj} v_j = \\ &= \left(\sum x_{kj} \otimes \varphi_j\right)(g, v), \end{aligned}$$

dove $x_{kj} \in \mathbb{K}[G]$ è la funzione che per ogni g restituisce g_{kj} . □

Lemma 3.13. Sia G che agisce su X in modo regolare con entrambi affini. Allora

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione di G con azione data da

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

- $\mathbb{K}[X]$ è una rappresentazione regolare
- $\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di G .

Dimostrazione.

Se $f \in \mathbb{K}[X]$ allora $\dim \langle Gf \rangle < \infty$. Notiamo che $\sigma(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \beta_i$ con somma finita. Notiamo che, per definizione

$$f(gx) = \sum_i \alpha_i(g) \beta_i(x)$$

quindi

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) = \sum \alpha_i(g^{-1}) \beta_i(x) \iff gf = \sum_{i=1}^k \alpha_i(g^{-1}) \beta_i \in \langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$$

Questo mostra che $\dim \langle Gf \rangle$ è finita.

Vogliamo dimostrare che su $W \subseteq \mathbb{K}[X]$ di dimensione finita l'azione di G è regolare, cioè voglio mostrare che per ogni $\varphi \in W^*$ (generatori di $SW^* = \mathbb{K}[W]$) si ha $\varphi(gf)$ regolare.

Sia f_1, \dots, f_k una base di W . Poiché sono una base $\sigma^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes f_j$. Se $\varphi(f_i) = \lambda_i$ abbiamo che $\psi = \sigma^* \varphi$ è tale che

$$\psi(g, f_i) = \varphi(gf_i) = \varphi\left(\sum \alpha_{ij}(g^{-1}) f_j\right) = \sum \alpha_{ij}(g^{-1}) \lambda_j$$

□

3.1.1 Componente connessa dell'identità

Proposizione 3.14. Sia G un gruppo algebrico affine e sia G^0 la componente connessa di e_G . Allora G^0 è un sottogruppo normale chiuso.

Dimostrazione.

Sicuramente G^0 è chiuso in quanto componente connessa. L'insieme $G^0 \times G^0$ è connesso e la mappa

$$m^0 = m|_{G^0 \times G^0} : G^0 \times G^0 \longrightarrow G$$

ha immagine connessa in G . Poiché e_G è nell'immagine di m^0 , si ha $\text{Imm}(m^0) = G^0$. Dato g in G , si ha

$$gG^0g^{-1} \subset G^0,$$

infatti la mappa

$$AD_g : \begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

è continua e fissa e_G , quindi $\text{Imm}(AD_g) \subset G^0$. □

Osservazione 3.15. In gruppo algebrico affine le componenti connesse sono irriducibili.

Esercizio 3.16. Il sottogruppo G^0 è irriducibile.

Citiamo il seguente teorema:

Teorema 3.17 (Chevalley). Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è una mappa regolare tra due varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\varphi(X)$.

Osservazione 3.18. Se G è un gruppo algebrico, allora esistono g_1, \dots, g_k in G tali che

$$G = G^0 \cup G^0 g_1 \cup \dots \cup G^0 g_k.$$

La precedente è una decomposizione in componenti connesse e irriducibili.

Proposizione 3.19. Se $\varphi: G \rightarrow H$ è un morfismo di gruppi algebrici affini, allora $\varphi(G)$ è un chiuso di H .

Dimostrazione.

Sfruttando la decomposizione dell'Osservazione (3.18), abbiamo

$$\varphi(G) = \varphi(G^0) \cup \varphi(G^0 g_1) \cup \dots \cup \varphi(G^0 g_k),$$

quindi basta mostrare che $\varphi(G^0)$ è chiuso. In particolare, possiamo ricondurci al caso $G = G^0$.

Il sottogruppo $X = \overline{\varphi(G)}$ di H è irriducibile, e per il Teorema di Chevalley (3.17)

esiste un aperto U di X contenuto in $\varphi(G)$. Mostriamo che $X = \varphi(G)$. Poiché X e $\varphi(G)$ sono sottogruppi di H , si ha

$$U \cdot U \subseteq \varphi(G) \subseteq X$$

Se x è un elemento di X , poiché $i(U) = U^{-1}$ è un aperto di X , anche xU^{-1} è un aperto di X . Per irriducibilità di X , si ha $U \cap xU^{-1} \neq \emptyset$, quindi esistono u, v in U tali che $x = uv$, da cui $X = U \cdot U = \varphi(G)$. \square

3.2 Gruppi algebrici affini sono lineari

Osservazione 3.20 (Punti e ideali massimali sono la stessa cosa). Nella situazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

abbiamo una corrispondente mappa di algebre

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Notiamo che

$$\varphi(\alpha) = \beta \iff \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta$$

dove \mathfrak{m}_α e \mathfrak{m}_β sono i massimali che corrispondono ai rispettivi punti.

Dimostrazione.

Basta notare che le seguenti sono equivalenze

$$\begin{aligned} f &\in \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) \\ f \circ \varphi &\in \mathfrak{m}_\alpha \\ (f \circ \varphi)(\alpha) &= 0 \\ f(\varphi(\alpha)) &= 0 \\ f &\in \mathfrak{m}_{\varphi(\alpha)} = \mathfrak{m}_\beta \end{aligned}$$

\square

Proposizione 3.21. Siano X e Y affini e sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo. Se $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ è surgettiva allora $\varphi(X)$ è chiuso.

Dimostrazione.

Sia $I = \ker \psi$ e mostriamo che $\varphi(X) = V(I)$:

\subseteq Se $x \in X$ e $f \in I$ allora $f(\varphi(x)) = \psi(f)(x) = 0$, quindi $\varphi(x) \in V(I)$.

\supseteq Sia $\beta \in V(I)$, allora $I \subseteq \mathfrak{m}_\beta$. Notiamo che $\psi : \mathbb{K}[Y]/I \rightarrow \mathbb{K}[X]$ è un isomorfismo e sotto questo isomorfismo

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\beta/I,$$

dunque

$$\mathbb{K} \cong \frac{\mathbb{K}[Y]}{\mathfrak{m}_\beta} \xrightarrow{\psi} \frac{\mathbb{K}[X]}{\psi(\mathfrak{m}_\beta)}.$$

Abbiamo quindi mostrato che $\psi(\mathfrak{m}_\beta)$ è un massimale, dunque per il Nullstellensatz esiste $\alpha \in X$ tale che $\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha$. Concludiamo notando che

$$\psi(\mathfrak{m}_\beta) = \mathfrak{m}_\alpha \implies \psi^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha) = \mathfrak{m}_\beta \iff \varphi(\alpha) = \beta.$$

□

Proposizione 3.22. Se X, Y affini, $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ mappe corrispondenti, se G agisce su X e Y allora si ha che φ è G -equivariante se e solo se ψ è G -equivariante.

Dimostrazione.

Diamo le due implicazioni:

⇒ Segue calcolando

$$\begin{aligned} \psi(g \cdot f)(x) &= (g \cdot f)(\varphi(x)) = f(g^{-1} \cdot \varphi(x)) = \\ &= f(\varphi(g^{-1}x)) = \psi(f)(g^{-1}x) = \\ &= (g \cdot \psi(f))(x). \end{aligned}$$

⇐ Vogliamo mostrare che $\varphi(gx) = g\varphi(x)$. Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni $f \in \mathbb{K}[Y]$ si ha $f(g\varphi(x)) = f(\varphi(gx))$.

$$f(g\varphi(x)) = (g^{-1}f)(\varphi(x)) = \psi(g^{-1}f)(x) = (g^{-1}\psi(f))(x) = \psi(f)(gx) = f(\varphi(gx)).$$

□

Teorema 3.23. Se X è affine e G agisce su X allora esiste una rappresentazione di dimensione finita V di G e $i : X \rightarrow V$ iniettiva che è G -equivariante

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

Teorema 3.24. Ogni gruppo affine è lineare.

Dimostrazione.

Consideriamo l'azione di G su se stesso per moltiplicazione a sinistra. Questa rende $\mathbb{K}[G]$ una rappresentazione di G . Notiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata, con generatori f_1, \dots, f_n . Notiamo che esiste V uno spazio vettoriale di dimensione finita che contiene f_1, \dots, f_n che è stabile per l'azione di G e una rappresentazione regolare di G .

Supponiamo f_1, \dots, f_N base di V . Sia

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G \times G] \\ f & \longmapsto & (g, h) \mapsto f(gh) \end{array}$$

e scriviamo $\mu(f_j) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j} \otimes f_i$.

$$(gf_j)(h) = f_j(g^{-1}h) = \mu(f)(g^{-1}, h) = \sum \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})f_i(h).$$

Poniamo $\alpha_{i,j}(g) = \tilde{\alpha}_{i,j}(g^{-1})$. Consideriamo ora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{GL}(V) \\ g & \longmapsto & [g]_{\{f_j\}}^{\{f_j\}} = (\alpha_{i,j}(g)) \end{array}$$

che a livello di algebre diventa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\text{GL}(V)] = \mathbb{K}[x_{i,j}, \det^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ x_{i,j} & \longmapsto & \alpha_{i,j} \end{array}.$$

Dalla definizione è evidente che φ è una mappa regolare. Se mostriamo che φ è iniettiva e che ψ è surgettiva allora per (3.21) avremo che $\varphi(G)$ è un chiuso, quindi φ identifica G con un chiuso di $\text{GL}(V)$, rendendo G un gruppo algebrico lineare.

Siano $g, h \in G$ tali che $\alpha_{i,j}(g) = \alpha_{i,j}(h)$ per ogni i, j , allora $gf_j = hf_j$ per ogni j , quindi g e h hanno lo stesso effetto su $\mathbb{K}[G]$, in particolare¹

$$f(g^{-1}) = (gf)(e) = (hf)(e) = g(h^{-1})$$

per ogni $f \in \mathbb{K}[G]$, e questo significa che $g^{-1} = h^{-1}$, cioè $g = h$, mostrando l'iniettività.

Notiamo che per ogni $g \in G$

$$f_j(g^{-1}) = (gf_j)(e) = \sum \alpha_{i,j}(g) \underbrace{f_j(e)}_{\in \mathbb{K}}.$$

Questo mostra che i generatori f_j di $\mathbb{K}[G]$ appartengono all'immagine di ψ (perché combinazioni lineari delle $\alpha_{i,j}$), quindi ψ è surgettiva. \square

Ricordiamo il

Teorema 3.25 (di Chevalley). Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ morfismo di varietà, allora $\varphi(X)$ contiene un aperto di $\varphi(X)$.

Corollario 3.26. Se G e H gruppi algebrici affini con $\varphi : G \rightarrow H$ morfismo di gruppi algebrici allora $\varphi(G)$ è un chiuso di H .

Dimostrazione.

Sia $T = \varphi(G) \subseteq H$. Vogliamo mostrare che $T = \overline{T} \subseteq H$. Per Chevalley (3.17), $T \supseteq U$ per U aperto di \overline{T} . Notiamo che \overline{T} è un sottogruppo di H . Dunque per ogni $t \in \overline{T}$, $tU \subseteq \overline{T}$.

Poiché la moltiplicazione per t è un omeomorfismo, U e tU sono aperti di \overline{T} , quindi per irriducibilità $U \cap tU \neq \emptyset$, dunque esiste $g, h \in U$ tali che $g = th$, cioè $t = gh^{-1} \in T$ e dato che t era un generico elemento di T abbiamo finito. \square

¹ e è l'identità di G

Capitolo 4

Semisemplice, Unipotente, Nilpotente, Completamente riducibile

Proposizione 4.1 (Semisemplice uguale completamente riducibile). Per le rappresentazioni regolari di G abbiamo che se essa è completamente riducibile allora è semisemplice, cioè le due condizioni sono equivalenti in questo caso.

Dimostrazione.

Se V è una rappresentazione regolare non nulla allora V contiene una sottorappresentazione semplice, infatti basta prendere $W \subseteq V$ di dimensione finita e poi la sottorappresentazione di W di dimensione minima.

Se $W \subseteq V$ allora W e V/W sono completamente riducibili, infatti per completa riducibilità $V = W \oplus U$ per $U \cong V/W$, quindi basta mostrarlo per W . Sia $X \subseteq W$ sottorappresentazione. Poiché $V = X \oplus Y$ (di nuovo applico l'ipotesi su V) allora $W = X \oplus Y \cap W$.

Mostriamo ora che V è semisemplice. Sia

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigoplus_{i \in I} S_i \subseteq V \right\}$$

con S_i tutti semplici e ordine su \mathcal{F} dato da

$$\bigoplus_{i \in I} S_i \preceq \bigoplus_{j \in J} T_j \iff I \subseteq J \text{ e } S_i = T_i \text{ per } i \in I.$$

Ogni catena ammette maggiorante dato sommando sull'unione degli indici. Sia allora $W = \bigoplus S_i \subseteq V$ massimale e scriviamo $V = W \oplus U$. Se $W \neq (0)$ allora esiste una sottorappresentazione semplice $S \subseteq U$ e quindi $W' = W \oplus S$ sarebbe maggiore di W , assurdo. \square

Vorremmo capire per quali gruppi G le rappresentazioni regolari sono semisemplici.

4.1 Elementi semisemplici, unipotenti e nilpotenti

Definizione 4.2 (Elementi unipotenti, nilpotenti e semisemplici). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $g \in \text{End}(V)$. Affermiamo che g è

- **semisemplice** se è diagonalizzabile
- **nilpotente** se $g^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$
- **unipotente** se $(g - id_V)^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$

Osservazione 4.3. Se g è invertibile allora \mathbb{Z} agisce su V come

$$n \cdot v = g^n v,$$

quindi la definizione di semisemplice si sposa bene con quella già data in quanto g induce una decomposizione in autospazi g -invarianti.

Definizione 4.4 (Endomorfismo localmente finito). Siano V uno spazio vettoriale e $g \in \text{End}(V)$. g è **localmente finito** se per ogni $v \in V$ esiste W di dimensione finita g -stabile con $v \in W$. In tal caso diciamo che

- g è **semisemplice** se $g|_W$ è semisemplice per ogni $W \subseteq V$ g -stabile di dimensione finita.
- g è **nilpotente** se $g|_W$ è nilpotente per ogni $W \subseteq V$ g -stabile di dimensione finita.
- g è **unipotente** se $g|_W$ è unipotente per ogni $W \subseteq V$ g -stabile di dimensione finita.

Definizione 4.5 (Semisemplice, unipotente e nilpotente per gruppi algebrici). Se G è un gruppo algebrico e $g \in G$ allora g è

- **semisemplice** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è semisemplice, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è semisemplice
- **unipotente** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è unipotente, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è unipotente
- **nilpotente** se l'azione di g su ogni rappresentazione regolare è nilpotente, cioè l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita è nilpotente.

Lemma 4.6 (Semisemplice/unipotente/nilpotente passano alle costruzioni lineari). Siano $g \in \text{End}(V)$ e $h \in \text{End}(W)$ con V e W localmente finite. Allora

- Se g e h semisemplici allora

$g \oplus h : V \oplus W \rightarrow V \oplus W$ è semisemplice

$g \otimes h : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ è semisemplice

- Se $U \subseteq V$ è stabile per g e g semisemplice allora $g|_U$ e $\bar{g} : V/U \rightarrow V/U$ sono semisemplici.
- Se g è semisemplice allora l'azione di g su SV è semisemplice
- Se $\dim V$ è finita e g è semisemplice allora V^* è semisemplice.

Valgono anche gli analoghi per unipotente e nilpotente.

Dimostrazione.

Tante verifiche noiose, riportiamo giusto quelle per $g \otimes h$:

Se V e W hanno dimensione finita allora esistono basi di autovettori per g e h

$$gv_i = \lambda_i v_i, \quad hw_i = \mu_i v_i$$

Allora

$$(g \otimes h)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$

quindi $v_i \otimes w_j$ è ancora base di autovettori. Se invece V e W hanno dimensione infinita e $U \subseteq V \otimes W$ di dimensione finita allora gli elementi di base di U appartengono a prodotti tensore di sottospazi di dimensione finita di V e W , quindi ingrandendo in modo tale da tener conto di tutta la base ricaviamo $U \subseteq \widetilde{V} \otimes \widetilde{W}$ con \widetilde{V} e \widetilde{W} di dimensione finita, ora ci restringiamo sottospazi stabili di \widetilde{V} e \widetilde{W} e con calma ci rimettiamo nelle ipotesi finite. \square

Lemma 4.7 (Rappresentazioni finite si immergono in $\mathbb{K}[G]^n$). Sia V una rappresentazione di dimensione finita di G , allora abbiamo una iniezione

$$f : V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^n$$

G -equivariante

Dimostrazione.

Sia v_1, \dots, v_n una base di V e sia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base duale. Definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}[G]^n \\ v & \longmapsto & (\varphi_1 \otimes v, \dots, \varphi_n \otimes v) \end{array}$$

dove se $\varphi \in V^*$ e $v \in V$ poniamo

$$(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g^{-1}v).$$

G-equivariante Vogliamo $\psi(gv) = g\psi(v)$, cioè $g(\varphi \otimes v) = \varphi \otimes gv$. Allora calcoliamo

$$(g(\varphi \otimes v))(h) = (\varphi \otimes v)(g^{-1}h) = \varphi(h^{-1}gv) = (\varphi \otimes gv)(h)$$

iniettiva Supponiamo $\psi(v) = 0$, allora per ogni i

$$0 = (\varphi_i \otimes v)(e) = \varphi_i(v)$$

ma φ_i era una base del duale, quindi $v = 0$.

□

Osservazione 4.8. Se $gv = (\alpha_{i,j}(g))_{1 \leq i,j \leq n} v$ allora $\varphi_i \otimes v_j = \alpha_{i,j}$.

Corollario 4.9. Se $g \in G$ allora

- g è semisemplice se e solo se l'azione di g su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice
- g è unipotente se e solo se l'azione di g su $\mathbb{K}[G]$ è unipotente

Dimostrazione.

Facciamo il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Dobbiamo verificare che l'azione di g su ogni rappresentazione di dimensione finita V è semisemplice. Per il lemma (4.7) abbiamo che $V \subseteq \mathbb{K}[G]^n$ e questo è semisemplice quindi anche g lo è per il secondo punto del lemma (4.6)

□

Lemma 4.10 (Criterio per semisemplice/unipotente in gruppi lineari). Se $G \subseteq GL(V)$ è un sottogruppo chiuso per V di dimensione finita allora

- $g \in G$ è semisemplice se e solo se l'azione di g su V è semisemplice.
- $g \in G$ è unipotente se e solo se l'azione di g su V è unipotente.

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni per il caso semisemplice

⇒ Ovvio

⇐ Verifichiamo che l'azione su $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Osserviamo che

$$\mathbb{K}[GL(V)] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[G]$$

è surgettivo e G -equivariante quindi basta far vedere che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[GL(V)]$.

$$\mathbb{K}[GL(V)] = \mathbb{K}[End(V)] [\det^{-1}]$$

Verifichiamo che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\text{End}(V)] = S(\text{End}(V)^*)$. Per il lemma (4.6) basta verificare che g agisce in modo semisemplice su $\text{End}(V)^*$ o equivalentemente su $\text{End}(V)$ per lo stesso lemma. Ricordiamo che g agisce tramite la moltiplicazione a sinistra.

Se $\dim V = n$ allora $\text{End}(V)$ con l'azione di moltiplicazione a sinistra di g è uguale a considerare l'azione di g su $V^{\oplus n}$ dove la corrispondenza è data dal fatto che l'azione per moltiplicazione a sinistra agisce sulle colonne della matrice a destra per restituire le colonne della matrice risultato.

Poiché g agiva in modo semisemplice su V , agisce in modo semisemplice anche sulla somma che abbiamo considerato, quindi mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$.

Sia ora $W \subseteq \mathbb{K}[\text{End}(V)][\det^{-1}]$ un sottospazio di dimensione finita, in particolare

$$W \subseteq \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \quad \text{per qualche } N$$

Consideriamo allora l'azione di g su $\mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K}$ dove sulla copia di \mathbb{K} abbiamo $g\lambda = (\det g)^{-N} \lambda$. Abbiamo una mappa G -equivariante surgettiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)] \\ f \otimes \lambda & \longmapsto & \frac{\lambda}{(\det)^N} f \end{array}$$

quindi, poiché g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\text{End}(V)]$ e su \mathbb{K} , si ha che agisce in modo semisemplice su $\frac{1}{\det^N} \mathbb{K}[\text{End}(V)]$ e quindi su W .

Mettendo tutto insieme, abbiamo mostrato che g agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[G]$ e questo conclude per il corollario (4.9). □

4.2 Decomposizione di Jordan

Proposizione 4.11. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita e sia T un endomorfismo di V . Allora

1. Esistono e sono unici S semisemplice e N nilpotente in $\text{End}(V)$ tali che $T = S + N$ e $SN = NS$.

Gli endomorfismi S e N si dicono **parte semisemplice** e **parte nilpotente** di T e li denoteremo T_s e T_n rispettivamente.

2. Esistono f, g in $\mathbb{K}[x]$, con $f(0) = g(0) = 0$, tali che $S = f(T)$ e $N = g(T)$.
3. Se W è un sottospazio T -stabile di V , allora W è S -stabile e N -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_n = N|_W.$$

4. Se V' è un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita, T' è un endomorfismo di V' e $L: V \rightarrow V'$ è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_n = T'_n \circ L.$$

Dimostrazione.

Dimostriamo i vari punti.

1. Scriviamo T in forma di Jordan e poniamo S la parte diagonale di T (che è quindi semisemplice). Posto $N = T - S$, si ha che N è nilpotente e $SN = NS$.

Mostriamo ora l'unicità: se S' e N' sono tali che $T = S' + N' = S + N$ e $S'N' = N'S'$, allora S, S', N, N' commutano con T , quindi S', N' commutano con S, N . Osservando che $S - S' = N' - N$, dove il primo membro è diagonale e il secondo è nilpotente, troviamo $S = S'$ e $N = N'$.

2. Consideriamo il polinomio caratteristico p_T di T e scriviamolo nella forma

$$p_T(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{n_i},$$

dove i λ_i sono distinti. Cerchiamo un polinomio $f(t)$ in $\mathbb{K}[t]$ tale che

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0 & (\text{mod } (t)) \\ f(t) \equiv \lambda_i & (\text{mod } (t - \lambda_i)^{n_i}) \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Tale polinomio esiste per il teorema cinese del resto. Inoltre soddisfa $f(T) = S$. Infatti, sul singolo blocco di Jordan J_i relativo all'autovalore λ_i (di taglia $m_i \leq n_i$), si ha che $f(T) = \lambda_i I$. Poiché $N = T - S$, posto $g(t) = t - f(t)$, si ha $N = g(T)$.

3. Poiché $S = f(T)$ e $N = g(T)$, se W è T -stabile, lo sono chiaramente anche S e N . Siano ora $t = T|_W$, $s = S|_W$ e $n = N|_W$. Allora $t = s + n$, $sn = ns$ e, per il lemma (4.6), s è semisemplice e n è nilpotente. Quindi la tesi discende dall'unicità della decomposizione.
4. Se L è iniettiva (o suriettiva), allora V è un sottospazio (o un quoziente) di V' , e la tesi discende dal punto precedente (nel caso del quoziente è analogo considerando la stabilità degli elementi semisemplici e nilpotenti). Nel caso generale, consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{L_1} & V \oplus V' & \xrightarrow{L_2} & V' \\ \downarrow T & & \downarrow T'' = T \oplus T' & & \downarrow T' \\ V & \longrightarrow & V \oplus V' & \longrightarrow & V' \end{array}$$

dove $L_1: v \mapsto (v, L(v))$ e $L_2: (v, w) \mapsto w$. Per commutatività, si ha $L_1 \circ T_s = T_s'' \circ L_1$ e $L_2 \circ T_s'' = T_s' \circ L_2$. Deduciamo quindi che

$$L \circ T_s = L_2 \circ L_1 \circ T_s = L_2 \circ T_s'' \circ L_1 = T_s' \circ L_2 \circ L_1 = T_s' \circ L.$$

Per il caso nilpotente la dimostrazione è analoga. \square

Vale una decomposizione analoga nel caso moltiplicativo, sostituendo elementi nilpotenti con elementi unipotenti.

Proposizione 4.12. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita e sia T in $\text{GL}(V)$. Allora

1. Esistono e sono uniche S semisemplice e U unipotente tali che $T = SU = US$, date da $S = T_S$ e $U = T_U$
2. Esistono f, g in $\mathbb{K}[x]$ tali che $S = f(T)$ e $U = g(T)$.
3. Se W è un sottospazio T -stabile di V , allora W è S -stabile e U -stabile. Inoltre

$$(T|_W)_s = S|_W \quad \text{e} \quad (T|_W)_u = U|_W.$$

4. Se V' è un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita, T' è un endomorfismo di V' e $L: V \rightarrow V'$ è un'applicazione lineare, allora

$$L \circ T_s = T'_s \circ L \quad \text{e} \quad L \circ T_u = T'_u \circ L.$$

Dimostrazione.

Per analogia con la proposizione precedente, ci limitiamo a dimostrare il primo punto. Partendo dalla decomposizione additiva, si ha

$$T = S + N = S(I + S^{-1}N).$$

Poiché $S^{-1}N$ è nilpotente, l'elemento $U = I + S^{-1}N$ è unipotente. Mostriamo l'unicità: se S' e U' sono tali che $T = S'U'$, posto $U' = I + M$ con M nilpotente, si ha $T = S' + S'M$. Quindi l'unicità discende da quella del caso additivo. \square

Vogliamo ora estendere quanto fatto al caso localmente finito. Ricordiamo che un'applicazione lineare $T: V \rightarrow V$ è *localmente finita* se per ogni v in V esiste un sottospazio W di V di dimensione finita contenente v e T -stabile.

Teorema 4.13. Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale e sia $T: V \rightarrow V$ lineare, invertibile e localmente finita. Allora esistono e sono unici S semisemplice e U unipotente tali che $T = SU = US$.

Dimostrazione.

Mostriamo dapprima l'esistenza. Per ogni v in V , sia W un sottospazio di V di dimensione finita contenente v e T -stabile. Consideriamo la restrizione $T|_W$ in $\text{GL}(W)$. Consideriamo allora gli elementi $S_W = (T|_W)_s$ e $U_W = (T|_W)_u$ dati dalla Proposizione (4.12) e definiamo $S(v) = S_W(v)$. Osserviamo che $S(v)$ non dipende dalla scelta di W . Infatti, se W è contenuto in un W' , allora $S_{W'}|_W = S_W$. Procedendo in modo analogo per U , otteniamo l'esistenza.

Osserviamo che S e U costruite soddisfano le proprietà 3 e 4 dell'enunciato precedente.

Verifichiamo ad esempio la 4. Mostriamo che, con la notazione della Proposizione (4.12), si ha $LS = S'L$. Per ogni v in V , consideriamo un sottospazio W di dimensione finita, contenente v e T -stabile. Sia $W' = L(W)$. Allora

$$S'(W') = S'L(W) = LS(W) \subseteq L(W) = W'.$$

È quindi sufficiente mostrare che

$$L|_W \circ S|_W(v) = S'|_{W'} \circ L|_W(v),$$

ma ciò segue dal caso di dimensione finita.

Mostriamo ora l'unicità. Assumiamo $T = su = us$ e mostriamo che $S = s$ e $U = u$. Osserviamo che S, U commutano con s, u . Infatti, per il punto 4, sappiamo che $LS = SL$ e $LU = UL$. Allora dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L=s} & V \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ V & \xrightarrow{L=s} & V \end{array}$$

ricaviamo $Ss = sS$ e $Us = sU$. Analogamente troviamo $Uu = uU$ e $Su = uS$. Scriviamo ora $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}(S)$. Poiché $V_{\lambda}(S)$ è stabile per U, s, u , lo spazio

$$V_{\lambda, \mu}(S, s) = \{v \in V : Sv = \lambda v, sv = \mu v\}$$

è stabile per U e u . Supponiamo per assurdo che esistano λ, μ distinti tali che $V_{\lambda, \mu} \neq 0$. Allora, poiché U e u sono unipotenti, si ha $(V_{\lambda, \mu}(S, s))^U \neq 0$ e, poiché U e u commutano, si ha anche $((V_{\lambda, \mu}(S, s))^U)^u \neq 0$. Scegliendo v non nullo in $((V_{\lambda, \mu}(S, s))^U)^u$, si ottiene $T(v) = SU(v) = S(v) = \lambda v$, ma anche $T(v) = su(v) = s(v) = \mu v$, contro l'ipotesi che λ e μ sono distinti. \square

Teorema 4.14 (Decomposizione di Jordan). Sia G un gruppo algebrico e sia g un elemento di G . Allora esistono e sono unici s, u in G tali che s è semisemplice, u è unipotente e $g = su = us$.

Dimostrazione.

Assumiamo che G sia un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(W)$. $G = V(I)$ con $I \subseteq \mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo l'esistenza di s e u . Poiché g è in $\mathrm{GL}(W)$, possiamo scrivere (4.12) $g = su = us$ con u unipotente e s semisemplice in $\mathrm{GL}(W)$ (cioè s agisce in modo semisemplice su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$ e u agisce in modo unipotente su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$). In particolare $g = su$ è la decomposizione di Jordan per l'azione di g su $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(W)]$. Mostriamo che effettivamente u e s sono in G verificando che annullano ogni elemento f di I . Osserviamo che I è stabile per l'azione di g (e in generale per l'azione di G), infatti, per ogni h in G si ha $(gf)(h) = f(g^{-1}h) = 0$. Poiché s è la parte semisemplice di g , $s(I)$ è contenuto in I e se f è un elemento di I , si ha sf è 0 su G . D'altro canto, valutando sull'elemento neutro e di G , troviamo

$$0 = (sf)(e) = f(s^{-1}),$$

dunque s^{-1} (e quindi s) è in G . L'unicità segue direttamente dal fatto che la decomposizione è unica in $\mathrm{GL}(W)$. \square

Notazione. Denotiamo $g_s = s$ e $g_u = u$.

Esercizio 4.15. Se $\varphi: G \rightarrow G'$ è un morfismo di gruppi algebrici, allora $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ e $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$.

Esercizio 4.16. Sia \mathbb{K} un campo perfetto (assumiamo per l'esercizio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Consideriamo l'inclusione

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Sia G un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definito da un'equazione a coefficienti in \mathbb{R} . Sia $G_{\mathbb{R}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Consideriamo un elemento g in $G_{\mathbb{R}}$. Mostrare che g_s e g_u sono in $G_{\mathbb{R}}$.

4.3 Gruppi unipotenti

Definizione 4.17. Un gruppo G si dice **unipotente** se ogni suo elemento è unipotente.

Lemma 4.18. Se G è tale che l'unica rappresentazione irriducibile di G è banale allora G si immerge nel gruppo delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale, cioè

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimostrazione.

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita per cui G è un sottogruppo di $\text{GL}(V)$. Sia W una sottorappresentazione di V non banale. Allora $W = \mathbb{K}v_1$ e $gv_1 = v_1$ per ogni g in G . Consideriamo il quoziente $V_1 = V/\langle v_1 \rangle$. Allora esiste v_2 in V tale che per ogni g in G si ha $gv_2 \equiv v_2 \pmod{V_1}$. Procedendo in questo modo, possiamo scegliere una base v_1, \dots, v_n di V , rispetto alla quale risulta chiaramente $G \subseteq U_n$. \square

Teorema 4.19. Sia \mathbb{K} algebricamente chiuso, V spazio vettoriale di dimensione finita, $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ che sia una \mathbb{K} -algebra associativa. Se V è un A -modulo semplice allora $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Dimostrazione.

Sia v_1, \dots, v_n una base di V . Se $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ allora vogliamo mostrare che $Av = V^n$.

Poiché V è semplice, V^n è somma di rappresentazioni semplici, quindi per la proposizione (1.32) si ha che V^n è semisemplice e quindi completamente riducibile. Possiamo allora scrivere $V^n = Av \oplus P$ per P un A -sottomodulo. Sia $\pi_P : V^n \rightarrow V^n$ la proiezione su P e notiamo che essa ammette una decomposizione a blocchi

$$\pi_P = (\alpha_{ij})_{i,j} \quad \text{per degli endomorfismi } \alpha_{ij} : V \rightarrow V$$

dove il dominio di α_{ij} è la j -esima copia di V in V^n e il codominio è l' i -esima copia.

Quindi $\alpha_{ij} \in \text{End}_A(V)$ con V spazio vettoriale su \mathbb{K} algebricamente chiuso. Per il lemma di Schur (1.26) questi endomorfismi sono le costanti.

Ricordando che $V^n = Av \oplus P$, si ha necessariamente $\pi_P(v) = 0$ per definizione di π_P , quindi per ogni i abbiamo $\sum \alpha_{ij}v_j = 0$. Poiché gli v_j sono una base e gli endomorfismi α_{ij} sono costanti, per indipendenza lineare questo significa che per ogni i e ogni j si ha $\alpha_{ij} = 0$. Segue dunque che $\pi_P = 0$ e quindi $P = \text{Imm } \pi_P = \{0\}$, cioè $V^n = Av$. \square

Esercizio 4.20. Trova un controesempio per \mathbb{K} non algebricamente chiuso.

Teorema 4.21. Un gruppo G è unipotente se e solo se l'unica rappresentazione irriducibile di G è quella banale.

Dimostrazione.

Diamo le due implicazioni

\Leftarrow Se G ha questa proprietà allora per il lemma (4.18) abbiamo

$$G \subseteq U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e chiaramente un gruppo di questa forma è unipotente.

\Rightarrow Sia V una rappresentazione semplice di G di dimensione n . Allora $\text{tr}(g_V) = n$ per ogni $g \in G$ (perché si immerge nelle triangolari superiori), quindi

$$\forall g_V, h_V \in G, \quad \text{tr}((g_V - 1)h_V) = \text{tr}(g_V h_V - h_V) = 0.$$

Se A è il \mathbb{K} -spazio vettoriale generato da G , $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ed è un'algebra associativa. Poiché V è semplice per A (in quanto semplice per G e $A = \text{Span}_{\mathbb{K}}(G)$), si ha per il teorema (4.19) si ha $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Segue per linearità della traccia che $\text{tr}((g_V - 1)a) = 0$ per ogni $a \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$, da cui $(g_V - 1) = 0$, cioè G agisce banalmente.

□

Corollario 4.22. Se G è unipotente, allora è contenuto nel gruppo U_n delle matrici triangolari superiori aventi 1 sulla diagonale principale.

Osservazione 4.23. Consideriamo il gruppo $(\mathbb{C}, +)$. Questo è un gruppo unipotente perché possiamo vederlo in $\text{GL}(2)$ tramite la rappresentazione

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche una rappresentazione data da

$$\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}(1), \quad x \mapsto e^{\alpha x}.$$

La differenza tra i due casi è che da una rappresentazione V non possiamo costruire tutte le funzioni di $C^\infty(\mathbb{C})$, ma solo quelle di $\mathbb{C}[G]$ (con $G = \mathbb{C}$).

Corollario 4.24. Se V è una rappresentazione di G non nulla allora $V^G \neq 0$.

Corollario 4.25. Se G è unipotente allora G è nilpotente come gruppo, cioè definiamo iterativamente $G^{(0)} = G$ e $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G]$ allora esiste n tale che $G^{(n)} = \{id_G\}$.

Dimostrazione.

Basta immergere G in $U(n)$ e notare che sottogruppi di triangolari superiori con 1 sulla diagonale hanno questa proprietà. \square

Esempio 4.26. Il gruppo $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = C_p$ con $\text{char } \mathbb{K} = p$ è un gruppo unipotente, perché si può scrivere come

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

Osservazione 4.27. Se $G = U(n)$ con $\text{char } \mathbb{K} = p$ allora $g^{p^n} = id_G$.

4.3.1 Esponenziale e logaritmo

Notazione. Definiamo lo spazio vettoriale

$$N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definizione 4.28 (Esponenziale). Definiamo la mappa **esponenziale**

$$\exp : \begin{array}{ccc} N(n) & \longrightarrow & U(n) \\ M & \longmapsto & \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} M^i \end{array}.$$

Osservazione 4.29. La mappa esponenziale appena definita è algebrica. Inoltre rispetta le usuali proprietà:

- $\exp((\lambda + \mu)M) = \exp(\lambda M) \exp(\mu M)$
- Se $M_1 M_2 = M_2 M_1$ allora $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1) \exp(M_2)$.

Definizione 4.30 (Logaritmo). Definiamo la mappa **logaritmo**

$$\log : \begin{array}{ccc} U(n) & \longrightarrow & N(n) \\ B & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} (M - I_n)^i \end{array}.$$

Osservazione 4.31. \log e \exp sono mappe algebriche e inverse. Sono anche in realtà la definizione usuale, solo che per matrici in $N(n)$ e $U(n)$ queste somme finite coincidono con la definizione in serie.

Notazione. Se $G \subseteq U(n)$ definiamo $X = \log(G)$ e notiamo che X è isomorfo a G come varietà.

Proposizione 4.32. Se $g \in G \setminus \{id_G\}$ allora, ponendo

$$\overline{\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = H \subseteq G,$$

si ha $H \cong \mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$.

Dimostrazione.

Poiché $g \neq id_G$, $\log g = x \neq 0$, inoltre $\log(g^n) = nx$. Notiamo dunque che da $nx \neq 0$ per ogni n ricaviamo $g^n \neq 1_G$ per ogni n . Se $Y = \mathbb{K}x$ allora

$$\log(H) = \log(\overline{\{g^n\}}) = \overline{\{nx\}} \subseteq Y$$

Poiché Y è una retta e $\{nx\}$ sono infiniti, $\overline{nx} = Y$ per come sono fatti i chiusi di Zariski di \mathbb{A}^1 , quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\longrightarrow H = \exp(Y) \\ \lambda &\longmapsto \exp(\lambda x) \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi tra \mathbb{K} e H . □

Esercizio 4.33. Se $\text{char } \mathbb{K} = 0$ e G unipotente abeliano allora $G \cong \mathbb{K}^n$.

Fatto 4.34. Se $\text{char } \mathbb{K} = p$ e $g^p = id$ per ogni $g \in G$ abeliano connesso allora G è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^n$.

Esempio 4.35. Se $\text{char } \mathbb{K} = p$ poniamo $\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{p} \binom{p}{i}$ per $i \in \{0, \dots, p-1\}$ e definiamo α_i come l'immagine di $\tilde{\alpha}_i$ in \mathbb{K} .

Definiamo¹

$$c: \begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i a^i b^{p-1-i} \end{aligned}$$

e notiamo che

$$c(a, b)c(a+b, c) = c(b, c)c(a, b+c) \implies c(a, 0) = c(a, b) = 0,$$

quindi se $G = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ con prodotto

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + c(a, a'))$$

allora G è unipotente e $G \cong \mathbb{K}^2$ come gruppo.

(QUESTO DOVREBBE ESSERE UN CONTROESEMPIO DI QUALCOSA???)

4.4 Gruppi completamente riducibili

Definizione 4.36. Un gruppo è **completamente riducibile** se ogni sua rappresentazione regolare è semisemplice.

Osservazione 4.37. Basta anche chiedere “ogni rappresentazione regolare *finita* è semisemplice”.

Osservazione 4.38. G è completamente riducibile se e solo se $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Dimostrazione.

$\mathbb{K}[G]$ è una rappresentazione regolare di G quindi una implicazione è ovvia. Se V ha dimensione n e $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice allora per l'immersione (4.7) $V \hookrightarrow \mathbb{K}[G]^m$ si ha che V è semisemplice (4.6). □

¹moralmente $c(a, b) = \frac{(a+b)^p - a^p - b^p}{p}$, che non potremmo fare direttamente in \mathbb{K} per l'identità del binomio ingenuo

Definizione 4.39. Un gruppo G è un **toro (algebrico)** se $G \cong (\mathbb{G}_m)^n$.

Osservazione 4.40. Ricordando che $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ notiamo che

$$\mathbb{K}[\mathbb{G}_m^n] = \mathbb{K}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

Questo spazio ha una base data da $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$ per $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Proposizione 4.41 (Tori algebrici sono semisemplici). Se G toro algebrico allora G è semisemplice.

Dimostrazione.

Se $g = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $h = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ sono elementi di $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{K}^\times)^n$ si ha che

$$\begin{aligned} (gt^\alpha)(h) &= t^\alpha(g^{-1}h) = t^\alpha(\lambda_1^{-1}\mu_1, \dots, \lambda_n^{-1}\mu_n) = \\ &= (\lambda_1^{-1}\mu_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_n^{-1}\mu_n)^{\alpha_n} = \\ &= \lambda^{-\alpha} \mu^\alpha = \\ &= (\lambda^{-\alpha} t^\alpha)h. \end{aligned}$$

Segue che $gt^\alpha = \lambda^{-\alpha} t^\alpha$ e che quindi i t^α sono autovettori per ogni $g \in G$. Poiché

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K}t^\alpha$$

e ogni $\mathbb{K}t^\alpha$ è semisemplice, segue (4.6) che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice.

Quindi le rappresentazioni semplici di G sono di dimensione 1 e sono date da $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}t^{-\alpha}$ con $gz = t^\alpha(g)z$ □

Lemma 4.42. Se $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ allora G è completamente riducibile se e solo se $V^{\otimes n}$ è semisemplice per ogni n

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

\Rightarrow Ovvio

\Leftarrow La dimostrazione è del tutto analoga a quella esposta per il lemma (4.10). Dimostriamo che $\mathbb{K}[G]$ è semisemplice. Dato il morfismo $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] \rightarrow \mathbb{K}[G]$ basta mostrare che $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]$ è semisemplice. Scriviamo

$$\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)] = \mathbb{K}[\mathrm{End}(V)][\det^{-1}].$$

$\mathbb{K}[\mathrm{End}(V)]$ è un quoziente di somme di rappresentazioni della forma $(V^*)^{\otimes m}$ e quindi è quoziente di $(V^* \oplus \dots \oplus V^*)^{\otimes m}$ e dato che V^* è semisemplice ho finito. □

Corollario 4.43. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è tale che se $g \in G$ allora $\bar{g} \in G$, allora G è completamente riducibile.

Dimostrazione.

Sia $V = \mathbb{C}^n$ e dimostriamo che $V^{\otimes m}$ è semisemplice per ogni m , cioè che per ogni $U \subseteq V^{\otimes m}$ che sia G -stabile esiste W G -stabile tale che $V^{\otimes m} = U \oplus W$.

Consideriamo il caso $m = 1$. Definiamo la forma hermitiana

$$h((x_i)(y_i)) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Se $U \subseteq V$, poniamo $W = U^\perp$ rispetto a questa forma. Chiaramente $V = U \oplus U^\perp$, quindi vogliamo mostrare che U G -stabile implica U^\perp G -stabile.

$$h(gw, u) = \overline{w}^\top \bar{g}^\top u = h(w, \underbrace{\bar{g}^\top u}_{\in U}) \stackrel{w \in U^\perp}{=} 0.$$

Per il caso generale l'idea è la stessa ma usiamo

$$h_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^m h(v_i, u_i).$$

Si conclude usando la tesi per h . □

Esempio 4.44. Sia $G \in \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n), O(n)\}$, allora G è completamente riducibile. Per $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ questo è ovvio. Per $O(n) = \{g^\top g = id\}$ basta mostrare che se $g^\top g = id$ allora $\bar{g}^\top \bar{g} = id$, ma questo è chiaro.

Anche $SO(n)$ e $S_p(2n)$ hanno questa proprietà, dove

$$S_p(2n) = \{g \mid gJg^\top = J\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.45. Sia $\mathrm{char} \mathbb{K} = p = 2$ e consideriamo $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$. Esso ammette una rappresentazione semplice $V = \mathbb{K}^2$. Sia x, y una base di V e consideriamo l'azione data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = ax + by, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y = cx + dy.$$

Consideriamo ora $S^2V = \langle X^2, xy, y^2 \rangle$. Per questioni di caratteristica 2, $gx^2 = (gx)^2$. Notiamo allora che $W = \langle x^2, y^2 \rangle$ è una sottorappresentazione di S^2V che non ammette un complementare.

Esercizio 4.46. Se $\mathrm{char} \mathbb{K} = p$ allora $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ non sono completamente riducibili.

Proposizione 4.47. Se G è completamente riducibile allora G non ha sottogruppi unipotenti normali non banali.

Dimostrazione.

Sia W tale che $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ (definizione di gruppo algebrico lineare).

Sia V una rappresentazione irriducibile di G e sia $U \subseteq G$ un sottogruppo normale unipotente. Poiché $V \neq (0)$ e U unipotente, $V^U \neq 0$ per il corollario (4.24). Poiché U è normale V^U è stabile per G e quindi $V^U = V$, cioè U agisce banalmente su tutte le rappresentazioni irriducibili. Questo mostra che per la mappa $G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ si ha che U finisce in $\{id_W\}$ perché G è completamente riducibile, ma questa mappa è iniettiva e quindi $U = \{1_G\}$. \square

Definizione 4.48 (Caratteri di un gruppo). Dato un gruppo algebrico G definiamo un **carattere** di G come un omomorfismo di gruppi

$$\alpha : G \rightarrow \mathrm{GL}(1) = \mathbb{K}^\times.$$

L'insieme dei caratteri $X(G)$ forma un gruppo abeliano:

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) = \beta(g)\alpha(g) = (\beta\alpha)(g).$$

Teorema 4.49. Sia G un gruppo abeliano connesso completamente riducibile, allora G è un toro algebrico.

Dimostrazione.

Notiamo che ogni elemento di G è semisemplice: se $g \in G$ allora per la decomposizione di Jordan (4.12) si ha $g = su$ con u unipotente in G . Poiché G è abeliano, $\langle u \rangle$ è un suo sottogruppo normale, quindi per la proposizione sopra (4.47) si ha che $\langle u \rangle = \{1_G\}$, cioè $u = 1_G$. Dunque $g = s1_G = s$, cioè g è semisemplice.

Poiché G è abeliano, gli elementi commutano. Dato che ogni elemento è semisemplice (cioè in ogni rappresentazione è diagonalizzabile), si ha che per ogni rappresentazione esiste una base di autovettori dove ogni elemento di G è *simultaneamente* diagonalizzabile. In particolare le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1.

Consideriamo allora una decomposizione di $\mathbb{K}[G]$ che rende ogni elemento di G diagonalizzabile

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$$

dove $\mathbb{K}_\alpha^{n_\alpha}$ sono le funzioni regolari f tali che $gf = \alpha(g)f$. Notiamo che

$$\alpha(gh)f = (gh)f = g(hf) = g(\alpha(h)f) = \alpha(h)gf = \alpha(h)\alpha(g)f$$

quindi $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$. Questo ci permette di identificare questa decomposizione con

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{\alpha \in X(G)} V_\alpha, \quad \text{dove } V_\alpha = \{f \in \mathbb{K}[G] \mid gf = \alpha(g)f\}.$$

Per ogni carattere $\alpha \in X(G)$ definiamo $f_\alpha = \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}^\times) \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{K}) = \mathbb{K}[G]$. Sfruttando il fatto che α è un omomorfismo si ha $f_\alpha \in V_\alpha$, infatti

$$\begin{aligned} (gf_\alpha)(x) &= f_\alpha(g^{-1}x) = \alpha^{-1}(g^{-1}x) = (\alpha(g^{-1}x))^{-1} = \\ &= (\alpha(g)^{-1}\alpha(x))^{-1} = (\alpha(x))^{-1}\alpha(g) = \\ &= \alpha(g)\alpha^{-1}(x) = \\ &= \alpha(g)f_\alpha(x). \end{aligned}$$

Se h ha carattere α , cioè $gh = \alpha(g)h$, allora per ogni $g \in G$

$$\frac{h(1_G)}{f_\alpha(1_G)} = \frac{\alpha(g^{-1})h(1_G)}{\alpha(g^{-1})f_\alpha(1_G)} = \frac{g^{-1}h(1_G)}{g^{-1}f_\alpha(1_G)} = \frac{h(g1_G)}{f_\alpha(g1_G)} = \frac{h(g)}{f_\alpha(g)},$$

cioè h è un multiplo di f_α (in particolare $n_\alpha = 1$ nella scrittura sopra).

Mostriamo che $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$ per qualche n mostrando che è un gruppo abeliano finitamente generato libero da torsione:

fin.gen. Sappiamo che $\mathbb{K}[G]$ è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata quindi consideriamo dei generatori $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_m}$. Come \mathbb{K} -spazio vettoriale, $\mathbb{K}[G]$ è generato da elementi della forma

$$f_{\alpha_1}^{n_1} \dots f_{\alpha_m}^{n_m},$$

il quale ha carattere $\prod \alpha_i^{n_i}$. Questo mostra che i caratteri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono dei generatori di $X(G)$.

tor.free EPer assurdo supponiamo $\alpha^N = 1$ ma $\alpha \neq 1$, cioè $\alpha(g)^N = 1$ per ogni $g \in G$. Notiamo che

$$G = \coprod_{\omega \text{ t.c. } \omega^N=1} \{g \mid \alpha(g) = \omega\},$$

ma poiché G è connesso, questa unione disgiunta deve consistere di un solo termine, mostrando che α assume solo il valore 1 contraddicendo le ipotesi.

Abbiamo quindi mostrato che $X(G) \cong \mathbb{Z}^n$. Sia $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ una sua base. Se scriviamo $x_i = f_{\alpha_i}$ troviamo

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus \langle f_\alpha \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus \langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

e in questa decomposizione il prodotto è esattamente quello che ci aspetteremmo. Se scriviamo $\alpha = \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}$ allora $f_\alpha = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, dunque abbiamo proprio mostrato che

$$\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{K}[(\mathbb{K}^\times)^n].$$

Essendo sia G che $(\mathbb{K}^\times)^n$ affini questo mostra che sono isomorfi. □

Capitolo 5

Quozienti

5.1 Costruzione dei quozienti

Lemma 5.1. Sia G un gruppo algebrico e H sottogruppo di G , allora

1. Esistono una rappresentazione di dimensione finita V di G e una retta $L \subseteq V$ tali che $H = \text{stab}_G L = \{g \in G \mid g(L) = L\}$
2. Se H è normale allora V si può scegliere in modo che sia somma dei V_α per $\alpha \in X(H)$ e $V_\alpha = \{v \in V \mid h \cdot v = \alpha(h)v\}$.

Dimostrazione.

Mostriamo le due affermazioni

1. Sia $I_H \subseteq \mathbb{K}[G]$ l'ideale che definisce H , allora

$$H = \{g \in G \mid g(I_H) = I_H\}$$

\subseteq Se $g \in H$ e $f \in I_H$ allora $gf(k) = f(g^{-1}k)$, quindi se $k \in H$ allora $g^{-1}k \in H$ e quindi questa funzione vale 0, cioè $gf \in I_H$. L'altra inclusione segue dallo stesso ragionamento fatto su g^{-1} .

\supseteq Se $g^{-1}(I_H) \subseteq I_H$ allora per ogni $f \in I_H$

$$f(g) = \underbrace{(g^{-1}f)(e)}_{\in I_H} = 0$$

cioè $g \in H$.

Consideriamo ora dei generatori f_1, \dots, f_m per I_H e sia $V_0 \subseteq \mathbb{K}[G]$ una G -sotto-rappresentazione di dimensione finita che contiene ogni f_i . Consideriamo il sottospazio vettoriale $W_0 = I_H \cap V_0$ e notiamo che

$$H = \{g \in G \mid g(W_0) = W_0\}.$$

\subseteq Ovvio per quanto detto sopra.

\supseteq Se $g(W_0) = W_0$ allora $g(I_H) = I_H$, infatti $g(I_H) \subseteq I_H$ ovvio per costruzione di W_0 , l'altra inclusione segue dal fatto che $g(W_0) = W_0 \iff g^{-1}(W_0) = W_0$.

Sia $\dim W_0 = m$. Poniamo

$$V = \bigwedge^m V_0, \quad L = \bigwedge^m W_0 \subseteq \bigwedge^m V_0.$$

Per concludere basta mostrare che

$$H = \{g \in G \mid g(L) = L\}$$

$\boxed{\subseteq}$ Se $g(W_0) = W_0$ allora chiaramente

$$g(L) = g\left(\bigwedge^m W_0\right) = \bigwedge^m g(W_0) = \bigwedge^m W_0 = L.$$

$\boxed{\supseteq}$ Notiamo che se u_1, \dots, u_m è una base di $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale allora

$$U = \{u \in V \mid u \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_m = 0\}.$$

Fissiamo una base w_1, \dots, w_m di W_0 e osserviamo che gw_1, \dots, gw_m è una base di $g(W_0)$. Se $g(L) = L$ allora per definizione

$$\langle gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m \rangle = \langle w_1 \wedge \dots \wedge w_m \rangle,$$

quindi per il criterio appena citato si ha che

$$\begin{aligned} W_0 &= \{v \in V \mid v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_m = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid v \wedge gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m = 0\} = g(W_0). \end{aligned}$$

2. Sia $V' = \bigoplus_{\alpha \in X(H)} V_\alpha \subseteq V$ con V di prima. Mostriamo che V' è G -invariante: Se $v_\alpha \in V_\alpha$ per $\alpha \in X(H)$, $h \in H$ e $g \in G$ allora

$$h \cdot (gv_\alpha) = (gg^{-1}hg) \cdot v_\alpha = g(\alpha(g^{-1}hg)v_\alpha) = \alpha(g^{-1}hg)gv_\alpha,$$

cioè gv_α è un autovettore per l'azione di h per un qualsiasi $g \in G$ e $h \in H$, ovvero V' è G -invariante.

Per concludere è dunque sufficiente mostrare che $L \subseteq V'$, ma abbiamo già visto che

$$g(w_1 \wedge \dots \wedge w_m) = gw_1 \wedge \dots \wedge gw_m = \lambda(g)w_1 \wedge \dots \wedge w_m$$

per qualche $\lambda(g)$ per ogni $g \in H$, quindi $L \subseteq V_\lambda$.

□

Siano $H < G$ e L, V come nel lemma. Allora $L \in \mathbb{P}(V)$ per definizione di spazio proiettivo. Definiamo la varietà proiettiva

$$Y = \overline{G \cdot L} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

e scriviamo $X = G \cdot L$. Mostriamo che X è aperto: data la mappa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Y \\ g & \longmapsto & gL \end{array},$$

per Chevalley (3.17) si ha che X contiene un aperto U di Y . Se $x \in U \subseteq X$ allora $gx \in gU \subseteq X$ quindi

$$X = \bigcup_{g \in G} gU \text{ è aperto.}$$

Insiemeisticamente si ha $X = G \cdot L = G / \text{stab}_G(L) = G/H$, quindi prendere la chiusura è in un qualche modo il minimo indispensabile per rendere G/H una varietà.

Esercizio 5.2. Sia $G = \text{GL}(2)$ e $H = B(2) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$. Sia $V = \mathbb{K}^2$ e $L = \mathbb{K}e_1$, allora effettivamente $H = \text{stab}_G(L)$ e $G \cdot L = \mathbb{P}(V)$ (ogni retta si ottiene da L applicando una trasformazione lineare), quindi $G/H \leftrightarrow \mathbb{P}(V)$.

Esercizio 5.3. Sia $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ e $H = O(n, \mathbb{C})$. Sia $V = \text{Sym}(n, \mathbb{C})$ lo spazio delle matrici simmetriche. Se $A \in V$ e $g \in G$ agisce su A tramite

$$g \cdot A = gAg^\top$$

allora $H = \text{stab}_G(I_n)$ (stabilizzatore della matrice identità).

$$X = G \cdot I_n = \{gg^\top \mid g \in \text{GL}(n)\} = \{A \in \text{Sym}(n) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq \overline{G \cdot I_n} = Y \subseteq \mathbb{P}(V).$$

Proposizione 5.4. Se H è normale, G/H è un gruppo algebrico affine.

Dimostrazione.

Costruiamo L e $V = \bigoplus V_\alpha$ come nel punto 2. del lemma (5.1). Sia

$$W = \{T : V \rightarrow V \mid \forall \alpha \in X(H), T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha\}$$

e notiamo che G agisce su W come $gT = g \circ T \circ g^{-1}$. Per rendere valido quanto detto dobbiamo verificare che $gTg^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha$, ma questo segue dal fatto che se $g^{-1}(V_\alpha) = V_\beta$ allora

$$gTg^{-1}(V_\alpha) = gT(V_\beta) \subseteq gV_\beta = V_\alpha.$$

Notiamo ora che

$$\left\{ g \in G \mid g|_W = id_W \right\} = \left\{ g \in G \mid g|_{V_\alpha} = \lambda_\alpha id_{V_\alpha} \forall \alpha \in X(H) \right\} = H,$$

la seconda uguaglianza segue dalla definizione di carattere mentre la prima si ricava osservando le matrici associate agli elementi di g visti come automorfismi di V : gli elementi di W sono diagonali a blocchi e ciò che commuta¹ con tutte le diagonali a blocchi sono le cose che sono multiplo di identità su ogni blocco.

Abbiamo dunque costruito un omomorfismo di gruppi algebrici $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(W)$ il cui nucleo è H . Poiché $\varphi(G)$ è un sottogruppo chiuso di $\text{GL}(W)$ per Chevalley (3.19) si ha che $G/H \cong \varphi(G)$ eredita la struttura di gruppo algebrico lineare da $\varphi(G)$. \square

Osservazione 5.5. Se H è un sottogruppo di G e $\pi : G \rightarrow X = G \cdot L$, allora π è G -equivariante e induce una bigezione tra G/H e X .

Nel seguito supporremo $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$.

¹ $g|_W = id_W$ significa che per ogni $T \in W$ $gTg^{-1} = T$, cioè $gT = Tg$.

Proposizione 5.6. Se H è un sottogruppo di G e $\pi: G \rightarrow X$ una mappa H -equivariante, valgono le seguenti proprietà.

1. Per ogni varietà Z , la mappa

$$G \times Z \xrightarrow{(\pi, id)} X \times Z$$

è aperta.

2. Per ogni aperto U di X , si ha un isomorfismo

$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U)))^H.$$

Dimostrazione.

Notiamo che $\pi: G \rightarrow X$ induce una bigezione insiemistica tra G/H e X . Poiché per ogni varietà Z la mappa $(\pi, id): G \times Z \rightarrow X \times Z$ è liscia (π è liscia), tale mappa è anche aperta (2.60).

Sia U un aperto di X , poniamo $V = \pi^{-1}(U)$, e consideriamo la mappa

$$\pi^* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_G(V)^H.$$

Osserviamo che tale mappa è iniettiva, infatti se $f(\pi(x)) = 0$ per ogni x in $V = \pi^{-1}(U)$, si ha $f(y) = 0$ per ogni y in U , per cui $f = 0$.

Mostriamo che la mappa $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ è surgettiva. Posso ridurmi al caso U irriducibile:

In G le componenti connesse coincidono con le componenti irriducibili (3.15). Lo stesso vale per X , infatti se G^0 è la componente connessa di 1_G allora da $X = G/H$ troviamo che $X^0 = G^0/H \cap G^0$ è aperto e X è unione finita disgiunta dei traslati di X^0 (G ha finite componenti irriducibili per Noetherianità).

Se U è un aperto di X allora

$$X = X^0 \sqcup g_1 X^0 \sqcup \dots \sqcup g_n X^0 \implies U = U \cap X^0 \sqcup \dots \sqcup U \cap g_n X^0.$$

Poiché X^0 irriducibile i suoi aperti sono irriducibili, quindi per località della verifica di surgettività sui pullback per aperti di X^0 , ci siamo quindi ricondotti al caso X e U irriducibili.

Sia $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ regolare H -equivariante e consideriamo il grafico $\Gamma(f) \subseteq V \times \mathbb{K}$. Sia g la fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & U = V/H \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

Decomponiamo V in irriducibili $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$ e per irriducibilità di U deve essere il caso che H agisce transitivamente su $\{V_1, \dots, V_n\}$.

Per il punto 1., $(\pi, id): G \times \mathbb{K} \rightarrow X \times \mathbb{K}$ è una mappa aperta, quindi la restrizione $\psi: V \times \mathbb{K} \rightarrow U \times \mathbb{K}$ resta aperta perché $V \times \mathbb{K}$ è un aperto di $G \times \mathbb{K}$. Segue che² $\psi(\Gamma(f)) = \Gamma(g)$ è un chiuso di $U \times \mathbb{K}$. In realtà notando che $\Gamma(g)$ è H invariante e che esso è immagine di $\Gamma(f) = \bigsqcup \Gamma(f) \cap V_i$ si ha che in realtà possiamo scrivere $\Gamma(g)$

²Se $(v, f(v)) \in \Gamma(f)$ allora $\psi(v, f(v)) = (\pi(v), f(v)) = (\pi(v), g(\pi(v)))$.

solo come immagine di un singolo $\Gamma(f) \cap V_i$, in particolare è irriducibile (altrimenti potremmo decomporre V ulteriormente).

Consideriamo ora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(g) & \hookrightarrow & U \times \mathbb{K} \\ & \searrow q & \downarrow p_U \\ & & U \end{array}$$

dove p_U è la proiezione su U e q è la restrizione a $\Gamma(g)$. Chiaramente q è regolare in quanto composizione di regolari. q è anche bigettiva perché $(u, g(u)) \mapsto u$ può essere facilmente invertita. Poiché U è liscio e $\Gamma(g)$ irriducibile, per il teorema di Zariski (2.57) si ha che q è un isomorfismo, quindi la mappa $u \mapsto (u, g(u))$ un morfismo e in particolare g stesso è un morfismo. Questo mostra che π^* effettivamente è surgettiva perché abbiamo trovato $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tale che $\pi^*(g) = g \circ \pi = f$. \square

Teorema 5.7. Per ogni G -varietà Y e per ogni y_0 in Y tale che H è contenuto in $\text{stab}_G(y_0)$, vale la seguente proprietà: se $\varphi: G \rightarrow Y$ è la mappa definita da $\varphi(g) = gy_0$, allora esiste un'unica $\psi: X \rightarrow Y$ tale che $\psi \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & X \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \psi \\ & & Y \end{array}$$

Dimostrazione.

Insiemeisticamente, la mappa $\psi: gH \mapsto gy_0$ è definita. Inoltre ψ è continua: se U è un aperto di Y , allora

$$\psi^{-1}(U) = \pi(\pi^{-1}(\psi^{-1}(U))) = \pi(\varphi^{-1}(U)),$$

che è aperto. Dato un aperto U di Y , verifichiamo che l'immagine della mappa

$$\psi^*: \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \text{Hom}_{(\text{Set})}(\psi^{-1}(U), \mathbb{K})$$

è contenuta nell'insieme delle funzioni regolari su X . Consideriamo una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{K}$. Allora $\tilde{f} := f \circ \psi \circ \pi = f \circ \varphi$ è in $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$ in quanto φ è un morfismo di varietà. Mostriamo che in realtà è in $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))^H$. Sia λ in $\mathcal{O}_G(\varphi^{-1}(U))$ e sia h in H . Allora per ogni x in G si ha

$$(h\tilde{f})(x) = \tilde{f}(xh) = f(\varphi(xh)) = f(xhy_0) = f(xy_0) = f(\varphi(x)) = \tilde{f}(x).$$

\square

Definizione 5.8. Una varietà è **omogenea** rispetto al gruppo G se l'azione di G su X è transitiva.

Corollario 5.9. Se X è una varietà omogenea rispetto a G , allora X è liscia.

Dimostrazione.

Poiché X ha un aperto U di punti lisci, la tesi segue dal fatto che $X = \bigcup_{g \in G} gU$. \square

Corollario 5.10. Se X e Y sono varietà omogenee per G e $\varphi: X \rightarrow Y$ è G -equivariante, allora φ è liscia.

Dimostrazione.

Sicuramente φ è surgettiva, perché X e Y sono varietà omogenee per G e φ è G -equivariante. Per il teorema (2.59) esiste un aperto non vuoto U di Y tale che $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ è liscia. Allora si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(gU) & \xrightarrow{\varphi|_{g\varphi^{-1}(U)}} & gU \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}} & U \end{array}$$

Poiché $Y = \bigcup gU$, φ è liscia in ogni punto e quindi è liscia. \square

5.2 Sottogruppi generati e contenimenti

Lemma 5.11. Sia G un gruppo algebrico e siano X_i delle varietà irriducibili. Siano $\varphi_i: X_i \rightarrow G$ tali che $1_G \in \text{Imm } \varphi_i$ per ogni i . Poniamo $Y_i = \varphi_i(X_i)$. Sia $H = \langle \{Y_i\}_i \rangle$ il sottogruppo generato dalle immagini delle φ_i . Allora

1. H è chiuso
2. esistono $i_1, \dots, i_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tali che

$$H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{i_n}^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_j \in \{1, -1\}$$

Dimostrazione.

Supponiamo $X_i = Y_i \subseteq G$ e supponiamo che tra le X_i compaiano anche le X_i^{-1} (così evitiamo gli ε).

Definiamo iterativamente

$$\begin{array}{ll} Z_1 = X_1, & W_1 = \overline{Z_1}, \\ Z_2 = X_1 \cdot X_2, & W_2 = \overline{Z_2}, \\ \vdots & \vdots \\ Z_n = X_1 \cdots X_n, & W_n = \overline{Z_n}, \\ Z_{n+1} = X_1 \cdots X_n X_1, & W_{n+1} = \overline{Z_{n+1}}, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Notiamo che Z_i è l'immagine di $X_1 \times \cdots \times X_i \rightarrow G$, quindi Z_i è irriducibile per ogni i , dunque anche $W_i = \overline{Z_i}$ è irriducibile.

Notiamo ora che $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq G$ è una catena di chiusi, ma dato che G ha dimensione finita essa stabilizza, cioè esiste N tale che $W_N = W_{N+1}$, ovvero $W_N \cdot X_i \subseteq W_N$ per ogni i .

Allora $W_N Z_N \subseteq W_N$ cioè $W_N \cdot W_N \subseteq W_N$ perché W_N è chiuso. Quindi³ $W_N^{-1} \subseteq W_N$ e in particolare $Z_N^{-1} \subseteq W_N$, ma $Z_N^{-1} = X_N^{-1} \cdots X_1^{-1} = X_{i_1} \cdots X_{i_N}$, cioè mettendo tutto insieme $H \subseteq W_N$.

Mostriamo che $W_N = Z_N \cdot Z_N$: abbiamo una mappa

$$\underbrace{X_1 \times \cdots \times X_N}_{\text{irrid.}} \rightarrow Z_N \rightarrow W_N,$$

quindi per Chevalley (3.17) $Z_N \supseteq U$ per U aperto non vuoto di W_N , dunque $U \cdot U = W_N$ perché W_N è irriducibile.

Questo mostra che $W_N \subseteq H$ ma ci sono tutti gli elementi di H quindi effettivamente $H = W_N$. \square

Osservazione 5.12 (Dimensione del quoziente). Sia $\varphi : G \rightarrow G/H$ e ricordiamo che una mappa di questo tipo è liscia per omogeneità. Allora per il teorema (2.61) abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e H \rightarrow T_e G \xrightarrow{d\varphi_e} T_e(G/H) \rightarrow 0$$

e sappiamo che $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$.

Proposizione 5.13. Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$. Siano $H, K \subseteq G$ sottogruppi connessi, allora

$$H \subseteq K \iff T_e H \subseteq T_e K \text{ in } T_e G.$$

Dimostrazione.

L'implicazione \implies è ovvia quindi basta mostrare l'altra.

Sia $X = H \cdot K \subseteq G$ e notiamo che è omogeneo rispetto all'azione di $H \times K$ data da $(h, k) \cdot g = h g k^{-1}$. Osserviamo che X è aperto in $\overline{X} \subseteq G$ per Chevalley (3.17) (contiene un aperto della chiusura ed è omogeneo in quanto orbita di e). Si ha

$$X \cong \frac{H \times K}{\text{stab}_{H \times K}(e)}.$$

Studiando lo stabilizzatore notiamo che

$$\text{stab}_{H \times K}(e) = \{(h, k) \mid h k^{-1} = e\} = \{(h, k) \mid h = k\} \cong H \cap K,$$

dunque per il teorema (2.61) abbiamo $\dim X = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$ e una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e(H \cap K) \rightarrow T_e(H \times K) \rightarrow T_e X \rightarrow 0$$

da cui segue $\dim T_e X = \dim T_e H + \dim T_e K - \dim T_e(H \cap K)$.

³ $Z_N^{-1} W_N \subseteq W_N \implies \overline{Z_N^{-1}} \subseteq W_N \implies \overline{Z_N^{-1}} \subseteq W_N$ e $\overline{Z_N^{-1}} = \overline{Z_N}^{-1} = W_N^{-1}$.

Se $T_e X = T_e H + T_e K$ allora

$$\dim(T_e X) = \dim(T_e H + T_e K) \stackrel{T_e H \subseteq T_e K}{=} \dim T_e K,$$

dunque

$$\dim X = \dim T_e X = \dim T_e K = \dim K$$

e quindi $K \subseteq X \subseteq \overline{X}$ con K e \overline{X} irriducibili della stessa dimensione, dunque $K = X = \overline{X}$, e poiché $X = H \cdot K$ questo mostra

$$K = X = H \cdot K \implies H \subseteq K$$

che è la tesi.

Per concludere basta dunque dimostrare che $T_e X = T_e H + T_e K$. Consideriamo la composizione

$$\begin{array}{ccccc} H \times K & \rightarrow & H \times K & \rightarrow & X \\ (h, k) & \mapsto & (h, k^{-1}) & & \\ & & (h', k') & \mapsto & h'(k'^{-1}) \end{array}$$

che è la mappa di moltiplicazione $\mu|_{H \times K}$. Dal teorema (2.61) ricaviamo una successione esatta

$$0 \rightarrow T_e(\text{stab}_{H \times K}(e)) \rightarrow \underbrace{T_e(H \times K)}_{T_e H \times T_e K} \rightarrow T_e X \rightarrow 0$$

In particolare $d(\mu|_{H \times K})_{(e,e)}$ è surgettiva, quindi per concludere basta mostrare che

$$d(\mu|_{H \times K})_{(e,e)}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

Dato che $G \subseteq \text{GL}(n)$ è sufficiente che la tesi valga per $\text{GL}(n)$ e $d\mu_{(e,e)}$. Notiamo che $\text{Mat}_{n \times n} = T_I \text{GL}(n)$ dove l'identificazione è data da

$$(a_{i,j}) \longleftrightarrow \left(a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I \right)$$

Traduciamo allora $d\mu_{(e,e)}$ in queste coordinate: se

$$d\mu_{(e,e)} \begin{array}{ccc} \text{Mat}_{n \times n} \times \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & \text{Mat}_{n \times n} \\ ((a_{i,j}), (b_{i,j})) & \longmapsto & (c_{i,j}) \end{array}$$

allora

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(x_{i,j} \circ \mu) \Big|_I = \frac{\partial}{\partial x_{i,j}} \left(\sum_{\ell} y_{i,\ell} z_{\ell,j} \right) \Big|_I = \\ &= \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,\ell}}(y_{i,\ell}) z_{\ell,j} \Big|_I + \sum_{\ell} y_{i,\ell} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}(z_{\ell,j}) \Big|_I \stackrel{(\star)}{=} \\ &= \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,\ell}) \Big|_I \delta_{\ell,j} + \sum_{\ell} \delta_{i,\ell} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{\ell,j}) \Big|_I = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}(y_{i,j}) \Big|_I + \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j}) \Big|_I = \\ &= a_{i,j} + b_{i,j} \end{aligned}$$

dove il passaggio (\star) segue perché stiamo interpretando quei differenziali come derivazioni. \square

5.3 Varietà complete

Definizione 5.14 (Varietà separata). X è **separata** se la diagonale $X \rightarrow X \times X$ è un morfismo chiuso.

Supporremo che sia tutto separato.

Definizione 5.15 (Varietà completa). X è **completa** se per ogni Z varietà, $\pi : X \times Z \rightarrow Z$ è un morfismo chiuso.

Osservazione 5.16. Se X è irriducibile e completa allora $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$.

Dimostrazione.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ regolare e consideriamo $\Gamma(f) \subseteq X \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Questa proiezione è chiusa quindi $\pi(\Gamma(f)) = f(X)$ è un chiuso irriducibile (immagine di irriducibile) di \mathbb{K} . Ma i chiusi irriducibili di \mathbb{K} non vuoti sono o tutto \mathbb{K} o solo un punto.

Consideriamo ora $W = \{(x, y) \in X \times \mathbb{K} \mid yf(x) = 1\}$. Se $f(X) = \mathbb{K}$ allora l'immagine di W tramite la proiezione $X \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ è \mathbb{K}^\times , che non è chiuso in \mathbb{K} , assurdo.

Quindi $f(X)$ è un solo punto, cioè f è costante. \square

Corollario 5.17. Se X è completa, affine e connessa allora $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}$ significa che X è un solo punto $\{(0)\}$.
In generale le affini complete sono un numero finito di punti.

Teorema 5.18 (I proiettivi sono completi). Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\mathbb{P}(V)$ è completa.

Moralmente “completo=compatto” in senso classico, per esempio valgono:

Osservazione 5.19. Se X è completa e $Z \subseteq X$ chiuso allora Z è completo.

Osservazione 5.20. Se $\varphi : X \rightarrow Y$ è surgettiva e X è completa allora Y è completa

5.3.1 Punto fisso di Borel

Proposizione 5.21 (Esiste orbita chiusa). Se K è un gruppo che agisce su una varietà Y allora K ha un'orbita chiusa in Y .

Dimostrazione.

Consideriamo un'orbita che ha dimensione minima $Z = G \cdot y$. Notiamo che Gy è un

aperto denso di \bar{Z} per Chevalley (3.17) (contiene un aperto ed è omogeneo), quindi $\dim \bar{Z} \setminus Z < \dim Z$, ma se questa differenza è non vuota allora G agisce su questa differenza e quindi esiste un'orbita di dimensione più piccola.

Dunque $\bar{Z} \setminus Z = \emptyset$, cioè $\bar{Z} = Z$. \square

Teorema 5.22 (Punto fisso di Borel). Se G è un gruppo risolubile connesso che agisce su una varietà completa allora G ha un punto fisso.

Dimostrazione.

Se $\dim G = 0$ allora G è un singolo punto e quindi è l'indetità e agisce banalmente.

Supponiamo $\dim G > 0$. Sia $H = [G, G]$ il sottogruppo dei commutatori. Questo è un sottogruppo algebrico connesso. Dato che G è risolubile, $H \subsetneq G$, quindi per ipotesi induttiva $X^H \neq \emptyset$.

Notiamo ora che su X^H agisce $A = G/H$, quindi su X^H abbiamo un'orbita chiusa (5.21) $A \cdot x \subseteq X^H \subseteq X$. Notiamo che $A \cdot x$ è completa perché chiuso di X completa, ma $A \cdot x = A / \text{stab}_A x$, quindi è anche una varietà affine. $A \cdot x$ è anche connessa perché A è connesso in quanto G lo è.

$A \cdot x$ è affine, completa e connessa, quindi è un punto, cioè x è un punto fisso per A in X^H , ma allora x è un punto fisso per G . \square

Esempio 5.23. Consideriamo $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{P}^n$ come segue:

$$\lambda \cdot [x_0 : \cdots : x_n] = [x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda^n x_n]$$

Questa azione ha come punti fissi quelli della forma $[0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$.

Ricordiamo che B_n è il sottogruppo di $\text{GL}(n)$ costituito dalle matrici triangolari superiori.

Corollario 5.24. Se G è connesso, sono tra loro equivalenti

1. G è risolubile.
2. Le uniche rappresentazioni irriducibili di G sono di dimensione 1.
3. Esiste un intero positivo n tale che G è contenuto in B_n .

Dimostrazione.

Supponiamo G risolubile e mostriamo il punto 1. Sia V una rappresentazione irriducibile di G . Allora $\mathbb{P}(V)^G$ è non vuoto e dunque per il teorema del punto fisso (5.22) esiste una retta ℓ in V tale che $G \cdot \ell = \ell$. Quindi $\ell = V$, da cui $\dim V = 1$.

Mostriamo l'implicazione $2 \Rightarrow 3$. Assumiamo G contenuto in $\text{GL}(V)$ per qualche V . Sia F_1 una sottorappresentazione irriducibile di dimensione 1. Allora G agisce su V/F_1 . Allora esiste una retta F_2/F_1 in V/F_1 tale che $GF_2/F_1 \subseteq F_2/F_1$. Procedendo induttivamente, troviamo una bandiera

$$0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = V$$

tale che $GF_i = F_i$ con $\dim F_i = i$. Se v_1, \dots, v_n è una base compatibile con tale bandiera (cioè $v_i \in F_i$ per ogni indice i), allora abbiamo un'immersione $G \hookrightarrow B_n$ definita da $g \mapsto [g]_{\underline{v}}$.

Infine, l'implicazione $3 \Rightarrow 1$ è immediata perché B_n è risolubile. \square

5.3.2 Sottogruppi parabolici e di Borel

Definizione 5.25. Sia G un gruppo algebrico e $P \subseteq G$ sottogruppo chiuso.

1. P si dice **parabolico** se G/P è completo
2. $B \subseteq G$ si dice **sottogruppo di Borel** se è un sottogruppo risolubile connesso massimale.

Osservazione 5.26. Se P è un sottogruppo parabolico, $G/P \subseteq \mathbb{P}(V)$ per qualche V .

Dimostrazione.

Ricorda (5.1) che esistono una rappresentazione V di G e una retta $L \subseteq V$ tali che $\text{stab}_G L = P$. Per questa rappresentazione $G/P = G \cdot L \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Notiamo che l'immagine di G/P in $\mathbb{P}(V)$ è chiusa, infatti se Γ è il grafico di $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ allora esso è contenuto in $G/P \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ e per definizione di sottogruppo parabolico G/P è completa.

Questo mostra che G/P è una sottovarietà di $\mathbb{P}(V)$. \square

Esempio 5.27. Sia $G = \text{GL}(n)$, $B \subseteq G$ le matrici triangolari superiori, diagonale inclusa.

$$G/B = \{0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = \mathbb{K}^n \mid \dim F_i = i\}$$

Lemma 5.28. G è un gruppo connesso e risolubile se e solo se G non ha sottogruppi parabolici propri.

Dimostrazione.

Diamo le due implicazioni

\Rightarrow Sia $P \subseteq G$ parabolico. Per il teorema del punto fisso di Borel (5.22) si ha che G/P ha un punto fisso per G , ma per omogeneità questo significa che G/P consiste di un solo punto, cioè $P = G$.

\Leftarrow Sia $P = G^0$ e mostriamo che G/G^0 è completo, questo basta perché in tal caso G^0 è parabolico e quindi per ipotesi $G^0 = G$.

Per il corollario (5.24) basta dimostrare che le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1: se V irriducibile, G agisce su $\mathbb{P}(V)$ e ha un'orbita chiusa $G \cdot \ell \subseteq \mathbb{P}(V)$ per (5.21). Sia $P = \text{stab}_G(\ell)$, questo gruppo deve essere parabolico perché il quoziente è $G\ell$ orbita chiusa ma allora $P = G$ e per irriducibilità questo mostra $V = \ell$. \square

Teorema 5.29. Sia G un gruppo algebrico.

1. Se B è un sottogruppo di Borel di G , allora B è parabolico.
2. Se B è un sottogruppo di Borel di G e P è un sottogruppo parabolico di G , allora esiste g in G tale che gBg^{-1} è contenuto in P .
3. Tutti i sottogruppi di Borel sono coniugati.

Dimostrazione.

Mostriamo contemporaneamente il primo e il secondo punto.

Osserviamo che è sufficiente mostrare che G^0/B è completo, infatti, se $G = \coprod_i g_i G^0$, allora $G/B = \coprod_i g_i G^0/B$. Possiamo quindi assumere che G sia connesso.

Se G è risolubile, allora per per definizione di sottogruppo di Borel $G = B$ e si conclude. Se G non è risolubile, allora per il lemma (5.28) esiste un sottogruppo parabolico proprio P di G . Possiamo quindi considerare l'azione di B su G/P , la quale ha un punto fisso (5.22), cioè esiste un g in G tale che $gBg^{-1}P = P$, ovvero $gBg^{-1} \subseteq P$. Ciò in particolare mostra il secondo punto.

Possiamo assumere $B \subseteq P \subsetneq G$, per cui B è un sottogruppo di Borel di P . A questo punto procediamo per induzione sulla dimensione di G . Poiché $\dim P < \dim G$, abbiamo che B è un sottogruppo parabolico di P per ipotesi induttiva, quindi P/B è completa e G/P è completa. Avendo mostrato che B è parabolico in P e che P è parabolico in G , per il lemma (5.31) si ha che B è parabolico in G .

Infine, per il terzo punto, siano B, B' due sottogruppi di Borel di G . Allora esiste g in G tale che $gBg^{-1} \subseteq B'$ per il punto 2. Poiché gBg^{-1} e B' sono sottogruppi connessi, risolubili e massimali, concludiamo che $gBg^{-1} = B'$. \square

Corollario 5.30. Se $B \subseteq G$ è parabolico, connesso e risolubile allora è di Borel.

Dimostrazione.

Per il punto 2. del teorema (5.29) si ha che B contiene un sottogruppo di Borel, ma essendo connesso e risolubile deve essere già un sottogruppo di Borel per massimalità. \square

Lemma 5.31. Siano G un gruppo algebrico, $P \subseteq Q$ due sottogruppi tali che Q è parabolico in G e P è parabolico in Q . Allora P è parabolico in G .

Dimostrazione.

Data una varietà arbitraria Z , mostriamo che la mappa $\pi_Z: G/P \times Z \rightarrow Z$ è chiusa. Sia A un chiuso in $G/P \times Z$. Sia A' l'immagine inversa di A rispetto la proiezione $\pi_1: G \times Z \rightarrow G/P \times Z$. Allora A' è chiuso e $A' \cdot P = A'$. Se mostriamo che $A' \cdot Q = A'$, abbiamo concluso, infatti, considerando la composizione

$$\begin{array}{ccccc} G \times Z & \rightarrow & G/Q \times Z & \rightarrow & Z \\ A' & \rightarrow & A'' & \rightarrow & \pi_Z(A) \end{array}$$

l'immagine di A' tramite la prima mappa è un certo A'' , che viene mandato in $\pi_Z(A)$. Sia $A''' = A' \cdot Q$. Mostriamo che A''' è chiuso (ciò permette di concludere per quanto appena detto). Consideriamo la mappa

$$\varphi: \begin{array}{ccc} Q \times G \times X & \longrightarrow & G \\ (q, g, x) & \longmapsto & (gq, x) \end{array}$$

Allora $A^{IV} := \varphi^{-1}(A')$ è chiuso ed è stabile per l'azione a destra di P su Q , cioè se (q, g, x) è in A^{IV} , allora (gp, g, x) è in A^{IV} . Infatti se (gq, x) è in A' , allora anche (gqp, x) è in A' . Ragionando come prima, abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} Q \times G \times Z & \rightarrow & Q/P \times G \times Z & \rightarrow & G \times Z \\ A^{IV} & \rightarrow & \text{imm chiusa} & \rightarrow & A^V \text{chiuso} \end{array}$$

dove

$$A^V = \{(g, x) \in G \times X : \exists q \in Q, (gq, x) \in A'\} = A' \cdot Q.$$

A questo punto $A' \cdot Q$ è chiuso e concludiamo come prima. \square

Con tecniche simili, è possibile mostrare il seguente risultato.

Teorema 5.32. Se G è un gruppo algebrico connesso, B un sottogruppo di Borel di G e P un sottogruppo parabolico di G , allora

1. $N_G(B) = B$ e $N_G(P) = P$.
2. P è connesso.

Sia \mathcal{B} la famiglia dei sottogruppi di Borel di un gruppo algebrico G . Allora G agisce per coniugio (e transitivamente) su \mathcal{B} . Per il Teorema (5.32) abbiamo $\text{stab}_G(B) = N_G(B) = B$, da cui deduciamo il seguente risultato.

Corollario 5.33. Sia B un sottogruppo di Borel di un gruppo algebrico G . Esiste una corrispondenza biunivoca tra la famiglia \mathcal{B} e il quoziente G/B , data da

$$\begin{aligned} G/B &\longrightarrow \mathcal{B} \\ gB &\longmapsto gBg^{-1}. \end{aligned}$$

5.4 Esempi di sottogruppi di Borel e Parabolici

Citiamo il seguente teorema per la sua utilità in alcuni degli esempi:

Teorema 5.34 (Witt). Se V spazio vettoriale, b forma simmetrica non degenera, W_1, W_2 sottospazi di V e $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ isomorfismo che preserva b , allora φ si estende a V e continua a preservare b .

5.4.1 Matrici invertibili

Fissiamo $G = \text{GL}(n)$.

Esempio 5.35 (Borel di $\text{GL}(n)$ sono le matrici triangolari). Consideriamo il sottogruppo B_n di G . Sappiamo che B_n è connesso e risolubile. Mostriamo che è massimale (e quindi un sottogruppo di Borel).

Sia H un sottogruppo risolubile connesso contenente B_n . Essendo risolubile e connesso, H si triangolarizza rispetto a una bandiera $F_1 \subset \dots \subset F_n$. Poiché $H \cdot F_i = F_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha anche $B \cdot F_i = F_i$ per ogni indice i . Poiché B_n è lo stabilizzatore in G della bandiera $F_1 \subset \dots \subset F_n$, si ottiene $H = B_n$.

Esempio 5.36 (Sottogruppi parabolici di $\text{GL}(n)$). Abbiamo visto che se P è un sottogruppo di G contenente B_n , allora P è un sottogruppo parabolico di G . Se P è il sottogruppo costituito dalle matrici triangolari superiori con blocchi sulla diagonale di

tipo $h \times h$ e $k \times k$, sappiamo che G/P è in corrispondenza biunivoca con $\text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$, sulla quale G agisce transitivamente e per cui $\text{stab}_G \langle e_1, \dots, e_h \rangle = P$. Quindi $\text{Gr}(h, \mathbb{K}^n)$ è una varietà proiettiva. Vogliamo descrivere una sua immersione esplicita in $\mathbb{P}(V)$ per qualche spazio vettoriale V . Per farlo, dobbiamo trovare uno spazio vettoriale V contenente una retta L fissata da P . Consideriamo $V = \bigwedge^h(\mathbb{K}^n)$ e $L = \bigwedge^h W$, dove W è il sottospazio generato da e_1, \dots, e_h . Abbiamo già visto che, fissato g in G , si ha $gL = L$ se e solo se $gW = W$. Quindi $\text{stab}_G L = \text{stab}_G W = P$. Dunque

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & \bigwedge^h U & & \\
 & & & & \\
 gW & & \text{Gr}(h, \mathbb{K}^n) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(V) \\
 \uparrow & & \updownarrow & & \\
 & & G/P & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(v) \\
 & & & & \\
 g & \xrightarrow{\quad} & gL = (g \bigwedge^h W) = (\bigwedge^h gW) & &
 \end{array}$$

Descriviamo questa mappa in coordinate. Presa

$$U = (v_1 | \dots | v_h) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_h = \sum_{i_1 < \dots < i_h} p_{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}$$

dove p_{i_1, \dots, i_h} è il determinante del minore di $(v_1 | \dots | v_h)$ identificato dalle righe i_1, \dots, i_h e

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_h = \det(v_1 | \dots | v_h) e_1 \wedge \dots \wedge e_h.$$

Quindi si ha

$$U = \langle v_1, \dots, v_h \rangle \longrightarrow [p_I(v_1, \dots, v_h)]_{I=\{i_1 < \dots < i_h\}}$$

Se $U = \langle w_1, \dots, w_h \rangle$, allora esiste una matrice invertibile A di taglia h tale che $MA = N$, dove $N = (w_1 | \dots | w_h)$. Si ha

$$\begin{aligned}
 p_I(M) &= \det(M_{i_1, \dots, i_h}) \\
 p_I(N) &= \det(N_{i_1, \dots, i_h}) = \det(M_{i_1, \dots, i_h} \cdot A) = p_I(M) \det(A).
 \end{aligned}$$

Infine $(v) \longrightarrow [p_I(M)]$ e $(w) \longrightarrow [p_I(N)] = [p_I(M) \det(A)] = [p_I(M)]$.

Esempio 5.37 (Parabolici di $\text{GL}(n)$). Sia $P \supseteq B$ con P parabolico e B di Borel, P connesso.

Guardiamo $T_e P$ e notiamo che $T_e P \supseteq T_e B = \{\text{triang. sup.}\}$. Sia $A = (a_{i,j}) \in T_e P$. Si ha che B agisce per coniugio su P . In particolare se fissiamo $b \in B$ allora definiamo

$$Ad_b : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ p & \longmapsto & bpb^{-1} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad Ad_b : \begin{array}{ccc} T_e P & \longrightarrow & E_e P \\ C & \longmapsto & bCb^{-1} \end{array}$$

quindi $T_e P \subseteq T_e \text{GL}(n) = \text{Mat}_{n \times n}$ è stabile per Ad_b per ogni $b \in B$. Se $b = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora

$$Ad_b(A) = (\lambda_i \lambda_j^{-1} a_{i,j})$$

se $a_{i,j} \neq 0$ allora $E_{i,j} \in T_e P$

5.4.2 Matrici ortogonali speciali

Ora consideriamo $G = \text{SO}(n)$. Cerchiamo di capire come è definito questo gruppo

$$\boxed{n=1} \quad G = \{1\}.$$

$\boxed{n=2}$ Scegliamo la forma quadratica $q(x, y) = xy$. Lo stabilizzatore di tale forma è dato da

$$\left\{ A \in \text{SO}(2) : A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Imponendo che A sia nello stabilizzatore della forma q , si trova $b = c = 0$. Poiché $\det(A) = 1$, troviamo $d = a^{-1}$ e quindi $\text{SO}(2)$ è isomorfo a \mathbb{K}^\times .

$\boxed{n=3}$ Mostriamo che

$$\text{SO}(3) \cong \text{SL}(2)/\{\pm I\}.$$

Proposizione 5.38. $\text{SO}(3) \cong \text{SL}(2)/\{\pm I\}$.

Dimostrazione.

Sappiamo che $\text{SL}(2)$ agisce su $W := \mathbb{K}^2$. Consideriamo la rappresentazione $W \otimes W = S^2W \oplus \bigwedge^2 V$. Consideriamo la forma bilineare e simmetrica

$$b(u \otimes u', v \otimes v') = \det(u, v) \det(u', v').$$

Tale forma è $\text{SL}(2)$ -invariante, infatti, se g è in $\text{SL}(2)$, allora $\det(g) = 1$ e quindi

$$\begin{aligned} b(gu \otimes gu', gv \otimes gv') &= \det(gu, gv) \det(gu', gv') = \\ &= \det(g)^2 b(u \otimes u', v \otimes v') = \\ &= b(u \otimes u', v \otimes v'). \end{aligned}$$

Fissiamo una base $e_{11} = e_1 \otimes e_1$, $e_{12} = e_1 \otimes e_2$, $e_{21} = e_2 \otimes e_1$, $e_{22} = e_2 \otimes e_2$. Allora

$$[b]_{e_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare b è non degenere. Inoltre, anche la restrizione $\beta := b|_{S^2W}$ è non degenere, in quanto $S^2W = \langle e_{11}, e_{22}, e_{12} + e_{21} \rangle$. Abbiamo quindi definito una mappa

$$\text{SL}(2) \rightarrow \text{SO}(\beta).$$

Imponendo $ge_{11} = e_{11}$ e $ge_{22} = e_{22}$, troviamo $g = \pm I$, quindi abbiamo un'immersione $\text{SL}(2)/\{\pm I\} \hookrightarrow \text{SO}(\beta)$. Mostriamo che è suriettiva. Osserviamo che $\text{GL}(2)$ è isomorfo (come varietà) a $\text{SL}(2) \times \mathbb{K}^\times$ tramite la mappa $(A, \lambda) \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi $\dim \text{SL}(2) = 3$. Calcoliamo la dimensione di $\text{SO}(\beta)$ (e in generale di $\text{SO}(n)$). Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & \text{Mat}_{n \times n} \\ A & \longmapsto & A^\top A \end{array}.$$

Allora $O(n) = \varphi^{-1}(I)$. Quindi abbiamo una mappa tra gli spazi tangenti a I data da

$$T : \begin{array}{ccc} T_I \text{Mat}_{n \times n} & \longrightarrow & T_I \text{Mat}_{n \times n} \\ B & \longmapsto & B + B^\top \end{array}$$

Quindi $T_I O(n) = \ker T$. Quindi $\dim SO(n) = \binom{n}{2}$ e in particolare $\dim SO(3) = 3 = \dim SL(2)$. Inoltre, il quoziente $SL(2)/\{\pm I\}$ coincide con la componente connessa di $SO(\beta)$, quindi è sufficiente mostrare che $SO(\beta)$ (e più in generale $SO(n)$) è connesso.

Procediamo per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ e $n = 2$ sappiamo già che ciò è vero. Assumiamo $n > 2$. Consideriamo la forma quadratica standard rappresentata dalla matrice identità, consideriamo e_1 in \mathbb{K}^n e

$$Y := SO(n) \cdot e_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \right\}$$

Poiché il polinomio $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ è irriducibile, la varietà Y è connessa. Inoltre si ha $Y \cong SO(n)/SO(n-1)$, che, in quanto connesso, ci permette di concludere. \square

Ricordiamo che $SO(3) \cong SL(2)/\{\pm I\}$. Sia

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subseteq SL(2)$$

Notiamo che $SL(2)$ agisce su \mathbb{P}^1 transitivamente e che lo stabilizzatore di $[e_1]$ è B .

Più precisamente, sia $V = \mathbb{K}^2$ e $L = [e_1] \in \mathbb{P}(V)$. Poniamo

$$W = S^n \mathbb{K}^2 = S^n V$$

e, notando che $e_1^n \in W$, si ha $\text{stab}_G[e_1^n] = B$.

Possiamo descrivere il quoziente anche come

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1 \cong G/B = G[e_1^n] \subseteq \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(S^n V)$$

dove l'immersione è data da $v \mapsto v^n$. Questa mappa è un morfismo equivariante e una immersione chiusa $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$.

Osservazione 5.39. Se $n = 2$ allora

$$SO(3)/B_{SO(3)} = \frac{SL(2)/\pm id}{B_{SL}/\pm id} = \frac{SL(2)}{B_{SL}}.$$

Lo spazio $V = \mathbb{K}^2$ non è una rappresentazione di $SO(3)$ perché $-id$ non agisce banalmente, ma $S^2 V$ è una rappresentazione di $SO(3)$.

Esempio 5.40. Consideriamo la forma quadratica $x_1 x_3 = x_2^2$, lo spazio $V = \mathbb{K}^3$ e la retta $L = \mathbb{K}(1 \ 0 \ 0)^\top$. In $\mathbb{P}(V)$ si ha che $G \cdot L$ è la quadrica $Q : x_1 x_3 = x_2^2$ per il teorema di Witt (5.34).

Notiamo anche che $\text{stab}(L) = B$, quindi abbiamo una mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Q \\ [a : b] & \longmapsto & [a^2 : ab : b^2] \end{array}.$$

5.4.3 Matrici del gruppo lineare speciale

Sia $G = \mathrm{SL}(n)$ e ricordiamo che il sottogruppo delle matrici triangolari superiori B è un sottogruppo di Borel.

$$G/B \cong \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}$$

Definizione 5.41. Definiamo la **varietà delle bandiere** di taglia n come

$$\mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}(n)} = \mathrm{SL}(n)/B_{\mathrm{SL}(n)} = \mathcal{F}\ell = \{F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \mid \dim F_i = i\}.$$

Vogliamo un risultato analogo per $\mathrm{SO}(n)$

Osservazione 5.42. Se consideriamo la forma quadratica $q = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ e interseco $\mathrm{SO}(n) = \{A \mid A^\top A = I, \det A = 1\}$ con $B_{\mathrm{SL}(n)}$ troviamo

$$T^\top T = I \quad e \quad T \text{ triangolare superiore} \implies T \text{ diagonale con entrate } \pm 1.$$

Consideriamo la forma quadratica associata a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $\mathrm{SO}(n) = \{A \mid AJA^\top = J, \det A = 1\}$.

Proposizione 5.43. Il sottogruppo di questo $\mathrm{SO}(n)$ dato da

$$B = B_{\mathrm{SO}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), A \text{ triang. sup.} \right\},$$

dove M^{at} indica la trasposta di M rispetto all'altra diagonale, è un sottogruppo di Borel.

Dimostrazione.

Assumiamo $n = 2m$, il caso dispari è simile.

Notiamo che $Jg^\top J = g^{at}$, cioè la trasposta di g rispetto all'altra diagonale. Scrivendo g triangolare superiore evidenziando blocchi di dimensione m troviamo

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Poiché $g \in \mathrm{SO}(n)$ significa che $gg^{at} = id$ con determinante 1, g triangolare superiore appartiene a $\mathrm{SO}(n)$ se

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{at} & B^{at} \\ 0 & A^{at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^{at} & AB^{at} + BA^{at} \\ 0 & DA^{at} \end{pmatrix}$$

ovvero se $D = (A^{at})^{-1}$ e $(BA^{at})^{at} = -(BA^{at})$. Il determinante di g è automaticamente 1 perché⁴ $\det D = (\det A)^{-1}$. Dunque l'intersezione tra $\mathrm{SO}(n)$ e le triangolari superiori è

$$B = B_{\mathrm{SO}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid D = (A^{at})^{-1}, (BA^{at})^{at} = -(BA^{at}), A \text{ triang. sup.} \right\}.$$

Notiamo che B_{SO} è risolubile e connesso⁵. Se dimostriamo che B è parabolico allora è un sottogruppo di Borel per (5.30).

Sia \mathcal{E} la bandiera data dai vettori di base

$$E_1 = \langle e_1 \rangle \subseteq E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \cdots \subseteq E_n = \langle e_1, \dots, e_{2m} \rangle = \mathbb{K}^n.$$

Notiamo che $\mathrm{stab}_{\mathrm{GL}(n)}(\mathcal{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)}$ e che $\mathrm{stab}_{O(n)}(\mathcal{E}) = B_{\mathrm{GL}(n)} \cap O(n) = B_{O(n)} = B_{\mathrm{SO}(n)}$, dove l'ultima uguaglianza segue perché tutte le matrici ortogonali triangolari superiori per la forma associata a J hanno già determinante 1. Notiamo che

$$O(n)\mathcal{E} \subseteq \{0 = F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_{2m} \mid \dim F_i = i, F_{m-i}^\perp = F_{m+i} \forall i \in \{0, \dots, m\}\} \subseteq \mathcal{F}\ell.$$

Per il teorema di Estensione di Witt (5.34) si ha che $O(n)\mathcal{E}$ è esattamente lo spazio delle bandiere di quella forma, che chiamiamo \mathcal{F}_O e notiamo che è un chiuso di $\mathcal{F}\ell$.

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{F}_{\mathrm{SO}}$ è chiuso. Sia

$$\mathcal{G}_O = \{g \in \mathrm{GL}(n) \mid gB_{\mathrm{GL}} \in \mathcal{F}_O\}$$

Poiché $\mathcal{F}\ell = \mathrm{GL}(n)/B_{\mathrm{GL}}$ basta mostrare che \mathcal{G}_O è chiuso. Sia $g = (v_1 \mid \cdots \mid v_{2m})$ e notiamo che $g \in \mathcal{G}_O$ se $b(v_i, v_j) = 0$ per $i, j \leq m$, $b(v_{m+\alpha}, v_i) = 0$ per $i \leq m - \alpha$ e $b(v_i, v_j) = 0$ se $i + j \leq 2m$. Queste sono condizioni chiuse quindi \mathcal{G}_O è chiuso. Questo mostra che

$$O(n)/B_{\mathrm{SO}(n)}$$

è proiettivo. □

Osservazione 5.44. Con le notazioni di sopra,

$$O(n) = \frac{\mathrm{SO}(n) \sqcup g\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}(n)}}$$

per una qualsiasi g tale che $\det g = -1$, $g \in O(n)$, dunque

$$\frac{O(n)}{B_{\mathrm{SO}}} = \frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}} \sqcup g \frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}}$$

e quindi $\frac{\mathrm{SO}(n)}{B_{\mathrm{SO}}}$ è proiettivo.

Vogliamo descrivere la componente data da $\mathrm{SO}(2m)/B$.

Teorema 5.45. Sia $V = \mathbb{K}^{2m}$ munito di una forma bilineare, simmetrica e non degenera $b(\cdot, \cdot)$. Siano L, M sottospazi isotropi (lagrangiani) di V tali che $\dim L = \dim M$. Allora

$$\exists g \in \mathrm{SO}(V): gL = M \iff \dim(L \cap M) \equiv m \pmod{2}.$$

⁴ $\det M^{at} = \det(JM^\top J) = 1 \cdot \det M^\top \cdot 1 = \det M$.

⁵connesso perché immagine di $\{\text{triang. sup. invertibili}\} \times \{\text{antisimmetriche per l'altra diagonale}\}$

Dimostrazione.

Scegliamo una base $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m}$ di V tale che e_1, \dots, e_m è base di L e tale che b è rappresentata in questa base dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre $L' = \langle e_1, \dots, e_{m-1}, e_{2m} \rangle$. Notiamo che L' è isotropo. Mostriamo che se g è un elemento di $\text{SO}(2m)$, allora

$$\dim(gL \cap L) \equiv m \pmod{2} \quad (5.4.1)$$

$$\dim(gL \cap L') \not\equiv m \pmod{2} \quad (5.4.2)$$

Iniziamo mostrando la (5.4.1). Sia P il sottogruppo di $\text{SO}(V)$ costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Notiamo che una matrice di questa forma è in $\text{SO}(V)$ se e solo se $A^\top = C^{-1}$ e $B^\top C + C^\top B = 0$, per cui

$$\dim P = \dim \text{GL}(m) + \binom{m}{2} = m^2 + \binom{m}{2}.$$

Sia U il sottogruppo di $\text{SO}(V)$ costituito dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix}$$

Osserviamo che una matrice di questo tipo appartiene a $\text{SO}(V)$ se e solo se $X^\top = -X$, cioè se e solo X è antisimmetrica, quindi $\dim U = \binom{m}{2}$. Ne consegue che $\dim P + \dim U = 2m^2 - m$. Ricordiamo che $\dim \text{SO}(2m) = \dim \text{O}(2m) = 2m^2 - m$, infatti la mappa

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(2m) & \longrightarrow & \text{Sim}(2m) \\ A & \longmapsto & AA^\top \end{array}$$

è surgettiva e ha nucleo $\text{O}(2m)$, che quindi ha dimensione $4m^2 - \binom{2m+1}{2} = 2m^2 - m$. Consideriamo la mappa $U \times P \rightarrow \text{SO}(V)$ data da

$$\begin{array}{ccccc} U \times P & \xrightarrow{\sim} & U \times P & \longrightarrow & \text{SO}(V) \\ (u, p^{-1}) & \longmapsto & (u, p) & \longmapsto & uIp \\ (u, p) & \longmapsto & (u, p^{-1}) & \longmapsto & uIp^{-1} \end{array}$$

Ora UP è aperto in \overline{UP} e poiché $U \cap P = \{I_{2m}\}$, si ha

$$\dim(UP) = \dim(U \times P) = \dim \text{SO}(2m),$$

da cui $\overline{UP} = \text{SO}(2m)$. Consideriamo gli aperti $V_1 = UP$ e $V_2 = PU$ in $\text{SO}(2m)$. Mostriamo che $V_2 V_1 = \text{SO}(2m)$. Sia g in $\text{SO}(2m)$ e sia v_2 nell'intersezione $V_2 \cap gV_2$ (che è non vuota in quanto V_1 e V_2 sono aperti in una varietà irriducibile). Allora $v_2 = gv'_2$ per qualche v'_2 in V_2 . Poiché $(v'_2)^{-1} \in UP = V_1$, si ha $g = v_2(v'_2)^{-1} \in V_2 V_1$. Ne deduciamo che

$$\text{SO}(2m) = PU \cdot UP = PUP$$

e quindi, posto $g = p_1 u p_2$, si ha

$$\dim(gL \cap L) = \dim(p_1 u p_2 L \cap L) = \dim(u p_2 L \cap p_1^{-1} L) = \dim(uL \cap L).$$

Quindi ci siamo ridotti a considerare il caso di un elemento

$$u = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} \in U.$$

Osserviamo che, poiché $L = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$, si ha

$$uL = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} e_i, \ i = 1, \dots, m \right\},$$

quindi

$$uL \cap L = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} v \\ Xv \end{pmatrix}, \ v \in \mathbb{K}^m : Xv = 0 \right\} \cong \ker X,$$

da cui $\dim(uL \cap L) = \dim(\ker X) = m - \text{rk}(X) \equiv m \pmod{2}$ perché le matrici antisimmetriche hanno rango pari.

Mostriamo la (5.4.2). Sia g un elemento in $O(2m)$. Sappiamo che se g è in $SO(2m)$, allora $\dim(gL \cap L) \equiv m \pmod{2}$; se invece g non è in $SO(2m)$, allora $\dim(gL \cap L) \not\equiv m \pmod{2}$. Sia h in $O(2m) \setminus SO(2m)$ che scambia e_m con e_{2m} e lascia fissi gli altri e_i . Allora $L' = hL$ ed esiste \tilde{g} in $SO(2m)$ tale che $g = h\tilde{g}$. Dunque

$$\dim(gL \cap L) = \dim(h\tilde{g}L \cap L) = \dim(\tilde{g}L \cap L') \not\equiv m \pmod{2}$$

e ciò conclude la dimostrazione. \square

Esempio 5.46 (Caso $m = 1$). Consideriamo $V = \mathbb{K}^2$ munito della forma bilineare la cui forma quadratica associata è data da xy . Allora i sottospazi isotropi $\mathbb{K}e_1$ e $\mathbb{K}e_2$ si intersecano banalmente e quindi non vengono scambiati dagli elementi di $SO(V)$. In effetti

$$SO(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{K}^\times \right\}.$$

Esempio 5.47 (Caso $m = 2$). Consideriamo \mathbb{K}^4 con la forma quadratica $x_1x_4 - x_2x_3$. Cerchiamo i sottospazi di dimensione 2 contenuti nel radicale della forma: cerchiamo quindi rette in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$ contenute nella quadrica $x_1x_4 = x_2x_3$. Questa quadrica corrisponde a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tramite la mappa $([a : b], [c : d]) \mapsto [ac : ad : bc : bd]$. Il gruppo $SO(4)$ agisce su ciascun fattore \mathbb{P}^1 , ma non scambia i due fattori tra loro.

Parte III

Fibrati

Capitolo 6

Fibrati vettoriali

Definizione 6.1. Un **fibrato vettoriale** di rango m su una varietà X è una mappa $p: E \rightarrow X$ che soddisfa le seguenti proprietà. Lo spazio

$$E \times_X E := \{(a, b) \in E \times E \mid p(a) = p(b)\}$$

è munito di una mappa somma $+: E \times_X E \rightarrow E$ e di un prodotto per scalare $\cdot: \mathbb{K} \times_X E \rightarrow E$ tali che, detta $q: E \times_X E \rightarrow X$ la proiezione $q(a, b) := p(a) = p(b)$, i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{array}{ccc} E \times_X E & \xrightarrow{+} & E \\ & \searrow q \quad \swarrow p & \\ & X & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times_X E & \xrightarrow{\cdot} & E \\ & \searrow p \quad \swarrow p & \\ & X & \end{array}$$

Inoltre vale una condizione di trivializzazione locale, cioè per ogni x in X esiste un intorno U di x e una mappa lineare sulle fibre tale che

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & U \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_U & \\ & U & \end{array}$$

Esempio 6.2. $X \times \mathbb{K}^m$ con la mappa di proiezione su X è un fibrato vettoriale, detto **fibrato banale**.

Esempio 6.3. Sia $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ e consideriamo

$$E = \{(\ell, v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{K}^2 : v \in \ell\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$$

dove la somma è data da $(\ell, v) + (\ell, w) = (\ell, v + w)$. Questo è detto il **fibrato tautologico**.

Esercizio 6.4. Consideriamo la coppia (E, p) dell'esempio precedente. Mostrare che

1. È un fibrato vettoriale.

2. Non è il fibrato banale¹.

6.1 Cocicli e banalizzazioni

Osservazione 6.5. Se $p : E \rightarrow X$ è un fibrato vettoriale su X di rango m allora esiste un ricoprimento (finito) $\{U_i\}$ di X tale che per ogni i

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

Definizione 6.6 (Cocicli). Dato un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di X definiamo gli **1-cocicli** relativi al ricoprimento come

$$Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) = \{ \{ \alpha_{i,j} \} \mid \alpha_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \text{GL}(m), \alpha_{i,h} = \alpha_{j,h} \alpha_{i,j}, \alpha_{i,i}(u) = I_m \}.$$

Proposizione 6.7. Se \mathcal{U} è un ricoprimento banalizzante per il fibrato $p : E \rightarrow X$ allora esso definisce dei cocicli indotti dalle mappe di transizione.

Dimostrazione.

Se $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ allora abbiamo degli isomorfismi²

$$\varphi_{i,j} = \varphi_j|_{U_{i,j}} \circ \varphi_i|_{U_{i,j}}^{-1} : U_{i,j} \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_{i,j} \times \mathbb{K}^m$$

Sia $\varphi_{i,j}(u, v) = (u, \alpha_{i,j}(u)(v))$. Questo definisce delle mappe regolari

$$\alpha_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \text{GL}(m).$$

Notiamo inoltre che su $U_{i,j,h} \times \mathbb{K}^m$

$$\varphi_{j,h} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_h \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_{i,h}.$$

Vedendo queste identità in termini delle $\alpha_{i,j}$ abbiamo mostrato

$$\alpha_{i,h}(u) = \alpha_{j,h}(u) \alpha_{i,j}(u).$$

Chiaramente $\varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = id_{U_i \times \mathbb{K}^m}$ quindi $\alpha_{i,i}(u) = I_m$. □

Proposizione 6.8. Sia \mathcal{U} un ricoprimento di X . Una collezione di cocicli $\alpha \in Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m))$ determina un fibrato vettoriale su X .

¹Una intuizione geometrica importante (seppur lontana da essere una dimostrazione) che giustifica la non banalità è che il fibrato banale di rango 1 “topologicamente” è un cilindro mentre il fibrato tautologico è un nastro di Möbius.

²da ora in poi eviteremo di scrivere ogni volta le restrizioni

Dimostrazione.

Definiamo lo spazio totale come il seguente coprodotto fibrato

$$E_\alpha := \frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{(u, v) \sim (u, \alpha_{i,j}(u)(v))}.$$

Siano $\psi_i : U_i \times \mathbb{K}^m \rightarrow E_\alpha$ le mappe ovvie verso il coprodotto.

Su E_α imponiamo la seguente topologia: V è aperto in E_α se e solo se $\psi_i^{-1}(V)$ è aperto in $U_i \times \mathbb{K}^m$ per ogni i .

Se V è aperto in E_α allora, poiché la regolarità è una condizione locale, si ha

$$f \in \mathcal{O}_{E_\alpha}(V) \iff f \circ \psi_i \in \mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(V)) \quad \forall i.$$

Affermiamo che ψ_i è iniettiva, aperta e regolare per ogni i :

Iniettiva Supponiamo $\psi_i(u, v) = \psi_i(u', v')$, allora

$$U_i \times \mathbb{K}^m \ni (u, v) \sim (u', v') \in U_i \times \mathbb{K}^m \xrightarrow{\alpha_{i,i} = id_{U_i}} u = u', v = v'.$$

Aperta Se $W \subseteq U_i \times \mathbb{K}^m$ aperto e $\widetilde{W} = \psi_i(W) \subseteq E_\alpha$ allora dobbiamo verificare che $\psi_j^{-1}(\widetilde{W})$ è aperto per ogni j . Consideriamo la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} (u, v) &\in \psi_j^{-1}(\widetilde{W}) \subseteq U_j \times \mathbb{K}^m \\ \psi_j(u, v) &\in \widetilde{W} = \psi_i(W) \\ \exists (u', v') &\in W \subseteq U_i \times \mathbb{K}^m \text{ t.c. } \psi_j(u, v) = \psi_i(u', v') \text{ in } E_\alpha \\ \exists (u', v') &\in W \text{ t.c. } U_j \times \mathbb{K}^m \ni (u, v) \sim (u', v') \in U_i \times \mathbb{K}^m \\ (u, \alpha_{j,i}(u)(v)) &\in W \end{aligned}$$

cioè $\psi_j^{-1}(\widetilde{W})$ è la preimmagine di W tramite la mappa $U_{i,j} \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$ che è continua.

Regolare ψ_i è continua per definizione della topologia di E_α . Essendo la regolarità una condizione locale, per come abbiamo definito la topologia su E_α anche la condizione sui pullback è chiara.

Abbiamo dunque mostrato che $\psi_i(U_i \times \mathbb{K}^m) \cong U_i \times \mathbb{K}^m$.

La struttura vettoriale sulle fibre di E_α è quella indotta dal coprodotto in modo ovvio. \square

Osservazione 6.9. Se U_i è un aperto di X che banalizza $p : E \rightarrow X$ notiamo che possono essere definiti diversi isomorfismi tra $p^{-1}(U_i)$ e $U_i \times \mathbb{K}^m$

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_i} \\ \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} \end{array} & U_i \times \mathbb{K}^m \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_{U_i} & \\ & U_i & \end{array}$$

In particolare questi definiscono diverse mappe di transizione e diversi cocicli.

Studiamo la “differenza” tra le mappe di transizione

$$\chi_i := \tilde{\varphi}_i \circ \varphi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{K}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$$

Come notazione scriviamo $\chi_i(u, v) = (u, \beta_i(u)(v))$. Notiamo che

$$\tilde{\varphi}_{i,j} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} = \tilde{\varphi}_j \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} = \chi_j \circ \varphi_{i,j} \circ \chi_i^{-1},$$

quindi in termini di cocicli $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$ o equivalentemente $\tilde{\alpha}_{i,j} \beta_i = \beta_j \alpha_{i,j}$.

Questo ci spinge a dare la seguente definizione:

Definizione 6.10 (Coomologia). Definiamo due cocicli $\alpha_{i,j}$ e $\tilde{\alpha}_{i,j}$ *equivalenti* se esiste $\beta_i : U_i \rightarrow \text{GL}(m)$ tale che $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$. Definiamo il **primo insieme di coomologia** come

$$H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) = Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)) / \sim.$$

Teorema 6.11. Se \mathcal{U} è un ricoprimento aperto di X allora abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{Fibrati vett. che si banalizzano su } \mathcal{U}\} /_{\text{iso. di fibr.}} \longleftrightarrow H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(m)).$$

Dimostrazione.

Ad un fibrato associo una collezione di cocicli e quindi una classe in coomologia. Questa associazione è ben definita perché cambiando cocicli associati alla stessa banalizzazione essi sono equivalenti.

Cambiare la classe di isomorfismo del fibrato non cambia la classe di coomologia perché l'isomorfismo sugli aperti banalizzanti induce un automorfismo che corrisponde a cambiare cocicli.

Viceversa, dati dei cocicli sappiamo costruire un fibrato come in (6.8). Se α e $\tilde{\alpha}$ sono cocicli equivalenti allora mostriamo che $E_\alpha \cong E_{\tilde{\alpha}}$ come fibrati. Se β_i sono tali che $\tilde{\alpha}_{i,j} = \beta_j \alpha_{i,j} \beta_i^{-1}$ allora abbiamo una ovvia mappa tra i fibrati

$$\frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{\sim_\alpha} \xrightarrow{\coprod id_{U_i} \times \beta_i(u)(v)} \frac{\coprod (U_i \times \mathbb{K}^m)}{\sim_{\tilde{\alpha}}}$$

che si verifica essere un isomorfismo (Esercizio). □

6.2 Operazioni sui fibrati

Definizione 6.12 (Morfismo di fibrati). Se $E \rightarrow X$ e $F \rightarrow X$ sono fibrati, un **morfismo di fibrati** $T : E \rightarrow F$ è un morfismo di varietà $E \rightarrow X$ che commuta con i cocicli. Più precisamente, definite T_i

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{T|_{E|_{U_i}}} & F|_{U_i} \\ \varepsilon_i \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\ \mathbb{K}^n \times U_i & \xrightarrow{T_i} & \mathbb{K}^m \times U_i \end{array}$$

dove ε_i e φ_i sono isomorfismi fissati, che inducono i cocicli $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_j \varepsilon_i^{-1}$ e $\varphi_{i,j} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$, chiediamo che commuti il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{K}^n \times U_{i,j} & \xrightarrow{T_j} & \mathbb{K}^m \times U_{i,j} \\ & \nearrow \varepsilon_j & \uparrow & & \uparrow \varphi_j \\ \varepsilon_{i,j} \curvearrowright & E|_{U_{i,j}} & \xrightarrow{T} & F|_{U_{i,j}} & \curvearrowleft \varphi_{i,j} \\ & \downarrow \varepsilon_i & & \downarrow \varphi_i & \\ & \mathbb{K}^n \times U_{i,j} & \xrightarrow{T_i} & \mathbb{K}^m \times U_{i,j} & \end{array}$$

cioè che valga la relazione

$$\varphi_{i,j} \circ T_i = T_j \circ \varepsilon_{i,j}.$$

Definizione 6.13 (Somma diretta). Dati due fibrati $p_E : E \rightarrow X$ e $p_F : F \rightarrow X$ possiamo definire la loro **somma diretta** come

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F \mid p_E(e) = p_F(f)\} \rightarrow X$$

dove la proiezione è definita mandando (e, f) in $x = p_E(e) = p_F(f)$.

Osservazione 6.14. $E \oplus F$ è il prodotto fibrato su X dei due fibrati.

$$\begin{array}{ccc} E \oplus F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p_F \\ E & \xrightarrow{p_E} & X \end{array}$$

Osservazione 6.15. Se $\varepsilon_{i,j}$ è un cociclo per E e $\varphi_{i,j}$ per F allora $\varepsilon_{i,j} + \varphi_{i,j}$ è un cociclo di $E \oplus F$ (stiamo considerando un ricoprimento che banalizza sia E che F).

Definizione 6.16 (Prodotto tensore). Dati due fibrati $p_E : E \rightarrow X$ e $p_F : F \rightarrow X$ possiamo definire il loro **prodotto tensore** $E \otimes F$ come il fibrato associato al cociclo

$$\varepsilon_{i,j} \otimes \varphi_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m)$$

dove $n = \mathrm{rk} E$ e $m = \mathrm{rk} F$.

Definizione 6.17 (Fibrato duale). Dato un fibrato $p : E \rightarrow X$ definiamo il **fibrato duale** come quello associato al cociclo $(\varepsilon_{i,j}^{-1})^\top : U_{i,j} \rightarrow \mathrm{GL}(n)$.

Osservazione 6.18. Abbiamo un morfismo

$$E^* \otimes E \rightarrow \mathbb{K} \times X$$

dato mandando il cociclo $\tilde{\varepsilon}_{i,j} := (\varepsilon_{i,j}^{-1})^\top \otimes \varepsilon_{i,j}$ a $h_{i,j} = 1$.

Dimostrazione.

Se ci restringiamo ad un ricoprimento $\{U_i\}$ che banalizza E definiamo

$$T_i : \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^n) \times U_i & \longrightarrow & \mathbb{K} \times U_i \\ ((\lambda \otimes v), u) & \longmapsto & (\lambda^\top v, u) \end{array}$$

e notiamo che queste T_i si incollano ad un morfismo di fibrati:

Data la definizione delle mappe di incollamento sui fibrati, verificare

$$h_{i,j} \circ T_i \circ \tilde{\varepsilon}_{i,j}^{-1} = T_j$$

mostra anche che le T_i si incollano come funzioni e questo incollamento sarà un morfismo di fibrati. La formula vale perché $h_{i,j} = 1$ e

$$T_i(\tilde{\varepsilon}_{i,j}^{-1}((\lambda, v), u)) = T_i((\varepsilon_{i,j}^\top \lambda, \varepsilon_{i,j}^{-1} v), u) = (\lambda^\top \varepsilon_{i,j} \varepsilon_{i,j}^{-1} v, u) = (\lambda^\top v, u) = T_j((\lambda \otimes v), u).$$

□

6.3 Sezioni di un fibrato

Definizione 6.19 (Sezioni di un fibrato). Dato un fibrato vettoriale $p : E \rightarrow X$ e dato un aperto U di X , definiamo le **sezioni** di U come

$$\Gamma(U, E) := \{\sigma : U \rightarrow E \mid p \circ \sigma = \mathrm{id}_U\}.$$

Osservazione 6.20. $\Gamma(U, E)$ eredita la somma dal fibrato:

$$(\sigma + \tau)(u) = \sigma(u) + \tau(u)$$

dove il membro di destra è l'immagine della coppia $(\sigma(u), \tau(u)) \in E \times_X E$ tramite la mappa $+$. Se f è in $\mathcal{O}_X(U)$ e $\sigma \in \Gamma(U, E)$, allora è definito $f \cdot \sigma$ in modo analogo.

Insieme questi fatti mostrano che $\Gamma(U, E)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo.

Esempio 6.21 (Sezioni del fibrato banale).

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{K}^m & \supseteq & U \times \mathbb{K}^m \\ \downarrow & & \downarrow p \quad \curvearrowright \\ X & \supseteq & U \end{array}$$

Consideriamo $\sigma(u) = (u, \alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u))$, dove $\alpha_i: U \rightarrow \mathbb{K}$. Allora

$$\Gamma(U, U \times \mathbb{K}^m) \cong \mathcal{O}_X(U)^m.$$

Studiamo ora le sezioni di un fibrato qualsiasi.

Proposizione 6.22. Siano $p: E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale e \mathcal{U} un ricoprimento banalizzante per questo. Dare $\sigma \in \Gamma(X, E)$ è equivalente a dare delle $\sigma_i: U_i \rightarrow \mathbb{K}^m$ per ogni aperto del ricoprimento che verificano

$$\sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i \quad (\text{condizione di cociclo})$$

dove $\alpha_{i,j}$ sono dei cocicli per il fibrato.

Dimostrazione.

Fissiamo $\varphi_i: E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^m$ e $\alpha_{i,j}$ come prima. Se $\sigma \in \Gamma(X, E)$ allora

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma|_{U_i}: U_i \rightarrow E|_{U_i}, \quad \sigma_i := \pi_{\mathbb{K}^m} \circ \varphi_i \circ \tilde{\sigma}_i$$

$$\varphi_i \circ \tilde{\sigma}_i: \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{K}^m \\ u & \longmapsto & (u, \sigma_i(u)) \end{array}$$

Su $U_{i,j}$ abbiamo

$$\tilde{\sigma}_j = \varphi_{i,j} \circ \tilde{\sigma}_i, \quad \sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i$$

quindi da σ abbiamo trovato delle $\sigma_i: U_i \rightarrow \mathbb{K}^m$ che verificano $\sigma_j = \alpha_{i,j} \sigma_i$.

Viceversa dati questi dati essi si possono incollare a $\sigma: X \rightarrow E$ perché la condizione di cociclo garantisce che le σ_i coincidano sulle intersezioni degli aperti del ricoprimento. \square

6.4 Fibrati vettoriali su varietà affini

Osservazione 6.23. Se X è una varietà affine, $A = \mathbb{K}[X]$ e E è un fibrato vettoriale di rango m su X allora $M = \Gamma(X, E)$ è un A -modulo.

Osservazione 6.24. Supponiamo che E si banalizzi su aperti affini X_i tali che $\mathbb{K}[X_i] = A_{f_i}$. Siano $\alpha_{i,j}$ i cocicli e consideriamo la mappa

$$J: \begin{array}{ccc} \bigoplus_i (A_{f_i})^m & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} (A_{f_i f_j})^m \\ (\sigma_i) & \longmapsto & (\sigma_j - \alpha_{i,j} \sigma_i) \end{array}$$

Per quanto detto $\Gamma(X, E) = \ker J$.

³ricordiamo che aperti di questo tipo formano una base per la topologia di Zariski.

Proposizione 6.25. $\Gamma(X_f, E) = \Gamma(X, E)_f$

Dimostrazione.

Su $X_f = U \subseteq X$ abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, E) & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i]^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j}]^m \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(U, E) & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i \cap U]^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j} \cap U]^m \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, E)_f & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_i]_f^m & \longrightarrow & \bigoplus \mathbb{K}[U_{i,j}]_f^m
 \end{array}$$

□

Corollario 6.26. Se E su X_f è banale allora

$$\Gamma(X, E)_f \cong \mathbb{K}[X_f]^m = (A_f)^m.$$

6.4.1 Caratterizzazione con i moduli proiettivi

Ricordiamo il seguente

Teorema 6.27. A locale e Noetheriano, M finitamente generato, allora

$$M \text{ è piatto} \iff M \text{ è proiettivo} \iff M \text{ è libero}.$$

Lemma 6.28. Sia A un anello, X un A modulo e M un A -modulo finitamente presentato, allora per \mathfrak{m} massimale di A abbiamo un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathrm{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) \\
 \varphi/s & \longmapsto & \frac{u}{t} \mapsto \frac{\varphi(u)}{st}
 \end{array}$$

Dimostrazione.

Se M è libero allora la tesi è vera in quanto

$$(\mathrm{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} \cong (X^n)_{\mathfrak{m}} = X_{\mathfrak{m}}^n \cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}^n, X_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}})$$

e la mappa data è questo isomorfismo.

Se ora $A^h \rightarrow A^k \rightarrow M \rightarrow 0$ è una presentazione finita di M costruiamo il diagramma commutativo con righe esatte⁴

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M, X)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A^k, X)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A^h, X)_{\mathfrak{m}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A_{\mathfrak{m}}^k, X_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A_{\mathfrak{m}}^h, X_{\mathfrak{m}})
 \end{array}$$

⁴le righe sono esatte per esattezza della localizzazione e esattezza a sinistra degli Hom

Poiché le due mappe a destra sono isomorfismi anche la prima lo è per diagram chasing. \square

Teorema 6.29. Sia A Noetheriano e M finitamente generato. Le seguenti sono equivalenti

1. M è proiettivo
2. M è piatto
3. $M_{\mathfrak{m}}$ è libero per ogni \mathfrak{m} massimale in A
4. M è localmente libero, cioè esistono $f_1, \dots, f_n \in A$ tali che $(f_1, \dots, f_n) = A$ e M_{f_i} è libero.

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

1. \implies 2. ovvio.
2. \implies 3. ovvio per il teorema (6.27) dato che $A_{\mathfrak{m}}$ è locale e $M_{\mathfrak{m}}$ sarebbe piatto finitamente generato su locale noetheriano, quindi libero.
4. \implies 3. Se \mathfrak{m} è massimale esiste f_i che non appartiene a \mathfrak{m} . Allora $M_{\mathfrak{m}} = (M_{f_i})_{\mathfrak{m}}$ ma M_{f_i} è libero.
3. \implies 1. Mostriamo che $\text{Hom}_A(M, \bullet)$ è esatto. Consideriamo una successione esatta corta di moduli

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

e mostriamo che

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Z) \rightarrow 0$$

è esatta. Per fare ciò basta mostrare che per ogni \mathfrak{m} massimale è esatta

$$0 \rightarrow (\text{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} \rightarrow (\text{Hom}_A(M, Y))_{\mathfrak{m}} \rightarrow (\text{Hom}_A(M, Z))_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$$

Per il lemma (6.28) la mappa

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_A(M, X))_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) \\ \varphi/s & \longmapsto & \frac{u}{t} \mapsto \frac{\varphi(u)}{st} \end{array}$$

è un isomorfismo (poiché A noetheriano si ha che M è finitamente generato esattamente se è finitamente presentato). Otteniamo dunque un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M, X)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Y)_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Z)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(M_{\mathfrak{m}}, Z_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

con mappe verticali date da isomorfismi, dunque la riga sopra è esatta se e solo se la riga sotto lo è, ma la riga sotto è esatta perché $M_{\mathfrak{m}}$ è libero (e quindi proiettivo).

3. \implies 4. Mostriamo che per ogni \mathfrak{m} esiste $f \notin \mathfrak{m}$ tale che M_f è libero come A_f modulo. Questo è sufficiente perché $X = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\text{max}}(A)} X_f$ per queste f e per compattezza estraiamo un sottoricoprimento finito. Le f_i corrispondenti a questo ricoprimento per costruzione sono della forma cercata.

Mostriamo il claim: Poiché $M_{\mathfrak{m}}$ è libero esso ha una base m_1, \dots, m_n . Consideriamo la mappa

$$0 \rightarrow A_{\mathfrak{m}}^n \xrightarrow{\alpha} M_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$$

che manda v_i in m_i , dove v_1, \dots, v_n è la base canonica di $A_{\mathfrak{m}}^n$. Per definizione della localizzazione esiste $f \notin \mathfrak{m}$ tale che

$$v_i = \frac{u_i}{f}, \quad m_i = \frac{x_i}{f}, \quad \text{per degli } u_i \in A^n, \quad x_i \in M.$$

Segue dunque che abbiamo una successione esatta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A_f^n \rightarrow M_f \rightarrow 0$$

dato che l'unico elemento che appare al denominatore è f .

Notiamo che K è finitamente generato per Noetherianità, per esempio da w_1, \dots, w_t , e che $K_{\mathfrak{m}} = 0$, dunque esiste $g \notin \mathfrak{m}$ tale che $gw_i = 0$ per ogni i , cioè $K_g = 0$. Se allora localizziamo la successione di prima troviamo una nuova successione esatta

$$0 \rightarrow K_g \rightarrow A_{fg}^n \rightarrow M_{fg} \rightarrow 0$$

ma dato che $K_g = 0$ abbiamo dimostrato che M_{fg} è libero. Per costruzione $fg \notin \mathfrak{m}$ in quanto il complementare di \mathfrak{m} è una parte moltiplicativa. □

Corollario 6.30. Se $p : E \rightarrow X$ è un fibrato vettoriale e $M = \Gamma(X, E)$ allora M è proiettivo.

Dimostrazione.

Ricordando (6.26) che $\Gamma(X_f, E) = M_f$, se scegliamo un ricoprimento $\{X_f\}$ che banalizza $E \rightarrow X$ si ha che M_f è libero, dunque abbiamo mostrato che M è localmente libero, che implica proiettivo per il teorema (6.29) se M è finitamente generato.

Poiché ogni M_{f_i} (dove f_1, \dots, f_n determinano il ricoprimento banalizzante) è finitamente generato (libero di rango pari al rango del fibrato), esistono $m_1, \dots, m_T \in M$ tali che m_1, \dots, m_T generano M_{f_i} per ogni i . Se $N = \langle m_1, \dots, m_T \rangle \subseteq M$ si ha che $N_{f_i} = M_{f_i}$ per ogni f_i per costruzione, dunque localizzando ulteriormente $N_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}$ per ogni \mathfrak{m} massimale e quindi $N = M$. □

Definizione 6.31 (Rango di un modulo proiettivo). Sia P un modulo proiettivo. Affermiamo n è il **rango** di P se per ogni \mathfrak{m} massimale $P_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}^n$.

Proposizione 6.32. A un A -modulo proiettivo P di rango n corrisponde un fibrato vettoriale di rango n sulla varietà associata ad A .

Dimostrazione.

Poiché P è proiettivo esistono f_1, \dots, f_N tali che $(f_1, \dots, f_N) = A$ e $P_{f_i} \cong A_{f_i}^n$. Sia $\alpha_i : P_{f_i} \rightarrow A_{f_i}^n$ un fissato isomorfismo. Questi isomorfismi si restringono a isomorfismi $P_{f_i f_j} \rightarrow A_{f_i f_j}^n$, quindi possiamo definire

$$\alpha_{i,j} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} \in \text{GL}(A_{f_i f_j}^n).$$

Per definizione $\alpha_{ih} = \alpha_{jh} \alpha_{ij}$. Ricordiamo che

$$A_{f_i f_j} = \mathcal{O}(X_{f_i f_j}) = \mathcal{O}(X_{f_i} \cap X_{f_j})$$

quindi effettivamente $\alpha_{i,j} : X_{f_i f_j} \rightarrow \text{GL}_n(\mathcal{O}(X_{f_i f_j}))$. Avendo verificato la condizione di cociclo si ha che questo definisce un fibrato. \square

Possiamo dare una descrizione più concreta di questo fibrato:

Osservazione 6.33 (Costruzione intrinseca del fibrato).

Sia P un modulo proiettivo e consideriamo il duale

$$P^* = \text{Hom}_A(P, A)$$

e poi l'algebra simmetrica

$$\text{Sym}_A P^* = \frac{A \oplus (P^*) \oplus (P^* \otimes_A P^*) \oplus \dots}{(u \otimes v - v \otimes u)}.$$

Chiaramente $\text{Sym}_A P^*$ è un anello. Si può verificare che esso è finitamente generato e ridotto, quindi è l'anello di coordinate di una varietà affine E .

Notiamo che se P è libero allora $\text{Sym}_A P^*$ è un anello di polinomi: chiamiamo x_1, \dots, x_n i generatori di P^* duali alla base di P , allora è evidente che

$$\text{Sym}_A P^* = A[x_1, \dots, x_n] = A \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathcal{O}(X \times \mathbb{K}^n).$$

Quindi E è coperto da intorni della forma $X \times \mathbb{K}^n$ e la mappa di proiezione è quella ovvia.

Teorema 6.34. C'è una corrispondenza biunivoca

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Moduli proiettivi su } A \\ \text{di rango } n \end{array} \right\} \Big/_{iso.} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fibrati vettoriali su } X \\ \text{di rango } n \end{array} \right\} \Big/_{iso.}$$

e la mappa dal fibrato E ai moduli è $E \mapsto \Gamma(X, E)$.

6.5 Fibrati vettoriali sulla retta proiettiva

6.5.1 Fibrati lineari

Notazione. Scriviamo $\mathbb{A}^1 \cong U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ e $\mathbb{A}^1 \cong U_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$, da cui

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \cong U_{0,\infty} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}.$$

Scriviamo dunque $\mathbb{K}[U_0] = \mathbb{K}[z]$, $\mathbb{K}[U_\infty] = \mathbb{K}[w]$ e $\mathbb{K}[U_{0,\infty}] = \mathbb{K}[z, z^{-1}]$ con $w = z^{-1}$.

Osservazione 6.35. Rispetto a questo ricoprimento i cocicli sono

$$Z^1(\mathcal{U}) = \{\alpha_{0,\infty} : U_{0,\infty} \rightarrow \mathrm{GL}(1)\} = \left\{ \begin{array}{ccc} U_{0,\infty} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(1) \\ z & \longmapsto & \lambda z^n \end{array} \mid n \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{K}^\times \right\}$$

A priori sono mappe della forma $z \mapsto p(z)$ ma se comparissero più monomi allora ci sarebbero radici diverse da 0, quindi esisterebbe $a \in U_{0,\infty}$ tale che $p(a) = 0 \notin \mathrm{GL}(1)$.

Osservazione 6.36. Si ha

$$H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(1)) = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Dimostrazione.

Se $\alpha = \lambda z^n$ e $\tilde{\alpha} = \mu z^m$ sono cocicli equivalenti allora esistono $\beta_0 : U_0 \rightarrow \mathrm{GL}(1)$ e $\beta_\infty : U_\infty \rightarrow \mathrm{GL}(1)$ tali che

$$\mu z^m = \tilde{\alpha} = \beta_\infty \alpha \beta_0^{-1} = \lambda \beta_\infty \beta_0^{-1} z^n \implies n = m$$

Se $n = m$ allora possiamo sempre trovare β_0 e β_∞ , quindi abbiamo mostrato

$$H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}(1)) = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

□

Proposizione 6.37. Le sezioni globali dei fibrati lineari su \mathbb{P}^1 sono

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, E_{z^{-n}}) = \begin{cases} \mathbb{K}[z]_n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione.

Consideriamo due sezioni $\sigma_0 = f(z)$ e $\sigma_\infty = g(w)$ tali che $\sigma_\infty = \alpha_{0,\infty} \sigma_0$. Per quanto detto possiamo scegliere $\alpha_{0,\infty} = z^{-n}$, da cui sull'intersezione $U_{0,\infty}$ abbiamo

$$g(z^{-1}) = z^{-n} f(z).$$

Scrivendo le espansioni troviamo

$$g(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots \quad z^{-n} f(z) = b_0 z^{-n} + b_1 z^{1-n} + \dots$$

dunque:

$n < 0$ In questo caso imporre uguaglianza impone che ogni coefficiente sia nullo, cioè $\sigma_0 = \sigma_\infty = 0$ e quindi il σ a cui corrispondono è 0.

$n \geq 0$ Imponendo l'uguaglianza troviamo

$$f(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

cioè un generico polinomio di grado n .

□

Osservazione 6.38. Segue immediatamente che

$$\dim \Gamma(\mathbb{P}^1, E_{z^{-n}}) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

6.5.2 Fibrati vettoriali

Teorema 6.39. Su \mathbb{P}^1 gli unici fibrati vettoriali sono $E \cong E_{n_1} \oplus \cdots \oplus E_{n_k}$ per degli interi n_i , dove E_n è il fibrato associato al cociclo z^{-n} in $H^1(\{U_0, U_\infty\}, \text{GL}(1))$.

Dimostrazione.

Scriviamo $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_\infty$ e procediamo per induzione su n il rango del fibrato.

$n = 1$ Notiamo che $E|_{U_0}$ e $E|_{U_\infty}$ sono banali perché $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus V(x_1)$, $U_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus V(x_0)$ e vale (6.29).

Sia $\mathcal{U} = \{U_0, U_\infty\}$ e consideriamo $H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(1))$, che per il teorema (6.11) e quanto appena osservato determina tutti i fibrati di rango 1 che si banalizzano su \mathcal{U} a meno di isomorfismo. Per quanto osservato nella sottosezione precedente questo conclude.

$n > 1$ In modo del tutto analogo vogliamo considerare $H^1(\mathcal{U}, \text{GL}(n))$. Ricordando che i cocicli per questo ricoprimento sono

$$Z^1(\mathcal{U}, \text{GL}(n)) = \{C : U_{0,\infty} \rightarrow \text{GL}(n)\}$$

e che la relazione per cui quozientiamo per trovare la coomologia è

$$C \sim D \iff \exists \alpha : U_\infty \rightarrow \text{GL}(n), \beta : U_0 \rightarrow \text{GL}(n) \text{ t.c. } D = \alpha C \beta^{-1}.$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} C(t) &= (c_{i,j}(t)) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t^\pm]) \\ \alpha(t) &= (a_{i,j}(t)) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t]) \\ \beta(t) &= (b_{i,j}(t)) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t^{-1}]) \end{aligned}$$

Per definizione di somma diretta di fibrati vista dal punto di vista dei cocicli è sufficiente mostrare che per ogni $C \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[t^\pm])$ possiamo trovare α e β matrici in $\text{GL}_n(\mathbb{K}[t])$ tali che

$$\beta C \alpha = \begin{pmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_k} \end{pmatrix}$$

con $m_1 \geq \cdots \geq m_k$. Se $c_{i,j} \in \mathbb{K}[t]$ per ogni i, j vogliamo anche poter scegliere $m_\ell \geq 0$ per ogni ℓ .

[CONTACCI, INSERISCO DOPO]

□

Proposizione 6.40. Se E è un fibrato vettoriale su \mathbb{P}^1 e (per il teorema (6.39)) esso è isomorfo a $E_{n_1} \oplus \cdots \oplus E_{n_k}$ per $n_1 \geq \cdots \geq n_k$ allora gli n_i sono univocamente determinati.

Dimostrazione.

Supponiamo di avere un'altra scrittura $E \cong E_{m_1} \oplus \cdots \oplus E_{m_k}$ con $m_1 \geq \cdots \geq m_k$ (il

numero di addendi è lo stesso perché è pari al rango del fibrato). Senza perdita di generalità supponiamo $m_1 \geq n_1$ e tensorizziamo per E_{-m_1} per ottenere

$$E_0^a \oplus \underbrace{E_{n'_2} \oplus \cdots \oplus E_{n'_k}}_{E'} \xrightarrow{\varphi} E_0^b \oplus \underbrace{E_{m'_2} \oplus \cdots \oplus E_{m'_k}}_{F'}$$

dove n'_i e m'_i sono gli opportuni interi che codificano le differenze $n_j - m_1$ e $m_j - m_1$ dopo aver raccolto le copie di E_0 . Per costruzione tutti gli addendi diretti sono fibrati lineari con sezioni globali nulle (eccetto per le copie di E_0), quindi

$$\dim \Gamma(\mathbb{P}^1, E_0^a \oplus E') = a \cdot (0 + 1) + (k - a) \cdot 0 = a, \quad \dim \Gamma(\mathbb{P}^1, E_0^b \oplus F') = b$$

e cioè $a = b$.

Scriviamo l'isomorfismo $\varphi : E_0^a \oplus E' \rightarrow E_0^a \oplus F'$ in forma matriciale come

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

(cioè $\alpha : E_0^a \rightarrow E_0^a$, $\beta : E' \rightarrow E_0^a$ eccetera). Notiamo che dare un morfismo $E_0 \rightarrow F'$ è la stessa cosa di dare una sezione di F' , quindi $\gamma = 0$, dunque $\varphi|_{E_0^a} = \alpha : E_0^a \rightarrow E_0^a$ è un isomorfismo e quindi abbiamo un isomorfismo

$$E' = E/E_0^a \xrightarrow{\varphi} E/E_0^a = F'$$

e per induzione la scrittura di questi due pezzi è unica. Ritensorizzando per E_{m_1} troviamo che la scrittura originale era unica. \square

6.6 Fibrati con azione di gruppo

Definizione 6.41. Se X è una G -varietà, un **G -fibrato** su X è un fibrato vettoriale $p : E \rightarrow X$ su X per cui esiste un'azione lineare di G su E tale che p è G -equivariante.

Osservazione 6.42. In questo caso, $\Gamma(X, E)$ ha un'azione lineare di G , data da

$$(g \cdot \sigma)(x) = g(\sigma(g^{-1}x)).$$

Si potrebbe dimostrare che G agisce in modo regolare su $\Gamma(X, E)$, e quindi che $\Gamma(X, E)$ è una rappresentazione algebrica di G . (Non lo faremo.)

Definizione 6.43. Dati due fibrati vettoriali $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$ su X , un **morfismo di fibrati** è una mappa $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ che preserva la somma e il prodotto per scalare e tale che $p_2 \circ \varphi = p_1$. Diciamo che φ è **equivariante** se commuta con G .

Osservazione 6.44. Per ogni x_0 in X , un morfismo φ definisce una mappa lineare $\varphi_{x_0} : (E_1)_{x_0} \rightarrow (E_2)_{x_0}$.

Proposizione 6.45. Le classi di isomorfismo fibrati vettoriali G -equivarianti di rango m su $X = G/H$ sono in corrispondenza con le classi di isomorfismo delle rappresentazioni m -dimensionali di H .

Dimostrazione.

Costruiamo esplicitamente questa corrispondenza:

Dato un fibrato vettoriale G -equivariante $p: E \rightarrow G/H$ e posto $x_0 = H = e_{G/H}$, possiamo considerare la fibra E_{x_0} e chiaramente H agisce su E_{x_0} .

Data una rappresentazione V di H , consideriamo $G \times V$ con l'azione di H data da

$$h(g, v) = (gh^{-1}, hv).$$

Passando al quoziente in H abbiamo

$$\begin{array}{ccc} E = \frac{G \times V}{H} & \longrightarrow & X = G/H \\ \Psi & & \Psi \\ [g, v] & \longmapsto & [g] \end{array}$$

Notiamo che

$$[g, v] + [gh, u] = [g, v] + [g, hu] = [g, v + hu]$$

e che

$$\lambda[g, v] = [g, \lambda v],$$

quindi le fibre hanno una struttura vettoriale.

Per concludere andrebbe mostrato che E è una varietà algebrica, che la mappa costruita è regolare e che abbiamo la trivializzazione locale. \square

Esempio 6.46. Se vogliamo costruire fibrati G -equivarianti lineari (cioè di rango 1) su $GL(n)/B_n$, sappiamo che questi corrispondono alle rappresentazioni 1-dimensionali di B_n

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^\times \\ & \searrow & \nearrow \\ & T = B_n/U_n & \end{array}$$

Quindi queste possono essere caratterizzate attraverso i caratteri del toro.

Capitolo 7

Teorema di Quillen-Suslin

Vogliamo mostrare il seguente risultato:

Teorema 7.1 (Quillen-Suslin). Se R è un PID e M è proiettivo finitamente generato su $R[t_1, \dots, t_n]$, allora M è libero.

Osservazione 7.2. Geometricamente il teorema afferma che i fibrati vettoriali su \mathbb{A}_R^n sono banali.

Esempio 7.3 (Quillen-Suslin non vale per moduli qualsiasi). Consideriamo

$$M[t_1, \dots, t_n] = R[t_1, \dots, t_n] \otimes_R M.$$

Allora

$$R \otimes_{R[t_1, \dots, t_n]} M[t_1, \dots, t_n] \cong \frac{M[t_1, \dots, t_n]}{(t_1, \dots, t_n)M[t_1, \dots, t_n]} \cong M.$$

Quindi se M è proiettivo, allora $M[t_1, \dots, t_n]$ è proiettivo; se $M[t_1, \dots, t_n]$ è libero, allora M è libero.

Notazione. Se A è un anello scriviamo $\text{Spec } A$ per indicare la varietà affine tale che

$$A = \mathbb{K}[\text{Spec } A].$$

Usando solo le nozioni definite durante il corso questa operazione ha senso solo quando A è una \mathbb{K} -algebra ridotta finitamente generata, ma nel contesto della teoria degli schemi questo oggetto è ben definito per ogni anello commutativo con 1 e quanto diremo in seguito è valido anche in questo caso generale.

Ai fini del corso questi sono dettagli tecnici che possiamo trascurare dato che a noi interesseranno solo applicazioni dove A è una \mathbb{K} -algebra ridotta finitamente generata.

Osservazione 7.4. Per chi conosce un minimo la teoria degli schemi, inseriremo alcune osservazioni che legano i risultati algebrici alla loro interpretazione geometrica quando opportuno.

Sotto questo linguaggio, un modulo su A è un fascio quasicoerente su $\text{Spec } A$, un modulo finitamente generato è un fascio coerente e un modulo proiettivo è un fibrato vettoriale (quest'ultimo fatto ha un significato rigoroso anche all'interno di questo corso grazie al teorema (6.34))

Osservazione 7.5. $\text{Spec}(A[t_1, \dots, t_n]) = \text{Spec } A \times \mathbb{A}^n$.

Definizione 7.6. Definiamo lo **spazio proiettivo** di dimensione n su A come

$$\mathbb{P}_A^n := \mathbb{P}^n \times \text{Spec } A.$$

7.1 Teorema di incollamento di Quillen

Definizione 7.7. Sia M un $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulo. Diciamo che M è **esteso** da A se esiste un A -modulo N tale che $M \cong N[t_1, \dots, t_n]$.

Osservazione 7.8. A meno di isomorfismo, l' A -modulo N della definizione precedente è univocamente determinato, infatti

$$N \cong M/(t_1, \dots, t_n)M = R \otimes_{R[t_1, \dots, t_n]} M.$$

Osservazione 7.9. Geometricamente un fascio quasicoerente su \mathbb{A}_A^n è esteso da $\text{Spec } A$ se esiste un fascio quasicoerente su $\text{Spec } A$ del quale è pullback tramite il fibrato banale $\mathbb{A}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$.

Il teorema che vogliamo dimostrare in questa sezione è

Teorema 7.10 (di incollamento di Quillen). Siano R, A anelli noetheriani dove A è una R -algebra. Sia M un $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulo finitamente generato. Allora M è esteso da A se e solo se, per ogni ideale massimale \mathfrak{m} di R , $M_{\mathfrak{m}}$ è esteso da $A_{\mathfrak{m}}$.

7.1.1 Lemmi geometrici

Lemma 7.11. Sia R un anello noetheriano e siano M, N due R -moduli, con M finitamente generato.

1. Se $\varphi: M \rightarrow N$ è tale che $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ è la mappa nulla, allora esiste f in $R \setminus \mathfrak{m}$ tale che $\varphi_f = 0$.
2. Se $\psi: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$, allora esistono f in $R \setminus \mathfrak{m}$ e $\varphi: M_f \rightarrow N_f$ tali che ψ è la localizzazione di φ .
3. Se N è finitamente generato e $\psi: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ è un isomorfismo, allora esistono f in $R \setminus \mathfrak{m}$ e un isomorfismo $\varphi: M_f \rightarrow N_f$.

Dimostrazione.

La dimostrazione è simile a quella localmente libero implica proiettivo (6.29).

1. Siano x_1, \dots, x_k dei generatori di M . Poiché $\varphi_{\mathfrak{m}} = 0$, si ha $\varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_k) = 0$ in $N_{\mathfrak{m}}$, quindi esiste $f \notin \mathfrak{m}$ tale che $f\varphi(x_1) = \dots = f\varphi(x_k) = 0$ in M . Allora $\varphi_f = 0$.
2. Consideriamo il diagramma

$$A^h \longrightarrow A^k \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc} A_{\mathfrak{m}}^h & \longrightarrow & A_{\mathfrak{m}}^k & \longrightarrow & M_{\mathfrak{m}} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & N_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

e scriviamo $\psi(x_i) = y_i/f$ con $f \notin \mathfrak{m}$ e $y_i \in N$. In particolare gli $\psi(x_i)$ sono in N_f . Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} A_f^h & \xrightarrow{\beta_f} & A_f^k & \xrightarrow{\alpha_f} & M_f \longrightarrow 0 \\ & & \searrow \phi & \downarrow & \downarrow \\ & & & N_f & \end{array}$$

dove $\phi(e_i) = y_i/f$. Segue per esattezza della prima riga che $\phi_{\mathfrak{m}} \circ \beta_{\mathfrak{m}} = 0$ e quindi per il punto 1. esiste $g \notin \mathfrak{m}$ tale che

$$(\phi_g \circ (\beta_f)_g): A_{fg}^h \rightarrow N_{fg}$$

è la mappa nulla. A meno di sostituire f con fg , possiamo assumere che $\phi \circ \beta_f = 0$ e quindi otteniamo una mappa $\varphi: M_f = A_f^k / \text{Imm}(\beta_f) \rightarrow N_f$ per il primo teorema di omomorfismo. Per costruzione $\varphi_{\mathfrak{m}} = \psi$ come voluto.

3. Per il punto 2. possiamo sollevare ψ e ψ^{-1} a $\varphi: M_f \rightarrow N_f$ e $\tilde{v}p: N_f \rightarrow M_f$ (scegliendo un opportuno f). Notiamo che $(\varphi \circ \tilde{v}p - id_{N_f})_{\mathfrak{m}} = \psi \circ \psi^{-1} - id_{N_{\mathfrak{m}}} = 0$, quindi per il punto 1. $\varphi \circ \tilde{v}p = id_{N_f}$ a meno di localizzare ulteriormente. Analogamente sistemiamo anche l'altra composizione.

□

Osservazione 7.12. Geometricamente, il lemma afferma che il comportamento su una spiga di un fascio coerente determina il comportamento in un intorno.

Lemma 7.13. Siano f, g in R coprimi (cioè $(f, g) = R$) e sia M un R -modulo. Allora M è il prodotto fibrato di M_f e M_g su M_{fg}

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{b} & M_f \\ a \downarrow & \lrcorner & \downarrow \alpha \\ M_g & \xrightarrow{\beta} & M_{fg} \end{array}$$

cioè

$$M \cong \{(x, y) \in M_f \times M_g : \alpha(x) = \beta(y)\}$$

tramite la mappa $m \mapsto (a(m), b(m))$.

Dimostrazione.

Verifichiamo iniettività e suriettività:

inj. Se esiste h tale che $f^h m = 0$ e $g^h m = 0$, poiché esistono u, v in R tali che $uf^h + vg^h = 1$, si ottiene $m = (uf^h + vg^h)m = 0$.

surj. Sia (x, y) in $M_f \times M_g$ tale che $\alpha(x) = \beta(y)$. Scriviamo $x = z/f^s$ e $y = w/g^s$ con z, w in M . Allora esiste $t \geq s$ tale che $(fg)^t(z/f^s - w/g^s) = 0$, cioè in M si ha l'uguaglianza $f^{t-s}g^t z = f^t g^{t-s} w$. Come prima, esistono u, v tali che $uf^t + vg^t = 1$. Sia $m = zu f^{t-s} + wv g^{t-s}$ e verifichiamo che $x = a(m)$ e $y = b(m)$: In M_f

$$x = (uf^t + vg^t)x = zu f^{t-s} + \frac{zvg^t}{f^s} = zu f^{t-s} + wv g^{t-s} = m.$$

Analogamente si trova $y = m$ in M_g come voluto.

□

Osservazione 7.14. Geometricamente, il lemma afferma che possiamo ricostruire un fascio quasicoerente a partire dalle sue restrizioni su un ricoprimento.

Lemma 7.15. Siano f, g in R coprimi e siano M, N due R -moduli. Supponiamo di avere un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{\varphi} & N_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{fg} & \longrightarrow & N_{fg} \\ \uparrow & & \uparrow \\ M_g & \xrightarrow{\psi} & N_g \end{array}$$

Allora esiste una mappa $\chi: M \rightarrow N$ tale che $\chi_f = \varphi$ e $\chi_g = \psi$.

Dimostrazione.

Considerando il diagramma seguente, l'esistenza di χ segue dal lemma precedente.

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M_f & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow \varphi & \\ M_g & \longrightarrow & M_{fg} & \longrightarrow & N_f \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & N_g & \xrightarrow{\beta} & N_{fg} \end{array}$$

□

Osservazione 7.16. Geometricamente, il lemma afferma che possiamo incollare morfismi di fasci quasicoerenti definiti su un ricoprimento che coincidono sulle intersezioni.

7.1.2 Lemmi su polinomi invertibili a coefficienti in algebra

Notazione. Sia E una B -algebra (eventualmente non commutativa) con centro B . Definiamo

$$E[t]^u = \{f(t) \in E[t] \mid f(0) = 1, \text{ invertibili} \}.$$

Lemma 7.17. Sia $\theta(t) \in E_f[t]^u$. Per $k \gg 0$ tale che

$$\theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} \in E[x, y][t]^u$$

Dimostrazione.

Sostituendo $x + y = t$ in $\theta(t)$ e sottraendo il termine noto rispetto a y troviamo che esiste $\varphi \in E_f[x, y]$ tale che

$$\theta(x + y) - \theta(x) = y\varphi(x, y).$$

Espandiamo l'elemento nel testo del lemma usando la relazione appena ricavata:

$$\begin{aligned} \theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} &= (\theta(xt + yf^k t) - \theta(xt) + \theta(xt))\theta(xt)^{-1} = \\ &= yf^k t \underbrace{\varphi(xt, yf^k t)\theta(xt)^{-1}}_{\in E_f[x, y, t]} + 1. \end{aligned}$$

Per definizione di localizzazione, per $k \gg 0$, esiste $\beta \in E[x, y, t]$ tale che¹

$$\beta(x, f^k y, t) = f^k \varphi(xt, yf^k t)\theta(xt)^{-1},$$

dunque

$$\theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} = 1 + yt\beta(x, f^k y, t) \in E[x, y][t].$$

Per un conto analogo

$$\theta(xt)\theta((x + f^h y)t)^{-1} = 1 + ty\gamma(x, f^h y, t) \in E[x, y][t].$$

Semplifichiamo la notazione ponendo

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \theta(xt)\theta((x + f^h y)t)^{-1} = 1 + ty\gamma \\ \tilde{\beta} &= \theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1} = 1 + yt\beta. \end{aligned}$$

Per definizione $\tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1$ in $E_f[x, y, t]$. Per le formule in $E[x, y, t]$ appena trovate si ha

$$\tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1 + y(t\gamma + t\beta + t^2 y\beta\gamma) \doteq 1 + y\delta$$

quindi mettendo i due fatti assieme $f^i \delta = 0$ per i grande. A meno di sostituire y con $f^h y$ (cioè semplicemente aumentare la potenza di f che moltiplica y) otteniamo che $\tilde{\gamma}\tilde{\beta} = 1$ in $E[x, y][t]$. Otteniamo l'identità $\tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1$ in $E[x, y][t]$ in modo analogo.

Questo mostra che per $k \gg 0$, $\tilde{\beta} = \theta((x + f^k y)t)\theta(xt)^{-1}$ è invertibile. Valutando $\tilde{\beta}$ in $t = 0$ troviamo $\theta(0)\theta(0)^{-1} = id$ come voluto. \square

¹ f^k nel secondo argomento di φ non causa problemi, anzi per $k \gg 0$ contribuisce a cancellare le eventuali f al denominatore dei coefficienti di φ .

Lemma 7.18. Per ogni $f, g \in B$ con $(f, g) = B$

$$E_{fg}[t]^u \cong E_f[t]^u E_g[t]^u$$

Dimostrazione.

Se $k \gg 0$ e $a = b + h^k y$ allora se² $\theta \in \tilde{E}_h[t]^u$ si ha per il lemma (7.17)

$$\theta(at)\theta(bt)^{-1} \in \tilde{E}[t]^u.$$

Se ora $\theta(t) \in E_{fg}[t]^u$ allora scriviamo (ricordiamo che $\theta(0) = id$)

$$\theta(t) = \underbrace{\theta(t)\theta(bt)^{-1}}_{\in E_f[t]^u} \underbrace{\theta(bt)\theta(0)^{-1}}_{\in E_g[t]^u}$$

dove, per quanto detto, i contenimenti valgono se $b = 1 \pmod{f^k}$ e $b = 0 \pmod{g^k}$ per $k \gg 0$, ma dato che $(f, g) = B$ possiamo trovare un tale b per il teorema cinese del resto. \square

7.1.3 Dimostrazione

Teorema 7.19 (di incollamento di Quillen). Siano R, A anelli noetheriani dove A è una R -algebra. Sia M un $A[t_1, \dots, t_n]$ -modulo finitamente generato. Allora M è esteso da A se e solo se, per ogni ideale massimale \mathfrak{m} di R , $M_{\mathfrak{m}}$ è esteso da $A_{\mathfrak{m}}$.

Dimostrazione.

Chiaramente se M è esteso da A allora per esattezza della localizzazione sappiamo anche che $M_{\mathfrak{m}}$ è esteso da $A_{\mathfrak{m}}$ per ogni \mathfrak{m} massimale di R . Mostriamo l'altra implicazione. Definiamo il seguente oggetto:

$$Q(M) := \{f \in R \mid M_f \text{ è esteso da } A_f\}$$

e diamo un nome ai seguenti enunciati:

(α_n) $Q(M)$ è un ideale.

(β_n) Se $M_{\mathfrak{m}}$ è esteso da $A_{\mathfrak{m}}$ per ogni \mathfrak{m} massimale in R allora M è esteso da A .

dove l'indice n è il numero di variabili come nell'enunciato. La tesi è che valga (β_n) per ogni $n \geq 1$. Possiamo definire formalmente anche (β_0) ma la tesi in quel caso è triviale perché avremmo $N = M \otimes_R R = M$.

$(\alpha_n) \implies (\beta_n)$ Siano

$$N := M/(t_1, \dots, t_n)M \quad \text{e} \quad N_{\mathfrak{m}} := M_{\mathfrak{m}}/(t_1, \dots, t_n)M_{\mathfrak{m}}.$$

Per ogni \mathfrak{m} esiste un isomorfismo $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} N_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]$ di $A_{\mathfrak{m}}[t_1, \dots, t_n]$ -moduli ed esiste un $f_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ tale che $\varphi_{f_{\mathfrak{m}}}: M_{f_{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\sim} N_{f_{\mathfrak{m}}}$ è un isomorfismo per il punto 3. del lemma (7.11). Quindi $f_{\mathfrak{m}}$ è in $Q(M)$ per ogni \mathfrak{m} e quindi $Q(M)$ non è contenuto in alcun ideale massimale \mathfrak{m} . In particolare $Q(M) = R$, cioè $1 \in Q(M)$, da cui concludiamo che M è esteso da A .

²scriviamo \tilde{E} per indicare che l'algebra non è necessariamente quella del testo. Sotto infatti useremo $\tilde{E} = E_f$ e $\tilde{E} = E_g$.

$(\beta_1), (\beta_{n-1}) \implies (\beta_n)$ Sia $N = M/(t_1, \dots, t_n)M$. Consideriamo $A' := A[t_1, \dots, t_{n-1}]$ e l' A' -modulo $M' := M/t_n M$. Localizzando M' rispetto a \mathfrak{m} si ottiene

$$M'_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}/t_n M_\mathfrak{m} \cong \frac{N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_n]}{t_n N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_n]} \cong N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_{n-1}].$$

Quindi $M'_\mathfrak{m}$ è esteso da $A_\mathfrak{m}$ per ogni massimale di R , dunque per (β_{n-1}) M' è esteso da A , cioè $M' \cong N[t_1, \dots, t_{n-1}]$.

Grazie a questo risultato abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} M_\mathfrak{m} & \longrightarrow & M'_\mathfrak{m}[t_n] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{\sim} & N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n] \end{array}$$

dove la prima freccia verticale è un isomorfismo per ipotesi, la seconda è un isomorfismo per quanto appena detto e l'orizzontale in fondo è l'identità. Segue che $M \cong M'[t_n]$.

Osserviamo che è possibile applicare (β_1) ad $A'[t_n]$ e a M in quanto $M_\mathfrak{m}/t_n M_\mathfrak{m} = M'_\mathfrak{m}$ e

$$M_\mathfrak{m} \cong N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_n] \cong N_\mathfrak{m}[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n] \cong M'_\mathfrak{m}[t_n]$$

per quanto detto. Quindi M è esteso da A' , cioè

$$M \cong M/t_n M[t_n] = M'[t_n] = N[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n]$$

come voluto.

(α_1) Scriviamo $t = t_1$ per comodità e poniamo $N = M/tM$.

Sia f in $Q(M)$ e $g \in R$ qualsiasi. Per definizione $M_f \cong N_f[t]$ e per esattezza della localizzazione segue $M_{fg} \cong N_{fg}[t]$, cioè $fg \in Q(M)$.

Mostriamo ora che se f, g sono in $Q(M)$ allora lo è anche $f+g$, cioè vogliamo mostrare che $M_{f+g} \cong N_{f+g}[t]$.

Osserviamo che $(f, g)R_{f+g} = R_{f+g}$, quindi a meno di sostituire R con R_{f+g} ci siamo ricondotti a mostrare che se $(f, g) = R$ e³ $f, g \in Q(M)$ allora M è esteso da A . Per il lemma (7.13) ci basta dunque mostrare che $N[t]$ è isomorfo a $M_f \oplus_{M_{fg}} M_g$. Grazie al lemma (7.15), un modo per farlo è mostrare che esiste un diagramma commutativo della forma

$$\begin{array}{ccccc} M_f & \longrightarrow & M_{fg} & \longleftarrow & M_g \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ N_f[t] & \longrightarrow & N_{fg}[t] & \longleftarrow & N_g[t] \end{array}$$

Poiché $f, g \in Q(M)$ esistono degli isomorfismi $\varphi : M_f \rightarrow N_f[t]$ e $\psi : M_g \rightarrow N_g[t]$, che inducono isomorfismi $\varphi_1, \psi_1 : M_{fg} \rightarrow N_{fg}[t]$. Diagrammaticamente

$$\begin{array}{ccccccc} M_f & \longrightarrow & M_{fg} & \longleftarrow & M_g & & \\ \varphi \downarrow \sim & & \swarrow \varphi_1 & & \searrow \varphi_2 & & \downarrow \sim \psi \\ N_f[t] & \longrightarrow & N_{fg}[t] & \xrightarrow{\theta} & N_{fg}[t] & \longrightarrow & N_g[t] \end{array}$$

³va bene perché $Q(M) \subseteq Q(M_{f+g})$

dove $\theta = \psi_1 \circ \varphi_1^{-1}$. Se $\theta = id_{N_{fg}[t]}$ allora avremmo concluso per quanto detto, quindi il nostro obiettivo è sostituire φ e ψ con opportune φ' e ψ' tali che la mappa indotta su $N_{fg}[t]$ sia effettivamente l'identità.

Notiamo che

$$\begin{aligned} \theta \in \text{End}_{A_{fg}[t]}(N_{fg}[t]) &= \text{Hom}_{A_{fg}}(N_{fg}, N_{fg}[t]) = \\ &= \text{Hom}_{A_{fg}}(N_{fg}, N_{fg})[t] \stackrel{(6.28)}{\cong} (\text{Hom}_A(N, N))_{fg}[t]. \end{aligned}$$

Se $E = \text{Hom}_A(N, N)$ allora abbiamo mostrato che $\theta \in E_{fg}[t]^u$ infatti è un isomorfismo per costruzione e $\theta(0) = id_N$ in quanto N è il prodotto fibrato di N_f e N_g su N_{fg} per le mappe di localizzazione (7.13).

Per il lemma (7.18) esistono dunque $\alpha \in E_f[t]^u$ e $\beta \in E_g[t]^u$ tali che $\theta = \beta\alpha$, le quali ci permettono di costruire il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} M_f & \xrightarrow{\quad} & M_{fg} & \xleftarrow{\quad} & M_g & & \\ \swarrow \varphi' & & \searrow & & \swarrow \psi' & & \\ N_f[t] & \xleftarrow{\alpha} & N_f[t] & \xrightarrow{\quad} & N_{fg}[t] & \xrightarrow{\beta\alpha} & N_{fg}[t] & \xleftarrow{\quad} & N_g[t] & \xrightarrow{\beta^{-1}} & N_g[t] \end{array}$$

Sostituendo φ con $\varphi' = \alpha \circ \varphi$ e ψ con $\psi' = \beta^{-1} \circ \psi$ allora il θ che inducono è

$$\beta^{-1} \circ \psi_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \alpha^{-1} = \beta^{-1} \circ \theta \circ \alpha^{-1} = \beta^{-1} \circ \beta \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = id_{N_{fg}[t]}$$

come voluto. □

7.2 Teoremi di Horrocks

Notazione. Scriviamo $R\langle t \rangle$ per indicare la localizzazione di $R[t]$ ai polinomi monici⁴

Per dimostrare il teorema di Quillen-Suslin facciamo uso del seguente risultato:

Teorema 7.20 (Horrocks algebrico globale). Sia M un $A[t]$ modulo proiettivo finitamente generato. Se $M\langle t \rangle$ è libero allora M è libero.

Esso si inserisce in un gruppo di quattro risultati che prendono tutti il nome da Horrocks. Gli altri tre sono

Teorema 7.21 (Horrocks algebrico locale). Sia M un $A[t]$ modulo proiettivo finitamente generato con A locale. Se $M\langle t \rangle$ è libero allora M è libero.

Teorema 7.22 (Horrocks geometrico globale). Se E è un fibrato vettoriale su \mathbb{P}_A^1 allora $E|_{\mathbb{A}_A^1}$ è banale.

⁴formano una parte moltiplicativa perché 1 è monico, 0 non è monico e il coefficiente di testa di un prodotto di polinomi è il prodotto dei coefficienti di testa, ma $1 \cdot 1 = 1$.

Teorema 7.23 (Horrocks geometrico locale). Se E è un fibrato vettoriale su \mathbb{P}_A^1 con A locale, allora $E|_{\mathbb{A}_A^1}$ è banale.

Vale il seguente diagramma di implicazioni

$$\begin{array}{ccc} HGL & \implies & HGG \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ HAL & \implies & HAG \implies \text{Quillen Suslin} \end{array}$$

Per raggiungere il teorema di Quillen-Suslin mostriamo le implicazioni rosse e Horrocks geometrico locale.

7.2.1 Dimostrazione Horrocks geometrico locale

7.2.2 Implicazioni verso Horrocks algebrico globale

Proposizione 7.24. Horrocks geometrico locale implica Horrocks geometrico globale.

Dimostrazione.

Siano $U_0 = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})_A = \text{Spec } A[t]$ e $U_\infty = (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})_A = \text{Spec } A[t^{-1}]$.

Dare un fibrato vettoriale è come dare (7.13) moduli proiettivi finitamente generati M_0 su $A[t]$ e M_∞ e $A[t^{-1}]$ tali che

$$(M_0)_t \cong (M_\infty)_{t^{-1}}.$$

Per avere la tesi vogliamo che un tale fibrato sia banale quando ristretto a U_0 , cioè che M_0 sia esteso da A .

Per il teorema di incollamento di Quillen (7.19) basta mostrare che $(M_0)_{\mathfrak{m}}$ è esteso da $A_{\mathfrak{m}}$ per ogni \mathfrak{m} massimale in A . Osserviamo che localizzare il fibrato a \mathfrak{m} restituisce comunque un fibrato (stavolta su $\mathbb{P}_{A_{\mathfrak{m}}}^1$), definito dai moduli $(M_0)_{\mathfrak{m}}$ e $(M_\infty)_\infty$ (definiscono un fibrato perché per esattezza della localizzazione $(M_0)_{\mathfrak{m},t} \cong (M_\infty)_{\mathfrak{m},t^{-1}}$). Per il teorema di Horrocks geometrico locale (7.23) si ha che $(M_0)_{\mathfrak{m}}$ è esteso da $A_{\mathfrak{m}}$ come voluto. \square

Proposizione 7.25. Horrocks geometrico globale implica Horrocks algebrico globale.

Dimostrazione.

Per ipotesi $M \langle t \rangle$ è libero, quindi esiste $f \in A[t]$ monico tale che M_f è libero (il minimo comune denominatore di una base di $M \langle t \rangle$).

Vogliamo costruire un fibrato vettoriale su \mathbb{P}_A^1 tale che la sua restrizione a $\mathbb{A}_A^1 = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})_A$ sia uguale a M , così facendo, per Horrocks geometrico globale (7.22), avremo mostrato che M corrisponde al fibrato banale su $A[t]$.

Sia $X = \text{Spec } A$. Notiamo che M corrisponde a un fibrato vettoriale su

$$X \times \mathbb{A}^1 \supseteq U = X \times \mathbb{A}^1 \setminus V(f)$$

e che M_f corrisponde alla restrizione di questo fibrato a U , che quindi è il fibrato banale su U dato che M_f è libero. Definiamo i seguenti aperti di $X \times \mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned} V &= (X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})) \setminus V(f) \\ W &= X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) = X \times \mathbb{A}^1 \end{aligned}$$

e notiamo che U è la loro intersezione, cioè abbiamo un diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ W & \hookrightarrow & X \times \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Se su W consideriamo il fibrato M e su V consideriamo il fibrato banale dello stesso rango allora notiamo che questi si incollano in quanto su $W \cap V = U$ entrambi i fibrati si restringono al fibrato banale su U . Poiché W e V formano un ricoprimento di $X \times \mathbb{P}^1$ (f non si annulla all'infinito perché è monico) abbiamo definito un fibrato vettoriale su tutto \mathbb{P}_A^1 tale che $M = M_0$.

Per il teorema di Horrocks geometrico globale (7.22) questo mostra che $M = M_0$ è esteso da A , quindi per mostrare che M_0 è libero basta mostrare che $N = M_0/tM_0$ è un A -modulo libero. Poiché M_0 deriva da un fibrato su $X \times \mathbb{P}^1$, che si scrive come incollamento di M_0 e M_∞ , vale la seguente catena di isomorfismi

$$N = \frac{M_0}{tM_0} \cong \frac{M_0}{(t-1)M_0} \stackrel{s:=t^{-1}}{\cong} \frac{M_\infty}{(1-s)M_\infty} \cong \frac{M_\infty}{sM_\infty}.$$

Se f come prima è monico di grado n e $g(s)$ è tale che $g(t^{-1})t^n = f(t)$, si può verificare che

$$V = X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \setminus V(f) = X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \setminus V(g).$$

Per costruzione $g(0) = 1 \neq 0$ quindi $\frac{M_\infty}{sM_\infty} = \left(\frac{M_\infty}{sM_\infty} \right)_g$, ma su V sappiamo che il fibrato di $X \times \mathbb{P}^1$ è banale, cioè $(M_\infty)_g$ è un $A[s]$ -modulo libero. Dunque

$$\frac{M_\infty}{sM_\infty} \cong \frac{(M_\infty)_g}{s(M_\infty)_g} = (M_\infty)_g \otimes_{A[s]} A \cong A[s]^{\oplus r} \otimes_{A[s]} A \cong A^r$$

è un A -modulo libero e quindi N è libero seguendo la catena di isomorfismi. \square

7.2.3 Dimostrazione di Quillen-Suslin

Lemma 7.26. Se R è un PID allora $R\langle t \rangle$ è un PID.

Dimostrazione.

Sia \mathfrak{q} un ideale primo in $R[t]$ e sia $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R \stackrel{R \text{ PID}}{=} (p)$. Consideriamo due casi:

$p \neq 0$ Dato che $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{q}$, l'estensione $\mathfrak{p}[t]$ di \mathfrak{p} a $R[t]$ è contenuta in \mathfrak{q} . Abbiamo dunque un omomorfismo iniettivo

$$\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}[t]} \hookrightarrow \frac{R[t]}{\mathfrak{p}[t]} = R/(p)[t]$$

dove $R/(p)$ è un campo per ipotesi. Dato che $(R/(p))[t]$ è un PID e $\mathfrak{q}/(\mathfrak{p}[t])$ si identifica con un suo ideale, segue che

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}[t] = (p) \text{ oppure } \mathfrak{q} = (p, f(t))$$

per qualche $f(t)$ monico. In entrambi i casi nella localizzazione $R\langle t \rangle$ si ha che $\mathfrak{q} = (p)$.

$p = 0$ Sia $S = R \setminus \{0\}$. Allora \mathfrak{q} è contenuto⁵ in

$$S^{-1}\mathfrak{q} = (f(t)) \subset S^{-1}R[t] = \text{Frac}(R)[t],$$

con $f(t) = \sum_i a_i t^i$ in \mathfrak{q} . Sia $d := \gcd(a_i)$ e sia $g = f/d$. Poiché $g \in R[t]$, per primalità di \mathfrak{q} necessariamente $g \in \mathfrak{q}$.

Mostriamo che $\mathfrak{q} = (g(t))$: se h è un elemento di \mathfrak{q} allora $h = f \ell_1 \stackrel{\ell \in d\ell_1}{=} g \ell$ per qualche ℓ_1 in $\text{Frac}(R)[t]$. Poiché $g \in R[t]$ e $g \ell = h \in R[t]$, per il lemma di Gauss ℓ è in $R[t]$ e quindi $h \in (g)$ come ideale in $R[t]$.

In conclusione, localizzando rispetto ai polinomi monici ogni ideale di $R[t]$ diventa principale. \square

Teorema 7.27 (Quillen-Suslin). Se R è un PID e M è proiettivo finitamente generato su $R[t_1, \dots, t_n]$, allora M è libero.

Dimostrazione.

Procediamo per induzione su n .

$n = 0$ Se M è un modulo proiettivo finitamente generato su R PID allora è anche libero per noti risultati di algebra commutativa.

$n > 0$ Se M è un $R[t_1, \dots, t_n]$ modulo proiettivo finitamente generato allora $M\langle t_1 \rangle$ è un $R\langle t_1 \rangle[t_2, \dots, t_n]$ -modulo proiettivo finitamente generato. Dato che $R\langle t_1 \rangle$ è un PID (7.26), per ipotesi induttiva questo mostra che $M\langle t_1 \rangle$ è libero. Ora considero $A = R[t_2, \dots, t_n]$ e noto che M è un $A[t_1]$ modulo proiettivo finitamente generato per ipotesi, inoltre abbiamo mostrato che $M\langle t_1 \rangle$ è libero, quindi per il teorema di Horrocks algebrico globale (7.20) si ha che M è libero. \square

Osservazione 7.28. Effettivamente nell'implicazione $HAG \implies$ Quillen-Suslin usiamo solo anelli di polinomi quindi come avevamo anticipato non serve davvero la teoria degli schemi per formalizzare questa dimostrazione.

⁵questo ideale è un primo ben definito di $S^{-1}R[t]$ perché $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$ per ipotesi.