Istituzioni di Analisi Matematica

Corso del prof. Pietro Majer

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

Capitolo 1

Norme e Seminorme

Il corso si concentra sulla relazione che si crea tra la struttura lineare e la struttura topologia degli spazi normati.

Per $\mathbb{K}$ intendiamo un campo tra $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1.1 Norme e seminorme

Definizione 1.1 (Seminorma)**.**
Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, una **seminorma** è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ tale che

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Disuguaglianza triangolare*)
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ se $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$ (*Positivamente omogenea*)

2'. $\|\lambda x\| = \|x\|$ se $|\lambda| = 1$ (*Isotropa*)

Se inoltre vale $\|x\| = 0 \iff x = 0$ allora $\|\cdot\|$ è detta **norma**.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio (semi)normato**.

Osservazione 1.2.
Su uno spazio (semi)normato possiamo definire una (semi)distanza indotta ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Diamo alcuni esempi di spazi normati e seminormati:

Esempio 1.3.

1. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i|$
2. Per $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < \infty \right\}$ con $\|x\|_p = \sum_{i \geq 0} |x_i|^p$
3. $\ell_\infty = \left\{ x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sup |x_i| < \infty \right\}$ con $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$
4. $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K},\ \text{misurabile},\ \|f\|_p < \infty \right\}$ con

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \\ \operatorname*{supess}_{x \in X} |f(x)| = \inf\limits_{\substack{N \subseteq X, \\ \mu(N) = 0}} \sup\limits_{x \in X \setminus N} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è uno spazio seminormato ma non normato.

5. Spazi di Hilbert.

Definizione 1.4 (Funzioni continue, limitate e lineari)**.**
Siano E, F spazi normati e S un insieme, definiamo i seguenti spazi normati:

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(S,E) &= \{f : S \to E, \text{ limitate}\}, & \|f\|_{\infty,S} &= \sup_{s\in S} \|f(s)\|_E \\
\mathscr{B}C(S,E) &= \{f : S \to E, \text{ continue e limitate}\}, & \|f\|_{\infty,S} &= \sup_{s\in S} \|f(s)\|_E \\
L(E,F) &= \{T : E \to F \text{ lineare}, \ \|T\| < \infty\}, & \|T\| &= \sup_{x\in B_E(0,1)} \|T(x)\|_F
\end{aligned}$$

Definizione 1.5 (Spazio duale)**.**
Sia V uno spazio vettoriale. Denotiamo con V' **il duale algebrico**, cioè l'insieme delle mappe lineari $V \to \mathbb{K}$.

Definiamo lo **spazio duale** a V come $V^* = L(V, \mathbb{K})$, cioè come il sottoinsieme di V' dato dalle mappe continue. La norma su V^* è quindi data da

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| \overset{\text{Lineare}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f(x)| .$$

Proposizione 1.6 (Per funzionale limitato equivale continuo)**.**
Per un funzionale lineare in V^*, essere limitato è equivalente ad essere continuo.

Dimostrazione.
Se $\|f\| = M \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| = \left\| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right\| \|x-y\| \le \|f\| \|x-y\| = M \|x-y\| ,$$

cioè f è M-lipschitz, e quindi continua.

Sia ora f lineare e continua. Per definizione di continuità in 0 esiste $\delta > 0$ tale che $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \le 1$ per ogni $x \in B_V(0, \delta)$. Segue che

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} f\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \frac{\|x\|}{\delta},$$

cioè $\|f\|_{V^*} \le 1/\delta$ e quindi f limitato. □

Osservazione 1.7.
Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio seminormato e $N = \ker \|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$ allora $\|\cdot\|$ passa al quoziente e lo rende uno spazio normato.

Esempio 1.8.
Considerando lo spazio seminormato $(\mathcal{L}^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$, la costruzione sopra corrisponde a definire lo spazio normato $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$, infatti $\ker \|\cdot\|_p$ sono le funzioni con supporto in un insieme trascurabile.

Osservazione 1.9.
$L(E,F) \hookrightarrow \mathscr{B}(B_E(0,1), F)$ mandando $T \mapsto T|_{B_E(0,1)}$. Infatti per definizione questa mappa è isometrica[1]. Questo identifica il primo spazio con un chiuso del secondo.

[1] $\|T\| = \left\| T|_{B_E(0,1)} \right\|_{\infty, B_E(0,1)}$

1.1.1 Teoremini filosofici

Teorema 1.10 (Banach Mazur)**.**
Sia $(E, \|\cdot\|)$ *normato,* $f : E \to E$ *isometria*[2]*. Allora* f *è affine.*

Dimostrazione. (ESERCIZIO).
TRACCIA:

- Basta provare che $\forall a, b \in E$ vale
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
(conservando questa conserva i razionali 2-adici e quindi per continuità ogni combinazione convessa)

- Fissati $a, b \in E$, definiamo la *deficienza affine* di f (rispetto ad a e b)
$$def(f) = \left\| \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right\} \right\|$$
La tesi è $def(f) = 0$.

- Notiamo che
$$def(f) \leq \left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{f(a)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(b)}{2} \right\| = \frac{1}{2}\left(\|a+b\| + \|a\| + \|b\|\right)$$

- Consideriamo l'applicazione affine che scambia $f(a)$ e $f(b)$ data da
$$\rho(y) = f(a) + f(b) - y$$
Poniamo $\widetilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$.

- Mostrare $def(\widetilde{f}) = 2def(f)$.

- Se $def(f) \neq 0$, iterando otteniamo che esiste g tale che $def(g)$ è arbitrariamente grande (raddoppio $def(f)$ tante volte), ma questo è assurdo perché abbiamo il limite trovato prima che non dipende dalla funzione.

$\square$

Filosoficamente questo vuol dire che la struttura metrica in un qualche modo determina la struttura vettoriale.

Teorema 1.11 (Inclusione isometrica / Fréchet-Kuratowski)**.**
Sia (M, d) *spazio metrico. Allora esso si immerge isometricamente in uno spazio normato*[3]*. In particolare si immerge in* $(\mathscr{B}C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *via l'assegnazione seguente:*

Fissiamo un punto base $x_0 \in M$.[4]

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathscr{B}C(M, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0) \end{array}$$

[2]con questo termine intendiamo che la mappa, oltre a rispettare le distanze, è anche bigettiva. Se non vale bigettività diremo "inclusione isometrica"
[3]addirittura di Banach.
[4]saremmo tentati da $x \mapsto d(\cdot, x)$, ma la funzione in arrivo non è limitata e quindi non esiste una norma ben definita

Dimostrazione.
ESERCIZIO $\square$

Filosoficamente questo vuol dire che studiando mappe tra spazi metrici, possiamo pensare al codomino come spazi normati.
Se consideriamo l'immersione di uno spazio metrico in un Banach, possiamo "incicciottirlo" e trovare uno spazio metrico "vicino" che è localmente contraibile. Queste idee a volte possono aiutare.

1.2 Completezza

Definizione 1.12 (Successione di Cauchy)**.**
Una successione (x_n) è **di Cauchy** o **fondamentale** se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p,\ q > n$ si ha $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Fatto 1.13 (Proprietà delle successioni di Cauchy)**.**

1. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*
2. *Se (x_n) è di Cauchy e $\widetilde{x} \in X$ è un punto ad essa aderente allora $\widetilde{x}$ è il limite.*
3. *Se (x_n) come sopra ha una sottosuccessione convergente, la successione converge allo stesso limite.*
4. *Ogni successione di Cauchy*[5] *(x_n) ha una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che*
$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}.$$

Definizione 1.14 (Spazio completo)**.**
Uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge.
Se $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato è completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$ allora si dice **di Banach**.

Osservazione 1.15.
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie $\sum x_k$ definita a partire da una successione tale che $\|x_k\| < 2^{-k}$ è convergente.
Equivalentemente X di Banach se ogni serie $\sum x_k$ assolutamente convergente[6] è convergente.

Dimostrazione.
Ogni successione si può scrivere come serie, infatti $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ per $x_i = y_i - y_{i-1}$.
Il resto segue pensando sulle definizioni. $\square$

Osservazione 1.16.
Sia $Y \subseteq X$ con (X, d) metrico.

- Se X è completo e Y è chiuso allora Y è completo.
- Se Y è completo allora è anche chiuso.

Proposizione 1.17 (Completamento)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico, allora

[5] questa proprietà è comoda perché implica $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < 2^{-k+1}$ per ogni $p > k$
[6] cioè $\sum \|x_k\|$ convergente

1. *esiste una inclusione isometrica densa di X in uno spazio metrico completo*

$$j : (X, d) \hookrightarrow (\widetilde{X}, \widetilde{d})$$

2. *il completamento è universale, cioè se $j' : (X, d) \to (\widetilde{X}', \widetilde{d}')$ è un'altra mappa come sopra allora esiste un'unica isometria $\phi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & \widetilde{X} \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & \widetilde{X}' \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.
Consideriamo un paio di costruzioni

$\boxed{\textit{Costruzione } 1}$ Consideriamo

$$C_X = \left\{\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \xi \text{ di Cauchy}\right\}$$

con una semidistanza[7]

$$d(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(\xi_n, \eta_n).$$

Questo limite esiste perché la successione di queste distanze è di Cauchy in $\mathbb{R}$, che è completo. Notiamo che

$$d(\xi, \eta) = 0 \iff d(\xi_n, \eta_n) = o(1).$$

Notiamo che X ha una inclusione isometrica in (C_X, d) data associando a x la successione costante al valore x.
Consideriamo

$$\widetilde{X} = {C_X}/_{\mathscr{R}}, \qquad \xi\mathscr{R}\eta \iff d(\xi, \eta) = 0.$$

L'inclusione isometrica di prima definisce $X \hookrightarrow \widetilde{X}$, ma stavolta $\widetilde{X}$ è uno spazio metrico per costruzione.

ESERCIZIO: VERIFICA PROPRIETÀ DI NORMA E DENSITÀ

$\boxed{\textit{Costruzione } 2}$ Definiamo $\widetilde{X}$ come la chiusura in $(\mathscr{B}C(X), \|\cdot\|_\infty)$ dell'immagine di X tramite l'inclusione di Fréchet Kuratowski (1.11).

$\boxed{\textit{Costruzione } 3}$ (Solo per X spazio normato, ma per il teorema di inclusione isometrica (1.11) questo è sufficiente) Vedremo che esiste una inclusione isometrica di X nel suo biduale ($x \mapsto val_x$) e che il biduale stesso è completo, quindi un completamento di X è fornito dalla chiusura di $val.(X) \subseteq X^{**}$

□

Proposizione 1.18 (Estensione per densità di uniformemente continue)**.**
Siano X e Y spazi metrici, Y completo, $D \subseteq X$ denso e $f : D \to Y$ uniformemente continua, allora esiste un'unica estensione continua $\widetilde{f}$ di f a tutto X, inoltre $\widetilde{f}$ è essa stessa uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[7] VERIFICARE CHE LO È

Definizione 1.19 (Categorie di spazi metrici)**.**
Sia Met la categoria degli spazi metrici con mappe date da applicazioni uniformemente continue e CMet la sottocategoria piena dove gli oggetti sono spazi metrici completi

Osservazione 1.20.
L'operazione di completamento è un funtore[8] $\widetilde{\cdot}$: Met $\to$ CMet. Questo funtore è aggiunto al funtore dimenticante / di inclusione j : CMet $\to$ Met, infatti

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CMet}}(\widetilde{X}, Y) = UC(\widetilde{X}, Y) \overset{(1.18)}{\cong} UC(X, j(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Met}}(X, j(Y)).$$

Esercizio 1.21.
Verificare l'aggiunzione.

[8]preserva composizione per l'unicità della mappa tra estensioni

Capitolo 2

Spazi vettoriali topologici

Definizione 2.1 (Spazio vettoriale topologico)**.**
Uno **spazio vettoriale topologico** è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ munito di una topologia che rende continue le mappe

$$+ : X \times X \to X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \to X.$$

Esempio 2.2.
Esempi di SVT sono

- Ogni spazio normato
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.
- Se X è uno spazio topologico qualunque considero $C(X, \mathbb{R})$ con topologia di convergenza uniforme su compatti.

Esercizio 2.3.
La topologia della convergenza uniforme su compatti su $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non è indotta da una norma.

Dimostrazione.
TRACCIA

- Su uno spazio normato, se U e V sono intorni di 0 allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda U \supseteq V$.
- Mostrare che la topologia della convergenza uniforme su compatti non ha questa proprietà.

□

Esercizio 2.4.
Ogni SVT che è T_0 è anche[1] T_3 e[2] $T_{3\frac{1}{2}}$

Esercizio 2.5 (Spazi non T_0 non sono troppi interessanti)**.**
Ogni SVT X si decompone in somma diretta topologica $X = Y \oplus \overline{\{0\}}$ con Y qualunque addendo algebrico di $\overline{\{0\}}$. Segue che $Y \cong X/\overline{\{0\}}$, Y risulta essere T_0 e $\overline{\{0\}}$ ha la topologia indiscreta.

[1] In questo corso con T_3 intendiamo T_3 e Hausdorff
[2] $T_{3\frac{1}{2}}$ è T_3 più esiste una funzione continua che vale 1 sul punto e 0 sul chiuso che sto separando

2.1 Intorni dell'origine in SVT

Definizione 2.6 (Filtro)**.**
Un **filtro** $\mathcal{F}$ su un insieme X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X tale che

- per ogni $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$
- Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subseteq F'$ allora $F' \in \mathcal{F}$
- Se $F, F' \in \mathcal{F}$ allora $F \cap F' \in \mathcal{F}$

Definizione 2.7 (Sottoinsieme bilanciato)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $A \subseteq X$. A è **bilanciato** se per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$ si ha $a \in A \implies \lambda a \in A$, cioè

$$B_{\mathbb{K}}(0,1) \cdot A \subseteq A.$$

Osservazione 2.8.
Se V è bilanciato allora $0 \in V$ perché $0 \in B_{\mathbb{K}}(0,1)$.

Definizione 2.9 (Sottoinsieme assorbente)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $B \subseteq X$. B è **assorbente** se per ogni $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $t \geq n_x$ si ha $x \in tB$.

Osservazione 2.10.
Poiché in uno SVT le traslazioni $X \to X$ con $x \mapsto x + x_0$ sono omeomorfismi, per descrivere la topologia basta descrivere il filtro degli intorni di 0.

Come notazione sia $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$ l'insieme degli intorni di $0 \in X$.

Proposizione 2.11 (Proprietà intorni di 0)**.**
$\mathcal{U}$ ha le seguenti proprietà

1. *$\mathcal{U}$ è un filtro*
2. *Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$*
3. *Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$ e V bilanciato*
4. *Ogni elemento di $\mathcal{U}$ è assorbente*

Dimostrazione.
Dimostriamo le varie proprietà

1. La proprietà 1. è vera per ogni insieme definito come "gli intorni di x" per x fissato in spazio topologico X.
2. Segue dalla continuità di $+$ in $(0,0) \in X \times X$. Basta definire V in modo tale che $V \times V \subseteq +^{-1}(U)$.
3. Segue dalla continuità di $\cdot$ in $(0,0)$. Se U intorno di 0 in X, siano $\varepsilon > 0$ e $V \in \mathcal{U}$ tali che $B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon) \times V \subseteq \cdot^{-1}(U)$. Allora $B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon) \cdot V$ è bilanciato e contenuto in U per costruzione. Questo insieme è anche un intorno perché si può scrivere come

   $$\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$$

   e poiché V è un intorno di 0, ogni λV è un intorno di 0, quindi anche questa unione.

4. Segue dalla continuità della mappa $\mathbb{R}_+ \to X$ che per fissato $x_0 \in X$ assegna $s \mapsto sx_0$. Infatti per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $0 \leq s \leq \varepsilon$, $sx_0 \in U$ e riscrivendo questo in termini di $t = 1/s$ abbiamo $x_0 \in tU$ per ogni $t \geq 1/\varepsilon$. Come n_{x_0} basta scegliere $\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$.

□

Esercizio 2.12.
Sia X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{U}$ una famiglia si sottoinsiemi di X tali che valgano le quattro proprietà della proposizione precedente (2.11). Allora esiste un'unica topologia su X che rende X uno SVT e tale che $\mathcal{U}$ è il filtro degli intorni di 0. In questa topologia $\mathcal{U}$ è un sistema fondamentale di intorni per 0.

Dimostrazione.
L'idea è che definiamo $A \subseteq X$ aperto se e solo se per ogni $a \in A$, $A - a \in \mathcal{U}$ (sto traducendo "aperto $\iff$ intorno di ogni suo punto"). Si può mostrare che questa scelta definisce una topologia che rende X uno SVT. □

Esercizio 2.13.
Definire analogamente una topologia di SVT su X tramite degli assiomi che si basano una una base di intorni di 0 (al posto di tutti gli intorni). Per esempio la famiglia degli intorni bilanciati di 0.

Osservazione 2.14.
Se uno SVT è T_0 allora è automaticamente T_1 e T_2, basta sfruttare proprietà di simmetria.

Osservazione 2.15.
Ogni SVT è uno spazio topologico regolare, cioè ogni punto ha una base di intorni chiusi. Se X è anche T_0 allora X è T_3.

Dimostrazione.
Sia C un chiuso di X e $x \in X$ con $x \notin C$. Sia $U \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + U \cap C = \emptyset$, che esiste perché C è chiuso. Sia $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $V - V \subseteq U$, allora[3] $(x + V) \cap (C + V) = \emptyset$ dove $C + V$ è un intorno di c per ogni $c \in C$ per definizione. □

Osservazione 2.16.
Se K è compatto, C chiuso con $K \cap C = \emptyset$ allora esiste V tale che $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$.

Dimostrazione.
Per ogni $x \in K$ sia $V_x \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + (V_x + V_x - V_x)$ è disgiunto da C. Abbiamo dunque un ricoprimento $\{x + V_x\}_{x \in K}$ di K, che è compatto, quindi estraggo un sottoricoprimento finito $\{x_i + V_{x_i}\}$ e definisco V come l'intersezione di questi. Allora

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset,$$

infatti se $x \in K + V$ allora $x = k + v$ con $k \in K$ e $v \in V$ ma $k \in x_i + V_{x_i}$ per qualche i, quindi $x = x_i + v_i + v$, e avendo supposto che $x_i + (V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i}) \cap C = \emptyset$ abbiamo che $x = x_i + v_i + v \notin C + V$. □

[3] Un insieme come $C + V$ è detto intorno uniforme di C

2.2 SVT localmente convessi

Definizione 2.17 (SVT localmente convesso)**.**
Uno **spazio vettoriale topologico localmente convesso** (**SVTLC**) è uno SVT tale che 0 ha una base di intorni convessi.

Esempio 2.18.
Diamo alcuni esempi

- Ogni spazio normato
- $C(X)$ con X spazio topologico con la topologia della convergenza uniforme sui compatti
- $C^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e topologia della convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate in ogni ordine

Esercizio 2.19.
Sia $\mathscr{M} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{misurabili}\}$, allora esiste una metrica su $\mathscr{M}$ che lo rende uno SVT e tale che $f_n \to f$ se e solo se $f_n \to f$ in misura, cioè per ogni

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} |\{|f_n| > \varepsilon\}| = 0$$

Mostrare che l'unico intorno convesso di 0 è $\mathscr{M}$ stesso, da cui segue $\mathscr{M}^* = \{0\}$.

Osservazione 2.20.
Per ciò che sappiamo sugli intorni di 0 in uno SVT, se X è SVTLC allora esiste una base $\mathcal{B}$ data dagli intorni di 0 assorbenti, bilanciati e convessi.

Definizione 2.21 (Disco)**.**
Un insieme B è detto **disco** se è assorbente, bilanciato e convesso.

Proposizione 2.22.
Sia X un $\mathbb{R}$-SV e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

- *Per ogni $B \in \mathcal{B}$, B è Assorbente, Bilanciato e Convesso*
- *Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$*

allora $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists r > 0,\ \exists B \in \mathcal{B} \mid rB \subseteq U\}$ è un filtro di insiemi che induce una topologia che rende X uno SVT come da esercizio (2.12). La topologia indotta è anche localmente convessa.

Dimostrazione.
Mostriamo le quattro proprietà:

- Chiaramente $\mathcal{U}$ è un filtro.
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ è assorbente perché lo sono gli elementi di $\mathcal{B}$
- Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$, basta scegliere $V = \frac{1}{2}B$ con $B \subseteq U$ convesso in quanto se B è convesso $B + B = 2B$
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene un bilanciato perché contiene una versione scalata di un elemento di $\mathcal{B}$.

□

Osservazione 2.23.
Se $\mathcal{B}$ è una famiglia di dischi allora definendo $\widetilde{\mathcal{B}} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$ si ha che $\widetilde{\mathcal{B}}$ rispetta gli assiomi della proposizione (2.22) e quindi induce una topologia su X che lo rende uno SVT. Questa è la meno fine tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$. In particolare $\mathcal{U}_X$ ha una base data da $\left\{rB \mid B \in \widetilde{\mathcal{B}}\right\}$.

2.2.1 Funzionali di Minkowski

Definizione 2.24 (Funzionale di Minkowski)**.**
Sia X un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $C \subseteq X$ convesso, $0 \in C$. Il **funzionale di Minkowski** associato a C è dato da:

$$p_C : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \inf \{t \geq 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

dove $\inf \emptyset = \infty$ in questo formalismo.

Osservazione 2.25.
Se $B(0,1) \subseteq C \subseteq \overline{B(0,1)}$ per X normato allora $p_C(x) = \|x\|$.

Proposizione 2.26 (Proprietà funzionali di Minkowski)**.**
Valgono le seguenti proprietà

- *C è assorbente se e solo se $p_C(x) < \infty$ per ogni $x \in X$.*
- *Si ha $\{p_C < 1\} \subseteq C \, \{p_C \leq 1\}$*

Dimostrazione.
Mostriamo le varie proprietà

- Evidente dalla definizione di assorbente.
- Se $p_C(x) < 1$ allora esiste $0 \leq t \leq 1$ tale che $x \in tC$, cioè $x = tc$. Poiché $(1-t)0 = 0$ si ha $x = tc + (1-t)0$ e per convessità questo è un elemento di C, cioè $x \in C$.

  Se $x \in C$ allora $1 \in \{t \geq 0 \mid x \in tC\}$, quindi $p_C(x) \leq 1$.

□

Osservazione 2.27 (Famiglia di seminorme induce SVTLC).
Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X, possiamo definire

$$\mathcal{B} = \{B_p(0,r) \mid p \in \mathcal{P}, \ r \in \mathbb{R}_+\}, \quad B_p(0,r) = \{y \in X \mid p(x-y) < r\}$$

Si può mostrare che $\mathcal{B}$ è un insieme di dischi e quindi induce una struttura di SVTLC su X.

Osservazione 2.28.
Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X e definiamo

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{\max(p_1, \cdots, p_n) \mid p_i \in \mathcal{P}\}$$

allora $\mathcal{U} = \left\{B_p(0,r) \mid p \in \widetilde{\mathcal{P}}, r > 0\right\}$ è una base di intorni di 0 che induce la topologia dell'osservazione precedente.

Osservazione 2.29 (Ogni SVTLC è indotto da seminorme).
Poiché se B è assorbente, bilanciato e convesso, esso produce una seminorma p_B data dal funzionale di Minkowski tale che $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$, ogni topologia di X come SVTLC si può ottenere a partire da famiglie di seminorme.

Osservazione 2.30.
La topologia di SVTLC indotta da $\mathcal{P}$ insieme di seminorme è T_0 se e solo se $\mathcal{P}$ è separante, cioè per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.

Dimostrazione.
Se $p(x) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$ allora $x \in B(0, r)$ per ogni $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$ e per ogni $r > 0$, quindi $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}_X$, ovvero

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_X} U = \overline{\{0\}}.$$

□

2.2.2 Continuità di operatori lineari in SVTLC

Proposizione 2.31.
Sia $T : X \to Y$ lineare tra SVT. Valgono le seguenti affermazioni

1. *T è continua se e solo se è continua in* 0
2. *T è continua se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $T(V) \subseteq U$*
3. *Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente, T è continua se e solo se*

$$\forall q \in \mathcal{Q},\ \exists p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P},\ \exists M \geq 0 \quad \textit{tali che}$$

$$\forall x \in X,\ q(Tx) \leq M \max\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\}$$

4. *Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente con $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ stabili per* max *allora T è continua se e solo se $\forall q \in \mathcal{Q}$ esistono $p \in \mathcal{P}$ e $M \geq 0$ tali che*

$$q(Tx) \leq Mp(x)$$

Dimostrazione.
Dimostriamo le affermazioni

1. Basta traslare dato che traslare è un omeomorfismo.
2. Ovvio.
3. La condizione significa che la palla di centro 0 e raggio 1 rispettivamente alla seminorma $\max(p_1, \cdots, p_n)$ di X ha immagine tramite T contenuta nella palla di raggio M rispetto a q, concludendo per il punto 2. a meno di omotetia.
4. Caso sopra.

□

Capitolo 3

Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hanh-Banch ci permetterà di costruire funzionali lineari continui.

Funzionali sono i surrogati delle coordinate, che non ci sono in generale, e anche quando ci sono possono essere più complicate di quanto non valga la pena.

3.1 Teorema di Hahn-Banach reale

Definizione 3.1 (Funzione sublineare).
Una funzione $p : X \to \mathbb{R}$ è

- **positivamente omogena** se per $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ abbiamo $p(tu) = tp(u)$,
- **subadditiva** se per ogni $u, v \in X$ vale $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$,
- **sublineare** se è subadditiva e positivamente omogenea.

Pillola filosofica: Teorema di esistenza senza buon criterio per scegliere un candidato spesso chiama l'uso di scelta.

Teorema 3.2 (Hahn-Banach).
Siano X uno spazio vettoriale reale, $M \subseteq X$ sottospazio, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineare, $f : M \to \mathbb{R}$ lineare tale che $f \leq p$ su M.
Allora f si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ lineare tale che $F \leq p$.

Dimostrazione.
Vogliamo applicare il lemma di Zorn. Sia

$$\mathscr{M} = \{g \in N' \mid g \leq p,\ M \subseteq N \subseteq X\}$$

Notiamo che $\mathscr{M}$ è ordinato secondo l'inclusione dei sottografici, cioè

$$g \preceq h \iff \Gamma g \subseteq \Gamma h \iff \begin{cases} \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h \\ g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} g \end{cases}$$

Condizione delle catene vale:

$$\text{se } \{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ catena in } \mathscr{M}$$

allora $\bigcup_\alpha \Gamma g_\alpha$ è ancora il grafico di una funzione lineare minore di p.

Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in $\mathscr{M}$. Per concludere basta mostrare che un massimale di $\mathscr{M}$ è definito su tutto X, cioè vogliamo mostrare che se $g \in \mathscr{M}$ è tale che $\operatorname{dom} g \neq X$ allora esiste $g' \in \mathscr{M}$ che estende g.

Sia dunque per assurdo $x \in X \setminus N$ dove $N = \operatorname{dom} g$. Vogliamo estendere g a $h : N \oplus \langle x \rangle \to \mathbb{R}$ con $h \leq p$. In quanto estensione

$$h(u + tx) = h(u) + th(x) = g(u) + th(x),$$

dove u generico elemento di N. Sia $\alpha = h(x)$ e cerchiamo un opportuno α in modo tale che $h \leq p$.

Chiediamo che $\forall u \in N,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$g(u + tx) \leq p(u + tx),$$

o equivalentemente per ogni $t > 0$ chiediamo

$$\begin{cases} h(u + tx) \leq p(u + tx) \\ h(v - tx) \leq p(v - tx) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} g(u/t) + \alpha \leq p(u/t + x) \\ g(v/t) - \alpha \leq p(v/t - x) \end{cases}$$

dunque vogliamo

$$-p(v/t - x) + g(v/t) \leq \alpha \leq p(u/t + x) - g(u/t)$$

cioè

$$\sup_{v \in N} -p(v - x) + g(v) = m_* \leq \alpha \leq m^* = \inf_{u \in N} p(v + x) - g(u),$$

dunque un tale α esiste solo se $m_* \leq m^*$. Questo è vero perché

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x + v - x) \leq p(u + x) + p(v - x).$$

□

Osservazione 3.3.
Non serve questo teorema per spazi di dimensione finita o spazi di Hilbert, in quanto in quei casi abbiamo estensioni canoniche (se $dom f = N$, considero la proiezione orgonale su N e poi applico f).

Corollario 3.4 (Hahn-Banach per spazi normati)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare allora ogni funzione continua su Y si estende ad una su X con la stessa norma.

Dimostrazione.
Se $f \in Y^*$, per la definizione di norma duale si ha

$$f(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\| \doteqdot p(x),$$

quindi f si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ lineare con $F(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$, cioè $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Poiché F estende f in realtà abbiamo uguaglianza tra le norme[1]. □

[1] consideriamo la stessa successione in Y che realizza la definizione di $\|f\|_{Y^*}$

Osservazione 3.5.
Se X è di Hilbert, una estensione di $f \in Y^*$ è data dal proiettore ortogonale su[2] Y $P : X \to \overline{Y}$. A questo punto definendo $F = f \circ P$.

Corollario 3.6 (ricostruire norma tramite funzionali)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare e $x \in X$, allora la norma di x si può ricostruire dalla norma duale di X^*, in particolare[3]

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle$$

Dimostrazione.
Se $f \in X^*$ e $\|f\| \leq 1$ allora

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies \|x\| \leq \max_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle .$$

D'altra parte, per il corollario precedente (3.4) nel caso particolare di $Y = x\mathbb{R}$, il funzionale lineare continuo

$$\phi : \begin{array}{ccc} x\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\| \end{array}$$

si estende a tutto X con la stessa norma. Se $x = 0$ allora $\|\phi\| = 0$ per linearità, altrimenti $\|\phi\| = 1$ su $x\mathbb{R}$. In ogni caso $\|\phi\| \leq 1$, quindi per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|$. □

Definizione 3.7 (Operatore aggiunto)**.**
Per $T : X \to Y$ lineare continua tra spazi normati, si definisce l'**operatore aggiunto o trasposto** di T come

$$T^* : \begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Proposizione 3.8 (Norma dell'aggiunto)**.**
La norma di T^* coincide con la norma di T, in particolare T^* è continuo.

Dimostrazione.
Segue dai corollari di Hahn-Banach sopra, infatti

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L(Y^*,X^*)} &= \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \|T^* f\|_{X^*} = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1, x \in X} \langle T^* f, x \rangle = \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f, Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, Tx \rangle| \overset{(3.6)}{=} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|_{L(X,Y)} . \end{aligned}$$

□

3.1.1 Inclusione isometrica nel biduale

Proposizione 3.9 (Inclusione isometrica nel biduale)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale e consideriamo la mappa

$$i_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & val_x \end{array}$$

Essa è una inclusione isometrica.

[2] stiamo supponendo Y chiuso a meno di passare alla chiusura
[3] dove $\langle f, x \rangle = f(x)$ quando f è forma lineare, come in questo caso.

Dimostrazione.
È immediato vedere che i_X è lineare e continua[4] Però sappiamo che per ogni $x \in X$ esiste $f \in X$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\|x\| = \langle f, x \rangle$, cioè $\|val_x\| = \|x\|$, ovvero $i_X : X \to X^{**}$ è una inclusione isometrica. □

Definizione 3.10 (Spazio riflessivo)**.**
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è **riflessivo** se $i_X : X \to X^{**}$ è surgettiva, ovvero se i_X è una isometria.

Osservazione 3.11.
Esistono spazi di Banach non riflessivi ma isometrici al loro biduale. Nella definizione chiediamo che la mappa canonica i_X sia una isometria.

Esempio 3.12.
Sia $c_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x(n) = o_n(1)\right\}$. Questo è un sottospazio chiuso di

$$\ell_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty < \infty\right\}$$

Se $\widehat{\mathbb{N}}$ è la compattificazione di $\mathbb{N}$ ad un punto ($\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) allora c_0 sono le funzioni $\widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ continue che valgono 0 in ∞ ristrette a $\mathbb{N}$.

Risulta che l'inclusione $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ è l'inclusione nel biduale, infatti c_0^* si può identificare con

$$\ell_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|f\|_1 = \sum |f_n| < \infty\right\}$$

identificando $f \in \ell_1$ con $\widetilde{f}(x) = \sum f_n x_n$ (che converge perché assolutamente convergente). Risulta che questa identificazione è una isometria.

Con un processo analogo identifichiamo ℓ_1^* con ℓ_∞.

$$\begin{tikzcd}
c_0 \arrow[rr, "\subseteq"] \arrow[dr, "i_{c_0}"'] & & \ell_\infty \arrow[dl, "\cong"] \\
& c_0^{**} &
\end{tikzcd}$$

Osservazione 3.13.
Se X è Hilbert allora $X \hookrightarrow X^{**}$ è surgettiva tramite l'isomorfismo di Riesz

$$x \mapsto \langle \cdot, x \rangle \mapsto \langle \cdot, \langle \cdot, x \rangle \rangle = val_x$$

Osservazione 3.14.
Se X normato, $i_X : X \to X^{**}$ ci permette di costruire un completamento considerando $\overline{i_X(X)}$ in X^{**} in quanto il biduale è completo.

3.1.2 Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach

Il funzionale p nelle ipotesi è positivamente omogeneo e subadditivo (cioè sublineare).

Osservazione 3.15.
Una funzione f è subadditiva se, detto Γ il grafico di f, $\Gamma + (x, f(x))$ sta sempre sopra Γ.

Esercizio 3.16.
Mostra le seguenti implicazioni

[4] $\langle val_x, f + \lambda g \rangle = f(x) + \alpha g(x) = \langle val_x, f \rangle + \lambda \langle val_x, g \rangle$ e $\|val_x\| \leq \|x\|$ in quanto $|\langle val_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$.

- Positivamente omogeneo e subadditivo implica convesso
- Positivamente omogeneo e convesso implica subadditivo (e quindi sublineare)
- Subadditivo, convesso e $p(0) \leq 0$ implica positivamente omogeneo

Esercizio 3.17.
Trovare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia subadditiva, convessa ma non positivamente omogenea.

Esercizio 3.18.
Nel teorema di Hahn-Banach si può prendere più in generale p convesso?

Si, ma si riconduce al caso standard trovando un nuovo funzionale p_0 che sia sublineare e tale che $f \leq p_0 \leq p$.

3.2 Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach

3.2.1 Teorema di Hahn-Banch complesso

Teorema 3.19 (Hahn-Banach complesso)**.**
Sia X un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale normato, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio vettoriale e $f \in Y^*$, allora f si estende ad un funzionale lineare su X con uguale norma.

Dimostrazione.
Sia $(X_0, \|\cdot\|)$ lo spazio normato reale ottenuto da X per restrizione degli scalari e sia $f_0 = \mathfrak{Re} f$. Notiamo che f_0 è un funzionale lineare continuo reale su Y, che quindi possiamo estendere a $\widetilde{f}_0 \in X^*$ mantenendo la norma. Definiamo

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_0(x) - i\widetilde{f}_0(ix).$$

Notiamo che $\widetilde{f}|_Y = f$, infatti

$$f(y) = \mathfrak{Re}(f(y)) + i\,\mathfrak{Im}(f(y)) = \mathfrak{Re}(f(y)) - i\,\mathfrak{Im}(if(iy)) = \mathfrak{Re}(f(y)) - i\,\mathfrak{Re}(f(iy)).$$

Si ha anche che $\widetilde{f}$ è $\mathbb{C}$-lineare e che $\left\|\widetilde{f}\right\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

(COMPLETA PER ESERCIZIO) □

3.2.2 Teoremi di separazione dei convessi

Proposizione 3.20 (Funzionali di Minkowski sono sublineari)**.**
Se C è convesso e $0 \in C$ allora p_C è sublineare.

Dimostrazione.
Dimostriamo le due proprietà:

pos.omo. Per ogni $\lambda > 0$, $x \in X$ si ha che

$$p_C(\lambda x) = \inf\{t > 0 \mid \lambda x \in tC\} = \inf\{\lambda s > 0 \mid \lambda x \in \lambda sC\} = \lambda p_C(x)$$

subadd. Per ogni $x, y \in X$ siano a e b tali che

$$a > p_C(x), \quad b > p_C(y).$$

Se uno tra $p_C(x)$ e $p_C(y)$ è infinito allora la tesi vale trivialmente. Supponiamo dunque che questo non sia il caso. Allora $x \in aC$ e $y \in bC$, cioè $x/a, y/b \in C$. Notiamo che

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$$

dunque $\frac{x+y}{a+b} \in C$ per convessità, cioè $x+y \in (a+b)C$ e quindi $p_C(x+y) \leq a+b$. Passando all'estremo inferiore per $a > p_C(x)$ e $b > p_C(y)$ troviamo

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

□

Osservazione 3.21.
Se C è un disco, cioè è assorbente, bilanciato e convesso allora p_C è una seminorma.

Esercizio 3.22.
Se X SVT, $F : X \to \mathbb{K}$ lineare non continua allora per ogni aperto A non vuoti si deve avere $F(A) = \mathbb{K}$.

Lemma 3.23.
Ogni funzionale lineare non nullo su uno SVT è una mappa aperta

Dimostrazione.
Sia $F \neq 0$ lineare con $F : X \to \mathbb{K}$. Vogliamo mostrare che F manda intorni di $x \in X$ in intorni di $F(x) \in \mathbb{K}$. Poiché X è SVT, basta mostrare che $F(U)$ è intorno di $0 \in \mathbb{K}$ per ogni U intorno di $0 \in \mathbb{K}$. In realtà basta prendere una base di intorni di 0, quindi consideriamo gli U bilanciati. Notiamo che $F(U)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}$, infatti se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$ allora $\lambda F(U) = F(\lambda U) \subseteq F(U)$, quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- $F(U) = \{0\}$, ma allora $F = 0$ assurdo
- $F(U)$ è un disco, dunque è intorno di 0 ok.
- $F(U) = \mathbb{K}$ ok.

□

Corollario 3.24 (Discontinuità per funzionali lineari)**.**
$F : X \to \mathbb{K}$ lineare è discontinua se e solo se è surgettiva su ogni aperto non vuoto.

Dimostrazione.
Se F non è surgettiva su un aperto non vuoto, a meno di traslazione F non è surgettiva su un intorno di 0, quindi non è surgettiva su un qualche aperto bilanciato. Quindi esiste un elemento che non è nella immagine, ma allora F non assume valori di modulo superiore a questo valore non raggiunto. □

Teorema 3.25 (Separazione di convessi)**.**
Valgono i seguenti teoremi:

- *Siano X un $\mathbb{R}$-SVT, A un suo aperto convesso non vuoto e B un convesso non vuoto disgiunto da A. Allora esistono $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A,\ b \in B$ si ha*

$$\langle F, a \rangle < \gamma \leq \langle F, b \rangle\,,$$

cioè $A \subseteq \{F < \gamma\}$ e $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$.

- *Sia X un $\mathbb{R}$-SVTLC*[5]*, K convesso compatto e C convesso chiuso disgiunti. Allora esistono $F \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ tali che per ogni $x \in K$ e per ogni $y \in C$ vale*

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y \rangle$$

ovvero $K \subseteq \{F \leq \gamma_1\}$ e $C \subseteq \{F \geq \gamma_2\}$.

[5] La locale convessità serve, infatti esistono SVT metrizzabili che non hanno funzionali lineari continui e in tal caso la tesi non vale neanche per $K = \{x\}$ e $C = \{y\}$.

Dimostrazione.
Diamo le due dimostrazioni

- Sia $x_0 \in B - A = \{b - a \mid a \in A,\ b \in B\}$. Poiché $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \neq 0$. Sia
$$C = A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$
Dalla definizione è evidente che C è un aperto (unione di traslati di A che è aperto) e contiene 0. C è convesso perché la somma algebrica di due convessi è un convesso (quindi $A - B$ convesso e traslare un convesso lo lascia convesso). Essendo aperto in particolare è assorbente per (2.11).

  Quindi il funzionale di Minkowski associato p_C è un funzionale sublineare $X \to \mathbb{R}$ (non raggiunge $+\infty$ perché assorbente). Sia $f_0 : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da $\langle f_0, x_0 \rangle = 1$. Poiché $0 \notin A - B$, $x_0 \notin C$ e quindi[6] $p_C(x_0) \geq 1$. Applicando il teorema di Hahn-Banach (3.2) f_0 si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ con $F \leq p_C$ in X. Per ogni $a \in A,\ b \in B$, poiché $a - b + x_0 \in C$, si ha
$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) \leq 1$$
cioè $F(a) \leq F(b)$. Ponendo $\gamma = \sup_A F$ abbiamo le disuguaglianze volute se mostriamo che $F(a) < \gamma$ per ogni $a \in A$. Per il lemma (3.23) si ha che F è una mappa aperta, quindi $F(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}$ tale che $\sup F(A) \leq \gamma$, ma allora il valore γ non è raggiunto.

  Concludiamo notando che F è continuo[7] perché è limitato superiormente sull'aperto A.

- Sia V intorno convesso di 0 tale che $(K + V) \cap C = \emptyset$, basta usare (2.16) e poi notare che in questo caso abbiamo una base di intorni convessi. Evidentemente $K + V$ è aperto e convesso[8]. Per il primo punto esiste $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in K + V$ e $y \in C$
$$\langle F, x \rangle < \gamma \leq \langle F, y \rangle .$$
Sia $\gamma_1 = \max_{x \in K} \langle F, x \rangle$, allora $\gamma_1 < \gamma$ e quindi se $x \in K$
$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma \leq \langle F, y \rangle$$
che è la tesi a meno di definire $\gamma_2 = \gamma$.

□

3.3 Parentesi esercizi

Definizione 3.26 (Misura non atomica)**.**
Uno spazio di misura $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è **non-atomico** se per ogni $A \in \mathscr{Q}$ di misura positiva contiene $B \in \mathscr{Q}$ di misura positiva strettamente minore.

Esercizio 3.27 (Sierpinski)**.**
Se $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è non-atomico allora è divisibile, cioè per ogni $A \in \mathscr{Q}$ e per ogni $\lambda \in [0, \mu(A)]$ esiste $B \subseteq A$, $B \in \mathscr{Q}$, tale che $\mu(B) = \lambda$.

[6] ricorda che $\{p_C < 1\} \subseteq C$
[7] volendo anche perché limitato su intorno di 0 o anche perché non è surgettiva sull'aperto A. Vedi esercizio sopra per l'ultima.
[8] somma di convessi è convessa

Inoltre, vedendo la misura come funzione $\mu : \mathscr{Q} \to [0, \mu(X)]$, esiste una inversa destra monotona crescente per inclusione $E : [0, \mu(X)] \to \mathscr{Q}$, cioè si ha $\mu \circ E = id$ e per ogni $t \in [0, \mu(X)]$ abbiamo $\mu(E_t) = t$ e $E_t \subseteq E_{t'}$ per ogni $t \leq t'$.

Dimostrazione.
Vogliamo applicare Zorn all'insieme delle inverse destre monotone parziali, cioè

$$\Gamma = \{E : S \to \mathscr{Q} \mid S \subseteq [0, \mu(X)], E \text{ monot. cresc. per } \subseteq, \ \mu(E(t) = t \ \forall t \in S)\}$$

Chiaramente la condizione sulle catene funziona quindi Γ ha un elemento massimale. Mostriamo poi che il dominio del massimale è chiuso e che è denso, e quindi deve essere tutto. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) □

Esercizio 3.28.
Sia $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $0 < p \leq 1$. Definiamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}, \ \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

e sia $q : \mathcal{L}^p \to [0, \infty)$ con $q(f) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p$.

Notiamo che $q(f + g) \leq q(f) + q(g)$, che $q(\lambda f) = |\lambda| \, q(f)$ e che $q(f) = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.. Dunque q definisce una semidistanza $d_q(f, g) = q(f - g)$, che induce una distanza sul quoziente

$$L^p(X) = {\mathcal{L}^p(X)}\big/{\{0\}}$$

Questa distanza rende $L^p(X)$ uno SVT metrico completo omeomorfo a $L^1(X)$.

Mostrare che se $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è non-atomico e $p < 1$ allora $L^p(X)$ non ha funzionali lineari continui diversi da 0 e non ha aperti convessi diversi da $L^p(X)$.

Esercizio 3.29.
Sia $X = \mathbb{N}$ con la misura di cardinalità. In questo caso $L^p(\mathbb{N}) = \ell_p$ con la definizione di prima. Questo è uno SVT metrico completo ma la misura è puramente atomica (misura ricostruibile dai singoletti). Mostra che $(\ell_p)^* = (\ell_1)^*$.

Dimostrazione.
Nota che se $0 < p \leq q \leq \infty$ allora $\ell_p \subseteq \ell_q$ e l'inclusione è una mappa continua, quindi una mappa lineare su ℓ_q restituisce una mappa lineare su ℓ_p, quindi abbiamo $(\ell_p)^* \supseteq (\ell_1)^*$, va mostrato che non ce ne sono altri.(CONCLUDERE PER ESERCIZIO) □

Capitolo 4

Costruzioni su spazi normati

Osservazione 4.1.
Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio vettoriale e $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora Y è (semi)normato con la norma indotta. La topologia indotta è quella di sottospazio

Definizione 4.2 (Prodotto di spazi (semi)normati)**.**
Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi (semi)normati, la (semi)norma prodotto è data da

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Questa rende $X \times Y$ uno spazio (semi)normato e

$$B_{X\times Y}((0,0),1) = B_X(0,1) \times B_Y(0,1),$$

cioè la topologia indotta è la topologia prodotto.

Definizione 4.3 (Somma diretta topologica)**.**
Due sottospazi di $(X, \|\cdot\|)$ Y e Z sono in **somma diretta algebrica** se $+|_{Y\times Z} : Y \times Z \to X$ è bigettiva. Se $+|_{Y\times Z}$ è anche un omeomorfismo diciamo che X è la **somma diretta topologica** di Y e Z.

Osservazione 4.4.
X è la somma diretta topologica di Y e Z se X è isomorfo come spazio normato a $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y\times Z})$.

Osservazione 4.5.
La mappa $+|_{Y\times Z}$ è sempre continua, ma in generale non è un omeomorfismo.

Definizione 4.6 (Proiettore)**.**
Un endomorfismo lineare $P : X \to X$ si dice **proiettore** se è idempotente, cioè $P^2 = P$.

Osservazione 4.7.
Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta algebrica $X = \ker P \oplus \operatorname{Imm} P$. Viceversa, ad ogni decomposizione in somma diretta algebrica possiamo associare un proiettore

Osservazione 4.8.
I proiettori $P_Y : X \to Y$ e $P_Z = id - P_Y : X \to Z$ sono continui se e solo se la somma è topologica, infatti

$$(+|_{Y\times Z})^{-1} = P_Y \times P_Z.$$

Definizione 4.9 (Spazio (semi)normato quoziente)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è (semi)normato e Y è un suo sottospazio allora come spazio vettoriale

$$X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}.$$

Su essa definiamo la seguente norma: se $\xi \in X/Y$ allora[1]

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

Esercizio 4.10.
$\|\cdot\|_{X/Y}$ è una seminorma su X/Y e rende la proiezione $\pi : X \to X/Y$ una applicazione aperta e continua. Più precisamente

$$\pi(B_X(0,1)) = B_{X/Y}(0,1)$$

Dimostrazione.
Continua perché $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|$ per definizione di estremo inferiore, quindi π ha norma come operatore ≤ 1, e quindi è continua. □

Osservazione 4.11.
Notiamo che X/Y ha effettivamente la topologia quoziente indotta da π

Esercizio 4.12.
La (semi)norma quoziente è una norma se e solo se Y è chiuso (a prescindere dal fatto che $\|\cdot\|_X$ sia una norma o seminorma).

Osservazione 4.13.
Se Y e Z sono seminormati allora $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$ come spazi seminormati.

Osservazione 4.14.
Se $Y \subseteq X$ ed esiste[2] Z tale che $X = Y \oplus Z$ allora $Z \cong X/Y$.

Osservazione 4.15.
In generale X non è isomorfo a $Y \times X/Y$.

Osservazione 4.16.
Per quanto riguarda la completezza in queste costruzioni:

- Y sottospazio di X con X di Banach è un Banach se e solo se è chiuso
- $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$ è Banach se e solo se lo sono sia Y che Z
- Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato e $Y \subseteq X$ è un sottospazio chiuso allora $(X, \|\cdot\|)$ è completo se e solo se sia Y che X/Y sono completi.

Notiamo che l'ultima proprietà implica la seconda, infatti $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$

[1] pensando a ξ come un traslato di Y, la norma che stiamo definendo è la distanza di questo spazio affine dall'origine.
[2] ci sono casi in cui non esite, come $c_0 \subseteq \ell_\infty$

4.1 Costruzione di duali

Proposizione 4.17 (Duale del prodotto)**.**
Dati X e Y spazi di Banach, il duale di $X \times Y$ è isometricamente isomorfo a

$$(X^* \times Y^*, \|\cdot\|)$$

dove $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{X^*} + \|\eta\|_{Y^*}$ (che è topologicamente equivalente a $\|\cdot\|_{X^* \times Y^*}$).

$$(X^* \times Y^*, \|P_{X^*}(\cdot)\|_{X^*} + \|P_{Y^*}(\cdot)\|_{Y^*}) \cong ((X \times Y)^*, \|\cdot\|_{(X \times Y)^*}).$$

Proposizione 4.18 (Duale di sottospazi e di un quoziente)**.**
Dato Y sottospazio chiuso di X Banach abbiamo le seguenti isometrie lineari:

1. $Y^* \cong X^*/Y^\perp$
2. $(X/Y)^* \cong Y^\perp \subseteq X^*$

dove $Y^\perp = \operatorname{Ann}(Y) = \left\{ f \in X^* \mid f|_Y = 0 \right\} = \{f \in X^* \mid Y \subseteq \ker f\}$.

Dimostrazione.
Data l'inclusione $j_Y : Y \to X$ otteniamo $j_Y^* : X^* \to Y^*$. Il nucleo di j_Y^* sono i funzionali in X^* che si restringono al funzionale nullo su Y^*, cioè gli $f \in X^*$ tali che

$$j_Y^*(f) = f \circ j_Y = f|_Y = 0$$

e quindi $\ker j_Y^* = \operatorname{Ann}(Y)$. Per il teorema di Hahn-Banach (3.2), j_Y^* è surgettiva in quanto ogni funzionale su Y si estende ad uno su X perché X Banach e Y chiuso. Per il teorema di isomorfismo esiste un'unica mappa ϕ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "j_Y^*"] \arrow[d, "\pi"'] & Y^* \\ X^*/\operatorname{Ann}(Y) \arrow[ur, dashed, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Per questioni di algebra ϕ è lineare e poiché j_Y^* è continua e π induce la topologia quoziente, ϕ è continua. Verifichiamo che è una isometria.

$$B_{X^*/\operatorname{Ann}(Y)}(0,1) = \pi(B_{X^*}(0,1))$$

$$\phi(B_{X^*/\operatorname{Ann}(Y)}(0,1)) = \phi(\pi(B_{X^*}(0,1))) = j_Y^*(B_{X^*}(0,1)) \overset{(3.2)}{=} B_{Y^*}(0,1).$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estensione data da Hahn-Banach mantiene la norma.

Data la proiezione $\pi : X \to X/Y$ otteniamo $\pi^* : (X/Y)^* \to X^*$. Sia $\varphi \in (X/Y)^*$ e $f = \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi$. Si ha che

$$\varphi(B_{X/Y}) = \varphi(\pi(B_X)) = f(B_X),$$

quindi $\|\varphi\|_{(X/Y)^*} = \|f\|_{X^*}$, cioè π^* è una immersione isometrica.

Sia $f \in X^*$, si ha che $f \in \operatorname{Ann}(Y)$ se e solo se $Y \subseteq \ker f$ che succede se e solo se f si fattorizza tramite π per proprietà universale. Quindi $f \in \operatorname{Ann}(Y)$ se e solo se $f = \varphi \circ \pi = \pi^*(\varphi)$ per qualche $\varphi : X/Y \to \mathbb{R}$, cioè se e solo se $f \in \pi^*((X/Y)^*)$. Quindi $\operatorname{Imm} \pi^* = \operatorname{Ann}(Y)$.

Restringendo il codominio all'immagine troviamo quanto voluto. □

Capitolo 5

Completezza e duali di qualche spazio

5.1 Elenco di spazi completi

Proposizione 5.1.
Sia S insieme e E Banach, allora lo spazio normato $(\mathscr{B}(S,E), \|\cdot\|_{\infty,S})$ è completo

Dimostrazione.
[PERSO, RIGUARDA POI]
tale che $\|f(s)\| = \|\sum_k f_k(s)\| \leq \sum_k \|f_k(s)\| \leq \sum \|f\|_{\infty,S}$
quindi $\|f\|_{\infty,S}$ □

Uno degli strumenti dell'analista: aggiungere e togliere, cioè

$$\pi\rho o\sigma\tau\alpha\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$$

Lemma 5.2.
Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{B}(S,E)$ con f_k continua in s_0 per ogni k e $f_k \to f$ uniformemente allora anche f è continua in s_0

Dimostrazione.
Consideriamo

$$\begin{aligned}\|f(s) - f(s_0)\| \leq \|f(s) - f_k(s)\| + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| + \|f_k(s_0) - f(s_0)\| \leq \\ \leq 2\|f - f_k\|_{\infty,S} + \|f_k(s) - f_k(s_0)\|\end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di $f_k \to f$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_n\|_{\infty,S} \leq \varepsilon/3$.

Per la continuità in s_0 di f_n esiste un intorno U di s_0 rale che $\|f_n(s) - f_n(s_0)\| \leq \varepsilon/3$ per ogni $s \in U$. Allora per ogni $s \in U$ si ha

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 5.3.
Sia S spazio topologico, E banach, allora $\mathscr{B}C(S,E)$ è completo.

Dimostrazione.
Basta mostrare che $\mathscr{B}C(S,E)$ è chiuso in $\mathscr{B}(S,E)$. Questo segue dal fatto che la continuità in un punto $s_0 \in S$ si conserva per convergenza uniforme, che è il lemma precedente. $\square$

Esempio 5.4.
Sia $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{N}$ e E un banach, allora

$$c(E) \doteqdot \{x : \mathbb{N} \to E, \text{ convergente}\} \cong \mathscr{B}C(S,E)$$

Questo mostra che $c(E)$ è chiuso (e quindi completo) in $\ell_\infty(E) = \mathscr{B}(\mathbb{N}, E)$.

Conseguenze:

Proposizione 5.5.
Lo spazio $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ è completo

Dimostrazione.
Considerando l'inclusione isometrica

$$R : \begin{array}{ccc} L(X,Y) & \longrightarrow & \mathscr{B}(B_X(0,1), Y) \\ T & \longmapsto & T|_{B_X(0,1)} \end{array}$$

basta vedere che $R(L(X,Y))$ è chiuso.

Se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ è tale che $R(T_n) \to f$ uniformemente in $\mathscr{B}(B_X(0,1), Y)$ allora mostriamo che f è la restrizione a $B_X(0,1)$ di una qualche lineare T.

Mostriamo che le T_n convergono puntualmente per ogni $x \in X$: se $x = 0$ ok, se $x \neq 0$

$$T_n(x) = \|x\| \, T_n(x/\|x\|) = \|x\| \, R(T_n)(x/\|x\|) \to \|x\| \, f(x/\|x\|)$$

Sia $T : X \to Y$ definita da $T(x) = \|x\| \, f(x/\|x\|)$

[MOSTRARE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME, ME LO SONO PERSO] $\square$

Corollario 5.6 (Duale di spazio normato è banach)**.**
Il duale di uno spazio normato è sempre banch.

Teorema 5.7 (Integrazione per serie)**.**
Sia $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è uno spazio di misura e sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathscr{Q}, \mu)$ tali che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$$

Allora $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge q.o. e in norma 1.

Dimostrazione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n : X \to \mathbb{R}$ data da

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \, .$$

Notiamo che (g_n) è una successione di funzioni misurabili non negative crescente. Inoltre $g_n \to \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|$ per definizione di serie.

Per convergenza monotona

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f\|_1 \leftarrow \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_1 = \inf_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu$$

cioè $\inf_X g d\mu = \sum k \in \mathbb{N} \|f\|_1 < \infty$, cioè $g \in \mathcal{L}^1$.

Inoltre $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ è una successione dominata da g:

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq g(x).$$

Quindi la serie $\sum f_k(x)$ è una serie assolutamente convergente per ogni x dove $g < \infty$. Poiché $\int g < \infty$ le eccezioni sono trascurabili, quindi quasi ovunque $\sum f_k(x)$ è assolutamente convergente.

Sia $f(x) = \sum f_k(x)$ dove la serie converge. Notiamo che

$$|f(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| = g(x),$$

quindi $\|f\|_1 \leq \int g d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_1$.

Applicando come prima la stima alle code

$$\|f - s_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_1 = o(1)$$

dove l'ultimo termine va a 0 perché $\sum \|f_k\|_1$ è convergente. $\square$

Corollario 5.8 (Weil)**.**
Siano $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ convergenti in $\|\cdot\|_1$. Allora esiste n_k successione strettamente crescente di indici tali che f_{n_k} converge quasi ovunque ed è dominata in $\mathcal{L}^1$.

Dimostrazione.
Sia f il limite in $\|\cdot\|_1$. Data questa convergenza consideriamo una sottosuccessione n_k tale che $\|f - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$. Scrivendo la successione in termini di una somma telescopica

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$$

si ha per il teorema di integrazione per serie[1] (5.7) f_{n_k} converge quasi ovunque e in Lc^1, inoltre è dominata da

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right| \geq |f_{n_k}(x)|$$

con $g(x) \in \mathcal{L}^1$. $\square$

Proposizione 5.9 (L^1 è completo)**.**
Se $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è uno spazio di misura, $L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è completo.

Dimostrazione.
Segue immediatamente dal teorema di integrazione per serie (5.7). $\square$

Osservazione 5.10.
La convergenza quasi ovunque di funzioni $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ è **NON** è la convergenza rispetto a una topologia opportuna su $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$.

Ogni convergenza topologica in X insieme ha la seguente proprietà **di Urisohn**: $x_n \to x$ rispetto alla topologia se e solo se per ogni sottosuccessione x_{n_k} esiste una sotto-sottosuccessione $x_{n_{k_j}} \to x$.

[1] $\|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right\|_1 \leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_j} - f\right\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_{j-1}} - f\right\|_1 < \infty$

Dimostrazione.
Se $x_n \to x$ converge ok. Se non converge allora esiste un intorno U di x tale che $x_n \notin U$ frequentemente, quindi troviamo una sottosuccessione x_{n_k} che sta sempre fuori da U, quindi nessuna sua sotto-sottosuccessione può convergere a x. $\square$

La convergenza q.o. per successioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ non ha la proprietà di Urisohn.

Definizione 5.11 (Operatore di composizione)**.**
Se E è uno spazio di funzioni con codominio $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo l'operatore di composizione per f come $E \ni u \mapsto f \circ u$.

Lemma 5.12.
Sia u_k una successione che converge a u in $\|\cdot\|_p$. A meno di sottosuccessione $u_k \to u$ quasi ovunque e dominata in $\mathcal{L}^p$.

Dimostrazione.
Teorema di Weil (5.8) in $\mathcal{L}^p$. $\square$

Proposizione 5.13.
Lo spazio $L^p(X, \mathscr{Q}, \mu)$ per $0 \leq p < \infty$ è completo.

Dimostrazione.
L^p ed L^1 NON sono isomorfi come spazi di Banach in generale[2], ma esiste un omeomorfismo localmente Lipschitz e questo basta a mostrare la completezza: se u_k è una successione di Cauchy in L^p, se Φ è Lipschitz allora $\Phi(u_k)$ è ancora di Cauchy in L^1 e quindi converge, poi torno indietro con Φ^{-1}, che mantiene il limite per continuità.

Consideriamo
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \\ u & \longmapsto & |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$
Chiaramente è invertibile mandando $v \in L^1$ in $|v|^{1/p} \operatorname{sgn} v$. La mappa Φ è l'operatore di composizione con la funzione $f(t) = |t|^p \operatorname{sgn} t$. La continuità degli operatori di composizione è un fatto generale. Se $u_k \to u$ converge in $\|\cdot\|_p$ allora per il lemma a meno di sottosuccessione converge q.o. e dominata, quindi componendo con f abbiamo ancora convergenza quasi ovunque per continuità ($f(u_k) \to f(u)$ q.o.). Se $|u_k| \leq g$ in $\mathcal{L}^p$ allora $|u_k|^p \leq g^p$ in $\mathcal{L}^1$, similmente per Φ^{-1}, quindi effettivamente Φ è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che Φ è localmente lipschitz: siano $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$
$$|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 = \int_X |f(u(x)) - f(v(x))| \, d\mu(x)$$
ma se $t < s$ allora $|f(t) - f(s)| \leq \sup_{t \leq \xi \leq s} |f'(\xi)| \, |t - s|$ e $|f'(xi)| = p \, |xi|^{p-1} \leq p(\max\{|t|, |s|\})^p$, quindi
$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 \leq & p \int_X \max\left\{|u(x)|^{p-1}, |v(x)|^{p-1}\right\} |u(x) - v(x)| \, d\mu \leq \\
\leq & p \int_X \left(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\right) |u(x) - v(x)| \, d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \\
\leq & p \left(\left(\int_X |u|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\int_X |v|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \right) \left(\int_X |u - v|^p \right)^{1/p} = \\
\overset{p-1=p/q}{=} & p(\|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1}) \, \|u - v\|_p
\end{aligned}$$
quindi Φ è Lipschitz di costante $2pR^{p-1}$ sulla palla $B_{L^p}(0, R) \subseteq L^p$ $\square$

[2] cursiosità non banale da vedere

Proposizione 5.14.
Lo spazio $L^\infty(X, \mathscr{Q}, \mu)$ *è completo*

Dimostrazione.
[NON HO VISTO, RIGUARDA I PDF] $\square$

$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{\infty,\Omega}$. Questa norma rende continua l'immaersione $C_b^1 \to (C_b^0)^{n+1}$ data da $f \mapsto (f, \partial_1 f, \cdots, \partial_n f)$

Proposizione 5.15.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto. Lo spazio*

$$C_b^k(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \textit{di classe } C^k \textit{ con derivate limitate su } \Omega \textit{ fino all'ordine } k \right\}$$

è completo.

Dimostrazione.
Il caso $k = 1$ è una conseguenza del teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $\partial_i f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ è tale che $\partial_i f_k \to g_i$ uniformemente in Ω e $f_k \to f$ puntualmente in Ω allora esiste $\partial_i f$ e vale g_i. Se poi $f_k \in C^1(\Omega)$ allora la g_i è continua perché limite uniforme di $\partial_i f_k$ continue, quindi per il teorema del differenziale totale la f è anche C^1.

Per il teorema di limite sotto il segno di derivata, l'immersione $C_b^1 \to (C_b^0)^{n+1}$ ha immagine chiusa, infatti una successione $(f_k, \partial_1 f_k, \cdots, \partial_n f_k)$ nell'immagine convergente a $(f, g_1, \cdots, g_n)$ è proprio una delle ipotesi del teorema di convergenza sotto segno di derivata, quindi $f_k \to f$ in C^1 $\square$

5.2 Duali di spazi concreti