

Istituzioni di Analisi Matematica  
Corso del prof. Pietro Majer

Francesco Sorce

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
A.A. 2024/25

# Indice

<b>1</b>	<b>Norme e Seminorme</b>	<b>4</b>
1.1	Norme e seminorme . . . . .	4
1.1.1	Teoremini filosofici . . . . .	6
1.2	Completezza . . . . .	7
1.3	Prodotto di spazi (semi)normati . . . . .	9
1.4	Elenco di spazi completi . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Spazi vettoriali topologici</b>	<b>16</b>
2.1	Intorni dell'origine in SVT . . . . .	17
2.2	SVT localmente convessi . . . . .	19
2.2.1	Funzionali di Minkowski . . . . .	20
2.3	Continuità di operatori lineari in SVT . . . . .	21
2.4	SVT I-numerabili e paranorme . . . . .	22
2.5	Limitatezza . . . . .	23
2.6	Teorema di Riesz . . . . .	24
2.7	Successioni generalizzate (nets) . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Teorema di Hahn-Banach</b>	<b>28</b>
3.1	Teorema di Hahn-Banach reale . . . . .	28
3.1.1	Immersione isometrica nel biduale . . . . .	30
3.1.2	Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach . . . . .	32
3.2	Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach . . . . .	32
3.2.1	Teorema di Hahn-Banach complesso . . . . .	32
3.2.2	Teoremi di separazione dei convessi . . . . .	33
3.3	Parentesi esercizi . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Topologie deboli, Limitatezza e Banach-Steinhaus</b>	<b>37</b>
4.1	Topologie deboli . . . . .	37
4.1.1	Caso degli spazi normati . . . . .	39
4.2	Spazi di Baire e II-categoria . . . . .	40
4.3	Teorema di Banach-Steinhaus . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Lemma di iterazione e Iniettività / Surgettività di mappe lineari</b>	<b>44</b>
5.1	Lemma di iterazione . . . . .	44
5.1.1	Teorema della mappa aperta . . . . .	46
5.2	Iniettività e surgettività di mappe lineari . . . . .	49
5.2.1	Forte iniettività . . . . .	49
5.2.2	Polare, prepolare, annullatore, preannullatore . . . . .	51
5.2.3	Caso dei Banach . . . . .	54

<b>6</b>	<b>Separabilità e Spazi uniformemente convessi</b>	<b>59</b>
6.1	Separabilità vs Metrizzabilità . . . . .	59
6.2	Spazi uniformemente convessi . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Compattezza nei Banach</b>	<b>66</b>
7.1	Compattezza dei polari: Banach-Alaoglu . . . . .	66
7.2	Compattezza in Banach per la norma . . . . .	68
7.3	Topologie polari . . . . .	69
7.3.1	Topologia bounded-weak-star e Krein-Šmulian . . . . .	70
7.4	Compattezza per la topologia debole . . . . .	72
7.4.1	Varie nozioni di compattezza . . . . .	72
7.4.2	Eberlein-Šmulian . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Funzioni regolari e funzioni a supporto compatto</b>	<b>77</b>
8.1	Funzioni regolari . . . . .	77
8.2	Funzioni a supporto compatto . . . . .	79
8.2.1	Lo spazio $C_C$ . . . . .	79
8.2.2	Lo spazio $C_C^0(\Omega)$ . . . . .	81
8.2.3	Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . .	83
8.3	Altre proprietà di $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . .	86
8.3.1	Spazi barilati . . . . .	86
8.3.2	Spazi Bornologici . . . . .	87
<b>9</b>	<b>Distribuzioni</b>	<b>88</b>
9.1	Estensioni e operazioni sulle distribuzioni . . . . .	90
9.1.1	Estensioni . . . . .	90
9.1.2	Derivazione . . . . .	92
9.1.3	Moltiplicazione per funzione liscia . . . . .	92
9.2	Distribuzioni di ordine limitato come misure . . . . .	93
9.3	Successioni di distribuzioni . . . . .	94
9.4	Distribuzioni sono un fascio . . . . .	94
9.4.1	Distribuzioni a supporto compatto . . . . .	96
<b>10</b>	<b>Operatori compatti fra Banach</b>	<b>100</b>
10.1	Definizioni . . . . .	100
10.2	Proprietà di $L_C(X, Y)$ . . . . .	101
10.3	Operatori compatti di rango finito . . . . .	102
<b>11</b>	<b>Teoria spettrale per operatori limitati su Banach</b>	<b>107</b>
11.1	Spettro e operatori risolvanti . . . . .	107
11.1.1	Raggio spettrale e Cauchy-Hadamard-Gelfand . . . . .	109
11.2	Teoria spettrale su spazi di Hilbert . . . . .	111
11.2.1	Autovalori di operatori simmetrici . . . . .	113
11.2.2	Spettro di operatori simmetrici compatti . . . . .	114
11.3	Calcolo funzionale $C^0$ per operatori limitati autoaggiunti . . . . .	117
11.4	Altre proprietà del raggio spettrale . . . . .	121
11.5	Parentesi Esercizi . . . . .	122

<b>12 Spazi di Sobolev</b>	<b>129</b>
12.1 Derivata debole . . . . .	129
12.2 Ripassino di analisi 3 . . . . .	130
12.3 Spazi di Sobolev . . . . .	131
12.4 Parentesi Esercizi . . . . .	133
<b>A Topologia</b>	<b>135</b>
A.1 Limiti induttivi su spazi topologici . . . . .	136
A.1.1 Limiti induttivi di SVT . . . . .	136
<b>B Duali di <math>\ell_p</math></b>	<b>141</b>
B.1 Norme estese . . . . .	141
B.2 Duali di $\ell_p$ . . . . .	142
B.2.1 $\ell_1$ , $c_0$ e $\ell_\infty$ . . . . .	144

# Capitolo 1

## Norme e Seminorme

Il corso si concentra sulla relazione che si crea tra la struttura lineare e la struttura topologia degli spazi normati.

Per  $\mathbb{K}$  intendiamo un campo tra  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Norme e seminorme

**Definizione 1.1** (Seminorma).

Se  $X$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , una **seminorma** è una funzione  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$  tale che

1.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*Disuguaglianza triangolare*)
2.  $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$  se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  (*Positivamente omogenea*)
- 2'.  $\|\lambda x\| = \|x\|$  se  $|\lambda| = 1$  (*Isotropia*)

Se inoltre vale  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  allora  $\|\cdot\|$  è detta **norma**.

La coppia  $(X, \|\cdot\|)$  si dice **spazio (semi)normato**.

*Osservazione 1.2.*

Su uno spazio (semi)normato possiamo definire una (semi)distanza indotta ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Diamo alcuni esempi di spazi normati e seminormati:

**Esempio 1.3.** 1.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$

2. Per  $1 \leq p < \infty$ ,  $\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < \infty \right\}$  con  $\|x\|_p = \left( \sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{1/p}$

3.  $\ell_\infty = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup |x_i| < \infty \right\}$  con  $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$

4.  $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ misurabile, } \|f\|_p < \infty \right\}$  con

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf_{\substack{N \subseteq X, \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è uno spazio seminormato ma non normato.

## 5. Spazi di Hilbert.

**Definizione 1.4** (Funzioni continue, limitate e lineari).

Siano  $E, F$  spazi normati e  $S$  un insieme, definiamo i seguenti spazi normati:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(S, E) &= \{f : S \rightarrow E, \text{ limitate}\}, & \|f\|_{\infty, S} &= \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \\ \mathcal{BC}(S, E) &= \{f : S \rightarrow E, \text{ continue e limitate}\}, & \|f\|_{\infty, S} &= \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \\ L(E, F) &= \{T : E \rightarrow F \text{ lineare}, \|T\| < \infty\}, & \|T\| &= \sup_{x \in B_E(0,1)} \|T(x)\|_F\end{aligned}$$

**Definizione 1.5** (Spazio duale).

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Denotiamo con  $V'$  il **duale algebrico**, cioè l'insieme delle mappe lineari  $V \rightarrow \mathbb{K}$ .

Definiamo lo **spazio duale** a  $V$  come  $V^* = L(V, \mathbb{K})$ , cioè come il sottoinsieme di  $V'$  dato dalle mappe continue. La norma su  $V^*$  è quindi data da

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \stackrel{\text{Lineare}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

**Proposizione 1.6** (Per funzionale limitato equivale continuo).

*Per un funzionale lineare in  $V^*$ , essere limitato è equivalente ad essere continuo.*

*Dimostrazione.*

Se  $\|f\| = M \in \mathbb{R}_+$  allora

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \left\| f \left( \frac{x - y}{\|x - y\|} \right) \right\| \|x - y\| \leq \|f\| \|x - y\| = M \|x - y\|,$$

cioè  $f$  è  $M$ -lipschitz, e quindi continua.

Sia ora  $f$  lineare e continua. Per definizione di continuità in 0 esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \leq 1$  per ogni  $x \in B_V(0, \delta)$ . Segue che

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} f \left( \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\delta},$$

cioè  $\|f\|_{V^*} \leq 1/\delta$  e quindi  $f$  limitato.  $\square$

*Osservazione 1.7.*

Se  $(X, \|\cdot\|)$  è uno spazio seminormato e  $N = \ker \|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$  allora  $\|\cdot\|$  passa al quoziente e lo rende uno spazio normato.

**Esempio 1.8.**

Considerando lo spazio seminormato  $(\mathcal{L}^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ , la costruzione sopra corrisponde a definire lo spazio normato  $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ , infatti  $\ker \|\cdot\|_p$  sono le funzioni con supporto in un insieme trascurabile.

*Osservazione 1.9.*

$L(E, F) \hookrightarrow \mathcal{B}(B_E(0, 1), F)$  mandando  $T \mapsto T|_{B_E(0,1)}$ . Infatti per definizione questa mappa è isometrica<sup>1</sup>. Questo identifica il primo spazio con un chiuso del secondo.

<sup>1</sup> $\|T\| = \left\| T|_{B_E(0,1)} \right\|_{\infty, B_E(0,1)}$

### 1.1.1 Teoremini filosofici

**Teorema 1.10** (Banach Mazur).

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  normato,  $f : E \rightarrow E$  isometria<sup>2</sup>. Allora  $f$  è affine.

*Dimostrazione. (ESERCIZIO).*

TRACCIA:

- Basta provare che  $\forall a, b \in E$  vale

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

(conservando questa conserva i razionali 2-adici e quindi per continuità ogni combinazione convessa)

- Fissati  $a, b \in E$ , definiamo la *deficienza affine* di  $f$  (rispetto ad  $a$  e  $b$ )

$$def(f) = \left\| \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right\} \right\|$$

La tesi è  $def(f) = 0$ .

- Notiamo che

$$def(f) \leq \left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{f(a)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(b)}{2} \right\| = \frac{1}{2} (\|a+b\| + \|a\| + \|b\|)$$

- Consideriamo l'applicazione affine che scambia  $f(a)$  e  $f(b)$  data da

$$\rho(y) = f(a) + f(b) - y$$

Poniamo  $\tilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$ .

- Mostrare  $def(\tilde{f}) = 2def(f)$ .
- Se  $def(f) \neq 0$ , iterando otteniamo che esiste  $g$  tale che  $def(g)$  è arbitrariamente grande (raddoppio  $def(f)$  tante volte), ma questo è assurdo perché abbiamo il limite trovato prima che non dipende dalla funzione.

□

**Filosoficamente questo vuol dire che la struttura metrica in un qualche modo determina la struttura vettoriale.**

**Teorema 1.11** (Inclusione isometrica / Fréchet-Kuratowski).

Sia  $(M, d)$  spazio metrico. Allora esso si immerge isometricamente in uno spazio normato<sup>3</sup>. In particolare si immerge in  $(\mathcal{BC}(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  via l'assegnazione seguente:

Fissiamo un punto base  $x_0 \in M$ .<sup>4</sup>

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{BC}(M, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0) \end{array}$$

<sup>2</sup>con questo termine intendiamo che la mappa, oltre a rispettare le distanze, è anche bigettiva. Se non vale bigettività diremo "inclusione isometrica"

<sup>3</sup>addirittura di Banach.

<sup>4</sup>saremmo tentati da  $x \mapsto d(\cdot, x)$ , ma la funzione in arrivo non è limitata e quindi non esiste una norma ben definita

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO

□

Filosoficamente questo vuol dire che studiando mappe tra spazi metrici, possiamo pensare al codominio come spazi normati.

Se consideriamo l'immersione di uno spazio metrico in un Banach, possiamo “incicciottirlo” e trovare uno spazio metrico “vicino” che è localmente contraibile. Queste idee a volte possono aiutare.

## 1.2 Completezza

**Definizione 1.12** (Successione di Cauchy).

Una successione  $(x_n)$  è **di Cauchy** o **fondamentale** se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $p, q > n$  si ha  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ .

**Fatto 1.13** (Proprietà delle successioni di Cauchy).

1. Ogni successione convergente è di Cauchy.
2. Se  $(x_n)$  è di Cauchy e  $\tilde{x} \in X$  è un punto ad essa aderente allora  $\tilde{x}$  è il limite.
3. Se  $(x_n)$  come sopra ha una sottosuccessione convergente, la successione converge allo stesso limite.
4. Ogni successione di Cauchy<sup>5</sup>  $(x_n)$  ha una sottosuccessione  $(x_{n_k})$  tale che

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}.$$

**Definizione 1.14** (Spazio completo).

Uno spazio metrico  $(X, d)$  è **completo** se ogni successione di Cauchy in  $X$  converge.

Se  $(X, \|\cdot\|)$  spazio normato è completo rispetto alla distanza indotta da  $\|\cdot\|$  allora si dice **di Banach**.

*Osservazione 1.15.*

Uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$  è di Banach se e solo se ogni serie  $\sum x_k$  definita a partire da una successione tale che  $\|x_k\| < 2^{-k}$  è convergente.

Equivalentemente  $X$  di Banach se ogni serie  $\sum x_k$  assolutamente convergente<sup>6</sup> è convergente.

*Dimostrazione.*

Ogni successione si può scrivere come serie, infatti  $y_n = \sum_{i=0}^n x_i$  per  $x_i = y_i - y_{i-1}$ . Il resto segue pensando sulle definizioni. □

*Osservazione 1.16.*

Sia  $Y \subseteq X$  con  $(X, d)$  metrico.

- Se  $X$  è completo e  $Y$  è chiuso allora  $Y$  è completo.
- Se  $Y$  è completo allora è anche chiuso.

**Proposizione 1.17** (Completamento).

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, allora

<sup>5</sup>questa proprietà è comoda perché implica  $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < 2^{-k+1}$  per ogni  $p > k$

<sup>6</sup>cioè  $\sum \|x_k\|$  convergente



1. esiste una inclusione isometrica densa di  $X$  in uno spazio metrico completo

$$j : (X, d) \hookrightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$$

2. il completamento è universale, cioè se  $j' : (X, d) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{d}')$  è un'altra mappa come sopra allora esiste un'unica isometria  $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ & \searrow j' & \downarrow \phi \\ & & \tilde{X}' \end{array}$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo un paio di costruzioni

**Costruzione 1** Consideriamo

$$C_X = \{\xi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \xi \text{ di Cauchy}\}$$

con una semidistanza<sup>7</sup>

$$d(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \eta_n).$$

Questo limite esiste perché la successione di queste distanze è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ , che è completo. Notiamo che

$$d(\xi, \eta) = 0 \iff d(\xi_n, \eta_n) = o(1).$$

Notiamo che  $X$  ha una inclusione isometrica in  $(C_X, d)$  data associando a  $x$  la successione costante al valore  $x$ .

Consideriamo

$$\tilde{X} = C_X / \mathcal{R}, \quad \xi \mathcal{R} \eta \iff d(\xi, \eta) = 0.$$

L'inclusione isometrica di prima definisce  $X \hookrightarrow \tilde{X}$ , ma stavolta  $\tilde{X}$  è uno spazio metrico per costruzione.

**ESERCIZIO: VERIFICA PROPRIETÀ DI NORMA E DENSITÀ**

**Costruzione 2** Definiamo  $\tilde{X}$  come la chiusura in  $(\mathcal{BC}(X), \|\cdot\|_{\infty})$  dell'immagine di  $X$  tramite l'inclusione di Fréchet Kuratowski (1.11).

**Costruzione 3** (Solo per  $X$  spazio normato, ma per il teorema di inclusione isometrica (1.11) questo è sufficiente) Vedremo che esiste una inclusione isometrica di  $X$  nel suo biduale ( $x \mapsto \text{val}_x$ ) e che il biduale stesso è completo, quindi un completamento di  $X$  è fornito dalla chiusura di  $\text{val}_*(X) \subseteq X^{**}$

□

**Proposizione 1.18** (Estensione per densità di uniformemente continue).

Siano  $X$  e  $Y$  spazi metrici,  $Y$  completo,  $D \subseteq X$  denso e  $f : D \rightarrow Y$  uniformemente continua, allora esiste un'unica estensione continua  $\tilde{f}$  di  $f$  a tutto  $X$ , inoltre  $\tilde{f}$  è essa stessa uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{I} \cap & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

<sup>7</sup>VERIFICARE CHE LO È

**Definizione 1.19** (Categorie di spazi metrici).

Sia  $\text{Met}$  la categoria degli spazi metrici con mappe date da applicazioni uniformemente continue e  $\text{CMet}$  la sottocategoria piena dove gli oggetti sono spazi metrici completi

*Osservazione 1.20.*

L'operazione di completamento è un funtore<sup>8</sup>  $\sim : \text{Met} \rightarrow \text{CMet}$ . Questo funtore è aggiunto al funtore dimenticante / di inclusione  $j : \text{CMet} \rightarrow \text{Met}$ , infatti

$$\text{Hom}_{\text{CMet}}(\tilde{X}, Y) = UC(\tilde{X}, Y) \stackrel{(1.18)}{\cong} UC(X, j(Y)) = \text{Hom}_{\text{Met}}(X, j(Y)).$$

**Esercizio 1.21.**

Verificare l'aggiunzione.

## 1.3 Prodotto di spazi (semi)normati

*Osservazione 1.22.*

Se  $Y \subseteq X$  è un sottospazio vettoriale e  $(X, \|\cdot\|)$  è normato allora  $Y$  è (semi)normato con la norma indotta. La topologia indotta è quella di sottospazio

**Definizione 1.23** (Prodotto di spazi (semi)normati).

Se  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sono spazi (semi)normati, la (semi)norma prodotto è data da

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Questa rende  $X \times Y$  uno spazio (semi)normato e

$$B_{X \times Y}((0, 0), 1) = B_X(0, 1) \times B_Y(0, 1),$$

cioè la topologia indotta è la topologia prodotto.

**Definizione 1.24** (Somma diretta topologica).

Due sottospazi di  $(X, \|\cdot\|)$   $Y$  e  $Z$  sono in **somma diretta algebrica** se  $+|_{Y \times Z} : Y \times Z \rightarrow X$  è bigettiva. Se  $+|_{Y \times Z}$  è anche un omeomorfismo diciamo che  $X$  è la **somma diretta topologica** di  $Y$  e  $Z$ .

*Osservazione 1.25.*

$X$  è la somma diretta topologica di  $Y$  e  $Z$  se  $X$  è isomorfo come spazio normato a  $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$ .

*Osservazione 1.26.*

La mappa  $+|_{Y \times Z}$  è sempre continua, ma in generale non è un omeomorfismo.

**Definizione 1.27** (Proiettore).

Un endomorfismo lineare  $P : X \rightarrow X$  si dice **proiettore** se è idempotente, cioè  $P^2 = P$ .

*Osservazione 1.28.*

Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta algebrica  $X = \ker P \oplus \text{Im } P$ . Viceversa, ad ogni decomposizione in somma diretta algebrica possiamo associare un proiettore

---

<sup>8</sup>preserva composizione per l'unicità della mappa tra estensioni

*Osservazione 1.29.*

I proiettori  $P_Y : X \rightarrow Y$  e  $P_Z = id - P_Y : X \rightarrow Z$  sono continui se e solo se la somma è topologica, infatti

$$(+|_{Y \times Z})^{-1} = P_Y \times P_Z.$$

**Definizione 1.30** (Spazio (semi)normato quoziente).

Se  $(X, \|\cdot\|)$  è (semi)normato e  $Y$  è un suo sottospazio allora come spazio vettoriale

$$X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}.$$

Su essa definiamo la seguente norma: se  $\xi \in X/Y$  allora<sup>9</sup>

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

**Esercizio 1.31.**

$\|\cdot\|_{X/Y}$  è una seminorma su  $X/Y$  e rende la proiezione  $\pi : X \rightarrow X/Y$  una applicazione aperta e continua. Più precisamente

$$\pi(B_X(0, 1)) = B_{X/Y}(0, 1)$$

*Dimostrazione.*

Continua perché  $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|$  per definizione di estremo inferiore, quindi  $\pi$  ha norma come operatore  $\leq 1$ , e quindi è continua.  $\square$

*Osservazione 1.32.*

Notiamo che  $X/Y$  ha effettivamente la topologia quoziente indotta da  $\pi$

**Esercizio 1.33.**

La (semi)norma quoziente è una norma se e solo se  $Y$  è chiuso (a prescindere dal fatto che  $\|\cdot\|_X$  sia una norma o seminorma).

*Osservazione 1.34.*

Se  $Y$  e  $Z$  sono seminormati allora  $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$  come spazi seminormati.

*Osservazione 1.35.*

Se  $Y \subseteq X$  ed esiste<sup>10</sup>  $Z$  tale che  $X = Y \oplus Z$  allora  $Z \cong X/Y$ .

*Osservazione 1.36.*

In generale  $X$  non è isomorfo a  $Y \times X/Y$ .

*Osservazione 1.37.*

Per quanto riguarda la completezza in queste costruzioni:

- $Y$  sottospazio di  $X$  con  $X$  di Banach è un Banach se e solo se è chiuso
- $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$  è Banach se e solo se lo sono sia  $Y$  che  $Z$
- Se  $(X, \|\cdot\|)$  è normato e  $Y \subseteq X$  è un sottospazio chiuso allora  $(X, \|\cdot\|)$  è completo se e solo se sia  $Y$  che  $X/Y$  sono completi.

Notiamo che l'ultima proprietà implica la seconda, infatti  $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$

**Proposizione 1.38** (Duale del prodotto).

Dati  $X$  e  $Y$  spazi di Banach, il duale di  $X \times Y$  è isometricamente isomorfo a

$$(X^* \times Y^*, \|\cdot\|)$$

dove  $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{X^*} + \|\eta\|_{Y^*}$  (che è topologicamente equivalente a  $\|\cdot\|_{X^* \times Y^*}$ ).

$$(X^* \times Y^*, \|P_{X^*}(\cdot)\|_{X^*} + \|P_{Y^*}(\cdot)\|_{Y^*}) \cong ((X \times Y)^*, \|\cdot\|_{(X \times Y)^*}).$$

<sup>9</sup> pensando a  $\xi$  come un traslato di  $Y$ , la norma che stiamo definendo è la distanza di questo spazio affine dall'origine.

<sup>10</sup> ci sono casi in cui non esiste, come  $c_0 \subseteq \ell_\infty$

## 1.4 Elenco di spazi completi

### Proposizione 1.39.

Sia  $S$  insieme e  $E$  Banach, allora lo spazio normato  $(\mathcal{B}(S, E), \|\cdot\|_{\infty, S})$  è completo.

*Dimostrazione.*

[PERSO, RIGUARDA POI]

tale che  $\|f(s)\| = \|\sum_k f_k(s)\| \leq \sum_k \|f_k(s)\| \leq \sum \|f\|_{\infty, S}$

quindi  $\|f\|_{\infty, S}$

□

**Uno degli strumenti dell'analista: aggiungere e togliere, cioè**

*προσθαφαιρέσεις*

### Lemma 1.40.

Se  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(S, E)$  con  $f_k$  continua in  $s_0$  per ogni  $k$  e  $f_k \rightarrow f$  uniformemente allora anche  $f$  è continua in  $s_0$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(s_0)\| &\leq \|f(s) - f_k(s)\| + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| + \|f_k(s_0) - f(s_0)\| \leq \\ &\leq 2\|f - f_k\|_{\infty, S} + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| \end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di  $f_k \rightarrow f$  si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\|f - f_n\|_{\infty, S} \leq \varepsilon/3$ .

Per la continuità in  $s_0$  di  $f_n$  esiste un intorno  $U$  di  $s_0$  tale che  $\|f_n(s) - f_n(s_0)\| \leq \varepsilon/3$  per ogni  $s \in U$ . Allora per ogni  $s \in U$  si ha

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

### Proposizione 1.41.

Sia  $S$  spazio topologico,  $E$  banach, allora  $\mathcal{BC}(S, E)$  è completo.

*Dimostrazione.*

Basta mostrare che  $\mathcal{BC}(S, E)$  è chiuso in  $\mathcal{B}(S, E)$ . Questo segue dal fatto che la continuità in un punto  $s_0 \in S$  si conserva per convergenza uniforme, che è il lemma precedente. □

### Esempio 1.42.

Sia  $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  la compattificazione di Alexandrov di  $\mathbb{N}$  e  $E$  un banach, allora

$$c(E) \doteq \{x : \mathbb{N} \rightarrow E, \text{ convergente} \} \cong \mathcal{BC}(S, E)$$

Questo mostra che  $c(E)$  è chiuso (e quindi completo) in  $\ell_\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ .

Conseguenze:

### Proposizione 1.43.

Lo spazio  $(L(X, Y), \|\cdot\|)$  è completo

*Dimostrazione.*

Considerando l'inclusione isometrica

$$R: \begin{array}{ccc} L(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{B}(B_X(0, 1), Y) \\ T & \longmapsto & T|_{B_X(0, 1)} \end{array}$$

basta vedere che  $R(L(X, Y))$  è chiuso.

Se  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L(X, Y)$  è tale che  $R(T_n) \rightarrow f$  uniformemente in  $\mathcal{B}(B_X(0, 1), Y)$  allora mostriamo che  $f$  è la restrizione a  $B_X(0, 1)$  di una qualche lineare  $T$ .

Mostriamo che le  $T_n$  convergono puntualmente per ogni  $x \in X$ : se  $x = 0$  ok, se  $x \neq 0$

$$T_n(x) = \|x\| T_n(x/\|x\|) = \|x\| R(T_n)(x/\|x\|) \rightarrow \|x\| f(x/\|x\|)$$

Sia  $T: X \rightarrow Y$  definita da  $T(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$

[MOSTRARE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME, ME LO SONO PERSONO] □

**Corollario 1.44** (Duale di spazio normato è banach).

*Il duale di uno spazio normato è sempre banach.*

**Teorema 1.45** (Integrazione per serie).

*Sia  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è uno spazio di misura e sia  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$  tali che*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$$

*Allora  $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$  converge q.o. e in norma 1.*

*Dimostrazione.*

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_k(x)|.$$

Notiamo che  $(g_n)$  è una successione di funzioni misurabili non negative crescente.

Inoltre  $g_n \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)|$  per definizione di serie.

Per convergenza monotona

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 \leftarrow \sum_{k=0}^n \|f_k\|_1 = \inf_X g_n d\mu \rightarrow \int_X g d\mu$$

cioè  $\int_X g d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$ , cioè  $g \in \mathcal{L}^1$ .

Inoltre  $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$  è una successione dominata da  $g$ :

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k(x)| \leq g(x).$$

Quindi la serie  $\sum f_k(x)$  è una serie assolutamente convergente per ogni  $x$  dove  $g < \infty$ . Poiché  $\int g < \infty$  le eccezioni sono trascurabili, quindi quasi ovunque  $\sum f_k(x)$  è assolutamente convergente.

Sia  $f(x) = \sum f_k(x)$  dove la serie converge. Notiamo che

$$|f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| = g(x),$$

quindi  $\|f\|_1 \leq \int g d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1$ .

Applicando come prima la stima alle code

$$\|f - s_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_1 = o(1)$$

dove l'ultimo termine va a 0 perché  $\sum \|f_k\|_1$  è convergente.  $\square$

**Corollario 1.46** (Weil).

Siano  $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$  convergenti in  $\|\cdot\|_1$ . Allora esiste  $n_k$  successione strettamente crescente di indici tali che  $f_{n_k}$  converge quasi ovunque ed è dominata in  $\mathcal{L}^1$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $f$  il limite in  $\|\cdot\|_1$ . Data questa convergenza consideriamo una sottosuccessione  $n_k$  tale che  $\|f - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$ . Scrivendo la successione in termini di una somma telescopica

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=1}^k (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$$

si ha per il teorema di integrazione per serie<sup>11</sup> (1.45)  $f_{n_k}$  converge quasi ovunque e in  $L^1$ , inoltre è dominata da

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \geq |f_{n_k}(x)|$$

con  $g(x) \in \mathcal{L}^1$ .  $\square$

**Proposizione 1.47** ( $L^1$  è completo).

Se  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è uno spazio di misura,  $L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è completo.

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente dal teorema di integrazione per serie (1.45).  $\square$

*Osservazione 1.48.*

La convergenza quasi ovunque di funzioni  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$  è **NON** la convergenza rispetto a una topologia opportuna su  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ .

**Proposizione 1.49** (Proprietà di Urisohn).

Ogni convergenza topologica in  $X$  insieme ha la seguente proprietà **di Urisohn**:  $x_n \rightarrow x$  rispetto alla topologia se e solo se per ogni sottosuccessione  $x_{n_k}$  esiste una sotto-sottosuccessione  $x_{n_{k_j}} \rightarrow x$ .

*Dimostrazione.*

Se  $x_n \rightarrow x$  converge ok. Se non converge allora esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che  $x_n \notin U$  frequentemente, quindi troviamo una sottosuccessione  $x_{n_k}$  che sta sempre fuori da  $U$ , quindi nessuna sua sotto-sottosuccessione può convergere a  $x$ .  $\square$

La convergenza q.o. per successioni in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  non ha la proprietà di Urisohn.

**Definizione 1.50** (Operatore di composizione).

Se  $E$  è uno spazio di funzioni con codominio  $\mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiamo l'operatore di composizione per  $f$  come  $E \ni u \mapsto f \circ u$ .

<sup>11</sup>  $\|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\|_1 \leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} - f\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j-1}} - f\|_1 < \infty$

**Lemma 1.51.**

Sia  $u_k$  una successione che converge a  $u$  in  $\|\cdot\|_p$ . A meno di sottosuccessione  $u_k \rightarrow u$  quasi ovunque e dominata in  $\mathcal{L}^p$ .

*Dimostrazione.*

Teorema di Weil (1.46) in  $\mathcal{L}^p$ . □

**Proposizione 1.52.**

Lo spazio  $L^p(X, \mathcal{Q}, \mu)$  per  $0 \leq p < \infty$  è completo.

*Dimostrazione.*

$L^p$  ed  $L^1$  NON sono isomorfi come spazi di Banach in generale<sup>12</sup>, ma esiste un omeomorfismo localmente Lipschitz e questo basta a mostrare la completezza: se  $u_k$  è una successione di Cauchy in  $L^p$ , se  $\Phi$  è Lipschitz allora  $\Phi(u_k)$  è ancora di Cauchy in  $L^1$  e quindi converge, poi torno indietro con  $\Phi^{-1}$ , che mantiene il limite per continuità.

Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \\ u & \longmapsto & |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$

Chiaramente è invertibile mandando  $v \in L^1$  in  $|v|^{1/p} \operatorname{sgn} v$ . La mappa  $\Phi$  è l'operatore di composizione con la funzione  $f(t) = |t|^p \operatorname{sgn} t$ . La continuità degli operatori di composizione è un fatto generale. Se  $u_k \rightarrow u$  converge in  $\|\cdot\|_p$  allora per il lemma a meno di sottosuccessione converge q.o. e dominata, quindi componendo con  $f$  abbiamo ancora convergenza quasi ovunque per continuità ( $f(u_k) \rightarrow f(u)$  q.o.). Se  $|u_k| \leq g$  in  $\mathcal{L}^p$  allora  $|u_k|^p \leq g^p$  in  $\mathcal{L}^1$ , similmente per  $\Phi^{-1}$ , quindi effettivamente  $\Phi$  è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che  $\Phi$  è localmente lipschitz: siano  $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 = \int_X |f(u(x)) - f(v(x))| d\mu(x)$$

ma se  $t < s$  allora  $|f(t) - f(s)| \leq \sup_{t \leq \xi \leq s} |f'(\xi)| |t - s|$  e  $|f'(xi)| = p |xi|^{p-1} \leq p(\max\{|t|, |s|\})^p$ , quindi

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)|_1 &\leq p \int_X \max\{|u(x)|^{p-1}, |v(x)|^{p-1}\} |u(x) - v(x)| d\mu \leq \\ &\leq p \int_X \left( |u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1} \right) |u(x) - v(x)| d\mu \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq p \left( \left( \int_X |u|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left( \int_X |v|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \right) \left( \int_X |u - v|^p \right)^{1/p} = \\ &\stackrel{p-1=p/q}{=} p(\|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1}) \|u - v\|_p \end{aligned}$$

quindi  $\Phi$  è Lipschitz di costante  $2pR^{p-1}$  sulla palla  $B_{L^p}(0, R) \subseteq L^p$  □

**Proposizione 1.53.**

Lo spazio  $L^\infty(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è completo

*Dimostrazione.*

[NON HO VISTO, RIGUARDA I PDF] □

$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty, \Omega} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{\infty, \Omega}$ . Questa norma rende continua l'immersione  $C_b^1 \rightarrow (C_b^0)^{n+1}$  data da  $f \mapsto (f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$

<sup>12</sup>cursiosità non banale da vedere

**Proposizione 1.54.**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Lo spazio

$$C_b^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{di classe } C^k \text{ con derivate limitate su } \Omega \text{ fino all'ordine } k\}$$

è completo.

*Dimostrazione.*

Il caso  $k = 1$  è una conseguenza del teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se  $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\partial_i f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $\partial_i f_k \rightarrow g_i$  uniformemente in  $\Omega$  e  $f_k \rightarrow f$  puntualmente in  $\Omega$  allora esiste  $\partial_i f$  e vale  $g_i$ . Se poi  $f_k \in C^1(\Omega)$  allora la  $g_i$  è continua perché limite uniforme di  $\partial_i f_k$  continue, quindi per il teorema del differenziale totale la  $f$  è anche  $C^1$ .

Per il teorema di limite sotto il segno di derivata, l'immersione  $C_b^1 \rightarrow (C_b^0)^{n+1}$  ha immagine chiusa, infatti una successione  $(f_k, \partial_1 f_k, \dots, \partial_n f_k)$  nell'immagine convergente a  $(f, g_1, \dots, g_n)$  è proprio una delle ipotesi del teorema di convergenza sotto segno di derivata, quindi  $f_k \rightarrow f$  in  $C^1$   $\square$



## Capitolo 2

# Spazi vettoriali topologici

**Definizione 2.1** (Spazio vettoriale topologico).

Uno **spazio vettoriale topologico** è uno spazio vettoriale  $X$  su  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  munito di una topologia che rende continue le mappe

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X.$$

**Esempio 2.2.**

Esempi di SVT sono

- Ogni spazio normato
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.
- Se  $X$  è uno spazio topologico qualunque considero  $C(X, \mathbb{R})$  con topologia di convergenza uniforme su compatti.

**Esercizio 2.3.**

La topologia della convergenza uniforme su compatti su  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  non è indotta da una norma.

*Dimostrazione.*

TRACCIA

- Su uno spazio normato, se  $U$  e  $V$  sono intorni di 0 allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\lambda U \supseteq V$ .
- Mostrare che la topologia della convergenza uniforme su compatti non ha questa proprietà.

□

**Esercizio 2.4.**

Ogni SVT che è  $T_0$  è anche<sup>1</sup>  $T_3$  e<sup>2</sup>  $T_{3\frac{1}{2}}$

**Esercizio 2.5** (Spazi non  $T_0$  non sono troppi interessanti).

Ogni SVT  $X$  si decompone in somma diretta topologica  $X = Y \oplus \overline{\{0\}}$  con  $Y$  qualunque addendo algebrico di  $\{0\}$ . Segue che  $Y \cong X/\{0\}$ ,  $Y$  risulta essere  $T_0$  e  $\{0\}$  ha la topologia indiscreta.

<sup>1</sup>In questo corso con  $T_3$  intendiamo  $T_3$  e Hausdorff

<sup>2</sup> $T_{3\frac{1}{2}}$  è  $T_3$  più esiste una funzione continua che vale 1 sul punto e 0 sul chiuso che sto separando

## 2.1 Intorni dell'origine in SVT

**Definizione 2.6** (Filtro).

Un **filtro**  $\mathcal{F}$  su un insieme  $X$  è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di  $X$  tale che

- per ogni  $F \in \mathcal{F}$ ,  $F \neq \emptyset$
- Se  $F \in \mathcal{F}$  e  $F \subseteq F'$  allora  $F' \in \mathcal{F}$
- Se  $F, F' \in \mathcal{F}$  allora  $F \cap F' \in \mathcal{F}$

**Definizione 2.7** (Sottoinsieme bilanciato).

Sia  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e  $A \subseteq X$ .  $A$  è **bilanciato** se per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $|\lambda| \leq 1$  si ha  $a \in A \implies \lambda a \in A$ , cioè

$$B_{\mathbb{K}}(0, 1) \cdot A \subseteq A.$$

*Osservazione 2.8.*

Se  $V$  è bilanciato allora  $0 \in V$  perché  $0 \in B_{\mathbb{K}}(0, 1)$ .

**Definizione 2.9** (Sottoinsieme assorbente).

Sia  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e  $B \subseteq X$ .  $B$  è **assorbente** se per ogni  $x \in X$  esiste  $n_x \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $t \geq n_x$  si ha  $x \in tB$ .

*Osservazione 2.10.*

Poiché in uno SVT le traslazioni  $X \rightarrow X$  con  $x \mapsto x + x_0$  sono omeomorfismi, per descrivere la topologia basta descrivere il filtro degli intorni di 0.

Come notazione sia  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$  l'insieme degli intorni di  $0 \in X$ .

**Proposizione 2.11** (Proprietà intorni di 0).

$\mathcal{U}$  ha le seguenti proprietà

1.  $\mathcal{U}$  è un filtro
2. Per ogni  $U \in \mathcal{U}$  esiste  $V \in \mathcal{U}$  tale che  $V + V \subseteq U$
3. Per ogni  $U \in \mathcal{U}$  esiste  $V \in \mathcal{U}$  con  $V \subseteq U$  e  $V$  bilanciato
4. Ogni elemento di  $\mathcal{U}$  è assorbente

*Dimostrazione.*

Dimostriamo le varie proprietà

1. La proprietà 1. è vera per ogni insieme definito come “gli intorni di  $x$ ” per  $x$  fissato in spazio topologico  $X$ .
2. Segue dalla continuità di  $+$  in  $(0, 0) \in X \times X$ . Basta definire  $V$  in modo tale che  $V \times V \subseteq +^{-1}(U)$ .
3. Segue dalla continuità di  $\cdot$  in  $(0, 0)$ . Se  $U$  intorno di 0 in  $X$ , siano  $\varepsilon > 0$  e  $V \in \mathcal{U}$  tali che  $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \times V \subseteq \cdot^{-1}(U)$ . Allora  $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \cdot V$  è bilanciato e contenuto in  $U$  per costruzione. Questo insieme è anche un intorno perché si può scrivere come

$$\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$$

e poiché  $V$  è un intorno di 0, ogni  $\lambda V$  è un intorno di 0, quindi anche questa unione.

4. Segue dalla continuità della mappa  $\mathbb{R}_+ \rightarrow X$  che per fissato  $x_0 \in X$  assegna  $s \mapsto sx_0$ . Infatti per ogni  $U \in \mathcal{U}$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $0 \leq s \leq \varepsilon$ ,  $sx_0 \in U$  e riscrivendo questo in termini di  $t = 1/s$  abbiamo  $x_0 \in tU$  per ogni  $t \geq 1/\varepsilon$ . Come  $n_{x_0}$  basta scegliere  $\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$ .

□

### Esercizio 2.12.

Sia  $X$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $\mathcal{U}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  tali che valgano le quattro proprietà della proposizione precedente (2.11). Allora esiste un'unica topologia su  $X$  che rende  $X$  uno SVT e tale che  $\mathcal{U}$  è il filtro degli intorno di 0. In questa topologia  $\mathcal{U}$  è un sistema fondamentale di intorno per 0.

*Dimostrazione.*

L'idea è che definiamo  $A \subseteq X$  aperto se e solo se per ogni  $a \in A$ ,  $A - a \in \mathcal{U}$  (sto traducendo “aperto  $\iff$  intorno di ogni suo punto”). Si può mostrare che questa scelta definisce una topologia che rende  $X$  uno SVT. □

### Esercizio 2.13.

Definire analogamente una topologia di SVT su  $X$  tramite degli assiomi che si basano su una base di intorno di 0 (al posto di tutti gli intorno). Per esempio la famiglia degli intorno bilanciati di 0.

*Osservazione 2.14.*

Se uno SVT è  $T_0$  allora è automaticamente  $T_1$  e  $T_2$ , basta sfruttare proprietà di simmetria.

*Osservazione 2.15.*

Ogni SVT è uno spazio topologico regolare, cioè ogni punto ha una base di intorno chiusi. Se  $X$  è anche  $T_0$  allora  $X$  è  $T_3$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $C$  un chiuso di  $X$  e  $x \in X$  con  $x \notin C$ . Sia  $U \in \mathcal{U}_X$  tale che  $x + U \cap C = \emptyset$ , che esiste perché  $C$  è chiuso. Sia  $V \in \mathcal{U}_X$  tale che  $V - V \subseteq U$ , allora<sup>3</sup>  $(x + V) \cap (C + V) = \emptyset$  dove  $C + V$  è un intorno di  $c$  per ogni  $c \in C$  per definizione. □

*Osservazione 2.16.*

Se  $K$  è compatto,  $C$  chiuso con  $K \cap C = \emptyset$  allora esiste  $V$  tale che  $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni  $x \in K$  sia  $V_x \in \mathcal{U}_X$  tale che  $x + (V_x + V_x - V_x)$  è disgiunto da  $C$ . Abbiamo dunque un ricoprimento  $\{x + V_x\}_{x \in K}$  di  $K$ , che è compatto, quindi estraggo un sottoricoprimento finito  $\{x_i + V_{x_i}\}$  e definisco  $V$  come l'intersezione di questi. Allora

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset,$$

infatti se  $x \in K + V$  allora  $x = k + v$  con  $k \in K$  e  $v \in V$  ma  $k \in x_i + V_{x_i}$  per qualche  $i$ , quindi  $x = x_i + v_i + v$ , e avendo supposto che  $x_i + (V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i}) \cap C = \emptyset$  abbiamo che  $x = x_i + v_i + v \notin C + V$ . □

<sup>3</sup>Un insieme come  $C + V$  è detto intorno uniforme di  $C$

## 2.2 SVT localmente convessi

**Definizione 2.17** (SVT localmente convesso).

Uno **spazio vettoriale topologico localmente convesso** (SVTLC) è uno SVT tale che 0 ha una base di intorni convessi.

**Esempio 2.18.**

Diamo alcuni esempi

- Ogni spazio normato
- $C(X)$  con  $X$  spazio topologico con la topologia della convergenza uniforme sui compatti
- $C^\infty(\Omega)$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e topologia della convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate in ogni ordine

**Esercizio 2.19.**

Sia  $\mathcal{M} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{misurabili}\}$ , allora esiste una metrica su  $\mathcal{M}$  che lo rende uno SVT e tale che  $f_n \rightarrow f$  se e solo se  $f_n \rightarrow f$  in misura, cioè per ogni

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\{ |f_n| > \varepsilon \}| = 0$$

Mostrare che l'unico intorno convesso di 0 è  $\mathcal{M}$  stesso, da cui segue  $\mathcal{M}^* = \{0\}$ .

*Osservazione 2.20.*

Per ciò che sappiamo sugli intorni di 0 in uno SVT, se  $X$  è SVTLC allora esiste una base  $\mathcal{B}$  data dagli intorni di 0 assorbenti, bilanciati e convessi.

**Definizione 2.21** (Disco).

Un insieme  $B$  è detto **disco** se è assorbente, bilanciato e convesso.

**Proposizione 2.22.**

Sia  $X$  un  $\mathbb{R}$ -SV e  $\mathcal{B}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  tale che

- Per ogni  $B \in \mathcal{B}$ ,  $B$  è Assorbente, Bilanciato e Convesso
- Per ogni  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  si ha  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

allora  $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists r > 0, \exists B \in \mathcal{B} \mid rB \subseteq U\}$  è un filtro di insiemi che induce una topologia che rende  $X$  uno SVT come da esercizio (2.12). La topologia indotta è anche localmente convessa.

*Dimostrazione.*

Mostriamo le quattro proprietà:

- Chiaramente  $\mathcal{U}$  è un filtro.
- Ogni  $U \in \mathcal{U}$  è assorbente perché lo sono gli elementi di  $\mathcal{B}$
- Per ogni  $U \in \mathcal{U}$  esiste  $V \in \mathcal{U}$  tale che  $V + V \subseteq U$ , basta scegliere  $V = \frac{1}{2}B$  con  $B \subseteq U$  convesso in quanto se  $B$  è convesso  $B + B = 2B$
- Ogni  $U \in \mathcal{U}$  contiene un bilanciato perché contiene una versione scalata di un elemento di  $\mathcal{B}$ .

□

*Osservazione 2.23.*

Se  $\mathcal{B}$  è una famiglia di dischi allora definendo  $\tilde{\mathcal{B}} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$  si ha che  $\tilde{\mathcal{B}}$  rispetta gli assiomi della proposizione (2.22) e quindi induce una topologia su  $X$  che lo rende uno SVT. Questa è la meno fine tale che  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$ . In particolare  $\mathcal{U}_X$  ha una base data da  $\{rB \mid B \in \tilde{\mathcal{B}}\}$ .

### 2.2.1 Funzionali di Minkowski

**Definizione 2.24** (Funzionale di Minkowski).

Sia  $X$  un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale,  $C \subseteq X$  convesso,  $0 \in C$ . Il **funzionale di Minkowski** associato a  $C$  è dato da:

$$p_C : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \inf \{t \geq 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

dove  $\inf \emptyset = \infty$  in questo formalismo.

*Osservazione 2.25.*

Se  $B(0, 1) \subseteq C \subseteq \overline{B(0, 1)}$  per  $X$  normato allora  $p_C(x) = \|x\|$ .

**Proposizione 2.26** (Proprietà funzionali di Minkowski).

*Valgono le seguenti proprietà*

- $C$  è assorbente se e solo se  $p_C(x) < \infty$  per ogni  $x \in X$ .
- Si ha  $\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$

*Dimostrazione.*

Mostriamo le varie proprietà

- Evidente dalla definizione di assorbente.
- Se  $p_C(x) < 1$  allora esiste  $0 \leq t \leq 1$  tale che  $x \in tC$ , cioè  $x = tc$ . Poiché  $(1-t)0 = 0$  si ha  $x = tc + (1-t)0$  e per convessità questo è un elemento di  $C$ , cioè  $x \in C$ .  
Se  $x \in C$  allora  $1 \in \{t \geq 0 \mid x \in tC\}$ , quindi  $p_C(x) \leq 1$ .

□

*Osservazione 2.27* (Famiglia di seminorme induce SVTLC).

Se  $\mathcal{P}$  è una famiglia di seminorme su  $X$ , possiamo definire

$$\mathcal{B} = \{B_p(0, r) \mid p \in \mathcal{P}, r \in \mathbb{R}_+\}, \quad B_p(0, r) = \{y \in X \mid p(x - y) < r\}$$

Si può mostrare che  $\mathcal{B}$  è un insieme di dischi e quindi induce una struttura di SVTLC su  $X$ .

*Osservazione 2.28.*

Se  $\mathcal{P}$  è una famiglia di seminorme su  $X$  e definiamo

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\max(p_1, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathcal{P}\}$$

allora  $\mathcal{U} = \{B_p(0, r) \mid p \in \tilde{\mathcal{P}}, r > 0\}$  è una base di intorni di 0 che induce la topologia dell'osservazione precedente.

*Osservazione 2.29* (Ogni SVTLC è indotto da seminorme).

Poiché se  $B$  è assorbente, bilanciato e convesso, esso produce una seminorma  $p_B$  data dal funzionale di Minkowski tale che  $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$ , ogni topologia di  $X$  come SVTLC si può ottenere a partire da famiglie di seminorme.

**Proposizione 2.30.**

*La topologia di SVTLC indotta da  $\mathcal{P}$  insieme di seminorme è  $T_0$  se e solo se  $\mathcal{P}$  è separante, cioè per ogni  $x \in X \setminus \{0\}$  esiste  $p \in \mathcal{P}$  tale che  $p(x) \neq 0$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $p(x) = 0$  per ogni  $p \in \mathcal{P}$  allora  $x \in B(0, r)$  per ogni  $p \in \tilde{\mathcal{P}}$  e per ogni  $r > 0$ , quindi  $x \in U$  per ogni  $U \in \mathcal{U}_X$ , ovvero

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_X} U = \overline{\{0\}}.$$

□

## 2.3 Continuità di operatori lineari in SVT

**Proposizione 2.31** (Continuità mappe lineari).

Sia  $T : X \rightarrow Y$  lineare tra SVT. Valgono le seguenti affermazioni

1.  $T$  è continua se e solo se è continua in 0
2.  $T$  è continua se e solo se per ogni  $U \in \mathcal{U}_Y$  esiste  $V \in \mathcal{U}_X$  tale che  $T(V) \subseteq U$
3. Se  $X$  e  $Y$  sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  rispettivamente,  $T$  è continua se e solo se

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \exists M \geq 0 \quad \text{tali che}$$

$$\forall x \in X, q(Tx) \leq M \max \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$$

4. Se  $X$  e  $Y$  sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  rispettivamente con  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  stabili per max allora  $T$  è continua se e solo se  $\forall q \in \mathcal{Q}$  esistono  $p \in \mathcal{P}$  e  $M \geq 0$  tali che

$$q(Tx) \leq Mp(x)$$

*Dimostrazione.*

Dimostriamo le affermazioni

1. Basta traslare dato che traslare è un omeomorfismo.
2. Ovvio.
3. La condizione significa che la palla di centro 0 e raggio 1 rispettivamente alla seminorma  $\max(p_1, \dots, p_n)$  di  $X$  ha immagine tramite  $T$  contenuta nella palla di raggio  $M$  rispetto a  $q$ , concludendo per il punto 2. a meno di omotetia.
4. Caso sopra.

□

**Proposizione 2.32** (Caratterizzazione funzionali continui).

Sia  $f \in X'_{alg} \setminus \{0\}$  con  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1.  $f$  è continua
2.  $\ker f$  è chiuso
3.  $\ker f$  non è denso
4.  $f$  non è surgettiva su un aperto non vuoto

5.  $f$  è limitata su un intorno di 0

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

1.  $\implies$  2. Ovvio perché  $\{0\}$  è chiuso in  $\mathbb{K}$ .
2.  $\implies$  3. Se  $\ker f$  è denso allora  $\overline{\ker f} = X$  e quindi ha codimensione 0, ma  $\ker f$  ha codimensione 1 in quanto  $f \neq 0$ , quindi  $\ker f \neq \overline{\ker f}$ , cioè non è chiuso.
3.  $\implies$  4. Se  $\ker f$  non è denso esiste un aperto non vuoto  $A$  disgiunto da  $\ker f$ , cioè  $0 \notin f(A)$  e in particolare  $f$  non è surgettiva su  $A$ .
4.  $\implies$  5. Se  $f$  non è surgettiva su aperto non vuoto allora non lo è su un intorno bilanciato  $U$  di 0 e quindi  $f(U)$  è un insieme bilanciato di  $\mathbb{K}$  diverso da  $\mathbb{K}$  in quanto  $f \neq 0$ , dunque  $f(U)$  è un disco e in particolare è limitato.
5.  $\implies$  1. Se  $|fx| \leq M$  per ogni  $x \in U \in \mathcal{U}_X$  allora per omogeneità

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{M}U \in \mathcal{U}_X$$

per un qualsiasi  $\varepsilon > 0$ , quindi  $f$  è continua in 0. Questo conclude perché

$$f(x) = f(x_0) + f(x - x_0).$$

□

## 2.4 SVT I-numerabili e paranorme

**Definizione 2.33** (Paranorma).

Una **paranorma** sull'  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $X$  è una funzione  $q : X \rightarrow [0, \infty)$  tale che

1.  $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$
2.  $q(\lambda x) \leq q(x)$  per ogni  $x \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $|\lambda| \leq 1$
3. Se  $\lambda_k \rightarrow 0$  in  $\mathbb{K}$  allora  $q(\lambda_k x) \rightarrow 0$

Inoltre  $q$  è **definita** se vale

$$q(x) = 0 \iff x = 0.$$

*Osservazione 2.34.*

Dalla proprietà 2. segue che  $q(\lambda x) = q(x)$  se  $|\lambda| = 1$  e che  $q(\lambda x) \leq q(\mu x)$  se  $|\lambda| \leq |\mu|$ . In particolare  $q(x) = q(-x)$ .

Quindi  $d(x, y) = q(x - y)$  è una (semi)distanza su  $X$  (distanza se  $q$  definita).

**Esercizio 2.35.**

Dimostrare che  $(X, d)$  è uno SVT per  $d$  indotta da paranorma  $q$ .

**Esercizio 2.36.**

Sia  $X$  un  $\mathbb{K}$ -SVT I-numerabile. Allora la sua topologia proviene da una paranorma (la quale è definita sse  $X$  è  $T_0$ ).

*Dimostrazione.*

TRACCIA

- Sia  $\{U_n\}_{n \geq 0}$  base numerabile di intorno bilanciati di 0 tali che  $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$ .
- Estendiamo la successione per  $n < 0$  ponendo  $U_k = U_{k+1} + U_{k+1}$  per ogni  $k < 0$ .  
Nota che  $U_{k+1} + U_{k+1} \subseteq U_k$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  e gli  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sono intorno bilanciati.
- Poniamo

$$q(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^r 2^{-k_i} \mid r \in \mathbb{N}, (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \text{ t.c. } x \in U_{k_1} + U_{k_2} + \dots + U_{k_r} \right\}$$

Mostra che  $q$  è una paranorma su  $X$ .

- Nota che  $\{q < 2^{-n-1}\} \subseteq U_n \subseteq \{q \leq 2^{-n}\}$  e quindi  $q$  induce la topologia di  $X$ .

□

## 2.5 Limitatezza

**Definizione 2.37** (Insieme limitato).

Un sottoinsieme  $S$  di uno SVT  $X$  con  $\mathcal{U}$  intorno di 0 è **limitato** se è assorbito da ogni elemento di  $\mathcal{U}$ , cioè<sup>4</sup> per ogni  $U \in \mathcal{U}$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nU \supseteq S$ .

*Osservazione 2.38.*

Valgono le seguenti proprietà

1. Se  $S$  è limitato allora anche  $\overline{S}$  lo è, basta considerare intorno chiusi.
2. Se  $S$  e  $S'$  sono limitati,  $S \cup S'$  lo è.
3. Ogni compatto è limitato, basta scegliere un intorno limitato di  $x$  per ogni  $x \in K$  e poi estrarre un sottoricoprimento finito. Un tale intorno esiste scalando intorno di 0 bilanciati.
4. Ogni  $T : X \rightarrow Y$  lineare e continua tra SVT è limitata, cioè per ogni  $S \subseteq X$  limitato,  $T(S)$  è limitato. In generale non vale il viceversa ma vale se  $X$  e  $Y$  sono normati.

**Proposizione 2.39** (Limitatezza in SVTLC).

Se  $(X, \mathcal{P})$  è SVTLC allora  $S \subseteq X$  è limitato se e solo se per ogni seminorma  $p \in \mathcal{P}$ ,  $p$  è limitata su  $S$ .

*Dimostrazione.*

$p$  limitata su  $S$  significa che

$$S \subseteq B_p(0, R_p) = \frac{R_p}{\varepsilon} B_p(0, \varepsilon)$$

e le palle  $\{B_p(0, \varepsilon)\}_{p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0}$  sono una prebase di intorno di 0 in  $X$ .

□

**Corollario 2.40.**

Se  $(X, \|\cdot\|)$  è normato allora  $S$  è limitato se e solo se  $\exists R > 0$  tale che  $S \subseteq B(0, R)$ .

<sup>4</sup>questa condizione è equivalente a chiedere  $tU \supseteq S$  per ogni  $t$  con  $|t| \geq n$  o a chiedere che l'assorbimento valga per elementi di una pre-base di intorno di 0 al posto di tutti gli elementi di  $\mathcal{U}$ .



**Esercizio 2.41.**

Se  $X$  è I-numerabile e  $T : X \rightarrow Y$  lineare tale che per ogni  $x_k \rightarrow 0$  in  $X$  esiste  $x_{k_j}$  tale che  $T(x_{k_j})$  limitata allora  $T$  è continua.

**Proposizione 2.42** (Caratterizzazione sequenziale della limitatezza).

Se  $X$  SVT e  $S \subseteq X$ ,  $S$  è limitato se e solo se per ogni  $(s_k)$  successione in  $S$  e per ogni  $(\alpha_k)$  successione in  $\mathbb{K}$  infinitesima, si ha  $\alpha_k s_k \rightarrow 0$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $S$  limitato,  $(s_k)$  successione in  $S$  e  $(\alpha_k)$  successione infinitesima in  $\mathbb{K}$ . Sia  $U$  intorno bilanciato di 0 e sia  $n$  tale che  $S \subseteq nU$ . Notiamo che definitivamente  $|\alpha_k| < \frac{1}{n}$ , quindi

$$\alpha_k s_k \in \alpha_k S \subseteq \alpha_k nU \stackrel{k \text{ grande}}{\subseteq} U.$$

Supponiamo ora  $S$  non limitato, allora esiste  $U \in \mathcal{U}_X$  che non assorbe  $S$ , cioè per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $s_n \in S \setminus nU$ . Dunque  $(s_n)$  è una successione in  $S$  tale che  $\frac{1}{n}s_n \notin U$  per costruzione, dunque  $\frac{1}{n}s_n$  non tende a 0 in  $X$  nonostante  $\frac{1}{n}$  sia infinitesima.  $\square$

**Proposizione 2.43.**

*Le successioni di Cauchy sono limitate.*

*Dimostrazione.*

Sia  $(x_k)$  una successione di Cauchy in  $X$ , cioè per ogni  $U \in \mathcal{U}_X$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $p, q \geq n$  si ha  $x_p - x_q \in U$ .

Fissiamo  $U \in \mathcal{U}_X$  e sia  $V$  bilanciato tale che  $V + V \subseteq U$ . Per la definizione di successione di Cauchy esiste  $n_0$  tale che  $x_k - x_{n_0} \in V$  per ogni  $k \geq n_0$ , cioè  $x_k \in x_{n_0} + V$ .

Inoltre, esiste  $m$  tale che  $x_k \in mV$  per ogni  $k \leq n_0$  dato che un insieme finito è limitato. Allora per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $x_k \in mV + V$ , infatti se  $k \leq n_0$  allora abbiamo  $mV$ , se  $k > n_0$  allora  $x_{n_0} \in mV$  e  $x_k \in x_{n_0} + V \subseteq mV + V$ .

Poiché  $V$  è bilanciato,  $mV + V \subseteq mV + mV = m(V + V) \subseteq mU$ .  $\square$

## 2.6 Teorema di Riesz

**Teorema 2.44** (Riesz).

Per  $X$  SVT  $T_0$  su  $\mathbb{K}$  sono equivalenti

1.  $X$  ha dimensione finita
2.  $X \cong \mathbb{K}^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$
3.  $X$  è localmente compatto

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

1.  $\implies$  2. Sia  $X$  SVT  $T_0$  di dimensione  $n$  e sia  $x_1, \dots, x_n$  una sua base di Hamel. Allora

$$\varphi : \begin{matrix} \mathbb{K}^n \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{matrix} \begin{matrix} X \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{matrix}$$

è lineare, bigettiva e continua.

Dimostriamo che è aperta: L'insieme  $\partial B(0,1) \subseteq \mathbb{K}^n$  visto con la norma euclidea è compatto, quindi  $\varphi(\partial B(0,1))$  è compatto, e quindi chiuso perché  $X$  è Hausdorff.

Per bigettività  $0 \notin \varphi(\partial B(0, 1))$ , quindi esiste un intorno  $V$  di  $0$  in  $X$  disgiunto da  $\varphi(\partial B(0, 1))$ . Senza perdita di generalità  $V$  bilanciato, allora  $\varphi^{-1}(V)$  è un insieme bilanciato di  $\mathbb{K}^n$  disgiunto da  $\partial B(0, 1)$ , dunque  $\varphi^{-1}(V) \subseteq B(0, 1)$  (se avesse un punto di modulo maggiore a 1 allora in quanto bilanciato conterrebbe tutti i punti tra esso e 0, intersecando il bordo).

Questo mostra che  $B(0, 1)$  è un intorno di  $0$  e quindi  $\varphi$  è aperta (per traslazione e omotetia  $\varphi(B(\lambda, r))$  è intorno di  $\varphi(\lambda)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}^n$  e  $r > 0$  e concludo notando che aperti di  $\mathbb{K}^n$  sono dati da unioni di palle).

**2.  $\implies$  3.**  $\mathbb{K}^n$  è localmente compatto perché conosciamo la topologia euclidea, quindi anche  $X$  lo è.

**3.  $\implies$  1.** Sia  $X$  SVT localmente compatto e  $T_0$ . Mostriamo che  $X$  è I-numerabile:

Sia  $V$  intorno compatto di  $0$ . Mostriamo che  $\{\frac{1}{n}V\}$  è una base di intorni di  $0$ . Sia  $U$  un intorno (senza perdita di generalità  $U$  bilanciato). Poiché  $V$  è compatto e<sup>5</sup>  $V \subseteq \bigcup_{n \geq 1} nU = X$  possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$V \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} n_i U \stackrel{U \text{ bilanciato}}{=} \left( \max_{1 \leq i \leq k} n_i \right) U$$

infatti  $\frac{n_i}{\max n_i} U \subseteq U$ . Questo mostra che  $\{\frac{1}{n}V\}$  è una base numerabile di intorni di  $0 \in X$ .

Notiamo che  $V$  si può coprire con un numero finito di traslati di  $\frac{1}{2}V$  in quanto  $V \subseteq V + \frac{1}{2}V$  e applico compattezza al variare di  $v + \frac{1}{2}V$  per  $v \in V$ . Sia allora  $F$  tale che  $V \subseteq \bigcup_{v \in F} v + \frac{1}{2}V$  con  $F$  finito e poniamo  $Y = \text{Span}_{\mathbb{K}} F$ . Notiamo che  $Y$  ha dimensione finita.

Procedendo per induzione, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $V \subseteq Y + 2^{-n}V$ , ma  $\{2^{-n}V\}_{n \geq 0}$  è una base di intorni, quindi

$$\overline{Y} = \bigcap_{n \geq 0} Y + 2^{-n}V \supseteq V$$

e dato che  $V$  è un intorno assorbente,  $X = \bigcup_{n \geq 0} nV \subseteq \overline{Y}$ , cioè  $Y$  è denso in  $X$ .

Poiché  $Y$  ha dimensione finita, per l'implicazione precedente  $Y \cong \mathbb{K}^n$ , in particolare  $Y$  è completo. Se  $x \in X = \overline{Y}$ , poiché  $X$  è I-numerabile, si ha che esiste  $y_k \rightarrow x$  in  $X$  con  $y_k \in Y$  con  $(y_k)$  di Cauchy in  $X$  e quindi anche in  $Y$ , che però è completo, quindi  $y_k \rightarrow y$  per  $y \in Y$ , ma  $X$  è Hausdorff, quindi  $y = x$ .

□

*Osservazione 2.45.*

Se non avessimo supposto  $T_0$  potremmo considerare  $X/\overline{\{0\}}$  e troveremmo  $X \cong \mathbb{K}^n \oplus \overline{\{0\}}$ .

## 2.7 Successioni generalizzate (nets)

**Definizione 2.46** (Net).

Un **net** su un insieme  $X$  è una funzione  $f : D \rightarrow X$  su  $(D, \geq)$  poset diretto<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> $U$  assorbente

<sup>6</sup>diretto nel senso che per ogni  $i, j \in D$  esiste  $k \in D$  tale che  $i \leq k$  e  $j \leq k$ .

**Esempio 2.47** (Somme di Riemann).

Sia  $u : [a, b] \rightarrow X$  una funzione con  $X$  SVT. La **somma di Riemann** per  $u$  relativa ad una suddivisione  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  e una scelta di punti  $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  con  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  è

$$S(u; P, \Xi) = \sum_{i=1}^n u(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Possiamo prendere  $D = \{(P, \Xi)\}$  l'insieme delle possibili partizioni e scelte di punti.  $D$  è un poset:  $(P, \Xi) \geq (P', \Xi')$  se  $P \supseteq P'$ .

In questo contesto l'integrale di Riemann sarebbe il limite rispetto al net  $D \rightarrow X$  dato da  $(P, \Xi) \mapsto S(u; P, \Xi)$ .

**Esempio 2.48** (Somme infinite).

Data  $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$  con  $X$  SVT consideriamo

$$S : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{fin}(I) & \longrightarrow & X \\ F & \longmapsto & \sum_{i \in F} x_i \end{array}$$

$\mathcal{P}_{fin}(I)$  è parzialmente ordinato per inclusione e la somma sarebbe il limite.

**Definizione 2.49** (Definitivamente e frequentemente).

Diciamo che se  $\{P_\alpha\}_{\alpha \in D}$  sono proprietà indicizzate su  $D$  insieme diretto allora  $P_\alpha$  **vale definitivamente** (risp. **frequentemente**) se esiste  $\alpha \in D$  tale che per ogni  $\beta \geq \alpha$  in  $D$  vale  $P_\beta$  (risp. per ogni  $\alpha \in D$  esiste  $\beta \in D$  tale che vale  $P_\beta$ ).

*Osservazione 2.50.*

Se  $D \neq \mathbb{N}$  allora può succedere che “frequentemente”  $\neq$  “infinite volte”.

**Definizione 2.51** (Convergenza per net).

Se  $f : D \rightarrow X$  è un net su  $X$  spazio topologico si ha che  $f$  **converge a**  $x \in X$  se per ogni  $U$  intorno di  $x$  si ha che  $f(i) \in U$  definitivamente.

**Definizione 2.52** (Punti di accumulazione per net).

Se  $f : D \rightarrow X$  è un net su  $X$  spazio topologico si ha che  $x$  è un **punto di accumulazione** di  $f$  se per ogni  $U$  intorno di  $x$ ,  $f(i) \in U$  frequentemente.

**Definizione 2.53** (Sottonet).

Una  $\varphi : D' \rightarrow D$  con  $D, D'$  insiemi diretti tale che per ogni  $i \in D$  esiste  $i' \in D'$  tale che  $\varphi(j) \geq i$  per ogni  $j \geq i'$  è detta **cofinale**.

Sia  $f : D \rightarrow X$  un net, allora  $f \circ \varphi : D' \rightarrow X$  per  $\varphi$  cofinale è un **sottonet** di  $f$ .

*Osservazione 2.54.*

Una successione è un net su  $\mathbb{N}$ , una sottosuccessione è quindi in particolare un sottonet, ma non tutti i sottonet di una successione sono sottosuccessioni.

**Esercizio 2.55.**

Se  $f : D \rightarrow X$  spazio topologico e  $x \in X$  allora  $x$  è aderente a  $f$  se e solo se  $x$  è limite di qualche sottonet di  $f$ .

*Osservazione 2.56.*

Dato  $f : D \rightarrow X$  net, l'insieme  $A$  dei punti aderenti a  $f$  è

$$A = \bigcap_{j \in D} \overline{\{f(i) \mid i \geq j\}}$$

infatti  $x$  è aderente se e sono se per ogni intorno  $U$  e ogni  $j \in D$  esiste  $i \geq j$  tale che  $f(i) \in U$ , cioè per ogni  $j \in D$   $U \cap \{f(i) \mid i \geq j\} \neq \emptyset$ , ovvero per ogni  $j \in D$  si ha  $x \in \overline{\{f(i) \mid i \geq j\}}$ .

**Esercizio 2.57.**

$X$  spazio topologico è compatto per ricoprimenti se e solo se ogni net in  $X$  ha punti aderenti, cioè se e solo se per ogni net su  $X$  esiste un sottonet convergente.

**Esercizio 2.58.**

Usare l'esercizio sopra per dimostrare Tychonoff.

*Dimostrazione.*

IDEA:

- Sia  $f : D \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  un net, vogliamo trovare dei punti aderenti.
- Consideriamo l'insieme

$$S = \left\{ (N, x) \mid x \in \prod_{\lambda \in N} X_\lambda, N \subseteq \Lambda, x \text{ aderente per } P_N \circ f : D \rightarrow \prod_{\lambda \in N} X_\lambda \right\}$$

esso è non vuoto perché se  $N$  è un singoletto allora  $P_N \circ f$  è un net verso uno spazio compatto, quindi ha un punto aderente. Ordiniamo  $S$  ponendo  $(N, x) \leq (N', x')$  se  $N \subseteq N'$  e  $P_N(x') = x$ .

Vale la condizione della catena, infatti se  $\{(N_\alpha, x_\alpha)\}$  è una catena ascendente in  $S$  allora basta considerare  $N = \bigcup N_\alpha$  e  $x \in \prod_{\lambda \in N} X_\lambda$  dato da  $x(\lambda) = x_\alpha(\lambda)$  per un qualche  $\alpha$  tale che  $\lambda \in N_\alpha$ . Notiamo che  $x$  così definito è aderente a  $P_N \circ f$  perché gli  $x_\alpha$  sono aderenti e questo basta per la definizione di topologia prodotto.

Dunque per il lemma di Zorn esiste un dominio massimale  $(N, x)$

- Se per assurdo  $N \neq \Lambda$  allora esiste  $\lambda \in \Lambda \setminus N$ , ma allora possiamo estendere  $(N, x)$  a  $(N \cup \{\lambda\}, \tilde{x})$  per  $\tilde{x} = x$  fuori  $\lambda$  e uguale a un qualche aderente a  $P_{\{\lambda\}} \circ f$  in  $\lambda$ . Questo nega la massimalità.

□

**Esercizio 2.59.**

Per  $X$  spazio topologico e  $S \subseteq X$  si ha  $x \in \overline{S}$  se e solo se esiste  $f : D \rightarrow S$  net convergente a  $x$ .

**Definizione 2.60** (Net di Cauchy).

Sia  $X$  SVT. Un net  $f : D \rightarrow X$  è **di Cauchy** se per ogni  $U \in \mathcal{U}_X$  esiste  $i \in D$  tale che per ogni  $p \geq i$  e  $q \geq i$  vale  $f(p) - f(q) \in U$ .

Equivalentemente il net  $\tilde{f} : D \times D \rightarrow X$  definito da  $\tilde{f}(i, j) = f(i) - f(j)$  con  $(i, j) \geq (i', j') \iff i \geq i' \wedge j \geq j'$  converge a 0.

**Definizione 2.61** (Completo per nets).

Uno SVT è **completo per nets** se ogni net di Cauchy converge.

**Esercizio 2.62.**

Uno SVT I-numerabile è completo per nets se e solo se è completo per successioni.

## Capitolo 3

# Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hahn-Banach ci permetterà di costruire funzionali lineari continui.

**Funzionali sono i surrogati delle coordinate, che non ci sono in generale, e anche quando ci sono possono essere più complicate di quanto non valga la pena.**

### 3.1 Teorema di Hahn-Banach reale

**Definizione 3.1** (Funzione sublineare).

Una funzione  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  è

- **positivamente omogenea** se per  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  abbiamo  $p(tu) = tp(u)$ ,
- **subadditiva** se per ogni  $u, v \in X$  vale  $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ ,
- **sublineare** se è subadditiva e positivamente omogenea.

**Pillola filosofica: Teorema di esistenza senza buon criterio per scegliere un candidato spesso chiama l'uso di scelta.**

**Teorema 3.2** (Hahn-Banach).

*Siano  $X$  uno spazio vettoriale reale,  $M \subseteq X$  sottospazio,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  sublineare,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  lineare tale che  $f \leq p$  su  $M$ .*

*Allora  $f$  si estende a  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineare tale che  $F \leq p$ .*

*Dimostrazione.*

Vogliamo applicare il lemma di Zorn. Sia

$$\mathcal{M} = \{g \in N' \mid g \leq p, M \subseteq N \subseteq X\}$$

Notiamo che  $\mathcal{M}$  è ordinato secondo l'inclusione dei sottografici, cioè

$$g \preceq h \iff \Gamma g \subseteq \Gamma h \iff \begin{cases} \text{dom } g \subseteq \text{dom } h \\ g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \text{dom } g \end{cases}$$

Condizione delle catene vale:

se  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  catena in  $\mathcal{M}$

allora  $\bigcup_{\alpha} \Gamma g_{\alpha}$  è ancora il grafico di una funzione lineare minore di  $p$ .

Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in  $\mathcal{M}$ . Per concludere basta mostrare che un massimale di  $\mathcal{M}$  è definito su tutto  $X$ , cioè vogliamo mostrare che se  $g \in \mathcal{M}$  è tale che  $\text{dom } g \neq X$  allora esiste  $g' \in \mathcal{M}$  che estende  $g$ .

Sia dunque per assurdo  $x \in X \setminus N$  dove  $N = \text{dom } g$ . Vogliamo estendere  $g$  a  $h : N \oplus \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  con  $h \leq p$ . In quanto estensione

$$h(u + tx) = h(u) + th(x) = g(u) + th(x),$$

dove  $u$  generico elemento di  $N$ . Sia  $\alpha = h(x)$  e cerchiamo un opportuno  $\alpha$  in modo tale che  $h \leq p$ .

Chiediamo che  $\forall u \in N, \forall t \in \mathbb{R}$

$$g(u + tx) \leq p(u + tx),$$

o equivalentemente per ogni  $t > 0$  chiediamo

$$\begin{cases} h(u + tx) \leq p(u + tx) \\ h(v - tx) \leq p(v - tx) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} g(u/t) + \alpha \leq p(u/t + x) \\ g(v/t) - \alpha \leq p(v/t - x) \end{cases}$$

dunque vogliamo

$$-p(v/t - x) + g(v/t) \leq \alpha \leq p(u/t + x) - g(u/t)$$

cioè

$$\sup_{v \in N} -p(v - x) + g(v) = m_* \leq \alpha \leq m^* = \inf_{u \in N} p(u + x) - g(u),$$

dunque un tale  $\alpha$  esiste solo se  $m_* \leq m^*$ . Questo è vero perché

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x + v - x) \leq p(u + x) + p(v - x).$$

□

*Osservazione 3.3.*

Non serve questo teorema per spazi di dimensione finita o spazi di Hilbert, in quanto in quei casi abbiamo estensioni canoniche (se  $\text{dom } f = N$ , considero la proiezione ortogonale su  $N$  e poi applico  $f$ ).

**Corollario 3.4** (Hahn-Banach per spazi normati).

Se  $(X, \|\cdot\|)$  è spazio normato reale e  $Y$  è sottospazio lineare allora ogni funzione continua su  $Y$  si estende ad una su  $X$  con la stessa norma.

*Dimostrazione.*

Se  $f \in Y^*$ , per la definizione di norma duale si ha

$$f(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\| \doteq p(x),$$

quindi  $f$  si estende a  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineare con  $F(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$ , cioè  $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$ . Poiché  $F$  estende  $f$  in realtà abbiamo uguaglianza tra le norme<sup>1</sup>. □

<sup>1</sup>consideriamo la stessa successione in  $Y$  che realizza la definizione di  $\|f\|_{Y^*}$

*Osservazione 3.5.*

Se  $X$  è di Hilbert, una estensione di  $f \in Y^*$  è data dal proiettore ortogonale su<sup>2</sup>  $Y$   $P : X \rightarrow \bar{Y}$ . A questo punto definendo  $F = f \circ P$ .

**Corollario 3.6** (ricostruire norma tramite funzionali).

Se  $(X, \|\cdot\|)$  è spazio normato reale e  $Y$  è sottospazio lineare e  $x \in X$ , allora la norma di  $x$  si può ricostruire dalla norma duale di  $X^*$ , in particolare<sup>3</sup>

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle$$

*Dimostrazione.*

Se  $f \in X^*$  e  $\|f\| \leq 1$  allora

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies \|x\| \leq \max_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle.$$

D'altra parte, per il corollario precedente (3.4) nel caso particolare di  $Y = x\mathbb{R}$ , il funzionale lineare continuo

$$\phi : \begin{array}{ccc} x\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\| \end{array}$$

si estende a tutto  $X$  con la stessa norma. Se  $x = 0$  allora  $\|\phi\| = 0$  per linearità, altrimenti  $\|\phi\| = 1$  su  $x\mathbb{R}$ . In ogni caso  $\|\phi\| \leq 1$ , quindi per ogni  $x \in X$  esiste  $f \in X^*$  tale che  $\|f\| \leq 1$  e  $\langle f, x \rangle = \|x\|$ .  $\square$

**Definizione 3.7** (Operatore aggiunto).

Per  $T : X \rightarrow Y$  lineare continua tra spazi normati, si definisce l'**operatore aggiunto o trasposto** di  $T$  come

$$T^* : \begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

**Proposizione 3.8** (Norma dell'aggiunto).

La norma di  $T^*$  coincide con la norma di  $T$ , in particolare  $T^*$  è continuo.

*Dimostrazione.*

Segue dai corollari di Hahn-Banach sopra, infatti

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L(Y^*, X^*)} &= \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \|T^* f\|_{X^*} = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1, x \in X} \langle T^* f, x \rangle = \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f, Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, Tx \rangle| \stackrel{(3.6)}{=} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|_{L(X, Y)}. \end{aligned}$$

$\square$

### 3.1.1 Immersione isometrica nel biduale

**Proposizione 3.9** (Immersione isometrica nel biduale).

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato reale e consideriamo la mappa

$$i_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & val_x \end{array}$$

Essa è una immersione isometrica.

<sup>2</sup>stiamo supponendo  $Y$  chiuso a meno di passare alla chiusura

<sup>3</sup>dove  $\langle f, x \rangle = f(x)$  quando  $f$  è forma lineare, come in questo caso.

*Dimostrazione.*

È immediato vedere che  $i_X$  è lineare e continua<sup>4</sup> Però sappiamo che per ogni  $x \in X$  esiste  $f \in X$  tale che  $\|f\| \leq 1$  e  $\|x\| = \langle f, x \rangle$ , cioè  $\|val_x\| = \|x\|$ , ovvero  $i_X : X \rightarrow X^{**}$  è una immersione isometrica.  $\square$

**Definizione 3.10** (Spazio riflessivo).

Uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$  è **riflessivo** se  $i_X : X \rightarrow X^{**}$  è surgettiva, ovvero se  $i_X$  è una isometria.

*Osservazione 3.11.*

Esistono spazi di Banach non riflessivi ma isometrici al loro biduale. Nella definizione chiediamo che la mappa canonica  $i_X$  sia una isometria.

**Lemma 3.12** (Duale è addendo diretto nel triduale).

$X^*$  è sempre un addendo diretto se visto come sottospazio di  $X^{***}$ .

*Dimostrazione.*

Poiché ogni Banach ammette un'immersione isometrica  $X \hookrightarrow X^{**}$ , esiste una immersione isometrica  $X^* \hookrightarrow X^{***}$ . Consideriamo allora la composizione

$$X^* \xrightarrow{\iota_{X^*}} X^{***} \xrightarrow{(\iota_X)^*} X^*$$

e mostriamo che è l'identità: per ogni  $f \in X^*$  e per ogni  $x \in X$

$$\langle f, x \rangle = \langle \iota_X(x), f \rangle = \langle \iota_{X^*}(f), \iota_X(x) \rangle = \langle (\iota_X)^*(\iota_{X^*}(f)), x \rangle.$$

Dunque  $\iota_{X^*}$  e  $(\iota_X)^*$  sono una coppia inversa destra e inversa sinistra, quindi

$$X^{***} = \iota_{X^*}(X^*) \oplus \ker((\iota_X)^*).$$

$\square$

**Esempio 3.13.**

Sia  $c_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x(n) = o_n(1)\}$ . Questo è un sottospazio chiuso di

$$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty < \infty\}$$

Se  $\widehat{\mathbb{N}}$  è la compattificazione di  $\mathbb{N}$  ad un punto ( $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) allora  $c_0$  sono le funzioni  $\widehat{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  continue che valgono 0 in  $\infty$  ristrette a  $\mathbb{N}$ .

Risulta che l'inclusione  $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$  è l'inclusione nel biduale, infatti  $c_0^*$  si può identificare con

$$\ell_1 = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|f\|_1 = \sum |f_n| < \infty \right\}$$

identificando  $f \in \ell_1$  con  $\tilde{f}(x) = \sum f_n x_n$  (che converge perché assolutamente convergente). Risulta che questa identificazione è una isometria.

Con un processo analogo identifichiamo  $\ell_1^*$  con  $\ell_\infty$ .

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{\subseteq} & \ell_\infty \\ & \searrow i_{c_0} & \swarrow \cong \\ & c_0^{**} & \end{array}$$

<sup>4</sup>  $\langle val_x, f + \lambda g \rangle = f(x) + \lambda g(x) = \langle val_x, f \rangle + \lambda \langle val_x, g \rangle$  e  $\|val_x\| \leq \|x\|$  in quanto  $|\langle val_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$ .



*Osservazione 3.14.*

Se  $X$  è Hilbert allora  $X \hookrightarrow X^{**}$  è surgettiva tramite l'isomorfismo di Riesz

$$x \mapsto \langle \cdot, x \rangle \mapsto \langle \cdot, \langle \cdot, x \rangle \rangle = \text{val}_x$$

*Osservazione 3.15.*

Se  $X$  normato,  $i_X : X \rightarrow X^{**}$  ci permette di costruire un completamento considerando  $\overline{i_X(X)}$  in  $X^{**}$  in quanto il biduale è completo.

### 3.1.2 Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach

Il funzionale  $p$  nelle ipotesi è positivamente omogeneo e subadditivo (cioè sublineare).

*Osservazione 3.16.*

Una funzione  $f$  è subadditiva se, detto  $\Gamma$  il grafico di  $f$ ,  $\Gamma + (x, f(x))$  sta sempre sopra  $\Gamma$ .

**Esercizio 3.17.**

Mostra le seguenti implicazioni

- Positivamente omogeneo e subadditivo implica convesso
- Positivamente omogeneo e convesso implica subadditivo (e quindi sublineare)
- Subadditivo, convesso e  $p(0) \leq 0$  implica positivamente omogeneo

**Esercizio 3.18.**

Trovare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che sia subadditiva, convessa ma non positivamente omogenea.

**Esercizio 3.19.**

Nel teorema di Hahn-Banach si può prendere più in generale  $p$  convesso?

Sì, ma si riconduce al caso standard trovando un nuovo funzionale  $p_0$  che sia sublineare e tale che  $f \leq p_0 \leq p$ .

## 3.2 Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach

### 3.2.1 Teorema di Hahn-Banach complesso

**Teorema 3.20** (Hahn-Banach complesso).

Sia  $X$  un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale normato,  $Y \subseteq X$  un suo sottospazio vettoriale e  $f \in Y^*$ , allora  $f$  si estende ad un funzionale lineare su  $X$  con uguale norma.

*Dimostrazione.*

Sia  $(X_0, \|\cdot\|)$  lo spazio normato reale ottenuto da  $X$  per restrizione degli scalari e sia  $f_0 = \Re f$ . Notiamo che  $f_0$  è un funzionale lineare continuo reale su  $Y$ , che quindi possiamo estendere a  $\tilde{f}_0 \in X^*$  mantenendo la norma. Definiamo

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0(x) - i\tilde{f}_0(ix).$$

Notiamo che  $\tilde{f}|_Y = f$ , infatti

$$f(y) = \Re(f(y)) + i\Im(f(y)) = \Re(f(y)) - i\Im(if(iy)) = \Re(f(y)) - i\Re(f(iy)).$$

Si ha anche che  $\tilde{f}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare e che  $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

(COMPLETA PER ESERCIZIO)

□

### 3.2.2 Teoremi di separazione dei convessi

**Proposizione 3.21** (Funzionali di Minkowski sono sublineari).

Se  $C$  è convesso e  $0 \in C$  allora  $p_C$  è sublineare.

*Dimostrazione.*

Dimostriamo le due proprietà:

pos.omo. Per ogni  $\lambda > 0$ ,  $x \in X$  si ha che

$$p_C(\lambda x) = \inf \{t > 0 \mid \lambda x \in tC\} = \inf \{\lambda s > 0 \mid \lambda x \in \lambda sC\} = \lambda p_C(x)$$

subadd. Per ogni  $x, y \in X$  siano  $a$  e  $b$  tali che

$$a > p_C(x), \quad b > p_C(y).$$

Se uno tra  $p_C(x)$  e  $p_C(y)$  è infinito allora la tesi vale trivialmente. Supponiamo dunque che questo non sia il caso. Allora  $x \in aC$  e  $y \in bC$ , cioè  $x/a, y/b \in C$ . Notiamo che

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b}$$

dunque  $\frac{x+y}{a+b} \in C$  per convessità, cioè  $x+y \in (a+b)C$  e quindi  $p_C(x+y) \leq a+b$ . Passando all'estremo inferiore per  $a > p_C(x)$  e  $b > p_C(y)$  troviamo

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

□

*Osservazione 3.22.*

Se  $C$  è un disco, cioè è assorbente, bilanciato e convesso allora  $p_C$  è una seminorma.

**Esercizio 3.23.**

Se  $X$  SVT,  $F : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineare non continua allora per ogni aperto  $A$  non vuoti si deve avere  $F(A) = \mathbb{K}$ .

**Lemma 3.24.**

Ogni funzionale lineare non nullo su uno SVT è una mappa aperta

*Dimostrazione.*

Sia  $F \neq 0$  lineare con  $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Vogliamo mostrare che  $F$  manda intorno di  $x \in X$  in intorno di  $F(x) \in \mathbb{K}$ . Poiché  $X$  è SVT, basta mostrare che  $F(U)$  è intorno di  $0 \in \mathbb{K}$  per ogni  $U$  intorno di  $0 \in X$ . In realtà basta prendere una base di intorno di  $0$ , quindi consideriamo gli  $U$  bilanciati. Notiamo che  $F(U)$  è un insieme bilanciato di  $\mathbb{K}$ , infatti se  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $|\lambda| \leq 1$  allora  $\lambda F(U) = F(\lambda U) \subseteq F(U)$ , quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- $F(U) = \{0\}$ , ma allora  $F = 0$  assurdo
- $F(U)$  è un disco, dunque è intorno di  $0$  ok.
- $F(U) = \mathbb{K}$  ok.

□

**Corollario 3.25** (Discontinuità per funzionali lineari).

$F : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineare è discontinua se e solo se è surgettiva su ogni aperto non vuoto.

*Dimostrazione.*

Se  $F$  non è surgettiva su un aperto non vuoto, a meno di traslazione  $F$  non è surgettiva su un intorno di 0, quindi non è surgettiva su un qualche aperto bilanciato. Quindi esiste un elemento che non è nella immagine, ma allora  $F$  non assume valori di modulo superiore a questo valore non raggiunto.  $\square$

**Teorema 3.26** (Separazione di convessi).

*Valgono i seguenti teoremi:*

- Siano  $X$  un  $\mathbb{R}$ -SVT,  $A$  un suo aperto convesso non vuoto e  $B$  un convesso non vuoto disgiunto da  $A$ . Allora esistono  $F \in X^*$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  tali che per ogni  $a \in A$ ,  $b \in B$  si ha

$$\langle F, a \rangle < \gamma \leq \langle F, b \rangle,$$

cioè  $A \subseteq \{F < \gamma\}$  e  $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$ .

- Sia  $X$  un  $\mathbb{R}$ -SVTLC<sup>5</sup>,  $K$  convesso compatto e  $C$  convesso chiuso disgiunti. Allora esistono  $F \in X^*$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1 < \gamma_2$  tali che per ogni  $x \in K$  e per ogni  $y \in C$  vale

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y \rangle$$

ovvero  $K \subseteq \{F \leq \gamma_1\}$  e  $C \subseteq \{F \geq \gamma_2\}$ .

*Dimostrazione.*

Diamo le due dimostrazioni

- Sia  $x_0 \in B - A = \{b - a \mid a \in A, b \in B\}$ . Poiché  $A \cap B = \emptyset$ ,  $x_0 \neq 0$ . Sia

$$C = A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$

Dalla definizione è evidente che  $C$  è un aperto (unione di traslati di  $A$  che è aperto) e contiene 0.  $C$  è convesso perché la somma algebrica di due convessi è un convesso (quindi  $A - B$  convesso e traslare un convesso lo lascia convesso). Essendo aperto in particolare è assorbente per (2.11).

Quindi il funzionale di Minkowski associato  $p_C$  è un funzionale sublineare  $X \rightarrow \mathbb{R}$  (non raggiunge  $+\infty$  perché assorbente). Sia  $f_0 : \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$  il funzionale lineare definito da  $\langle f_0, x_0 \rangle = 1$ . Poiché  $0 \notin A - B$ ,  $x_0 \notin C$  e quindi<sup>6</sup>  $p_C(x_0) \geq 1$ . Applicando il teorema di Hahn-Banach (3.2)  $f_0$  si estende a  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $F \leq p_C$  in  $X$ . Per ogni  $a \in A$ ,  $b \in B$ , poiché  $a - b + x_0 \in C$ , si ha

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) \leq 1$$

cioè  $F(a) \leq F(b)$ . Ponendo  $\gamma = \sup_A F$  abbiamo le disuguaglianze volute se mostriamo che  $F(a) < \gamma$  per ogni  $a \in A$ . Per il lemma (3.24) si ha che  $F$  è una mappa aperta, quindi  $F(A)$  è un aperto di  $\mathbb{R}$  tale che  $\sup F(A) \leq \gamma$ , ma allora il valore  $\gamma$  non è raggiunto.

Concludiamo notando che  $F$  è continuo<sup>7</sup> perché è limitato superiormente sull'aperto  $A$ .

<sup>5</sup>La locale convessità serve, infatti esistono SVT metrizzabili che non hanno funzionali lineari continui e in tal caso la tesi non vale neanche per  $K = \{x\}$  e  $C = \{y\}$ .

<sup>6</sup>ricorda che  $\{p_C < 1\} \subseteq C$

<sup>7</sup>volendo anche perché limitato su intorno di 0 o anche perché non è surgettiva sull'aperto  $A$ . Vedi esercizio sopra per l'ultima.

- Sia  $V$  intorno convesso di  $0$  tale che  $(K + V) \cap C = \emptyset$ , basta usare (2.16) e poi notare che in questo caso abbiamo una base di intorni convessi. Evidentemente  $K + V$  è aperto e convesso<sup>8</sup>. Per il primo punto esiste  $F \in X^*$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  tale che per ogni  $x \in K + V$  e  $y \in C$

$$\langle F, x \rangle < \gamma \leq \langle F, y \rangle.$$

Sia  $\gamma_1 = \max_{x \in K} \langle F, x \rangle$ , allora  $\gamma_1 < \gamma$  e quindi se  $x \in K$

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma \leq \langle F, y \rangle$$

che è la tesi a meno di definire  $\gamma_2 = \gamma$ .

□

### 3.3 Parentesi esercizi

**Definizione 3.27** (Misura non atomica).

Uno spazio di misura  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è **non-atomico** se per ogni  $A \in \mathcal{Q}$  di misura positiva contiene  $B \in \mathcal{Q}$  di misura positiva strettamente minore.

**Esercizio 3.28** (Sierpinski).

Se  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è non-atomico allora è divisibile, cioè per ogni  $A \in \mathcal{Q}$  e per ogni  $\lambda \in [0, \mu(A)]$  esiste  $B \subseteq A$ ,  $B \in \mathcal{Q}$ , tale che  $\mu(B) = \lambda$ .

Inoltre, vedendo la misura come funzione  $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \mu(X)]$ , esiste una inversa destra monotona crescente per inclusione  $E : [0, \mu(X)] \rightarrow \mathcal{Q}$ , cioè si ha  $\mu \circ E = id$  e per ogni  $t \in [0, \mu(X)]$  abbiamo  $\mu(E_t) = t$  e  $E_t \subseteq E_{t'}$  per ogni  $t \leq t'$ .

*Dimostrazione.*

Vogliamo applicare Zorn all'insieme delle inverse destre monotone parziali, cioè

$$\Gamma = \{E : S \rightarrow \mathcal{Q} \mid S \subseteq [0, \mu(X)], E \text{ monot. cresc. per } \subseteq, \mu(E(t)) = t \forall t \in S\}$$

Chiaramente la condizione sulle catene funziona quindi  $\Gamma$  ha un elemento massimale. Mostriamo poi che il dominio del massimale è chiuso e che è denso, e quindi deve essere tutto. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) □

**Esercizio 3.29.**

Sia  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $0 < p \leq 1$ . Definiamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

e sia  $q : \mathcal{L}^p \rightarrow [0, \infty)$  con  $q(f) = \int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$ .

Notiamo che  $q(f + g) \leq q(f) + q(g)$ , che  $q(\lambda f) = |\lambda| q(f)$  e che  $q(f) = 0$  se e solo se  $f = 0$  q.o.. Dunque  $q$  definisce una semidistanza  $d_q(f, g) = q(f - g)$ , che induce una distanza sul quoziente

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \overline{\{0\}}$$

Questa distanza rende  $L^p(X)$  uno SVT metrico completo omeomorfo a  $L^1(X)$ .

Mostrare che se  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  è non-atomico e  $p < 1$  allora  $L^p(X)$  non ha funzionali lineari continui diversi da 0 e non ha aperti convessi diversi da  $L^p(X)$ .

<sup>8</sup>somma di convessi è convessa

**Esercizio 3.30.**

Sia  $X = \mathbb{N}$  con la misura di cardinalità. In questo caso  $L^p(\mathbb{N}) = \ell_p$  con la definizione di prima. Questo è uno SVT metrico completo ma la misura è puramente atomica (misura ricostruibile dai singoletti). Mostra che  $(\ell_p)^* = (\ell_1)^*$ .

*Dimostrazione.*

Nota che se  $0 < p \leq q \leq \infty$  allora  $\ell_p \subseteq \ell_q$  e l'inclusione è una mappa continua, quindi una mappa lineare su  $\ell_q$  restituisce una mappa lineare su  $\ell_p$ , quindi abbiamo  $(\ell_p)^* \supseteq (\ell_1)^*$ , va mostrato che non ce ne sono altri. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO)  $\square$

## Capitolo 4

# Topologie deboli, Limitatezza e Banach-Steinhaus

### 4.1 Topologie deboli

**Proposizione 4.1** (Topologia iniziale nel caso SVT).

Sia  $X$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\mathcal{F} : \{T_i : X \rightarrow Y_i\}$  dove ogni  $Y_i$  è SVT e  $T_i$  è lineare, allora la topologia iniziale su  $X$  indotta<sup>1</sup> da  $\mathcal{F}$  rende  $X$  uno SVT.

*Dimostrazione.*

Voglio verificare che  $+$  e  $\cdot$  sono mappe continue per la topologia iniziale.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{+} & X \\ T_i \times T_i \downarrow & & \downarrow T_i \\ Y_i \times Y_i & \xrightarrow{+_i} & Y_i \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \xrightarrow{\cdot} & X \\ id_{\mathbb{K}} \times T_i \downarrow & & \downarrow T_i \\ \mathbb{K} \times Y_i & \xrightarrow{\cdot_i} & Y_i \end{array}$$

Per la proprietà universale della topologia iniziale (A.2), vogliamo verificare che  $T_i \circ + = +_i \circ (T_i \times T_i)$  è continua per ogni  $i$  e similmente per  $T_i \circ \cdot$ . Questo è vero perché la topologia iniziale rende  $T_i$  continua per ogni  $i$ .  $\square$

*Osservazione 4.2.*

Se ogni  $Y_i$  inoltre è SVTLC allora anche  $X$  lo è.

**Definizione 4.3** (Topologie deboli).

Sia  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e  $\mathcal{F} \subseteq X'$  (duale algebrico). La topologia iniziale indotta da  $\mathcal{F}$  viene detta la **topologia debole di  $\mathcal{F}$**  e si indica  $\sigma(X, \mathcal{F})$ .

*Osservazione 4.4.*

$\sigma(X, \mathcal{F}) = \sigma(X, \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}))$  quindi senza perdita di generalità possiamo sempre supporre  $\mathcal{F}$  sottospazio vettoriale di  $X'$ .

<sup>1</sup>vedi (A.1)

*Osservazione 4.5.*

La famiglia di seminorme associata a  $\mathcal{F}$  (quella che induce la stessa topologia di  $SVTLC$ ) è data da

$$\mathcal{P} = \{|f| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

*Osservazione 4.6.*

La topologia debole  $\sigma(X, \mathcal{F})$  è  $T_0$  (e quindi Hausdorff perché SVT) se e solo se la famiglia  $\mathcal{F}$  è separante ( $\forall x \in X \setminus \{0\}, \exists f \in \mathcal{F}$  tale che  $f(x) \neq 0$ ).

**Lemma 4.7.**

Siano  $f_0, \dots, f_n \in X'_{alg}$  per  $X$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, allora sono equivalenti

1.  $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$
2.  $|f_0| \leq M \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i|$  per qualche  $M \geq 0$
3.  $\ker f_0 \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$

*Dimostrazione.*

Diamo le tre implicazioni

1.  $\implies$  2. Da 1. segue  $|f_0| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |f_i| \leq M \max |f_i|$  per  $M = \sum |\lambda_i|$ .
2.  $\implies$  3. Se  $x \in \bigcap \ker f_i$ , cioè  $\langle f_i, x \rangle = 0$  per ogni  $i$ , allora  $\langle f_0, x \rangle \leq M \cdot 0 = 0$ , cioè  $f_0(x) = 0$  e abbiamo l'inclusione voluta.
3.  $\implies$  1. Sia  $F : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  data da  $F = (f_1, \dots, f_n)$ , allora

$$\ker F = \bigcap \ker f_i \subseteq \ker f_0$$

quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{K} \\ F \downarrow & \nearrow L & \\ \mathbb{K}^n & & \end{array}$$

dove  $L(x_1, \dots, x_n) = \sum \lambda_i x_i$  per dei  $\lambda_i$  (in quanto è una forma lineare). Ma allora  $f_0 = L \circ F = \sum \lambda_i f_i$  come voluto.

□

**Proposizione 4.8** (Duale per topologia debole).

Dato  $X$   $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e  $\mathcal{F}$  sottospazio di  $X'_{alg}$  allora

$$(X, \sigma(X, \mathcal{F}))^* = \mathcal{F}$$

*Dimostrazione.*

Sia  $f_0 \in (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$ , allora per la proposizione (2.31) esistono  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$  e  $M \geq 0$  tali che per ogni  $x \in X$

$$|f_0(x)| \leq M \max_i |f_i(x)|.$$

Dunque per il lemma (4.7)  $f_0$  si scrive come combinazione lineare delle  $f_i$  e quindi in particolare  $f_0 \in \mathcal{F}$ .

L'altra inclusione è ovvia per definizione di topologia debole.

□

*Osservazione 4.9.*

Se  $X$  ha dimensione infinita,  $\sigma(X, \mathcal{F})$  non è mai localmente limitata. In particolare ogni intorno di 0 contiene uno spazio vettoriale di codimensione finita.

*Dimostrazione.*

Se  $U$  intorno di 0 per  $\sigma(X, \mathcal{F})$  allora esistono  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$  tali che<sup>2</sup>

$$U \supseteq \bigcap_{i=1}^n \{|f_i| < 1\} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$$

e l'intersezione di questi nuclei ha codimensione al massimo  $n$ . □

**Proposizione 4.10** (Duale di lineare continua è debole\*-continua).

Se  $T : E \rightarrow F$  è un operatore lineare e continuo allora  $T^* : F^* \rightarrow E^*$  è debole\*-continua.

*Dimostrazione.*

Considera le opportune composizione e la definizione di topologia debole. □

### 4.1.1 Caso degli spazi normati

**Definizione 4.11** (Topologia debole).

Se  $X$  è normato, la **topologia debole** su  $X$  è la topologia debole associata a  $X^*$ , cioè  $\sigma(X, X^*)$ .

**Proposizione 4.12.**

La topologia debole è localmente convessa e Hausdorff.

*Dimostrazione.*

Per Hahn-Banach (3.2), il duale  $X^*$  separa i punti □

**Definizione 4.13** (Topologia debole\*).

Su  $X^*$  possiamo considerare la topologia debole associata alle valutazioni  $X \subseteq X^{**}$ , cioè scegliendo

$$\mathcal{F} = \{val_x \in (X^*)' \mid x \in X\}.$$

Questa è la **topologia debole\*** su  $X^*$  e la indichiamo  $\sigma(X^*, X)$ .

*Osservazione 4.14.*

La topologia debole\* rende  $X^*$  uno SVTLC  $T_0$  (e quindi Hausdorff), infatti se  $f \in X^* \setminus \{0\}$  allora esiste  $x \in X$  tale che  $f(x) \neq 0$ .

*Osservazione 4.15.*

In generale  $\sigma(X^*, X)$  è meno fine di  $\sigma(X^*, X^{**})$ . Abbiamo uguaglianza solo quando  $X = X^{**}$  in quanto se  $X \neq X^{**}$  allora dalla proposizione (4.8) ricaviamo

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X \neq X^{**} = (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))^*$$

e quindi in partenza  $\sigma(X^*, X^{**}) \neq \sigma(X^*, X)$

*Osservazione 4.16.*

Poiché  $(X, \|\cdot\|) \hookrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$  isometricamente allora  $(X, \sigma(X, X^*))$  ha la topologia indotta come sottospazio da<sup>3</sup>  $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ .

<sup>2</sup>vedi lemma (4.7)

<sup>3</sup>nota che  $X^*$  lo si può pensare come immerso in  $X^{***} = (X^{**})^*$ , quindi stiamo considerando la topologia debole\* su  $(X^*)^*$



*Dimostrazione.*

Questo deriva dalla transitività della topologia iniziale (A.3) dove la prima famiglia è la mappa  $X \hookrightarrow X^{**}$  e l'unica altra famiglia sono gli elementi di  $X^*$  che vanno verso  $\mathbb{K}$ .  $\square$

## 4.2 Spazi di Baire e II-categoria

**Teorema 4.17** (Baire).

Se  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una famiglia numerabile di aperti densi di uno spazio metrico completo allora  $\bigcap A_k$  è denso.

*Dimostrazione.*

Per induzione si definisce una successione di palle chiuse di  $X$  dove  $B_0$  è arbitraria e

$$B_k = \overline{B(x_k, r_k)} \text{ tali che } B_{k+1} \subseteq B_k \cap A_k \text{ e } r_k = o(1)$$

che possiamo fare perché  $A_k$  è un aperto denso.

Allora la successione dei centri è una successione di Cauchy, infatti se  $p, q \geq n$  si ha  $x_p, x_q \in B_n$  e quindi  $d(x_p, x_q) \leq 2r_n$ . Dunque  $x_n \rightarrow x^*$  in  $X$  per completezza. Inoltre, poiché  $x_k \in B_n$  definitivamente,  $x^* = \lim x_k \in B_n$  per ogni  $n$  (dato che  $B_n$  è chiuso). In particolare  $x^* \in B_{n+1} \subseteq A_n$  per ogni  $n$  e quindi  $x^* \in \bigcap A_n$ . Per costruzione  $x^* \in B_0$ , quindi per ogni palla  $B_0$  abbiamo mostrato che  $B_0 \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$ , cioè  $\bigcap A_n$  è denso.  $\square$

**Esercizio 4.18.**

La stessa conclusione vale se  $X$  è localmente compatto al posto di metrico completo.

**Definizione 4.19** (Spazio di Baire).

Uno spazio topologico è **di Baire** se ogni intersezione numerabile di aperti densi è densa.

*Osservazione 4.20.*

Ogni aperto non vuoto di  $X$  di Baire è ancora di Baire. Basta verificare che ogni aperto denso di  $A$  è della forma  $A \cap U$  con  $U$  aperto denso di  $X$ .

**Definizione 4.21** (Sottoinsieme di I- e II-categoria).

Un sottoinsieme  $S$  di  $X$  è di **I-categoria (di Baire)** in  $X$  se è unione numerabile di insiemi  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  con  $\text{int}(\overline{E_i}) = \emptyset$ .

Inoltre  $S$  è di **II-categoria (di Baire)** in  $X$  se non è di I-categoria.

*Osservazione 4.22.*

Se  $X$  è di Baire e  $S \subseteq X$  è di I-categoria allora  $X \setminus S$  è di II-categoria in quanto  $X$  stesso è di II-categoria (se  $X = \bigcup E_i$  con  $E_i$  chiusi a parte interna vuota allora  $\emptyset = \bigcap E_i^c$  con  $E_i^c$  aperti densi, ma questo è assurdo perché  $X$  di Baire).

## 4.3 Teorema di Banach-Steinhaus

**Definizione 4.23** (Famiglia equicontinua).

Una famiglia  $\Gamma$  di operatori lineari continui fra SVT  $X$  e  $Y$  è **equicontinua** se per ogni  $U \in \mathcal{U}_Y$  esiste  $V \in \mathcal{U}_X$  tale che per ogni  $T \in \Gamma$ ,  $T(V) \subseteq U$ .

*Osservazione 4.24.*

Possiamo riformulare la condizione nei seguenti modi: per ogni  $U \in \mathcal{U}_Y$  esiste  $V \in \mathcal{U}_X$  tale che

$$\forall T \in \Gamma, V \subseteq T^{-1}(U) \iff V \subseteq \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(U) \doteq \Gamma^{-1}(U).$$

Equivalentemente la condizione predica che per ogni  $V \in \mathcal{U}_Y$  si abbia  $\Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$ .

*Osservazione 4.25.*

Se  $T : X \rightarrow Y$  fra spazi normati, la norma degli operatori

$$\|T\| = \|T\|_{\infty, B(0,1)} = \text{migliore costante di Lipschitz per } T.$$

**Esempio 4.26.**

Se  $X$  e  $Y$  sono normati,  $\Gamma$  è equicontinua se e solo se  $\Gamma$  è limitato in  $L(X, Y)$  rispetto alla norma degli operatori.

**Teorema 4.27** (Banach-Steinhaus / Uniforme limitatezza).

*Siano  $X, Y$  SVT,  $S \subseteq X$  di seconda categoria e  $\Gamma \subseteq L(X, Y)$  con  $\Gamma$  puntualmente limitata su  $S \subseteq X$ , cioè per ogni  $s \in S$ ,  $\Gamma(s) = \bigcup_{T \in \Gamma} T(s)$  è limitato in  $Y$ .*

*Allora  $\Gamma$  è equicontinua.*

*Dimostrazione.*

Sia  $U \in \mathcal{U}_Y$  e consideriamo  $V \in \mathcal{U}_Y$  chiuso tale che  $V - V \subseteq U$ . Per ipotesi, per ogni  $x \in S$  si ha che  $\Gamma(x)$  è limitato in  $Y$ , quindi viene assorbito da  $V$ , cioè esiste  $n_x \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $T \in \Gamma$  si ha  $T(x) \in n_x V$ , cioè tale che

$$x \in \bigcap_{T \in \Gamma} n_x T^{-1}(V) = n_x \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(V) = n_x \Gamma^{-1}(V).$$

Dunque  $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \Gamma^{-1}(V)$ . Notiamo che poiché  $V$  è chiuso,  $T^{-1}(V)$  è chiuso e quindi anche  $\Gamma^{-1}(V)$  lo è perché intersezione di chiusi. Poiché  $S$  è di seconda categoria anche l'unione delle versioni riscalate di  $\Gamma^{-1}(V)$  lo è, dunque questo insieme non è unione numerabile di chiusi con parte interna vuota, quindi almeno uno tra gli  $n \Gamma^{-1}(V)$  ha parte interna non vuota, quindi anche  $\Gamma^{-1}(V)$  ha parte interna non vuota scalando per  $\frac{1}{n}$ .

Quindi  $\Gamma^{-1}(V)$  è intorno di qualche suo punto, dunque<sup>4</sup>  $\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$  è un intorno di 0.

Ricordando che  $V - V \subseteq U$  si ha

$$T^{-1}(U \supseteq T^{-1}(V - V) = T^{-1}(V) - T^{-1}(V)) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$$

quindi passando all'intersezione su  $T \in \Gamma$  si ha

$$\Gamma^{-1}(U) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X,$$

cioè abbiamo mostrato che per ogni  $U \in \mathcal{U}_Y$  si ha  $\Gamma^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$ , che è equivalente all'equicontinuità di  $\Gamma$ .  $\square$

**Corollario 4.28** (Sottoinsiemi limitati di operatori).

*Se  $X$  e  $Y$  sono Banach e  $\Gamma \subseteq L(X, Y)$  è puntualmente limitata in  $X$  (o volendo anche un sottoinsieme di  $X$  di II-categoria) allora  $\Gamma$  è un insieme limitato in  $L(X, Y)$ .*

<sup>4</sup>se  $a_0 \in \text{int}(A)$  allora  $A - a_0 \subseteq A - A$  è un intorno di 0.

*Dimostrazione.*

Diretta applicazione di Banach-Stenhaus (4.27) notando che spazi di Banach sono in particolare SVT e che equicontinuità per la norma su  $L(X, Y)$  significa limitatezza. \*\*\*\*\*  $\square$

**Esercizio 4.29.**

Siano  $X, Y$  SVT. Trovare la topologia meno fine  $\tau$  di SVT su  $L(X, Y)$  per la quale

$$\Gamma \text{ puntualmente limitato in } L(X, Y) \iff \Gamma \text{ limitato nella topologia } \tau.$$

**Corollario 4.30.**

Siano  $X$  e  $Y$  Banach e sia  $(T_n) \subseteq L(X, Y)$  puntualmente convergente. Allora il limite  $T$  è ancora lineare, continuo e con norma

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

*Dimostrazione.*

Per il corollario precedente (4.28) si ha che  $(T_n)$  sono limitati in  $\|\cdot\|$  e il limite puntuale è lineare in quanto

$$T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \rightarrow \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Questo mostra che  $T$  è limitato e lineare, quindi  $T \in L(X, Y)$ .

Inoltre per ogni  $x \in X$  si ha

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \left( \sup_n \|T_n\| \right) \|x\|,$$

quindi  $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|$ . Ragionando analogamente per una sottosuccessione di  $(T_n)$  che in norma converge a  $\liminf_n \|T_n\|$  ricaviamo

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

$\square$

*Osservazione 4.31.*

In generale NON vale  $T_n \rightarrow T$  in  $\|\cdot\|$ .

**Proposizione 4.32** (Bilineare separatamente continua è continua).

Sia  $b : X \times Y \rightarrow Z$  bilineare e separatamente continua, cioè per ogni  $x \in X, y \in Y$  si ha che  $b(x, \cdot) : Y \rightarrow Z$  e  $b(\cdot, y) : X \rightarrow Z$  sono lineari e continue. Allora  $b$  è continua, cioè

$$\sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|b(x, y)\| < \infty.$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo la famiglia

$$\Gamma = \{b(x, \cdot) : Y \rightarrow Z\}_{x \in X, \|x\| \leq 1} \subseteq L(Y, Z).$$

Per ipotesi  $\Gamma$  è puntualmente limitata in  $Y$ , infatti per ogni  $y \in Y$

$$\sup_{b(x, \cdot) \in \Gamma} \|b(x, \cdot)\|_{L(Y, Z)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|b(x, y)\|_Z = \|b(\cdot, y)\|_{L(X, Z)} \|y\| < \infty$$

Allora  $\Gamma$  è limitata in  $\|\cdot\|_{L(Y, Z)}$ , cioè per ogni  $x \in X$  tale che  $\|x\| \leq 1$  si ha

$$\|b(x, y)\|_Z \leq M \|y\|$$

e quindi al variare di  $y$  con  $\|y\| \leq 1$  troviamo  $\|b\|_{L(X \times Y, Z)} \leq M$ .  $\square$

**Esercizio 4.33.**

Esiste una isometria lineare

$$\begin{array}{ccc} L(X, L(Y, Z)) & \longrightarrow & L^2(X \times Y, Z) \\ T & \longmapsto & (x, y) \mapsto T(x)(y) \end{array}$$

dove  $L^2(X \times Y, Z)$  sono le bilineari.

**Proposizione 4.34** ( $w^*$ -limitato vs limitato in  $\|\cdot\|_{X^*}$ ).

Sia  $Y = \mathbb{K}$  e  $X$  Banach. Sia  $\Gamma \subseteq X^*$ , allora  $\Gamma$  è  $w^*$ -limitato se e solo se è limitato in  $\|\cdot\|_{X^*}$ .

*Dimostrazione.*

Essere limitato nella topologia debole\* significa “essere assorbito da ogni intorno  $w^*$  di  $X^*$ ” cioè, usando intorni di prebase, essere assorbiti da insiemi della forma

$$\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$$

per  $x \in X$ . Notiamo che  $\Gamma$  viene assorbito da  $\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$  significa  $\Gamma(x)$  limitato in  $\mathbb{K}$ . Per il corollario (4.28) si ha che  $\Gamma$  è limitato in  $L(X, \mathbb{K}) = X^*$ .

L'altra implicazione è ovvia perché la norma operatore già rende continui gli operatori e indebolire la topologia non può trasformare un insieme limitato in uno non limitato.  $\square$

*Osservazione 4.35.*

Se  $E \subseteq F$  è un sottospazio allora  $\Gamma \subseteq E$  è limitato in  $F$  se e solo se è limitato in  $E$  per la topologia indotta.

**Proposizione 4.36.**

Sia  $\Gamma \subseteq X$ , allora  $\Gamma$  è  $w$ -limitato se e solo se è  $\|\cdot\|$ -limitato.

*Dimostrazione.*

Se  $\Gamma$  è  $\sigma(X, X^*)$ -limitato allora tramite l'immersione isometrica  $X \rightarrow X^{**}$  troviamo un insieme  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -limitato. A questo punto basta applicare la proposizione precedente (4.34).  $\square$

## Capitolo 5

# Lemma di iterazione e Iniettività / Surgettività di mappe lineari

### 5.1 Lemma di iterazione

**Lemma 5.1** (di iterazione).

Siano  $X$  e  $Y$  spazi di Banach,  $B$  palla unitaria chiusa di  $X$ ,  $T \in L(X, Y)$ ,  $U$  limitato,  $U \subseteq Y$  tali che se  $0 < t < 1$  allora

$$U \subseteq TB + tU.$$

Allora si ha  $(1 - t)U \subseteq TB$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $u_0 \in U$ , allora esistono  $x_0 \in B$  e  $u_1 \in U$  tali che

$$u_0 = T(x_0) + tu_1$$

Iterando troviamo  $u_2 \in U$  e  $x_1 \in B$  tali che  $u_1 = T(x_1) + tu_2$  e così via. Questo definisce quindi due successioni  $(u_n) \subseteq U$  e  $(x_n) \subseteq B$ . Notiamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 = t^{n+1}y_{n+1} + \sum_{i=0}^n t^i T(x_i) = T\left(\sum_{i=0}^n t^i x_i\right) + t^{n+1}y_{n+1}.$$

Poiché  $X$  è completo, la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} t^i x_i$  converge ad un punto  $x^* \in \frac{1}{1-t}B$  in quanto  $\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$ .

Poiché  $U$  è limitato esiste  $M > 0$  tale che  $U \subseteq B(0, M)$ , quindi  $\|t^{n+1}y_{n+1}\| \leq t^{n+1}M$  e questa successione converge a 0 quindi  $t^{n+1}y_{n+1}$  converge a 0. Segue che

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{i=0}^n t^i x_i\right) + \underbrace{t^{n+1}y_{n+1}}_{=o(1)} \stackrel{T \text{ continua}}{=} T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n t^i x_i\right) = T(x^*)$$

quindi  $y_0 \in \frac{1}{1-t}TB$ , cioè

$$U \subseteq \frac{1}{1-t}TB \iff (1-t)U \subseteq TB.$$

□

*Osservazione 5.2.*

Se  $U$  è un intorno di 0 limitato in  $Y$ , o anche  $U$  assorbente, allora  $T$  è surgettivo.

**Teorema 5.3** (Lemma di Urysohn).

Se  $X$  è normale e  $F_0, F_1$  sono chiusi disgiunti di  $X$  allora esiste  $f$  tale che  $F_0 = \{f = 0\}$  e  $F_1 = \{f = 1\}$ .

**Teorema 5.4** (Teorema di estensione di Tietze).

Se  $X$  è  $T_4$ ,  $Y \subseteq X$  chiuso,  $f \in C^0(Y, \mathbb{R})$ , allora  $f$  si estende ad una continua su  $X$ .

*Dimostrazione.*

Basta il caso di  $f$  limitata tanto la continuità è una condizione che è invariante componendo per un omeomorfismo e  $\mathbb{R} \cong (0, 1)$ .

La tesi è che l'operatore di restrizione (il quale è lineare e continuo)

$$R : C_b^0(X) \rightarrow C_b^0(Y)$$

è surgettivo. Basta applicare il lemma (5.1) come segue:

$$3B_{C_b(Y)} \subseteq R(B_{C_b(X)}) + 2B_{C_b(Y)}$$

e chiamiamo  $U = 3B_{C_b(Y)}$ ,  $T = (2/3)$ . Sia  $f \in 3B_{C_b(Y)}$ . Per il lemma di Urysohn esiste  $g : X \rightarrow [-1, 1]$  continua tale che  $g = -1$  su  $\{x \in Y \mid -3 \leq f \leq -1\}$  e  $g = 1$  su  $\{x \in Y \mid 3 \geq f \geq 1\}$  (i due insiemi sono chiusi perché  $Y$  è chiuso e  $f$  è continua).

$$f = g|_Y + (f - g|_Y)$$

ma notiamo allora che  $g \in B_{C_b(X)}$  e quindi  $g|_Y \in R(B_{C_b(X)})$ , mentre  $f - g|_Y \in 2B_{C_b(Y)}$ , infatti su  $\{x \in Y \mid -3 \leq f \leq -1\}$  abbiamo  $g = -1$  e quindi  $\|f - g\|_{\infty, Y} \leq 2$ , su  $\{x \in Y \mid 3 \geq f \geq 1\}$  abbiamo  $g = 1$  e quindi di nuovo  $\|f - g\|_{\infty, Y} \leq 2$ , e infine sui punti rimanenti, siccome  $f \in 3B_{C_b(Y)}$ , si ha  $\|f\| \leq 1$  e stesso per  $g$ , quindi  $\|f - g|_Y\|_{\infty, Y} \leq 2$  di nuovo.

Questo verifica le ipotesi del lemma di iterazione (5.1), quindi

$$(1 - 2/3)B_{C_b(Y)} \subseteq R(B_{C_b(X)}).$$

□

**Teorema 5.5** (Dugundji).

Sia  $(M, d)$  spazio metrico,  $A \subseteq M$  chiuso,  $E$  banach e  $f : A \rightarrow E$  continua (basta limitata) allora esiste una estensione di  $f$  continua a tutto  $M$  con la stessa norma.

*Osservazione 5.6.*

In realtà l'estensione di  $f$  a  $M$  si può dare come un operatore di estensione

$$\mathcal{E} : C_b(A, E) \rightarrow C_b(M, E).$$

Questo operatore è inverso destro dell'operatore di restrizione  $R : C_b(M, E) \rightarrow C_b(A, E)$  che abbiamo usato nel teorema di Tietze (5.4).

**Teorema 5.7** (Sollevamento per operatori lineari / Bartles-Groves).

Sia  $L : E \rightarrow F$  lineare continuo surgettivo con  $E, F$  banach.  $M$  spazio metrico e

$f : M \rightarrow F$  continua, allora  $f$  si può sollevare a  $E$ , cioè esiste  $\tilde{f} : M \rightarrow E$  continua tale che  $f = L \circ \tilde{f}$ .

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow L \\ M & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

In altre parole, è surgettivo l'operatore (lineare e continuo)

$$L_* : \begin{array}{ccc} C_b(M, E) & \longrightarrow & C_b(M, F) \\ g & \longmapsto & L \circ g \end{array} .$$

*Dimostrazione.*

Applichiamo il lemma di surgettività lineare come segue: sia  $f \in C_b(M, E)$  e consideriamo un sollevamento approssimato  $g$  costruito con partizioni dell'unità a partire da sollevamenti approssimati locali che sono costanti.  $\square$

*Osservazione 5.8.*

Se  $M = F$  e  $f = id_F$  allora questo restituisce una inversa destra continua (ma possibilmente non lineare)  $\sigma$  di  $L$ . Quindi ogni operatore lineare surgettivo ammette una inversa destra continua. Inoltre se  $L$  non ammette inversa destra lineare allora  $\sigma$  non è neanche differenziabile in alcun punto (se fosse differenziabile  $L \circ \sigma = id \implies L \circ D\sigma = id$ )

*Osservazione 5.9.*

Se  $X, Y$  banach, l'insieme degli operatori surgettivi  $\mathcal{SU} = \{L \in L(X, Y, L \text{ surg})\}$  è aperto in  $L(X, Y)$ .

*Dimostrazione.*

Se  $T \in \mathcal{SU}(X, Y)$  allora esso induce

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ X/\ker T & & \end{array}$$

Sia  $k = (\|\tilde{T}^{-1}\|)^{-1} \in \mathbb{R}$ , allora per ogni  $H \in L(X, Y)$  con  $\|H\| < k$  abbiamo  $T + H \in \mathcal{SU}(X, Y)$ : per definizione di  $k$  vale  $\tilde{T}^{-1}(B_Y) \subseteq \frac{1}{k}B_X$  perché  $\frac{1}{k} = \|\tilde{T}^{-1}\|$  e quindi

$$kB_Y \subseteq TB_X = \tilde{T}(\pi B_X) = \tilde{T}(B_{X/\ker T})$$

Dunque

$$kB_Y \subseteq TB_X \subseteq (T + H)B_X + HB_X \subseteq (T + H)B_X + \frac{\|H\|}{k}(kB_Y)$$

quindi  $T + H$  verifica le ipotesi del lemma di iterazione (5.1) con  $t = \frac{\|H\|}{k} < 1$ .  $\square$

### 5.1.1 Teorema della mappa aperta

**Teorema 5.10** (Mappa aperta).

Siano  $X, Y$  Banach e  $T : X \rightarrow Y$  lineare continuo e tale che  $T(X)$  è di II-categoria in  $Y$  (per esempio  $T$  surgettivo). Allora  $T$  è una mappa aperta.

*Dimostrazione.*

Sia  $B$  la palla unitaria chiusa di  $X$ . Basta mostrare che  $T(B)$  è un intorno di  $0$  in  $Y$  (per omotetia e traslazione seguirà che  $T$  manda intorni di  $x$  in intorni di  $T(x)$ , cioè è aperta). Notiamo che

$$X = \bigcup_n nB \implies T(X) = \bigcup_n nT(B)$$

Per ipotesi  $T(X)$  è di II-categoria in  $Y$ , quindi per qualche  $n$  si ha che  $\overline{nT(B)}$  ha parte interna non vuota e quindi  $\overline{T(B)}$  stesso ha parte interna non vuota. Poiché<sup>1</sup>

$$\overline{T(B)} - \overline{T(B)} \subseteq \overline{T(B - B)} = \overline{T(2B)} = 2\overline{T(B)}$$

si ha che  $\overline{T(B)}$  è un intorno di  $0 \in Y$ .

Mostriamo ora che  $T(B)$  stesso è un intorno di  $0$ . Poiché la chiusura è l'intersezione degli aperti che contengono  $T(B)$  si ha in particolare che

$$\overline{T(B)} = T(B) + \frac{1}{2}\overline{T(B)}.$$

Siccome  $T$  è continua,  $T(B)$  è limitato e quindi  $\overline{T(B)}$  è limitato, quindi per il lemma di iterazione (5.1) di ha

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\overline{T(B)} \subseteq T(B) \iff \overline{T(B)} \subseteq 2T(B),$$

in particolare  $T(B)$  è un intorno di  $0$  per omotetia. □

*Osservazione 5.11* (Lineare continuo allora omeo se e solo se bigettivo).

Un operatore lineare continuo è un omeomorfismo se e solo se è bigettivo. Questo è immediato da mappa aperta (5.10).

*Osservazione 5.12.*

Se  $T : X \rightarrow Y$  lineare continuo allora induce

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ X/\ker T & & \end{array}$$

con  $\tilde{T}$  lineare continua iniettiva. Se  $T$  è surgettiva allora per il teorema della mappa aperta (5.10)  $\tilde{T}$  è un omeomorfismo lineare.

*Osservazione 5.13.*

Se  $T : X \rightarrow Y$  è lineare e continua allora

$$\text{aperta} \iff \text{surgettiva} \iff \text{identificazione}.$$

---

<sup>1</sup>ricorda che in generale se  $f$  è continua allora  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

In questo caso la mappa è  $(x, y) \mapsto x - y$  e usiamo il fatto che  $T$  è lineare e

$$\overline{T(B)} \times \overline{T(B)} = \overline{T(B)} \times \overline{T(B)}.$$



**Teorema 5.14** (Grafico chiuso).

Siano  $X, Y$  Banach,  $T : X \rightarrow Y$  lineare. Allora  $T$  è continua se e solo se

$$\Gamma = \{(x, T(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

è chiuso.

*Dimostrazione.*

Data una qualsiasi mappa continua  $f : X \rightarrow Y$  con  $Y$  Hausdorff si ha che  $\Gamma$  è la preimmagine della diagonale di  $Y \times Y$  rispetto alla mappa  $id_Y \times f$ . Poiché  $Y$  è un Banach (e quindi metrico e quindi  $T_2$ ) effettivamente abbiamo la prima implicazione.

Supponiamo ora che  $\Gamma$  sia chiuso. Poiché  $X \times Y$  è prodotto di Banach esso stesso è Banach e quindi  $\Gamma$  è Banach perché chiuso di un Banach. Osserviamo ora che

$$T(x) = P_Y((x, T(x))) = P_Y((P_X|_{\Gamma})^{-1}(x)) \implies T = P_Y \circ (P_X|_{\Gamma})^{-1}.$$

Poiché  $P_X|_{\Gamma}$  è bigettiva, continua e lineare, per il teorema della mappa aperta (5.10) essa è un omeomorfismo, quindi  $T$  è continuo in quanto composizione di  $P_Y$  e  $P_X|_{\Gamma}^{-1}$  continue.  $\square$

**Esercizio 5.15.**

Sia  $T : X \rightarrow Y$  lineare fra Banach. Controntare la continuità di  $T$  con le topologie forti e deboli di  $X$  e  $Y$

$$\begin{aligned} (X, w) &\rightarrow (Y, w) \\ (X, w) &\rightarrow (Y, s) \\ (X, s) &\rightarrow (Y, w) \\ (X, s) &\rightarrow (Y, s) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Hint: usare grafico chiuso (5.14) ricordando che sottospazi vettoriali di Banach sono chiusi forti se e solo se sono chiusi deboli e osservando chi è la topologia debole di  $X \times Y$  (topologia prodotto)

Tre di queste nozioni sono equivalenti e una no. Quella diversa è più forte? Più debole?  $\square$

## Norme confrontabili

**Proposizione 5.16** (Norme confrontabili su Banach sono equivalenti).

Due norme su Banach confrontabili sullo stesso  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale sono equivalenti.

*Dimostrazione.*

Se le norme sono confrontabili,  $id_X$  è continua se sul dominio consideriamo la topologia più fine. Chiaramente  $id_X$  è lineare, quindi per il teorema della mappa aperta (5.10) si ha che  $id_X$  è aperta. Poiché  $id_X$  è bigettiva questo mostra che  $id_X$  è un omeomorfismo.  $\square$

**Esercizio 5.17.**

Su uno spazio normato  $X$  di dimensione infinita esistono sempre forme lineari non continue.

*Osservazione 5.18.*

Esistono  $L : X \rightarrow X$  lineari bigettive non continue

*Dimostrazione.*

Fisso  $f$  forma discontinua e fisso  $u \in X$ , definiamo

$$L(x) = x + f(x)u$$

e notiamo che

$$\begin{aligned} L^2(x) &= L(x + f(x)u) = L(x) + f(x)L(u) = \\ &= x + f(x)u + f(x)(u + f(u)u) = \\ &= x + (2f(x) + f(x)f(u))u. \end{aligned}$$

Se  $u$  è tale che  $f(u) = -2$  allora  $L^2 = id_X$ , cioè  $L$  involuzione. In particolare  $L$  è bigettiva ma continua se e solo se  $f$  lo è, e non lo è quindi  $L$  non continua su  $(X, \|\cdot\|_1)$  Banach.

Poniamo  $\|x\|_2 = \|L(x)\|_1$ . Notiamo che  $\|\cdot\|_2$  rende  $X$  Banach in quanto  $L : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  è una isometria. Notiamo dunque che  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  sono norme che rendono  $X$  Banach e che non sono equivalenti ( $L$  è discontinua per  $\|\cdot\|_1$  ma continua per  $\|\cdot\|_2$ ).  $\square$

### Esercizio 5.19.

Siano  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  norme sullo stesso  $X$  e sia  $\|\cdot\|_3 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ . Allora

1. Una successione  $(x_n)$  converge a  $x \in X$  in  $\|\cdot\|_3$  se e solo se converge a  $x$  in  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$ .
2.  $(x_n)$  è di Cauchy in  $X$  se e solo se è di Cauchy sia per  $\|\cdot\|_1$  che per  $\|\cdot\|_2$ .

### Esercizio 5.20.

TROVA L'IMBROGLIO:

“**Proposizione.**” Tutte le norme di Banach sullo stesso  $X$  sono equivalenti.

*“Dimostrazione.”*

Siano  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  di Banach. Notiamo che  $\|\cdot\|_3$  è più fine delle altre due e che  $(x_n)$  è di Cauchy per  $\|\cdot\|_3$  se e solo se lo è per le altre due, quindi per il punto 1. della proposizione precedente la successione converge in  $\|\cdot\|_3$ . Segue dunque che, poiché  $\|\cdot\|_3$  è più fine allora è confrontabile con le altre due, quindi le tre norme sono equivalenti.  $\square$

## 5.2 Iniettività e surgettività di mappe lineari

Cerchiamo di capire che relazione c'è tra iniettività e surgettività delle mappe  $T$  e  $T^*$  per  $T : X \rightarrow Y$  lineare continua.

### 5.2.1 Forte iniettività

**Definizione 5.21** (Forte iniettività).

Una mappa  $T : X \rightarrow Y$  lineare continua è **fortemente iniettiva** se esiste  $c > 0$  tale che

$$\forall x \in X \quad \|T(x)\| \geq c \|x\|.$$

### Proposizione 5.22.

Se  $X$  e  $Y$  sono Banach e  $T : X \rightarrow Y$  lineare continua,  $T$  è fortemente iniettiva se e solo se  $T$  è iniettiva e  $\text{Imm } T$  è chiuso.

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

$\Rightarrow$  Iniettiva ok. Sia  $T' : X \rightarrow \text{Imm } T \subseteq Y$  la stessa mappa di  $T$  ma con codominio ristretto. Notiamo che  $T'$  è invertibile perché iniettiva e surgettiva per costruzione e che ha inversa continua per la disuguaglianza in ipotesi, quindi  $\text{Imm}(T)$  è Banach perché  $X$  è Banach e quindi  $\text{Imm } T$  è chiuso in  $Y$ .

$\Leftarrow$  Se  $T$  è iniettiva con immagine chiusa allora  $T' : X \rightarrow \text{Imm } T$  è invertibile. Inoltre, poiché  $\text{Imm } T$  è Banach perché chiuso di  $Y$ , si ha che per mappa aperta (5.10) vale  $(T')^{-1}$  continua, cioè  $T$  fortemente iniettiva.

□

**Proposizione 5.23** (Retrazioni e sezioni per lineari continue).

Sia  $T \in L(X, Y)$  con  $X, Y$  Banach. Allora  $T$  è una<sup>2</sup>

- *inversa destra*  $\iff$  *iniettiva e*  $\text{Imm } T$  *è complementato*<sup>3</sup>
- *inversa sinistra*  $\iff$  *surgettivo e*  $\ker T$  *è complementato.*

*Dimostrazione.*

Se  $T : X \rightarrow Y$  e  $S : Y \rightarrow X$  sono una coppia tale che  $S \circ T = id_X$  allora  $T \circ S = P$  è un proiettore lineare continuo, infatti

$$P^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = T \circ id_X \circ S = T \circ S.$$

Quindi  $Y = \ker P \oplus \text{Imm } P$  e  $\ker P = \ker S$ ,  $\text{Imm } P = \text{Imm } T$ , ovvero

$$Y = \ker S \oplus \text{Imm } T$$

come volevamo.

Viceversa, se  $T$  è iniettivo e  $\text{Imm } T$  è complementata (rispettivamente  $S$  è surgettivo e  $\ker S$  complementato) allora considero un proiettore  $P_{\text{Imm } T}$  (ok per la decomposizione in somma diretta) e definisco  $S = (T')^{-1} \circ P_{\text{Imm } T}$  che è inversa sinistra di  $T$  (rispettivamente definisco un proiettore  $Q$  su  $\ker S$  con  $id_Y - Q$  proiettore sul supplementare  $V$  fissato di  $\ker S$ , a questo punto considero  $S|_V^{-1}$ , che diventa inversa destra). □

**Teorema 5.24** (Surgettività e aggiunti).

Sia  $T \in L(X, Y)$  con  $X, Y$  banach e tale che  $T^*$  fortemente iniettivo (iniettivo più immagine chiusa). Allora  $T$  è surgettivo.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $\|T^*y\| \geq \|y\|$  (ricordiamo che fortemente iniettivo significa  $\|T^*y\| \geq k\|y\|$  per qualche  $k < 1$ , ma a meno di riscalare  $T$  supponiamo  $k = 1$ ). Sia  $0 < t < 1$  e mostriamo che  $B_Y \subseteq TB_X + tB_Y$ , così facendo possiamo invocare il lemma di iterazione (5.1) e mostrare  $B_Y \subseteq T(B_X)$ , in particolare  $T$  è surgettivo.

Supponiamo per assurdo che non valga  $B_Y \subseteq TB_X + tB_Y$ , allora esiste  $y_0 \in B_Y$  tale che  $y_0 \notin TB_X + tB_Y$  (convesso aperto). Per il teorema di Hahn-Banach in forma

<sup>2</sup>cioè esiste  $S : Y \rightarrow X$  tale che  $T$  è l'inversa destra / sinistra di  $S$ .

<sup>3</sup>cioè esiste  $V \subseteq Y$  tale che  $Y = \text{Imm } T \oplus V$ .

di separazione di aperti convessi (3.26) esiste  $y_0^* \in Y^* \setminus \{0\}$  tale che  $\forall x \in B_X$  e  $\forall y \in B_Y$  si ha

$$\langle y_0^*, Tx + ty \rangle \leq \langle y_0^*, y_0 \rangle \leq \|y_0^*\|$$

Allora

$$\langle T^* y_0^*, x \rangle + t \langle y_0^*, y \rangle \leq \|y_0^*\|$$

passando all'estremo superiore per  $x \in B_X$  e  $y \in B_Y$  troviamo

$$\|T^* y_0\| + t \|y_0^*\| \leq \|y_0^*\|$$

cioè  $\|T^* y_0\| \leq (1 - t) \|y_0^*\|$ , contraddicendo l'ipotesi di forte iniettività ( $\|T^* y\| \geq \|y\|$  per ogni  $y$ )  $\square$

*Osservazione 5.25.*

In realtà vale anche  $T^*$  surgettivo se e solo se  $T$  fortemente iniettivo.

### 5.2.2 Polare, prepolare, annullatore, preannullatore

**Definizione 5.26** (Assolutamente convesso).

Un insieme bilanciato e convesso si dice **assolutamente convesso**. Per un insieme  $S$  ha senso l'**inviluppo assolutamente convesso**

$$\begin{aligned} \text{assco}(S) &= \bigcap_{\substack{C \text{ ass.conv.} \\ C \supseteq S}} C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid a_1, \dots, a_n \in S, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\} = \\ &= \overline{B_{\mathbb{K}}(0, 1)} \text{co}(S) \end{aligned}$$

**Definizione 5.27** (Polare e prepolare).

Sia  $X$  SVT,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq X^*$ . Definiamo la **polare di  $A$**  come

$$A^0 = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x \rangle| \leq 1, \forall x \in A\} = \bigcap_{x \in A} \{x\}^0$$

Definiamo  $x^0 = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x \rangle| \leq 1\} \supseteq \ker(\iota_X(x))$ .

Definiamo il **prepolare di  $B$**  come

$$B_0 = \{x \in X \mid |\langle x^*, x \rangle| \leq 1, \forall x^* \in B\} = \bigcap_{x^* \in B} \{x^*\}_0$$

*Osservazione 5.28.*

La polare di un qualche insieme è assolutamente convessa e  $w^*$ -chiusa. La prepolare è assolutamente convessa e chiusa in  $X$  (anche forte).

**Definizione 5.29** (Annullatore e preannullatore).

Sia  $X$  SVT,  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq X^*$ . Definiamo l'**annullatore di  $A$**  come

$$A^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x \in A\} = \bigcap_{x \in A} \text{Ann}(x) = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\perp$$

e il **preannullatore di  $B$**  come

$$B_\perp = \{x \in X \mid \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x^* \in B\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^* = \bigcap_{x^* \in B} (x^*)^\perp.$$

*Osservazione 5.30.*

Se  $A$  e  $B$  sono sottospazi vettoriali o coni in generale allora

$$A^0 = A^\perp, \quad B_0 = B_\perp.$$

Da ora in poi supponiamo  $(X, \|\cdot\|)$  normato e sia  $i_X : X \hookrightarrow X^{**}$ .

**Proposizione 5.31** (Polare e prepolare in normato).

*Della definizione si ha*

- $A^0 = (i_X(A))_0$
- $B_0 = i_X^{-1}(B^0) = B^0 \cap X$

*Dimostrazione.*

Segue dal fatto che  $\langle x^*, x \rangle = \langle i_X(x), x^* \rangle$ . Per esempio

$$\begin{aligned} A^0 &= \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x \rangle| \leq 1, \forall x \in A\} = \\ &= \{x^* \in X^* \mid |\langle i_X(x), x^* \rangle| \leq 1, \forall x \in A\} = \\ &= \{x^* \in X^* \mid |\langle y, x^* \rangle| \leq 1, \forall y \in i_X(A) \subseteq X^{**}\} = (i_X(A))_0. \end{aligned}$$

□

*Osservazione 5.32.*

Per le palle unitarie chiuse vale

$$(B_X)^0 = B_{X^*}, \quad (B_{X^*})_0 = B_X$$

dove per la seconda uguaglianza usiamo Hahn-Banach per dire  $(B_{X^*})^0 \cap X = B_X$ .

**Proposizione 5.33.**

*Siano  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq X^*$ , allora*

$$(A^0)_0 = \overline{\text{assco}(A)}, \quad (B_0)^0 = \overline{\text{assco}(B)}^{w*}.$$

*Dimostrazione.*

Dalla definizione è chiaro che  $A \subseteq (A^0)_0$  e  $B \subseteq (B_0)^0$ . Poiché  $(A^0)_0$  è assolutamente convesso e chiuso vale

$$(A_0)^0 \supseteq \overline{\text{assco}(A)}$$

e per lo stesso motivo  $(B_0)^0 \supseteq \overline{\text{assco}(B)}^{w*}$ .

Sia  $a \notin \overline{\text{assco}(A)}$ . Per Hahn-Banach (3.26) esiste<sup>4</sup>  $f_0 \in X_{\mathbb{R}}^*$  tale che  $\langle f_0, a \rangle > \gamma \geq \langle f_0, x \rangle$  per ogni  $x \in \overline{\text{assco}(A)}$ . A meno di riscalare  $f_0$  supponiamo  $\gamma = 1$ . Allora  $|\langle f_0, x \rangle| \leq 1$  per ogni  $x \in \overline{\text{assco}(A)}$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  poniamo  $f = f_0$ , se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  allora poniamo  $\langle f, x \rangle = \langle f_0, x \rangle - i \langle f_0, ix \rangle$  e notiamo che

$$\sup_{x \in \overline{\text{assco}(A)}} |\langle f, x \rangle| = \sup_{x \in \overline{\text{assco}(A)}} |\langle f_0, x \rangle|$$

Dunque  $f \in A^0$ , ma  $|\langle f, a \rangle| \geq \langle f_0, a \rangle > 1$ , quindi  $a \notin (A^0)_0$ . Questo mostra l'inclusione  $(A^0)_0 \subseteq \overline{\text{assco}(A)}$ . □

<sup>4</sup> $X_{\mathbb{R}}$  è  $X$  visto come  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale.

*Osservazione 5.34.*

$(A^\perp)_\perp = \overline{\text{Span}(A)}$  e  $(B_\perp)^\perp = \overline{\text{Span}(B)}^{w^*}$ , infatti polare e prepolare coincidono con annullatore e preannullatore per coni e chiaramente

$$(A^\perp)_\perp = (\text{Span}(A)^\perp)_\perp, \quad (B_\perp)^\perp = (\text{Span}(B)_\perp)^\perp.$$

*Osservazione 5.35.*

Se  $A \subseteq X$  allora  $A$  è denso se e solo se  $A^\perp = (0)$  e  $B \subseteq X^*$  è  $w^*$ -denso se e solo se  $B_\perp = (0)$ .

**Proposizione 5.36** (Relazione tra nucleo e immagine tra  $T$  e  $T^*$ ).

Se  $T \in L(X, Y)$  allora

- $\ker T = (\text{Imm } T^*)_\perp$
- $\ker T^* = (\text{Imm } T)^\perp$
- $(\ker T)^\perp = \overline{\text{Imm } T^*}^{w^*}$
- $(\ker T^*)_\perp = \overline{\text{Imm } T}$ .

*Dimostrazione.*

Abbiamo una catena di equivalenze

$$\begin{aligned} x &\in \ker T \\ Tx &= 0 \\ \langle y^*, Tx \rangle &= 0 \quad \forall y^* \in Y^* \\ \langle T^* y^*, x \rangle &= 0 \quad \forall y^* \in Y^* \\ x &\in (\text{Imm } T^*)_\perp. \end{aligned}$$

dove la seconda equivalenza è data da Hahn-Banach (3.4). Segue che  $(\ker T)^\perp = ((\text{Imm } T^*)_\perp)^\perp = \overline{\text{Imm } T^*}^{w^*}$ .

L'altro caso si fa allo stesso modo. □

**Corollario 5.37** (Iniettività e aggiunti).

Sia  $T \in L(X, Y)$ , allora

$$\begin{aligned} T \text{ iniettivo} &\iff \text{Imm } T^* \text{ è } w^*\text{-denso in } X^* \\ T^* \text{ iniettivo} &\iff \text{Imm } T \text{ è denso in } Y \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Segue da (5.36), dove però per dire che  $(\ker T)^\perp = X^* \implies \ker T = (0)$  stiamo usando Hahn-Banach (3.4) (se  $\ker T$  contiene un vettore non nullo allora possiamo costruire un elemento di  $X^*$  che non si annulla su quel vettore, e quindi che non si annulla su  $\ker T$ ). □

**Esercizio 5.38.**

Scrivere un criterio per “essere inverso sinistro lineare” per  $T \in L(X, Y)$  deducendolo dal lemma di iterazione.

**Teorema 5.39** (Goldstine).

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  normato e  $B_X = \overline{B_X(0, 1)}$ , allora

$$\overline{i_X(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$$

e quindi  $\overline{X}^{w^*} = X^{**}$ .

*Dimostrazione.*

Calcoliamo (la topologia debole\* su  $X^{**}$  è  $\sigma(X^{**}, X^*)$ ):

$$\overline{i_X(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = (i_X(B_X)_0)^0 \stackrel{(5.31)}{=} (B_X^0)^0 = (B_{X^*})^0 = B_{X^{**}}$$

□

### 5.2.3 Caso dei Banach

**Proposizione 5.40** (Duale di sottospazi e di un quoziente).

*Dato  $Y$  sottospazio chiuso di  $X$  Banach abbiamo le seguenti isometrie lineari:*

1.  $Y^* \cong X^*/Y^\perp$
2.  $(X/Y)^* \cong Y^\perp \subseteq X^*$

*Dimostrazione.*

Data l'inclusione  $j_Y : Y \rightarrow X$  otteniamo  $j_Y^* : X^* \rightarrow Y^*$ . Il nucleo di  $j_Y^*$  sono i funzionali in  $X^*$  che si restringono al funzionale nullo su  $Y^*$ , cioè gli  $f \in X^*$  tali che

$$j_Y^*(f) = f \circ j_Y = f|_Y = 0$$

e quindi  $\ker j_Y^* = Y^\perp$ . Per il teorema di Hahn-Banach (3.2),  $j_Y^*$  è surgettiva in quanto ogni funzionale su  $Y$  si estende ad uno su  $X$  perché  $X$  Banach e  $Y$  chiuso. Per il teorema di isomorfismo esiste un'unica mappa  $\phi$  che fa commutare

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{j_Y^*} & Y^* \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ X^*/Y^\perp & & \end{array}$$

Per questioni di algebra  $\phi$  è lineare e poiché  $j_Y^*$  è continua e  $\pi$  induce la topologia quoziente,  $\phi$  è continua. Verifichiamo che è una isometria.

$$B_{X^*/Y^\perp}(0, 1) = \pi(B_{X^*}(0, 1))$$

$$\phi(B_{X^*/Y^\perp}(0, 1)) = \phi(\pi(B_{X^*}(0, 1))) = j_Y^*(B_{X^*}(0, 1)) \stackrel{(3.2)}{=} B_{Y^*}(0, 1).$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estensione data da Hahn-Banach mantiene la norma.

Data la proiezione  $\pi : X \rightarrow X/Y$  otteniamo  $\pi^* : (X/Y)^* \rightarrow X^*$ . Sia  $\varphi \in (X/Y)^*$  e  $f = \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi$ . Si ha che

$$\varphi(B_{X/Y}) = \varphi(\pi(B_X)) = f(B_X),$$

quindi  $\|\varphi\|_{(X/Y)^*} = \|f\|_{X^*}$ , cioè  $\pi^*$  è una immersione isometrica.

Sia  $f \in X^*$ , si ha che  $f \in Y^\perp$  se e solo se  $Y \subseteq \ker f$  che succede se e solo se  $f$  si fattorizza tramite  $\pi$  per proprietà universale. Quindi  $f \in Y^\perp$  se e solo se  $f = \varphi \circ \pi = \pi^*(\varphi)$  per qualche  $\varphi : X/Y \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè se e solo se  $f \in \pi^*((X/Y)^*)$ . Quindi  $\text{Imm } \pi^* = Y^\perp$ .

Restringendo il codominio all'immagine troviamo quanto voluto.

□

**Proposizione 5.41** (Banach riflessivi).

Sia  $X$  banach<sup>5</sup>, allora  $X$  è riflessivo se e solo se  $X^*$  è riflessivo.

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che

$$\begin{array}{ccc} & X^{***} & \\ i_{X^*} \nearrow & & \searrow (i_X)^* \\ X^* & \xrightarrow{id_{X^*}} & X^* \end{array}$$

Se  $X$  è riflessivo, cioè  $i_X$  è isomorfismo, allora  $(i_X)^*$  è un isomorfismo per funtorialità. Dal diagramma allora segue che  $i_{X^*}$  è un isomorfismo, infatti

$$(i_X)^* \circ i_{X^*} = id_{X^*} \implies i_{X^*} = ((i_X)^*)^{-1} \circ (i_X)^* \circ i_{X^*} = ((i_X)^*)^{-1}.$$

Quindi  $i_{X^*}$  è un isomorfismo, cioè  $X^*$  è riflessivo.

Viceversa, se  $i_{X^*}$  è un isomorfismo allora  $(i_X)^*$  è un isomorfismo per motivi analoghi a prima, quindi  $i_X$  ha immagine densa (iniettività di  $(i_X)^*$  e (5.36)), ma l'immagine di  $i_X$  è sempre chiusa, quindi  $X$  è riflessivo (iniettività di  $i_X$  vale sempre perché immersione isometrica).  $\square$

*Osservazione 5.42.*

Se  $X$  non è riflessivo allora nessun duale successivo può essere riflessivo.

**Teorema 5.43** (Immagine chiusa).

Siano  $X, Y$  banach,  $T \in L(X, Y)$ , allora sono equivalenti

1.  $\text{Imm } T$  è  $\|\cdot\|$ -chiuso
2.  $\text{Imm } T$  è  $w$ -chiuso
3.  $\text{Imm } T^* = (\ker T^*)^\perp$
4.  $\text{Imm } T^*$  è  $\|\cdot\|$ -chiuso
5.  $\text{Imm } T^*$  è  $w^*$ -chiuso
6.  $\text{Imm } T^* = (\ker T)^\perp$

*Dimostrazione.*

1. e 2. sono sempre equivalenti per sottospazi vettoriali.

$$\overline{\text{Imm } T} \stackrel{(5.36)}{=} ((\ker T^*)^\perp)$$

quindi 2. è equivalente a 3. Similmente 5. e 6. sono equivalenti per  $\overline{\text{Imm } T^*}^{w^*} = (\ker T)^\perp$ . Poiché la topologia debole\* è meno fine della topologia forte, 5. implica 4.

Resta da mostrare solo 4.  $\implies$  1. e 1.  $\implies$  6.

4.  $\implies$  1. Supponiamo  $\text{Imm } T^*$  chiuso forte. Siano  $Z = \overline{\text{Imm } T}$  e  $S : X \rightarrow Z$  la mappa ottenuta da  $T$  restringendo il codominio, che possiamo fare perché  $\text{Imm } T \subseteq Z$ .

Per costruzione  $\text{Imm } S$  è densa in  $Z$  e la tesi è  $S$  surgettiva. Dualizzando la successione

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ S \nearrow & & \searrow \\ X & \xrightarrow{T} & Y \end{array}$$

<sup>5</sup>banach serve perché  $X^*$  è isometrico a  $\widehat{X}^*$  dove  $\widehat{X}$  è il completamento di  $X$ .



troviamo

$$\begin{array}{ccc} & Z^* & \\ Y^* \nearrow & & \searrow S^* \\ & X^* & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ T^* \end{array}$$

dove la mappa  $Y^* \rightarrow Z^*$  è la restrizione del dominio, che è surgettiva per il teorema di Hahn-Banach (3.4), dunque  $S^*(Z) = T^*(Y)$ . Notiamo che  $T^*(Y)$  è chiuso in norma, quindi anche  $S^*(Z)$  lo è. Poiché  $\text{Imm } S$  è densa,  $S^*$  è iniettiva, quindi per la caratterizzazione (5.24)  $S^*$  è fortemente iniettivo e perciò  $S$  è surgettivo.

1.  $\implies$  6. È sempre vero che  $\text{Imm } T^* \subseteq (\ker T)^\perp$  in quanto  $(\ker T)^\perp$  è la chiusura di  $\text{Imm } T$  per la topologia debole\* (5.36).

Sia  $x^* \in (\ker T)^\perp$ , cioè  $\ker T \subseteq \ker x^*$ . Consideriamo la mappa lineare (a priori non continua)

$$\xi : \begin{array}{ccc} \text{Imm } T & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ T(x) & \longmapsto & x^*(x) \end{array}$$

che è ben definita perché se  $T(x) = T(x')$  allora  $x - x' \in \ker T \subseteq \ker x^*$ . Notiamo che  $x^* = \xi \circ T$ .

Poiché  $\text{Imm } T$  è chiuso (stiamo assumendo 1.) esso è banach, quindi si ha che  $T$  è aperta come mappa  $X \rightarrow \text{Imm } T$  per il teorema della mappa aperta (5.10), quindi induce la topologia quoziente, il che significa che  $\xi$  era un funzionale lineare CONTINUO.

Per il teorema di Hahn-Banach (3.4)  $\xi$  si estende a  $y^* \in Y^*$  e poiché  $x^* = \xi \circ T$  si ha  $x^* = y^* \circ T = T^*(y^*)$ , cioè  $x^* \in \text{Imm } T^*$ .

□

Abbiamo dunque

$$T \text{ surg.} \iff \begin{cases} \text{Imm } T & \text{chiusa} \\ \text{Imm } T & \text{densa} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Imm } T^* & \text{chiusa} \\ T^* & \text{iniettiva} \end{cases} \iff T^* \text{ fortemente iniettiva}$$

#### Esercizio 5.44.

Per  $X, Y$  banach, i seguenti sottoinsiemi di  $L(X, Y)$  sono aperti

- Surgettive
- Inverse sinistre
- Inverse destre
- Fortemente iniettive
- Invertibili

Per  $T$  che appartiene ad uno di questi trovare  $r > 0$  tale che  $B(T, r)$  sia contenuto nell'aperto.

*Solution.*

Esempio, per  $T$  invertibile posso prendere  $B(T, 1/\|T^{-1}\|)$ .

□

**Proposizione 5.45** (Duale è endofuntore su Banach).

La corrispondenza

$$\begin{array}{ccc} \text{Ban}^{op} & \longrightarrow & \text{Ban} \\ X & \longmapsto & X^* \\ T : X \rightarrow Y & \longmapsto & T^* : Y^* \rightarrow X^* \end{array}$$

è un endofuntore controvariante esatto<sup>6</sup>.

*Dimostrazione.*

Se  $\ker \alpha = (0)$  e  $\text{Imm } \alpha = \ker \beta$  è chiusa (cioè  $\alpha$  è fortemente iniettiva) allora  $\alpha^*$  ha immagine chiusa e  $\text{Imm } \alpha^* = (\ker \alpha)^\perp = X^*$ , quindi  $\alpha^*$  è surgettiva.

Se  $\text{Imm } \alpha = \ker \beta$  allora

$$\ker \alpha^* = (\text{Imm } \alpha)^\perp = (\ker \beta)^\perp = \overline{\text{Imm } \beta^*} \stackrel{\text{Imm } \beta \text{ chiusa}}{=} \text{Imm } \beta^*$$

Infine  $\beta$  surgettiva implica  $\beta^*$  iniettiva (5.37). □

**Corollario 5.46.**

Il funtore biduale

$$\begin{array}{ccc} \text{Ban} & \longrightarrow & \text{Ban} \\ X & \longmapsto & X^{**} \\ T : X \rightarrow Y & \longmapsto & T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**} \end{array}$$

è un funtore covariante esatto. L'inclusione  $i_X : X \rightarrow X^{**}$  induce una trasformazione naturale tra il funtore  $\text{id}_{\text{Ban}}$  e  $\cdot^{**}$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\quad} & & & \text{val}_x \\ & \searrow \subset & & \nearrow \supset & \\ & & X \xrightarrow{i_X} X^{**} & & \\ & & \downarrow T \quad \downarrow T^{**} & & \downarrow \\ & & Y \xrightarrow{i_Y} Y^{**} & \ni & T^{**}(\text{val}_x) \\ & \swarrow \subset & & \searrow \supset & \\ T(x) & \xrightarrow{\quad} & & & \text{val}_{T(x)} \end{array}$$

dove  $T^{**}(\text{val}_x)(f)$  per  $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$  lineare continua è data da

$$(T^{**}(\text{val}_x)(f)) = ((\text{val}_x \circ T^*)(f)) = (T^*(f))(x) = f(T(x)) = \text{val}_{T(x)}(f).$$

□

*Osservazione 5.47.*

Se  $j : Y \rightarrow X$  è inclusione di sottospazio chiuso (in generale per  $j$  fortemente iniettiva) allora  $j^{**}$  è fortemente iniettiva, infatti il biduale è un funtore esatto e

$$\text{Imm } j^{**} = (\ker j^*)^\perp = (Y^\perp)^\perp = ((i_X(Y))^\perp)^\perp = \overline{i_X(Y)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$$

cioè  $Y^{**}$  è la chiusura  $w^*$  di  $Y$  visto in  $X^{**}$ .

<sup>6</sup>Ricordiamo che un funtore è esatto se per ogni successione esatta corta  $0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \rightarrow 0$  (cioè  $\alpha$  iniettiva,  $\beta$  surgettiva e  $\text{Imm } \alpha = \ker \beta$ ) allora  $0 \leftarrow X^* \xleftarrow{\alpha^*} Y^* \xleftarrow{\beta^*} Z^* \leftarrow 0$  è ancora esatta.

*Osservazione 5.48.*

Se  $Y \subseteq X$  chiuso e  $X$  è riflessivo allora anche  $Y$  è riflessivo. Infatti se  $i_X$  è surgettivo allora  $(X, \sigma(X, X^*)) \cong (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ , quindi  $i_X(Y)$  deve essere  $w^*$ -chiusa in  $X^{**}$  (perché era  $w$ -chiuso in  $X$ ). Perciò  $i_X(Y) = \text{Imm } j^{**}$  e quindi  $i_Y : Y \rightarrow Y^{**}$  è surgettiva.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ i_Y \downarrow & & \downarrow i_X \\ Y^{**} & \xrightarrow{j^{**}} & X^{**} \end{array}$$

**Proposizione 5.49** (Criterio riflessivo con sottospazio chiuso).

*Se  $Y \subseteq X$  è chiuso.  $X$  è riflessivo se e solo se  $Y$  e  $X/Y$  sono riflessivi.*

*Dimostrazione.*

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{j} & X & \longrightarrow & X/Y & \longrightarrow & 0 \\ & & i_Y \downarrow & & \downarrow i_X & & \downarrow i_{X/Y} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y^{**} & \xrightarrow{j^{**}} & X^{**} & \longrightarrow & (X/Y)^{**} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se  $X$  è riflessivo abbiamo già detto che anche  $Y$  lo è. Se  $Y$  e  $X/Y$  sono riflessivi, due frecce verticali su tre sono isomorfismi, quindi anche la terza lo è per il lemma dei 5.

Per un motivo analogo se  $X$  è riflessivo allora anche  $Y$  lo è e quindi di nuovo per il lemma dei 5 anche  $X/Y$  riflessivo.  $\square$

## Capitolo 6

# Separabilità e Spazi uniformemente convessi

### 6.1 Separabilità vs Metrizzabilità

[RISCRIVERE POI PERCHÉ NON SI CAPISCE NIENTE]

**Lemma 6.1.**

Se  $Y$  è normato,  $Z \subseteq Y$  e  $g \in Y$  allora esiste  $\varphi \in Y^*$  tale che  $\|\varphi\| = 1$ ,  $\langle \varphi, g \rangle = \text{dist}(g, Z)$  e  $\varphi \in Z^\perp$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\pi : Y \rightarrow Y/Z$  la mappa quoziente. Applichiamo Hahn-Banach (3.2) a  $Y/Z$ : esiste  $\psi \in (Y/Z)^*$  tale che

$$\langle \psi, \pi(g) \rangle = \|\pi g\| = \text{dist}(g, Z)$$

di norma 1. Poniamo  $\varphi = \pi^* \psi$ .

$$\langle \varphi, g \rangle = \langle \pi^* \psi, g \rangle = \langle \psi, \pi g \rangle = \text{dist}(g, Z)$$

e  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$  perché  $\pi^* : (Y/Z)^* \rightarrow Z^\perp \subseteq Y^*$  è una isometria. □

**Teorema 6.2** (Separabilità in termini di metrizzabilità di palle).

Sia  $X$  spazio normato. Siano  $B_X$  e  $B_{X^*}$  palle unitarie chiuse.

1. se  $X^*$  è  $\|\cdot\|$ -separabile allora anche  $X$  lo è.
2.  $X$  è  $\|\cdot\|$ -separabile se e solo se  $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  è metrizzabile
3.  $X^*$  è  $\|\cdot\|$ -separabile se e solo se  $(B_X, \sigma(X, X^*))$  è metrizzabile

*Dimostrazione.*

Mostriamo le proposizioni:

1. Sia  $X^*$  separabile e sia  $\{f_k\}$  numerabile denso. Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  sia  $x_k \in X$  tale che

$$\begin{cases} \|x_k\| = 1 \\ |\langle f_k, x_k \rangle| \geq \frac{1}{2} \|f_k\| \end{cases}$$

Affermiamo che  $Y = \text{Span}(\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}})$  è denso in  $X$ : basta verificare che  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}^\perp = (0)$  per (5.36). Sia  $f \in X^*$  tale che  $\langle f, x_k \rangle = 0$  per ogni  $k$  e sia  $f_{k_j}$  una sottosuccessione di  $\{f_k\}$  che converge a  $f$  in norma. Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|f_{k_j}\| &\leq |\langle f_{k_j}, x_{k_j} \rangle| \leq |\langle f_{k_j} - f, x_{k_j} \rangle| + |\langle f, x_{k_j} \rangle| = \\ &= |\langle f_{k_j} - f, x_{k_j} \rangle| \leq \|f_{k_j} - f\| \underbrace{\|x_{k_j}\|}_{=1} = o_{j \rightarrow \infty}(1) \end{aligned}$$

dove quella norma è un  $o(1)$  perché  $f_{k_j} \rightarrow f$ .

2. Diamo le due implicazioni

$\Rightarrow$  Sia  $X$  separabile e  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  numerabile denso in  $B_X$ . Definiamo una norma su  $X^*$  ponendo

$$|||f||| = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} |\langle f, x_n \rangle| \stackrel{\forall m}{\geq} 2^{-m} \langle f, x_m \rangle.$$

Per costruzione

$$|||f||| \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \|f\| \|x_n\| \leq \left( \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \right) \|f\| = \|f\|,$$

cioè  $|||\cdot|||$  è meno fine di  $\|\cdot\|$ .

Affermiamo che  $id : (B_{X^*}, |||\cdot|||) \rightarrow (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  è un omeomorfismo<sup>1</sup>.

Poiché il dominio è metrico basta mostrare la continuità sequenziale. Sia allora  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $B_{X^*}$  con  $f_k \rightarrow f \in B_{X^*}$  convergente per  $|||\cdot|||$ . Vogliamo mostrare che  $f_k \rightarrow f$  rispetto alla norma debole\*. Senza perdita di generalità supponiamo  $f = 0$  (altrimenti basta considerare  $\frac{1}{2}(f_k - f)$ ).

Se  $|||f_k||| \rightarrow 0$  allora  $|||f_k||| \geq 2^{-n} |\langle f_k, x_n \rangle| = o_k(1)$  per ogni  $n$ , quindi  $f_k$  converge puntualmente a 0 su  $(x_n)$ . Inoltre le  $f_k$  sono funzioni 1-Lipschitz  $B_X \rightarrow \mathbb{K}$  e l'insieme di convergenza di una successione di funzioni equicontinue (a valori in spazio metrico completo) è sempre un chiuso per Ascoli Arzelà. Dunque le successioni convergono puntualmente dappertutto per densità su  $B_X$  (quindi anche su  $X$  per omogeneità).

Il limite è 0 perché è sono funzioni 1-Lipschitz.

Allora  $f_k \rightarrow 0$  nella topologia debole\* perché questa è esattamente la topologia indotta dalla topologia prodotto.

Questo mostra la continuità di  $id : (B_{X^*}, |||\cdot|||) \rightarrow (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ . Se il dominio è compatto allora abbiamo una mappa bigettiva, continua da compatto in Hausdorff, dunque è un omeomorfismo.  $(B_{X^*}, |||\cdot|||)$  è compatto sequenzialmente perché, se  $\{f_k\}$  è una successione in  $B_{X^*}$  allora le  $f_k$  sono 1-Lipschitz e limitate come funzioni su  $B_X$ , quindi per argomento diagonale (vedi Ascoli-Arzelà) esiste una sottosuccessione  $f_{k_j}$  convergente su ogni  $x_n$ . Essendo questa sottosuccessione equicontinua essa converge su tutto  $X$  puntualmente. Il limite è  $f$  lineare su  $X$  e 1-lipschitz e quindi  $f \in X^*$ . Infine  $|||f_{k_j} - f||| \rightarrow 0$  perché

$$|||f_{k_j} - f||| = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} |\langle f_{k_j} - f, x_n \rangle| = o_j(1)$$

<sup>1</sup>nota che  $id : (X^*, |||\cdot|||) \rightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$  non potrebbe esserlo se  $\dim X \geq \aleph_0$ .

dove l'ultima ugualianza vale perché ogni termine è infinitesimo ed è dominata dalla serie geometrica di fattore  $1/2$ .

Questo mostra che  $(B_{X^*}, \|\cdot\|)$  è sequenzialmente compatto e questo conclude.

$\boxed{\Leftarrow}$  Supponiamo  $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  metrizzabile. Osserviamo che per  $F \in \mathcal{P}_{fin}(X)$  si ha che

$$F^0 = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x \rangle| \leq 1 \ \forall x \in F\} = \bigcap_{x \in F} \{x\}^0$$

è un intorno di 0 ( $F$  è finito) in  $(X^*, \sigma(X^*, X))$ , in realtà questi sono una base di intorni per la topologia  $\sigma(X^*, X)$ .

Se  $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  è metrizzabile allora in particolare è I-numerabile, quindi esiste una successione  $(F_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{P}_{fin}(X)$  tale che  $(F_n^0 \cap B_{X^*})_{n \geq 0}$  è una base di intorni di 0. Notiamo in particolare che  $\bigcap_{n \geq 0} F_n^0 \cap B_{X^*} = (0)$ .

Senza perdita di generalità supponiamo anche  $F_{n+1} \supseteq 2F_n$  (se avevamo una successione valida basta aggiungere la riscalatura del termine prima e l'insieme resta finito). Ricordiamo che se  $A \subseteq B$  allora  $B^0 \subseteq A^0$ , quindi gli intorni che prendiamo diventano inscatolati.

$$\begin{aligned} (0) &= \bigcap_{n \geq 0} (F_n^0 \cap B_{X^*}) = \left( \bigcap_{n \geq 0} F_n^0 \right) \cap B_{X^*} = \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right)^0 \cap B_{X^*} = \\ &= \left( \text{assco} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right) \right)^0 \cap B_{X^*} \stackrel{(*)}{=} \left( \text{Span} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right) \right)^0 \cap B_{X^*} = \\ &= \left( \text{Span} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right) \right)^\perp \cap B_{X^*} \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza  $(*)$  vale perché per ipotesi  $2 \bigcup F_n \subseteq \bigcup F_n$ , quindi prendendo l'involuppo assolutamente convesso troviamo esattamente lo Span lineare: se  $\sum \lambda_i s_i \in \text{Span} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right)$  allora

$$\sum \lambda_i s_i = \sum \frac{\lambda_i}{2^N} (2^N s_i) \in \text{assco} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right) \quad \text{per } N \text{ tale che } \sum \frac{|\lambda_i|}{2^N} \leq 1.$$

Dunque, poiché  $\left( \text{Span} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right) \right)^\perp \cap B_{X^*} = (0)$  e  $B_{X^*}$  è una palla,

$$\left( \text{Span} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right) \right)^\perp = (0),$$

cioè  $\text{Span} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right)$  è denso in  $X$  (per  $\|\cdot\|$ ). Quindi  $X$  è  $\|\cdot\|$ -separabile se consideriamo  $\text{Span}_{\mathbb{Q}} \left( \bigcup_{n \geq 0} F_n \right)$  ( $\bigcup_{n \geq 0} F_n$  è numerabile perché unione numerabile di finiti).

### 3. Diamo le due implicazioni

$\boxed{\Rightarrow}$  Segue dalla stessa freccia nel caso 2. notando che  $(B_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*))$  è metrizzabile e quindi anche  $(B_X, \sigma(X^{**}, X^*)) = (B_X, \sigma(X, X^*))$  lo è.

◁◁◁ Sia  $(B_X, \sigma(X, X^*))$  metrizzabile. Come per il punto 2. si ha che ogni  $F \in \mathcal{P}_{fin}(X^*)$  definisce

$$F_0 = \{x \in X \mid |\langle x^*, x \rangle| \leq 1 \ \forall x^* \in F\} = \bigcap_{x^* \in F} \{x^*\}_0$$

intorno di 0 in  $(X, \sigma(X, X^*))$ . La famiglia  $\{F_0\}_{F \in \mathcal{P}_{fin}(X^*)}$  è quindi una base di intorni di 0 rispetto a  $\sigma(X, X^*)$ . Poiché  $B_X$  è  $w$ -metrizzabile essa è I-numerabile quindi esiste una successione  $(F_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{P}_{fin}(X^*)$  tale che  $(F_n)_0 \cap B_X = i_X(F_n^0) \cap B_X \doteq F_n^0 \cap B_X$  sono una base di  $\sigma(X, X^*)$  ristretta a  $B_X$ .

In particolare  $\bigcap_{n \geq 0} (F_n^0 \cap B_X) = (0)$ . Assumiamo inoltre  $F_{n+1} \supseteq 2F_n$  come prima.<sup>2</sup> Supponiamo per assurdo che  $\text{Span}\left(\bigcup_{n \geq 0} F_n\right)$  non sia  $\|\cdot\|$ -denso, cioè

$$Z = \overline{\text{Span}\left(\bigcup_{n \geq 0} F_n\right)}^{\|\cdot\|} \neq X^*,$$

cioè esiste  $g \in X^* \setminus Z$ .

Per il lemma (6.1) esiste  $\varphi \in X^{**}$  tale che  $\|\varphi\| = 1$ ,  $Z \subseteq \ker \varphi$  e  $\langle \varphi, g \rangle = \text{dist}(g, Z)$ . A meno di cambiare  $g$  supponiamo  $\text{dist}(g, Z) = 1$ .

Notiamo che  $\{x \in B_X \mid \langle g, x \rangle < \frac{1}{2}\}$  è un intorno di  $0 \in B_X$  nella topologia  $\sigma(X, X^*)$ , quindi contiene un intorno di base  $F_m^0 \cap B_X$ . Poniamo

$$A = \left\{ \eta \in X^{**} \mid \langle \eta, g \rangle > \frac{1}{2}, \ |\langle \eta, f \rangle| < 1 \ \forall f \in F_m \right\}.$$

$A$  è aperto in  $\sigma(X^{**}, X^*)$  perché intersezione finita di aperti (la condizione su  $\frac{1}{2}$  e una per ogni elemento di  $F_m$ ). Notiamo che  $\varphi \in A$  perché  $\langle \varphi, g \rangle = 1$  e  $\langle \varphi, f \rangle = 0$  per ogni  $f \in Z \supseteq F_m$ .

Per Goldstine (5.39)  $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$  ma si ha che  $A \cap B_X \neq \emptyset$  perché  $\varphi \in A \cap B_{X^{**}} = A \cap \overline{B_X}^{w^*}$ .

Quindi esiste  $\tilde{x} \in B_X$  tale che  $i_X(\tilde{x}) \in A$ , cioè  $\langle g, \tilde{x} \rangle > \frac{1}{2}$  e  $|\langle f, \tilde{x} \rangle| < 1$  per ogni  $f \in F_m$ , cioè dalla seconda condizione  $\tilde{x} \in F_m^0 \cap B_X$  ma questo era esattamente l'intorno che avevamo scelto dentro  $\{g < \frac{1}{2}\}$ , quindi  $g(\tilde{x}) > \frac{1}{2}$  e  $g(\tilde{x}) < \frac{1}{2}$  assurdo. □

### Esercizio 6.3.

Sia  $X$  spazio vettoriale con due norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  tali che  $\|\cdot\|_2$  è più fine di  $\|\cdot\|_1$  ( $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$  per ogni  $x \in X$ )<sup>3</sup>.

- $B_{X_2}$  è  $\sigma(X_1, X_1^*)$ -metrizzabile se e solo se  $X_1^*$  è separabile rispetto a  $\|\cdot\|_{X_2^*}$ .

<sup>2</sup>Potremmo provare a ragionare come per il punto 2.:

$$(0) = \left( \text{Span}\left(\bigcup_{n \geq 0} F_n\right) \right)^\perp \cap B_X,$$

quindi  $\text{Span}\left(\bigcup_{n \geq 0} F_n\right)^\perp = (0)$ , cioè  $\text{Span}\left(\bigcup_{n \geq 0} F_n\right)$  è  $w^*$ -denso. Questo non basta.

<sup>3</sup>Come notazione  $(X_1, \|\cdot\|_1) = (X, \|\cdot\|_1)$  e  $(X_2, \|\cdot\|_2) = (X, \|\cdot\|_2)$ .

## 6.2 Spazi uniformemente convessi

**Definizione 6.4** (Norma uniformemente convessa).

Per uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$ , la norma si dice **uniformemente convessa** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x, y \in B_X$  si ha

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

**Esempio 6.5.**

Se  $H$  è uno spazio di Hilbert allora è uniformemente convesso e questo è testimoniato dalla identità del parallelogramma:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

e quindi se  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  allora

$$\|x - y\| \leq \sqrt{4 - \|x + y\|^2} = 2 \left( 1 - \left( \frac{\|x + y\|}{2} \right)^2 \right)^{1/2}$$

**Esempio 6.6.**

La norma  $\|\cdot\|_p$  su  $\mathbb{R}^2$  per  $1 < p < \infty$  è uniformemente convessa, anche  $\|\cdot\|_p$  su  $L^p$ .

**Teorema 6.7** (Milman-Pettis).

*Spazi di Banach uniformemente convessi sono riflessivi.*

*Dimostrazione (di Kakutani).*

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  banach U.C. e sia  $\eta \in X^{**}$ . Vogliamo mostrare che  $\eta$  è una valutazione  $val_{\tilde{x}}$  per qualche  $\tilde{x} \in X$ .

Per ogni  $k \geq 1$  siano  $\delta_k > 0$  come nella definizione di U.C. per  $\varepsilon = 1/k$ , cioè per ogni  $x, y \in B_X$  vale

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta_k \implies \|x - y\| < \frac{1}{k}.$$

Senza perdita di generalità supponiamo  $\delta_k \rightarrow 0$ . Sia  $(f_k)$  una successione in  $B_{X^*}$  massimizzante per  $\|\eta\|$ , cioè:

$$\|\eta\| \doteq \sup_{\|f\|=1} |\langle \eta, f \rangle| \stackrel{S.P.G.}{=} 1,$$

allora  $\|f_k\| = 1$  e  $\langle \eta, f_k \rangle > 1 - \delta_k$  per ogni  $k \geq 1$ . Sia  $f_0 \in X^*$  qualsiasi e  $\delta_0 = +\infty$ . Definiamo

$$A_n = \left\{ \theta \in X^{**} \mid |\langle \theta, f_k \rangle - \langle \eta, f_k \rangle| < \frac{1}{n} \text{ e } \langle \theta, f_k \rangle > 1 - \delta_k \ \forall k \in \{0, \dots, k\} \right\}$$

Notiamo che  $A_n$  è un intorno aperto di  $\eta$  per la topologia  $\sigma(X^{**}, X^*)$ , quindi per Goldstine (5.39) si ha  $A_n \cap i_X B_X \neq \emptyset$ , dunque esiste  $x_n \in B_X$  tale che  $i_X(x_n) \in A_n$ , ovvero (ricorda che  $i_X(x_n) = val_{x_n}$ )

$$\begin{cases} |\langle f_k, x_n \rangle - \langle \eta, f_k \rangle| < \frac{1}{n} \\ \langle f_k, x_n \rangle > 1 - \delta_k \end{cases} \quad \forall k \leq n$$



Per  $1 \leq p < q < \infty$  si ha

$$\left\| \frac{x_p + x_q}{2} \right\| \geq \left\langle f_p, \frac{x_p + x_q}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle f_p, x_p \rangle + \frac{1}{2} \langle f_p, x_q \rangle \geq 1 - \delta_k$$

e quindi  $\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{p}$ , cioè  $(x_n)$  è una successione di Cauchy. Poiché  $X$  è un Banach e questi punti stanno in  $B_X$  si ha che la successione converge a  $\tilde{x} \in B_X$ . Prendendo il limite in  $n$  del sistema sopra troviamo

$$\begin{cases} \langle f_k, \tilde{x} \rangle = \langle \eta, f_k \rangle & \forall k \\ \langle f_k, \tilde{x} \rangle \geq 1 - \delta_k & \forall k \end{cases}$$

Notiamo che il sistema di equazioni  $\langle f_k, x \rangle = \langle \eta, f_k \rangle$  al variare di  $k$  ha una unica soluzione in  $B_X$ , ovvero  $\tilde{x}$ : se  $\langle f_k, \tilde{y} \rangle = \langle \eta, f_k \rangle$  allora per ogni  $k$

$$1 \geq \left\| \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2} \right\| \geq \left\langle f_k, \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2} \right\rangle = \langle \eta, f_k \rangle \geq 1 - \delta_k$$

e quindi  $\left\| \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2} \right\| = 1$ , ma allora per uniforme convessità  $\tilde{x} = \tilde{y}$ .

Quindi, a prescindere dalla scelta di  $f_0$  troviamo sempre lo stesso  $\tilde{x}$ , dunque per ogni  $f \in X^*$  vale  $\langle f, \tilde{x} \rangle = \langle \eta, f \rangle$  perché 0 era incluso nel sistema che ci stavamo portando dietro. Abbiamo quindi mostrato che  $\text{val}_{\tilde{x}}(f) = \eta(f)$  per ogni  $f$ , cioè  $\eta = \text{val}_{\tilde{x}}$ .  $\square$

*Dimostrazione (via nets).*

Sia  $\eta \in X^{**}$  con  $\|\eta\| = 1$ . Per Goldstine (5.39) si ha  $\overline{B_X}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$  quindi esiste un net  $x : D \rightarrow B_X$  convergente a  $\eta$  in  $\sigma(X^{**}, X^*)$ .

Consideriamo ora il nuovo net  $x_\alpha + x_\beta : D \times D \rightarrow X$  e notiamo che  $x_\alpha + x_\beta \rightarrow 2\eta$ . Siano  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  come nella definizione di uniforme convessità e sia  $f \in X^*$  tale che  $\|f\| = 1$  e  $\langle \eta, f \rangle > 1 - \delta$  (ok perché  $\|\eta\| = 1$ ).

Allora  $\left\langle f, \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\text{val}_{x_\alpha + x_\beta}}{2}, f \right\rangle \rightarrow \langle \eta, f \rangle > 1 - \delta$ , quindi

$$\left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\| \geq \left\langle f, \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\rangle \geq 1 - \delta$$

definitivamente e quindi

$$\|x_\alpha - x_\beta\| \leq \varepsilon$$

definitivamente, quindi  $x_\alpha$  è un net di Cauchy e quindi converge a  $\tilde{x} \in X$  perché  $X$  è Banach e quindi è completo anche per nets. Concludiamo notando che  $\tilde{x} = \eta$  per unicità del limite.  $\square$

### Esempio 6.8.

Per  $1 < p < \infty$  gli spazi  $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$  sono uniformemente convessi e quindi riflessivi per Milman Pettis (6.7).

### Esercizio 6.9.

Isomorfismo tra  $L^q$  e  $(L^p)^*$ .

*Dimostrazione.*

Considerare per  $p, q$  coniugati

$$T_{p,q} : \begin{array}{ccc} L^q & \longrightarrow & (L^p)^* \\ g & \longmapsto & f \mapsto \int_X f g d\mu \end{array} .$$

Questa mappa è lineare e isometrica per Hölder, infatti

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

e quindi  $\|T_{p,q}g\| \leq \|g\|_q$ , cioè  $T_{p,q}$  è continuo con norma degli operatori  $\leq 1$ . In realtà è una isometria perché possiamo scegliere una  $f$  opportuna tale che  $\|f\|_p = 1$  e  $T_{p,q}(g)(f) = \|g\|_q$ .

Per provare che  $T_{p,q}$  sono surgettive l'idea è considerare  $\alpha$  come sotto

$$\begin{array}{ccc} L^p & \xrightarrow{i_{L^p}} & (L^p)^{**} \xrightarrow{T_{p,q}^*} (L^q)^* \\ & \searrow \alpha & \nearrow \end{array}$$

e notare che  $\alpha = T_{q,p}$ .

Per Milman-Pettis (6.7) la  $i_{L^p}$  è isometrica, quindi si ha che  $T_{p,q}$  è surgettivo se e solo se  $T_{q,p}^*$  è surgettivo, ma  $T_{q,p}^*$  è surgettivo se e solo se (5.36)  $T_{q,p}$  è fortemente iniettivo e questo è vero.  $\square$

## Capitolo 7

# Compattezza nei Banach

### 7.1 Compattezza dei polari: Banach-Alaoglu

**Teorema 7.1** (Banach-Alaoglu-Bourbaki).

Sia  $X$  SVT e  $V \in \mathcal{U}_X$ . Allora il polare di  $V$

$$V^0 = \{f \in X^* \mid |\langle f, x \rangle| \leq 1 \ \forall x \in V\}$$

è compatto nella topologia  $\sigma(X^*, X)$ , cioè<sup>1</sup> quella indotta su  $X^*$  dalla topologia prodotto su  $\mathbb{K}^X$ .

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $V$  assolutamente convesso e chiuso:

$$V^0 \stackrel{(5.33)}{=} \overline{\text{assco}(V)}^0.$$

Sia allora  $V$  intorno assolutamente convesso chiuso di 0 in  $X$ . Sia  $p$  il funzionale di Minkowski di  $V$ . Notiamo che  $p$  è una seminorma su  $X$  e (2.26)  $V = \overline{B_p(0, 1)}$ . Notiamo che  $f \in V^0$  se e solo se

$$|\langle f, x \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

infatti se  $|\langle f, x \rangle| \leq 1$  per ogni  $x \in V$  allora per  $x \in X$  con  $p(x) \neq 0$  si ha  $p(x/p(x)) = 1$  e quindi  $x/p(x) \in V = \overline{B_p(0, 1)}$ , ma allora  $|\langle f, x/p(x) \rangle| \leq 1$ , cioè  $|\langle f, x \rangle| \leq p(x)$ . Se in vece  $p(x) = 0$  allora  $\text{Span}(x) \in V$  per definizione di  $p$ , quindi  $\langle f, x \rangle = 0$  e vale comunque  $|\langle f, x \rangle| \leq p(x)$ .

Viceversa, se  $|\langle f, x \rangle| \leq p(x)$  per ogni  $x$  in particolare per  $x \in V$ , poiché lì abbiamo  $p(x) \leq 1$  abbiamo  $|\langle f, x \rangle| \leq 1$  per  $x \in V$ .

Notiamo che la condizione  $|\langle f, x \rangle| \leq 1$  su  $V$  assicura che  $f$  sia continua (perché limitata in intorno di 0 (2.32)), quindi possiamo scrivere

$$V^0 = \{f \in X'_{alg} \mid |\langle f, x \rangle| \leq p(x) \ \forall x \in X\} = X'_{alg} \cap \underbrace{\prod_{x \in X} \overline{B_{\mathbb{K}}(0, p(x))}}_{\text{compatto per Tychonoff}} \subseteq X^* \subseteq \mathbb{K}^X.$$

---

<sup>1</sup>proprietà universale

Osserviamo che  $X'_{alg}$  è chiuso in  $\mathbb{K}^X$  perché si scrive come intersezione di chiusi per la topologia prodotto di  $\mathbb{K}^X$

$$\begin{aligned} X'_{alg} &= \bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{K} \\ x, y \in X}} \{f \in \mathbb{K}^X \mid P_{\alpha x + \beta y}(f) - \alpha P_x(f) - \beta P_y(f) = 0\} = \\ &= \bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{K} \\ x, y \in X}} \ker(P_{\alpha x + \beta y} - \alpha P_x - \beta P_y). \end{aligned}$$

Quindi  $V^0$  si identifica con un chiuso in un compatto per la topologia prodotto, e quindi è compatto per la topologia prodotto su  $\mathbb{K}^X$  in quanto è uno spazio Hausdorff.  $\square$

**Corollario 7.2.**

Se  $X$  è Banach allora la palla duale chiusa  $\overline{B_{X^*}(0, 1)}$  è compatta per la topologia  $w^*$  su  $X^*$ .

*Osservazione 7.3.*

Da questo corollario scendono varie applicazioni, per esempio al calcolo delle variazioni ma non solo.

**Teorema 7.4** (Kakutani).

Uno spazio  $X$  di Banach è riflessivo se e solo se  $B_X$  (palla unitaria chiusa) è  $w$ -compatta.

*Dimostrazione.*

Se  $X$  è riflessivo allora  $i_X : (B_X, w) \rightarrow (B_{X^{**}}, w^*)$  è un omeomorfismo e quindi  $(B_X, w)$  è compatta per Banach-Alaoglu (7.1).

Supponiamo dunque  $B_X$  compatta in  $\sigma(X, X^*)$ , allora anche  $i_X(B_X)$  è compatta in  $X^{**}$  per  $\sigma(X^{**}, X^*)$ , in particolare è chiusa. Per il teorema di Goldstine (5.39)  $i_X(B_X)$  è anche densa in  $B_{X^{**}}$ . Mettendo tutto insieme abbiamo  $i_X(B_X) = B_{X^{**}}$ , quindi  $i_X$  è bigettiva e quindi  $X$  è riflessivo.  $\square$

*Osservazione 7.5.*

ATTENZIONE: queste compattezze sono per ricoprimenti, non per successioni!!!

**Proposizione 7.6** (Banach si immergono in continue su compatto).

Se  $X$  banach allora  $X$  si immerge isometricamente in  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$  per qualche  $K$  compatto Hausdorff.

*Dimostrazione.*

Sia  $K = (\overline{B_{X^*}}, \sigma(X^*, X))$ .  $K$  è T2 compatto per Banach-Alaoglu (7.1), inoltre abbiamo una inclusione

$$X \xrightarrow{i_X} X^{**} \longrightarrow C(K)$$

$$f \longmapsto f|_K$$

che è isometrica perché  $\|x\|_X = \|val_x\|_{X^{**}}$ , da cui  $\|f\|_{X^{**}} = \|f\|_{\infty, K}$ .  $\square$

*Osservazione 7.7.*

Questa proposizione possiamo rappresentare isometricamente  $X^*$  come  $C(K)^*/X^\perp$  (5.40) e il duale di  $C(K)$  si rappresenta via misure di Baire finite.

## 7.2 Compattezza in Banach per la norma

**Teorema 7.8** (Mazur).

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  banach,  $K \subseteq X$  compatto, allora  $\overline{\text{co}(K)}$  è compatto.

*Dimostrazione.*

Sia  $B = B_X(0, 1)$ . Proviamo che  $\text{co}(K)$  è totalmente limitato (quindi relativamente compatto in  $X$  che è completo). Sia  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $K$  è compatto, esiste  $F \in \mathcal{P}_{fin}(X)$  tale che

$$K \subseteq F + \frac{\varepsilon}{2}B = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon/2).$$

Quindi  $\text{co}(K) \subseteq \text{co}(F) + \frac{\varepsilon}{2}B$  (perché convesso che contiene  $K$ ). Se  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$  allora  $\text{co}(F)$  è compatto, infatti è immagine continua del simpleso standard

$$\Delta^{m-1} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

tramite la mappa ovvia  $\Phi : \Delta^{m-1} \rightarrow X$  data da  $e_i \mapsto f_i$ .

Quindi esiste un insieme finito  $G \in \mathcal{P}_{fin}(X)$  tale che

$$\text{co}(F) \subseteq G + \frac{\varepsilon}{2}B$$

e quindi

$$\text{co}(K) \subseteq \text{co}(F) + \frac{\varepsilon}{2}B \subseteq G + \frac{\varepsilon}{2}B + \frac{\varepsilon}{2}B = G + \varepsilon B,$$

cioè  $\text{co}(K)$  è totalmente limitato. □

**Teorema 7.9** (Dieudonné).

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  banach,  $K \subseteq X$  compatto, allora esiste una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  tale che  $x_n \rightarrow 0$  e  $K \subseteq \overline{\text{co}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ .

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $K \subseteq B = B_X(0, 1)$ .

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $F_n \in \mathcal{P}_{fin}(K)$  tale che

$$K \subseteq F_n + 4^{-n}B$$

cioè ogni  $x \in K$  dista meno di  $4^{-n}$  da qualche  $x' \in F_n$ . Per comodità  $F_0 = \{0\}$  (ok perché abbiamo supposto  $K \subseteq B$ ).

Quindi  $D = \bigcup_{n \geq 0} F_n$  è un sottoinsieme denso di  $K$ . Sia  $y \in D \setminus \{0\}$ , allora  $y \in F_n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}_+$ . Siccome  $F_{n-1}$  è una  $4^{-n+1}$ -rete di  $K$  esiste  $y_{n-1} \in F_{n-1}$  tale che  $\|y_n - y_{n-1}\| < 4^{-n+1}$ . Iterando troviamo  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_0$  con  $y_i \in F_i$  e  $\|y_i - y_{i-1}\| < 4^{-i+1}$  per ogni  $i \leq n$ . Notiamo che

$$y = y_n = \sum_{k=1}^n y_k - y_{k-1} + \underbrace{y_0}_{=0} = \sum_{k=1}^n 2^{-k} (2^k(y_k - y_{k-1})) + \underbrace{2^{-n}y_0}_{=0}$$

è una combinazione convessa di  $2^k(y_k - y_{k-1})$  per  $k = 1, \dots, n$  e  $y_0 = 0$ .

Inoltre, siccome  $\|y_k - y_{k-1}\| < 4^{-k+1}$ , si ha  $\|2^k(y_k - y_{k-1})\| < 2^{-k+2}$ .

Notiamo che per ogni  $k \geq 1$  si ha

$$2^k(y_k - y_{k-1}) \in A_k = 2^k(F_k - F_{k-1}) \text{ insieme finito}$$

Inoltre  $A_k \subseteq 2^{-k+2}B$  per quanto detto. Ponendo

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \cup \{0\}$$

si ha che ogni  $y \in D$  si scrive come combinazione convessa di elementi di  $A$ .

Per concludere basta mostrare che  $A$  è il supporto di una successione infinitesima: per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $A \setminus \varepsilon B$  è finito in quanto

$$A \setminus \varepsilon B \subseteq \bigcup_{2^{-k+2} > \varepsilon} A_k = \bigcup_{k < 2 - \log_2 \varepsilon} A_k.$$

Dunque una qualsiasi enumerazione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di  $A$  definisce una successione infinitesima tale che  $D \subseteq \text{co}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  e quindi  $K = \overline{D} \subseteq \overline{\text{co}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ .  $\square$

### 7.3 Topologie polari

**Definizione 7.10** (Topologie polari).

Sia  $X$  banach e fissiamo  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  dove ogni insieme è limitato. La **topologia polare** su  $X^*$  associata a  $\mathcal{A}$  è la topologia di SVTLC associate alle (semi)norme uniformi  $\{\|\cdot\|_{\infty, A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ . A volte indichiamo la topologia associata a  $\mathcal{A}$  con  $\tau_{\mathcal{A}}$ .

**Esempio 7.11.**

Se  $\mathcal{A} = \mathcal{P}_{fin}(X)$  allora la topologia polare associata è la debole\*  $\sigma(X^*, X)$

**Esempio 7.12.**

Se  $\mathcal{A} = \mathcal{K}$  è l'insieme dei compatti di  $X$  allora la topologia polare associata è la topologia di convergenza uniforme sui compatti.

*Osservazione 7.13.*

Per il teorema di Dieudonne (7.9) la topologia di convergenza uniforme sui compatti è anche la topologia polare associata a

$$\mathcal{K}_0 = \{K \subseteq X \mid \forall \varepsilon > 0 \ K \setminus \varepsilon B \in \mathcal{P}_{fin}(X)\},$$

cioè gli insiemi che si accumulano al più in 0.

**Esempio 7.14.**

Se  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  è l'insieme dei sottoinsiemi limitati troviamo la norma duale  $(\|\cdot\|_{\infty, B_X} = \|\cdot\|_{B_X^*})$

*Osservazione 7.15.*

Si può sempre assumere che  $\mathcal{A}$  sia una famiglia di insiemi assolutamente convessi in quanto

$$\|f\|_{\infty, A} = \|f\|_{\infty, \text{assco}(A)}.$$

*Osservazione 7.16* (Perché si chiama topologia polare?).

Fissiamo una famiglia  $\mathcal{A}$ . Ricordiamo che per ogni  $A \in \mathcal{A}$  si ha

$$A^0 = \{f \in X^* \mid |\langle f, x \rangle| \leq 1 \ \forall x \in A\} = \overline{B}(0, 1, \|\cdot\|_{\infty, A}).$$

Senza perdita di generalità supponiamo che  $\mathcal{A}$  soddisfi

1.  $\forall A \in \mathcal{A}$  e  $\forall t > 0$ ,  $tA \in \mathcal{A}$
2.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ,  $\exists C \in \mathcal{A}$  tale che  $C \supseteq A \cup B$

Allora la famiglia  $\{A^0\}_{A \in \mathcal{A}}$ , cioè le palle unitarie delle norme  $\|\cdot\|_{\infty, A}$  è una base di intorni di 0 per la topologia polare associata a  $\mathcal{A}$ .

### 7.3.1 Topologia bounded-weak-star e Krein-Šmulian

**Definizione 7.17** (Topologia limitata-debole\*).

Se  $(X, \|\cdot\|)$  banach, la topologia **bounded weak\*** (abbreviata  $bw^*$ ) su  $X^*$  è la topologia limite topologico di  $X_n = (nB_{X^*}, w^*)$ . Cioè, un insieme  $A \subseteq X^*$  è aperto in questa topologia se e solo se per ogni  $n$ ,  $A_n \cap nB_{X^*}$  è aperto nella topologia  $w^*$ .

*Osservazione 7.18.*

Prendere palle chiuse o aperte, cambiare successione di raggi (purché tenda a  $+\infty$ ) o cambiare il centro delle palle non cambia la topologia  $bw^*$ .

*Osservazione 7.19.*

$bw^*$  è invariante per traslazioni, cioè  $A \in bw^* \iff A + v_0 \in bw^*$  per un qualsiasi  $v_0 \in X$ .

**Teorema 7.20.**

La topologia  $bw^*$  è la topologia della convergenza uniforme su compatti  $\tau_{\mathcal{K}}$ .

*Dimostrazione.*

Abbiamo notato che  $bw^*$  è invariante per traslazioni, quindi basta mostrare che le due topologie hanno gli stessi intorno di 0.

$\tau_{\mathcal{K}_0} \subseteq bw^*$  Una base di intorno di 0 per  $\tau_{\mathcal{K}}$  è

$$\{A^0 \mid A \in \mathcal{K}_0\} \quad \text{dove } \mathcal{K}_0 = \{K \subseteq X \mid \forall \varepsilon > 0 \ K \setminus \varepsilon B \in \mathcal{P}_{fin}(X)\}.$$

Per ogni  $A \in \mathcal{K}_0$  vogliamo mostrare che  $A^0$  è aperto per  $bw^*$ , cioè per ogni  $n \geq 1$  chiediamo che sia aperta l'intersezione

$$\begin{aligned} A^0 \cap nB_{X^*} &= A^0 \cap nB_X^0 = A^0 \cap \left(\frac{1}{n}B_X\right)^0 = \left(A \cup \frac{1}{n}B_X\right)^0 = \\ &= \left(\left(A \setminus \frac{1}{n}B_X\right) \cup \frac{1}{n}B_X\right)^0 = \\ &= \left(A \setminus \frac{1}{n}B_X\right)^0 \cap nB_{X^*} \end{aligned}$$

Poiché  $A \in \mathcal{K}_0$  si ha che  $A \setminus \frac{1}{n}B_X$  è finito, quindi  $(A \setminus \frac{1}{n}B_X)^0$  è un intorno di 0 in  $w^*$  e quindi  $A^0 \cap nB_{X^*}$  è effettivamente  $w^*$ -aperto.

$bw^* \subseteq \tau_{\mathcal{K}_0}$  Sia  $U$  un intorno aperto di 0 per  $bw^*$ . Vogliamo costruire un insieme  $A \in \mathcal{K}_0$  tale che  $A^0 \subseteq U$ .

Costruiamo per induzione una successione  $(A_n)$  di insiemi finiti tali che

1.  $(A_n)^0 \cap nB_{X^*} \subseteq U$
2.  $A_{n+1} \subseteq A_n \cup \frac{1}{n}B_X$

$n = 1$  Poiché  $U$  è aperto in  $bw^*$  esiste  $A_1$  finito tale che  $A_1^0 \cap B_{X^*} \subseteq U \cap B_{X^*} \subseteq U$ , infatti gli insiemi  $A_1^0 \cap B_{X^*}$  sono base di intorno nella topologia indotta dalla  $bw^*$  su  $B_{X^*}$  e chiaramente  $U \cap B_{X^*}$  è un aperto per questa topologia.

$\boxed{n+1}$  Supponiamo di aver costruito  $A_1, \dots, A_n$  finiti con le due proprietà. Costruiamo  $A_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
\emptyset &= A_n^0 \cap nB_{X^*} \cap U^c \cap \underbrace{(n+1)B_{X^*}}_{\text{tecnicamente superflua}} = \\
&= A_n^0 \cap n \left( \bigcup_{x \in B_X} \{x\} \right)^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} = \\
&= A_n^0 \cap \left( \bigcap_{x \in B_X} \left\{ \frac{x}{n} \right\}^0 \right) \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} = \\
&= \bigcap_{x \in B_X} \left( A_n \cup \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^0 \cap (U^c \cap (n+1)B_{X^*}).
\end{aligned}$$

Questa è una intersezione di insiemi  $w^*$  chiusi e limitati:  $U^c$  è  $bw^*$  chiuso perché  $U$  aperto in  $bw^*$ ,  $B_{X^*}$  è  $w^*$ -chiuso perché è la palla chiusa, quindi l'intersezione è  $w^*$  chiusa perché  $U \cap B_{X^*}$  è un aperto  $w^*$  in  $B_{X^*}$ . Ogni  $(A_n \cup \{\frac{x}{n}\})^0$  è  $w^*$  chiuso per (5.33).

Per Banach-Alaoglu (7.1) questa intersezione è  $w^*$ -compatta e quindi esiste  $J_n \subseteq B_X$  finito tale che

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \bigcap_{x \in J_n} \left( A_n \cup \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} = \\
&= \left( A_n \cup \frac{1}{n}J_n \right)^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*}
\end{aligned}$$

Poniamo  $A_{n+1} = A_n \cup \frac{1}{n}J_n$ . Verifichiamo le due condizioni

1.  $\emptyset = A_{n+1}^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} \implies A_{n+1}^0 \cap (n+1)B_{X^*} \subseteq U$
2.  $A_{n+1} \subseteq A_n \cup \frac{1}{n}B_X$  perché  $J_n \subseteq B_X$

Sia  $A = \bigcup A_n$ . La condizione 2. garantisce che  $A$  si può accumulare solo in 0, inoltre per ogni  $n$

$$A^0 \cap nB_{X^*} \stackrel{A^0 \subseteq A_n^0}{\subseteq} A_n^0 \cap nB_{X^*} \subseteq U$$

quindi prendendo l'unione al variare di  $n$ ,  $A^0 \subseteq U$ .

□

*Osservazione 7.21.*

$bw^*$  è una topologia di SVT

**Teorema 7.22.**

*Si ha che  $(X^*, \tau_{\mathcal{K}})^* = (X^*, w^*)^*$ .*

*Dimostrazione.*

Poiché  $\tau_{\mathcal{K}} = bw^*$  è più fine di  $w^*$  abbiamo immediatamente  $(X^*, w^*)^* \subseteq (X^*, \tau_{\mathcal{K}})^*$ .

Sia  $\varphi : X^* \rightarrow \mathbb{K}$  lineare e  $\tau_{\mathcal{K}}$ -continua. Vogliamo mostrare che sia una valutazione. La continuità per  $\tau_{\mathcal{K}}$  significa:

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } |\langle \varphi, f \rangle| \leq \|f\|_{\infty, K}$$

in quanto  $\mathcal{K}$  è già chiuso per omotetie, intersezioni e unioni finite.



Inoltre senza perdita di generalità possiamo considerare  $K \in \mathcal{K}_0$ , cioè  $K = \{x_n\}_{n \geq 0}$  con  $x_n \rightarrow 0$ . Dunque

$$|\langle \varphi, f \rangle| \leq \max_{n \geq 0} |\langle f, x_n \rangle|$$

dove al posto di sup usiamo max perché  $|\langle f, x_n \rangle|$  è una successione infinitesima di reali non negativi.

È quindi ben definito un operatore lineare e continuo

$$T: \begin{array}{ccc} X^* & \longrightarrow & c_0 \\ f & \longmapsto & (\langle f, x_n \rangle)_{n \geq 0} \end{array}$$

la continuità vale perché  $\|Tf\|_\infty = \max_{n \geq 0} |\langle f, x_n \rangle| \leq (\max \|x_n\|) \|f\|$  dove  $\max \|x_n\|$  è ben definito perché  $x_n \rightarrow 0$ .

Inoltre la disuguaglianza  $|\langle \varphi, f \rangle| \leq \max_{n \geq 0} |\langle f, x_n \rangle|$  garantisce che  $\ker T \subseteq \ker \varphi$ , quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ T \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ T(X) & \subseteq_{c_0} & \end{array}$$

Notiamo che  $\tilde{\varphi}$  è continua perché se  $y = Tf$  allora

$$|\langle \tilde{\varphi}, y \rangle| = |\langle \varphi, f \rangle| \leq \max_{n \geq 0} |\langle f, x_n \rangle| = \|y\|_{c_0} \implies \|\tilde{\varphi}\| \leq 1.$$

Per Hahn-Banach (3.4)  $\tilde{\varphi}$  si estende a tutto  $c_0$  con la stessa norma, ma i funzionali continui su  $c_0$  sono quelli della forma  $(x_i)_{i \geq 0} \mapsto \sum_{i \geq 0} \lambda_i x_i$  per  $(\lambda_i)_{i \geq 0} \in \ell_1$ .

Quindi esiste  $\lambda \in \ell_1$  tale che per ogni  $f \in X^*$  si ha

$$\langle \varphi, f \rangle = \langle \tilde{\varphi}, Tf \rangle = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \langle f, x_n \rangle = \left\langle f, \sum_{n \geq 0} \lambda_n x_n \right\rangle$$

dove l'ultimo passaggio è valido perché la serie è assolutamente convergente e  $f$  è continua.

In conclusione,  $u = \sum_{n \geq 0} \lambda_n x_n \in X$  rappresenta  $\varphi$ , cioè  $\langle \varphi, f \rangle = \langle f, u \rangle$  e questo conclude.  $\square$

**Teorema 7.23** (Krein-Šmulian).

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  spazio di Banach,  $C \subseteq X^*$  convesso, allora  $C$  è  $w^*$ -chiuso se e solo se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $C \cap nB_{X^*}$  è  $w^*$ -chiuso.

*Dimostrazione.*

La seconda condizione è equivalente a  $C$  chiuso in  $bw^* = \tau_{\mathcal{K}}$  (7.20) e questa topologia ha lo stesso duale della  $w^*$  (7.22) e questo conclude per il teorema di Hahn-Banach/separazione dei convessi (3.26).  $\square$

## 7.4 Compattezza per la topologia debole

### 7.4.1 Varie nozioni di compattezza

**Definizione 7.24** (Numerabile compattezza).

$X$  spazio topologico è **numerabilmente compatto** (abbreviato **NC**) se vale una delle seguenti equivalenti condizioni:

- per ogni  $S \subseteq X$  infinito ha punti di  $\omega$ -accumulazione, cioè esiste  $x \in X$  tale che per ogni  $U$  intorno di  $x$  si ha  $|U \cap S| \geq \aleph_0$ , ovvero

$$\bigcap_{F \in \mathcal{P}_{fin}(S)} \overline{S \setminus F} \neq \emptyset$$

- Per ogni  $(F_n)$  successione di chiusi in  $X$  non vuoti decrescenti per inclusione si ha  $\bigcap F_n \neq \emptyset$ .
- Per ogni ricoprimento aperto  $\{U_n\}$  numerabile di  $X$  esiste un sottoricoprimento finito.

$A \subseteq X$  è **relativamente numebrabilmente compatto** (abbreviato **RNC**) se vale una delle seguenti

- Ogni  $S \subseteq A$  infinito ha punti di  $\omega$ -accumulazione in  $X$
- Ogni  $(a_n) \subseteq A$  successione ha punti di accumulazione in  $X$ .

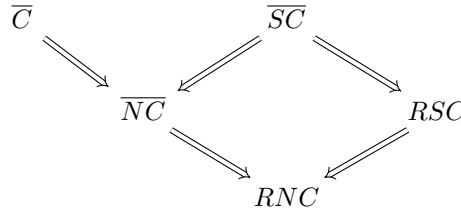
**Definizione 7.25** (Sequenzialmente compatto).

$X$  spazio topologico è **sequenzialmente compatto** (abbreviato **SC**) se per ogni  $(x_n)$  successione in  $X$  esiste una sottosuccessione convergente.

$A \subseteq X$  è **relativamente sequenzialmente compatto** (abbreviato **RSC**) se ogni successione in  $A$  ha una sottosuccessione convergente in  $X$ .

**Proposizione 7.26.**

Se  $A \subseteq X$  spazi topologici allora valgono le seguenti implicazioni:



dove la barra sopra la sigla significa che chiediamo che  $\overline{A}$  in  $X$  abbia la proprietà.

**Esempio 7.27** (Compatto  $T_2$  non implica sequenzialmente compatto).

Sia  $2 = \{0, 1\}$  spazio topologico discreto,  $X = 2^{2^{\mathbb{N}}} = \{f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}\} = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . La mappa di valutazione

$$\begin{array}{ccc}
 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & 2 \\
 (f, n) & \longmapsto & f(n)
 \end{array}$$

definisce in modo canonico una successione  $val : \mathbb{N} \rightarrow 2^{2^{\mathbb{N}}}$ . Questa successione non ha estratte convergenti, infatti convergenza in uno spazio con la topologia prodotto significa convergenza puntuale, quindi se  $n_k$  è una ipotetica successione crescente di naturali che definisce la sottosuccessione allora per ogni  $f \in 2^{\mathbb{N}}$  si dovrebbe avere  $val_{n_k}(f) = f(n_k)$  convergente (in  $2 = \{0, 1\}$  con la topologia discreta), cioè  $f(n_k)$  definitivamente costante, ma questo non è possibile perché per ogni fissata sottosuccessione  $val_{n_k}$  possiamo considerare una funzione tale che  $f(n_k) = k \bmod 2$ .

**Esercizio 7.28** (Sequenzialmente compatto non implica compatto).

Sia  $X = \omega_1 = [0, \omega_1) = \{\text{ordinali numerabili}\}$  con la topologia dell'ordine (quella che ha per base gli intervalli aperti).

Notiamo che  $\omega_1$  è SC, infatti ogni successione ha una sottosuccessione monotona (vero in ogni insieme totalmente ordinato) e questa successione converge: se è decrescente è stazionaria per definizione di buon ordine, se è crescente allora converge al suo estremo superiore, che sta in  $\omega_1$ .

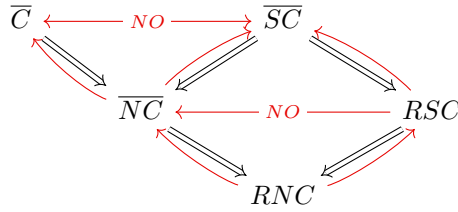
Eppure  $X$  non è compatto perché è unione degli intervalli aperti  $\bigcup_{\alpha \in X} [0, \alpha)$ , che non ha sottoricoprimenti finiti.

**Esercizio 7.29** ( $SC \not\Rightarrow \overline{NC}$ , e quindi in particolare  $RSC \not\Rightarrow \overline{NC}$ ).

Sia  $X = (\omega+1) \times (\omega_1+1) \setminus \{(\omega, \omega_1)\} = [0, \omega_1] \times [0, \omega_1] \setminus \{(\omega, \omega_1)\}$  e sia  $A = (\omega+1) \times \omega_1 = [0, \omega] \times [0, \omega_1]$

$A$  è SC perché lo sono  $\omega+1$  e  $\omega_1$ , inoltre  $\overline{A} = X$  perché i punti  $(\alpha, \omega_1)$  sono di accumulazione. Notiamo però che  $X$  non è NC infatti l'insieme  $B \subseteq X$  dato da  $B = \omega \times \{\omega_1\}$  non ha punti di accumulazione in  $X$  (è isomorfo a  $\omega$  e l'unico punto di accumulazione sarebbe l'angolino  $(\omega, \omega_1)$  che  $X$  non ha per costruzione).

Questi esempi mostrano che in generale



*Osservazione 7.30.*

Se  $A \subseteq X$ ,  $f : X \rightarrow Y$  continua e  $A$  è RNC allora  $f(A) \subseteq Y$  è RNC.

## 7.4.2 Eberlein-Šmulian

*Osservazione 7.31.*

Se  $A$  è RNC in  $(X, w)$  allora è limitato, infatti basta mostrare che per ogni  $f \in X^*$  si ha  $f(A)$  limitato, che è vero perché  $f(A) \subseteq \mathbb{K}$  è RNC ma in  $\mathbb{R}^n$  questo implica limitato.

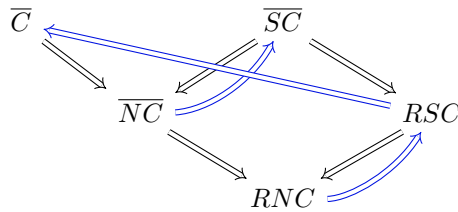
**Teorema 7.32** (Eberlein-Šmulian).

Sia  $E$  spazio di Banach e  $A \subseteq E$ . Rispetto alla topologia debole di  $E$  sono equivalenti

1.  $\overline{A}^w$  è numerabilmente compatta
2.  $A$  è relativamente numerabilmente compatto
3.  $\overline{A}^w$  è sequenzialmente compatta
4.  $A$  è relativamente sequenzialmente compatto
5.  $\overline{A}^w$  è compatto

*Dimostrazione.*

Basta mostrare le implicazioni in blu



$RNC \implies RSC$

Sia  $(a_n) \subseteq A$ , dobbiamo mostrare che  $(a_n)$  ha una sottosuccessione  $w$ -convergente in  $E$ . Sia

$$V = \overline{\text{Span}(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}})} \subseteq E,$$

in particolare  $V$  è un sottospazio vettoriale chiuso e separabile, quindi  $V^*$  ha una palla unitaria  $w^*$ -separabile<sup>2</sup>. Sia  $D \subseteq V^*$  numerabile e denso. Con argomento diagonale troviamo una sottosuccessione di  $(a_n)$  (che continuiamo a chiamare  $(a_n)$ ) tale che  $\langle f, a_n \rangle$  converge per ogni  $f \in D$ .

Sia  $a_\infty \in E$  un punto di accumulazione di  $(a_n) \subseteq A$  (stiamo assumendo  $A$  RNC). Allora per ogni  $f \in D$ ,  $\langle f, a_\infty \rangle$  è punto di accumulazione della successione convergente  $\langle f, a_n \rangle$ , quindi  $\langle f, a_\infty \rangle$  è il limite ( $\mathbb{R}$  è Hausdorff).

Affermo che ciò vale per ogni  $f \in V^*$ : se non fosse così esisterebbe  $g \in V^*$  tale che  $\langle g, a_n \rangle \not\rightarrow \langle g, a_\infty \rangle$ , ma allora estraendo una sottosuccessione esisterebbe una sottosuccessione tale che  $\langle g, a_{n_k} \rangle$  converge ad un limite diverso da  $\langle g, a_\infty \rangle$ . Se  $b_\infty \in E$  è di  $w$ -accumulazione per  $(a_{n_k})$  si trova come prima che per ogni  $f \in D$ ,  $\langle f, a_{n_k} \rangle \rightarrow \langle f, b_\infty \rangle$ , ma essendo  $(a_{n_k})$  una sottosuccessione di quella di prima  $\langle f, a_{n_k} \rangle \rightarrow \langle f, a_\infty \rangle$ . Eppure  $\langle g, a_{n_k} \rangle \rightarrow \langle g, b_\infty \rangle \neq \langle g, a_\infty \rangle$  e questo è assurdo perché  $D$  è  $w^*$ -denso.

Dunque  $\langle f, a_n \rangle \rightarrow \langle f, a_\infty \rangle$  per ogni  $f \in V^*$ , quindi  $\langle f, a_n \rangle \rightarrow \langle f, a_\infty \rangle$  per ogni  $f \in E^*$  in quanto  $f|_V \in V^*$ . Questo significa esattamente che  $a_n \rightarrow a_\infty$  nella topologia debole, come volevamo.

$RSC \implies \overline{C}$

Mostriamo che la chiusura  $\sigma(E^{**}, E^*)$  di  $A$  in  $E^{**}$  è in realtà contenuta in  $E$ . Se questo è vero allora questa è anche la chiusura in  $\sigma(E, E^*)$  e quindi è compatta per Banach-Alaoglu (7.1) infatti

$$A \subseteq E \subseteq E^{**} \rightsquigarrow \overline{A}^E = \overline{A}^{E^{**}} \cap E.$$

Sia  $\eta \in \overline{A}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$  e mostriamo che  $\eta \in E$ . Quello che faremo è mostrare che  $\ker \eta \subseteq E^*$  è  $\sigma(E^*, E)$ -chiuso<sup>3</sup>.

Per Krein-Šmulian (7.23) basta vedere che  $\ker \eta \cap \overline{B_{E^*}}(0, 1)$  è  $w^*$ -chiuso (e quindi per omotetia  $\ker \eta \cap \overline{B}(0, R)$  chiuso e per Krein-Šmulian questo mostra che  $\ker \eta$  stesso è chiuso).

Sia  $g_0 \in \overline{\ker \eta \cap B_{E^*}}^{w^*}$  e mostriamo che  $g_0 \in \ker \eta$ , cioè  $\langle \eta, g_0 \rangle = 0$  (chiaramente  $g_0$  sta nella palla). Partendo da  $g_0$  costruiamo due successioni  $a_n \in A$  e  $g_n \in \ker \eta \cap B_{E^*}$  in modo che

$$\begin{cases} \langle g_i, a_n \rangle - \langle \eta, g_i \rangle < \frac{1}{n} & \forall 0 \leq i \leq n-1 \\ |\langle g_n, a_i \rangle - \langle g_0, a_i \rangle| < \frac{1}{n} & \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Questo si può fare per induzione: definiti  $g_1, \dots, g_{n-1}$  esiste  $a_n$  verificante la prima condizione perché quella condizione definisce un intorno di  $\eta$  per la topologia  $\sigma(E^{**}, E^*)$ , che quindi interseca  $A$  in quanto  $\eta$  appartiene alla chiusura di  $A$ . Definiti  $a_1, \dots, a_n$  esiste  $g_n$  che verifica la seconda condizione perché quelle disuguaglianze definiscono un intorno di  $g_0$  nella topologia  $\sigma(E, E^*)$  e questo interseca  $\ker \eta \cap B_{E^*}$ .

<sup>2</sup>Per Banach-Alaoglu (7.1)  $B_{V^*}$  è  $w^*$ -compatta, ma chiaramente è anche metrizzabile perché  $V$  è separabile (6.2), quindi  $B_{V^*}$  è separabile.

Alternativamente basta seguire la dimostrazione  $V^*$  separabile implica  $V$  separabile ma partendo da  $V$  e notare che gli stessi passi portano a mostrare che  $V^*$  è debolmente\*-separabile (vedi nota a margine nella dimostrazione di 3. in (6.2)).

<sup>3</sup>forma lineare è continua se e solo se nucleo è chiuso (2.32) e mostrare che  $\eta$  è  $w^*$ -continua è la stessa cosa di dire che  $\eta$  è una valutazione per definizione di topologia debole\*.

Poiché  $\langle \eta, g_n \rangle = 0$  per ogni  $n \geq 1$  vale

$$\begin{cases} \langle g_0, a_n \rangle - \langle \eta, g_0 \rangle = o(1) & \text{prima condizione per } i = 0 \\ \langle g_i, a_n \rangle = o(1) & \text{prima condizione per } i > 0 \\ \langle g_n, a_i \rangle - \langle g_0, a_i \rangle = o(1) & \text{seconda condizione} \end{cases}$$

Poiché  $A$  è RSC, a meno di sottosuccessione,  $a_n \rightarrow a_\infty \in E$  debolmente. La successione  $\langle g_n, a_i \rangle \rightarrow \langle g_0, a_i \rangle$  per ogni  $i < \infty$  per la terza equazione, invece per la seconda si ha  $\langle g_i, a_\infty \rangle = 0$ , in particolare converge.

Per Banach-Alaoglu (7.1) e l'implicazione  $\text{RSC} \implies \text{RNC}$  la successione  $(g_n)_n \subseteq B_{E^*}$  ha un punto di  $w^*$ -accumulazione  $g_\infty$ . Per ogni  $i$  (anche  $\infty$ ) si ha che  $\langle g_\infty, a_i \rangle$  è un punto di accumulazione per  $(\langle g_n, a_i \rangle)_n$ , e quindi  $\langle g_\infty, a_i \rangle$  è il limite di questa successione.

Facendo il limite per  $n \rightarrow \infty$  nelle disuguaglianze precedenti troviamo

$$\begin{cases} \langle g_0, a_\infty \rangle = \langle \eta, g_0 \rangle \\ \langle g_i, a_\infty \rangle = 0 \\ \langle g_\infty, a_i \rangle = \langle g_0, a_i \rangle \end{cases}$$

Ora facciamo tendere  $i \rightarrow \infty$  e troviamo

$$\begin{cases} \langle g_0, a_\infty \rangle = \langle \eta, g_0 \rangle \\ \langle g_\infty, a_\infty \rangle = 0 \\ \langle g_\infty, a_\infty \rangle = \langle g_0, a_\infty \rangle \end{cases}$$

cioè

$$\langle \eta, g_0 \rangle = \langle g_0, a_\infty \rangle = \langle g_\infty, a_\infty \rangle = 0$$

ovvero  $g_0 \in \ker \eta$  come volevamo.

$\boxed{\overline{NC} \implies \overline{SC}}$  Per un chiuso  $\overline{NC} = \text{RNC}$  e similmente  $\overline{SC} = \text{RSC}$ , quindi la freccia  $\text{RNC} \implies \text{RSC}$  conclude.

□

Riassumendo:

- Su  $X^*$ 
  - Banach-Alaoglu:  $B_{X^*}$  è  $w^*$ -compatta
  - Se  $X$  è separabile allora  $(B_{X^*}, w^*)$  è metrizzabile, quindi è anche sequenzialmente compatta. (Mostrato indipendentemente tramite Ascoli-Arzelà).
- Su  $X$ 
  1. Dieudonné: i compatti (norma)  $K$  sono contenuti in  $\overline{\text{co}(x_n)}$  per  $x_n \rightarrow 0$
  2. Eberlein-Šmulian: compatti per debole.

## Capitolo 8

# Funzioni regolari e funzioni a supporto compatto

Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  non vuoto.

**Notazione 8.1.**

Sia  $k(\Omega) = \{K \subseteq \Omega \mid K \text{ compatto}\}$ .

**Definizione 8.2** (Spazio di Fréchet).

Uno spazio topologico è di **Fréchet** se è SVTLC, metrizzabile e completo.

### 8.1 Funzioni regolari

**Definizione 8.3** (Funzioni continue).

Definiamo l'insieme delle funzioni continue su  $\Omega$  come

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{continue}\}$$

**Proposizione 8.4.**

L'insieme  $C^0(\Omega)$  munito della topologia indotta dalle seminorme uniformi

$$\left\{ \|\cdot\|_{\infty, K} \right\}_{K \in k(\Omega)}$$

è uno spazio di Fréchet.

*Dimostrazione.*

In quanto topologia indotta da seminorme abbiamo che  $C^0(\Omega)$  è uno SVTLC.

metrizzabile

Se  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  è una successione di compatti tale che  $K_i \subseteq \text{int}(K_{i+1})$  e  $\Omega = \bigcup_{j \geq 0} K_j$  allora le seminorme  $\left\{ \|\cdot\|_{\infty, K_j} \right\}$  topologizzano  $C^0(\Omega)$ . Quindi per esempio possiamo considerare  $K_j = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \Omega^c) \leq 2^{-j}\} \cap \overline{B}(0, j)$  e definire la distanza come

$$d(f, g) = \sum_{j \geq 0} 2^{-j} \arctan(\|f - g\|_{\infty, K_j}).$$

completo

$(f_n) \subseteq C^0(\Omega)$  è di Cauchy se per ogni  $j$  si ha  $(f_n|_{K_j})_n$  di Cauchy in  $C^0(K_j)$ , quindi  $f_n$  converge uniformemente su  $K_j$  e il limite è una funzione  $f \in C^0(\Omega)$  (definiamo puntualmente a priori ma è una convergenza uniforme su compatti quindi il limite è una funzione continua).

□

**Notazione 8.5.**

Sia  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  e  $f \in C^m(\Omega)$ , allora

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f.$$

Chiamiamo  $n$  la **lunghezza** di  $\alpha$  e  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  il **peso** o **grado** di  $\alpha$ .

*Osservazione 8.6.*

Per il teorema di Schwarz non importa l'ordine delle derivate sopra.

**Definizione 8.7** (Spazio  $C^m(\Omega)$ ).

Poniamo

$$C^m(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \alpha \text{ t.c. } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in C^0(\Omega)\}.$$

**Proposizione 8.8.**

*L'insieme  $C^m(\Omega)$  con la topologia indotta dalle seminorme*

$$\|f\|_{\alpha, \infty, K} = \|\partial^\alpha f\|_{\infty, K}$$

*considerate al variare di  $|\alpha| \leq m$  e  $K \in k(\Omega)$  è uno spazio di Fréchet.*

*Dimostrazione.*

Equivalente possiamo considerare le norme  $\{p_{m,K}\}_{K \in k(\Omega)}$  date da

$$p_{m,K}(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\infty, K}.$$

La metrizzabilità segue come prima.

Per la completezza basta usare il teorema di limite sotto il segno di derivata: Se  $(f_n) \subseteq C^m(\Omega)$  è di Cauchy, cioè  $|\alpha| \leq m$  e  $\forall K \in k(\Omega)$  si ha  $\partial^\alpha f_j$  di Cauchy in  $C^0(\Omega)$ , allora per ogni  $|\alpha| \leq m$  si ha convergenza uniforme sui compatti

$$\partial^\alpha f_j \rightarrow g_\alpha$$

per qualche  $g_\alpha \in C^0(\Omega)$ . Si conclude (per induzione su  $m$ ) che  $f = \lim f_j$  è di classe  $C^m$  e che  $\partial^\alpha f = g_\alpha$ . □

*Osservazione 8.9.*

$C^m(\Omega)$  ha la topologia iniziale data dalle mappe

$$\begin{array}{ccc} C^m(\Omega) & \longrightarrow & C^0(K) \\ f & \longmapsto & \partial^\alpha f|_K \end{array}$$

al variare di  $K \in k(\Omega)$  e  $|\alpha| \leq m$ .

**Definizione 8.10** (Spazio  $C^\infty(\Omega)$ ).

Definiamo

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega).$$

*Osservazione 8.11.*

Anche  $C^\infty(\Omega)$  è di Fréchet.

*Osservazione 8.12.*

I limitati di  $C^\infty(\Omega)$  sono relativamente compatti.

*Dimostrazione.*

Se  $A \subseteq C^\infty(\Omega)$  è limitato allora per ogni  $K \in k(\Omega)$  e per ogni  $m \in \mathbb{N}$  si ha che

$$\sup_{f \in A} p_{m+1,K}(f) \leq C(m, K) \in \mathbb{R},$$

quindi le derivate delle  $\partial^\alpha f$  per  $f \in A$  sono limitate uniformemente su  $K$ . Questo in particolare vale per  $K$  compatto convesso, quindi le  $\partial^\alpha f$  sono equilipschitz (teorema del valor medio).

Allora per Ascoli-Arzelà abbiamo che  $\{\partial^\alpha f\}$  è un compatto in  $C^0(K)$ . Dunque (argomento diagonale) ogni successione  $(f_j) \subseteq A$  ha una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti e quindi in  $C^\infty(\Omega)$ .  $\square$

*Osservazione 8.13.*

Nel caso di  $C^m(\Omega)$  si ha che i limitati di  $C^{m+1}(\Omega) \subseteq C^m(\Omega)$  sono relativamente compatti in  $C^m(\Omega)$ .

## 8.2 Funzioni a supporto compatto

**Definizione 8.14** (Funzioni a supporto compatto).

Definiamo

$$C_C^0(\Omega) = \bigcup_{K \in k(\Omega)} C_K, \quad C_K = \{f \in C^0(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } f \subseteq K\}$$

Analogamente (anche per  $m = \infty$ )

$$C_C^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_C^0(\Omega) = \bigcup_{K \in k(\Omega)} C_K^m, \quad C_K^m = C^m(\Omega) \cap C_K.$$

*Osservazione 8.15.*

$C_C^0(\Omega)$  è denso in  $C^0(\Omega)$  e similmente per ordini più alti.

Poiché questi spazi sono definiti in modo naturale come unione, la topologia naturale su  $C_C^m(\Omega)$  è la più fine topologia di SVT che renda continue le inclusioni  $C_K^m \hookrightarrow C_C^m(\Omega)$ , dove  $C_K^m$  ha la topologia indotta da  $C^m(\Omega)$ .

### 8.2.1 Lo spazio $C_C$

Sia  $X_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \ \forall i \geq n\} \cong \mathbb{R}^n$  e consideriamo questo spazio con la (unica<sup>1</sup>) topologia di SVT  $T_0$ , cioè la topologia euclidea. Sia  $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  l'inclusione.

Poniamo

$$C_C = \mathbb{R}^\omega = \bigcup_{n \geq 0} X_n, \quad \mathbb{R}^\omega = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid x_i = 0 \ \forall i \geq n\}.$$

*Osservazione 8.16.*

Qualunque topologia di SVT su  $C_C$  rende continue le inclusioni, perché induce su  $X_n$  una topologia che non è più fine di quella euclidea. Quindi la topologia di limite induttivo su  $C_C$  è la più fine topologia di SVT.

---

<sup>1</sup>equivalenza delle norme



*Osservazione 8.17.*

Questa topologia è localmente convessa perché lo sono le topologie sugli  $X_n$ .

*Osservazione 8.18.*

La topologia limite su  $C_C$  deve essere quella indotta da TUTTE le seminorme su  $C_C$ .

**Notazione 8.19.**

$e_i \in C_C$  è la successione identicamente nulla eccetto nell'indice  $i$  dove vale 1.

*Osservazione 8.20.*

Se  $p : C_C \rightarrow [0, \infty)$  è una seminorma e  $x \in C_C$  (che scriviamo  $x = \sum_{i=0}^n x_i e_i$ ) allora

$$p(x) = p\left(\sum_{i=0}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=0}^n |x_i| p(e_i)$$

dunque ogni seminorma è maggiorata da una seminorma della forma

$$p_\lambda(x) = \sum_{i \geq 0} \lambda_i |x_i|$$

per qualche  $\lambda \in [0, \infty)^\mathbb{N}$ .

**Corollario 8.21.**

La famiglia  $\{p_\lambda\}_{\lambda \in [0, \infty)^\mathbb{N}}$  è una famiglia di seminorme che topologizza  $C_C$ .

*Osservazione 8.22.*

$C_C$  è completo sequenzialmente.

*Dimostrazione.*

Ogni successione di Cauchy è limitata quindi, poiché gli  $X_n$  sono chiusi negli  $X_{n+k}$ , si ha per (A.17) che la successione è contenuta in qualche  $X_n$  e gli  $X_n$  sono completi.  $\square$

*Osservazione 8.23.*

$C_C$  non è metrizzabile, quindi in particolare non è di Fréchet.

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che  $C_C$  sia metrizzabile. La famiglia  $\{C_C \setminus X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è numerabile e di aperti densi in spazio metrico completo  $C_C$  (densi perché sottospazi hanno parte interna vuota), quindi per il teorema di Baire (4.17)

$$C_C = \overline{\bigcap_n C_C \setminus X_n} = \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

che è assurdo.  $\square$

*Osservazione 8.24.*

Ogni forma lineare su  $C_C$  è continua (perché continua quando ristretta a  $\mathbb{R}^n$ ), quindi

$$(C_C)^* = \mathbb{R}^\mathbb{N}$$

in quanto una forma lineare è identificata dai valori che assume su una base.

**Esercizio 8.25.**

Il duale di  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  con la topologia prodotto delle topologie di seminorme  $\{\|\cdot\|_{\infty, [0, n]}\}_{n \geq 0}$  è  $C_C$ , infatti la topologia prodotto è  $\sigma(\mathbb{R}^\mathbb{N}, C_C)$ .

**Esercizio 8.26.**

Proviamo che la topologia di  $C_C$  come limite induttivo stretto di SVT coincide con la topologia limite topologico  $\tau_\infty$ .

*Dimostrazione.*

In questa topologia  $A \subseteq C_C$  è aperto se e solo se per ogni  $n$  si ha  $A \cap X_n$  aperto di  $X_n$ . In particolare tale  $A$  è aperto nella topologia  $LF$  di  $C_C$ .

Dalla definizione è evidente che  $LF$  è invariante per traslazioni quindi per vedere che le due topologie coincidono basta vedere che ogni intorno di 0 in  $\tau_\infty$  contiene un intorno di 0 di  $LF$ .

Vogliamo<sup>2</sup> definire una successione  $(\lambda_i) \subseteq \mathbb{R}_+$  tale che  $\{p_\lambda \leq 1\} \subseteq V$ , cioè per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e ogni  $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i e_i \in X_n \subseteq C_C$ , se  $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i |x_i| \leq 1$  allora  $x \in V$ .

Definiti  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  con questa proprietà allora per ogni  $s \geq 0$  consideriamo

$$K_s = \left\{ x \in X_n \mid \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i |x_i| + s |x_n| \leq 1 \right\} \setminus V.$$

Ogni  $K_s$  è un compatto di  $X_n$ , inoltre  $s \mapsto K_s$  è decrescente per inclusione ( $s$  più grande è un vincolo più forte).

Notiamo che  $\bigcap_{s>0} K_s = \emptyset$ , infatti se esistesse un elemento di questa intersezione allora la coordinata  $x_n$  sarebbe nulla, cioè  $x \in X_{n-1}$ , ma per il passo induttivo abbiamo vuoto.

Dunque per compattezza esiste  $\tilde{s} > 0$  tale che  $K_{\tilde{s}} = \emptyset$ . Definiamo  $\lambda_n = \tilde{s}$ .  $\square$

**Corollario 8.27.**

Per ogni spazio topologico  $X$ ,  $f : C_C \rightarrow X$  è continua se e solo se  $f|_{X_n}$  continua. Poiché su  $X_n$  continua equivale a sequenzialmente continua,  $f$  è continua se e solo se è sequenzialmente continua.

**8.2.2 Lo spazio  $C_C^0(\Omega)$** 

**Definizione 8.28** (Continue a supporto compatto).

Fissato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto consideriamo lo spazio  $C_C^0(\Omega)$  come limite induttivo stretto degli spazi di Banach

$$C_K^0 = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{supp } f \subseteq K\}$$

al variare di  $K \in k(\Omega)$ .

*Osservazione 8.29.*

Possiamo equivalentemente considerare il limite di  $C_{K_j}^0$  con  $K_j$  compatti,  $K_j \subseteq \text{int}(K_{j+1})$  e  $\bigcup K_j = \Omega$ .

*Osservazione 8.30.*

$C_{K_j}^0$  è chiuso in  $C_{K_{j+1}}^0$  quindi per proprietà generali dei limiti induttivi stretti (A.17)

1.  $A$  limitato in  $C_C^0(\Omega)$  se e solo se  $A$  è contenuto e limitato in qualche  $C_K^0$
2.  $C_K^0$  sono sottospazi chiusi di  $C_C^0(\Omega)$ .
3.  $C_C^0(\Omega)$  è localmente convesso, sequenzialmente completo ma non metrizzabile (di nuovo per Baire (4.17)).

<sup>2</sup>questo basta perché  $\{p_\lambda \leq 1\}$  contiene un aperto.

**Esercizio 8.31.**

La topologia  $LF$  di  $C_C^0(\Omega)$  è STRETTAMENTE meno fine della topologia di limite induttivo topologico.

**Notazione 8.32.**

Poniamo  $C^0(\Omega)_+ = \{\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ continue}\}$ .

**Proposizione 8.33** (Costruzione di una famiglia di seminorme).

La famiglia  $\{p_\sigma\}_{\sigma \in C^0(\Omega)_+}$  di seminorme date da

$$p_\sigma(u) = \|\sigma u\|_\infty \quad \forall u \in C_C^0(\Omega)$$

topologizza lo spazio  $C_C^0(\Omega)$ .

*Dimostrazione.*

Diamo alcune definizioni:

- Sia  $\varphi(x) = \frac{1}{\text{dist}(x, \Omega^c)} + \|x\|$ . Nota che  $\{\varphi \leq c\}$  è compatto perché  $\varphi$  tende a  $\infty$  vicino ai bordi.
- Posto  $K_i = \{x \in \Omega \mid |\varphi(x) - i| \leq 1\} \in k(\Omega)$  si ha  $\Omega = \bigcup_{i \geq 0} \text{int}(K_i)$  e  $K_i \cap K_j = \emptyset$  se  $|i - j| \geq 2$ .
- Poniamo  $\eta_j = (1 - |\varphi(x) - j|)_+$ , segue che  $\eta_j \in C_C^0(\Omega)$ ,  $0 \leq \eta_j \leq 1$ ,  $\text{supp } \eta_j \subseteq K_j$  e  $\sum_{j \geq 0} \eta_j = 1$  in quanto, per ogni  $t$ ,

$$\sum_{j \geq 0} (1 - |t - j|)_+ = 1.$$

Sia  $U$  aperto convesso di  $O$  in  $C_C^0(\Omega)$ . Vogliamo trovare  $\sigma \in C^0(\Omega)$  tale che  $\{p_\sigma \leq 1\} \subseteq U$  (cioè la topologia indotta da  $\{p_\sigma\}$  è più fine della  $LF$ ).

Per  $j \geq 0$  sia  $\delta_j = \inf \{\|u\|_\infty \mid u \in C_{K_j}^0 \setminus U\}$ , che è strettamente positiva (in quanto  $U \cap C_K^0$  è intorno di 0 in  $C_{K_j}^0$ ) e contiene la palla

$$\left\{ \|u\|_\infty < \delta, \ u \in C_{K_j}^0 \right\}.$$

Definiamo  $\rho \in C^0(\Omega)_+$  come segue: sia  $\varepsilon_j$  il minimo di  $\{2^{-j-2}\delta_{j-1}, 2^{-j-1}\delta_j, 2^{-j}\delta_{j+1}\}$  e consideriamo la funzione

$$\rho = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \eta_j$$

questa funzione è positiva, è una combinazione convessa di tre degli  $\varepsilon_j$ . Sia  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ .

Notiamo ora che per ogni  $u \in C_C^0(\Omega)$  tale che

$$|u(x)| \leq \rho(x)$$

si ha  $u \in U$  (cioè  $\{\|\sigma(u)\|_\infty \leq 1\} \subseteq U$ ), infatti se  $|u| \leq \rho$  allora per ogni  $i$  si ha  $u\eta_i \in C_{K_i}^0$  e

$$|u\eta_i| \leq \rho\eta_i = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \eta_j \eta_i = \sum_{i-1 \leq j \leq i+1} \varepsilon_j \eta_j \leq \max_{i-1 \leq j \leq i+1} \{\varepsilon_j\} \leq 2^{-i-1}\delta_i$$

quindi  $|2^{i+1}u\eta_i|_\infty \leq \delta_i$  e siccome  $2^{i+1}u\eta_i \in C_{K_i}^0$  allora per la scelta di  $K_i$  si ha  $2^{i+1}u\eta_i \in U$ . Allora

$$u = \sum_i u\eta_i = \sum_i 2^{-i-1}(2^{i+1}u\eta_i)$$

e dato che  $U$  è convesso questo mostra  $u \in U$ .

L'altra inclusione delle topologie deriva da: per ogni  $j$ ,  $C_{K_j}^0 \hookrightarrow C_C^0$  è continua rispetto alla famiglia di seminorme  $\{p_\sigma\}$  e quindi questa topologia è meno fine della topologia limite. La continuità segue perché per ogni  $u \in C_K^0$  e ogni  $\sigma \in C^0(\Omega)_+$  si ha

$$p_\sigma(u) = \|\sigma u\|_\infty \leq \|\sigma\|_{\infty, K} \|u\|_\infty.$$

□

*Osservazione 8.34.*

Data  $f \in C^0(\Omega)$  possiamo considerare su  $C_C^0(\Omega)$  l'operatore di moltiplicazione per  $f$ :

$$M_f : \begin{array}{ccc} C_C^0(\Omega) & \longrightarrow & (C_b^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \\ u & \longmapsto & fu \end{array}.$$

La topologia di  $C_C^0(\Omega)$  ( $LF$ ) coincide con la topologia debole della famiglia  $\{M_f\}$ , cioè è la topologia iniziale associata a questa famiglia.

### 8.2.3 Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$

**Definizione 8.35.**

Poniamo

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \exists K \in k(\Omega) \text{ t.c. } \text{supp } f \subseteq K\}.$$

*Osservazione 8.36.*

Possiamo dare a  $\mathcal{D}(\Omega)$  la topologia di limite induttivo stretto degli  $C_K^\infty$ .

*Osservazione 8.37.*

Come prima, su  $C_K^\infty$  questa è la topologia indotta dalle seminorme  $\{p_m\}_{m \geq 0}$  con

$$p_m(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

che inducono topologia di SVTLC, metrico completo (cioè di Fréchet).

*Osservazione 8.38.*

$A \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$  è limitato se e solo se è contenuto e limitato in  $C_K^\infty$ .

Diamo una seconda descrizione della topologia di  $\mathcal{D}(\Omega)$  in termini di seminorme.

**Definizione 8.39.**

Dati  $\sigma, \mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue definiamo la seminorma  $p_{\sigma, \mu}$  su  $\mathcal{D}(\Omega)$  come

$$p_{\sigma, \mu}(u) = \max_{\substack{x \in \Omega \\ \alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq \mu(x)}} |\sigma(x) \partial^\alpha u(x)| \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \in k(\Omega)} C_K^\infty.$$

Abbiamo buona definizione perché per ogni  $u$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  esiste  $K$  compatto tale che  $u \in C_K^\infty$ , quindi il massimo ha senso in quanto basta considerare  $x \in K$  al posto di  $x \in \Omega$ .

**Definizione 8.40** (Funzione propria).

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  funzione continua è **propria** se  $\{f \leq c\}$  è compatto in  $X$ .

*Osservazione 8.41* (Formula di Newton per derivate).

Vale l'identità

$$\partial^\beta(u \cdot v) = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \partial^\alpha u \partial^{\beta-\alpha} v$$

dove

$$\binom{\beta}{\alpha} = \prod_{1 \leq i \leq n} \binom{\beta_i}{\alpha_i}.$$

**Proposizione 8.42.**

La topologia  $LF$  di  $\mathcal{D}(\Omega)$  è indotta dalle seminorme  $\{p_{\sigma,\mu}\}$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo che  $LF$  è più fine:

Se  $\{p_m\}$  sono le seminorme date prima che topologizzano  $C_K^\infty$  e  $u \in C_K^\infty$  allora

$$p_{\sigma,\mu}(u) \leq \|\sigma\|_{\infty,K} \cdot p_{\|\mu\|_{\infty,K}}(u)$$

dunque le inclusioni  $C_K^\infty$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  sono continue per le seminorme  $\{p_{\sigma,\mu}\}$ , ovvero per ogni  $K$  è continua

$$(C_K^\infty, \{p_m\}) \hookrightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \{p_{\sigma,\mu}\})$$

e quindi è continua anche la mappa identità

$$(\mathcal{D}(\Omega), LF) \rightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \{p_{\sigma,\mu}\})$$

per definizione di topologia limite induttivo.

Mostriamo ora che  $LF$  è meno fine:

Sia  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  con  $\varphi(x) > 0$  per ogni  $x \in \Omega$  e propria.

Definiamo a mano una partizione dell'unità:

- Definiamo  $K_i = \{x \in \Omega \mid |\varphi(x) - i| \leq 1\} \in k(\Omega)$
- Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  con  $0 \leq g \leq 1$ ,  $\text{supp } g \subseteq [-1, 1]$ ,  $g(t) = g(-t)$ ,  $g(t) + g(1-t) = 1$ , cioè

$$\sum_{j \geq 0} g(t-j) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

- Sia  $\eta_i(x) = g(\varphi(x) - i)$ .

Nota che  $0 \leq \eta_i \leq 1$ ,  $\eta_i \in C^\infty$ ,  $\sum_{i \geq 1} \eta_i(x) = 1$  per ogni  $x \in \Omega$ ,  $\text{supp } \eta_i \subseteq K_i$  e  $\eta_i \eta_j = 0$  se  $|i-j| \geq 2$ .

Sia  $U$  un intorno di 0 convesso<sup>3</sup> in  $(\mathcal{D}(\Omega), LF)$ , allora per ogni  $i \geq 0$  si ha  $U \cap C_{K_i}^\infty$  è un intorno di 0 in  $C_{K_i}^\infty$  per definizione, quindi esistono  $m_i \in \mathbb{N}$  e  $\delta_i > 0$  tali che

$$\{f \in C_{K_i}^\infty \mid p_{m_i}(f) \leq \delta_i\} \subseteq U.$$

Definiamo  $\sigma, \mu \in C^0(\Omega)_+$  incollando i numeri  $\delta_i$  e  $m_i$  con la partizione di unità  $\{\eta_i\}$ :

- $\ell_i \doteq \max_{|i-j| \leq 1} m_j = \max\{m_{i-1}, m_i, m_{i+1}\}$
- $\mu(x) = \sum_{j \geq 0} \ell_j \eta_j$

<sup>3</sup>sappiamo che  $LF$  è una topologia di SVTLC

- quindi per ogni  $i \geq 0$  si ha  $m_i \leq \min_{|1-j| \leq 1} \ell_i = \min \{\ell_{i-1}, \ell_i, \ell_{i+1}\}$  e per ogni  $x \in K_i$

$$\mu(x) = \sum_{|i-j| \leq 1} \ell_j \eta_j \geq \min_{|i-j| \leq 1} \ell_i \left( \sum_i \eta_i \right) = \min_{|i-j| \leq 1} \ell_i \geq m_i.$$

- $n_i = 2^{-i-1-m_i} p_{m_i}(\eta_i)^{-1} \delta_i$
- $\varepsilon_i = \min_{|i-j|} n_j$
- Per ogni  $i \geq 0$

$$n_i \geq \max \{\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}\}.$$

- Definiamo  $\sigma(x) = \left( \sum_{i \geq 0} \varepsilon_i \eta_i \right)^{-1}$ .
- Per ogni  $x \in K_i$

$$\sigma(x)^{-1} = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j \eta_j = \sum_{|i-j| \leq 1} \varepsilon_j \eta_j \leq \max_{|j-i| \leq 1} \varepsilon_j \leq n_i$$

Dunque per ogni  $i \geq 0$  e  $x \in K_i$

$$\mu(x) \geq m_i, \quad \sigma(x)^{-1} \leq n_i$$

quindi

$$\{f \in \mathcal{D}(\Omega) \mid p_{\sigma, \mu}(f) < 1\} \subseteq U$$

infatti se  $f$  appartiene a questo insieme allora per ogni  $i \geq 0$  la funzione  $2^{i+1} \eta_i f$  appartiene a  $C_{K_i}^\infty$  e ha seminorma  $p_{m_i}$  minore di  $\delta_i$ , cioè per ogni  $\beta$  tale che  $|\beta| \leq m_i$  si ha

$$\begin{aligned} |\partial^\beta (2^{i+1} \eta_i f)| &= 2^{i+1} |\partial^\beta (\eta_i f)| = 2^{i+1} \left| \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \partial^{\beta-\alpha} \eta_i \partial^\alpha f \right| \leq \\ &\leq 2^{i+1} \left( \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \right) p_{m_i}(\eta_i) \left( \sigma(x) \max_{|\alpha| \leq m_i} |\partial^\alpha f| \right) \sigma(x)^{-1} \stackrel{\substack{|\beta| \leq m_i \\ |\alpha| \leq m_i \leq \mu(x)}}{\leq} \\ &\leq 2^{i+1+m_i} p_{m_i}(\eta_i) \cdot p_{\sigma, \mu}(f) \cdot \sigma(x)^{-1} \stackrel{\sigma(x)^{-1} \leq n_i}{\leq} \\ &\leq 2^{i+1+m_i} p_{m_i}(\eta_i) \cdot p_{\sigma, \mu}(f) \cdot 2^{-i-1-m_i} p_{m_i}(\eta_i)^{-1} \delta_i = \\ &= p_{\sigma, \mu}(f) \delta_i < 1 \cdot \delta_i. \end{aligned}$$

Dunque se  $p_{\sigma, \mu}(f) < 1$ , la funzione  $2^{i+1} \eta_i f$  è tale che

$$p_{m_i}(2^{i+1} \eta_i f) \leq 1$$

quindi, poiché  $C_{K_i}^\infty \cap \{p_{m_i} \leq \delta_i\} \subseteq U$ , questo mostra che  $2^{i+1} \eta_i f \in U$  e quindi

$$f = \sum_{i \geq 0} 2^{-i-1} (2^{i+1} \eta_i f)$$

è combinazione convessa finita di elementi di  $U$  e poiché abbiamo preso  $U$  convesso questo conclude.  $\square$

**Esercizio 8.43.**

La moltiplicazione (puntuale)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\Omega) \\ (f, g) & \longmapsto & fg \end{array}$$

è continua? Sì.

Sono continue la moltiplicazioni

$$\begin{array}{ccc} C_C^0(\Omega) \times C_C^0(\Omega) & \longrightarrow & C_C^0(\Omega) \\ (f, g) & \longmapsto & fg \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} C_C \times C_C & \longrightarrow & C_C \\ (f, g) & \longmapsto & fg \end{array} ?$$

*Solution.*

Usare le seminorme e la caratterizzazione di continuità per le bilineari (4.32).  $\square$

## 8.3 Altre proprietà di $\mathcal{D}(\Omega)$

### 8.3.1 Spazi barilati

**Definizione 8.44** (Botte e spazi barilati).

Una **botte** o **barile** in  $X$  SVTLC è un insieme

- assorbente
- assolutamente convesso
- chiuso.

Affermiamo che  $X$  è uno **spazio botte** / **spazio barilato** (barreled space) se ogni barile è un intorno di 0.

*Osservazione 8.45.*

Ogni spazio di Fréchet è uno spazio botte.

*Dimostrazione.*

Riadatta dimostrazione di Banach-Steinhaus (4.27):

Se  $B \subseteq X$  botte allora  $X = \bigcup nB$  in quanto assorbente. Per Baire (4.17) uno degli  $nB$  (e quindi  $B$ ) ha parte interna non vuota. Poiché

$$\frac{1}{2}(\text{int}(B) - \text{int}(B)) \subseteq \frac{1}{2}(B - B) = B$$

si ha che  $B$  è intorno di 0.  $\square$

*Osservazione 8.46.*

Limiti induttivi di spazi barilati sono barilati.

*Dimostrazione.*

Sia  $X_\infty = \varinjlim X_n$  con  $X_n$  barilati. Sia  $B \subseteq X_\infty$  botte. Allora per ogni  $n$  si ha  $B \cap X_n$  botte in  $X_n$  (assorbente, assolutamente convesso perché  $X_n$  sottospazio vettoriale, chiuso perché  $X_n \hookrightarrow X_\infty$  continua). Allora  $B \cap X_n$  è intorno di 0 per ogni  $n$  ed è convesso, quindi  $B$  è un intorno di 0 in  $X_\infty$ .  $\square$

**Corollario 8.47.**

Ogni LF-spazio (limite induttivo di Fréchet) è barilato. In particolare anche  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

### 8.3.2 Spazi Bornologici

**Definizione 8.48** (Spazi Bornologici).

Un insieme  $B \subseteq X$  SVT si dice **Bornofago** se assorbe ogni insieme limitato.

$X$  SVTLC è **Bornologico** se ogni sottoinsieme (assolutamente)convesso<sup>4</sup> e bornofago è un intorno di 0.

**Proposizione 8.49.**

Se  $X$  è SVT I-numerabile e  $C \subseteq X$  non è un intorno di 0 allora  $C$  non è assorbente.

*Dimostrazione.*

Se  $C$  non è intorno di 0 allora esiste una successione  $(x_n)$  con  $x_n \notin C$  per ogni  $n$  e tale che  $x_n \rightarrow 0$ .

Se  $p$  è una paranorma per  $X$  (2.36) allora  $p(x_n) \rightarrow 0$  a meno di estrarre una sottosuccessione. Si può quindi assumere  $p(x_n) = o(1/n)$ . Sia  $y_n = nx_n \notin nC$ . Nota che

$$p(y_n) = p(nx_n) \leq np(x_n) = o(1)$$

quindi  $\{y_n\}$  è limitato in quanto  $y_n \rightarrow 0$  ma non è assorbito da  $C$  per costruzione.  $\square$

**Corollario 8.50.**

Ogni SVTLC I-numerabile è bornologico.

**Fatto 8.51.**

Ogni limite induttivo di spazi bornologici è bornologico

*Dimostrazione.*

Se  $X_n$  bornologici con limite  $X_\infty$  allora sia  $B$  convesso e bornofago in  $X_\infty$ , allora  $B \cap X_n$  è ancora convesso.  $B \cap X_n$  è ancora bornofago perché ogni limitato in  $X_n$  è limitato in  $X_\infty$  per continuità delle inclusioni. Quindi  $B \cap X_n$  è intorno di 0 convesso in  $X_n$  e quindi  $B$  stesso è intorno di 0 convesso di  $X_\infty$ .  $\square$

**Corollario 8.52.**

Ogni spazio  $LF$  è bornologico e quindi in particolare anche  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

---

<sup>4</sup>chiedere assolutamente convesso o convesso è equivalente



## Capitolo 9

# Distribuzioni

**Definizione 9.1** (Distribuzione).

Fissato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, una **distribuzione** è una forma lineare e continua su  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Lo spazio delle distribuzioni è dunque il duale topologico di  $\mathcal{D}(\Omega)$ , cioè  $\mathcal{D}(\Omega)^*$ , che però in questo contesto viene spesso indicato  $\mathcal{D}'(\Omega)$  per ragioni storiche.

*Osservazione 9.2.*

$u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  lineare è una distribuzione SE è continua, cioè se per ogni  $K \in k(\Omega)$  si ha che

$$u|_{C_K^\infty} : C_K^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

è continua, o equivalentemente se per ogni  $K \in k(\Omega)$  esistono  $m \in \mathbb{N}$  e  $C > 0$  tali che

$$|\langle u, f \rangle| \leq Cp_m(f) \quad \forall f \in C_K^\infty.$$

**Definizione 9.3** (Ordine di una distribuzione).

Se  $m \in \mathbb{N}$  è tale che per ogni  $K \in k(\Omega)$  esiste  $C > 0$  tale che

$$|\langle u, f \rangle| \leq Cp_m(f) \quad \forall f \in C_K^\infty.$$

si dice che  $u$  ha **ordine minore o uguale a  $m$** . Se non esiste un tale  $m$  diciamo che  $u$  ha ordine  $\infty$ , mentre se esiste allora l'**ordine di  $u$**  è il minimo tale  $m$ . Indichiamo l'ordine di  $u$  con  $\text{ord}(u)$ .

*Osservazione 9.4.*

Intuitivamente l'ordine è “il massimo ordine di derivate” che può apparire scrivendo  $u$  esplicitamente.

**Esempio 9.5.**

La valutazione in un punto è una distribuzione di ordine 0. La valutazione della prima derivata in un punto è una distribuzione di ordine 1.

*Osservazione 9.6.*

Valgono:

- Per ogni  $K \in k(\Omega)$  e per ogni  $f_j \rightarrow 0$  in  $C_K^\infty$  vale  $\langle u, f_j \rangle \rightarrow 0$ .
- Per ogni  $f_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\langle u, f_j \rangle \rightarrow 0$ .
- Per (8.42) esistono  $\sigma, \mu$  tali che

$$|\langle u, f \rangle| \leq p_{\sigma, \mu}(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Definizione 9.7** (Integrabili su compatti).

Definiamo le funzioni **integrabili su compatti**  $L^1_{loc}(\Omega)$  come le funzioni  $u$  su  $\Omega$  tali che per ogni  $K \in k(\Omega)$  si ha  $u|_K \in L^1(K)$ .

**Definizione 9.8** (Inclusione delle localmente integrabili nelle distribuzioni).

Definiamo

$$T : \begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & f \longmapsto \int_{\Omega} f u \, dx \end{array}$$

**Proposizione 9.9.**

La mappa  $T$  è ben definita e iniettiva.

*Dimostrazione.*

L'integrale  $\int_{\Omega} f u \, dx$  è ben definito perché  $f$  ha supporto compatto ed è continua (quindi  $u f = u|_K f$  è integrabile).  $T_u$  è continua su ogni  $C_K^{\infty}$  perché

$$|\langle T_u, f \rangle| \leq \|\mu_K\|_1 \|f\|_{\infty} = \|\mu|_K\| p_0(f).$$

L'iniettività è evidente perché se  $u \neq v$  in  $L^1_{loc}$  allora esiste un insieme di misura non negativa dove non coincidono, opportune mollificazioni della caratteristica di questo insieme mostrano che  $T_u \neq T_v$ .  $\square$

**Esempio 9.10.**

Le seguenti sono distribuzioni:

1. **Valutazioni di derivate:** Sia  $x_0 \in \Omega$  allora le seguenti mappe sono distribuzioni per ogni  $\alpha$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \partial^{\alpha} f(x_0) \end{array}$$

in quanto  $|\partial^{\alpha} f(x_0)| \leq p_m(f)$  per  $m = |\alpha|$ .

2. **Integrale contro  $u \in L^1_{loc}$  fissata:** l'immagine di  $T$ , cioè le mappe della forma

$$T_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{\Omega} f u \, dx \end{array}$$

sono distribuzioni.

3. Se  $(x_j) \subseteq \Omega$  con  $x_j$  che esce da ogni compatto definitivamente (va verso il bordo) allora

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\infty} \partial^{\alpha_i} f(x_i) \end{array}$$

è una distribuzione (qualunque sia la successione degli  $\alpha_i \in \mathbb{N}^n$  che consideriamo, tanto su ogni compatto la somma è finita).

**Definizione 9.11** (Bracket di Iverson).

Il **Bracket di Iverson** per una condizione booleana  $\varphi$  su un insieme  $A$  è la funzione caratteristica di quella condizione, cioè

$$[x] = \chi_{\{x \in A | \varphi(x)\}}.$$

**Definizione 9.12.**

Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto definiamo

$$\Theta = \{\theta : \Omega \times \mathbb{N}^n \rightarrow [0, \infty), \text{ "localmente finita"}\}$$

cioè per ogni  $x \in \Omega$  esiste  $U$  intorno di  $x$  tale che per ogni  $y \in U$

$$\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \theta(y, \alpha) \neq 0\} \quad \text{è finito.}$$

*Osservazione 9.13.*

Se  $\theta \in \Theta$  allora per ogni  $K \in k(\Omega)$  si ha che esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $x \in K$  e per ogni  $|\alpha| \geq N$  vale  $\theta(x, \alpha) = 0$ .

*Osservazione 9.14.*

Ogni  $\theta \in \Theta$  è maggiorato da una  $\tilde{\theta}$  della forma

$$\tilde{\theta}(x, \alpha) = \sigma(x)[|\alpha| \leq \mu(x)]$$

dove  $\sigma, \mu \in C^0(\Omega)_+$  e  $[\cdot]$  è il Bracket di Iverson,

$$\mu(x) = \max \{|\alpha| \mid \theta(x, \alpha) \neq 0\}$$

eccetera (vedi capitolo precedente).

**Notazione 9.15.**

Per ogni  $\theta \in \Theta$  e  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$  poniamo

$$\|u\|_\theta = \|\theta \cdot \partial^\bullet u(\bullet)\|_{\infty, \Omega \times \mathbb{N}^n}$$

## 9.1 Estensioni e operazioni sulle distribuzioni

### 9.1.1 Estensioni

Possiamo considerare estensioni di operatori su  $\mathcal{D}(\Omega)$  a operatori su  $\mathcal{D}'(\Omega)$  tramite le inclusioni

$$\mathcal{D}(\Omega) \subseteq C^1(\Omega) \subseteq L_{loc}^1 \xrightarrow{T} \mathcal{D}'(\Omega)$$

dove come prima

$$T : \begin{array}{ccc} L_{loc}^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_\Omega f u \, dx \end{array} \end{array}$$

*Osservazione 9.16.*

Ponendo  $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u \varphi \, dx$ , per ogni  $K \in k(\Omega)$  e  $\varphi \in C_K^\infty$  si ha

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_\infty \quad \text{dove } C_K = \int_K |u| \, dx = \|u\|_{1,K} \quad \text{e } \|\varphi\|_\infty = p_0(\varphi).$$

**Esercizio 9.17.**

La mappa lineare  $T : L_{loc}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  è continua rispetto alle topologie

- Su  $L_{loc}^1(\Omega)$  consideriamo la topologia di spazio di Fréchet indotta dalle norme  $\left\{ \|\cdot\|_{1,K} \right\}_{K \in k(\Omega)}$ .

- Su  $\mathcal{D}'(\Omega)$  consideriamo la topologia debole  $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ .

*Dimostrazione.*

$T$  è continua per queste topologie se e solo se per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  si ha che

$$\begin{array}{ccc} L_{loc}^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \langle T_u, \varphi \rangle \end{array}$$

è continua e questo è vero se e solo se per ogni  $K \in k(\Omega)$  esiste  $C$  tale che per  $u \in C_K^\infty$

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C \|u\|_{1,K} = C \int_K |u| dx$$

ma questo è vero perché

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega u \varphi dx \right| \leq \int_K |u| dx \|\varphi\|_\infty = \|u\|_{1,K} \|\varphi\|_\infty.$$

□

**Notazione 9.18.**

Se non c'è pericolo di confusione consideriamo  $T$  come una inclusione e scriviamo  $L_{loc}^1 \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $T_u = u$ . Spesso si usa anche  $u(\varphi)$  al posto di  $\langle T_u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$ .

**Definizione 9.19** (Funzioni nulle al bordo).

Definiamo  $C_0(X)$  come

$$C_0(X) = \left\{ f \in C(X) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ in } \tilde{X} \right\}$$

dove  $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$  è la compattificazione di Alexandroff.

**Proposizione 9.20** (Distribuzioni di ordine limitato si estendono a  $(C_0^m)^*$ ).

Le distribuzioni di ordine minore o uguale a  $m$  si estendono a funzionali lineari continui su tutto

$$C_0^m(\Omega) = \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{C^m(\Omega)} = \{ f \in C^m(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in C_0^0(\Omega) \}.$$

*Dimostrazione.*

Se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ha ordine  $\leq m$  allora è continua per la topologia indotta da  $C^m(\Omega)$  (infatti per ogni  $K \in k(\Omega)$  esiste  $C_K$  tale che  $|u(\varphi)| \leq C_K p_m(\varphi)$ ). Quindi si estende per continuità in modo unico a una forma lineare continua sulla chiusura (per la topologia di  $C^m$ ), cioè  $C_0^m(\Omega) \subseteq C^m(\mathbb{R}^n)$ :

Fissiamo  $K \in k(\Omega)$  e sia  $\text{dist}(K, \Omega^c) = \varepsilon$ . Sia  $\varphi$  funzione  $C^\infty$  non negativa con supporto contenuto in  $B(0, \varepsilon/4)$  e tale che  $\int \varphi = 1$ . Sia

$$\eta = \varphi * \chi_{K + \frac{\varepsilon}{4}B}.$$

Per costruzione  $\eta = 1$  su  $K$  e  $\eta = 0$  in  $\Omega \setminus K + \frac{\varepsilon}{2}B$ . Quindi dato  $K \in k(\Omega)$  esiste  $\eta \in C_C^\infty(\Omega)$  con  $0 \leq \eta \leq 1$  e  $\eta|_K = 1$ .

Concludere mostrando che la chiusura in  $C^m(\Omega)$  di  $C_C^\infty(\Omega)$  è  $C_0^m(\Omega)$  usando l'approssimazione via convoluzioni e la moltiplicazione per  $\eta$ . □

### 9.1.2 Derivazione

#### Proposizione 9.21.

L'operatore  $\partial_i$  di derivazione su  $\mathcal{D}(\Omega)$  si estende ad un operatore su  $\mathcal{D}'(\Omega)$  nel senso di sopra ponendo

$$\partial_i = -\partial_i^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & -u \circ \partial_i \end{array}$$

*Dimostrazione.*

Per  $u \in C^1(\Omega)$  e  $\partial_i u \in C^0(\Omega)$  si ha che  $u$  e  $\partial_i u$  appartengono a  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Le distribuzioni  $T_u$  e  $T_{\partial_i u}$  sono legate dalla relazione data dall'integrazione per parti<sup>1</sup>:

$$\langle T_u, \partial_i \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx = - \int_{\Omega} \partial_i u \varphi dx = -T_{\partial_i u} \varphi$$

cioè  $T_{\partial_i u} = -T_u \circ \partial_i$  (quì  $\partial_i$  è inteso in senso classico).

Definendo quindi

$$\partial_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & -u \circ \partial_i \end{array}$$

abbiamo una estensione di  $\partial_i$  a  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Il codominio è effettivamente  $\mathcal{D}'(\Omega)$  perché  $\partial_i : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  è lineare e continua, quindi  $-u \circ \partial_i$  è composizione di due mappe lineari e continue.  $\square$

*Osservazione 9.22.*

Più in generale è definito  $\partial^\alpha$  su  $\mathcal{D}'(\Omega)$  e vale  $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$ .

*Osservazione 9.23.*

$\text{ord}(\partial_i u) \leq \text{ord}(u) + 1$ .

### 9.1.3 Moltiplicazione per funzione liscia

#### Notazione 9.24.

Definiamo  $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ .

*Osservazione 9.25.*

Se  $f \in \mathcal{E}(\Omega)$  è definito un operatore lineare

$$M_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\Omega) \\ \varphi & \longmapsto & f\varphi \end{array}$$

*Osservazione 9.26.*

$M_f$  è continuo.

*Dimostrazione.*

A livello dei  $C_K^\infty$  il supporto resta contenuto in  $K$  dopo la moltiplicazione e

$$\begin{aligned} p_{m,K}(M_f(\varphi)) &= p_{m,K}(f\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(f\varphi)\|_\infty = \\ &= \max_{|\alpha| \leq m} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} \varphi \right\|_\infty \leq \\ &\leq (2^m p_{m,K}(f)) p_m(\varphi). \end{aligned}$$

$\square$

<sup>1</sup>i termini al bordo spariscono perché tutto ha supporto compatto.

*Osservazione 9.27.*

Applicando  $T$  è definito un operatore di moltiplicazione sulle distribuzioni

$$M_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & fu \end{array}$$

dove

$$(fu)(\varphi) = u(\varphi f).$$

## 9.2 Distribuzioni di ordine limitato come misure

*Osservazione 9.28.*

$C$  è una immersione isometrica

$$\begin{array}{ccc} C_0^m(\Omega) & \longrightarrow & C_0^0(\tilde{\Omega})^N \\ \varphi & \longmapsto & (\partial^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} \end{array}$$

dove  $N = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq m\}$  e  $\tilde{\Omega}$  è la compattificazione di  $\Omega$  a un punto.

Segue che  $C_0^m(\Omega)^* \hookrightarrow (C_0^0(\Omega)^*)^N$  per Hahn-Banach (3.2).

**Fatto 9.29.**

Se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  con  $\text{ord}(u) \leq m$ , quindi tale che si estende a  $u \in C_0^m(\Omega)^*$  (9.20), allora grazie a  $C_0^m(\Omega)^* \hookrightarrow (C_0^0(\Omega)^*)^N$  otteniamo che esistono  $N$  misure di Radon<sup>2</sup>  $\{\mu_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$  tali che

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \varphi d\mu_\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \varphi \rho_\alpha d\nu_\alpha$$

con  $\nu_\alpha \geq 0$  e  $|\rho| \leq 1$ .

*Osservazione 9.30.*

Queste misure non sono uniche perché abbiamo usato Hahn-Banach (3.2) per estendere  $u$  da  $C_0^m(\Omega)$  a  $C_0^0(\tilde{\Omega})^N$ .

*Osservazione 9.31.*

Le distribuzioni di ordine 0 sono misure di Radon, cioè

$$\text{ord}(u) = 0 \implies u(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad \mu \text{ misura relativa finita sui compatti.}$$

**Fatto 9.32.**

Ogni distribuzione positiva  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , cioè tale che  $u(\varphi) \geq 0$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  tale che  $\varphi \geq 0$  ha ordine 0.

*Dimostrazione.*

Per ogni  $K \in k(\Omega)$  sia  $\eta \in C^\infty(\Omega)$  con  $0 \leq \eta \leq 1$  con  $\text{supp } \eta \subseteq \Omega$  e  $\eta = 1$  su  $K$ . Allora per ogni  $\varphi \in C_K^\infty$  vale

$$\|\varphi\|_\infty \eta \pm \varphi \geq 0$$

infatti su un punto di  $K$   $\eta = 1$  e quindi applico la definizione di  $\|\cdot\|_\infty$ , mentre su un punto che non appartiene a  $K$  abbiamo  $\varphi = 0$  e quindi la disuguaglianza continua a valere. Dunque

$$u(\|\varphi\|_\infty \eta \pm \varphi) = \|\varphi\|_\infty u(\eta) \pm u(\varphi) \geq 0$$

e quindi  $|u(\varphi)| \leq u(\eta) \|\varphi\|_\infty = C_K p_0(\varphi)$ , cioè  $u$  ha ordine 0.  $\square$

<sup>2</sup>boreliane, finite sui compatti, regolari da fuori sui Boreliani e regolari da dentro per gli aperti.

## 9.3 Successioni di distribuzioni

### Proposizione 9.33.

Sia  $(u_j) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$  una successione convergente puntualmente, cioè  $(u_j(\varphi))$  converge in  $\mathbb{R}$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Allora il limite

$$u(\varphi) = \lim_j u_j(\varphi)$$

definisce una distribuzione  $u$ . Inoltre per ogni  $K \in k(\Omega)$  esiste  $C_K \geq 0$  e  $m \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $j \geq 0$

$$|u_j(\varphi)| \leq C_K p_m(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_K^\infty.$$

*Dimostrazione.*

Sia  $K \in k(\Omega)$ . Notiamo che  $u_j|_{C_K^\infty}$  è una successione puntualmente limitata su  $C_K^\infty$  (per ogni  $\varphi \in C_K^\infty$  si ha  $|u_j(\varphi)| \leq C_\varphi$ ). Siccome  $C_K^\infty$  è uno spazio di Fréchet (e quindi di Baire) per Banach-Steinhaus (4.27) la successione  $(u_j|_{C_K^\infty})$  è limitata in  $C_K^\infty$ , cioè vale la disuguaglianza affermata.

Allora questa stima vale anche per  $u$  limite puntuale, il quale è anche ovviamente lineare, quindi  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $\square$

### Corollario 9.34.

Se  $(\varphi_j) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$  è una successione convergente in  $\mathcal{D}(\Omega)$  a  $\varphi$  allora

$$u_j(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$$

*Dimostrazione.*

$\varphi_j \rightarrow \varphi$  implica che esiste  $K \in k(\Omega)$  tale che  $\varphi_j \in C_K^\infty$  e  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  in  $C_K^\infty$  e ora che sappiamo che tutte le funzioni hanno supporto nello stesso  $K$  possiamo usare la disuguaglianza

$$|u_j(\varphi_j)| \leq C_K p_m(\varphi_j) \rightarrow 0$$

dove per l'ultimo limite ho supposto senza perdita di generalità  $\varphi = 0$  (altrimenti sostituisco  $\varphi_j$  con  $\varphi_j - \varphi$ ).  $\square$

## 9.4 Distribuzioni sono un fascio

### Proposizione 9.35.

Il funtore  $\mathcal{D}' : (\text{Aperti di } \mathbb{R}^n)^{op} \rightarrow (SVTLC)$  definisce un fascio, cioè:

1. Per ogni aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  è ben definito  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .
2. Per ogni contenimento  $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$  di aperti abbiamo una funzione di restrizione

$$\rho_U^V : \mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$$

tale che  $\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{D}'(U)}$  e se  $U \subseteq V \subseteq W$  allora

$$\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W.$$

3. Se  $\Omega$  aperto ammette un ricoprimento aperto  $\{\Omega_i\}$  e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  allora  $\rho_{\Omega_i}^\Omega(u) \doteq u_i = 0$  per ogni  $i$  implica che  $u = 0$ .

4. Se  $\Omega$  aperto ammette un ricoprimento aperto  $\{\Omega_i\}$  e per ogni  $i$  abbiamo  $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$  tali che

$$\rho_{\Omega_i \cap \Omega_j}^{\Omega_i}(u_i) = \rho_{\Omega_i \cap \Omega_j}^{\Omega_j}(u_j)$$

per ogni coppia  $i, j$  allora esiste  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tale che  $\rho_{\Omega_i}^\Omega(u) = u_i$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo le varie proprietà:

1. Ovvio.
2. Dati due aperti  $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$  esiste una inclusione

$$\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \in k(U)} C_K^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}(V) = \bigcup_{K \in k(V)} C_K^\infty$$

e quindi un operatore di restrizione

$$\rho_U^V : \mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(U).$$

Questo operatore chiaramente rispetta le due proprietà.

3. Sia  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$  tale che

$$u|_{\Omega_j} = \rho_{\Omega_j}^\Omega(u) = 0.$$

Per ogni  $\varphi$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  esiste  $F \subseteq I$  finito tale che  $K = \text{supp } \varphi \subseteq \bigcup_{j \in F} \Omega_j$ . Esiste inoltre una partizione di unità  $\{\eta_j\}_{j \in F} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$  tale che

$$\eta_j \in \mathcal{D}(\Omega_j) \quad \text{e} \quad \sum_{j \in F} \eta_j = 1 \text{ su } K.$$

Allora  $f = \sum_{j \in F} f \eta_j$  e  $u(f) = \sum_{j \in F} u(f \eta_j) = 0$  in quanto  $u|_{\Omega_j} = 0$ .

4. Sia  $\{\Omega_i\}$  un ricoprimento aperto di  $\Omega$  e per ogni  $i$  abbiamo  $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$  tali che

$$\rho_{\Omega_i \cap \Omega_j}^{\Omega_i}(u_i) = \rho_{\Omega_i \cap \Omega_j}^{\Omega_j}(u_j)$$

per ogni coppia  $i, j$ . Definiamo  $u(\varphi)$  per  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  come segue:

Sia  $K \in k(\Omega)$  tale che  $\varphi \in C_K^\infty$  e sia  $F \subseteq I$  finito tale che  $K \subseteq \bigcup_{i \in F} \Omega_i$ . Siano  $\{\eta_j\}_{j \in F} \subseteq C^\infty(\Omega)$  tali che  $\text{supp } \eta_j \subseteq \Omega_j$ ,  $0 \leq \eta_j \leq 1$  e  $\sum_{j \in F} \eta_j = 1$  su  $K$ . Poniamo

$$u(\varphi) = \sum_{j \in F} u_j(\varphi \eta_j)$$

Notiamo che  $\varphi \eta_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$  quindi ha senso valutare  $u_j$  nel prodotto. La definizione non dipende dalla famiglia  $\{\eta_j\}$  in quanto se  $\eta'_j$  ha le stesse proprietà allora

$$\begin{aligned} \sum_{j \in F} u_j(\varphi \eta_j) &= \sum_{j \in F} u_j \left( \sum_{i \in F} \varphi \eta_j \eta'_i \right) = \sum_{i, j \in F} u_j(\varphi \eta_j \eta'_i) \stackrel{\text{ipotesi}}{=} \\ &= \sum_{i, j \in F} u_i(\varphi \eta_j \eta'_i) = \sum_{i \in F} u_i(\varphi \eta'_i). \end{aligned}$$

Per costruzione  $u$  eredita la linearità e la continuità delle  $u_i$ , quindi è un elemento di  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .



□

*Osservazione 9.36.*

Si può considerare più in generale il fascio delle distribuzioni su una varietà  $C^\infty$  di dimensione  $n$ , basta incollare i fasci di distribuzioni su un ricoprimento di aperti omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ .

### 9.4.1 Distribuzioni a supporto compatto

**Definizione 9.37** (Supporto di una distribuzione).

Fissiamo una distribuzione  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Sia  $\Omega_0$  il più grande aperto tale che  $u|_{\Omega_0} = 0$ . Il chiuso  $\Omega \setminus \Omega_0$  si dice **supporto** di  $u$  e si indica  $\text{supp}(u)$ .

*Osservazione 9.38.*

$\Omega_0$  è ben definito in quanto è l'unione di tutti gli aperti dove  $u$  si restringe alla mappa nulla: Poiché  $\mathcal{D}'$  è un fascio (9.35) e per definizione  $u|_{\Omega_0}$  ha tutte le restrizioni a  $U \subseteq \Omega_0$  aperto banali,  $u|_{\Omega_0} = 0$ .

**Definizione 9.39** (Distribuzione a supporto compatto).

Se  $\text{supp}(u)$  è compatto,  $u$  si dice **a supporto compatto**. Scriviamo l'insieme delle distribuzioni a supporto compatto con  $\mathcal{D}'_C(\Omega)$ .

**Proposizione 9.40.**

Se  $u \in \mathcal{D}'_C(\Omega)$  e  $K \in k(\Omega)$  allora valgono le implicazioni dall'alto verso il basso

1.  $\text{supp}(u) \subseteq \text{int}(K)$ .
2. Esistono  $C \geq 0$  e  $m \in \mathbb{N}$  tali che per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  si ha

$$|u(\varphi)| \leq Cp_{m,K}(\varphi),$$

cioè  $u$  è continua.

3.  $\text{supp}(u) \subseteq K$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo le due implicazioni

1.  $\implies$  2. Siano  $\text{supp}(u) \subseteq \text{int}(K)$  e  $\psi \in C^\infty(\Omega)$  con  $\text{supp}(\psi) \subseteq K$  e  $\psi = 1$  su un intorno  $U$  di  $\text{supp}(u)$ .

Allora per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  si ha che  $(1 - \psi)\varphi$  è nulla su  $U$ , quindi

$$\{(1 - \psi)\varphi \neq 0\} \subseteq \Omega \setminus U \implies \text{supp}((1 - \psi)\varphi) = \overline{\{(1 - \psi)\varphi \neq 0\}} \subseteq \Omega \setminus U$$

Segue che  $(1 - \psi)\varphi$  e  $u$  hanno supporto disgiunto, dunque

$$0 = u((1 - \psi)\varphi) = u(\varphi) - u(\psi\varphi),$$

cioè per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  si ha

$$u(\varphi) = u(\psi\varphi).$$

Per continuità di  $u$  come elemento di  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , poiché  $\psi\varphi \in C_K^\infty$ , esistono  $m \in \mathbb{N}$  e  $C \geq 0$  tali che

$$|u(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| \leq Cp_{m,K}(\psi\varphi) \leq C'p_{m,K}(\varphi)$$

dove l'ultima stima è un conto già visto che usa la formula di Leibnitz<sup>3</sup>, quindi  $u$  è continua per la topologia indotta<sup>4</sup> da  $\mathcal{E}(\Omega)$  su  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**2.  $\implies$  3.** Se per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  vale  $|u(\varphi)| \leq Cp_{m,K}(\varphi)$  allora in particolare vale se  $\varphi$  ha supporto in  $\Omega \setminus K$ , ma in tal caso  $p_{m,K}(\varphi) = 0$ , cioè  $u$  è nulla su  $\mathcal{D}(\Omega \setminus K)$  e quindi il supporto è contenuto in  $K$ .

□

#### Corollario 9.41.

*Le distribuzioni a supporto compatto in  $\Omega$  si possono identificare con gli elementi di<sup>5</sup>  $\mathcal{E}'(\Omega) = (C^\infty(\Omega))^*$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $u$  ha supporto compatto è continua per la topologia indotta da  $\mathcal{E}(\Omega)$  su  $\mathcal{D}(\Omega)$  e quindi per Hahn-Banach (3.2) si estende ad una forma lineare continua su tutto  $\mathcal{E}(\Omega)$ . Questa estensione è in realtà unica perché  $\mathcal{D}(\Omega)$  è denso in  $\mathcal{E}(\Omega)$ . In questo senso possiamo identificare  $\mathcal{E}'(\Omega)$  con  $\mathcal{D}'_C(\Omega)$  come spazi vettoriali. □

*Osservazione 9.42.*

Se  $u \in \mathcal{D}'_C(\Omega)$  allora ha anche ordine finito per il punto 1. della proposizione sopra (9.40).

**Esempio 9.43** (Non vale 3.  $\implies$  2. di (9.40)).

Sia  $n = 1$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$  e consideriamo  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tale che

$$u(\varphi) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left( \varphi \left( \frac{1}{k} \right) - \varphi(0) \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

La serie è assolutamente convergente perché  $|\varphi(\frac{1}{k}) - \varphi(0)| \leq \|\dot{\varphi}\|_\infty \frac{1}{k}$  per Lagrange e

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left| \varphi \left( \frac{1}{k} \right) - \varphi(0) \right| \leq \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \right) \|\dot{\varphi}\|_\infty.$$

Da questa scrittura si vede anche che  $u$  dipende da  $\varphi$  con continuità rispetto alla norma  $\|\partial \bullet\|_\infty$ .

Se  $\varphi$  ha supporto disgiunto da  $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{k}\}_{k \geq 0}$  allora  $\text{supp}(u) \subseteq K$  (cioè vale la condizione 3.).

Eppure non vale la condizione 2. per  $K$  infatti per  $m \in \mathbb{N}$  sia  $\varphi_m$  una funzione  $\mathcal{D}(\Omega)$  tale che  $\varphi_m = 0$  su un intorno di  $[0, \frac{1}{m+1}]$  e  $\varphi_m = 1$  su un intorno di  $[\frac{1}{m}, 1]$ , allora

$$\varphi_m \left( \frac{1}{k} \right) = \chi_{\{k \leq m\}}, \quad \varphi_m^{(j)}(x) = 0 \quad \forall x \in K, \quad \forall j \geq 1$$

perciò  $p_{m,K}(\varphi_m) = \|\varphi_m\|_\infty = 1$  quindi

$$u(\varphi_m) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

<sup>3</sup>

$$p_{m,K}(\psi\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(\psi\varphi)\|_{\infty,K} = \max_{|\alpha| \leq m} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \psi \partial^\beta \varphi \right\|_{\infty,K} \leq 2^m p_m(\psi) p_{m,K}(\varphi).$$

<sup>4</sup>e quindi potremmo estendere  $u$  con Hahn-Banach (3.2).

<sup>5</sup>la topologia su  $\mathcal{E}(\Omega)$  è quella indotta dalle seminorme  $\{p_{m,K}\}_{m \in \mathbb{N}, K \in k(\Omega)}$ .

cioè  $u$  non è limitata e quindi non esistono  $m, C$  tali che

$$|u(\varphi)| \leq Cp_{m,K}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

**Esempio 9.44.**

Se  $K$  è un singoletto  $\{x_0\}$  per  $x_0 \in \Omega$  allora le implicazioni di (9.40) si possono invertire: Se  $\text{supp}(u) = \{x_0\}$  allora esistono  $m \in \mathbb{N}$  e costanti  $\{c_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$  tali che per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

Risulta  $c_\alpha = u\left(\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\right)$ :

$$u\left(\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\right) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{c_\beta}{\alpha!} \partial^\beta ((x-x_0)^\alpha) = \frac{c_\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha (x-x_0)^\alpha = c_\alpha \cdot 1.$$

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità sia  $x_0 = 0$  e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  con  $\text{supp}(u) = \{0\}$ . Scegliamo  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp}(\eta) \subseteq B(0, 2)$  e  $\eta|_{B(0,1)} = 1$ .

Definiamo

$$\eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightsquigarrow \text{supp}(\eta_\varepsilon) \subseteq B(0, 2\varepsilon), \quad \eta_\varepsilon|_{B(0,\varepsilon)} = 1$$

Quindi

$$\partial^\alpha \eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\alpha|} \partial^\alpha \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\eta_\varepsilon \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e  $(1 - \eta_\varepsilon)\varphi$  ha supporto su  $\Omega \setminus B(0, \varepsilon)$ , quindi la  $u$  su annulla su questa funzione. Dunque per ogni  $\varepsilon > 0$

$$u(\varphi) = u(\eta_\varepsilon \varphi)$$

Mostriamo il seguente caso particolare: se  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  è tale che  $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$  per ogni  $|\alpha| \leq m$  per un qualche  $m$  allora  $u(\varphi) = 0$ . In queste ipotesi si ha grazie alla continuità di  $u$  su  $C^\infty_{\overline{B(0,\varepsilon_0)}}$  e al fatto che  $\eta_\varepsilon \varphi \in \mathcal{D}(B(0, \varepsilon_0))$  per ogni  $\varepsilon < \varepsilon_0$  che

$$|u(\varphi)| = |u(\eta_\varepsilon \varphi)| \leq C_0 p_{m,B(0,\varepsilon_0)}(\eta_\varepsilon \varphi)$$

Si conclude che  $u(\varphi) = 0$  osservando che

$$p_{m,B(0,\varepsilon_0)}(\eta_\varepsilon \varphi) \stackrel{\text{supp}(\eta_\varepsilon) \subseteq B(0,\varepsilon)}{=} p_m(\eta_\varepsilon \varphi) = o(1)$$

per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cioè  $\eta_\varepsilon \varphi \rightarrow 0$  in  $C^m(\mathbb{R}^n)$ : poiché  $\partial^\alpha \eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\alpha|} \partial^\alpha \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  si ha  $p_m(\eta_\varepsilon) = \varepsilon^{-m} p_m(\eta)$ . D'altra parte dalla formula di Taylor, poiché  $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$  per ogni  $|\alpha| \leq m$ , si ha

$$|\varphi(x)| = O(|x|^{m+1}), \quad |\partial^\alpha \varphi(x)| = O(|x|^{m-|\alpha|+1})$$

per  $x \rightarrow 0$ . Allora

$$p_m(\eta_\varepsilon \varphi) \leq 2^m \max_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \beta \leq \alpha \\ x \in B(0, 2\varepsilon)}} |\partial^{\alpha-\beta} \eta_\varepsilon \partial^\beta \varphi| = O(\varepsilon^{-m+|\beta|} \varepsilon^{m-|\beta|+1}) = O(\varepsilon)$$

Quindi  $u(\varphi) = 0$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  con  $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$  per  $|\alpha| \leq m$ .

Ora consideriamo  $\varphi$  qualunque. Dalla formula di Taylor

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha + \rho(x)$$

con  $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$  tale che  $\partial^\alpha \rho(0) = 0$  per ogni  $|\alpha| \leq m$ . Mettendo tutto insieme abbiamo finito perché  $u(\rho) = 0$  e

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0)$$

con  $c_\alpha = u(x^\alpha)$ . □

**Esercizio 9.45** (Convoluzione di una funzione  $C^\infty$  a supp.cpt. e una distribuzione.). Per ogni  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  è definita la mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi & \longmapsto & f * \varphi \end{array}$$

Per ogni  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ , la convoluzione induce una mappa.

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

Queste mappe sono continue e lineari. Restano definite le trasposte

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

tali che  $u \mapsto \tilde{u} = u \circ (f * \bullet)$ , cioè<sup>6</sup>  $\tilde{u}(g) = u(f * g)$ .

Tenendo presente le proprietà della convoluzione questo fornisce una estensione dell'operazione di convoluzione alle distribuzioni.

Cosa si può dire sulla continuità dell'operazione (per esempio con  $(\mathcal{E}', \sigma(\mathcal{E}', \mathcal{E}))$  e  $(\mathcal{D}', \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D}))$ )?

---

<sup>6</sup>dove  $g$  appartiene a  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  nel primo caso e a  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  nel secondo.

## Capitolo 10

# Operatori compatti fra Banach

### 10.1 Definizioni

**Definizione 10.1** (Mappa compatta).

Una mappa  $T : X \rightarrow Y$  con  $X, Y$  spazi di Banach è **compatta** se è continua e per ogni  $S \subseteq X$  limitato,  $T(S)$  è relativamente compatto in  $Y$ , cioè  $\overline{T(S)}$  è compatto.

*Osservazione 10.2.*

Siccome  $Y$  è completo basta chiedere che  $T$  mandi limitati in totalmente limitati.

*Osservazione 10.3.*

Se  $T$  è lineare allora non serve imporre continuità in quanto un insieme totalmente limitato è in particolare limitato. Inoltre basta controllare solo  $S = B(0, 1)$  palla chiusa.

*Osservazione 10.4.*

$T \in L(X, Y)$  è compatto se e solo se per ogni  $(x_n)$  successione limitata in  $X$ ,  $(Tx_n)$  ha una sottosuccessione convergente.

**Proposizione 10.5.**

Se  $X$  è riflessivo allora  $T$  è compatto se e solo se per ogni successione  $(x_n)$  debolmente convergente a 0 vale  $\|Tx_n\| \rightarrow 0$  in  $Y$ , cioè  $T$  è sequenzialmente continuo per le topologie  $(X, w) \rightarrow (Y, s)$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo prima il caso di  $X$  riflessivo e separabile.

Se  $T$  è compatto,  $(x_n) \xrightarrow{w} 0 \implies (Tx_n) \xrightarrow{w} 0$  e  $(Tx_n)$  ha sottosuccessione convergente a 0 in quanto separabile (6.2), ma allora  $(Tx_n)$  stessa converge a 0 per la proprietà di Uhlrich (1.49).

Viceversa se  $T$  è sequenzialmente continuo da debole a forte e  $(x_n)$  è una successione limitata. Per il teorema di Kakutani (7.4)  $X$  riflessivo implica  $B_X$   $w$ -compatta e per Eberlein-Šmulian (7.32) questo è equivalente a  $B_X$   $w$ -sequenzialmente compatta. Poiché  $(x_n)$  è limitata essa è contenuta in qualche  $nB_X$  e per quanto detto questo insieme è  $w$ -sequenzialmente compatto, quindi  $(x_n)$  ammette una estratta  $w$ -convergente. Per ipotesi su  $T$ , l'immagine di questa sottosuccessione è una sottosuccessione di  $(Tx_n)$  convergente.

Se  $X$  è riflessivo (potenzialmente non separabile) allora posso considerare il sottospazio chiuso generato dalla successione  $(x_n)$  e questo è riflessivo separabile quindi la tesi passa.  $\square$

**Esercizio 10.6.**

Se  $X$  e  $Y$  sono entrambi riflessivi,  $T$  è compatto se e solo se per ogni  $(x_n) \subseteq X$  con  $x_n \xrightarrow{w} 0$  e per ogni  $(y_n^*) \subseteq Y^*$  con  $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$  vale  $\langle y_n^*, Tx_n \rangle \rightarrow 0$ .

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO, caso particolare di quella sopra.  $\square$

*Osservazione 10.7.*

Nota che le ipotesi di riflessività sono necessarie, per  $Y = \ell_\infty$  e la successione data da  $(e_n)$  la tesi fallisce.

**Proposizione 10.8.**

Se  $H$  è spazio di Hilbert e  $(x_n) \subseteq H$  allora essa converge  $\|\cdot\|$  a  $x \in H$  se e solo se  $x_n \xrightarrow{w} x$  e  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ .

*Dimostrazione.*

Sviluppiamo

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\Re(\langle x, x_n \rangle) + \|x\|^2 \rightarrow \|x\|^2 - 2\underbrace{\Re(\langle x, x \rangle)}_{=\langle x, x \rangle} + \|x\|^2 = 0.$$

$\square$

**Esercizio 10.9.**

Esprimere la compattezza di  $T \in L(X, Y)$  tra  $X, Y$  Hilbert usando la proprietà sopra.

*Osservazione 10.10.*

L'immagine di un operatore compatto è separabile.

*Dimostrazione.*

$\text{Imm}(T) = \bigcup_{n \geq 0} nT(B)$  e  $T(B)$  separabile perché relativamente compatto in metrico<sup>1</sup>.

$\square$

## 10.2 Proprietà di $L_C(X, Y)$

**Definizione 10.11.**

Sia  $L_C(X, Y)$  lo **spazio degli operatori compatti** tra  $X, Y$  Banach.

*Osservazione 10.12.*

$L_C(X, Y)$  è un sottospazio vettoriale chiuso di  $L(X, Y)$ .

**Proposizione 10.13.**

Se  $X, Y, Z$  Banach e  $T \in L(X, Y)$ ,  $S \in L(Y, Z)$  allora  $ST \in L_C(X, Z)$  se almeno uno tra  $T$  e  $S$  è compatto.

In particolare se  $X = Y = Z$  allora  $L_C(X) = L_C(X, X)$  è un ideale bilatero chiuso dell'algebra di Banach<sup>2</sup>  $L(X)$  degli operatori limitati su  $X$ .

<sup>1</sup>Per ogni  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  possiamo costruire il ricoprimento  $\{B(x, n^{-1})\}_{x \in \overline{T(B)}}$  ed estrarre un numero finito di centri di queste palle. Unendo questi insiemi di centri abbiamo una unione numerabile di insiemi finiti, quindi numerabile, e la chiusura di questo insieme è tutto  $\overline{T(B)}$  perché se una palla ha raggio  $\varepsilon > n^{-1}$  deve contenere uno dei punti definiti al livello  $n$ .

<sup>2</sup>Spazio di Banach che è un'algebra tale che  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$  e  $\|1\| = 1$ .

*Dimostrazione.*

Mostriamo che  $L_C(X, Y)$  è uno spazio vettoriale chiuso con la proprietà di assorbimento data:

sp.vett. Siano  $T, S \in L_C(X, Y)$ . Allora

$$(T + S)(B_X) \subseteq T(B_X) + S(B_X) \subseteq +(\overline{TB_X} \times \overline{SB_X})$$

poiché  $\overline{TB_X}$  e  $\overline{SB_X}$  sono compatti anche il loro prodotto lo è, e quindi anche l'immagine sotto  $+$  :  $Y \times Y \rightarrow Y$ . Dunque  $(T + S)(B_X)$  è relativamente compatto in  $Y$ .

$\lambda T$  è compatto perché  $\lambda T(B_X) = T(\lambda B_X)$ .

chiuso Sia  $T \in \overline{L_C(X, Y)}$ . Per  $S \in L_C(X, Y)$  si ha

$$TB_X = (S + (T - S))B_X \subseteq SB_X + (T - S)B_X \subseteq S(B_X) + \|T - S\|_{L(X, Y)} B_Y$$

dunque  $T(B_X)$  è totalmente limitato in quanto per ogni  $\varepsilon > 0$  scegliamo  $S \in L_C(X, Y)$  con  $\|S - T\|_{L(X, Y)} < \varepsilon/2$ . Poiché  $S(B_X)$  è totalmente limitato esiste  $F \subseteq S(B_X)$  finito tale che  $S(B_X) \subseteq F + \varepsilon B_Y$ , allora

$$T(B_X) \subseteq F + \frac{\varepsilon}{2} B_Y + \frac{\varepsilon}{2} B_Y = F + \varepsilon B_Y$$

cioè è totalmente limitato per arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

assorb. Notiamo che

$$B_X \xrightarrow{T} T(B_X) \xrightarrow{S} S(T(B_X))$$

e  $ST(B_X)$  è compatto perché ogni operatore limitato manda limitati in limitati e (relativamente) compatti in (relativamente) compatti.

□

**Definizione 10.14** (Algebra di Calkin).

L'algebra di Calkin di  $X$  spazio di Banach è l'algebra quoziente

$$c(X) = L(X)/L_C(X)$$

### 10.3 Operatori compatti di rango finito

**Definizione 10.15.**

Dati  $X, Y$  Banach definiamo

$$L_f(X, Y) = \{T \in L(X, Y) \mid \text{rk}(T) \in \mathbb{N}\}$$

*Osservazione 10.16.*

Notiamo che  $L_f(X, Y)$  è un sottospazio vettoriale di  $L_C(X, Y)$ .

*Dimostrazione.*

Se  $T \in L_f(X, Y)$  allora manda limitati di  $X$  in limitati di  $\text{Imm}(T) \cong \mathbb{R}^n$  e i limitati di  $\mathbb{R}^n$  sono anche totalmente limitati. □

*Osservazione 10.17.*

In generale

$$L_f(X, Y) \subsetneq \overline{L_f(X, Y)} \subsetneq L_C(X, Y)$$

**Esercizio 10.18.**

$L_f(X, Y) = \overline{L_f(X, Y)}$  se e solo se almeno uno tra  $X$  e  $Y$  ha dimensione finita.

**Proposizione 10.19.**

Gli operatori  $T \in L_f(X, Y)$  sono quelli della forma

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle \alpha_k, x \rangle y_k$$

con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X^*$ ,  $y_1, \dots, y_n \in Y$ .

**Fatto 10.20.**

Può accadere che

$$L(X) = \mathbb{R}id_X + \overline{L_f(X)}$$

**Proposizione 10.21.**

Se  $H$  è di Hilbert allora  $\overline{L_f(H)} = L_C(H)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $T \in L_C(H)$ . Sia  $(P_n)$  una successione di proiettori ortogonali di rango finito tale che

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} P_n(H)} \stackrel{(10.10)}{=} \overline{T(H)}$$

Per costruzione  $T_n = P_n T \in L_f(H)$ , mostriamo che  $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ . Poiché

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_n T x - T x\| = \sup_{y \in T(B_H)} \|P_n y - y\| = \left\| P_n - id_H|_{\overline{T(B_H)}} \right\|_{\infty, \overline{T(B_H)H}}$$

si ha che questa convergenza in norma significa che  $P_n|_{\overline{T(B_H)}} : \overline{T(B_H)} \rightarrow H$  converge a  $I := id_H|_{\overline{T(B_H)}}$  uniformemente su  $\overline{T(B_H)}$ .

La successione  $(P_n T|_{\overline{T(B_H)}})$  è una successione di mappe equilipschitz che converge puntualmente all'identità:

$$\|P_n T\| \leq \|P_n\| \|T\| \leq \underbrace{\|T\|}_{\text{indip. da } n},$$

quindi per Ascoli-Arzelà abbiamo convergenza uniforme sui compatti e quindi in particolare sul compatto  $\overline{T(B_H)}$ .  $\square$

**Lemma 10.22.**

Se  $T \in L(X)$  per  $X$  Banach NON è compatto allora esiste  $Y \subseteq X$  sottospazio chiuso di dimensione infinita tale che  $T : Y \rightarrow TY$  è invertibile.

**Esercizio 10.23.**

Se  $H$  è di Hilbert

1.  $L_C(H)$  è il più piccolo ideale bilatero chiuso non nullo di  $L(H)$
2. Se  $H$  è separabile e infinito dimensionale (isomorfo  $\ell_2$ ) allora  $L_C(H)$  è l'unico ideale bilatero chiuso proprio

$$(0) \subsetneq L_C(H) \subsetneq L(H).$$



*Dimostrazione.*

Mostriamo i due fatti

1. Sia  $I$  un ideale bilatero chiuso non nullo di  $L(H)$ . Allora, scegliendo opportuni elementi di  $L(H)$  con cui comporre un funzionale non nullo di  $I$ ,  $I$  contiene ogni operatore di rango 1

$$x \mapsto \langle \alpha, x \rangle y$$

e quindi (10.19) anche ogni operatore di rango finito, ma allora in quanto chiuso contiene  $L_f(H) = L_C(H)$ .

2. Poiché  $H$  è Hilbert separabile, ogni sottospazio di  $H$  chiuso di dimensione infinita è isomorfo a  $H$ . Se  $T \in I \setminus L_C(H)$  allora per il lemma (10.22) esiste  $Y$  di dimensione infinita tale che  $T|_Y$  invertibile, cioè abbiamo isometrie  $U, V$  tali che

$$H \xrightarrow{U} Y \xrightarrow{T} TY \xrightarrow{V} H$$

restituendo  $VTU \in \text{GL}(H)$  e quindi  $I = (1)$ .

□

**Esempio 10.24** (Operatore integrale con nucleo  $k(x, y)$ ).

Sia  $(M, d)$  metrico compatto e  $\mu$  misura di borel finita su  $M$ . Sia  $k \in C^0(M \times M)$  e definiamo

$$T_k : \begin{array}{ccc} C^0(M) & \longrightarrow & C^0(M) \\ u & \longmapsto & x \mapsto \int_M k(x, y) u(y) d\mu(y) \end{array}$$

Allora  $T_k$  è lineare e continua: per ogni  $u \in C^0(M)$  e per ogni  $x \in M$

$$|T_k u(x)| \leq \int_M |k(x, y)| |u(y)| d\mu(y) \leq \mu(M) \|k\|_{\infty, M \times M} \|u\|_{\infty, M}$$

quindi  $\|T_k u\|_{\infty, M} \leq \mu(M) \|k\|_{\infty, M \times M} \|u\|_{\infty, M}$  da cui

$$\|T_k\| \leq \mu(M) \|k\|_{\infty, M \times M}.$$

Mostriamo ora che  $T_k$  è compatto. Sia  $\omega$  un modulo di continuità<sup>3</sup> per  $k$ , allora per  $u \in C^0(M)$

$$|T_k u(x) - T_k u(x')| \leq \int_M |k(x, y) - k(x', y)| |u(y)| d\mu(y) \leq \omega(|x - x'|) \mu(M) \|u\|_{\infty, M}$$

dunque  $T_k(B_M(0, 1))$  è una famiglia di funzioni equicontinue (con modulo di continuità  $\mu(M)\omega$ ) ed equilimitate (da  $\mu(M) \|k\|_{\infty, M \times M}$ ), quindi è compatto per Ascoli-Arzelà.

**Esercizio 10.25.**

Sia  $(M, d)$  metrico compatto e  $\mu$  misura di borel finita su  $M$ . Sia  $k \in L^2(M \times M, \mu)$  e definiamo

$$T_k : \begin{array}{ccc} L^2(M) & \longrightarrow & L^2(M) \\ u & \longmapsto & x \mapsto \int_M k(x, y) u(y) d\mu(y) \end{array}$$

che è ben definito per Fubini.  $T_k$  è un operatore compatto.

<sup>3</sup>cioè  $|k(x, y) - k(x', y')| \leq \omega(|x - x'| + |y - y'|)$ . Esiste perché  $M$  è compatto e quindi  $k$  continua implica  $k$  uniformemente continua per Heine-Cantor.

*Dimostrazione.*

TRACCIA: Vediamo  $T_k$  come limite di operatori di rango finito  $T_{k_n}$ . Precisamente se  $\{E_j\}_{1 \leq j \leq n}$  è una partizione misurabile di  $M$  e  $k_n$  è della forma

$$k_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j} \chi_{E_i \times E_j}$$

allora  $k_n \in L_f(L^2(M))$  e per scelte opportune delle partizioni e dei coefficienti delle  $k_n$  si ha che  $k_n \rightarrow k$  in  $L^2$ . Conseguentemente  $T_{k_n} \rightarrow T_k$  in norma degli operatori.

La scelta ottimale per  $c_{i,j}$  fissato  $\{E_j\}$  è la proiezione ortogonale di  $k$  sullo spazio generato dalle  $\chi_{E_i \times E_j}$ , cioè

$$c_{i,j} = \frac{1}{\mu(E_i)\mu(E_j)} \int_{E_i \times E_j} k(x, y) d(\mu \otimes \mu).$$

Per ogni  $u \in L^2(M)$  si ha

$$\begin{aligned} \|T_k u\|_2^2 &= \int_M \left| \int_M k(x, y) u(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \\ &\leq \int_M \left( \int_M |k(x, y)|^2 d\mu(y) \right) \left( \int_M |u(y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \|k\|_{2, M \times M}^2 \|u\|_{2, M}^2 \end{aligned}$$

dunque  $T_k$  ha norma degli operatori limitata da  $\|k\|_{2, M \times M}$ , quindi anche la corrispondenza

$$\begin{array}{ccc} L^2(M \times M) & \longrightarrow & L(L^2(M)) \\ k & \longmapsto & T_k \end{array}$$

è lineare e continua. □

**Esempio 10.26** (Operatori diagonali su  $\ell_2$ ).

Sia  $u \in \ell_\infty$  e definiamo un operatore “diagonale”  $T_u$  su  $\ell_2$  ponendo per ogni  $x \in \ell_2$

$$T_u(x) = (u(i)x(i))_i$$

(cioè moltiplichiamo le entrate corrispondenti tra  $x$  e  $u$ ). Notiamo che

$$\|T_u x\|_2 \leq \|u\|_\infty \|x\|_2$$

dunque  $T_u$  ha la norma degli operatori maggiorata da  $\|u\|_\infty$ . In realtà  $\|T_u\| = \|u\|_\infty$  prendendo opportune approssimazioni.

Quindi abbiamo una inclusione isometrica

$$\ell_\infty \hookrightarrow L(\ell_2)$$

Quali  $u \in \ell_\infty$  danno luogo a  $T_u \in L_C(\ell_2)$ ?

Se  $u$  ha supporto finito allora  $T_u$  ha rango finito e quindi in particolare è un operatore compatto. Essendo  $u \rightarrow T_u$  isometrica, considerando le chiusure si ha che le  $u \in c_0$  producono  $T_u \in L_C(\ell_2)$ . Questi sono tutti perché  $\ell_2$  è uno spazio di Hilbert:

$$\{T_u \mid u \in c_0\} = L_C(\ell_2) \cap \ell_\infty.$$

**Teorema 10.27** (Schauder).

Se  $T \in L(X, Y)$  allora  $T$  è compatto se e solo se  $T^*$  è compatto.

*Dimostrazione.*

Diamo le due implicazioni

$\Rightarrow$  Sia  $T \in L_C(X, Y)$  e sia  $(x_n^*) \subseteq T^*(B_{Y^*})$ . Vogliamo mostrare che questa successione ha estratte convergenti. Si ha che  $x_n^* = T^*y_n^* = y_n^* \circ T$  per qualche successione  $(y_n^*) \subseteq B_{Y^*}$ . Come funzioni  $Y \rightarrow \mathbb{K}$  si ha che le  $y_n^*$  sono 1-Lipschitz quindi per Ascoli-Arzelà hanno una sottosuccessione uniformemente convergente sul compatto  $\overline{T(B_X)}$  (e quindi di Cauchy), cioè  $x_n^* = y_n^* \circ T$  è di Cauchy in  $X^*$  e dunque converge.

$\Leftarrow$  Sia  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  compatto. Allora per la prima parte  $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$  è compatto e quindi anche  $T = T^{**}|_X$  lo è ( $X \hookrightarrow X^{**}$  è una immersione isometrica).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \end{array}$$

□

# Capitolo 11

## Teoria spettrale per operatori limitati su Banach

### 11.1 Spettro e operatori risolvibili

**Definizione 11.1** (Spettro di un operatore).

Per  $X$  spazio di Banach e  $A \in L(X)$ , lo **spettro** di  $A$  è

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A \notin \text{GL}(X)\}$$

L'insieme  $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  è detto **insieme risolvente**.

*Osservazione 11.2* (Spettro è chiuso).

Notiamo che  $\lambda \mapsto \lambda - A$  è continua e  $\text{GL}(X)$  è un aperto di  $L(X)$ , quindi  $\sigma(A) = \rho(A)^c = (\lambda \mapsto \lambda - A)^{-1}(\text{GL}(X))^c$  è chiuso.

*Osservazione 11.3.*

Nel caso di  $X$  Banach su  $\mathbb{R}$  si considera la sua complessificazione  $X_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} X = X \times X$  dove il prodotto è inteso munito della struttura complessa indotta da

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -id_X \\ id_X & 0 \end{pmatrix}$$

cioè  $(a + bi)\underline{x} = a\underline{x} + bJ\underline{x}$  per ogni  $\underline{x} \in X \times X$ .

*Osservazione 11.4.*

Anche se  $\lambda \in \sigma(A)$  non necessariamente  $\lambda - A$  non è iniettiva.

**Definizione 11.5** (Spettro puntuale).

Definiamo lo **spettro puntuale** come

$$\sigma_{pt}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda - A) \neq 0\}.$$

Gli elementi dello spettro puntuale sono detti **autovalori**.

**Proposizione 11.6.**

Sia  $A \in L(X)$ , allora

- $\sigma(A)$  è contenuto in  $\overline{B}(0, \|A\|)$  e quindi compatto<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>abbiamo già visto che è chiuso

- *L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \rho(A) & \longrightarrow & L(X) \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda - A)^{-1} \end{array}$$

è analitica e infinitesima per  $\lambda \rightarrow \infty$ . Più precisamente: Per ogni  $\lambda$  tale che  $|\lambda| \geq \|A\|$  si ha

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

e per ogni  $\lambda_0 \in \rho(A)$  e ogni  $\lambda \in B(\lambda_0, \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|)$  si ha

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n ((\lambda_0 - A)^{-1})^{n+1}.$$

*Dimostrazione.*

Se mostriamo il secondo punto abbiamo il primo in quanto se per ogni  $|\lambda| \geq \|A\|$  abbiamo questo sviluppo, in particolare  $(\lambda - A)^{-1}$  è ben definita per  $|\lambda| \geq \|A\|$ , quindi l'inversa può venire a mancare solo per  $\lambda$  contenuti in  $\overline{B}(0, \|A\|)$ .

Se vale il primo sviluppo in serie allora

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^{-n-1} A^n\| = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$$

e quindi la mappa in esame è infinitesima per  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Tutto segue se mostriamo che per un operatore  $H$  di norma  $\|H\| < 1$  in uno spazio di Banach vale lo sviluppo in serie di  $(1 - H)^{-1}$ , infatti la seconda espansione in serie è un caso particolare dello sviluppo

$$(K - H)^{-1} = K^{-1} + K^{-1} H K^{-1} + K^{-1} H K^{-1} H K^{-1} + \dots$$

per  $K \in \text{GL}(X)$  e  $\|H\| < \|K^{-1}\|^{-1}$ , che segue dal caso  $K = 1$  notando

$$(K - H)^{-1} = K^{-1} (I - H K^{-1})^{-1}, \quad \|H K^{-1}\| < 1.$$

Notiamo che se  $\|H\| < 1$  allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} H^n$  converge assolutamente ad un operatore lineare continuo e per questioni algebriche questa espansione è l'inversa di  $(1 - H)$ .  $\square$

**Definizione 11.7** (Operatore risolvete).

Se  $\lambda \in \rho(A)$ , l'**operatore risolvete relativo a  $\lambda$**  è  $(\lambda - A)^{-1}$ .

*Osservazione 11.8.*

Vale l'**identità risolvete**

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

*Dimostrazione.*

Basta calcolare:

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} + (\mu - A)^{-1} &= ((\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1} + 1)(\mu - A)^{-1} = \\ &= (\lambda - A)^{-1}(\mu - \lambda + (\lambda - A))(\mu - A)^{-1} = \\ &= (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)(\mu - A)^{-1} = \\ &= (\lambda - A)^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 11.9.**

Se  $A \in L(X)$  e  $X \neq 0$  allora  $\sigma(A)$  è non vuoto.

*Dimostrazione.*

Segue dal teorema di Liouville applicato a

$$\begin{array}{ccc} \rho(A) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \langle x^*, (\lambda - A)^{-1}x \rangle \end{array}$$

con  $x \in X$  e  $x^* \in X^*$  variabili. Infatti queste funzioni sono olomorfe su  $\rho(A)$  e infinitesime per  $\lambda \rightarrow \infty$  (11.6), quindi se avessimo  $\sigma(A) = \emptyset$  allora le mappe sarebbero olomorfe definite su tutto  $\mathbb{C}$  e infinitesime all'infinito (in particolare limitate), quindi costanti (al valore 0 in quanto infinitesime) per ogni  $x$  e  $x^*$ , quindi  $(\lambda - A)^{-1} = 0$  come mappa, che è assurdo perché per definizione di  $\rho(A)$  è invertibile ma  $X \neq 0$ .  $\square$

**11.1.1 Raggio spettrale e Cauchy-Hadamard-Gelfand**

**Definizione 11.10** (Raggio spettrale).

Sia  $A \in L(X)$ . Il suo **raggio spettrale** è

$$r_A = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \in [0, \|A\|]$$

Notiamo che questo massimo esiste perché  $\sigma(A)$  è compatto (11.6).

**Lemma 11.11.**

Sia  $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$  una successione subadditiva<sup>2</sup> allora esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

*Dimostrazione.*

Dato  $d \geq 1$ , ogni  $n \in \mathbb{N}$  si scrive  $n = p_n d + k_n$  con  $0 \leq k_n < d$  e  $p_n = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ . Allora per ogni  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \inf_{m \geq 1} \frac{a_m}{m} &\leq \frac{a_n}{n} = \frac{a_{p_n d + k_n}}{n} \leq \frac{1}{n} (p_n a_d + a_{k_n}) \leq \\ &\leq \frac{d p_n}{n} \frac{a_d}{d} + \frac{1}{n} \max_{1 \leq k < d} a_k = \\ &= (1 + o(1)) \frac{a_d}{d} + o(1) \end{aligned}$$

quindi, prendendo il  $\limsup_n$  e poi  $\inf_{d \geq 1}$

$$\inf_{m \geq 1} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_n \frac{a_n}{n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{n} \leq \inf_{d \geq 1} \frac{a_d}{d}$$

dunque esiste il limite ed è pari all'estremo inferiore.  $\square$

**Proposizione 11.12** (Formula di Cauchy-Hadamard-Gelfand).

Vale la seguente identità

$$r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{1/n}.$$

---

<sup>2</sup> $a_{n+m} \leq a_n + a_m$

*Dimostrazione.*

Applichiamo il lemma (11.11) alla successione  $a_n = \log \|A^n\|$ , che è subadditiva perché  $\|A^{n+m}\| \leq \|A^n\| \|A^m\|$ . Per continuità dell'esponenziale questo mostra che il limite nel testo esiste ed è pari all'estremo inferiore. Mostriamo che  $r_A = \lim_n \|A^n\|^{1/n}$ :

$\boxed{\leq}$  Se  $\lambda \in \sigma(A)$ , cioè  $\lambda - A$  non invertibile, allora anche  $\lambda^n - A^n$  non è invertibile:

$$\lambda^n - A^n = (\lambda - A)B = B(\lambda - A), \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i A^{n-1-i}$$

quindi  $\lambda - A$  non invertibile implica per il teorema della mappa aperta (5.10) che  $\lambda - A$  non è bigettiva, quindi non è iniettiva o non è surgettiva, e quindi neanche  $\lambda^n - A^n$  lo è.

Dunque  $\lambda^n \in \sigma(A^n)$  e quindi  $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$  da cui  $|\lambda| \leq \|A^n\|^{1/n}$ . Questo mostra la disuguaglianza  $r_A \leq \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{1/n} = \lim_n \|A^n\|^{1/n}$ .

$\boxed{\geq}$  Per ogni  $z \in B_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{r_A})$  è ben definito<sup>3</sup>  $z(1 - zA)^{-1}$ . La mappa

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{r_A}) &\longrightarrow L(X) \\ z &\longmapsto z(1 - zA)^{-1} \end{aligned}$$

è “analitica”: ha uno sviluppo locale in 0 dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} A^n$$

che però si estende a tutto il disco.

Siano  $x \in X$  e  $x^* \in X^*$  e consideriamo la funzione olomorfa

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{r_A}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \langle x^*, z(1 - zA)^{-1}x \rangle \end{aligned}$$

la quale ha sviluppo locale in 0 dato da

$$\left\langle x^*, \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} A^n x \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \langle x^*, A^n x \rangle$$

che converge assolutamente per  $|z| = \frac{1}{r} < \frac{1}{r_A} \iff r > r_A$  grazie alla convergenza di  $z(1 - zA)^{-1}$ . In particolare i termini della serie sono limitati

$$\left| \left\langle x^*, \left( \frac{A}{r} \right)^{n+1} x \right\rangle \right| \leq C_{x, x^*}.$$

Per Banach-Steinhaus (4.27) si ha che  $\left( \frac{A}{r} \right)^{n+1}$  è limitato: per  $x$  fissato la disuguaglianza dice che  $\left\{ \left( \frac{A}{r} \right)^{n+1} x \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  è  $w$ -limitata in  $X$ , quindi limitata in norma (Banach-Steinhaus) e applicando di nuovo Banach-Steinhaus si ha che  $\left\{ \left( \frac{A}{r} \right)^{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  sono operatori puntualmente limitati, quindi sono limitati in norma. Scriviamo

$$\left\| \left( \frac{A}{r} \right)^{n+1} \right\| \leq C'$$

<sup>3</sup>se  $z = 0$  ok, se  $z \neq 0$  allora l'espressione vale  $(\frac{1}{z} - A)^{-1}$  che è ben definita perché abbiamo supposto  $z < 1/r_A \iff 1/z > r_A \implies 1/z \in \rho(A)$ .

cioè  $\|A^n\|^{1/n} \leq C'^{1/n} r$  da cui

$$\lim \|A^n\|^{1/n} \leq r \lim C'^{1/n} = r$$

e questo per ogni  $r > r_A$ , quindi anche per  $r_A$  stesso passando all'estremo inferiore.  $\square$

*Osservazione 11.13.*

La stessa formula, con la stessa dimostrazione, funziona anche per il raggio spettrale di algebre di Banach.

**Esercizio 11.14.**

Calcolare il raggio spettrale dell'operatore di Volterra

$$V : \begin{array}{ccc} C^0([a, b]) & \longrightarrow & C^0([a, b]) \\ f & \longmapsto & \int_a^x f(t) dt \end{array}$$

con la formula del raggio spettrale e provando che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda - V \in \text{GL}(V)$ .

## 11.2 Teoria spettrale su spazi di Hilbert

**Definizione 11.15** (Operatore simmetrico).

Sia  $A$  un operatore limitato su  $H$  spazio di Hilbert.  $A$  è **simmetrico** (scritto  $A \in L^{\text{sim}}(H)$ ) se per ogni  $x, y \in H$  si ha

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

**Proposizione 11.16.**

Sia  $A \in L^{\text{sim}}(H)$ , allora

1.  $\ker A = (\text{Imm } A)^\perp$  e  $\overline{\text{Imm } A} = (\ker A)^\perp$
2. Se  $H_0 \subseteq H$  è un sottospazio  $A$ -invariante allora anche  $H_0^\perp$  e  $\overline{H_0}$  lo sono.

*Dimostrazione.*

Mostriamo le due affermazioni

1. Segue dalla catena di equivalenze

$$\begin{aligned} x &\in \ker A \\ Ax &= 0 \\ 0 &= \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall y \in H \\ x &\in (\text{Imm } A)^\perp \end{aligned}$$

l'altra affermazione segue notando che  $\overline{V} = (V^\perp)^\perp$ .

2. Se  $x \in H_0^\perp$  allora per ogni  $y \in H_0$  si ha  $0 = \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ , cioè  $Ax \in H_0^\perp$ . Segue l'invarianza della chiusura prendendo l'ortogonale di nuovo.  $\square$

**Definizione 11.17** (Operatori simmetrici positivi).

Se  $A \in L^{\text{sim}}(H)$  esso si dice **positivo** se  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  per ogni  $x$ .



*Osservazione 11.18.*

La positività induce una relazione d'ordine parziale su  $L^{sim}(H)$ :

$$A \geq B \iff A - B \text{ positivo.}$$

**Fatto 11.19.**

Se  $A$  è simmetrico positivo allora  $I + A \in GL(H)$

*Dimostrazione.*

$I + A$  è fortemente iniettiva in quanto per ogni  $x \in H$

$$\|(I + A)x\|^2 = (x + Ax)(x + Ax) = \|x\|^2 + 2\langle Ax, x \rangle + \|Ax\|^2 \geq \|x\|^2$$

quindi in particolare è iniettivo con immagine chiusa.

Per il punto 1. di (11.16) un operatore simmetrico e iniettivo ha immagine densa, dunque  $I + A$  è anche surgettivo e quindi invertibile.  $\square$

**Proposizione 11.20.**

Se  $A \in L^{sim}(H)$  allora  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $b \neq 0$  si ha che  $(a + ib - A)$  è invertibile perché fattore di

$$(a + ib - A)(a - ib - A) = (a - A)^2 + b^2 = b^2 \left( I + \left( \frac{a - A}{b} \right)^2 \right)$$

e questo è invertibile per (11.19).  $\square$

**Proposizione 11.21.**

Per  $A \in L^{sim}(H)$  si ha  $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} |Ax \cdot x| = \|q_A\|_{\infty, B}$

*Dimostrazione.*

Siano  $x, y \in H$  e consideriamo l'identità di polarizzazione:

$$Ax \cdot y = \frac{1}{4} (q_A(x + y) - q_A(x - y)).$$

Segue che

$$\begin{aligned} Ax \cdot y &\leq \frac{1}{4} \left( \|q_A\|_{\infty} \|x + y\|^2 + \|q_A\|_{\infty} \|x - y\|^2 \right) = \\ &= \frac{\|q_A\|_{\infty}}{4} \left( 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \right) \stackrel{\substack{\|x\| < 1 \\ \|y\| < 1}}{\leq} \\ &\leq \|q_A\|_{\infty} \end{aligned}$$

quindi vale  $\|A\| \leq \|q_A\|_{\infty}$ . L'altra disuguaglianza segue dal fatto che per  $\|x\| < 1$

$$|Ax \cdot x| \leq \sup_{\|y\| < 1} |Ax \cdot y| = \|Ax\| \leq \|A\|.$$

$\square$

**Notazione 11.22.**

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} q_A(x), \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} q_A(x).$$

**Proposizione 11.23.**

$\sigma(A) \subseteq [m_A, M_A]$ . Inoltre  $m_A = \min \sigma(A)$  e  $M_A = \max \sigma(A)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $t < m_A$ , allora, poiché  $q_A(x) \geq m_A \|x\|^2$ , si ha che come operatore simmetrico

$$\frac{A - m_A}{m_A - t} \geq 0$$

quindi  $-1 \notin \sigma(\frac{A - m_A}{m_A - t})$  in quanto  $I + \frac{A - m_A}{m_A - t}$  è invertibile (11.19). Quindi

$$t - m_A \notin \sigma(A - m_A) = \sigma(A) - m_A \iff t \notin \sigma(A).$$

Un conto analogo mostra che se  $t > M_A$  allora  $t \notin \sigma(A)$ , quindi  $\sigma(A) \subseteq [m_A, M_A]$ .

Mostriamo ora che  $M_A = \max \sigma(A)$  e  $m_A = \min \sigma(A)$ : si ha che

$$\|A^2\| \stackrel{(11.21)}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} q_{A^2}(x) = \sup_{\|x\| \leq 1} (Ax \cdot Ax) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.$$

Analogamente

$$\|A\| = \|A^2\|^{1/2} = \|A^4\|^{1/4} = \dots = \|A^{2^n}\|^{1/2^n},$$

dunque per la formula di Cauchy-Hadamard-Gelfand (11.12) si ha  $\|A\| = r_A$ . Poiché  $\|A\| = \|q_A\|_\infty$  (11.21) si ha che  $r_A = \|A\|$  vale  $M_A$  oppure  $-m_A$  perché questi sono maggiorati da  $\|q_A\|_\infty$  per definizione.

Se  $A \geq 0$  allora  $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$  e quindi  $0 \leq m_A \leq M_A = r_A$ , cioè  $M_A = \max \sigma(A)$ . In generale per  $t > \|A\|$  si ha  $A + t \geq 0$  e quindi

$$M_A + t = M_{A+t} = \max \sigma(A + t) = \sigma(A) + t$$

cioè di nuovo  $M_A = \sigma(A)$  come voluto. Analogamente si mostra  $\min \sigma(A) = m_A$ .  $\square$

*Osservazione 11.24.*

Un'altra dimostrazione usa la caratterizzazione variazionale di  $\sigma(A)$  e il principio variazionale di Ekeland.

**11.2.1 Autovalori di operatori simmetrici**

*Osservazione 11.25.*

Autovettori di autovalori differenti sono ortogonali, cioè se  $\lambda \neq \mu$  autovalori per  $u$  e  $v$  autovettori allora

$$\lambda(u \cdot v) = Au \cdot v = u \cdot Av = \mu u \cdot v.$$

*Osservazione 11.26.*

La molteplicità geometrica di  $\lambda$  autovalore di  $A$  (cioè  $\dim \ker(\lambda - A)$ ) è uguale alla molteplicità algebrica (cioè  $\sup_{n \geq 0} \dim \ker(\lambda - A)^n$ ).

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità  $\lambda = 0$ . Basta notare che  $\ker A = \ker A^2$ :

$$A^2 x = 0 \implies \|Ax\|^2 = A^2 x \cdot x = 0 \implies Ax = 0.$$

$\square$

### Caratterizzazione variazionale degli autovalori di operatori simmetrici

Ricordiamo che se  $f : \Omega \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile allora il gradiente di  $f$  in  $x_0 \in \Omega$  è l'elemento  $\nabla f(x_0)$  di  $H$  che rappresenta via prodotto scalare il differenziale  $df(x_0) \in H^*$ , cioè

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(h)$$

Inoltre  $x_0$  è un punto critico di  $f$  se  $\nabla f(x_0) = 0$ . La  $f(x_0)$  **corrispondente** è detto **valore critico**.

Ricordiamo che se  $u, v : \Omega \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili in  $x_0$  e  $v(x_0) \neq 0$  il quoziente  $u/v$  è differenziabile in  $x_0$  e abbiamo

$$\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}.$$

**Proposizione 11.27** (Caratterizzazione variazionale).

Una coppia  $(x, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$  è una coppia autovettore-autovalore di  $A$  se è una coppia punto critico-valore critico della funzione

$$f_A : \begin{array}{ccc} H \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{Ax \cdot x}{x \cdot x} \end{array}$$

detta **quoziente di Rayleigh**.

*Dimostrazione.*

Calcolando troviamo

$$\nabla(q_A(x)) = 2Ax, \quad \nabla q_I(x) = 2x.$$

Allora

$$\nabla f_A(x) = 2 \frac{\|x\|^2 Ax - (Ax \cdot x)x}{\|x\|^4} = \frac{2}{\|x\|^2} (Ax - f_A(x)x)$$

dunque  $\nabla f_A(x) = 0$  se e solo se  $x$  è un autovettore di  $A$  corrispondente all'autovalore  $f_A(x)$ .  $\square$

### 11.2.2 Spettro di operatori simmetrici compatti

**Proposizione 11.28.**

Sia  $A \in L_C^{sim}(H)$ , allora se  $M_A > 0$  si ha che  $M_A$  è un autovalore di  $A$ .

*Dimostrazione.*

Per compattezza,  $q_A$  ha massimo sulla palla  $\overline{B}(0, 1)$ , infatti se  $(x_k) \subseteq \overline{B}(0, 1)$  è una successione massimizzante per  $q_A$  su  $\overline{B}$  allora estraendo una sottosuccessione si può assumere<sup>4</sup>  $x_k \xrightarrow{w} x$  per  $x \in \overline{B}(0, 1)$ , ma essendo  $A$  compatto si ha  $Ax_k \rightarrow Ax$  in norma e quindi<sup>5</sup>  $Ax_k \cdot x_k \rightarrow Ax \cdot x$ .

Siccome  $M_A \neq 0$  si ha che  $x \neq 0$  e quindi  $\|x\| = 1$  (in quanto  $q_A(x/\|x\|) \geq q_A(x)$  se  $x \in \overline{B}(0, 1)$ ). Allora  $x$  è anche il massimo di  $f_A$  su  $H \setminus \{0\}$  perché  $f_A$  è 0-omogenea, in particolare è un punto critico e quindi un autovettore per (11.27).  $\square$

<sup>4</sup>siamo in uno spazio di Hilbert e quindi uno spazio riflessivo, dunque per Kakutani (7.4) la palla unitaria chiusa è  $w$ -compatta, quindi per Eberlein-Šmulian (7.32) anche  $w$ -sequenzialmente compatta.

<sup>5</sup>stiamo usando il fatto che  $y_k \xrightarrow{s} y$  e  $x_k \xrightarrow{w} x$  implica  $y_k \cdot x_k = (y \cdot x_k) + (y_k - y) \cdot x_k \rightarrow y \cdot x + o(1)$  perché  $y x_k \rightarrow y x$  e  $|(y - y_k) \cdot x_k| \leq \|y - y_k\| \|x_k\| = O(\|y - y_k\|)$  in quanto convergenza debole implica limitato e quindi  $\|x_k\|$  è limitato da una costante fissata per ogni  $k$ .

*Osservazione 11.29.*

Analogamente  $m_A$  è il minimo autovalore se  $A$  simmetrico compatto.

*Osservazione 11.30.*

In particolare  $\|A\|$  oppure  $-\|A\|$  è un autovalore.

**Corollario 11.31.**

Se  $H_0 \subseteq H$  è un sottospazio non banale chiuso  $A$ -invariante allora  $A$  ha un autovettore in  $H_0$ .

**Corollario 11.32.**

Un operatore  $A \in L_C^{sim}(H)$  ammette una base ortonormale di autovettori.

*Dimostrazione.*

Si considera un sistema  $\{u_i\}_{i \in I}$  ortonormale di autovettori di  $A$  che sia massimale per inclusione (esiste per lemma di Zorn). Esso deve essere una base Hilbertiana, cioè

$$\overline{\text{Span}(\{u_i\}_{i \in I})} = H.$$

Se non fosse così allora  $H_0 := \overline{\text{Span}(\{u_i\}_{i \in I})}^\perp \neq 0$  è un sottospazio chiuso  $A$ -invariante di  $H$ , quindi esisterebbe  $u \in H_0$  autovettore che per costruzione è ortogonale al sistema considerato, negando la massimalità.  $\square$

**Corollario 11.33** (Operatore simmetrico compatto ammette una forma diagonale).

Un operatore  $A \in L_C^{sim}(H)$  è unitariamente coniugato ad un operatore di moltiplicazione per elementi di  $c_0(I)$  su uno spazio  $\ell_2(I)$  dove  $I$  è un insieme che indicizza una base di autovettori di  $A$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \ell_2(I) & \xrightarrow{u} & H \\
 \downarrow \hat{A} & \begin{array}{c} \ni \\ (x_i) \mapsto \sum_{i \in I} x_i u_i \\ \downarrow \\ (\lambda_i x_i) \mapsto \sum_{i \in I} x_i \lambda_i u_i \\ \ni \end{array} & \downarrow A \\
 \ell_2(I) & \xrightarrow{u} & H
 \end{array}$$

## Indicizzazione degli autovalori

*Osservazione 11.34.*

Se gli autovalori di  $A \in L_C^{sim}(H)$  hanno un punto di accumulazione come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  allora questo punto è 0.

*Dimostrazione.*

Supponiamo ci siano infiniti autovalori e che per assurdo tendano ad un elemento diverso da 0.

Possiamo definire una successione autovettori ortogonali. Questa ha un limite debole per Kakutani (7.4) e Eberlein-Šmulian (7.32). Poiché  $A$  è compatto avremmo una successione di vettori ortogonali (gli scalati dei vettori originali) che convergono in norma, assurdo se il limite degli autovalori non è 0.  $\square$

Grazie a questa osservazione possiamo indicizzare gli autovalori di  $A \in L_C^{sim}(H)$  in modo monotono:

- Se ci sono infiniti autovalori positivi essi sono una successione che converge a 0, che possiamo indicizzare in modo decrescente verso 0. Se essi sono in numero finito ci fermiamo (o volendo da quell'indice in poi ripetiamo 0).
- Procediamo in modo simile con gli autovalori negativi.
- Se un autovalore  $\lambda$  ha molteplicità  $r$  allora nella successione lo ripetiamo  $r$  volte nelle posizioni opportune.

$$\lambda_{-1} < \lambda_{-2} < \dots < 0 < \dots < \lambda_2 < \lambda_1$$

Sia  $I$  l'insieme di indici così creato.

**Teorema 11.35** (Curant-Fischer-Weil / Minimax).

Sia  $H$  spazio di Hilbert separabile. Indicizzando gli autovalori di  $A \in L_C^{sim}(H)$  come sopra si ha che per ogni  $n \in I$  tale che  $n > 0$  allora

$$\begin{aligned}\lambda_n(A) &= \inf_{\substack{E \subseteq H \\ \text{codim } E < n}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} q_A(x) = \sup_{\substack{F \subseteq H \\ \text{dim } F \geq n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} q_A(x) \\ \lambda_{-n}(A) &= \sup_{\substack{E \subseteq H \\ \text{codim } E < n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} q_A(x) = \inf_{\substack{F \subseteq H \\ \text{dim } F \geq n}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} q_A(x)\end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Evidentemente basta mostrare il caso di  $n > 0$ .

Sia  $E_n = \text{Span}(e_1, \dots, e_n)$  dove  $e_i$  è un fissato autovettore di  $\lambda_i$  e gli  $e_i$  sono ortogonali tra loro. Notiamo che (poiché  $H$  separabile)

$$E_n^\perp = \overline{\text{Span}(e_i \mid i \in I \setminus \{1, \dots, n\})}$$

e

$$\begin{aligned}A|_{E_n} &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : E_n \rightarrow E_n \\ A|_{E_n^\perp} &= \text{diag}(\lambda_i \mid i \in I \setminus \{1, \dots, n\}) : E_n^\perp \rightarrow E_n^\perp.\end{aligned}$$

Notiamo che  $\lambda_n$  è il minimo autovalore di  $A|_{E_n}$  e anche il massimo autovalore di  $E_{n-1}^\perp$ . Dunque per la caratterizzazione variazionale (11.27) si ha che

$$\lambda_n = \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E_n}} q_A(x) = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E_n^\perp}} q_A(x)$$

Siano ora  $E \subseteq H$  sottospazio di codimensione  $\text{codim } E < n$  e  $F \subseteq H$  un sottospazio di dimensione  $\text{dim } F \geq n$ . Per questione di dimensione

$$E_n \cap E \neq (0), \quad E_n^\perp \cap F \neq (0)$$

quindi esistono elementi  $x_0 \in E_n \cap E$  e  $y_0 \in E_{n-1}^\perp \cap F$  non nulli e quindi senza perdita di generalità di norma 1.

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} q_A(x) \geq q_A(x_0) \geq \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E_n}} q_A(x) = \lambda_n = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E_n^\perp}} q_A(x) \geq q_A(y_0) \geq \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} q_A(x)$$

in particolare, poiché  $\lambda_n$  è raggiunto da  $E = E_n$  e  $F = E_n^\perp$  abbiamo mostrato che

$$\inf_{\substack{E \subseteq H \\ \text{codim } E < n}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} q_A(x) = \lambda_n = \sup_{\substack{F \subseteq H \\ \text{dim } F \geq n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} q_A(x).$$

□

**Corollario 11.36** (Principio autovalori intervallati).

Sia  $A \in L_C^{sim}(H)$  e sia  $H_0 \subseteq H$  un iperpiano chiuso con incusione  $j_0 : H_0 \rightarrow H$  e proiettore ortogonale<sup>6</sup>  $P_0 : H \rightarrow H_0$ . Sia

$$A_0 = P_0 A j_0 : H_0 \rightarrow H_0.$$

Notiamo che<sup>7</sup>  $A_0 \in L_C^{sim}(H_0)$ . Notiamo che  $q_{A_0} = q_A|_{H_0}$ .

Allora per ogni  $n > 0$  si ha

$$\lambda_{n+1}(A) \leq \lambda_n(A_0) \leq \lambda_n(A)$$

e analogamente

$$\lambda_{-n}(A) \leq \lambda_{-n}(A_0) \leq \lambda_{-n-1}(A).$$

*Dimostrazione.*

Usando il principio di minimax (11.35) si ha

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(A) &= \inf_{\substack{E \subseteq H \\ \text{codim } E < n+1}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} q_A(x) \stackrel{\text{codim}_{H_0} E < n \implies \text{codim}_H E < n+1}{\leq} \\ &\leq \inf_{\substack{E \subseteq H_0 \\ \text{codim } E < n}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E}} q_A(x) = \lambda_n(A_0) = \\ &= \sup_{\substack{F \subseteq H_0 \\ \dim F \geq n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} q_A(x) \leq \\ &\leq \sup_{\substack{F \subseteq H \\ \dim F \geq n}} \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in F}} q_A(x) = \lambda_n(A). \end{aligned}$$

□

**Esercizio 11.37.**

Scrivere una stima di dipendenza Lipschitz e di dipendenza monotona di  $\lambda_n(A)$  in funzione di  $A \in L_C^{sim}(H)$  ( $I = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ).

## 11.3 Calcolo funzionale $C^0$ per operatori limitati autoaggiunti

Sia  $A = A^* \in L(H)$ ,  $H$  di Hilbert e sia

$$\Sigma = \sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|].$$

Dato  $p \in \mathbb{R}[x]$ , scrivendo  $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  è definito

$$p(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k.$$

Vogliamo estendere questa costruzione definendo  $f(A)$  per  $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$  o  $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{C})$ .

<sup>6</sup> $P_0 = j_0^*$  perché siamo su uno spazio di Hilbert

<sup>7</sup>Eredita compattezza di  $A$  e  $A_0^* = (P_0 A j_0)^* = j_0^* A^* P_0^* = P_0 A j_0$ .

**Teorema 11.38** (della mappa spettrale).

Sia  $p \in \mathbb{C}[z]$  e  $T \in L(X)$  per  $X$  Banach. Allora

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

*Dimostrazione.*

Sia  $\lambda \in \sigma(T)$  e scriviamo  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  con  $a_n \neq 0$ . Fattorizzando  $p(z) - \lambda$  si ha

$$p(z) - \lambda = a_n \prod_{j=1}^n (z - \mu_j)$$

dunque  $p(\mu) = \lambda$  se e solo se  $\mu \in \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ , cioè

$$p^{-1}(\lambda) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}.$$

Dunque

$$p(T) - \lambda = a_n \prod_{j=1}^n (T - \mu_j)$$

e quindi  $p(T) - \lambda$  è invertibile se e solo se lo sono tutti i fattori dato che commutano, cioè

$$\lambda \in \sigma(p(T)) \iff \exists j \text{ t.c. } \mu_j \in \sigma(T) \iff p^{-1}(\lambda) \cap \sigma(T) \neq \emptyset \iff \lambda \in p(\sigma(T))$$

□

*Osservazione 11.39.*

La stessa dimostrazione funziona per  $T$  elemento di una algebra di Banach.

**Proposizione 11.40** (Mappa spettrale su autovalori).

Se  $T \in L(X)$  e  $p \in \mathbb{C}[x]$  con  $p = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  allora

$$\sigma_{pt}(p(T)) = p(\sigma_{pt}(T)).$$

*Dimostrazione.*

Diamo le due inclusioni:

⊇ Sia  $\lambda$  autovalore di  $T$ , cioè esiste  $x \neq 0$  tale che  $\lambda x = Tx$ . Allora

$$p(T)x = \sum_k c_k T^k x = \sum_k c_k \lambda^k x = p(\lambda)x$$

cioè  $p(\lambda)$  è autovalore di  $p(T)$ .

⊆ Se  $\lambda$  è un autovalore di  $p(T)$  e scriviamo

$$p(z) - \lambda = c_n \prod_{i=1}^n (z - \zeta_i)$$

allora  $p^{-1}(\lambda) = \{\zeta_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  per costruzione e

$$p(T) - \lambda = c_n \prod_{i=1}^n (T - \zeta_i).$$

Se tutti i fattori  $T - \zeta_i$  sono iniettivi, lo è anche  $p(T) - \lambda$ , quindi se  $\lambda$  è autovalore di  $p(T)$  allora almeno un fattore  $T - \zeta_i$  non è iniettivo e quindi  $\zeta_i$  è autovalore di  $T$ , cioè

$$\lambda = p(\zeta_i) \in p(\sigma_{pt}(T)).$$

□

## Hilbert reali

### Proposizione 11.41.

Se  $A = A^*$  in  $L(H)$  allora la mappa

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Pi_\Sigma = \{\text{funzioni polinomiali } \Sigma \rightarrow \mathbb{R}\} & \longrightarrow & L(H) \\ p & \longmapsto & p(A) \end{array}$$

è un omomorfismo di algebre isometrico.

*Dimostrazione.*

Per ogni  $p \in \mathbb{R}[x]$  si ha che

$$\|p(A)\|_{L(H)} \stackrel{p(A)=p(A)^*}{=} r_{p(A)} = \sup_{\lambda \in \sigma(p(A))} |\lambda| \stackrel{(11.38)}{=} \sup_{\lambda \in \Sigma} |p(\lambda)| = \|p\|_{\infty, \Sigma}.$$

In particolare  $p(A)$  dipende solo dalla funzione  $p|_\Sigma$ . Che  $\Phi$  sia un omomorfismo è ovvio dalla definizione di  $p(A)$ .  $\square$

*Osservazione 11.42.*

Se  $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$  e  $f \geq 0$  su  $\Sigma$  allora per Stone-Weierstrass esiste una successione di polinomi  $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty, \Sigma}} f$  e possiamo prendere  $p_n \geq 0$  su  $\Sigma$  (a meno di sostituire  $p_n$  con  $p_n + \|f - p_n\|_\infty$ ). In particolare

$$\overline{\Pi_\Sigma}^{\|\cdot\|_{\infty, \Sigma}} = C^0(\Sigma, \mathbb{R}).$$

*Osservazione 11.43.*

Essendo  $\Phi$  isometrico esso si estende alle chiusure, quindi troviamo

$$\overline{\Pi_\Sigma}^{\|\cdot\|_{\infty, \Sigma}} = C^0(\Sigma, \mathbb{R}) \xrightarrow{\Phi} \overline{\Phi(\Pi_\Sigma)}^{\|\cdot\|_{L(H)}} = \overline{\mathbb{R}[A]} \subseteq L(H)$$

dove  $\overline{\mathbb{R}[A]}$  è l'algebra chiusa generata da  $A$ .

*Osservazione 11.44.*

Per continuità, la  $\Phi$  estesa è ancora un omomorfismo, inoltre se  $p \geq 0$  su  $\Sigma$  allora  $\Phi(p) = p(A)$  è un operatore simmetrico  $\geq 0$ , infatti

$$\sigma(p(A)) \stackrel{(11.38)}{=} p(\Sigma) \subseteq [0, \infty) \iff p(A) \geq 0.$$

### Notazione 11.45.

Per  $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$  scriviamo  $\Phi(f) = f(A)$  in analogia con il caso polinomiale.

### Esercizio 11.46.

Se  $A \in L^{sim}(H)$  e  $A \geq 0$  allora  $A$  ammette una radice quadrata, cioè esiste  $B \in L^{sim}(H)$  con  $B \geq 0$  e  $B^2 = A$ . Più in generale, per ogni  $n$ ,  $A$  ammette una radice  $n$ -esima che sia un operatore simmetrico positivo.

### Esercizio 11.47.

Dato  $A \in L^{sim}(H)$  con  $A \geq 0$  esiste un unico  $B$  simmetrico e positivo tale che  $B^2 = A$ . Similmente per le radici  $n$ -esime.

Hint: usare la radice costruita col calcolo funzionale.



*Solution.*

Sia  $\sqrt{A}$  data dal calcolo funzionale e sia  $B$  simmetrica positiva tale che  $B^2 = A$ . Notiamo che  $B$  commuta con  $A$ :  $BA = B^3 = AB$ , quindi  $B$  commuta anche con  $\sqrt{A}$  per questioni di calcolo funzionale.

$$0 = B^2 - (\sqrt{A})^2 = (B + \sqrt{A})(B - \sqrt{A})$$

Notiamo che  $B + \sqrt{A}$  è simmetrico e positivo. Procediamo per casi:

- Se  $A$  è iniettivo allora  $B + \sqrt{A} \geq \sqrt{A}$  e quindi<sup>8</sup> è iniettivo, dunque dall'equazione sopra troviamo<sup>9</sup>  $B - \sqrt{A} = 0$ .
- Scriviamo  $H = H_1 \oplus H_0$  con  $H_0 = \ker A$  e  $H_1 = (\ker A)^\perp = \overline{\text{Imm } A}$ . Per costruzione  $A|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$  è iniettivo (Concludere per esercizio).

□

#### Esercizio 11.48.

Per  $A \in L^{sim}(H)$  e  $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$  si ha che  $f(A)$  commuta con ogni  $B$  che commuta con  $A$ .

#### Hilbert complessi

##### Proposizione 11.49.

Sia  $A = A^*$  in  $L(H)$ , allora esiste un unico omomorfismo continuo

$$\Phi : C^0(\Sigma, \mathbb{C}) \rightarrow L(H)$$

tale che  $\Phi(id_\Sigma) = A$ . Risulta inoltre che

1.  $\Phi$  è isometrica
2.  $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$  ( $\Phi$  è uno \*-omomorfismo).
3. Se  $f \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$  e  $f \geq 0$  allora  $\Phi(f) = \Phi(f)^* \geq 0$ .
4. Se  $[A, B] = 0$  allora  $[\Phi(f), B]$

*Dimostrazione.*

L'unicità segue dal fatto che  $z \mapsto A$  implica che  $p \mapsto p(A)$  per ogni polinomio  $p \in \mathbb{C}[z]$  e questi sono densi in  $C^0(\Sigma, \mathbb{C})$  (stiamo usando il teorema di Stone-Weierstrass su intervalli, basta estendere  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  a  $\tilde{f} : [-\|A\|, \|A\|] \rightarrow \mathbb{C}$  continua e poi approssimare questa con polinomi).

Mostriamo esistenza: tutto segue dal fatto che per  $p \in \mathbb{C}[z]$  vale ancora che la corrispondenza  $p \mapsto p(A)$  è isometrica

$$\begin{aligned} \|p(A)\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|p(A)x\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle p(A)^* p(A)x, x \rangle = \\ &= \|p(A)^* p(A)\| \stackrel{(c_k A^k)^* = \overline{c_k} (A^*)^k = \overline{c_k} A^k}{=} \\ &= \|\bar{p}(A) p(A)\| = \|(\bar{p}p)(A)\| \stackrel{(11.43)}{=} \\ &= \|\bar{p}p\|_{\infty, \Sigma} = \|p\|_{\infty, \Sigma}^2. \end{aligned}$$

□

<sup>8</sup> $T \geq S \implies Tx \cdot x \geq Sx \cdot x \implies \|Tx\| \geq \|Sx\|$

<sup>9</sup> $(B - \sqrt{A})x = 0 \iff (B + \sqrt{A})(B - \sqrt{A})x = 0$  per iniettività e la seconda equazione è vera.

## 11.4 Altre proprietà del raggio spettrale

*Osservazione 11.50.*

$$r(\lambda T) = |\lambda| r(T)$$

*Osservazione 11.51.*

Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$\begin{aligned} r(T) < 1 &\iff T^n \rightarrow 0 \\ r(T) \leq 1 &\iff T^n \text{ limitata} \end{aligned}$$

*Osservazione 11.52.*

$$r(AB) = r(BA)$$

*Dimostrazione.*

Notiamo che  $(AB)^{n+1} = A(BA)^n B$ , da cui

$$\|(AB)^{n+1}\| \leq \|A\| \|B\| \|(BA)^n\|$$

e prendendo, la radice  $(n+1)$ -esima e passando al limite, troviamo

$$r(AB) \leftarrow \|(AB)^{n+1}\|^{1/(n+1)} \leq (\|A\| \|B\|)^{1/(n+1)} \left( (\|(BA)^n\|)^{1/n} \right)^{n/(n+1)} \rightarrow 1r(BA)$$

cioè  $r(AB) \leq r(BA)$ , ma per simmetria del problema vale anche l'altra disuguaglianza.  $\square$

*Osservazione 11.53.*

$$\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$$

*Dimostrazione.*

Se  $\lambda \neq 0$  e  $\lambda - BA$  è invertibile allora anche  $\lambda - AB$  lo è con inverso

$$X = \frac{1}{\lambda} (I + A(\lambda - BA)^{-1} B).$$

$\square$

*Osservazione 11.54.*

In generale ( $m > 2$ )

$$r(A_1 \cdots A_m) \neq r(A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(m)})$$

per  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Esistono controesempi in  $\mathbb{R}^3$  con  $m = 3$  per esempio.

*Osservazione 11.55.*

In generale NON sono vere  $r(AB) \leq r(A)r(B)$  e  $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e in questo caso

$$r(A) = r(B) = 0, \text{ ma } r(AB) = 1 \text{ e } r(A+B) = 1.$$

## 11.5 Parentesi Esercizi

Sia  $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ .

**Definizione 11.56** (Operatori di shift).

Sia  $S : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  l'operatore di **shift sinistro**:

$$(Sx)_i = x_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Definiamo lo **shift destro**  $R : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  come

$$(Rx)_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ x_{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

*Osservazione 11.57.*

$S$  è un inverso sinistro di  $R$ , cioè  $SR = id_{\ell_2}$ . Notiamo invece che

$$RS = id_{\ell_2} - P_0$$

con  $P_0$  il proiettore sulla coordinata  $x_0$ <sup>10</sup>.

*Osservazione 11.58.*

$$S = R^*$$

*Dimostrazione.*

Per ogni  $x, y \in \ell_2$  si ha

$$Sx \cdot y = \sum_{i \geq 0} x_{i+1} \overline{y_i} = \sum_{i > 0} x_i \overline{y_{i-1}} \stackrel{(Ry)_0=0}{=} \sum_{i \geq 0} x_i \overline{(Ry)_i} = x \cdot Ry$$

□

**Esercizio 11.59.**

Calcolare lo spettro e gli autovalori di  $S$  e  $R$ .

*Solution.*

Calcoliamo le varie quantità:

$\sigma_{pt}(S)$  Autovalori di  $S$ : sia  $x \neq 0$  tale che  $Sx = \lambda x$ , cioè  $x_{i+1} = \lambda x_i$  per ogni  $i \geq 0$ , cioè  $x_i = \lambda^i x_0$  con  $x_0 \neq 0$ . Questa successione è in  $\ell_2$  se e solo se  $|\lambda| < 1$  quindi

$$\sigma_{pt}(S) = B_{\mathbb{C}}(0, 1).$$

$\sigma(S)$  Poiché  $\|S\| = 1$  si ha

$$\sigma_{pt}(S) \subseteq \sigma(S) \subseteq \overline{B_{\mathbb{C}}(0, 1)}$$

ma poiché  $\sigma(S)$  è chiuso questo mostra che  $\sigma(S) = \overline{B_{\mathbb{C}}(0, 1)}$ .

$\sigma_{pt}(R)$  Cerchiamo  $x \neq 0$  in  $\ell_2$  tale che  $Rx = \lambda x$ . Applicando  $S$  cerchiamo  $x$  tale che

$$x = \lambda Sx,$$

quindi  $\lambda \neq 0$  e  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_{pt}(S)$  cioè  $|\lambda| > 1$  e questo è assurdo perché

$$\sigma_{pt}(R) \subseteq \sigma(R) \stackrel{\|R\|=1}{\subseteq} \overline{B_{\mathbb{C}}(0, 1)}.$$

<sup>10</sup> cioè sul nucleo di  $S$  come ci aspettiamo dalla teoria

$\sigma(R)$  Notiamo che  $\lambda - R$  non è invertibile se e solo se  $(\lambda - R)^*$  non è invertibile, cioè

$$(\lambda - R)^* = \bar{\lambda} - R^* = \bar{\lambda} - S$$

non è invertibile, cioè se e solo se  $\bar{\lambda} \in \sigma(S)$ , dunque  $\sigma(R) = \overline{\sigma(S)}$ .

□

*Osservazione 11.60.*

Vale in generale  $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} := \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ .

*Osservazione 11.61.*

Se  $B = L^{-1}AL$  con  $L \in \text{GL}(X)$  allora  $\lambda \in \sigma(B)$  se e solo se  $B - \lambda \notin \text{GL}(X)$ , cioè

$$L^{-1}(A - \lambda)L \notin \text{GL}(X) \iff A - \lambda \notin \text{GL}(X)$$

dunque  $\sigma(B) = \sigma(A)$ .

**Esercizio 11.62.**

Calcolare spettro e autovalori dello shift bigettivo su  $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$$

*Solution.*

Sia  $M_\lambda$  l'operatore di moltiplicazione per  $(\lambda^i)$  con  $|\lambda| = 1$ , cioè  $(M_\lambda x)_i = \lambda^i x_i$ .  
Notiamo che

$$((M_{\lambda^{-1}} S M_\lambda)x)_i = \lambda^{-i} \lambda^{i+1} x_{i+1} = \lambda (Sx)_i$$

cioè  $\lambda S$  è coniugato a  $S$ .

Dunque per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $|\lambda| = 1$  si ha che  $\sigma(S) = \sigma(\lambda S) = \lambda \sigma(S)$ , quindi  
o  $\sigma(S) = \emptyset$  oppure BOH PERCHÉ SCORRE LA CAZZO DI PAGINA

□

**Esercizio 11.63.**

Sia  $T : L^2(I, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(I, \mathbb{C})$  con  $I = [0, 1]$  l'operatore di Volterra, cioè

$$Tu(x) = \int_0^x u(t) dt.$$

1. Scrivere l'aggiunto  $T^*$  e l'operatore  $T^*T$
2. Calcolare lo spettro e gli autovalori di  $T^*T$  con molteplicità. Determinare le autofunzioni.
3. Sia  $|T|$  l'operatore  $\sqrt{T^*T}$ , che è ben definito perché  $T^*T$  simmetrico,  $\sqrt{\bullet} \in C^0([0, 1])$  e  $\sigma(T^*T) \subseteq [0, 1]$  (stiamo usando (11.43)).
  - Scrivere la funzione  $h(x, y) \in L^2(I \times I)$  nucleo integrale di  $|T|$

$$|T| u(x) = \int_I h(x, y) u(y) dy.$$

- Calcolare le norme degli operatori

$$T, T^*, T^*T, |T|$$

*Solution.*

$T^*T$  è un operatore simmetrico e positivo.

1. Notiamo che<sup>11</sup>

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)dt = \int_I [t \leq x]u(t)dt$$

dunque

$$T^*v(x) = \int_I [x \leq t]v(t)dt$$

infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_I \left( \int_I [t \leq x]u(t)dt \right) \overline{v(x)}dx \stackrel{F.T.}{=} \int_I u(t) \overline{\left( \int_I [t \leq x]v(x)dx \right)}dt = \\ &= \int_I u(t) \overline{T^*v(t)}dt = \langle u, T^*v \rangle. \end{aligned}$$

Consideriamo ora  $T^*T$ :

$$\begin{aligned} T^*Tu &= \int_I [x \leq s]Tu(s)ds = \int_{I \times I} [x \leq s][t \leq s]u(t)dtds = \\ &= \int_I \left( \int_I [x \leq s][t \leq s]ds \right) u(t)dt \end{aligned}$$

dunque  $T^*T$  è un operatore integrale con nucleo

$$k(x, t) = \int_I [x \leq s][t \leq s]ds = \int_I [s \geq \max(x, t)]ds = 1 - \max(x, t).$$

2. Chiaramente  $T^*T$  è compatto in quanto  $T$  lo è (e quindi  $T^*$  e quindi la loro composizione), oppure perché è un operatore integrale con nucleo in  $L^2(I \times I)$ .  $T^*T$  è simmetrico e positivo:

$$(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$$

$$T^*Tx \cdot x = Tx \cdot Tx \geq 0.$$

Quindi lo spettro di  $T^*T$  è costituito da una successione di autovalori  $\geq 0$  decrescenti verso 0. In realtà poiché  $T$  e  $T^*$  sono iniettivi si ha che gli autovalori sono strettamente positivi. Inoltre, definito l'operatore  $Ju(x) = u(1-x)$ , si ha

$$T^*u = J TJ u$$

cioè  $T^*$  e  $T$  sono coniugati in quanto  $J$  involuzione.

Gli autovettori sono una base Hilbertiana di  $L^2(I)$  e ogni autovalore ha molteplicità finita. Dall'espressione di  $T$  e di  $T^*$  si ha che

$$Tu = f \iff \begin{cases} f' = u \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

con  $f \in W^{1,2}(I)$  e  $f' = u$  come derivata debole. Invece

$$T^*v = g \iff \begin{cases} g' = -v \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

<sup>11</sup>Ricordiamo che  $[\mathcal{P}]$  è la parentesi di Iverson, la funzione caratteristica dell'insieme ottenuto per separazione sul dominio dalla condizione  $\mathcal{P}$

dunque  $T^*T\varphi = \lambda\varphi$  se e solo se  $\lambda \neq 0$ ,  $\varphi \in C^\infty$  (se è  $C^k$  allora deve essere anche  $C^{k+2}$ ) e rispetta l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \lambda\varphi'' = -\varphi \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

In conclusione le autofunzioni sono

$$\varphi(x) = a \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

con  $\sqrt{\lambda_n} = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ , cioè gli autovalori sono

$$\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2},$$

tutti con molteplicità semplice (perché l'equazione differenziale ha uno spazio di soluzioni di dimensione al più 1 perché determinate da  $\varphi(0)$  per il teorema di esistenza e unicità).

Le autofunzioni normalizzate corrispondenti sono

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

e formano una base ortonormale di  $L^2([0, 1])$ . Verifiche varie per esercizio.

3. • Cerchiamo il nucleo integrale di  $|T|$ : per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$|T| \varphi_n = \sqrt{\lambda_n} \varphi_n$$

dove  $\varphi_n$  sono le autofunzioni di  $T^*T$ , infatti

$$\sigma(T^*T) = \sigma(|T|^2) = \sigma(|T|)^2 \quad \text{e} \quad \sigma(|T|) \subseteq [0, \infty).$$

Ogni  $u \in L^2(I)$  si scrive

$$u = \sum_{n \geq 0} (u, \varphi_n) \varphi_n$$

quindi

$$\begin{aligned} |T| u &= |T| \left( \sum_{n \geq 0} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n \right) = \sum_{n \geq 0} \sqrt{\lambda_n} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sqrt{\lambda_n} \int_I u(t) \varphi_n(t) \varphi_n(x) dt = \\ &= \int_I \left( \sum_{n \geq 0} \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) \varphi_n(x) \right) u(t) dt \end{aligned}$$

cioè  $|T|$  è un operatore integrale Hilbert-Schmidt con nucleo

$$h(x, t) = \sum_{n \geq 0} \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) \varphi_n(x),$$

che è  $L^2(I \times I)$  perché la famiglia  $\{\varphi_k(t)\varphi_j(x)\}_{k,j \in \mathbb{N}}$  è ortonormale<sup>12</sup> su  $L^2(I \times I)$  e

$$\begin{aligned} \int_{I \times I} h(x, t)^2 dx dt &= \sum (\sqrt{\lambda_n})^2 = \sum \lambda_n = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} < \infty \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che  $\{\varphi_k(t)\varphi_j(x)\}_{k,j \in \mathbb{N}}$  è una famiglia ortonormale.

Calcoliamo  $h$  più esplicitamente:

$$h(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right).$$

Poniamo  $\xi = \frac{\pi x}{2}$  e  $\tau = \frac{\pi t}{2}$ , da cui

$$\begin{aligned} h &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)\xi) \cos((2n+1)\tau) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \frac{\cos((2n+1)(\xi+\tau)) + \cos((2n+1)(\xi-\tau))}{2} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)(\xi+\tau)) + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)(\xi-\tau)) = \\ &= \frac{2}{\pi} \Re \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} e^{i(2n+1)(\xi+\tau)} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \Re \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} e^{i(2n+1)(\xi-\tau)} \right). \end{aligned}$$

Ricordando lo sviluppo per  $|z| \leq 1$  e  $z \neq \pm 1$ <sup>13</sup>

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{z} z^{2n+1}$$

<sup>12</sup>e appaiono solo le componenti diagonali, come ha senso dato che stiamo diagonalizzando.

<sup>13</sup>si usa  $\log(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

si trova che

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{\pi} \Re \left( \log \left( \frac{1 + e^{i(\xi+\tau)}}{1 - e^{i(\xi+\tau)}} \right) + \log \left( \frac{1 + e^{i(\xi-\tau)}}{1 - e^{i(\xi-\tau)}} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \Re \left( \log \left( \frac{e^{-i\frac{\xi+\tau}{2}} + e^{i\frac{\xi+\tau}{2}}}{e^{-i\frac{\xi+\tau}{2}} - e^{i\frac{\xi+\tau}{2}}} \right) + \log \left( \frac{e^{-i\frac{\xi-\tau}{2}} + e^{i\frac{\xi-\tau}{2}}}{e^{-i\frac{\xi-\tau}{2}} - e^{i\frac{\xi-\tau}{2}}} \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \Re \left( \log \left( \frac{e^{-i\frac{\xi+\tau}{2}} - e^{i\frac{\xi+\tau}{2}}}{e^{-i\frac{\xi+\tau}{2}} + e^{i\frac{\xi+\tau}{2}}} \right) + \log \left( \frac{e^{-i\frac{\xi-\tau}{2}} - e^{i\frac{\xi-\tau}{2}}}{e^{-i\frac{\xi-\tau}{2}} + e^{i\frac{\xi-\tau}{2}}} \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \Re \left( \log \left( -i \tan \left( \frac{\xi+\tau}{2} \right) \right) + \log \left( -i \tan \left( \frac{\xi-\tau}{2} \right) \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \Re \left( \log \left( (-i)^2 \tan \left( \frac{\xi+\tau}{2} \right) \tan \left( \frac{\xi-\tau}{2} \right) \right) \right) \stackrel{(*)}{=} \\
&= -\frac{1}{\pi} \log \left| \tan \left( \frac{\xi+\tau}{2} \right) \tan \left( \frac{\xi-\tau}{2} \right) \right|
\end{aligned}$$

dove  $(*)$  segue perché

$$\begin{aligned}
\Re(\log(z)) &= \frac{1}{2} \left( \log z + \overline{\log(z)} \right) = \frac{1}{2} (\log(z) + \log(\bar{z})) = \\
&= \frac{1}{2} \log(z\bar{z}) = \frac{1}{2} \log(|z|^2) = \\
&= \log(|z|)
\end{aligned}$$

Sostituendo  $x$  e  $t$  ricaviamo

$$h(x, t) = -\frac{1}{\pi} \log \left| \tan \left( \pi \frac{x+t}{4} \right) \tan \left( \pi \frac{x-t}{4} \right) \right|$$

- Notiamo che  $\|T^*T\| = r(T^*T) = \max_n \lambda_n = \frac{4}{\pi^2}$ , inoltre (in generale)

$$\|T\| = \|T^*\| = \|\lvert T \rvert\| = \|T^*T\|^{1/2}$$

quindi tutte queste valgono  $2/\pi$ . Queste uguaglianze tra le norme seguono come segue:

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} Tx \cdot Tx = \sum_{\|x\|=1} T^*Tx \cdot x = \|T^*T\|$$

e lo stesso per  $\lvert T \rvert$ .

□

**Fatto 11.64.**

Se  $A \in L(H)$  è invertibile allora anche  $A^*$ ,  $A^*A$  e  $|A| = \sqrt{A^*A}$  lo sono.

**Proposizione 11.65.**

Sia  $A \in L(H)$  invertibile e definiamo  $U = A|A|^{-1}$ .  $U$  è unitario e possiamo scrivere

$$A = US$$

con  $S = |A|$  e  $U = A|A|^{-1}$  con  $U$  unitario e  $S$  simmetrico positivo.



*Dimostrazione.*

Mostriamo che  $U^* = U^{-1}$ :

$$U^*U = |A|^{-1} A^* A |A|^{-1} = |A|^{-1} |A|^2 |A|^{-1} = Id$$

$$UU^* = A |A|^{-1} |A|^{-1} A^* = A(|A|^2)^{-1} A^* = A(A^* A)^{-1} A^* = AA^{-1}(A^*)^{-1} A^* = Id$$

□

**Esercizio 11.66.**

Possiamo scrivere l'operatore di Volterra nella forma polare  $T = U |T|$  con  $U$  unitario?

**Esercizio 11.67.**

Consideriamo l'operatore  $T \in L(\ell_2)$  definito da

$$Tu(k) = u(k+1) - u(k+2)$$

- Determinare l'aggiunto  $T^*$
- Determinare gli autovalori di  $T$  e  $T^*$  e calcolare  $\sigma(T)$  e  $\sigma(T^*)$
- Calcolare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di  $T$ .

*Solution.*

Procediamo in ordine

- Sia  $T = S - S^2$  con  $S : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  shift sinistro ( $Su(k) = u(k+1)$ ). Sia  $R : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  lo shift destro e notiamo che

$$T^* = R - R^2.$$

- Usando le due versioni del teorema della mappa spettrale (11.38) e (11.40) su<sup>14</sup>  $\sigma(S)$ ,  $\sigma(R)$ ,  $\sigma_{pt}(S)$  e  $\sigma_{pt}(R)$  troviamo

$$\sigma(T) = \sigma(T^*) = \{\lambda - \lambda^2 \mid |\lambda| \leq 1\}, \quad \sigma_{pt}(T) = \{\lambda - \lambda^2 \mid |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_{pt}(T^*) = \emptyset$$

quindi  $\sigma(T)$  è la regione delimitata dalla curva

$$\gamma(t) = e^{it} - e^{2it}.$$

- $\lambda$  è autovalore di  $T$  se e solo se esiste una successione  $u \in \ell_2$  tale che per ogni  $k \geq 0$

$$u(k+1) - u(k+2) = \lambda u(k)$$

cioè se e solo se  $(S^2 - S + \lambda)u = 0$ . Se al posto di  $\ell_2$  lavoriamo nello spazio di tutte le successioni allora troviamo uno spazio di soluzioni di dimensione 2, cioè

$$\sigma_{pt}(T) = \{z - z^2 \mid |z| < 1\} = \{\lambda \mid z^2 - z + \lambda \text{ ha uno zero di modulo } < 1\}$$

e la molteplicità geometrica è il numero di zeri di  $z^2 - z + \lambda$  dentro il disco unitario.

□

<sup>14</sup>Ricordiamo che  $\sigma(S) = \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$ ,  $\sigma_{pt}(S) = B_{\mathbb{C}}(0,1)$ ,  $\sigma(R) = \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$  e  $\sigma_{pt}(R) = \emptyset$

## Capitolo 12

# Spazi di Sobolev

### 12.1 Derivata debole

**Definizione 12.1** (Derivata debole).

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L^1_{loc}(I)$  ha **derivata debole** (o **distribuzionale**)  $g \in L^1_{loc}(I)$  se

$$\forall \varphi \in C^\infty_c(I), \quad \int_I \dot{\varphi} f dt = - \int_I \varphi g dt.$$

*Osservazione 12.2.*

Ricordiamo che vale una inclusione

$$T : \begin{array}{ccc} L^1_{loc}(I) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(I) \\ f & \longmapsto & T_f : \varphi \mapsto \int_I \varphi f \end{array}$$

dunque in questi termini  $g$  è derivata debole per  $f$  se  $(T_f)' = T_g$ .

*Osservazione 12.3.*

Se  $f \in C^1(I)$  allora ha derivata debole e questa coincide con la sua derivata classica  $f' \in C^0(I)$ .

**Esercizio 12.4.**

Se  $u \in \mathcal{D}'(I)$  è tale che  $u' = 0$  allora  $u$  è costante.

*Osservazione 12.5.*

Se  $f \in C^0(I)$  ed esiste  $f' = g$  quasi ovunque NON è detto che  $g$  sia la derivata distribuzionale.

**Esempio 12.6.**

Sia  $f$  la funzione di Cantor, cioè  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è l'unica funzione che sia un punto fisso dell'endofunzione su  $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  che manda una funzione  $f$  in

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2}f(3x-2) + \frac{1}{2} & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

che esiste in quanto questa associazione è una contrazione.

La funzione di Cantor ha  $f' = 0$  per ogni  $x \in I \setminus C$ , in particolare quasi ovunque. Eppure la derivata debole di  $f$  non è 0, segue dall'esercizio.

## 12.2 Ripassino di analisi 3

**Definizione 12.7** (Funzioni assolutamente continue).

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è **assolutamente continua** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $I_i = [a_i, b_i] \subseteq [a, b]$ ,  $1 \leq i \leq n$  intervalli disgiunti tali che  $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$  si ha

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

**Fatto 12.8.**

$f$  è assolutamente continua se e solo se  $f = \int_a^x g dt$  per qualche  $g \in L^1([a, b])$ . Inoltre la derivata  $f'(x)$  esiste per quasi ogni  $x \in [a, b]$  e vale  $g(x)$ .

*Osservazione 12.9.*

La funzione di Cantor non è assolutamente continua.

*Osservazione 12.10.*

Le funzioni assolutamente continue sono la classe più ampia per cui vale il teorema fondamentale del calcolo integrale.

**Fatto 12.11.**

Per assolutamente continue vale la formula di integrazione per parti, in particolare per ogni  $\varphi \in C_C^1(I)$  si ha

$$\int_I f \varphi' = - \int_I f' \varphi$$

quindi la derivata quasi ovunque di una assolutamente continua coincide con la derivata distribuzionale.

**Teorema 12.12** (Radon-Nikodym).

Sia  $(X, \Sigma)$  uno spazio di misura e siano  $\mu, \nu$  due misure  $\sigma$ -finite su esso. Se  $\nu$  è assolutamente continua rispetto a  $\mu$  (scritto  $\nu \ll \mu$ ) allora esiste una funzione  $f : X \rightarrow [0, \infty)$  misurabile per  $\Sigma$  tale che per ogni  $A \in \Sigma$  misurabile si ha

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

La funzione  $f$  è detta **derivata di Radon-Nikodym** e si indica  $\frac{d\nu}{d\mu}$ .

*Osservazione 12.13.*

Se  $m$  è la misura  $\sigma$ -finita definita sugli intervalli da

$$m([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha)$$

allora  $m \ll \mathcal{L}$  dove  $\mathcal{L}$  è la misura di Lebesgue. In questo caso  $f'$  è anche la derivata di Radon-Nikodym di  $m$ .

*Osservazione 12.14.*

In generale vale una bigezione

$$\begin{array}{ccc} \{\text{misure } \geq 0 \text{ finite su } [a, b)\} & \longleftrightarrow & \{f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ cresc., cont. a sx, } f(a) = 0\} \\ \mu & \longmapsto & f_\mu(x) = \mu([a, x)) \\ \mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) & \longleftarrow & f \end{array}$$

dove in realtà  $\mu_f$  è la misura determinata da quel comportamento sugli intervalli semiaperti<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>la  $\sigma$ -additività non è ovvia perché una successione crescente di intervalli semiaperti potrebbe accumularsi in diversi punti, ma notiamo che è un insieme ben ordinato quindi possiamo indicizzare gli insiemi con un ordinale numerabile e concludiamo per induzione transfinita

## 12.3 Spazi di Sobolev

**Definizione 12.15** (Spazio di Sobolev).

Per  $1 \leq p \leq \infty$  e  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo definiamo il relativo **spazio di Sobolev** come

$$W^{1,p}(I) = \{f \in L^p(I) \mid f'_{distr.} \in L^p(I)\}$$

*Osservazione 12.16.*

Uno spazio di Sobolev è uno spazio vettoriale.

**Definizione 12.17** (Norma del grafico).

Siano  $X, Y$  Banach,  $A : D \rightarrow Y$  con  $D \subseteq X$  e  $A$  operatore chiuso. La **norma del grafico** su  $D$  è

$$\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Questa norma rende  $D$  isomorfo al sottospazio chiuso  $\Gamma A \subseteq X \times Y$ .

**Proposizione 12.18.**

*L'operatore di derivazione*

$$D : \begin{array}{ccc} W^{1,p} & \longrightarrow & L^1 \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

*è lineare e chiuso, cioè il suo grafico*

$$\Gamma D = \{(f, f') \in L^p \times L^p \mid f \in W^{1,p}\}$$

*è chiuso in  $L^p \times L^p$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $(f_n, f'_n)$  è una successione su  $\Gamma D$  convergente in  $L^p \times L^p$  a qualche coppia  $(f, g)$ , cioè  $f_n \rightarrow f$  e  $f'_n \rightarrow g$ , allora segue che  $g = f'$  e quindi  $(f, g) \in \Gamma D$ . Infatti

$$\int_I f_n \varphi' = - \int_I f'_n \varphi$$

passa al limite perché  $\varphi \in C_c^\infty$ , quindi

$$\int_I f \varphi' = - \int_I g \varphi.$$

□

**Corollario 12.19.**

*La norma del grafico<sup>2</sup> sul dominio di  $D$  rende  $W^{1,p}$  uno spazio di Banach.*

*Dimostrazione.*

Questa norma rende l'immersione ovvia

$$W^{1,p} \hookrightarrow \Gamma D$$

una funzione continua e isometrica a valori in un sottospazio chiuso di  $L^p \times L^p$ , che è un Banach. □

*Osservazione 12.20.*

$W^{1,p}$  per  $1 \leq p \leq \infty$  è uno spazio di Banach, separabile per  $p < \infty$  in quanto lo sono gli  $L^p(I)$ , e riflessivo per  $1 < p < \infty$  (perché sottospazi chiusi e prodotti di Banach riflessivi sono riflessivi).

---

<sup>2</sup> $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p$

*Osservazione 12.21.*

Dall'inclusione  $W^{1,p} \subseteq L^p \times L^p$  segue una rappresentazione delle forme lineari continue su  $W^{1,p}$ .

*Dimostrazione.*

Se  $L \in W^{1,p}(I)$  esistono  $u, v \in (L^p)^*$  tali che per ogni  $f \in W^{1,p}$  si ha

$$\langle L, f \rangle = \langle u, f \rangle = \langle v, f' \rangle$$

per esempio, se  $u \in L^p$  e  $v \in L^q$ , poiché  $(L^p)^* \cong L^q$

$$\langle L, f \rangle = \int_I (uf + vf') dt$$

????????????[Questa parte me la sono persa a lezione]

□

**Proposizione 12.22** (Caratterizzazioni spazio di Sobolev).

Per  $f \in L^p(I)$  e  $1 < p \leq \infty$  le seguenti sono equivalenti

1.  $f \in W^{1,p}(I)$
2. esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\left| \int_I f \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_q$$

3. Esiste  $C \geq 0$  tale che per ogni  $J \subseteq I$  e per ogni  $h \in \mathbb{R}$  con  $J + h \subseteq I$  si ha

$$\|\tau_h f - f\|_{p,J} \leq C |h|$$

*Dimostrazione.*

Diamo le implicazioni

1.  $\implies$  2. Se  $f \in W^{1,p}(I)$  allora

$$\left| \int f \varphi' \right| = \left| \int f' \varphi \right| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f'\|_p \|\varphi\|_q.$$

2.  $\implies$  1. Se vale 2. allora è ben definito il funzionale lineare continuo su  $C_c^\infty(I)$  dato da

$$\varphi \mapsto \int_I f \varphi'$$

Per continuità esso si estende per densità ad un funzionale lineare continuo su  $L^q$ , ma allora è della forma  $\varphi \mapsto - \int g \varphi$  con  $g \in L^p$ , dunque

$$\int f \dot{\varphi} = - \int g \varphi$$

ovvero esiste  $f'_{dist} \in L^p$ .

1.  $\implies$  3. SOON...

□

**Proposizione 12.23.**

Le  $f \in W^{1,p}(I)$  per  $1 < p \leq \infty$  sono Hölder.

*Dimostrazione.*

Per  $1 < p < \infty$  si ha

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y 1 f'(t) dt \right| \leq \left| \int_x^y 1 \right|^{1/q} \|f'\|_p = \|f'\|_p |x - y|^{1/q},$$

mentre per  $p = \infty$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y 1 f'(t) dt \right| \leq |x - y| \|f'\|_\infty.$$

□

## 12.4 Parentesi Esercizi

### Esercizio 12.24.

Per  $1 < p \leq \infty$  e  $u \in L^p(\mathbb{R})$  sono equivalenti

1.  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
2. esiste  $C \geq 0$  tale che  $\|\tau_h(u) - u\|_p \leq C|h|$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$

dove  $\tau_h(u)(x) = u(x+h)$ , quindi la seconda condizione significa che i rapporti incrementali di  $u$

$$\delta_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

sono limitati in  $L^p$  per ogni  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Solution.*

Mostriamo le due implicazioni

**1.  $\implies$  2.** Se  $u \in W^{1,p}$ ,  $\chi_1 = \chi_{[-1,0]}$  e  $\chi_h(x) = \frac{1}{h}\chi_1(x/h)$  (notiamo  $\chi_1 \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\chi_1 \geq 0$ ,  $\int \chi_1 = 1$ ) allora si ha

$$\delta_h u(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \dot{u}(t) dt = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x, x+h]}(t) \dot{u}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_h(x-t) \dot{u}(t) dt = \dot{u} * \chi_h.$$

Poiché  $\dot{u} \in L^0$ , dalla disuguaglianza di Young ( $p \leq \infty$ ) si ha

$$\|\delta_h u\|_p = \|\chi_h * \dot{u}\|_p \leq \|\chi_h\|_1 \|\dot{u}\|_p = \|\dot{u}\|_p$$

Il ragionamento è analogo per  $h < 0$ .

**2.  $\implies$  1.** Poiché  $p > 1$  si ha  $L^p = (L^q)^*$ , quindi la successione  $\{\delta_{h_j} u\}_{j \geq 0}$  con  $h_j = \frac{1}{j}$ , che per ipotesi è limitata in  $L^p$ , ha una sottosuccessione che è  $w^*$ -convergente in  $L^p$  e converge  $w^*$  (uniformemente sui compatti (7.20)) ad una  $u \in L^p$ . In particolare per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  si ha

$$\langle \delta_{h_j} u, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$$

ma  $\langle \delta_h u, \varphi \rangle = \langle u, \delta_{-h} \varphi \rangle$ , infatti

$$\begin{aligned} \langle \delta_h u, \varphi \rangle &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (\tau_h u - u) \varphi dt = \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}} u(x+h) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x-h) dx - \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x) dx \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) \delta_{-h} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Poiché  $\varphi \in C_C^\infty$ ,  $\delta_{h_j}\varphi \xrightarrow{L^1} \dot{\varphi}$  (addirittura converge in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) si conclude che

$$\langle v, \varphi \rangle = \lim_j \langle \delta_{h_j} u, \varphi \rangle = \lim_j \langle u, \delta_{-h_j} \varphi \rangle = \langle u, \dot{\varphi} \rangle$$

cioè  $u$  ha una derivata debole  $v \in L^p$ .

□

*Osservazione 12.25.*

Cosa succede per  $p = 1$ ? Si ha 2. è equivalente a  $u \in BV(\mathbb{R})$ , cioè  $u \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\dot{u}$  è una misura di Radon.

L'idea è che  $L^1$  si immerge isometricamente in uno spazio che è un duale e poi ragiono in modo analogo ma la convergenza debole star in questo spazio non restituisce una funzione ma una misura.

**Esercizio 12.26.**

Per  $I = [a, b]$  e  $1 < p \leq \infty$ , l'inclusione

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C^0(I)$$

è compatta.

*Dimostrazione.*

Abbiamo già visto che  $u \in W^{1,p}(I)$  è Hölder di esponente  $1/q$  (nota che  $1 \leq q < \infty$ ), infatti

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_x^y \dot{u}(t) dt \right| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\dot{u}\|_p \left( \int_x^y 1 dt \right)^{1/q} = \|\dot{u}\|_p |x - y|^{1/q}.$$

Dunque, per Ascoli-Arzelà si ha che la palla unitaria di  $W^{1,p}$  (rispetto alla topologia della norma  $\|\cdot\|_{1,p}$  sullo spazio di Sobolev) è un insieme relativamente compatto in  $C^0([a, b])$ . □

*Osservazione 12.27.*

È vero che  $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ ? È vero che è compatta?

*Solution.*

Considerando  $u \in C_C^\infty \setminus \{0\}$  e la successione di traslate  $\tau_n u$  si ha che questa successione converge puntualmente a 0 ma la successione non tende a 0 né in  $W^{1,p}$  né in  $L^\infty$ . □

**Esercizio 12.28.**

È vero che è compatta l'inclusione  $W^{1,1}([0, 1]) \subseteq C^0([0, 1])$ ?

*Solution.*

No, basta trovare una successione in  $W^{1,1}$  limitata che non ha sottosuccessioni convergenti in  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . □

# Appendice A

## Topologia

**Proposizione A.1** (Topologia iniziale).

Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{F}$  una famiglia di mappe a valori in uno spazio topologici.

Notazione:

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \rightarrow (Y_j, \tau_j)\}_{j \in I}.$$

Allora esiste la topologia meno fine su  $X$  che rende continue le mappe  $f_j$ . Una prebase di questa topologia è data da

$$\{f_j^{-1}(A) \mid j \in I, A \in \tau_j\}.$$

In realtà basterebbe prendere una prebase per  $\tau_j$  al posto di tutta la topologia.

Questa topologia è detta **topologia iniziale della famiglia  $\mathcal{F}$**  e si denota  $\tau_{\mathcal{F}}$ .

**Osservazione A.2** (Proprietà universale della topologia iniziale).

Data una mappa  $\varphi : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X, \tau_{\mathcal{F}})$  essa è continua se e solo se  $f \circ \varphi$  è continua per ogni  $f \in \mathcal{F}$ .

*Dimostrazione.*

Se  $\varphi$  è continua allora  $f \circ \varphi$  è composizione di continue. Se sappiamo che  $f \circ \varphi$  è continua per ogni  $f \in \mathcal{F}$  allora, se  $A$  è un aperto di  $X$  per continuità di  $f \circ \varphi$  abbiamo

$$\tau_Z \ni (f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$$

cioè le preimmagini tramite  $\varphi$  di aperti di prebase sono aperti di  $Z$ , quindi  $\varphi$  è continua.  $\square$

**Proposizione A.3** (Transitività della topologia iniziale).

Supponiamo di avere una famiglia di mappe  $\mathcal{F}' = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  e per ogni  $i \in I$  sia  $\mathcal{G}_i = \{g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij}\}_{j \in J_i}$  una famiglia di mappe. Su ogni  $Y_i$  consideriamo la topologia iniziale determinata da  $\mathcal{G}_i$ . Allora la topologia iniziale data da  $\mathcal{F}'$  su  $X$  coincide con la topologia iniziale su  $X$  definita da  $\mathcal{F} = \{g_{ij} \circ f_i \mid i \in I, j \in J_i\}$ .

*Dimostrazione.*

Entrambe le topologie in esame sono generate dagli insiemi  $(g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A)$  al variare di  $i \in I, j \in J_i$  e  $A \in \tau_{Z_{ij}}$ , infatti

$$\text{prebase per } \mathcal{F} \rightarrow (g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A) = f_i^{-1}(g_{ij}^{-1}(A)) \leftarrow \text{prebase per } \mathcal{F}'.$$

$\square$



## A.1 Limiti induttivi su spazi topologici

### Proposizione A.4.

Sia  $\{(X_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  una famiglia di spazi topologici con inclusioni continue  $X_n \subseteq X_{n+1}$ . Allora esiste la più fine topologia  $\tau_\infty$  su  $X_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  che rende continue le inclusioni  $X_n \subseteq X_\infty$ .

La topologia in questione è

$$\begin{aligned} \tau_\infty &= \{A \subseteq X_\infty \mid \forall n \in \mathbb{N}, A \cap X_n \in \tau_n\} = \\ &= \left\{ A \subseteq X_\infty \mid A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \tau_n \right\}. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Poiché la continuità delle inclusioni si traduce in “ $\forall n, A \cap X_n \in \tau_n$ ” basta verificare che questa condizione definisce una topologia, ma questo è ovvio perché

- $(\bigcup A_i) \cap X_n = \bigcup A_i \cap X_n$ ,
- $(A \cap B) \cap X_n = (A \cap X_n) \cap (B \cap X_n)$ ,
- $\emptyset \cap X_n = \emptyset$  e
- $X_\infty \cap X_n = X_n$ .

□

*Osservazione A.5.*

Se ogni inclusione  $X_n \subseteq X_{n+1}$  è inclusione di sottospazio, cioè  $\tau_n$  è la topologia indotta, allora  $\tau_\infty$  induce  $\tau_n$  come topologia di sottospazio  $X_n \subseteq X_\infty$ .

*Dimostrazione.*

Se  $A_0 \subseteq X_0$  aperto allora esiste  $A_1 \in \tau_1$  tale che  $A_0 = A_1 \cap X_0$  perché  $\tau_0$  è la topologia indotta da  $\tau_1$ . Iterando troviamo  $A_n$  aperti inscatolati, quindi  $A = \bigcup_n A_n$  e per costruzione  $A \cap X_0 = A_0$ . Per gli indici più alti è uguale. □

*Osservazione A.6.*

$f : X_\infty \rightarrow Z$  è continua se e solo se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f|_{X_n} \rightarrow Z$  è continua.

*Osservazione A.7.*

Il limite su sottosuccessione  $\{X_{n_k}\}_{k \geq 0}$  è sempre  $X_\infty$  con la stessa topologia.

### A.1.1 Limiti induttivi di SVT

*Osservazione A.8.*

In generale un limite induttivo di SVT  $X_n \subseteq X_{n+1}$  con inclusioni lineari è uno spazio topologico  $(X_\infty, \tau_\infty)$  e uno spazio vettoriale, ma NON è uno SVT.

Il motivo è che la somma su  $X_\infty$  non è necessariamente continua in quanto in generale  $\lim(X_n \times X_n) \neq \lim X_n \times \lim X_n$  anche se vale uguaglianza insiemistica.

$+$  :  $\bigcup X_n \times \bigcup X_n \rightarrow \bigcup X_n$  è tale che la restrizione a  $X_n \times X_n$  è continua, ma questo non implica la continuità della intera mappa.

Cerchiamo di correggere

**Notazione A.9.**

Se  $(V_i)$  è una successione di sottoinsiemi di  $X$  allora

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^n V_i = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_j \in V_j \ \forall j\}$$

**Lemma A.10.**

Se  $X$  è SVT, per ogni  $U \in \mathcal{U}_X$  esiste una successione  $(V_i)_i \subseteq \mathcal{U}_X$  tale che  $\sum_{i \geq 1} V_i \subseteq U$ .

*Dimostrazione.*

Si costruisce  $(V_i)$  per induzione in modo che  $V_{i+1} + V_{i+1} \subseteq V_i$ ,  $V_0 = U$ . Questo funziona perché

$$V_n + \sum_{i=1}^n V_i \subseteq V_n + V_1 \subseteq U.$$

□

**Lemma A.11.**

Per successioni  $(V_i)_i$  e  $(V'_i)_i$  di sottoinsiemi di  $X$  spazi vettoriali vale

- $(\sum V_i) + (\sum V'_i) = \sum (V_i + V'_i)$
- $(\sum V_i) \cap (\sum V'_i) \supseteq \sum (V_i \cap V'_i)$
- Se ogni  $V_i$  è assorbente / bilanciato / convesso allora anche  $\sum V_i$  lo è. Se  $\bigcup V_i$  è assorbente allora anche  $\sum V_i \supseteq \bigcup V_i$  lo è.

*Dimostrazione.*

Ovvia apparentemente.

□

**Proposizione A.12.**

Sia  $(X_i)$  una successione di SVT con mappe  $X_i \in X_{i+1}$  lineari continue iniettive (senza perdita di generalità inclusioni).

Poniamo  $X_\infty = \bigcup_{i \geq 0} X_i$ , allora  $X_\infty$  è uno spazio vettoriale ed esiste su esso la più fine topologia di SVT che rende continue tutte le inclusioni  $X_n \rightarrow X_\infty$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\mathcal{U}_i$  un sistema di intorni per 0 in  $X_i$ , allora la continuità di  $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$  si esprime dicendo

$$\{U \cap X_i \mid U \in \mathcal{U}_{i+1}\} \subseteq \mathcal{U}_i$$

(l'uguaglianza corrisponderebbe a  $X_n$  sottospazio di  $X_{n+1}$ ).

- Definiamo la base di intorni

$$\mathcal{U}_\infty = \left\{ \sum_i V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i, i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Questa induce una topologia di SVT su  $X_\infty$ , segue dal secondo lemma.

- Le inclusioni  $(X_i, \mathcal{U}_i) \rightarrow (X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$  sono continue, infatti per ogni  $\sum V_i \in \mathcal{U}_\infty$  e  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$X_n \cap \sum V_i \in \mathcal{U}_n$$

in quanto l'intersezione contiene  $V_n$ .

- Per ogni  $L : X_\infty \rightarrow Y$  si ha  $L$  continua mostriamo che se  $L|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$  continua per ogni  $Y$  allora  $L$  è continua.

Sia  $U \in \mathcal{U}_Y$ . Per quanto visto esiste  $(U_i) \subseteq \mathcal{U}_Y$  tale che  $\sum U_i \subseteq U$ . Per continuità di  $L|_{X_i}$  esiste  $V_i \in \mathcal{U}_i$  tale che  $L(V_i) \subseteq U_i$  e quindi

$$L\left(\sum V_i\right) \subseteq \sum U_i \subseteq U$$

cioè  $L$  è continua.

- Questa topologia è la più fine che rende continue le inclusioni, infatti se  $Y = (X_\infty, \tau)$  e  $L = id : (X_\infty, \mathcal{U}_\infty) \rightarrow (X_\infty, \tau)$  e  $(X_i, \mathcal{U}_i) \rightarrow (X_\infty, \tau)$  continua per ogni  $i$  allora  $id : (X_\infty, \mathcal{U}_\infty) \rightarrow (X_\infty, \tau)$  è continua per il punto precedente, cioè  $\mathcal{U}_\infty$  è più fine di  $\tau$ .

□

**Definizione A.13** (Limite induttivo di SVT).

Sia  $(X_i)$  una successione di SVT con mappe  $X_i \in X_{i+1}$  lineari continue iniettive (senza perdita di generalità inclusioni). Definiamo il loro **limite induttivo** come  $(X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$  con le notazioni della proposizione precedente, cioè

$$\mathcal{U}_\infty = \left\{ \sum_i V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i, i \in \mathbb{N} \right\}.$$

La topologia si chiama anche **topologia limite di spazi di Fréchet come SVT**, abbreviata  $LF$ .

*Osservazione A.14* (Caso SVTLC).

Se tutti gli  $X_i$  sono localmente convessi anche  $X_\infty$  lo è in quanto  $\sum V_i$  è convesso per  $V_i$  convessi.

In questo caso una base di intorni in  $\mathcal{U}_\infty$  è data da

$$\mathcal{U}'_\infty = \{C \subseteq X_\infty \mid C \text{ convesso, } C \cap C_n \in \mathcal{U}_n \forall n\}$$

infatti  $\{\sum_i V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i \text{ convesso, } i \in \mathbb{N}\}$  è una base di intorni di  $\mathcal{U}_\infty$  e questi  $\sum V_i$  sono convessi che contengono  $V_i$  quando intersecati con  $X_i$ .

Viceversa se  $C \subseteq X_\infty$  è convesso e  $C \cap X_n \in \mathcal{U}_n$  allora<sup>1</sup>

$$C \supseteq \sum_{i \geq 1} 2^{-i} C \supseteq \sum_{i \geq 1} 2^{-i} (C \cap X_i) \in \mathcal{U}_\infty.$$

*Osservazione A.15.*

Prendendo sottosuccessioni di  $(X_i)$ , il limite induttivo resta lo stesso (stesso insieme e stessa topologia).

**Definizione A.16** (Limite induttivo stretto).

Se  $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$  è una inclusione di sottospazio, cioè<sup>2</sup>  $\{V \cap X_i \mid V \in \mathcal{U}_{i+1}^*\} = \mathcal{U}_i^*$ , allora il limite induttivo in questo caso è detto **stretto**.

**Proposizione A.17** (Proprietà limiti induttivi stretti).

Sia  $(X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$  un limite induttivo stretto di  $X_i$

<sup>1</sup>ricorda che per  $C$  convesso,  $C + C = 2C$ .

<sup>2</sup> $\mathcal{U}_i^*$  è il sistema di tutti gli intorni di 0 in  $X_i$

1. Ogni  $X_n$  è un sottospazio di  $X_\infty$
2. Se  $C$  è chiuso in  $X_{n_0}$  allora  $C$  è chiuso in  $X_\infty$  se e solo se  $C$  è chiuso in ogni  $X_n$  per  $n \geq n_0$ .
3. Se tutti gli  $X_n$  sono  $T_0$  anche  $X_\infty$  lo è.
4. Se ogni  $X_n$  è chiuso in  $X_{n+1}$  allora  $A \subseteq X_\infty$  è limitato se e solo se è contenuto e limitato in un  $X_n$ .

*Dimostrazione.*

Nelle ipotesi di limite induttivo stretto, una base di intorni di  $\mathcal{U}_\infty$  è data dagli intorni

$$\left\{ \sum V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i, X_i \cap (V_{i+1} + V_{i+1}) \subseteq V_i \forall i \right\},$$

infatti, essendo  $X_i$  sottospazio di  $X_{i+1}$ , per ogni  $V_i \in \mathcal{U}_i$  esiste  $W_{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$  tale che  $X_i \cap W_{i+1} \subseteq V_i$ , quindi basta scegliere  $V_{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$  tale che  $V_{i+1} + V_{i+1} \subseteq W_{i+1}$ . Dunque se avevamo una qualsiasi successione  $(V'_i)$  con  $V_i \in \mathcal{U}_i$  basta restringere iterativamente intersecando ogni volta con l'intorno trovato con il metodo sopra.

Da  $X_i \cap (V_{i+1} + V_{i+1}) \subseteq V_i$  segue che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  la successione di insiemi

$$\left( X_n \cap \left( V_k + \sum_{i=0}^k V_i \right) \right)_{k \geq n}$$

è decrescente per inclusione, infatti

$$\begin{aligned} X_n \cap \left( V_{k+1} + \sum_{i=0}^{k+1} V_i \right) &\stackrel{X_k \supseteq X_n}{=} X_n \cap X_k \cap \left( V_{k+1} + V_{k+1} + \sum_{i=0}^k V_i \right) \stackrel{\sum_{i=0}^k V_i \subseteq X_k}{=} \\ &= X_n \cap \left( X_k \cap (V_{k+1} + V_{k+1}) + \sum_{i=0}^k V_i \right) \subseteq \\ &\subseteq X_n \cap \left( V_k + \sum_{i=0}^k V_i \right). \end{aligned}$$

Segue che

$$X_n \cap \sum_{i=0}^N V_i \subseteq X_n \cap \left( V_N + \sum_{i=0}^N V_i \right) \subseteq V_{n+1} + \sum_{i=0}^{n+1} V_i \subseteq V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n.$$

1. Scegliendo intorni come sopra, per ogni  $n$

$$X_n \cap \sum_{i=0}^{\infty} V_i = \bigcup_{N \geq n} X_n \cap \sum_{i=0}^N V_i \subseteq V_n$$

quindi  $X_\infty$  induce su  $X_n$  la topologia di  $X_n$  come volevamo.

2. Sia  $x \in X_\infty \setminus C$ , allora  $x \in X_{n_1}$  per qualche  $n_1 \geq n_0$ .  $C$  è chiuso in  $X_{n_1}$  per ipotesi quindi c'è un intorno  $U$  di  $x$  in  $X_{n_1}$  disgiunto da  $C$ , quindi per il punto 1. esiste un intorno  $V \in \mathcal{U}_\infty$  tale che  $V \cap X_{n_1} = U$  e quindi  $V \cap C = \emptyset$ , dunque  $C$  è chiuso in  $X_\infty$ .
3. Se ogni  $X_i$  è  $T_0$  allora  $(0)$  è chiuso in ogni  $X_i$ , quindi è chiuso in  $X_\infty$  per il punto precedente, ma  $(0)$  chiuso equivale a  $T_0$ .

4. Siccome ogni  $X_i$  è un sottospazio di  $X_\infty$ , una  $A \subseteq X_i$  è limitato in  $X_i$  se e solo se è limitato in  $X_\infty$ , quindi basta provare che  $A$  limitato in  $X_\infty$  implica esiste  $n$  tale che  $A \subseteq X_n$ .

Equivalentemente, mostriamo che se  $A \subseteq X_\infty$  e  $A \not\subseteq X_n$  per ogni  $n$  allora  $A$  non è limitato. Se  $A \not\subseteq X_n$  per ogni  $n$  allora esiste una successione  $a_n \in A \setminus X_n$ , ma per definizione  $a_n$  appartiene a qualche  $X_i$ , quindi esiste una successione strettamente crescente di indici tale che

$$a_{n_k} \in X_{n_{k+1}} \setminus X_{n_k}.$$

Poiché  $X_\infty$  è invariante per sottosuccessioni  $X_{n_k}$  si può supporre reindicizzando

$$a_n \in A, \quad a_n \in X_n \setminus X_{n-1}.$$

Notiamo che anche  $\frac{1}{n}a_n \in X_n \setminus X_{n-1}$ .

Essendo  $X_{n-1}$  chiuso in  $X_n$  esiste un intorno  $U_n \in \mathcal{U}_n$  tale che

$$\left(\frac{1}{n}a_n - U_n\right) \cap X_{n-1} = \emptyset$$

cioè  $\frac{1}{n}a_n \notin X_{n-1} + U_n$ . Siano  $V_n \in \mathcal{U}_n$  tali che  $V_n + V_n \subseteq U_n$  e  $X_n \cap (V_{n+1} \cap V_{n+1}) \subseteq V_n$ . Notiamo che

$$X_n \cap \left(\sum_{i \geq 0} V_i\right) \stackrel{\text{monotonia sopra}}{\subseteq} V_n \subseteq X_{n-1} + V_n + V_n \subseteq X_{n-1} + U_n.$$

Poiché  $a_n \in X_n$  e  $a_n \notin X_{n-1} + nU_n$  si ha che  $a_n \notin n\left(\sum_{i \geq 0} V_i\right)$ , quindi per ogni  $n$  esiste un elemento di  $A$  che non appartiene a  $n\left(\sum_{i \geq 0} V_i\right)$ , cioè  $A$  non è limitato.

□

### Esempio A.18.

L'ipotesi di chiusura  $X_n \subseteq X_{n+1}$  è necessaria per il punto 4.:

Consideriamo  $X_n$  una successione crescente di sottospazi di  $\ell_\infty$  con  $X_0 = c_0$  muniti della topologia indotta dalla  $w^*$  di  $\ell_\infty = \ell_1^*$ . Sia  $X_\infty \subseteq \ell_\infty$  il limite induttivo stretto di questi sottospazi.

La palla  $B_0$  di  $X_0$  è limitata ( $X_0$  è  $c_0$  con la topologia indotta dalla  $w^*$  di  $\ell_\infty$ , cioè  $X_0 = (c_0, w)$ ), quindi la chiusura di  $B_0$  in  $X_\infty$  è limitata ma  $\overline{B_0}^{X_\infty}$  non appartiene ad alcun  $X_n$ :

$$\overline{B_0}^{X_\infty} \cap X_n \stackrel{\text{limite stretto}}{=} \overline{B_0}^{X_n}.$$

La chiusura per la topologia di  $X_\infty$  è comunque la chiusura rispetto alla topologia debole\*, quindi per Goldstine  $\overline{B_0}^{X_\infty} = \overline{B_0}^{w^*} \cap X_\infty = B_{\ell_\infty} \cap X_\infty$ , quindi  $\overline{B_0}^{X_\infty} \cap X_n = B_{\ell_\infty} \cap X_n$  che non è tutta  $B_{\ell_\infty}$ .

# Appendice B

## Duali di $\ell_p$

### B.1 Norme estese

**Definizione B.1** (Norma estesa).

Sia  $\sigma : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, \infty]$  una **norma estesa**, cioè

1.  $\sigma(x + y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$
2.  $\sigma(\lambda x) = |\lambda| \sigma(x)$
3.  $\sigma(x) = 0 \iff x = 0$

Inoltre supponiamo che

4. per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esista  $C_n$  tale che per ogni  $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  si abbia  $|x(n)| \leq C_n \sigma(x)$
5.  $\sigma$  è LSC<sup>1</sup> rispetto alla convergenza puntuale, cioè

$$x^\nu \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall i \ x^\nu(i) \rightarrow x(i) \implies \sigma(x) \leq \liminf_{\nu \rightarrow +\infty} \sigma(x^\nu)$$

**Esempio B.2.**

La funzione  $\sigma(x) = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$  è una norma estesa su  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  che ha proprietà indicate. Anche  $\sigma(x) = \|x\|_\infty$  ha queste proprietà.

*Osservazione B.3.*

Le proprietà 4. e 5. sono equivalenti a dire che  $\{\sigma \leq 1\}$  è compatto in  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , infatti

$$4. \iff \{\sigma \leq 1\} \subseteq \prod_n \overline{B(0, C_n)} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

e 5. equivale a chiedere  $\{\sigma \leq 1\}$  chiuso, quindi insieme dicono che  $\{\sigma \leq 1\}$  è un chiuso in un compatto ( $\prod_n \overline{B(0, C_n)}$  è prodotto di compatti).

**Definizione B.4** (Dominio di finitezza).

Definiamo il **dominio di finitezza** della norma estesa  $\sigma$  come

$$\ell_\sigma = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sigma < +\infty\}$$

**Esercizio B.5.**

Il dominio di finitezza  $\ell_\sigma$  è uno spazio di Banach e  $\sigma$  induce la norma.

---

<sup>1</sup>semicontinua inferiormente

*Dimostrazione.*

Traccia:

- Verificare che  $\ell_\sigma$  è uno spazio vettoriale
- $\sigma$  è una norma
- Verificare la completezza:
  - Sia  $(x^\nu)_\nu \subseteq \ell_\sigma$  di Cauchy per  $\sigma$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$ 

$$(x^\nu(n))_\nu \subseteq \mathbb{K}$$
 è una successione di Cauchy in  $\mathbb{K}$  (proprietà 4, insieme al fatto che  $(x^\nu)$  è Cauchy), quindi esiste  $x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$  tale che  $x^\nu \rightarrow x$  puntualmente.
  - Verificare che  $x \in \ell_\sigma$ : essendo di Cauchy,  $x^\nu$  è limitata, cioè  $\sigma(x^\nu) \leq R$  per qualche  $R \in \mathbb{R}$ , dunque  $\sigma(x) \leq R$  perché  $\{\sigma \leq R\}$  è chiuso.
  - Verificare che  $\sigma(x^\nu - x) \rightarrow 0$ : Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $p, q \geq n$  vale  $\sigma(x^p - x^q) \leq \varepsilon$ . Notiamo che  $x^p - x^n \rightarrow x - x^n$  puntualmente, quindi per la semicontinuità si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $q \geq n$  vale

$$\sigma(x - x^q) \leq \liminf_{p \rightarrow +\infty} \sigma(x^p - x^q) \leq \varepsilon$$

cioè  $\sigma(x - x^q) \rightarrow 0$  in norma  $\sigma$ .

□

*Osservazione B.6.*

Questa è una seconda dimostrazione della completezza di  $\ell_p$  per  $1 \leq p \leq \infty$ .

*Osservazione B.7.*

Funziona anche l'analogo per paranorme, quindi in realtà segue anche la completezza di  $\ell_p$  per  $0 < p \leq 1$ .

## B.2 Duali di $\ell_p$

**Proposizione B.8** (Duali di  $\ell_p$ ).

Se  $p$  e  $q$  sono esponenti coniugati ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\frac{1}{\infty} \div 0$ ) allora vale l'isometria  $(\ell_p)^* \cong \ell_q$ .

*Dimostrazione.*

Esiste una inclusione lineare isometrica data da

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \ell_q & \longrightarrow & (\ell_p)^* \\ y & \longmapsto & \Phi_y : x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} y_i x_i \end{array},$$

dove la serie in esame converge assolutamente per la disuguaglianza di Hölder:

$$\sum |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Effettivamente  $\Phi_y : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$  è lineare e continua per  $\|\cdot\|_{(\ell_p)^*}$ , infatti

$$\|\Phi_y\|_{(\ell_p)^*} = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \left| \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \right| \leq \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|x\|_p \|y\|_q = \|y\|_q.$$

La stessa disuguaglianza mostra che  $\Phi$  stessa è un elemento di  $L(\ell_q, (\ell_p)^*)$  di norma minore o uguale a 1.

Resta da mostrare che  $\Phi$  è isometrica e surgettiva.

$1 < p < \infty$  Per mostrare che  $\|\Phi_y\|_{\ell_p^*} = \|y\|_q$  per ogni  $y \in \ell_q$  consideriamo  $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dato da  $x_i = \overline{\text{sgn } y_i} |y_i|^{q-1}$ . Con questa scelta si ha che

$$x_i y_i = \overline{\text{sgn } y_i} \text{sgn } y_i |y_i|^q = |y_i|^q,$$

inoltre

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|^p = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^{(q-1)p} = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^q = \|y\|_q^q,$$

cioè  $x \in \ell_p$  e

$$\|\Phi_y\|_{\ell_p^*} \geq \frac{\Phi_y(x)}{\|x\|_p} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^q}{(\|y\|_q^q)^{1/p}} = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q,$$

d'altronde sappiamo che vale anche l'altra disuguaglianza in generale, quindi abbiamo  $\|\Phi_y\|_{\ell_p^*} = \|y\|_q$  come voluto.

$p = \infty, q = 1$  Sia  $x_i = \overline{\text{sgn } y_i}$ . Segue che  $\|x\|_{\infty} \leq 1$  quindi è un elemento valido e

$$\Phi_y(x) = \|y\|_1,$$

da cui segue  $\|\Phi_y\|_{\ell_{\infty}^*} \geq \|y\|_1$  come voluto.

$p = 1, q = \infty$  In generale  $\|\Phi_y\|_{\ell_1^*}$  non è raggiunto come  $\Phi_y(x)$  per qualche  $x$ <sup>2</sup>. La conclusione però vale comunque.

Mostriamo ora che l'inclusione è surgettiva per  $1 \leq p < \infty$ . Per ogni  $\varphi \in \ell_p^*$  cerchiamo  $y \in \ell_q$  tale che  $\varphi = \Phi_y$ . C'è un solo  $y$  possibile, basta valutare  $\varphi$  negli  $e_i = (\delta_{ij})_j$ . Per ogni  $m \in \mathbb{N}$  sia  $P_m : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^m$  il proiettore sulle prime  $m$ -entrate. Considerando  $P_m$  come operatore  $P_m : \ell_p \rightarrow \ell_p^m \subseteq \ell_p$  restringendo il dominio, definiamo  $\varphi_m = \varphi \circ P_m = P_m^* \varphi$ . Infine, sia

$$y_m = P_m y = (y(0), y(1), \dots, y(m-1), 0, 0, \dots) = \sum_{i=0}^{m-1} y_i e_i,$$

e notiamo che

$$\varphi_m = \Phi_{y_m}$$

infatti sono entrambi elementi di  $\ell_p^*$  e

$$\begin{aligned} \varphi_m(e_k) &= \varphi(P_m(e_k)) = \begin{cases} \varphi(e_k) & \text{se } k < m \\ 0 & \text{se } k \geq m \end{cases} \\ \Phi_{y_m}(e_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_m(i) e_k(i) = y_m(i) = \begin{cases} \varphi(e_k) & \text{se } k < m \\ 0 & \text{se } k \geq m \end{cases} \end{aligned}$$

quindi  $\varphi_m$  e  $\Phi_{y_m}$  coincidono su  $(e_k)$ , quindi sullo span di questi e quindi sulla chiusura di questo span, che è  $\ell_p$  se  $p < \infty$ .

Essendo  $\Phi$  isometrica

$$\|y_m\|_q = \|\Phi_{y_m}\|_{\ell_p^*} = \|\varphi_m\|_{\ell_p^*} \leq \|\varphi\|_{\ell_p^*}$$

quindi  $\sum_{i=0}^{m-1} |y(i)|^q \leq \|\varphi\|_{\ell_p^*}^q$  per ogni  $m$ , dunque passando al sup in  $m$

$$\|y\|_q \leq \|\varphi\|_{\ell_p^*}$$

e quindi  $y$  era un elemento valido di  $\ell_q$ . □

<sup>2</sup>per esempio  $y_i = 1 - 2^{-i}$  perché in tal caso  $\Phi_y(x) = \sum (1 - 2^{-i}) x_i < \sum |x_i| = \|x\|_1$



**Proposizione B.9.**

Si ha che  $\ell_1 \cong c_0^*$

*Dimostrazione.*

Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \ell_1 & \longrightarrow & c_0^* \\ y & \longmapsto & x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \end{array}$$

Allora  $\Phi$  è lineare e  $|\Phi_y(x)| \leq \|x\|_{\infty} \|y\|_1$ .  $\Phi$  è isometrica

$$\|\Phi_y\|_{c_0^*} = \sup_{\|x\|_{\infty} \leq 1, x \in c_0} \sum x_i y_i = \|y\|_1,$$

infatti l'estremo superiore si realizza con la successione  $x^n = \overline{\text{sgn } y} \chi_{[0,n]}$  ( $\Phi_y(x^n) = \sum_{i=0}^n |y_i|$  e passando al limite in  $n$  troviamo proprio  $\|y\|_1$ ). Inoltre  $\Phi$  è surgettiva infatti  $(e_k)_k \in \mathbb{N} \subseteq c_0$  genera un sottospazio denso.  $\square$

**B.2.1  $\ell_1$ ,  $c_0$  e  $\ell_{\infty}$** 

**Definizione B.10** (Finita additività).

Una funzione  $\mu : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{K}$  è **finitamente additiva** se per ogni  $A, B \subseteq S$  disgiunti,  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

*Osservazione B.11.*

Domanda:  $c_0$  è un duale? Cioè, esiste  $X$  Banach tale che  $X^*$  è linearmente omeomorfo a  $c_0$ ?

NO! Perché  $c_0$  non è complementato in  $\ell_{\infty}$  (difficile da mostrare). Questo basta per (3.12).

**Lemma B.12.**

Se  $X$  è un sottospazio  $\infty$ -dimensionale di  $\ell_1$  allora esiste una successione  $(x_k) \subseteq X$  e una successione di naturali  $(T_k) \subseteq \mathbb{N}$  strettamente crescente tali che

$$\begin{cases} \|x_k\|_1 = 1 \\ \|x_k\|_{1,[0,T_k]} = \sum_{i=0}^{T_k} |x_k(i)| \geq 3/4 \\ x_{k+1}|_{[0,T_k]} = 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

Scegliamo  $x_0 \in X$  di norma 1 e  $T_0 \in \mathbb{N}$  che abbia la seconda proprietà. Supponiamo ora di aver definito  $x_0, \dots, x_k$  e di avere  $T_0 < \dots, T_k$ , allora

$$X \cap \left\{ x \in \ell_1 \mid x|_{[0,T_k]} = 0 \right\} \neq \emptyset$$

in quanto intersezione fra un sottospazio di dimensione infinita e dei sottospazi di codimensione finita, infatti quell'intersezione si può scrivere come

$$\bigcap_{0 \leq i \leq T_k} \{x \in X \mid x(i) = 0\}.$$

Prendendo un elemento  $x_{k+1}$  normalizzato in questa intersezione abbiamo esteso la successione. Per scegliere  $T_{k+1}$  basta prenderlo maggiore di  $T_k$  e tale che

$$\|x_{k+1}\|_{1,[0,T_{k+1}]} \geq 3/4.$$

$\square$

**Proposizione B.13.**

Se  $Y \subseteq \ell_1$  è un sottospazio chiuso di dimensione infinita allora  $Y$  contiene una copia di  $\ell_1$ .

*Se guardi a lungo dentro  $\ell_1$ ,  $\ell_1$  guarda dentro di te.*

*Dimostrazione.*

Sia  $X$  sottospazio chiuso di dimensione infinita di  $\ell_1$  e siano  $(x_k) \subseteq \ell_1$  e  $(T_k) \subseteq \mathbb{N}$  come nel lemma (B.12) Definiamo l'operatore lineare

$$L : \begin{array}{ccc} \ell_1 & \longrightarrow & X \\ \lambda & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \end{array}$$

$L$  è ben definita perché la serie è assolutamente convergente rispetto a  $\|\cdot\|_1$

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|x_k\|_1 \leq \|\lambda\|_1.$$

Notiamo anche che  $X$  chiuso e quindi  $L$  continuo di norma  $\|L\| \leq 1$ .

Sia  $I_k = [0, T_k]$  e notiamo che

$$\begin{aligned} \|L\lambda\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \right\| \geq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k|_{I_k} \right\| - \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \lambda_k x_k|_{I_k^c} \right\| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|x_k|_{I_k}\|_1 - \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \|x_k|_{I_k^c}\|_1 \geq \\ &\geq \frac{3}{4} \|\lambda\|_1 - \frac{1}{4} \|\lambda\|_1 = \frac{1}{2} \|\lambda\|_1 \end{aligned}$$

dunque  $L : \ell_1 \rightarrow X$  è fortemente iniettivo e quindi è un isomorfismo con l'immagine in quanto questa è chiusa.  $\square$

**Esercizio B.14.**

$c_0$  non è un duale.

*Dimostrazione.*

Segue dalla proposizione (B.13): se esistesse  $X$  tale che  $X^* \cong c_0$  allora  $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**} \cong \ell_1$  e quindi per la proposizione  $X$  contiene un sottospazio  $Y$  isomorfo a  $\ell_1$ , ma allora da  $Y \subseteq X$  segue

$$\ell_\infty \cong \ell_1^* \cong Y^* \stackrel{(5.40)}{\cong} X^* / \text{Ann}(Y) \cong c_0 / \text{Ann } Y$$

ma  $\ell_\infty$  non è separabile mentre  $c_0$  è separabile e ogni quoziente di un separabile deve essere separabile.  $\square$

**Proposizione B.15.**

Si ha che  $\ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty^*$  è una immersione isometrica NON surgettiva.

*Dimostrazione.*

L'iniezione è chiara. Consideriamo le funzioni che hanno limite (le costanti a meno di una infinitesima)

$$c = \left\{ x \in \ell_\infty \mid \exists \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \right\} \cong c_0 \oplus \mathbb{R}$$

Esiste un funzionale su  $c$  dato da

$$\lambda: \begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \lim y_i \end{array}.$$

Questo è continuo perché  $\|\lambda\| \leq 1$  (perché  $|\lim y_i| \leq \|y\|_\infty$ ). Per il teorema di Hahn-Banach (3.4) si estende ad un funzionale continuo in  $\ell_\infty$ .

Consideriamo

$$ba = \{\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{K} \mid \text{limitate e finitamente additive.}\} \subseteq (\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$$

e la mappa

$$\Psi: \begin{array}{ccc} \ell_\infty^* & \longrightarrow & ba \\ y & \longmapsto & A \mapsto y(\chi_A) \end{array}$$

Notiamo che  $\Psi$  è surgettiva: se  $\mu \in ba$  e definiamo una funzione lineare su  $\ell_\infty$  come segue

- Se  $x \in \ell_\infty$  è della forma  $x = \sum c_i \chi_{A_i}$ , cioè  $x(\mathbb{N}) \subseteq \{\sum_{i \in J} c_i \mid J \subseteq \{0, \dots, n\}\}$  è finito, quindi

$$x = \sum_{c \in \mathbb{K}} c \chi_{\{x=c\}} \text{ è una somma finita}$$

Sia  $S$  il sottoinsieme di  $\ell_\infty$  delle successioni di questa forma. Mostriamo che  $\overline{S} = \ell_\infty$  dove la chiusura è presa rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ . Per ogni  $x \in \ell_\infty$  con  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  si ha che

$$x - 2^{-n} \leq x^n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \leq x$$

- Per  $x \in S$  dato da  $x = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$  poniamo  $\langle \mu, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$ . Chiaramente abbiamo linearità e la buona definizione segue dal fatto che questa espressione coincide con  $\sum_{c \in \mathbb{K}} c \mu(\{x=c\})$  per finita additività, ma questa forma è univocamente determinata da  $x$ .
- Vale che  $|\langle \mu, x \rangle| \leq \|x\|_\infty (\sum_{c \in \mathbb{K}} |\mu(\{x=c\})|)$  infatti per ogni  $c$ , se  $\mu(\{x=c\}) \neq 0$  allora  $|c| \leq \|x\|_\infty$  per definizione.
- Per ogni  $\mu$  esiste  $C$  tale che per ogni  $x \in S$  si ha

$$|\langle \mu, x \rangle| \leq C \|x\|_\infty$$

(VERIFICARE!)

- Quindi  $\mu$  si estende alla chiusura di  $S$ , che è tutto  $\ell_\infty$ .

Notiamo che  $ba = \ell_\infty^* = \ell_1^{**} = c_0^{***}$ , quindi  $\ell_1 \hookrightarrow \ell_1^{**} = ba$  è complementato per il lemma (3.12).  $\square$

**Proposizione B.16** (Convergenza forte e debole coincidono su  $\ell_1$ ).

*La convergenza debole e la convergenza in norma per  $\ell_1$  sono la stessa cosa.*

*Dimostrazione.*

Poiché la topologia debole è meno fine della topologia forte basta mostrare che convergenza debole implica convergenza in  $\|\cdot\|_1$ .

Sia  $f_n \rightarrow f$  in  $w\text{-}\ell_1$ , cioè per ogni funzionale  $\phi$  lineare continuo su  $\ell_1$  si ha che  $\langle \phi, f_n \rangle \rightarrow \langle \phi, f \rangle$ . Dunque, ricordando (B.8) che  $\ell_\infty = \ell_1^*$ , per ogni  $\varphi \in \ell_\infty$  si ha

$$\sum_i \varphi(i) f_n(i) \rightarrow \sum_i \varphi(i) f(i).$$

Notiamo che, portando  $f$  al primo membro possiamo supporre senza perdita di generalità  $f = 0$ . Per la proprietà di Uhrison (1.49) basta provare che esiste una sottosuccessione di  $f_n$  che converge a 0 infatti  $f_n \rightarrow 0$  se e solo se per ogni sottosuccessione  $f_{n_k}$  esiste una sotto-sottosuccessione  $f_{h_{k_j}} \rightarrow 0$ .

Nel caso particolare di successioni  $f_n$  a supporto disgiunto la tesi è facile: Se siamo in questo caso scegliamo  $\varphi \in \ell_\infty$  data da

$$\varphi = \sum \overline{\operatorname{sgn} f_i} \text{ dove } (\operatorname{sgn} f_i)(x) = \operatorname{sgn}(f_i(x)) = \begin{cases} f_i(x)/|f_i(x)| & f_i(x) \neq 0 \\ 0 & f_i(x) = 0 \end{cases}$$

in modo tale che  $\langle \varphi, f_n \rangle = \langle \overline{\operatorname{sgn}(f_n)}, f_n \rangle = \|f_n\|_1$  e stesso per  $f$ , quindi in questo caso è chiaro che convergenza debole implica convergenza in  $\|\cdot\|_1$ .

Assumiamo dunque che  $f_n \rightarrow 0$  debolmente (e quindi puntualmente guardando i funzionali che estraggono la  $n$ -esima entrata). Basta provare che esiste una successione  $(g_j)_{j \geq 0} \subseteq \ell_1$  e una sottosuccessione  $f_{n_j}$  tale che  $\|f_{n_j} - g_j\|_1 \rightarrow 0$  e  $g_j$  hanno supporto disgiunto.

Costruiamo le  $g_j$  per induzione. Notiamo che

- per ogni  $f_n$  si ha che  $\|f_n \chi_{\mathbb{N} \setminus [0, T]}\|_1 \rightarrow 0$  per  $T \rightarrow \infty$
- per ogni  $T$  si ha  $\|f_n \chi_{[0, T]}\|_1 \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$

quindi per costruire le  $g_j$  basta alternare questi fatti prendendo opportuni limiti (credo?).  $\square$

*Osservazione B.17.*

Questo è un esempio dove due topologie diverse hanno “le stesse successioni convergenti”.

**Fatto B.18.**

Esiste  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$  di cardinalità del continuo tale che per ogni  $A, B \in \mathcal{A}$  dove  $A \neq B$  allora  $|A \cap B| < \aleph_0$  e  $|A| = |B| = \aleph_0$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $\mathbb{Q}$  al posto di  $\mathbb{N}$ , tanto per le cardinalità non cambia nulla. Per ogni irrazionale  $\lambda$  consideriamo  $A_\lambda = \{\lfloor n\lambda \rfloor / n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ . Poniamo  $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ . Ogni  $A_\lambda$  è infinito ma se  $\lambda \neq \mu$  allora  $A_\lambda \cap A_\mu$  è finito perché ogni successione che converge a  $\lambda$  cade definitivamente in un intorno di  $\lambda$  e similmente per  $\mu$ , allora scelgo intorni disgiunti.  $\square$

**Lemma B.19.**

Ogni sottospazio  $Y$  di  $\ell_\infty$  ha duale  $w^*$ -separabile.

*Dimostrazione (modo diretto).*

Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  sia  $e_k : Y \rightarrow \mathbb{K}$  la valutazione  $f \mapsto f(k)$ . Allora<sup>3</sup>  $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}})$  è  $w^*$ -denso in  $Y^*$  e quindi  $Y^*$  è  $w^*$ -separabile: stiamo usando il criterio  $\operatorname{Span} S \subseteq Y^*$  è  $w^*$ -denso se e solo se  $S_\perp = (0)$  (proposizione (5.36) e corollario (5.37)) e

$$(\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}})_\perp = \{y \in Y \mid \langle e_k, y \rangle = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\} = \{0\} \subseteq \ell_\infty.$$

$\square$

---

<sup>3</sup> $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$  se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Dimostrazione (concettuale).*

Se  $(X, \|\cdot\|)$  è uno spazio normato separabile,  $X^{**}$  è sempre  $w^*$ -separabile, quindi consideriamo  $X = c_0$ ,  $X^{**} = \ell_\infty$ . Questo è vero perché se  $S \subseteq X$  è numerabile e  $\|\cdot\|$ -denso allora la sua chiusura debole\* in  $X \subseteq X^{**}$  contiene almeno  $X$  (su  $X$  la  $\sigma(X^{**}, X)$  induce  $\sigma(X, X^*)$  che è meno fine della topologia forte e quindi  $\overline{X}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = X^{**}$  per Goldstine (5.39)).

Se poi  $Y \subseteq \ell_\infty$  sappiamo che  $Y^*$  è un quoziente di  $\ell^*$  (dato da  $\ell_\infty^*/Y^\perp$ ) in quanto la mappa  $\pi : \ell_\infty^* \rightarrow \ell_\infty^*/Y^\perp$  è  $w^*$ -continua e surgettiva<sup>4</sup> (e quindi l'immagine di  $S \subseteq \ell_\infty^*$  densa resta densa). Se  $\overline{S} = \ell_\infty^*$  allora

$$\pi(\ell_\infty^*) = \pi(\overline{S}) \subseteq \overline{\pi(S)}$$

□

### Proposizione B.20.

$c_0$  non è complementato in  $\ell_\infty$ .

*Dimostrazione.*

Supponiamo che esista  $Y$  sottospazio chiuso di  $\ell_\infty$  tale che  $\ell_\infty = Y \oplus c_0$ , allora  $Y$  sarebbe omeomorfo al quoziente  $\ell_\infty/c_0$ , ma ogni sottospazio di  $\ell_\infty$  è  $w^*$ -separabile per il lemma, ma  $\ell_\infty/c_0$  non lo è:

Fissiamo  $\mathcal{A}$  come nel fatto (B.18). Per ogni  $A \in \mathcal{A}$  notiamo che  $\chi_A \in \ell_\infty$ . Sia  $\xi_A$  l'immagine di questa caratteristica in  $\ell_\infty/c_0$ . Sia  $g \in (\ell_\infty/c_0)^*$ , affermo che

$$S = \{A \in \mathcal{A} \mid \langle g, \xi_A \rangle \neq 0\} \text{ è al più numerabile.}$$

Basta mostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$  l'insieme  $S_\varepsilon = \{A \in \mathcal{A} \mid |\langle g, \xi_A \rangle| \geq \varepsilon\}$  è finito (infatti  $S = \bigcup_{\varepsilon > 0} S_\varepsilon$ ).

Siano  $A_1, \dots, A_m \in S_\varepsilon$  e definiamo  $\xi = \sum_{i=1}^m \overline{\text{sgn}(\langle g, \xi_{A_i} \rangle)} \xi_{A_i}$ . Per linearità

$$\xi = \pi \left( \sum_{i=1}^m \overline{\text{sgn}(\langle g, \xi_{A_i} \rangle)} \chi_{A_i} \right),$$

dunque

$$\langle g, \xi \rangle = \sum_{i=1}^m \overline{\text{sgn}(\langle g, \xi_{A_i} \rangle)} \langle g, \xi_{A_i} \rangle = \sum_{i=1}^m |\langle g, \xi_{A_i} \rangle| \geq m\varepsilon.$$

Inoltre  $\|\xi\|_{\ell_\infty/c_0} = 1$  perché qualunque combinazione lineare  $\varphi$  delle  $\chi_{A_i}$  ha valore superiore a 1 solo sulle intersezioni delle  $A_i$  e questo è un insieme finito, quindi  $\varphi = 1 + h$  per  $h \in c_0$ , quindi  $[\varphi] = 1$ .

Mettendo tutto insieme  $\|g\| \geq \|\langle g, \xi \rangle\| \geq m\varepsilon$  e quindi  $m \leq \|g\|/\varepsilon$ , dunque

$$|S_\varepsilon| \leq \frac{\|g\|}{\varepsilon}.$$

Se  $G \subseteq (\ell_\infty/c_0)^*$  è un sottoinsieme numerabile allora è numerabile anche

$$\bigcup_{g \in G} \{A \in \mathcal{A} \mid \langle g, \xi_A \rangle \neq 0\}$$

perché unione numerabile di insiemi al più numerabili. Poiché  $\mathcal{A}$  non è numerabile esiste  $\tilde{A} \in \mathcal{A}$  tale che

$$\langle g, \xi_{\tilde{A}} \rangle = 0 \quad \forall g \in G$$

<sup>4</sup>Se  $j : Y \rightarrow X$  è l'inclusione,  $j^* = \pi : X^* \rightarrow Y^*$  è surgettiva e  $w^*$ -continua (4.10).

e  $\xi_{\tilde{A}} \neq 0$  perché ha norma pari a 1, cioè

$$\xi_{\tilde{A}} \in G_{\perp} \neq (0)$$

ma ricordiamo che  $\overline{\text{Span}(G)}^{w^*} = (G_{\perp})^{\perp}$  e che  $\text{Span}(G)$  è  $w^*$ -denso se e solo se  $G_{\perp} = (0)$  (5.33).  $\square$