

Istituzioni di Analisi Matematica
Corso del prof. Pietro Majer

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

1	Norme e Seminorme	2
1.1	Norme e seminorme	2
1.1.1	Teoremini filosofici	4
1.2	Completezza	5
2	Spazi vettoriali topologici	8
2.1	Intorni dell'origine in SVT	9
2.2	SVT localmente convessi	11
2.2.1	Funzionali di Minkowski	12
2.3	Continuità di operatori lineari in SVT	13
2.4	Topologie deboli	14
2.4.1	Caso degli spazi normati	16
3	Teorema di Hahn-Banach	18
3.1	Teorema di Hahn-Banach reale	18
3.1.1	Inclusione isometrica nel biduale	20
3.1.2	Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach	21
3.2	Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach	22
3.2.1	Teorema di Hahn-Banach complesso	22
3.2.2	Teoremi di separazione dei convessi	22
3.3	Parentesi esercizi	24
4	Costruzioni su spazi normati	26
4.1	Costruzione di duali	28
5	Completezza e duali di qualche spazio	29
5.1	Elenco di spazi completi	29
5.2	Duali di spazi concreti	33
A	Topologia	34

Capitolo 1

Norme e Seminorme

Il corso si concentra sulla relazione che si crea tra la struttura lineare e la struttura topologia degli spazi normati.

Per \mathbb{K} intendiamo un campo tra \mathbb{R} o \mathbb{C} .

1.1 Norme e seminorme

Definizione 1.1 (Seminorma).

Se X è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , una **seminorma** è una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Disuguaglianza triangolare*)
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ (*Positivamente omogenea*)
- 2'. $\|\lambda x\| = \|x\|$ se $|\lambda| = 1$ (*Isotropia*)

Se inoltre vale $\|x\| = 0 \iff x = 0$ allora $\|\cdot\|$ è detta **norma**.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio (semi)normato**.

Osservazione 1.2.

Su uno spazio (semi)normato possiamo definire una (semi)distanza indotta ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Diamo alcuni esempi di spazi normati e seminormati:

Esempio 1.3. 1. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$

2. Per $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < \infty \right\}$ con $\|x\|_p = \left(\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{1/p}$

3. $\ell_\infty = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup |x_i| < \infty \right\}$ con $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$

4. $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ misurabile, } \|f\|_p < \infty \right\}$ con

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf_{\substack{N \subseteq X, \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è uno spazio seminormato ma non normato.

5. Spazi di Hilbert.

Definizione 1.4 (Funzioni continue, limitate e lineari).

Siano E, F spazi normati e S un insieme, definiamo i seguenti spazi normati:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(S, E) &= \{f : S \rightarrow E, \text{ limitate}\}, & \|f\|_{\infty, S} &= \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \\ \mathcal{BC}(S, E) &= \{f : S \rightarrow E, \text{ continue e limitate}\}, & \|f\|_{\infty, S} &= \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \\ L(E, F) &= \{T : E \rightarrow F \text{ lineare}, \|T\| < \infty\}, & \|T\| &= \sup_{x \in B_E(0,1)} \|T(x)\|_F\end{aligned}$$

Definizione 1.5 (Spazio duale).

Sia V uno spazio vettoriale. Denotiamo con V' il **duale algebrico**, cioè l'insieme delle mappe lineari $V \rightarrow \mathbb{K}$.

Definiamo lo **spazio duale** a V come $V^* = L(V, \mathbb{K})$, cioè come il sottoinsieme di V' dato dalle mappe continue. La norma su V^* è quindi data da

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \stackrel{\text{Lineare}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Proposizione 1.6 (Per funzionale limitato equivale continuo).

Per un funzionale lineare in V^* , essere limitato è equivalente ad essere continuo.

Dimostrazione.

Se $\|f\| = M \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \left\| f \left(\frac{x - y}{\|x - y\|} \right) \right\| \|x - y\| \leq \|f\| \|x - y\| = M \|x - y\|,$$

cioè f è M -lipschitz, e quindi continua.

Sia ora f lineare e continua. Per definizione di continuità in 0 esiste $\delta > 0$ tale che $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \leq 1$ per ogni $x \in B_V(0, \delta)$. Segue che

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} f \left(\delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\delta},$$

cioè $\|f\|_{V^*} \leq 1/\delta$ e quindi f limitato. \square

Osservazione 1.7.

Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio seminormato e $N = \ker \|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$ allora $\|\cdot\|$ passa al quoziente e lo rende uno spazio normato.

Esempio 1.8.

Considerando lo spazio seminormato $(\mathcal{L}^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$, la costruzione sopra corrisponde a definire lo spazio normato $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$, infatti $\ker \|\cdot\|_p$ sono le funzioni con supporto in un insieme trascurabile.

Osservazione 1.9.

$L(E, F) \hookrightarrow \mathcal{B}(B_E(0, 1), F)$ mandando $T \mapsto T|_{B_E(0,1)}$. Infatti per definizione questa mappa è isometrica¹. Questo identifica il primo spazio con un chiuso del secondo.

¹ $\|T\| = \left\| T|_{B_E(0,1)} \right\|_{\infty, B_E(0,1)}$

1.1.1 Teoremini filosofici

Teorema 1.10 (Banach Mazur).

Sia $(E, \|\cdot\|)$ normato, $f : E \rightarrow E$ isometria². Allora f è affine.

Dimostrazione. (ESERCIZIO).

TRACCIA:

- Basta provare che $\forall a, b \in E$ vale

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

(conservando questa conserva i razionali 2-adici e quindi per continuità ogni combinazione convessa)

- Fissati $a, b \in E$, definiamo la *deficienza affine* di f (rispetto ad a e b)

$$def(f) = \left\| \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right\} \right\|$$

La tesi è $def(f) = 0$.

- Notiamo che

$$def(f) \leq \left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{f(a)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(b)}{2} \right\| = \frac{1}{2} (\|a+b\| + \|a\| + \|b\|)$$

- Consideriamo l'applicazione affine che scambia $f(a)$ e $f(b)$ data da

$$\rho(y) = f(a) + f(b) - y$$

Poniamo $\tilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$.

- Mostrare $def(\tilde{f}) = 2def(f)$.
- Se $def(f) \neq 0$, iterando otteniamo che esiste g tale che $def(g)$ è arbitrariamente grande (raddoppio $def(f)$ tante volte), ma questo è assurdo perché abbiamo il limite trovato prima che non dipende dalla funzione.

□

Filosoficamente questo vuol dire che la struttura metrica in un qualche modo determina la struttura vettoriale.

Teorema 1.11 (Inclusione isometrica / Fréchet-Kuratowski).

Sia (M, d) spazio metrico. Allora esso si immerge isometricamente in uno spazio normato³. In particolare si immerge in $(\mathcal{BC}(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ via l'assegnazione seguente:

Fissiamo un punto base $x_0 \in M$.⁴

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{BC}(M, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0) \end{array}$$

²con questo termine intendiamo che la mappa, oltre a rispettare le distanze, è anche bigettiva. Se non vale bigettività diremo "inclusione isometrica"

³addirittura di Banach.

⁴saremmo tentati da $x \mapsto d(\cdot, x)$, ma la funzione in arrivo non è limitata e quindi non esiste una norma ben definita

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

Filosoficamente questo vuol dire che studiando mappe tra spazi metrici, possiamo pensare al codominio come spazi normati.

Se consideriamo l'immersione di uno spazio metrico in un Banach, possiamo “incicciottirlo” e trovare uno spazio metrico “vicino” che è localmente contraibile. Queste idee a volte possono aiutare.

1.2 Completezza

Definizione 1.12 (Successione di Cauchy).

Una successione (x_n) è **di Cauchy** o **fondamentale** se $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p, q > n$ si ha $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Fatto 1.13 (Proprietà delle successioni di Cauchy).

1. Ogni successione convergente è di Cauchy.
2. Se (x_n) è di Cauchy e $\tilde{x} \in X$ è un punto ad essa aderente allora \tilde{x} è il limite.
3. Se (x_n) come sopra ha una sottosuccessione convergente, la successione converge allo stesso limite.
4. Ogni successione di Cauchy⁵ (x_n) ha una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}.$$

Definizione 1.14 (Spazio completo).

Uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge.

Se $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato è completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$ allora si dice **di Banach**.

Osservazione 1.15.

Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie $\sum x_k$ definita a partire da una successione tale che $\|x_k\| < 2^{-k}$ è convergente.

Equivalentemente X di Banach se ogni serie $\sum x_k$ assolutamente convergente⁶ è convergente.

Dimostrazione.

Ogni successione si può scrivere come serie, infatti $y_n = \sum_{i=0}^n x_i$ per $x_i = y_i - y_{i-1}$. Il resto segue pensando sulle definizioni. □

Osservazione 1.16.

Sia $Y \subseteq X$ con (X, d) metrico.

- Se X è completo e Y è chiuso allora Y è completo.
- Se Y è completo allora è anche chiuso.

Proposizione 1.17 (Completamento).

Sia (X, d) uno spazio metrico, allora

⁵questa proprietà è comoda perché implica $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < 2^{-k+1}$ per ogni $p > k$

⁶cioè $\sum \|x_k\|$ convergente

1. esiste una inclusione isometrica densa di X in uno spazio metrico completo

$$j : (X, d) \hookrightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$$

2. il completamento è universale, cioè se $j' : (X, d) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{d}')$ è un'altra mappa come sopra allora esiste un'unica isometria $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ & \searrow j' & \downarrow \phi \\ & & \tilde{X}' \end{array}$$

Dimostrazione.

Consideriamo un paio di costruzioni

Costruzione 1 Consideriamo

$$C_X = \{\xi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \xi \text{ di Cauchy}\}$$

con una semidistanza⁷

$$d(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \eta_n).$$

Questo limite esiste perché la successione di queste distanze è di Cauchy in \mathbb{R} , che è completo. Notiamo che

$$d(\xi, \eta) = 0 \iff d(\xi_n, \eta_n) = o(1).$$

Notiamo che X ha una inclusione isometrica in (C_X, d) data associando a x la successione costante al valore x .

Consideriamo

$$\tilde{X} = C_X / \mathcal{R}, \quad \xi \mathcal{R} \eta \iff d(\xi, \eta) = 0.$$

L'inclusione isometrica di prima definisce $X \hookrightarrow \tilde{X}$, ma stavolta \tilde{X} è uno spazio metrico per costruzione.

ESERCIZIO: VERIFICA PROPRIETÀ DI NORMA E DENSITÀ

Costruzione 2 Definiamo \tilde{X} come la chiusura in $(\mathcal{BC}(X), \|\cdot\|_{\infty})$ dell'immagine di X tramite l'inclusione di Fréchet Kuratowski (1.11).

Costruzione 3 (Solo per X spazio normato, ma per il teorema di inclusione isometrica (1.11) questo è sufficiente) Vedremo che esiste una inclusione isometrica di X nel suo biduale ($x \mapsto \text{val}_x$) e che il biduale stesso è completo, quindi un completamento di X è fornito dalla chiusura di $\text{val}_*(X) \subseteq X^{**}$

□

Proposizione 1.18 (Estensione per densità di uniformemente continue).

Siano X e Y spazi metrici, Y completo, $D \subseteq X$ denso e $f : D \rightarrow Y$ uniformemente continua, allora esiste un'unica estensione continua \tilde{f} di f a tutto X , inoltre \tilde{f} è essa stessa uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{I} \cap & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

⁷VERIFICARE CHE LO È

Definizione 1.19 (Categorie di spazi metrici).

Sia Met la categoria degli spazi metrici con mappe date da applicazioni uniformemente continue e CMet la sottocategoria piena dove gli oggetti sono spazi metrici completi

Osservazione 1.20.

L'operazione di completamento è un funtore⁸ $\sim : \text{Met} \rightarrow \text{CMet}$. Questo funtore è aggiunto al funtore dimenticante / di inclusione $j : \text{CMet} \rightarrow \text{Met}$, infatti

$$\text{Hom}_{\text{CMet}}(\tilde{X}, Y) = UC(\tilde{X}, Y) \stackrel{(1.18)}{\cong} UC(X, j(Y)) = \text{Hom}_{\text{Met}}(X, j(Y)).$$

Esercizio 1.21.

Verificare l'aggiunzione.

⁸preserva composizione per l'unicità della mappa tra estensioni

Capitolo 2

Spazi vettoriali topologici

Definizione 2.1 (Spazio vettoriale topologico).

Uno **spazio vettoriale topologico** è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ munito di una topologia che rende continue le mappe

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X.$$

Esempio 2.2.

Esempi di SVT sono

- Ogni spazio normato
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.
- Se X è uno spazio topologico qualunque considero $C(X, \mathbb{R})$ con topologia di convergenza uniforme su compatti.

Esercizio 2.3.

La topologia della convergenza uniforme su compatti su $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non è indotta da una norma.

Dimostrazione.

TRACCIA

- Su uno spazio normato, se U e V sono intorni di 0 allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda U \supseteq V$.
- Mostrare che la topologia della convergenza uniforme su compatti non ha questa proprietà.

□

Esercizio 2.4.

Ogni SVT che è T_0 è anche¹ T_3 e² $T_{3\frac{1}{2}}$

Esercizio 2.5 (Spazi non T_0 non sono troppi interessanti).

Ogni SVT X si decompone in somma diretta topologica $X = Y \oplus \overline{\{0\}}$ con Y qualunque addendo algebrico di $\{0\}$. Segue che $Y \cong X/\{0\}$, Y risulta essere T_0 e $\{0\}$ ha la topologia indiscreta.

¹In questo corso con T_3 intendiamo T_3 e Hausdorff

² $T_{3\frac{1}{2}}$ è T_3 più esiste una funzione continua che vale 1 sul punto e 0 sul chiuso che sto separando

2.1 Intorni dell'origine in SVT

Definizione 2.6 (Filtro).

Un **filtro** \mathcal{F} su un insieme X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X tale che

- per ogni $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$
- Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subseteq F'$ allora $F' \in \mathcal{F}$
- Se $F, F' \in \mathcal{F}$ allora $F \cap F' \in \mathcal{F}$

Definizione 2.7 (Sottoinsieme bilanciato).

Sia X un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $A \subseteq X$. A è **bilanciato** se per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$ si ha $a \in A \implies \lambda a \in A$, cioè

$$B_{\mathbb{K}}(0, 1) \cdot A \subseteq A.$$

Osservazione 2.8.

Se V è bilanciato allora $0 \in V$ perché $0 \in B_{\mathbb{K}}(0, 1)$.

Definizione 2.9 (Sottoinsieme assorbente).

Sia X un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $B \subseteq X$. B è **assorbente** se per ogni $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $t \geq n_x$ si ha $x \in tB$.

Osservazione 2.10.

Poiché in uno SVT le traslazioni $X \rightarrow X$ con $x \mapsto x + x_0$ sono omeomorfismi, per descrivere la topologia basta descrivere il filtro degli intorni di 0.

Come notazione sia $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$ l'insieme degli intorni di $0 \in X$.

Proposizione 2.11 (Proprietà intorni di 0).

\mathcal{U} ha le seguenti proprietà

1. \mathcal{U} è un filtro
2. Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$
3. Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$ e V bilanciato
4. Ogni elemento di \mathcal{U} è assorbente

Dimostrazione.

Dimostriamo le varie proprietà

1. La proprietà 1. è vera per ogni insieme definito come “gli intorni di x ” per x fissato in spazio topologico X .
2. Segue dalla continuità di $+$ in $(0, 0) \in X \times X$. Basta definire V in modo tale che $V \times V \subseteq +^{-1}(U)$.
3. Segue dalla continuità di \cdot in $(0, 0)$. Se U intorno di 0 in X , siano $\varepsilon > 0$ e $V \in \mathcal{U}$ tali che $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \times V \subseteq \cdot^{-1}(U)$. Allora $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \cdot V$ è bilanciato e contenuto in U per costruzione. Questo insieme è anche un intorno perché si può scrivere come

$$\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$$

e poiché V è un intorno di 0, ogni λV è un intorno di 0, quindi anche questa unione.

4. Segue dalla continuità della mappa $\mathbb{R}_+ \rightarrow X$ che per fissato $x_0 \in X$ assegna $s \mapsto sx_0$. Infatti per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $0 \leq s \leq \varepsilon$, $sx_0 \in U$ e riscrivendo questo in termini di $t = 1/s$ abbiamo $x_0 \in tU$ per ogni $t \geq 1/\varepsilon$. Come n_{x_0} basta scegliere $\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$.

□

Esercizio 2.12.

Sia X spazio vettoriale su \mathbb{K} e \mathcal{U} una famiglia di sottoinsiemi di X tali che valgano le quattro proprietà della proposizione precedente (2.11). Allora esiste un'unica topologia su X che rende X uno SVT e tale che \mathcal{U} è il filtro degli intorni di 0. In questa topologia \mathcal{U} è un sistema fondamentale di intorni per 0.

Dimostrazione.

L'idea è che definiamo $A \subseteq X$ aperto se e solo se per ogni $a \in A$, $A - a \in \mathcal{U}$ (sto traducendo “aperto \iff intorno di ogni suo punto”). Si può mostrare che questa scelta definisce una topologia che rende X uno SVT. □

Esercizio 2.13.

Definire analogamente una topologia di SVT su X tramite degli assiomi che si basano su una base di intorni di 0 (al posto di tutti gli intorni). Per esempio la famiglia degli intorni bilanciati di 0.

Osservazione 2.14.

Se uno SVT è T_0 allora è automaticamente T_1 e T_2 , basta sfruttare proprietà di simmetria.

Osservazione 2.15.

Ogni SVT è uno spazio topologico regolare, cioè ogni punto ha una base di intorni chiusi. Se X è anche T_0 allora X è T_3 .

Dimostrazione.

Sia C un chiuso di X e $x \in X$ con $x \notin C$. Sia $U \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + U \cap C = \emptyset$, che esiste perché C è chiuso. Sia $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $V - V \subseteq U$, allora³ $(x + V) \cap (C + V) = \emptyset$ dove $C + V$ è un intorno di c per ogni $c \in C$ per definizione. □

Osservazione 2.16.

Se K è compatto, C chiuso con $K \cap C = \emptyset$ allora esiste V tale che $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

Dimostrazione.

Per ogni $x \in K$ sia $V_x \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + (V_x + V_x - V_x)$ è disgiunto da C . Abbiamo dunque un ricoprimento $\{x + V_x\}_{x \in K}$ di K , che è compatto, quindi estraggo un sottoricoprimento finito $\{x_i + V_{x_i}\}$ e definisco V come l'intersezione di questi. Allora

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset,$$

infatti se $x \in K + V$ allora $x = k + v$ con $k \in K$ e $v \in V$ ma $k \in x_i + V_{x_i}$ per qualche i , quindi $x = x_i + v_i + v$, e avendo supposto che $x_i + (V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i}) \cap C = \emptyset$ abbiamo che $x = x_i + v_i + v \notin C + V$. □

³Un insieme come $C + V$ è detto intorno uniforme di C

2.2 SVT localmente convessi

Definizione 2.17 (SVT localmente convesso).

Uno **spazio vettoriale topologico localmente convesso** (SVTLC) è uno SVT tale che 0 ha una base di intorni convessi.

Esempio 2.18.

Diamo alcuni esempi

- Ogni spazio normato
- $C(X)$ con X spazio topologico con la topologia della convergenza uniforme sui compatti
- $C^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e topologia della convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate in ogni ordine

Esercizio 2.19.

Sia $\mathcal{M} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{misurabili}\}$, allora esiste una metrica su \mathcal{M} che lo rende uno SVT e tale che $f_n \rightarrow f$ se e solo se $f_n \rightarrow f$ in misura, cioè per ogni

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\{ |f_n| > \varepsilon \}| = 0$$

Mostrare che l'unico intorno convesso di 0 è \mathcal{M} stesso, da cui segue $\mathcal{M}^* = \{0\}$.

Osservazione 2.20.

Per ciò che sappiamo sugli intorni di 0 in uno SVT, se X è SVTLC allora esiste una base \mathcal{B} data dagli intorni di 0 assorbenti, bilanciati e convessi.

Definizione 2.21 (Disco).

Un insieme B è detto **disco** se è assorbente, bilanciato e convesso.

Proposizione 2.22.

Sia X un \mathbb{R} -SV e \mathcal{B} una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

- Per ogni $B \in \mathcal{B}$, B è Assorbente, Bilanciato e Convesso
- Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

allora $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists r > 0, \exists B \in \mathcal{B} \mid rB \subseteq U\}$ è un filtro di insiemi che induce una topologia che rende X uno SVT come da esercizio (2.12). La topologia indotta è anche localmente convessa.

Dimostrazione.

Mostriamo le quattro proprietà:

- Chiaramente \mathcal{U} è un filtro.
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ è assorbente perché lo sono gli elementi di \mathcal{B}
- Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$, basta scegliere $V = \frac{1}{2}B$ con $B \subseteq U$ convesso in quanto se B è convesso $B + B = 2B$
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene un bilanciato perché contiene una versione scalata di un elemento di \mathcal{B} .

□

Osservazione 2.23.

Se \mathcal{B} è una famiglia di dischi allora definendo $\tilde{\mathcal{B}} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$ si ha che $\tilde{\mathcal{B}}$ rispetta gli assiomi della proposizione (2.22) e quindi induce una topologia su X che lo rende uno SVT. Questa è la meno fine tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$. In particolare \mathcal{U}_X ha una base data da $\{rB \mid B \in \tilde{\mathcal{B}}\}$.

2.2.1 Funzionali di Minkowski

Definizione 2.24 (Funzionale di Minkowski).

Sia X un \mathbb{R} -spazio vettoriale, $C \subseteq X$ convesso, $0 \in C$. Il **funzionale di Minkowski** associato a C è dato da:

$$p_C : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \inf \{t \geq 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

dove $\inf \emptyset = \infty$ in questo formalismo.

Osservazione 2.25.

Se $B(0, 1) \subseteq C \subseteq \overline{B(0, 1)}$ per X normato allora $p_C(x) = \|x\|$.

Proposizione 2.26 (Proprietà funzionali di Minkowski).

Valgono le seguenti proprietà

- C è assorbente se e solo se $p_C(x) < \infty$ per ogni $x \in X$.
- Si ha $\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$

Dimostrazione.

Mostriamo le varie proprietà

- Evidente dalla definizione di assorbente.
- Se $p_C(x) < 1$ allora esiste $0 \leq t \leq 1$ tale che $x \in tC$, cioè $x = tc$. Poiché $(1-t)0 = 0$ si ha $x = tc + (1-t)0$ e per convessità questo è un elemento di C , cioè $x \in C$.
Se $x \in C$ allora $1 \in \{t \geq 0 \mid x \in tC\}$, quindi $p_C(x) \leq 1$.

□

Osservazione 2.27 (Famiglia di seminorme induce SVTLC).

Se \mathcal{P} è una famiglia di seminorme su X , possiamo definire

$$\mathcal{B} = \{B_p(0, r) \mid p \in \mathcal{P}, r \in \mathbb{R}_+\}, \quad B_p(0, r) = \{y \in X \mid p(x - y) < r\}$$

Si può mostrare che \mathcal{B} è un insieme di dischi e quindi induce una struttura di SVTLC su X .

Osservazione 2.28.

Se \mathcal{P} è una famiglia di seminorme su X e definiamo

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\max(p_1, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathcal{P}\}$$

allora $\mathcal{U} = \{B_p(0, r) \mid p \in \tilde{\mathcal{P}}, r > 0\}$ è una base di intorni di 0 che induce la topologia dell'osservazione precedente.

Osservazione 2.29 (Ogni SVTLC è indotto da seminorme).

Poiché se B è assorbente, bilanciato e convesso, esso produce una seminorma p_B data dal funzionale di Minkowski tale che $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$, ogni topologia di X come SVTLC si può ottenere a partire da famiglie di seminorme.

Proposizione 2.30.

La topologia di SVTLC indotta da \mathcal{P} insieme di seminorme è T_0 se e solo se \mathcal{P} è separante, cioè per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.

Dimostrazione.

Se $p(x) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$ allora $x \in B(0, r)$ per ogni $p \in \tilde{\mathcal{P}}$ e per ogni $r > 0$, quindi $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}_X$, ovvero

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_X} U = \overline{\{0\}}.$$

□

2.3 Continuità di operatori lineari in SVT

Proposizione 2.31 (Continuità mappe lineari).

Sia $T : X \rightarrow Y$ lineare tra SVT. Valgono le seguenti affermazioni

1. T è continua se e solo se è continua in 0
2. T è continua se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $T(V) \subseteq U$
3. Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme \mathcal{P} e \mathcal{Q} rispettivamente, T è continua se e solo se

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \exists M \geq 0 \quad \text{tali che}$$

$$\forall x \in X, q(Tx) \leq M \max \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$$

4. Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme \mathcal{P} e \mathcal{Q} rispettivamente con \mathcal{P} e \mathcal{Q} stabili per max allora T è continua se e solo se $\forall q \in \mathcal{Q}$ esistono $p \in \mathcal{P}$ e $M \geq 0$ tali che

$$q(Tx) \leq Mp(x)$$

Dimostrazione.

Dimostriamo le affermazioni

1. Basta traslare dato che traslare è un omeomorfismo.
2. Ovvio.
3. La condizione significa che la palla di centro 0 e raggio 1 rispettivamente alla seminorma $\max(p_1, \dots, p_n)$ di X ha immagine tramite T contenuta nella palla di raggio M rispetto a q , concludendo per il punto 2. a meno di omotetia.
4. Caso sopra.

□

Proposizione 2.32 (Caratterizzazione funzionali continui).

Sia $f \in X'_{alg} \setminus \{0\}$ con X un \mathbb{K} -spazio vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. f è continua
2. $\ker f$ è chiuso
3. $\ker f$ non è denso
4. f non è surgettiva su un aperto non vuoto

5. f è limitata su un intorno di 0

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

1. \implies 2. Ovvio perché $\{0\}$ è chiuso in \mathbb{K} .
2. \implies 3. Se $\ker f$ è denso allora $\overline{\ker f} = X$ e quindi ha codimensione 0, ma $\ker f$ ha codimensione 1 in quanto $f \neq 0$, quindi $\ker f \neq \overline{\ker f}$, cioè non è chiuso.
3. \implies 4. Se $\ker f$ non è denso esiste un aperto non vuoto A disgiunto da $\ker f$, cioè $0 \notin f(A)$ e in particolare f non è surgettiva su A .
4. \implies 5. Se f non è surgettiva su aperto non vuoto allora non lo è su un intorno bilanciato U di 0 e quindi $f(U)$ è un insieme bilanciato di \mathbb{K} diverso da \mathbb{K} in quanto $f \neq 0$, dunque $f(U)$ è un disco e in particolare è limitato.
5. \implies 1. Se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in U \in \mathcal{U}_X$ allora per omogeneità

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{M}U \in \mathcal{U}_X$$

per un qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi f è continua in 0. Questo conclude perché

$$f(x) = f(x_0) + f(x - x_0).$$

□

2.4 Topologie deboli

Proposizione 2.33 (Topologia iniziale nel caso SVT).

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\mathcal{F} : \{T_i : X \rightarrow Y_i\}$ dove ogni Y_i è SVT e T_i è lineare, allora la topologia iniziale su X indotta⁴ da \mathcal{F} rende X uno SVT.

Dimostrazione.

Voglio verificare che $+$ e \cdot sono mappe continue per la topologia iniziale.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{+} & X \\ T_i \times T_i \downarrow & & \downarrow T_i \\ Y_i \times Y_i & \xrightarrow{+_i} & Y_i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \xrightarrow{\cdot} & X \\ id_{\mathbb{K}} \times T_i \downarrow & & \downarrow T_i \\ \mathbb{K} \times Y_i & \xrightarrow{\cdot_i} & Y_i \end{array}$$

Per la proprietà universale della topologia iniziale (A.2), vogliamo verificare che $T_i \circ + = +_i \circ (T_i \times T_i)$ è continua per ogni i e similmente per $T_i \circ \cdot$. Questo è vero perché la topologia iniziale è rende T_i continua per ogni i . □

Osservazione 2.34.

Se ogni Y_i inoltre è SVTLC allora anche X lo è.

⁴vedi (A.1)

Definizione 2.35 (Topologie deboli).

Sia X un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $\mathcal{F} \subseteq X'$ (duale algebrico). La topologia iniziale indotta da \mathcal{F} viene detta la **topologia debole di \mathcal{F}** e si indica $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Osservazione 2.36.

$\sigma(X, \mathcal{F}) = \sigma(X, \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}))$ quindi senza perdita di generalità possiamo sempre supporre \mathcal{F} sottospazio vettoriale di X' .

Osservazione 2.37.

La famiglia di seminorme associata a \mathcal{F} (quella che induce la stessa topologia di $SVTLC$) è data da

$$\mathcal{P} = \{|f| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

Osservazione 2.38.

La topologia debole $\sigma(X, \mathcal{F})$ è T_0 (e quindi Hausdorff perché SVT) se e solo se la famiglia \mathcal{F} è separante ($\forall x \in X \setminus \{0\}, \exists f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq 0$).

Lemma 2.39.

Siano $f_0, \dots, f_n \in X'_{alg}$ per X un \mathbb{K} -spazio vettoriale, allora sono equivalenti

1. $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$
2. $|f_0| \leq M \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i|$ per qualche $M \geq 0$
3. $\ker f_0 \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$

Dimostrazione.

Diamo le tre implicazioni

1. \implies 2. Da 1. segue $|f_0| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |f_i| \leq M \max |f_i|$ per $M = \sum |\lambda_i|$.

2. \implies 3. Se $x \in \bigcap \ker f_i$, cioè $\langle f_i, x \rangle = 0$ per ogni i , allora $\langle f_0, x \rangle \leq M \cdot 0 = 0$, cioè $f_0(x) = 0$ e abbiamo l'inclusione voluta.

3. \implies 1. Sia $F : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ data da $F = (f_1, \dots, f_n)$, allora

$$\ker F = \bigcap \ker f_i \subseteq \ker f_0$$

quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{K} \\ F \downarrow & \nearrow L & \\ \mathbb{K}^n & & \end{array}$$

dove $L(x_1, \dots, x_n) = \sum \lambda_i x_i$ per dei λ_i (in quanto è una forma lineare). Ma allora $f_0 = L \circ F = \sum \lambda_i f_i$ come voluto.

□

Proposizione 2.40 (Duale per topologia debole).

Dato X \mathbb{K} -spazio vettoriale e \mathcal{F} sottospazio di X'_{alg} allora

$$(X, \sigma(X, \mathcal{F}))^* = \mathcal{F}$$

Dimostrazione.

Sia $f_0 \in (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$, allora per la proposizione (2.31) esistono $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ e $M \geq 0$ tali che per ogni $x \in X$

$$|f_0(x)| \leq M \max_i |f_i(x)|.$$

Dunque per il lemma (2.39) f_0 si scrive come combinazione lineare delle f_i e quindi in particolare $f_0 \in \mathcal{F}$.

L'altra inclusione è ovvia per definizione di topologia debole. \square

Osservazione 2.41.

Se X ha dimensione infinita, $\sigma(X, \mathcal{F})$ non è mai localmente limitata. In particolare ogni intorno di 0 contiene uno spazio vettoriale di codimensione finita.

Dimostrazione.

Se U intorno di 0 per $\sigma(X, \mathcal{F})$ allora esistono $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tali che⁵

$$U \supseteq \bigcap_{i=1}^n \{|f_i| < 1\} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$$

e l'intersezione di questi nuclei ha codimensione al massimo n . \square

2.4.1 Caso degli spazi normati

Definizione 2.42 (Topologia debole).

Se X è normato, la **topologia debole** su X è la topologia debole associata a X^* , cioè $\sigma(X, X^*)$.

Proposizione 2.43.

La topologia debole è localmente convessa e Hausdorff.

Dimostrazione.

Per Hahn-Banach (3.2), il duale X^* separa i punti \square

Definizione 2.44 (Topologia debole*).

Su X^* possiamo considerare la topologia debole associata alle valutazioni $X \subseteq X^{**}$, cioè scegliendo

$$\mathcal{F} = \{val_x \in (X^*)' \mid x \in X\}.$$

Questa è la **topologia debole*** su X^* e la indichiamo $\sigma(X^*, X)$.

Osservazione 2.45.

La topologia debole* rende X^* uno SVTLC T_0 (e quindi Hausdorff), infatti se $f \in X^* \setminus \{0\}$ allora esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq 0$.

Osservazione 2.46.

In generale $\sigma(X^*, X)$ è meno fine di $\sigma(X^*, X^{**})$. Abbiamo uguaglianza solo quando $X = X^{**}$ in quanto se $X \neq X^{**}$ allora dalla proposizione (2.40) ricaviamo

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X \neq X^{**} = (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))^*$$

e quindi in partenza $\sigma(X^*, X^{**}) \neq \sigma(X^*, X)$

⁵vedi lemma (2.39)

Osservazione 2.47.

Poiché $(X, \|\cdot\|) \hookrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$ isometricamente allora $(X, \sigma(X, X^*))$ ha la topologia indotta come sottospazio da⁶ $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

Dimostrazione.

Questo deriva dalla transitività della topologia iniziale (A.3) dove la prima famiglia è la mappa $X \hookrightarrow X^{**}$ e l'unica altra famiglia sono gli elementi di X^* che vanno verso \mathbb{K} . \square

⁶nota che X^* lo si può pensare come immerso in $X^{***} = (X^{**})^*$, quindi stiamo considerando la topologia debole* su $(X^*)^*$

Capitolo 3

Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hahn-Banach ci permetterà di costruire funzionali lineari continui.

Funzionali sono i surrogati delle coordinate, che non ci sono in generale, e anche quando ci sono possono essere più complicate di quanto non valga la pena.

3.1 Teorema di Hahn-Banach reale

Definizione 3.1 (Funzione sublineare).

Una funzione $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ è

- **positivamente omogenea** se per $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ abbiamo $p(tu) = tp(u)$,
- **subadditiva** se per ogni $u, v \in X$ vale $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$,
- **sublineare** se è subadditiva e positivamente omogenea.

Pillola filosofica: Teorema di esistenza senza buon criterio per scegliere un candidato spesso chiama l'uso di scelta.

Teorema 3.2 (Hahn-Banach).

Siano X uno spazio vettoriale reale, $M \subseteq X$ sottospazio, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublineare, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $f \leq p$ su M .

Allora f si estende a $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $F \leq p$.

Dimostrazione.

Vogliamo applicare il lemma di Zorn. Sia

$$\mathcal{M} = \{g \in N' \mid g \leq p, M \subseteq N \subseteq X\}$$

Notiamo che \mathcal{M} è ordinato secondo l'inclusione dei sottografici, cioè

$$g \preceq h \iff \Gamma g \subseteq \Gamma h \iff \begin{cases} \text{dom } g \subseteq \text{dom } h \\ g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \text{dom } g \end{cases}$$

Condizione delle catene vale:

se $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ catena in \mathcal{M}

allora $\bigcup_{\alpha} \Gamma g_{\alpha}$ è ancora il grafico di una funzione lineare minore di p .

Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in \mathcal{M} . Per concludere basta mostrare che un massimale di \mathcal{M} è definito su tutto X , cioè vogliamo mostrare che se $g \in \mathcal{M}$ è tale che $\text{dom } g \neq X$ allora esiste $g' \in \mathcal{M}$ che estende g .

Sia dunque per assurdo $x \in X \setminus N$ dove $N = \text{dom } g$. Vogliamo estendere g a $h : N \oplus \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ con $h \leq p$. In quanto estensione

$$h(u + tx) = h(u) + th(x) = g(u) + th(x),$$

dove u generico elemento di N . Sia $\alpha = h(x)$ e cerchiamo un opportuno α in modo tale che $h \leq p$.

Chiediamo che $\forall u \in N, \forall t \in \mathbb{R}$

$$g(u + tx) \leq p(u + tx),$$

o equivalentemente per ogni $t > 0$ chiediamo

$$\begin{cases} h(u + tx) \leq p(u + tx) \\ h(v - tx) \leq p(v - tx) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} g(u/t) + \alpha \leq p(u/t + x) \\ g(v/t) - \alpha \leq p(v/t - x) \end{cases}$$

dunque vogliamo

$$-p(v/t - x) + g(v/t) \leq \alpha \leq p(u/t + x) - g(u/t)$$

cioè

$$\sup_{v \in N} -p(v - x) + g(v) = m_* \leq \alpha \leq m^* = \inf_{u \in N} p(u + x) - g(u),$$

dunque un tale α esiste solo se $m_* \leq m^*$. Questo è vero perché

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x + v - x) \leq p(u + x) + p(v - x).$$

□

Osservazione 3.3.

Non serve questo teorema per spazi di dimensione finita o spazi di Hilbert, in quanto in quei casi abbiamo estensioni canoniche (se $\text{dom } f = N$, considero la proiezione ortogonale su N e poi applico f).

Corollario 3.4 (Hahn-Banach per spazi normati).

Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare allora ogni funzione continua su Y si estende ad una su X con la stessa norma.

Dimostrazione.

Se $f \in Y^*$, per la definizione di norma duale si ha

$$f(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\| \doteq p(x),$$

quindi f si estende a $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare con $F(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$, cioè $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Poiché F estende f in realtà abbiamo uguaglianza tra le norme¹. □

¹consideriamo la stessa successione in Y che realizza la definizione di $\|f\|_{Y^*}$

Osservazione 3.5.

Se X è di Hilbert, una estensione di $f \in Y^*$ è data dal proiettore ortogonale su² Y $P : X \rightarrow \bar{Y}$. A questo punto definendo $F = f \circ P$.

Corollario 3.6 (ricostruire norma tramite funzionali).

Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare e $x \in X$, allora la norma di x si può ricostruire dalla norma duale di X^* , in particolare³

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle$$

Dimostrazione.

Se $f \in X^*$ e $\|f\| \leq 1$ allora

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies \|x\| \leq \max_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle.$$

D'altra parte, per il corollario precedente (3.4) nel caso particolare di $Y = x\mathbb{R}$, il funzionale lineare continuo

$$\phi : \begin{array}{ccc} x\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\| \end{array}$$

si estende a tutto X con la stessa norma. Se $x = 0$ allora $\|\phi\| = 0$ per linearità, altrimenti $\|\phi\| = 1$ su $x\mathbb{R}$. In ogni caso $\|\phi\| \leq 1$, quindi per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|$. \square

Definizione 3.7 (Operatore aggiunto).

Per $T : X \rightarrow Y$ lineare continua tra spazi normati, si definisce l'**operatore aggiunto o trasposto** di T come

$$T^* : \begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Proposizione 3.8 (Norma dell'aggiunto).

La norma di T^* coincide con la norma di T , in particolare T^* è continuo.

Dimostrazione.

Segue dai corollari di Hahn-Banach sopra, infatti

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L(Y^*, X^*)} &= \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \|T^* f\|_{X^*} = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1, x \in X} \langle T^* f, x \rangle = \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f, Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, Tx \rangle| \stackrel{(3.6)}{=} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|_{L(X, Y)}. \end{aligned}$$

\square

3.1.1 Inclusione isometrica nel biduale

Proposizione 3.9 (Inclusione isometrica nel biduale).

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale e consideriamo la mappa

$$i_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & val_x \end{array}$$

Essa è una inclusione isometrica.

²stiamo supponendo Y chiuso a meno di passare alla chiusura

³dove $\langle f, x \rangle = f(x)$ quando f è forma lineare, come in questo caso.

Dimostrazione.

È immediato vedere che i_X è lineare e continua⁴ Però sappiamo che per ogni $x \in X$ esiste $f \in X$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\|x\| = \langle f, x \rangle$, cioè $\|val_x\| = \|x\|$, ovvero $i_X : X \rightarrow X^{**}$ è una inclusione isometrica. \square

Definizione 3.10 (Spazio riflessivo).

Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è **riflessivo** se $i_X : X \rightarrow X^{**}$ è surgettiva, ovvero se i_X è una isometria.

Osservazione 3.11.

Esistono spazi di Banach non riflessivi ma isometrici al loro biduale. Nella definizione chiediamo che la mappa canonica i_X sia una isometria.

Esempio 3.12.

Sia $c_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x(n) = o_n(1)\}$. Questo è un sottospazio chiuso di

$$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty < \infty\}$$

Se $\widehat{\mathbb{N}}$ è la compattificazione di \mathbb{N} ad un punto ($\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) allora c_0 sono le funzioni $\widehat{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ continue che valgono 0 in ∞ ristrette a \mathbb{N} .

Risulta che l'inclusione $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ è l'inclusione nel biduale, infatti c_0^* si può identificare con

$$\ell_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|f\|_1 = \sum |f_n| < \infty\right\}$$

identificando $f \in \ell_1$ con $\tilde{f}(x) = \sum f_n x_n$ (che converge perché assolutamente convergente). Risulta che questa identificazione è una isometria.

Con un processo analogo identifichiamo ℓ_1^* con ℓ_∞ .

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{\subseteq} & \ell_\infty \\ & \searrow i_{c_0} & \swarrow \cong \\ & c_0^{**} & \end{array}$$

Osservazione 3.13.

Se X è Hilbert allora $X \hookrightarrow X^{**}$ è surgettiva tramite l'isomorfismo di Riesz

$$x \mapsto \langle \cdot, x \rangle \mapsto \langle \cdot, \langle \cdot, x \rangle \rangle = val_x$$

Osservazione 3.14.

Se X normato, $i_X : X \rightarrow X^{**}$ ci permette di costruire un completamento considerando $i_X(X)$ in X^{**} in quanto il biduale è completo.

3.1.2 Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach

Il funzionale p nelle ipotesi è positivamente omogeneo e subadditivo (cioè sublineare).

Osservazione 3.15.

Una funzione f è subadditiva se, detto Γ il grafico di f , $\Gamma + (x, f(x))$ sta sempre sopra Γ .

Esercizio 3.16.

Mostra le seguenti implicazioni

⁴ $\langle val_x, f + \lambda g \rangle = f(x) + \lambda g(x) = \langle val_x, f \rangle + \lambda \langle val_x, g \rangle$ e $\|val_x\| \leq \|x\|$ in quanto $|\langle val_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$.

- Positivamente omogeneo e subadditivo implica convesso
- Positivamente omogeneo e convesso implica subadditivo (e quindi sublineare)
- Subadditivo, convesso e $p(0) \leq 0$ implica positivamente omogeneo

Esercizio 3.17.

Trovare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia subadditiva, convessa ma non positivamente omogenea.

Esercizio 3.18.

Nel teorema di Hahn-Banach si può prendere più in generale p convesso?

Sì, ma si riconduce al caso standard trovando un nuovo funzionale p_0 che sia sublineare e tale che $f \leq p_0 \leq p$.

3.2 Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach

3.2.1 Teorema di Hahn-Banach complesso

Teorema 3.19 (Hahn-Banach complesso).

Sia X un \mathbb{C} -spazio vettoriale normato, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio vettoriale e $f \in Y^*$, allora f si estende ad un funzionale lineare su X con uguale norma.

Dimostrazione.

Sia $(X_0, \|\cdot\|)$ lo spazio normato reale ottenuto da X per restrizione degli scalari e sia $f_0 = \Re f$. Notiamo che f_0 è un funzionale lineare continuo reale su Y , che quindi possiamo estendere a $\tilde{f}_0 \in X^*$ mantenendo la norma. Definiamo

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0(x) - i\tilde{f}_0(ix).$$

Notiamo che $\tilde{f}|_Y = f$, infatti

$$f(y) = \Re(f(y)) + i\Im(f(y)) = \Re(f(y)) - i\Im(if(iy)) = \Re(f(y)) - i\Re(f(iy)).$$

Si ha anche che \tilde{f} è \mathbb{C} -lineare e che $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

(COMPLETA PER ESERCIZIO)

□

3.2.2 Teoremi di separazione dei convessi

Proposizione 3.20 (Funzionali di Minkowski sono sublineari).

Se C è convesso e $0 \in C$ allora p_C è sublineare.

Dimostrazione.

Dimostriamo le due proprietà:

pos.omo. Per ogni $\lambda > 0$, $x \in X$ si ha che

$$p_C(\lambda x) = \inf \{t > 0 \mid \lambda x \in tC\} = \inf \{\lambda s > 0 \mid \lambda x \in \lambda sC\} = \lambda p_C(x)$$

subadd. Per ogni $x, y \in X$ siano a e b tali che

$$a > p_C(x), \quad b > p_C(y).$$

Se uno tra $p_C(x)$ e $p_C(y)$ è infinito allora la tesi vale trivialmente. Supponiamo dunque che questo non sia il caso. Allora $x \in aC$ e $y \in bC$, cioè $x/a, y/b \in C$. Notiamo che

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b}$$

dunque $\frac{x+y}{a+b} \in C$ per convessità, cioè $x+y \in (a+b)C$ e quindi $p_C(x+y) \leq a+b$. Passando all'estremo inferiore per $a > p_C(x)$ e $b > p_C(y)$ troviamo

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

□

Osservazione 3.21.

Se C è un disco, cioè è assorbente, bilanciato e convesso allora p_C è una seminorma.

Esercizio 3.22.

Se X SVT, $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineare non continua allora per ogni aperto A non vuoti si deve avere $F(A) = \mathbb{K}$.

Lemma 3.23.

Ogni funzionale lineare non nullo su uno SVT è una mappa aperta

Dimostrazione.

Sia $F \neq 0$ lineare con $F : X \rightarrow \mathbb{K}$. Vogliamo mostrare che F manda intorno di $x \in X$ in intorno di $F(x) \in \mathbb{K}$. Poiché X è SVT, basta mostrare che $F(U)$ è intorno di $0 \in \mathbb{K}$ per ogni U intorno di $0 \in \mathbb{K}$. In realtà basta prendere una base di intorno di 0 , quindi consideriamo gli U bilanciati. Notiamo che $F(U)$ è un insieme bilanciato di \mathbb{K} , infatti se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$ allora $\lambda F(U) = F(\lambda U) \subseteq F(U)$, quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- $F(U) = \{0\}$, ma allora $F = 0$ assurdo
- $F(U)$ è un disco, dunque è intorno di 0 ok.
- $F(U) = \mathbb{K}$ ok.

□

Corollario 3.24 (Discontinuità per funzionali lineari).

$F : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineare è discontinua se e solo se è surgettiva su ogni aperto non vuoto.

Dimostrazione.

Se F non è surgettiva su un aperto non vuoto, a meno di traslazione F non è surgettiva su un intorno di 0 , quindi non è surgettiva su un qualche aperto bilanciato. Quindi esiste un elemento che non è nella immagine, ma allora F non assume valori di modulo superiore a questo valore non raggiunto. □

Teorema 3.25 (Separazione di convessi).

Valgono i seguenti teoremi:

- Siano X un \mathbb{R} -SVT, A un suo aperto convesso non vuoto e B un convesso non vuoto disgiunto da A . Allora esistono $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A$, $b \in B$ si ha

$$\langle F, a \rangle < \gamma \leq \langle F, b \rangle,$$

cioè $A \subseteq \{F < \gamma\}$ e $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$.

- Sia X un \mathbb{R} -SVTLC⁵, K convesso compatto e C convesso chiuso disgiunti. Allora esistono $F \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ tali che per ogni $x \in K$ e per ogni $y \in C$ vale

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y \rangle$$

ovvero $K \subseteq \{F \leq \gamma_1\}$ e $C \subseteq \{F \geq \gamma_2\}$.

⁵La locale convessità serve, infatti esistono SVT metrizzabili che non hanno funzionali lineari continui e in tal caso la tesi non vale neanche per $K = \{x\}$ e $C = \{y\}$.

Dimostrazione.

Diamo le due dimostrazioni

- Sia $x_0 \in B - A = \{b - a \mid a \in A, b \in B\}$. Poiché $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \neq 0$. Sia

$$C = A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$

Dalla definizione è evidente che C è un aperto (unione di traslati di A che è aperto) e contiene 0. C è convesso perché la somma algebrica di due convessi è un convesso (quindi $A - B$ convesso e traslare un convesso lo lascia convesso). Essendo aperto in particolare è assorbente per (2.11).

Quindi il funzionale di Minkowski associato p_C è un funzionale sublineare $X \rightarrow \mathbb{R}$ (non raggiunge $+\infty$ perché assorbente). Sia $f_0 : \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da $\langle f_0, x_0 \rangle = 1$. Poiché $0 \notin A - B$, $x_0 \notin C$ e quindi⁶ $p_C(x_0) \geq 1$. Applicando il teorema di Hahn-Banach (3.2) f_0 si estende a $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $F \leq p_C$ in X . Per ogni $a \in A$, $b \in B$, poiché $a - b + x_0 \in C$, si ha

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) \leq 1$$

cioè $F(a) \leq F(b)$. Ponendo $\gamma = \sup_A F$ abbiamo le disuguaglianze volute se mostriamo che $F(a) < \gamma$ per ogni $a \in A$. Per il lemma (3.23) si ha che F è una mappa aperta, quindi $F(A)$ è un aperto di \mathbb{R} tale che $\sup F(A) \leq \gamma$, ma allora il valore γ non è raggiunto.

Concludiamo notando che F è continuo⁷ perché è limitato superiormente sull'aperto A .

- Sia V intorno convesso di 0 tale che $(K + V) \cap C = \emptyset$, basta usare (2.16) e poi notare che in questo caso abbiamo una base di intorni convessi. Evidentemente $K + V$ è aperto e convesso⁸. Per il primo punto esiste $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in K + V$ e $y \in C$

$$\langle F, x \rangle < \gamma \leq \langle F, y \rangle.$$

Sia $\gamma_1 = \max_{x \in K} \langle F, x \rangle$, allora $\gamma_1 < \gamma$ e quindi se $x \in K$

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma \leq \langle F, y \rangle$$

che è la tesi a meno di definire $\gamma_2 = \gamma$.

□

3.3 Parentesi esercizi

Definizione 3.26 (Misura non atomica).

Uno spazio di misura (X, \mathcal{Q}, μ) è **non-atomico** se per ogni $A \in \mathcal{Q}$ di misura positiva contiene $B \in \mathcal{Q}$ di misura positiva strettamente minore.

Esercizio 3.27 (Sierpinski).

Se (X, \mathcal{Q}, μ) è non-atomico allora è divisibile, cioè per ogni $A \in \mathcal{Q}$ e per ogni $\lambda \in [0, \mu(A)]$ esiste $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{Q}$, tale che $\mu(B) = \lambda$.

⁶ricorda che $\{p_C < 1\} \subseteq C$

⁷volendo anche perché limitato su intorno di 0 o anche perché non è surgettiva sull'aperto A . Vedi esercizio sopra per l'ultima.

⁸somma di convessi è convessa

Inoltre, vedendo la misura come funzione $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \mu(X)]$, esiste una inversa destra monotona crescente per inclusione $E : [0, \mu(X)] \rightarrow \mathcal{Q}$, cioè si ha $\mu \circ E = id$ e per ogni $t \in [0, \mu(X)]$ abbiamo $\mu(E_t) = t$ e $E_t \subseteq E_{t'}$ per ogni $t \leq t'$.

Dimostrazione.

Vogliamo applicare Zorn all'insieme delle inverse destre monotone parziali, cioè

$$\Gamma = \{E : S \rightarrow \mathcal{Q} \mid S \subseteq [0, \mu(X)], E \text{ monot. cresc. per } \subseteq, \mu(E(t)) = t \forall t \in S\}$$

Chiaramente la condizione sulle catene funziona quindi Γ ha un elemento massimale. Mostriamo poi che il dominio del massimale è chiuso e che è denso, e quindi deve essere tutto. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) \square

Esercizio 3.28.

Sia (X, \mathcal{Q}, μ) uno spazio di misura e sia $0 < p \leq 1$. Definiamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

e sia $q : \mathcal{L}^p \rightarrow [0, \infty)$ con $q(f) = \int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$.

Notiamo che $q(f+g) \leq q(f) + q(g)$, che $q(\lambda f) = |\lambda| q(f)$ e che $q(f) = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.. Dunque q definisce una semidistanza $d_q(f, g) = q(f - g)$, che induce una distanza sul quoziente

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \overline{\{0\}}$$

Questa distanza rende $L^p(X)$ uno SVT metrico completo omeomorfo a $L^1(X)$.

Mostrare che se (X, \mathcal{Q}, μ) è non-atomico e $p < 1$ allora $L^p(X)$ non ha funzionali lineari continui diversi da 0 e non ha aperti convessi diversi da $L^p(X)$.

Esercizio 3.29.

Sia $X = \mathbb{N}$ con la misura di cardinalità. In questo caso $L^p(\mathbb{N}) = \ell_p$ con la definizione di prima. Questo è uno SVT metrico completo ma la misura è puramente atomica (misura ricostruibile dai singoletti). Mostra che $(\ell_p)^* = (\ell_1)^*$.

Dimostrazione.

Nota che se $0 < p \leq q \leq \infty$ allora $\ell_p \subseteq \ell_q$ e l'inclusione è una mappa continua, quindi una mappa lineare su ℓ_q restituisce una mappa lineare su ℓ_p , quindi abbiamo $(\ell_p)^* \supseteq (\ell_1)^*$, va mostrato che non ce ne sono altri. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) \square

Capitolo 4

Costruzioni su spazi normati

Osservazione 4.1.

Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio vettoriale e $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora Y è (semi)normato con la norma indotta. La topologia indotta è quella di sottospazio

Definizione 4.2 (Prodotto di spazi (semi)normati).

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi (semi)normati, la (semi)norma prodotto è data da

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max \{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Questa rende $X \times Y$ uno spazio (semi)normato e

$$B_{X \times Y}((0, 0), 1) = B_X(0, 1) \times B_Y(0, 1),$$

cioè la topologia indotta è la topologia prodotto.

Definizione 4.3 (Somma diretta topologica).

Due sottospazi di $(X, \|\cdot\|)$ Y e Z sono in **somma diretta algebrica** se $+|_{Y \times Z} : Y \times Z \rightarrow X$ è bigettiva. Se $+|_{Y \times Z}$ è anche un omeomorfismo diciamo che X è la **somma diretta topologica** di Y e Z .

Osservazione 4.4.

X è la somma diretta topologica di Y e Z se X è isomorfo come spazio normato a $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$.

Osservazione 4.5.

La mappa $+|_{Y \times Z}$ è sempre continua, ma in generale non è un omeomorfismo.

Definizione 4.6 (Proiettore).

Un endomorfismo lineare $P : X \rightarrow X$ si dice **proiettore** se è idempotente, cioè $P^2 = P$.

Osservazione 4.7.

Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta algebrica $X = \ker P \oplus \text{Im } P$. Viceversa, ad ogni decomposizione in somma diretta algebrica possiamo associare un proiettore

Osservazione 4.8.

I proiettori $P_Y : X \rightarrow Y$ e $P_Z = id - P_Y : X \rightarrow Z$ sono continui se e solo se la somma è topologica, infatti

$$(+|_{Y \times Z})^{-1} = P_Y \times P_Z.$$

Definizione 4.9 (Spazio (semi)normato quoziente).

Se $(X, \|\cdot\|)$ è (semi)normato e Y è un suo sottospazio allora come spazio vettoriale

$$X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}.$$

Su essa definiamo la seguente norma: se $\xi \in X/Y$ allora¹

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

Esercizio 4.10.

$\|\cdot\|_{X/Y}$ è una seminorma su X/Y e rende la proiezione $\pi : X \rightarrow X/Y$ una applicazione aperta e continua. Più precisamente

$$\pi(B_X(0, 1)) = B_{X/Y}(0, 1)$$

Dimostrazione.

Continua perché $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|$ per definizione di estremo inferiore, quindi π ha norma come operatore ≤ 1 , e quindi è continua. \square

Osservazione 4.11.

Notiamo che X/Y ha effettivamente la topologia quoziente indotta da π

Esercizio 4.12.

La (semi)norma quoziente è una norma se e solo se Y è chiuso (a prescindere dal fatto che $\|\cdot\|_X$ sia una norma o seminorma).

Osservazione 4.13.

Se Y e Z sono seminormati allora $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$ come spazi seminormati.

Osservazione 4.14.

Se $Y \subseteq X$ ed esiste² Z tale che $X = Y \oplus Z$ allora $Z \cong X/Y$.

Osservazione 4.15.

In generale X non è isomorfo a $Y \times X/Y$.

Osservazione 4.16.

Per quanto riguarda la completezza in queste costruzioni:

- Y sottospazio di X con X di Banach è un Banach se e solo se è chiuso
- $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$ è Banach se e solo se lo sono sia Y che Z
- Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato e $Y \subseteq X$ è un sottospazio chiuso allora $(X, \|\cdot\|)$ è completo se e solo se sia Y che X/Y sono completi.

Notiamo che l'ultima proprietà implica la seconda, infatti $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$

¹pensando a ξ come un traslato di Y , la norma che stiamo definendo è la distanza di questo spazio affine dall'origine.

²ci sono casi in cui non esiste, come $c_0 \subseteq \ell_\infty$

4.1 Costruzione di duali

Proposizione 4.17 (Duale del prodotto).

Dati X e Y spazi di Banach, il duale di $X \times Y$ è isometricamente isomorfo a

$$(X^* \times Y^*, \|\cdot\|)$$

dove $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{X^*} + \|\eta\|_{Y^*}$ (che è topologicamente equivalente a $\|\cdot\|_{X^* \times Y^*}$).

$$(X^* \times Y^*, \|P_{X^*}(\cdot)\|_{X^*} + \|P_{Y^*}(\cdot)\|_{Y^*}) \cong ((X \times Y)^*, \|\cdot\|_{(X \times Y)^*}).$$

Proposizione 4.18 (Duale di sottospazi e di un quoziente).

Dato Y sottospazio chiuso di X Banach abbiamo le seguenti isometrie lineari:

1. $Y^* \cong X^*/Y^\perp$
2. $(X/Y)^* \cong Y^\perp \subseteq X^*$

dove $Y^\perp = \text{Ann}(Y) = \{f \in X^* \mid f|_Y = 0\} = \{f \in X^* \mid Y \subseteq \ker f\}$.

Dimostrazione.

Data l'inclusione $j_Y : Y \rightarrow X$ otteniamo $j_Y^* : X^* \rightarrow Y^*$. Il nucleo di j_Y^* sono i funzionali in X^* che si restringono al funzionale nullo su Y^* , cioè gli $f \in X^*$ tali che

$$j_Y^*(f) = f \circ j_Y = f|_Y = 0$$

e quindi $\ker j_Y^* = \text{Ann}(Y)$. Per il teorema di Hahn-Banach (3.2), j_Y^* è surgettiva in quanto ogni funzionale su Y si estende ad uno su X perché X Banach e Y chiuso. Per il teorema di isomorfismo esiste un'unica mappa ϕ che fa commutare

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{j_Y^*} & Y^* \\ \pi \downarrow & \searrow \phi & \\ X^*/\text{Ann}(Y) & & \end{array}$$

Per questioni di algebra ϕ è lineare e poiché j_Y^* è continua e π induce la topologia quoziente, ϕ è continua. Verifichiamo che è una isometria.

$$B_{X^*/\text{Ann}(Y)}(0, 1) = \pi(B_{X^*}(0, 1))$$

$$\phi(B_{X^*/\text{Ann}(Y)}(0, 1)) = \phi(\pi(B_{X^*}(0, 1))) = j_Y^*(B_{X^*}(0, 1)) \stackrel{(3.2)}{=} B_{Y^*}(0, 1).$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estensione data da Hahn-Banach mantiene la norma.

Data la proiezione $\pi : X \rightarrow X/Y$ otteniamo $\pi^* : (X/Y)^* \rightarrow X^*$. Sia $\varphi \in (X/Y)^*$ e $f = \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi$. Si ha che

$$\varphi(B_{X/Y}) = \varphi(\pi(B_X)) = f(B_X),$$

quindi $\|\varphi\|_{(X/Y)^*} = \|f\|_{X^*}$, cioè π^* è una immersione isometrica.

Sia $f \in X^*$, si ha che $f \in \text{Ann}(Y)$ se e solo se $Y \subseteq \ker f$ che succede se e solo se f si fattorizza tramite π per proprietà universale. Quindi $f \in \text{Ann}(Y)$ se e solo se $f = \varphi \circ \pi = \pi^*(\varphi)$ per qualche $\varphi : X/Y \rightarrow \mathbb{R}$, cioè se e solo se $f \in \pi^*((X/Y)^*)$. Quindi $\text{Imm } \pi^* = \text{Ann}(Y)$.

Restringendo il codominio all'immagine troviamo quanto voluto. \square

Capitolo 5

Completezza e duali di qualche spazio

5.1 Elenco di spazi completi

Proposizione 5.1.

Sia S insieme e E Banach, allora lo spazio normato $(\mathcal{B}(S, E), \|\cdot\|_{\infty, S})$ è completo

Dimostrazione.

[PERSO, RIGUARDA POI]

tale che $\|f(s)\| = \|\sum_k f_k(s)\| \leq \sum_k \|f_k(s)\| \leq \sum \|f\|_{\infty, S}$
quindi $\|f\|_{\infty, S}$

□

Uno degli strumenti dell'analista: aggiungere e togliere, cioè

προσθαφαίρεσις

Lemma 5.2.

Se $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(S, E)$ con f_k continua in s_0 per ogni k e $f_k \rightarrow f$ uniformemente allora anche f è continua in s_0

Dimostrazione.

Consideriamo

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(s_0)\| &\leq \|f(s) - f_k(s)\| + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| + \|f_k(s_0) - f(s_0)\| \leq \\ &\leq 2\|f - f_k\|_{\infty, S} + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| \end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di $f_k \rightarrow f$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_n\|_{\infty, S} \leq \varepsilon/3$.

Per la continuità in s_0 di f_n esiste un intorno U di s_0 tale che $\|f_n(s) - f_n(s_0)\| \leq \varepsilon/3$ per ogni $s \in U$. Allora per ogni $s \in U$ si ha

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 5.3.

Sia S spazio topologico, E banach, allora $\mathcal{BC}(S, E)$ è completo.

Dimostrazione.

Basta mostrare che $\mathcal{BC}(S, E)$ è chiuso in $\mathcal{B}(S, E)$. Questo segue dal fatto che la continuità in un punto $s_0 \in S$ si conserva per convergenza uniforme, che è il lemma precedente. \square

Esempio 5.4.

Sia $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di \mathbb{N} e E un banach, allora

$$c(E) \doteq \{x : \mathbb{N} \rightarrow E, \text{ convergente} \} \cong \mathcal{BC}(S, E)$$

Questo mostra che $c(E)$ è chiuso (e quindi completo) in $\ell_\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

Conseguenze:

Proposizione 5.5.

Lo spazio $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ è completo

Dimostrazione.

Considerando l'inclusione isometrica

$$R : \begin{array}{ccc} L(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{B}(B_X(0, 1), Y) \\ T & \longmapsto & T|_{B_X(0, 1)} \end{array}$$

basta vedere che $R(L(X, Y))$ è chiuso.

Se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L(X, Y)$ è tale che $R(T_n) \rightarrow f$ uniformemente in $\mathcal{B}(B_X(0, 1), Y)$ allora mostriamo che f è la restrizione a $B_X(0, 1)$ di una qualche lineare T .

Mostriamo che le T_n convergono puntualmente per ogni $x \in X$: se $x = 0$ ok, se $x \neq 0$

$$T_n(x) = \|x\| T_n(x/\|x\|) = \|x\| R(T_n)(x/\|x\|) \rightarrow \|x\| f(x/\|x\|)$$

Sia $T : X \rightarrow Y$ definita da $T(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$

[MOSTRARE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME, ME LO SONO PERSONO] \square

Corollario 5.6 (Duale di spazio normato è banach).

Il duale di uno spazio normato è sempre banach.

Teorema 5.7 (Integrazione per serie).

Sia (X, \mathcal{Q}, μ) è uno spazio di misura e sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ tali che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$$

Allora $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$ converge q.o. e in norma 1.

Dimostrazione.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_k(x)|.$$

Notiamo che (g_n) è una successione di funzioni misurabili non negative crescente. Inoltre $g_n \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)|$ per definizione di serie.

Per convergenza monotona

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 \leftarrow \sum_{k=0}^n \|f_k\|_1 = \int_X g_n d\mu \rightarrow \int_X g d\mu$$

cioè $\inf_X g d\mu = \sum k \in \mathbb{N} \|f\|_1 < \infty$, cioè $g \in \mathcal{L}^1$.

Inoltre $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ è una successione dominata da g :

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k(x)| \leq g(x).$$

Quindi la serie $\sum f_k(x)$ è una serie assolutamente convergente per ogni x dove $g < \infty$. Poiché $\int g < \infty$ le eccezioni sono trascurabili, quindi quasi ovunque $\sum f_k(x)$ è assolutamente convergente.

Sia $f(x) = \sum f_k(x)$ dove la serie converge. Notiamo che

$$|f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| = g(x),$$

quindi $\|f\|_1 \leq \int g d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1$.

Applicando come prima la stima alle code

$$\|f - s_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_1 = o(1)$$

dove l'ultimo termine va a 0 perché $\sum \|f_k\|_1$ è convergente. □

Corollario 5.8 (Weil).

Siano $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ convergenti in $\|\cdot\|_1$. Allora esiste n_k successione strettamente crescente di indici tali che f_{n_k} converge quasi ovunque ed è dominata in \mathcal{L}^1 .

Dimostrazione.

Sia f il limite in $\|\cdot\|_1$. Data questa convergenza consideriamo una sottosuccessione n_k tale che $\|f - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$. Scrivendo la successione in termini di una somma telescopica

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=1}^k (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$$

si ha per il teorema di integrazione per serie¹ (5.7) f_{n_k} converge quasi ovunque e in \mathcal{L}^1 , inoltre è dominata da

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \geq |f_{n_k}(x)|$$

con $g(x) \in \mathcal{L}^1$. □

Proposizione 5.9 (L^1 è completo).

Se (X, \mathcal{Q}, μ) è uno spazio di misura, $L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è completo.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal teorema di integrazione per serie (5.7). □

Osservazione 5.10.

La convergenza quasi ovunque di funzioni $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ è **NON** la convergenza rispetto a una topologia opportuna su $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$.

Ogni convergenza topologica in X insieme ha la seguente proprietà **di Urison**: $x_n \rightarrow x$ rispetto alla topologia se e solo se per ogni sottosuccessione x_{n_k} esiste una sotto-sottosuccessione $x_{n_{k_j}} \rightarrow x$.

¹ $\|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\|_1 \leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} - f\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j-1}} - f\|_1 < \infty$

Dimostrazione.

Se $x_n \rightarrow x$ converge ok. Se non converge allora esiste un intorno U di x tale che $x_n \notin U$ frequentemente, quindi troviamo una sottosuccessione x_{n_k} che sta sempre fuori da U , quindi nessuna sua sotto-sottosuccessione può convergere a x . \square

La convergenza q.o. per successioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ non ha la proprietà di Urisohn.

Definizione 5.11 (Operatore di composizione).

Se E è uno spazio di funzioni con codominio \mathbb{R} e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo l'operatore di composizione per f come $E \ni u \mapsto f \circ u$.

Lemma 5.12.

Sia u_k una successione che converge a u in $\|\cdot\|_p$. A meno di sottosuccessione $u_k \rightarrow u$ quasi ovunque e dominata in \mathcal{L}^p .

Dimostrazione.

Teorema di Weil (5.8) in \mathcal{L}^p . \square

Proposizione 5.13.

Lo spazio $L^p(X, \mathcal{Q}, \mu)$ per $0 \leq p < \infty$ è completo.

Dimostrazione.

L^p ed L^1 NON sono isomorfi come spazi di Banach in generale², ma esiste un omeomorfismo localmente Lipschitz e questo basta a mostrare la completezza: se u_k è una successione di Cauchy in L^p , se Φ è Lipschitz allora $\Phi(u_k)$ è ancora di Cauchy in L^1 e quindi converge, poi torno indietro con Φ^{-1} , che mantiene il limite per continuità.

Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \\ u & \longmapsto & |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$

Chiaramente è invertibile mandando $v \in L^1$ in $|v|^{1/p} \operatorname{sgn} v$. La mappa Φ è l'operatore di composizione con la funzione $f(t) = |t|^p \operatorname{sgn} t$. La continuità degli operatori di composizione è un fatto generale. Se $u_k \rightarrow u$ converge in $\|\cdot\|_p$ allora per il lemma a meno di sottosuccessione converge q.o. e dominata, quindi componendo con f abbiamo ancora convergenza quasi ovunque per continuità ($f(u_k) \rightarrow f(u)$ q.o.). Se $|u_k| \leq g$ in \mathcal{L}^p allora $|u_k|^p \leq g^p$ in \mathcal{L}^1 , similmente per Φ^{-1} , quindi effettivamente Φ è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che Φ è localmente lipschitz: siano $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 = \int_X |f(u(x)) - f(v(x))| d\mu(x)$$

ma se $t < s$ allora $|f(t) - f(s)| \leq \sup_{t \leq \xi \leq s} |f'(\xi)| |t - s|$ e $|f'(xi)| = p |xi|^{p-1} \leq p(\max\{|t|, |s|\})^p$, quindi

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)|_1 &\leq p \int_X \max\{|u(x)|^{p-1}, |v(x)|^{p-1}\} |u(x) - v(x)| d\mu \leq \\ &\leq p \int_X \left(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\right) |u(x) - v(x)| d\mu \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq p \left(\left(\int_X |u|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\int_X |v|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \right) \left(\int_X |u - v|^p \right)^{1/p} = \\ &\stackrel{p-1 \equiv p/q}{=} p(\|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1}) \|u - v\|_p \end{aligned}$$

quindi Φ è Lipschitz di costante $2pR^{p-1}$ sulla palla $B_{L^p}(0, R) \subseteq L^p$ \square

²cursiosità non banale da vedere

Proposizione 5.14.

Lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è completo

Dimostrazione.

[NON HO VISTO, RIGUARDA I PDF] □

$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty, \Omega} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{\infty, \Omega}$. Questa norma rende continua l'immersione $C_b^1 \rightarrow (C_b^0)^{n+1}$ data da $f \mapsto (f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$

Proposizione 5.15.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Lo spazio

$$C_b^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{di classe } C^k \text{ con derivate limitate su } \Omega \text{ fino all'ordine } k\}$$

è completo.

Dimostrazione.

Il caso $k = 1$ è una conseguenza del teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial_i f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\partial_i f_k \rightarrow g_i$ uniformemente in Ω e $f_k \rightarrow f$ puntualmente in Ω allora esiste $\partial_i f$ e vale g_i . Se poi $f_k \in C^1(\Omega)$ allora la g_i è continua perché limite uniforme di $\partial_i f_k$ continue, quindi per il teorema del differenziale totale la f è anche C^1 .

Per il teorema di limite sotto il segno di derivata, l'immersione $C_b^1 \rightarrow (C_b^0)^{n+1}$ ha immagine chiusa, infatti una successione $(f_k, \partial_1 f_k, \dots, \partial_n f_k)$ nell'immagine convergente a (f, g_1, \dots, g_n) è proprio una delle ipotesi del teorema di convergenza sotto segno di derivata, quindi $f_k \rightarrow f$ in C^1 □

5.2 Duali di spazi concreti

Appendice A

Topologia

Proposizione A.1 (Topologia iniziale).

Sia X un insieme e \mathcal{F} una famiglia di mappe a valori in uno spazio topologici.

Notazione:

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \rightarrow (Y_j, \tau_j)\}_{j \in I}.$$

Allora esiste la topologia meno fine su X che rende continue le mappe f_j . Una prebase di questa topologia è data da

$$\{f_j^{-1}(A) \mid j \in I, A \in \tau_j\}.$$

In realtà basterebbe prendere una prebase per τ_j al posto di tutta la topologia.

Questa topologia è detta **topologia iniziale della famiglia \mathcal{F}** e si denota $\tau_{\mathcal{F}}$.

Osservazione A.2 (Proprietà universale della topologia iniziale).

Data una mappa $\varphi : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X, \tau_{\mathcal{F}})$ essa è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione.

Se φ è continua allora $f \circ \varphi$ è composizione di continue. Se sappiamo che $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$ allora, se A è un aperto di X per continuità di $f \circ \varphi$ abbiamo

$$\tau_Z \ni (f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$$

cioè le preimmagini tramite φ di aperti di prebase sono aperti di Z , quindi φ è continua. \square

Proposizione A.3 (Transitività della topologia iniziale).

Supponiamo di avere una famiglia di mappe $\mathcal{F}' = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ e per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{G}_i = \{g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij}\}_{j \in J_i}$ una famiglia di mappe. Su ogni Y_i consideriamo la topologia iniziale determinata da \mathcal{G}_i . Allora la topologia iniziale data da \mathcal{F}' su X coincide con la topologia iniziale su X definita da $\mathcal{F} = \{g_{ij} \circ f_i \mid i \in I, j \in J_i\}$.

Dimostrazione.

Entrambe le topologie in esame sono generate dagli insiemi $(g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A)$ al variare di $i \in I, j \in J_i$ e $A \in \tau_{Z_{ij}}$, infatti

$$\text{prebase per } \mathcal{F} \rightarrow (g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A) = f_i^{-1}(g_{ij}^{-1}(A)) \leftarrow \text{prebase per } \mathcal{F}'.$$

\square