Prova scritta finale
Istituzioni di Analisi Matematica

Sorce Francesco
Mat: 638936

Esercizio 1. Dire se sono veri o falsi i seguenti fatti.

a. Siano A e B sottoinsiemi convessi compatti di uno spazio di Banach X. Allora $\mathrm{co}(A \cup B)$ è compatto.

b. Sia C un sottoinsieme compatto di uno spazio di Banach X. Allora $\mathrm{co}(C)$ è compatto.

Soluzione.
La prima affermazione è vera e la seconda falsa:

a. Per definizione gli elementi di $\mathrm{co}(A \cup B)$ sono della forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i b_i$$

dove $a_1, \cdots, a_n \in A$, $b_1, \cdots, b_m \in B$, $\lambda_i, \mu_i \in [0,1]$ e, ponendo $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ e $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$, si ha $\lambda + \mu = 1$. Poiché A e B sono convessi si ha che

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i \in A, \quad b = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} b_i \in B.$$

Segue che ogni elemento di $\mathrm{co}(A \cup B)$ si può scrivere come $\lambda a + \mu b$ per opportuni $a \in A$, $b \in B$ e $\lambda, \mu \in [0,1]$ tali che $\lambda + \mu = 1$.

Segue che $\mathrm{co}(A \cup B)$ è l'immagine della mappa

$$T : \begin{array}{ccc} A \times B \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ (a,b,t) & \longmapsto & ta + (1-t)b \end{array}$$

Dotando $A \times B \times [0,1]$ della topologia prodotto, notiamo che T è continua perché composizione di mappe continue: $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$ sono continue per definizione di topologia di sottospazio, il prodotto per scalari $\mathbb{R} \times X \to X$ è continuo perché X SVT e quindi anche le restrizioni $[0,1] \times A \to X$ e $[0,1] \times B \to X$ lo sono, $t \mapsto 1-t$ è continua su $[0,1]$ e infine $+ : X \times X \to X$ è continua sempre per definizione di SVT.

Poiché A, B e $[0,1]$ sono compatti, anche $A \times B \times [0,1]$ è compatto per la topologia prodotto, dunque per continuità l'immagine di T, che è $\mathrm{co}(A \cup B)$, è compatta.

b. Abbiamo visto che ℓ_1 è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_1$. In questo spazio consideriamo

$$K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} e_n \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}.$$

Osserviamo che K è compatto perché se U è un aperto che contiene 0 allora questo aperto contiene una palla di raggio ε attorno a 0 per qualche $\varepsilon > 0$, ma allora per $n > \varepsilon^{-1}$ si ha che $\frac{1}{n} e_n$ appartiene a questa palla e quindi all'aperto di partenza. Segue che possiamo estrarre un sottoricoprimento finito prendendo un aperto per ogni elemento $\frac{1}{n} e_n$ per $n \leq \varepsilon^{-1}$ e poi prendendo l'aperto di prima che contiene 0.

Prendendo l'inviluppo convesso $\mathrm{co}(K)$ troviamo

$$\mathrm{co}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{1}{i} e_i \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1 \right\}$$

In questo insieme troviamo elementi della forma

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{-i}}{i} e_i$$

e questa successione converge in ℓ_1 a

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i}}{i} e_i,$$

quindi ogni sottosuccessione di (u_n) converge a u in ℓ_1, ma $u \notin \mathrm{co}(K)$ perché ogni successione in questo inviluppo convesso è definitivamente nulla, quindi $\mathrm{co}(K)$ non è sequenzialmente compatto e in quanto metrico questo significa che non è compatto.

$\square$

Esercizio 2. Per X spazio di Banach sia $\iota_X : X \to X^{**}$ l'inclusione canonica di X nel suo bi-duale. Per quali spazi di Banach X è vero che il bi-trasposto dell'inclusione canonica $\iota_X^{**} : X^{**} \to X^{****}$ coincide con l'inclusione canonica del bi-duale $\iota_{X^{**}} : X^{**} \to X^{****}$?

Soluzione.
Ricordiamo che $\iota_X : X \to X^{**}$ è data da $x \mapsto val_x$ e similmente $\iota_{X^{**}}$. Sia $\alpha \in X^{**}$ e consideriamo l'effetto delle due mappe:

$$\iota_{X^{**}}(\alpha) = val_\alpha : \begin{array}{ccc} X^{***} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & A(\alpha) \end{array}$$

mentre per il bi-trasposto

$$\iota_X^* : \begin{array}{ccc} X^{***} & \longrightarrow & X^* \\ A & \longmapsto & A \circ \iota_X \end{array}, \qquad \iota_X^{**} : \begin{array}{ccc} X^{**} & \longrightarrow & X^{****} \\ \alpha & \longmapsto & A \mapsto \alpha(A \circ \iota_X) \end{array}$$

$$\iota_X^{**}(\alpha) : \begin{array}{ccc} X^{***} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \alpha(A \circ \iota_X) \end{array}$$

Quindi la richiesta è capire per quali spazi di Banach vale

$$A(\alpha) = \alpha(A \circ \iota_X) \quad \forall A \in X^{***},\ \forall \alpha \in X^{**}.$$

Affermiamo che queste identità valgono se e solo se X è uno spazio di Banach riflessivo.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Se X è riflessivo allora per ogni $\alpha \in X^{**}$ esiste $x \in X$ tale che $\alpha = val_x$, da cui

$$\alpha(A \circ \iota_X) = A(\iota_X(x)) = A(val_x) = A(\alpha).$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supponiamo ora che valga $\iota_X^{**} = \iota_{X^{**}}$. Abbiamo visto in classe che

$$X \text{ riflessivo} \iff X^* \text{ riflessivo} \iff X^{**} \text{ riflessivo},$$

quindi proviamo a mostrare che ι_X^* è iniettiva, infatti se lo è allora per il teorema dell'immagine chiusa

$$\mathrm{Imm}\, \iota_{X^{**}} = \mathrm{Imm}\, \iota_X^{**} = (\ker \iota_X^*)^\perp = \{0\}^\perp = X^{****}.$$

Per mostrare l'iniettività voluta è sufficiente trovare una inversa sinistra. Consideriamo la composizione $\iota_{X^*} \circ \iota_X^*$:

$$\iota_{X^*}(\iota_X^*(A))(\alpha) = \iota_{X^*}(A \circ \iota_X)(\alpha) = \alpha(A \circ \iota_X) \overset{\iota_X^{**} = \iota_{X^{**}}}{=} A(\alpha) = id_{X^{***}}(A)(\alpha),$$

cioè $\iota_{X^*} \circ \iota_X^* = id_{X^{***}}$ come voluto.

$\square$

Lemma 1.
Sia H uno spazio di Hilbert, $A \in L(H)$ autoaggiunto non-negativo, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista $B \in L(H)$ simmetrico non-negativo tale che $B^n = A$, allora

$$\ker A = \ker B$$

Dimostrazione.
Se $Ax \neq 0$ allora

$$0 \neq Ax = (B)^{n-1}Bx \implies Bx \neq 0.$$

Supponiamo ora che $Ax = 0$. Se $n = 2m$ allora

$$0 = Ax \cdot x = B^n x \cdot x = \|B^m\|^2 \implies B^m x = 0.$$

Se $n = 2m - 1$ allora

$$0 = Ax \cdot Bx = B^{2m-1}x \cdot Bx = \|B^m x\|^2 \implies B^m x = 0.$$

Poiché $m \leq n$ in entrambe le scritture con uguaglianza che vale solo per $n = 1$, in un numero di passi finiti arriviamo a mostrare che $Bx = 0$. □

Lemma 2.
Sia $T \in L(H)$ un operatore autoaggiunto non-negativo. Allora T è iniettivo se e solo se è positivo.

Dimostrazione.
Abbiamo visto in classe (o comunque è possibile leggere il primo paragrafo del prossimo esercizio) che T ammette una radice $\sqrt{T}$ simmetrica non negativa.

Se T è iniettivo allora per il lemma (1) $\sqrt{T}$ è iniettivo, quindi se $x \neq 0$ si ha che

$$Tx \cdot x = \sqrt{T}^2 x \cdot x = \left\|\sqrt{T}x\right\|^2 > 0.$$

Viceversa, se T è positivo allora per $x \neq 0$ si ha $Tx \cdot x > 0$, quindi in particolare $Tx \neq 0$. □

Esercizio 3. Sia H uno spazio di Hilbert, $A \in L(H)$ autoaggiunto non-negativo, $n \in \mathbb{N}$. Provare che esiste un unico $B \in L(H)$ autoaggiunto non-negativo tale che $B^n = A$.

Soluzione.
Per quanto sappiamo sullo spettro di operatori simmetrici non-negativi

$$\sigma(A) \subseteq \left[\inf_{\|x\|=1} Ax \cdot x, \ \sup_{\|x\|=1} Ax \cdot x\right] \subseteq [0, \infty).$$

Poiché $\sqrt[n]{\bullet}$ è una funzione continua non-negativa ben definita su $[0, \infty)$, per quanto sappiamo sul calcolo funzionale esiste un operatore simmetrico non-negativo $\sqrt[n]{A}$. Poiché la mappa $\Phi : C^0(\sigma(A), \mathbb{C}) \to L(H)$ è un omomorfismo, $\sqrt[n]{A}^n = A$ quindi è della forma cercata.

Sia ora B simmetrico non-negativo tale che $B^n = A$ qualsiasi e mostriamo che $B = \sqrt[n]{A}$.
Notiamo che B commuta con A in quanto $BA = B^{n+1} = AB$, quindi B commuta anche con $\sqrt[n]{A}$: se p_n è una successione di polinomi che tende a $\sqrt[n]{\bullet}$ allora

$$B\sqrt[n]{A}x = B\lim_n p_n(A)x = \lim_n Bp_n(A)x = \lim_n p_n(A)Bx = \sqrt[n]{A}Bx.$$

Scriviamo $H = H_1 \oplus H_0$ con $H_0 = \ker A$ e $H_1 = (\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{Imm} A}$. Per costruzione $A|_{H_1} : H_1 \to H_1$ è iniettivo e

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)|_{H_1} = \sqrt[n]{A|_{H_1}}$$

per definizione. Poiché B e $\sqrt[n]{A}$ commutano con A, preservano spazi invarianti per A, quindi preservano la decomposizione $H = H_1 \oplus H_0$. Possiamo dunque ricondurci a studiare separatamente i casi $H = \ker A$ e A iniettivo.

$\boxed{\ker A = (0)}$ Poiché B e $\sqrt[n]{A}$ commutano vale

$$0 = B^n - (\sqrt[n]{A})^n = \left((\sqrt[n]{A})^{n-1} + B(\sqrt[n]{A})^{n-2} + \cdots + B^{n-2}\sqrt[n]{A} + B^{n-1}\right)(B - \sqrt[n]{A}).$$

Poiché A è iniettivo anche $\sqrt[n]{A}$ è iniettivo per il lemma (1), quindi anche $(\sqrt[n]{A})^{n-1}$ è iniettivo. Essendo questa potenza anche simmetrica non-negativa è anche un operatore positivo per il lemma (2). Poiché

$$\left((\sqrt[n]{A})^{n-1} + B(\sqrt[n]{A})^{n-2} + \cdots + B^{n-2}\sqrt[n]{A} + B^{n-1}\right) \geq (\sqrt[n]{A})^{n-1} > 0$$

si ha che quella somma è iniettiva in quanto positiva per il lemma (2), quindi dall'equazione sopra troviamo $B - \sqrt{A} = 0$, infatti se $x \in H$ allora per iniettività $(B - \sqrt{A})x = 0$ se e solo se

$$0 = \left((\sqrt[n]{A})^{n-1} + B(\sqrt[n]{A})^{n-2} + \cdots + B^{n-2}\sqrt[n]{A} + B^{n-1} \right) (B - \sqrt[n]{A})x$$

che è vero.

$\boxed{\ker A = H}$ Per il lemma (1)

$$H = \ker A = \ker B = \ker \sqrt[n]{A},$$

quindi $B = \sqrt[n]{A}$ in quanto sono entrambi l'operatore nullo.

$\square$

Lemma 3.
U è un isomorfismo isometrico se e solo se è unitario, cioè $U^* = U^{-1}$.

Dimostrazione.
Se $U^* = U^{-1}$ allora $x \cdot y = U^*Ux \cdot y = Ux \cdot Uy$. Viceversa se $Ux \cdot Uy = x \cdot y$ per ogni x e y allora $U^*Ux \cdot y = x \cdot y$ per ogni x e y, dunque $U^*U = id_H$. Poiché id_H è autoaggiunto segue anche $UU^* = id_H$.
$\square$

Esercizio 4. Sia H uno spazio di Hilbert, $T \in L(H)$.

a. Provare che esistono un unico operatore $S \in L(H)$ autoaggiunto non-negativo e un'unica isometria $U : \overline{\operatorname{Imm} T^*} \to \overline{\operatorname{Imm} T}$ tali che $T = US$.

b. Si descriva l'operatore U e le sue iterate U^n nel caso dell'operatore di Volterra[1] $T \in L(L^2([0,\pi],\mathbb{C}))$ definito da

$$(Tu)(x) := \int_0^x u(t)dt.$$

Soluzione.
Poiché siamo su uno spazio di Hilbert $T^{**} = T$. Per un conto visto in classe $\overline{\operatorname{Imm} T} = (\ker T^*)^\perp$ (annullatore e preannullatore sono la stessa cosa su spazi di Hilbert), quindi $H = \overline{\operatorname{Imm} T} \oplus \ker T^*$ in quanto esiste un proiettore ortogonale con immagine $\ker T^*$ e nucleo $(\ker T^*)^\perp$ ($\ker T^*$ è chiuso perché preimmagine di 0 tramite T^* che è continuo). Analogamente $H = \overline{\operatorname{Imm} T^*} \oplus \ker T$.

Fissiamo una successione di polinomi p_n che converge a $\sqrt{\bullet}$ tali che $p_n(0) = 0$, che possiamo fare perché $\sqrt{0} = 0$.

a. Mostriamo prima l'unicità e poi esistenza

$\boxed{!}$ Se $T = US$ allora

$$T^*T = SU^*US \overset{(3)}{=} S^2 \implies S = \sqrt{T^*T} = |T|$$

dove questa implicazione segue dall'esercizio precedente (T^*T è simmetrico perché $T^{**} = T$ e non negativo perché $T^*Tx \cdot x = Tx \cdot Tx = \|Tx\|^2 \geq 0$). Osserviamo che $\ker S = \ker T$, infatti per il lemma (1) $\ker |T| = \ker T^*T$ e poiché $H = \overline{\operatorname{Imm} T} \oplus \ker T^*$ si ha che $\ker T^*T = \ker T$. Segue dunque che $S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}}$ è iniettiva ma ha la stessa immagine di S, cioè è un isomorfismo con l'immagine, da cui

$$U = T(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1} = (T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1}.$$

$\boxed{\exists}$ $|T|$ è autoaggiunto e non-negativo per l'esercizio precedente.
Il dominio di U è la chiusura dell'immagine di $S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}}$, che per quanto detto è la chiusura dell'immagine di $S = |T| = \sqrt{T^*T}$. Notiamo che $\operatorname{Imm}(T^*T) = \operatorname{Imm} T^*$ in quanto $\ker T^*$ è in somma diretta con $\overline{\operatorname{Imm} T}$. Per definizione

$$|T|\, x = \lim_n p_n(T^*T)x \overset{p_n(0)=0}{\in} \overline{\operatorname{Imm}(T^*T)} = \overline{\operatorname{Imm} T^*}.$$

[1] Il corrispondente operatore S è stato calcolato nelle esercitazioni.

Viceversa, se consideriamo $y = T^*x$ allora a meno di cambiare rappresentante in $H/\ker T^*$ possiamo supporre $x \in \overline{\operatorname{Imm} T}$. Sia z_n una successione tale che $Tz_n \to x$ e notiamo che per continuità $T^*Tz_n = |T|\,(|T|\,z_n) \to y$, cioè $y \in \overline{\operatorname{Imm}|T|}$.
Osserviamo ora che $\operatorname{Imm} U = \overline{\operatorname{Imm} T}$. Per quanto detto il contenimento $\subseteq$ è evidente in quanto $T(\overline{\operatorname{Imm} T^*}) = \operatorname{Imm} T$, vicevesa se $y = \lim_n Tx_n$ allora, a meno di cambiare classe in $H/\ker T$, si ha che $x_n = T^*z_n$ e quindi $y = \lim_n TT^*z_n = T(\lim_n T^*z_n)$ e per quanto detto $\overline{\operatorname{Imm} T^*} = \operatorname{Imm}((S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1})$.
Per concludere basta mostrare che U è unitario per il lemma (3):

$$
\begin{aligned}
UU^* =&(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1}((S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1})^*(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^* = \\
=&(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})((T^*T)|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1}(T^*)|_{\overline{\operatorname{Imm} T}} = \\
=&\left(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}}(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1}\right)\left((T^*|_{\overline{\operatorname{Imm} T}})^{-1}T^*|_{\overline{\operatorname{Imm} T}}\right) = id_{\overline{\operatorname{Imm} T}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U^*U =&((S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1})^*(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^*(T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1} = \\
=&((S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1})(T^*T|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1} = \\
=&((S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})(S|_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}})^{-1} = id_{\overline{\operatorname{Imm} T^*}}.
\end{aligned}
$$

b. Ricordiamo che gli autovalori di T^*T per l'operatore di Vitali con $I = [0, \pi]$ sono

$$\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2},$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$, con relative autofunzioni normalizzate

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)$$

Abbiamo visto che

$$|T|\,\varphi_n = \sqrt{\lambda_n}\varphi_n.$$

Poiché ogni $u \in L^2(I)$ si scrive

$$u = \sum_{n\geq 0} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

per $u \in \overline{\operatorname{Imm} T^*}$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
Uu(x) =&T\,|T|^{-1}\,u(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\langle u, \varphi_n\rangle}{\sqrt{\lambda_n}} T\varphi_n(x) = \int_0^x \sum_{n\geq 0} \frac{\langle u, \varphi_n\rangle}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n(s)ds = \\
=& \int_0^x \int_I \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} u(t)\varphi_n(t)\varphi_n(s)dtds = \\
=& \int_I \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n(t) \int_0^x \varphi_n(s)ds\right) u(t)dt = \\
=& \int_I \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}t\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\lambda_n} \sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)\right) u(t)dt = \\
=& \int_I \left(\sum_{n\geq 0} \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}t\right) \sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)\right) u(t)dt = \\
=& -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_I \left(\sum_{n\geq 0} \frac{4}{\pi(2n+1)} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}t\right) \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)\right) u(t)dt\right) = \\
=& -\frac{\partial}{\partial x}(|T|\,u(x)) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\,|T|\right) u.
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 4.
Sia $X \subseteq E^*$, allora $\overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} X}^{w^*} = \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} X}^{w^*}$.

Dimostrazione.
Basta mostrare che $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} X \subseteq \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} X}^{w^*}$. Poiché $(E^*, w^*) \to (E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ è continua in realtà basta mostrare

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} X \subseteq \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} X}^{\|\cdot\|}.$$

Senza perdita di generalità supponiamo $X = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} X$. L'unica cosa da dimostrare che se $x \in X$ allora $\lambda x \in \overline{X}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{Q}$ una successione convergente a λ.

$$\|\lambda x - \lambda_n x\| = |\lambda - \lambda_n| \, \|x\| \to 0$$

quindi $\lambda_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x$ e dunque λx appartiene alla chiusura. $\square$

Esercizio 5. Sia E uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{R}$ localmente convesso metrizzabile e separabile. È vero che il duale E^* è separabile rispetto alla topologia $\sigma(E^*, E)$?

Soluzione.
Mostriamo che E^* è w^*-separabile. Ricordiamo che per spazi metrici separabilità equivale a II-numerabilità, quindi E è topologizzato da una quantità numerabile di seminorme $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Sia $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso di E.

Ricordiamo che $Y \subseteq E^*$ $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale è denso per la topologia debole star se

$$E^* = \overline{Y}^{w^*} = \overline{\operatorname{Span}(Y)}^{w^*} = (Y_\perp)^\perp.$$

Per il lemma (4), se Y è un $\mathbb{Q}$-sottospazio vettoriale allora $\overline{Y}^{w^*} = \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} Y}^{w^*} = (Y_\perp)^\perp$, quindi se troviamo $Z \subseteq E^*$ numerabile tale che $Z_\perp = (0)$ allora

$$(0) = Z_\perp = \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(Z)_\perp \implies \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} Z}^{w^*} = \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} Z}^{w^*} = (Z_\perp)^\perp = E^*$$

cioè $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} Z$ sarebbe numerabile ($\left|\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} Z\right| \leq \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$) e w^*-denso in E^* come voluto.

Costruiamo un un tale Z: Notiamo che q_i è sublineare (per definizione di seminorma), quindi se $\widetilde{f}_{i,j} \in \langle x_j \rangle$ è definito da $\widetilde{f}_{i,j}(\lambda x_j) = \lambda q_i(x_j)$ allora esso si estende per il teorema di Hahn-Banach ad un funzionale $f_{i,j} \in E^*$ tale che $f_{i,j} \leq q_i$.

Affermiamo che $Z = \{f_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ ha la proprietà cercata: vogliamo mostrare che se $x \in Z_\perp$, cioè $x \in E$ è tale che $f_{i,j}(x) = 0$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, allora $x = 0$. Poiché E^* è Hausdorff e topologizzato dalle q_i, basta mostrare che $q_i(x) = 0$ per ogni i. Sia (e_{j_k}) una sottosuccessione del denso in E che converge a x e notiamo che

$$q_i(e_{j_k}) = f_{i,j_k}(e_{j_k}) = f_{i,j_k}(e_{j_k} - x) \leq q_i(e_{j_k} - x),$$

quindi passando al limite in k per entrambi i membri troviamo $q_i(x) \leq q_i(x - x) = 0$, cioè $q_i(x) = 0$ come voluto. $\square$

Esercizio 6. Sia F uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{C}$ localmente convesso metrizzabile completo. Sia $T : F \to F$ lineare continuo. Sia $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ non è un omeomorfismo}\}$. Cosa è sempre vero?

a. Σ è chiuso;

b. $\Sigma \neq \emptyset$;

c. $\Sigma \neq \mathbb{C}$.

Soluzione.
b. e **c.** non sono sempre vere.

a.

b. Sia $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ visto con la topologia indotta dalle norme $\|\cdot\|_{\infty,m,[-n,n]}$ al variare di $n, m \in \mathbb{N}$. Procedendo come in classe si mostra che E è di Fréchet. Sia

$$F = \left\{ f \in E \mid f^{(p)}(0) = 0,\ \forall p \in \mathbb{N} \right\}$$

e notiamo che F è chiuso in E, quindi è ancora di Fréchet.

Sia $T = \frac{d}{dx}$ l'operatore derivata e, per definizione, questo è un endomorfismo continuo di E. Inoltre $T|_F$ è un endomorfismo di F in quanto se $f \in F$ allora $f^{(p+1)}(0) = 0$ in quanto lo abbiamo imposto per ogni derivata. Cerchiamo ora una inversa continua di $T - \lambda$, ma per quanto sappiamo sulle equazioni differenziali l'unica possibilità è

$$S_\lambda(f)(x) = e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

S_λ è chiaramente lineare in f e inverte $T - \lambda$. S_λ è continua in quanto

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(f)\|_{\infty,m,[-n,n]} &= \max_{p \le m} \|T^p S_\lambda(f)\|_{\infty,[-n,n]} = \max_{p \le m} \left\| T^{p-1}(\lambda S_\lambda(f) + f) \right\|_{\infty,[-n,n]} = \\
&= \max_{p \le m} \left\| \lambda T^{p-1}(S_\lambda(f)) + f^{(p-1)} \right\|_{\infty,[-n,n]} = \\
&= \max_{p \le m} \left\| f^{(p-1)} + \lambda f^{(p-2)} + \cdots + \lambda^{p-1} f + \lambda^p S_\lambda(f) \right\|_{\infty,[-n,n]} \le \\
&\le \frac{1 - |\lambda|^p}{1 - |\lambda|} \|f\|_{\infty,m,[-n,n]} + \underbrace{\max_{p \le m} |\lambda|^p}_{\doteqdot M_m} \|S_\lambda(f)\|_{\infty,[-n,n]} \le \\
&\le \frac{1 - |\lambda|^p}{1 - |\lambda|} \|f\|_{\infty,m,[-n,n]} + M_m 2n \|f\|_{\infty,[-n,n]} \le \\
&\le \left(\frac{1 - |\lambda|^p}{1 - |\lambda|} + 2n M_m \right) \|f\|_{\infty,m,[-n,n]}
\end{aligned}$$

per $|\lambda| \neq 1$, se $|\lambda| = 1$ allora in modo simile

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(f)\|_{\infty,m,[-n,n]} &= \max_{p \le m} \|T^p S_\lambda(f)\|_{\infty,[-n,n]} = \max_{p \le m} \left\| T^{p-1}(\lambda S_\lambda(f) + f) \right\|_{\infty,[-n,n]} = \\
&= \max_{p \le m} \left\| \lambda T^{p-1}(S_\lambda(f)) + f^{(p-1)} \right\|_{\infty,[-n,n]} = \\
&= \max_{p \le m} \left\| f^{(p-1)} + \lambda f^{(p-2)} + \cdots + \lambda^{p-1} f + \lambda^p S_\lambda(f) \right\|_{\infty,[-n,n]} \le \\
&\le \max_{p \le m} (p-1) \|f\|_{\infty,m,[-n,n]} + \|S_\lambda(f)\|_{\infty,[-n,n]} \le \\
&\le (m - 1 + 2n) \|f\|_{\infty,m,[-n,n]}.
\end{aligned}$$

In ogni caso $\|S_\lambda(f)\|_{\infty,m,[-n,n]}$ è limitata e quindi S_λ è continua, mostrando che $T - \lambda$ è un omeomorfismo.

c. Topologicamente, identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ nel modo standard. Sia $K_n = \overline{B(0,n)}$ e notiamo che ogni K_n è compatto, $K_n \subseteq K_{n+1}$ per ogni n e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathbb{C}$. Poniamo $F = C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ munito della topologia indotta dalle seminorme $\left\{ \|\cdot\|_{\infty,K_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Queste sono effettivamente seminorme come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, infatti per ogni K compatto

- $\|f\|_{\infty,K} = \max_K |f| \ge 0$
- $\|\lambda f\|_{\infty,K} = \max_K |\lambda f| = |\lambda| \max_K |f| = |\lambda| \|f\|_{\infty,K}$
- $\|f + g\|_{\infty,K} = \max_K |f + g| \le \max_K |f| + \max_K |g| = \|f\|_{\infty,K} + \|g\|_{\infty,K}$.

Abbiamo visto che una topologia indotta da una famiglia di seminorme è una topologia di SVTLC, quindi dobbiamo solo verificare metrizzabilità e completezza. Come distanza possiamo considerare

$$d(f,g) = \sum_{j \ge 0} 2^{-j} \arctan(\|f - g\|_{\infty,K_j}).$$

La topologia indotta è completa perché se $(f_n) \subseteq F$ è di Cauchy, cioè $(f_n|_{K_j})$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\infty,K_j}$ per ogni j, allora f_n converge uniformemente su questi compatti. In particolare possiamo definire un limite f puntualmente ma questo è continuo perché deriva da una convergenza uniforme su compatti.

Consideriamo ora la funzione

$$T : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & z \mapsto zf(z) \end{array}$$

Questa mappa è ben definita perché se f è continua $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ allora zf è continua. T è lineare per verifica diretta

$$z((\lambda f + \mu g)(z)) = z(\lambda f(z) + \mu g(z)) = \lambda z f(z) + \mu z g(z)$$

e continua perché per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{C}$ si ha

$$\|zf(z)\|_{\infty,K} \leq \max_K |z| \, \|f(z)\|_{\infty,K}$$

cioè per ogni seminorma $q = \|\cdot\|_{\infty,K}$ che topologizza F, esiste $M = \max_K |z|$ e una seminorma $p = \|\cdot\|_{\infty,K}$ tale che $q(T(f)) \leq Mp(f)$ per ogni $f \in F$.

Osserviamo che $T - \lambda$ non è mai un omeomorfismo perché in particolare non è mai surgettiva: un generico elemento g dell'immagine è della forma

$$g(z) = zf(z) - \lambda f(z) = (z - \lambda)f(z),$$

in particolare $g(\lambda) = 0 \cdot f(\lambda) = 0$. Poiché esistono elementi di F che non si annullano in λ per un qualsiasi $\lambda \in \mathbb{C}$, $T - \lambda$ non è surgettiva.

□

Lemma 5.
Se $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ allora $D(hu) = h'u + hDu$.

Dimostrazione.
Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e vediamo che le due espressioni coincidono

$$\begin{aligned} D(hu)(\phi) &= -(hu)(\phi') = -u(h\phi') = \\ &= -u((h\phi)' - h'\phi) = \\ &= Du(h\phi) + u(h'\phi) = \\ &= hDu(\phi) + h'Du(\phi). \end{aligned}$$

□

Lemma 6.
Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ risolve l'equazione $Du = 0$ allora $u = T_c$ dove $c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è una funzione costante.

Dimostrazione.
Se $Du = 0$ allora per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $u(\phi') = 0$. Fissiamo $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\int \sigma dx = 1$ (basta prendere una qualsiasi funzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con integrale non nullo e normalizzare) e poniamo $c = u(\sigma)$.

Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ poniamo $w = \int \phi dx$ e notiamo che $w\sigma - \phi$ è la derivata di $\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} w\sigma(t) - \phi(t)dt$, che è liscia a supporto finito: il supporto è contenuto in $\operatorname{co}(\operatorname{supp}\sigma \cup \operatorname{supp}\phi)$, limitato inferiormente per ovvi motivi e superiormente perché

$$\int_{\mathbb{R}} w\sigma(t) - \phi(t)dt = w \cdot 1 - \int \phi dt = w - w = 0$$

e $\alpha(t)$ è costante per $t > \sup \operatorname{co}(\operatorname{supp}\sigma \cup \operatorname{supp}\phi)$. $\alpha(x)$ è liscia perché ha derivata liscia.

Per quanto detto segue che $u(w\sigma - \phi) = u(\alpha') = 0$, cioè

$$0 = u(w\sigma - \phi) = wc - u(\phi) \iff u(\phi) = \int c\phi dx = T_c(\phi)$$

ovvero $u = T_c$ come volevamo. □

Esercizio 7. Sia $P \in \mathbb{C}[z]$. Si consideri l'equazione ordinaria omogenea a coefficienti costanti $P(D)u = 0$. Vi sono soluzioni distribuzionali[2] $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ oltre a quelle classiche in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

[2]Cioè interpretando D come la derivata distribuzionale $D : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soluzione.
Per evitare equazioni banali supponiamo $P \neq 0$, altrimenti ogni distribuzione sarebbe una soluzione. Possiamo dunque senza perdita di generalità supporre P monico. Se $\deg P = 0$, cioè $P = 1$ in quanto monico, allora abbiamo l'equazione $u = 0$, e effettivamente $0 = T_0$ quindi $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Supponiamo ora $n \geq 1$ e fattorizziamo $P(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \alpha_i)$.

Mostriamo per induzione su n che per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le soluzioni di $P(D)u = f$ sono funzioni lisce. La tesi segue considerando $f = 0$.

$\boxed{n = 1}$ Stiamo considerando un'equazione della forma $Du - \lambda u = f$. Per la teoria classica esiste una soluzione particolare u_P della forma T_h per qualche $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, quindi basta mostrare che la tesi vale per il caso omogeneo perché in tal caso $u - u_P = T_g$ e quindi $u = T_{g+h}$.

Sia $h = e^{-\lambda x}$ e notiamo che se u è soluzione

$$D(hu) \overset{(5)}{=} h'u + hDu = -\lambda hu + hDu = h(Du - \lambda u) = 0$$

quindi hu è costante per il lemma (6), cioè $e^{-\lambda x}u = T_c$ e quindi $u = e^{\lambda x}T_c = T_{ce^{\lambda x}}$, che è una funzione classica.

$\boxed{n > 1}$ Consideriamo prima il caso omogeneo: se $P(D)u = 0$ allora

$$(D - \alpha_n)\frac{P(z)}{(z - \alpha_n)}(D)u = 0,$$

cioè $\frac{P(z)}{(z-\alpha_n)}(D)u$ risolve $(D - \alpha_n)v = 0$, dunque per ipotesi induttiva forte $\frac{P(z)}{(z-\alpha_n)}(D)u$ è una soluzione classica, che chiamiamo g. Allora u risolve

$$\frac{P(z)}{(z - \alpha_n)}(D)u = g$$

e per induzione sul grado questo conclude il caso omogeneo.

Consideriamo ora il caso generale $P(D)u = f$. Dalla teoria classica esiste una soluzione particolare classica $u_P = T_h$ e per linearià $u - u_P$ deve essere una soluzione di $P(D)v = 0$. Per il caso omogeneo $u - u_P$ deve essere T_h per qualche h funzione liscia, ma allora $u = T_{h+g}$ e quindi u stessa è una soluzione classica.

□