Istituzioni di Analisi Matematica

Corso del prof. Pietro Majer

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

Capitolo 1

Norme e Seminorme

Il corso si concentra sulla relazione che si crea tra la struttura lineare e la struttura topologia degli spazi normati.

Per $\mathbb{K}$ intendiamo un campo tra $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1.1 Norme e seminorme

Definizione 1.1 (Seminorma)**.**
Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, una **seminorma** è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ tale che

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Disuguaglianza triangolare*)
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ se $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$ (*Positivamente omogenea*)

2'. $\|\lambda x\| = \|x\|$ se $|\lambda| = 1$ (*Isotropa*)

Se inoltre vale $\|x\| = 0 \iff x = 0$ allora $\|\cdot\|$ è detta **norma**.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio (semi)normato**.

Osservazione 1.2.
Su uno spazio (semi)normato possiamo definire una (semi)distanza indotta ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Diamo alcuni esempi di spazi normati e seminormati:

Esempio 1.3.

1. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i|$
2. Per $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < \infty\right\}$ con $\|x\|_p = \sum_{i \geq 0} |x_i|^p$
3. $\ell_\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup |x_i| < \infty\right\}$ con $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$
4. $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{K},\ \text{misurabile},\ \|f\|_p < \infty\right\}$ con

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \\ \operatorname*{supess}_{x \in X} |f(x)| = \inf\limits_{\substack{N \subseteq X, \\ \mu(N) = 0}} \sup\limits_{x \in X \setminus N} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è uno spazio seminormato ma non normato.

5. Spazi di Hilbert.

Definizione 1.4 (Funzioni continue, limitate e lineari)**.**
Siano E, F spazi normati e S un insieme, definiamo i seguenti spazi normati:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(S,E) &= \{f : S \to E, \text{ limitate}\}, & \|f\|_{\infty,S} &= \sup_{s\in S} \|f(s)\|_E \\ \mathscr{B}C(S,E) &= \{f : S \to E, \text{ continue e limitate}\}, & \|f\|_{\infty,S} &= \sup_{s\in S} \|f(s)\|_E \\ L(E,F) &= \{T : E \to F \text{ lineare}, \ \|T\| < \infty\}, & \|T\| &= \sup_{x\in B_E(0,1)} \|T(x)\|_F \end{aligned}$$

Definizione 1.5 (Spazio duale)**.**
Sia V uno spazio vettoriale. Denotiamo con V' **il duale algebrico**, cioè l'insieme delle mappe lineari $V \to \mathbb{K}$.

Definiamo lo **spazio duale** a V come $V^* = L(V, \mathbb{K})$, cioè come il sottoinsieme di V' dato dalle mappe continue. La norma su V^* è quindi data da

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| \overset{\text{Lineare}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f(x)| .$$

Proposizione 1.6 (Per funzionale limitato equivale continuo)**.**
Per un funzionale lineare in V^*, essere limitato è equivalente ad essere continuo.

Dimostrazione.
Se $\|f\| = M \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| = \left\| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right\| \|x-y\| \le \|f\| \|x-y\| = M \|x-y\| ,$$

cioè f è M-lipschitz, e quindi continua.

Sia ora f lineare e continua. Per definizione di continuità in 0 esiste $\delta > 0$ tale che $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \le 1$ per ogni $x \in B_V(0,\delta)$. Segue che

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} f\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \frac{\|x\|}{\delta},$$

cioè $\|f\|_{V^*} \le 1/\delta$ e quindi f limitato. $\square$

Osservazione 1.7.
Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio seminormato e $N = \ker \|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$ allora $\|\cdot\|$ passa al quoziente e lo rende uno spazio normato.

Esempio 1.8.
Considerando lo spazio seminormato $(\mathcal{L}^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$, la costruzione sopra corrisponde a definire lo spazio normato $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$, infatti $\ker \|\cdot\|_p$ sono le funzioni con supporto in un insieme trascurabile.

Osservazione 1.9.
$L(E,F) \hookrightarrow \mathscr{B}(B_E(0,1), F)$ mandando $T \mapsto T|_{B_E(0,1)}$. Infatti per definizione questa mappa è isometrica[1]. Questo identifica il primo spazio con un chiuso del secondo.

[1] $\|T\| = \left\| T|_{B_E(0,1)} \right\|_{\infty, B_E(0,1)}$

1.1.1 Teoremini filosofici

Teorema 1.10 (Banach Mazur)**.**
Sia $(E, \|\cdot\|)$ normato, $f : E \to E$ isometria[2]*. Allora f è affine.*

Dimostrazione. (ESERCIZIO).
TRACCIA:

- Basta provare che $\forall a, b \in E$ vale
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
(conservando questa conserva i razionali 2-adici e quindi per continuità ogni combinazione convessa)

- Fissati $a, b \in E$, definiamo la *deficienza affine* di f (rispetto ad a e b)
$$def(f) = \left\| \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right\} \right\|$$
La tesi è $def(f) = 0$.

- Notiamo che
$$def(f) \leq \left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{f(a)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(b)}{2} \right\| = \frac{1}{2}\left(\|a+b\| + \|a\| + \|b\|\right)$$

- Consideriamo l'applicazione affine che scambia $f(a)$ e $f(b)$ data da
$$\rho(y) = f(a) + f(b) - y$$
Poniamo $\widetilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$.

- Mostrare $def(\widetilde{f}) = 2def(f)$.

- Se $def(f) \neq 0$, iterando otteniamo che esiste g tale che $def(g)$ è arbitrariamente grande (raddoppio $def(f)$ tante volte), ma questo è assurdo perché abbiamo il limite trovato prima che non dipende dalla funzione.

$\square$

Filosoficamente questo vuol dire che la struttura metrica in un qualche modo determina la struttura vettoriale.

Teorema 1.11 (Inclusione isometrica / Fréchet-Kuratowski)**.**
Sia (M, d) spazio metrico. Allora esso si immerge isometricamente in uno spazio normato[3]*. In particolare si immerge in $(\mathscr{B}C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ via l'assegnazione seguente:*

Fissiamo un punto base $x_0 \in M$.[4]

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathscr{B}C(M, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0) \end{array}$$

[2] con questo termine intendiamo che la mappa, oltre a rispettare le distanze, è anche bigettiva. Se non vale bigettività diremo "inclusione isometrica"
[3] addirittura di Banach.
[4] saremmo tentati da $x \mapsto d(\cdot, x)$, ma la funzione in arrivo non è limitata e quindi non esiste una norma ben definita

Dimostrazione.
ESERCIZIO □

Filosoficamente questo vuol dire che studiando mappe tra spazi metrici, possiamo pensare al codomino come spazi normati.
Se consideriamo l'immersione di uno spazio metrico in un Banach, possiamo "incicciottirlo" e trovare uno spazio metrico "vicino" che è localmente contraibile. Queste idee a volte possono aiutare.

1.2 Completezza

Definizione 1.12 (Successione di Cauchy)**.**
Una successione (x_n) è **di Cauchy** o **fondamentale** se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p,\ q > n$ si ha $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Fatto 1.13 (Proprietà delle successioni di Cauchy)**.**

1. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*
2. *Se (x_n) è di Cauchy e $\widetilde{x} \in X$ è un punto ad essa aderente allora $\widetilde{x}$ è il limite.*
3. *Se (x_n) come sopra ha una sottosuccessione convergente, la successione converge allo stesso limite.*
4. *Ogni successione di Cauchy*[5] *(x_n) ha una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che*
$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}.$$

Definizione 1.14 (Spazio completo)**.**
Uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge.

Se $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato è completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$ allora si dice **di Banach**.

Osservazione 1.15.
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie $\sum x_k$ definita a partire da una successione tale che $\|x_k\| < 2^{-k}$ è convergente.

Equivalentemente X di Banach se ogni serie $\sum x_k$ assolutamente convergente[6] è convergente.

Dimostrazione.
Ogni successione si può scrivere come serie, infatti $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ per $x_i = y_i - y_{i-1}$. Il resto segue pensando sulle definizioni. □

Osservazione 1.16.
Sia $Y \subseteq X$ con (X, d) metrico.

- Se X è completo e Y è chiuso allora Y è completo.
- Se Y è completo allora è anche chiuso.

Proposizione 1.17 (Completamento)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico, allora

[5] questa proprietà è comoda perché implica $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < 2^{-k+1}$ per ogni $p > k$
[6] cioè $\sum \|x_k\|$ convergente

1. *esiste una inclusione isometrica densa di X in uno spazio metrico completo*
$$j : (X, d) \hookrightarrow (\widetilde{X}, \widetilde{d})$$
2. *il completamento è universale, cioè se $j' : (X, d) \to (\widetilde{X}', \widetilde{d}')$ è un'altra mappa come sopra allora esiste un'unica isometria $\phi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ che fa commutare il diagramma*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "j'"'] & \widetilde{X} \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & \widetilde{X}' \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.
Consideriamo un paio di costruzioni

$\boxed{\textit{Costruzione } 1}$ Consideriamo
$$C_X = \left\{\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \xi \text{ di Cauchy}\right\}$$
con una semidistanza[7]
$$d(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(\xi_n, \eta_n).$$
Questo limite esiste perché la successione di queste distanze è di Cauchy in $\mathbb{R}$, che è completo. Notiamo che
$$d(\xi, \eta) = 0 \iff d(\xi_n, \eta_n) = o(1).$$
Notiamo che X ha una inclusione isometrica in (C_X, d) data associando a x la successione costante al valore x.
Consideriamo
$$\widetilde{X} = {}^{C_X}\!/\!_{\mathscr{R}}, \qquad \xi \mathscr{R} \eta \iff d(\xi, \eta) = 0.$$
L'inclusione isometrica di prima definisce $X \hookrightarrow \widetilde{X}$, ma stavolta $\widetilde{X}$ è uno spazio metrico per costruzione.

ESERCIZIO: VERIFICA PROPRIETÀ DI NORMA E DENSITÀ

$\boxed{\textit{Costruzione } 2}$ Definiamo $\widetilde{X}$ come la chiusura in $(\mathscr{B}C(X), \|\cdot\|_\infty)$ dell'immagine di X tramite l'inclusione di Fréchet Kuratowski (1.11).

$\boxed{\textit{Costruzione } 3}$ (Solo per X spazio normato, ma per il teorema di inclusione isometrica (1.11) questo è sufficiente) Vedremo che esiste una inclusione isometrica di X nel suo biduale ($x \mapsto val_x$) e che il biduale stesso è completo, quindi un completamento di X è fornito dalla chiusura di $val.(X) \subseteq X^{**}$

□

Proposizione 1.18 (Estensione per densità di uniformemente continue)**.**
Siano X e Y spazi metrici, Y completo, $D \subseteq X$ denso e $f : D \to Y$ uniformemente continua, allora esiste un'unica estensione continua $\widetilde{f}$ di f a tutto X, inoltre $\widetilde{f}$ è essa stessa uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[7] VERIFICARE CHE LO È

Definizione 1.19 (Categorie di spazi metrici)**.**
Sia Met la categoria degli spazi metrici con mappe date da applicazioni uniformemente continue e CMet la sottocategoria piena dove gli oggetti sono spazi metrici completi

Osservazione 1.20.
L'operazione di completamento è un funtore[8] $\widetilde{\cdot}$: Met $\to$ CMet. Questo funtore è aggiunto al funtore dimenticante / di inclusione j : CMet $\to$ Met, infatti

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CMet}}(\widetilde{X}, Y) = UC(\widetilde{X}, Y) \overset{(1.18)}{\cong} UC(X, j(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Met}}(X, j(Y)).$$

Esercizio 1.21.
Verificare l'aggiunzione.

1.3 Prodotto di spazi (semi)normati

Osservazione 1.22.
Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio vettoriale e $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora Y è (semi)normato con la norma indotta. La topologia indotta è quella di sottospazio

Definizione 1.23 (Prodotto di spazi (semi)normati)**.**
Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi (semi)normati, la (semi)norma prodotto è data da

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Questa rende $X \times Y$ uno spazio (semi)normato e

$$B_{X\times Y}((0,0), 1) = B_X(0,1) \times B_Y(0,1),$$

cioè la topologia indotta è la topologia prodotto.

Definizione 1.24 (Somma diretta topologica)**.**
Due sottospazi di $(X, \|\cdot\|)$ Y e Z sono in **somma diretta algebrica** se $+|_{Y\times Z}$: $Y \times Z \to X$ è bigettiva. Se $+|_{Y\times Z}$ è anche un omeomorfismo diciamo che X è la **somma diretta topologica** di Y e Z.

Osservazione 1.25.
X è la somma diretta topologica di Y e Z se X è isomorfo come spazio normato a $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y\times Z})$.

Osservazione 1.26.
La mappa $+|_{Y\times Z}$ è sempre continua, ma in generale non è un omeomorfismo.

Definizione 1.27 (Proiettore)**.**
Un endomorfismo lineare $P : X \to X$ si dice **proiettore** se è idempotente, cioè $P^2 = P$.

Osservazione 1.28.
Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta algebrica $X = \ker P \oplus \mathrm{Imm}\, P$. Viceversa, ad ogni decomposizione in somma diretta algebrica possiamo associare un proiettore

[8] preserva composizione per l'unicità della mappa tra estensioni

Osservazione 1.29.
I proiettori $P_Y : X \to Y$ e $P_Z = id - P_Y : X \to Z$ sono continui se e solo se la somma è topologica, infatti

$$(+|_{Y \times Z})^{-1} = P_Y \times P_Z.$$

Definizione 1.30 (Spazio (semi)normato quoziente)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è (semi)normato e Y è un suo sottospazio allora come spazio vettoriale

$$X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}.$$

Su essa definiamo la seguente norma: se $\xi \in X/Y$ allora[9]

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

Esercizio 1.31.
$\|\cdot\|_{X/Y}$ è una seminorma su X/Y e rende la proiezione $\pi : X \to X/Y$ una applicazione aperta e continua. Più precisamente

$$\pi(B_X(0,1)) = B_{X/Y}(0,1)$$

Dimostrazione.
Continua perché $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|$ per definizione di estremo inferiore, quindi π ha norma come operatore ≤ 1, e quindi è continua. □

Osservazione 1.32.
Notiamo che X/Y ha effettivamente la topologia quoziente indotta da π

Esercizio 1.33.
La (semi)norma quoziente è una norma se e solo se Y è chiuso (a prescindere dal fatto che $\|\cdot\|_X$ sia una norma o seminorma).

Osservazione 1.34.
Se Y e Z sono seminormati allora $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$ come spazi seminormati.

Osservazione 1.35.
Se $Y \subseteq X$ ed esiste[10] Z tale che $X = Y \oplus Z$ allora $Z \cong X/Y$.

Osservazione 1.36.
In generale X non è isomorfo a $Y \times X/Y$.

Osservazione 1.37.
Per quanto riguarda la completezza in queste costruzioni:

- Y sottospazio di X con X di Banach è un Banach se e solo se è chiuso
- $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$ è Banach se e solo se lo sono sia Y che Z
- Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato e $Y \subseteq X$ è un sottospazio chiuso allora $(X, \|\cdot\|)$ è completo se e solo se sia Y che X/Y sono completi.

Notiamo che l'ultima proprietà implica la seconda, infatti $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$

Proposizione 1.38 (Duale del prodotto)**.**
Dati X e Y spazi di Banach, il duale di $X \times Y$ è isometricamente isomorfo a

$$(X^* \times Y^*, \|\cdot\|)$$

dove $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{X^*} + \|\eta\|_{Y^*}$ (che è topologicamente equivalente a $\|\cdot\|_{X^* \times Y^*}$).

$$(X^* \times Y^*, \|P_{X^*}(\cdot)\|_{X^*} + \|P_{Y^*}(\cdot)\|_{Y^*}) \cong ((X \times Y)^*, \|\cdot\|_{(X \times Y)^*}).$$

[9] pensando a ξ come un traslato di Y, la norma che stiamo definendo è la distanza di questo spazio affine dall'origine.
[10] ci sono casi in cui non esite, come $c_0 \subseteq \ell_\infty$

1.4 Elenco di spazi completi

Proposizione 1.39.
Sia S insieme e E Banach, allora lo spazio normato $(\mathscr{B}(S,E), \|\cdot\|_{\infty,S})$ è completo.

Dimostrazione.
[PERSO, RIGUARDA POI]
tale che $\|f(s)\| = \|\sum_k f_k(s)\| \leq \sum_k \|f_k(s)\| \leq \sum \|f\|_{\infty,S}$
quindi $\|f\|_{\infty,S}$ □

Uno degli strumenti dell'analista: aggiungere e togliere, cioè

$$\pi\rho o\sigma\tau\alpha\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$$

Lemma 1.40.
Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{B}(S,E)$ con f_k continua in s_0 per ogni k e $f_k \to f$ uniformemente allora anche f è continua in s_0.

Dimostrazione.
Consideriamo

$$\begin{aligned}\|f(s) - f(s_0)\| \leq& \|f(s) - f_k(s)\| + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| + \|f_k(s_0) - f(s_0)\| \leq \\ \leq& 2\|f - f_k\|_{\infty,S} + \|f_k(s) - f_k(s_0)\|\end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di $f_k \to f$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_n\|_{\infty,S} \leq \varepsilon/3$.

Per la continuità in s_0 di f_n esiste un intorno U di s_0 rale che $\|f_n(s) - f_n(s_0)\| \leq \varepsilon/3$ per ogni $s \in U$. Allora per ogni $s \in U$ si ha

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 1.41.
Sia S spazio topologico, E banach, allora $\mathscr{BC}(S,E)$ è completo.

Dimostrazione.
Basta mostrare che $\mathscr{BC}(S,E)$ è chiuso in $\mathscr{B}(S,E)$. Questo segue dal fatto che la continuità in un punto $s_0 \in S$ si conserva per convergenza uniforme, che è il lemma precedente. □

Esempio 1.42.
Sia $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{N}$ e E un banach, allora

$$c(E) \doteqdot \{x : \mathbb{N} \to E, \text{ convergente}\} \cong \mathscr{BC}(S,E)$$

Questo mostra che $c(E)$ è chiuso (e quindi completo) in $\ell_\infty(E) = \mathscr{B}(\mathbb{N},E)$.

Conseguenze:

Proposizione 1.43.
Lo spazio $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ è completo

Dimostrazione.
Considerando l'inclusione isometrica

$$R: \begin{array}{ccc} L(X,Y) & \longrightarrow & \mathscr{B}(B_X(0,1),Y) \\ T & \longmapsto & T|_{B_X(0,1)} \end{array}$$

basta vedere che $R(L(X,Y))$ è chiuso.

Se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ è tale che $R(T_n) \to f$ uniformemente in $\mathscr{B}(B_X(0,1),Y)$ allora mostriamo che f è la restrizione a $B_X(0,1)$ di una qualche lineare T.

Mostriamo che le T_n convergono puntualmente per ogni $x \in X$: se $x = 0$ ok, se $x \neq 0$

$$T_n(x) = \|x\| T_n(x/\|x\|) = \|x\| R(T_n)(x/\|x\|) \to \|x\| f(x/\|x\|)$$

Sia $T : X \to Y$ definita da $T(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$

[MOSTRARE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME, ME LO SONO PERSO] $\square$

Corollario 1.44 (Duale di spazio normato è banach)**.**
Il duale di uno spazio normato è sempre banch.

Teorema 1.45 (Integrazione per serie)**.**
Sia $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è uno spazio di misura e sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathscr{Q}, \mu)$ tali che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$$

Allora $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge q.o. e in norma 1.

Dimostrazione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n : X \to \mathbb{R}$ data da

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|\,.$$

Notiamo che (g_n) è una successione di funzioni misurabili non negative crescente. Inoltre $g_n \to \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|$ per definizione di serie.

Per convergenza monotona

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f\|_1 \leftarrow \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_1 = \inf_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu$$

cioè $\inf_X g d\mu = \sum k \in \mathbb{N} \|f\|_1 < \infty$, cioè $g \in \mathcal{L}^1$.

Inoltre $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ è una successione dominata da g:

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq g(x).$$

Quindi la serie $\sum f_k(x)$ è una serie assolutamente convergente per ogni x dove $g < \infty$. Poiché $\int g < \infty$ le eccezioni sono trascurabili, quindi quasi ovunque $\sum f_k(x)$ è assolutamente convergente.

Sia $f(x) = \sum f_k(x)$ dove la serie converge. Notiamo che

$$|f(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| = g(x),$$

quindi $\|f\|_1 \leq \int g d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_1$.

Applicando come prima la stima alle code

$$\|f - s_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_1 = o(1)$$

dove l'ultimo termine va a 0 perché $\sum \|f_k\|_1$ è convergente. $\square$

Corollario 1.46 (Weil)**.**
Siano $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathscr{Q}, \mu)$ convergenti in $\|\cdot\|_1$. Allora esiste n_k successione strettamente crescente di indici tali che f_{n_k} converge quasi ovunque ed è dominata in $\mathcal{L}^1$.

Dimostrazione.
Sia f il limite in $\|\cdot\|_1$. Data questa convergenza consideriamo una sottosuccessione n_k tale che $\|f - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$. Scrivendo la successione in termini di una somma telescopica

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$$

si ha per il teorema di integrazione per serie[11] (1.45) f_{n_k} converge quasi ovunque e in Lc^1, inoltre è dominata da

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} \left|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right| \geq |f_{n_k}(x)|$$

con $g(x) \in \mathcal{L}^1$. $\square$

Proposizione 1.47 (L^1 è completo)**.**
Se $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è uno spazio di misura, $L^1(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è completo.

Dimostrazione.
Segue immediatamente dal teorema di integrazione per serie (1.45). $\square$

Osservazione 1.48.
La convergenza quasi ovunque di funzioni $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ è **NON** è la convergenza rispetto a una topologia opportuna su $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$.

Proposizione 1.49 (Proprietà di Uhrison)**.**
Ogni convergenza topologica in X insieme ha la seguente proprietà ***di Uhrisohn****: $x_n \to x$ rispetto alla topologia se e solo se per ogni sottosuccessione x_{n_k} esiste una sotto-sottosuccessione $x_{n_{k_j}} \to x$.*

Dimostrazione.
Se $x_n \to x$ converge ok. Se non converge allora esiste un intorno U di x tale che $x_n \notin U$ frequentemente, quindi troviamo una sottosuccessione x_{n_k} che sta sempre fuori da U, quindi nessuna sua sotto-sottosuccessione può convergere a x. $\square$

La convergenza q.o. per successioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ non ha la proprietà di Uhrisohn.

Definizione 1.50 (Operatore di composizione)**.**
Se E è uno spazio di funzioni con codominio $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo l'operatore di composizione per f come $E \ni u \mapsto f \circ u$.

[11] $\|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right\|_1 \leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_j} - f\right\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_{j-1}} - f\right\|_1 < \infty$

Lemma 1.51.
Sia u_k una successione che converge a u in $\|\cdot\|_p$. A meno di sottosuccessione $u_k \to u$ quasi ovunque e dominata in $\mathcal{L}^p$.

Dimostrazione.
Teorema di Weil (1.46) in $\mathcal{L}^p$. □

Proposizione 1.52.
Lo spazio $L^p(X, \mathscr{Q}, \mu)$ per $0 \le p < \infty$ è completo.

Dimostrazione.
L^p ed L^1 NON sono isomorfi come spazi di Banach in generale[12], ma esiste un omeomorfismo localmente Lipschitz e questo basta a mostrare la completezza: se u_k è una successione di Cauchy in L^p, se Φ è Lipschitz allora $\Phi(u_k)$ è ancora di Cauchy in L^1 e quindi converge, poi torno indietro con Φ^{-1}, che mantiene il limite per continuità.

Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \\ u & \longmapsto & |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$

Chiaramente è invertibile mandando $v \in L^1$ in $|v|^{1/p} \operatorname{sgn} v$. La mappa Φ è l'operatore di composizione con la funzione $f(t) = |t|^p \operatorname{sgn} t$. La continuità degli operatori di composizione è un fatto generale. Se $u_k \to u$ converge in $\|\cdot\|_p$ allora per il lemma a meno di sottosuccessione converge q.o. e dominata, quindi componendo con f abbiamo ancora convergenza quasi ovunque per continuità ($f(u_k) \to f(u)$ q.o.). Se $|u_k| \le g$ in $\mathcal{L}^p$ allora $|u_k|^p \le g^p$ in $\mathcal{L}^1$, similmente per Φ^{-1}, quindi effettivamente Φ è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che Φ è localmente lipschitz: siano $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 = \int_X |f(u(x)) - f(v(x))| \, d\mu(x)$$

ma se $t < s$ allora $|f(t) - f(s)| \le \sup_{t \le \xi \le s} |f'(\xi)| \, |t - s|$ e $|f'(xi)| = p\,|xi|^{p-1} \le p(\max\{|t|, |s|\})^p$, quindi

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 \le & p \int_X \max\left\{|u(x)|^{p-1}, |v(x)|^{p-1}\right\} |u(x) - v(x)| \, d\mu \le \\
\le & p \int_X \left(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\right) |u(x) - v(x)| \, d\mu \overset{\text{Hölder}}{\le} \\
\le & p \left(\left(\int_X |u|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\int_X |v|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \right) \left(\int_X |u - v|^p\right)^{1/p} = \\
\overset{p-1=p/q}{=} & p(\|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1}) \|u - v\|_p
\end{aligned}$$

quindi Φ è Lipschitz di costante $2pR^{p-1}$ sulla palla $B_{L^p}(0, R) \subseteq L^p$ □

Proposizione 1.53.
Lo spazio $L^\infty(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è completo

Dimostrazione.
[NON HO VISTO, RIGUARDA I PDF] □

$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{\infty,\Omega}$. Questa norma rende continua l'immaersione $C_b^1 \to (C_b^0)^{n+1}$ data da $f \mapsto (f, \partial_1 f, \cdots, \partial_n f)$

[12] cursiosità non banale da vedere

Proposizione 1.54.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto. Lo spazio*

$$C_b^k(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \textit{di classe } C^k \textit{ con derivate limitate su } \Omega \textit{ fino all'ordine } k \right\}$$

è completo.

Dimostrazione.
Il caso $k = 1$ è una conseguenza del teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $\partial_i f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ è tale che $\partial_i f_k \to g_i$ uniformemente in Ω e $f_k \to f$ puntualmente in Ω allora esiste $\partial_i f$ e vale g_i. Se poi $f_k \in C^1(\Omega)$ allora la g_i è continua perché limite uniforme di $\partial_i f_k$ continue, quindi per il teorema del differenziale totale la f è anche C^1.

Per il teorema di limite sotto il segno di derivata, l'immersione $C_b^1 \to (C_b^0)^{n+1}$ ha immagine chiusa, infatti una successione $(f_k, \partial_1 f_k, \cdots, \partial_n f_k)$ nell'immagine convergente a $(f, g_1, \cdots, g_n)$ è proprio una delle ipotesi del teorema di convergenza sotto segno di derivata, quindi $f_k \to f$ in C^1 $\square$

Capitolo 2

Spazi vettoriali topologici

Definizione 2.1 (Spazio vettoriale topologico)**.**
Uno **spazio vettoriale topologico** è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ munito di una topologia che rende continue le mappe

$$+ : X \times X \to X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \to X.$$

Esempio 2.2.
Esempi di SVT sono

- Ogni spazio normato
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.
- Se X è uno spazio topologico qualunque considero $C(X, \mathbb{R})$ con topologia di convergenza uniforme su compatti.

Esercizio 2.3.
La topologia della convergenza uniforme su compatti su $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non è indotta da una norma.

Dimostrazione.
TRACCIA

- Su uno spazio normato, se U e V sono intorni di 0 allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda U \supseteq V$.
- Mostrare che la topologia della convergenza uniforme su compatti non ha questa proprietà.

□

Esercizio 2.4.
Ogni SVT che è T_0 è anche[1] T_3 e[2] $T_{3\frac{1}{2}}$

Esercizio 2.5 (Spazi non T_0 non sono troppi interessanti)**.**
Ogni SVT X si decompone in somma diretta topologica $X = Y \oplus \overline{\{0\}}$ con Y qualunque addendo algebrico di $\overline{\{0\}}$. Segue che $Y \cong X/\overline{\{0\}}$, Y risulta essere T_0 e $\overline{\{0\}}$ ha la topologia indiscreta.

[1] In questo corso con T_3 intendiamo T_3 e Hausdorff
[2] $T_{3\frac{1}{2}}$ è T_3 più esiste una funzione continua che vale 1 sul punto e 0 sul chiuso che sto separando

2.1 Intorni dell'origine in SVT

Definizione 2.6 (Filtro)**.**
Un **filtro** $\mathcal{F}$ su un insieme X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X tale che

- per ogni $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$
- Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subseteq F'$ allora $F' \in \mathcal{F}$
- Se $F, F' \in \mathcal{F}$ allora $F \cap F' \in \mathcal{F}$

Definizione 2.7 (Sottoinsieme bilanciato)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $A \subseteq X$. A è **bilanciato** se per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$ si ha $a \in A \implies \lambda a \in A$, cioè

$$B_{\mathbb{K}}(0,1) \cdot A \subseteq A.$$

Osservazione 2.8.
Se V è bilanciato allora $0 \in V$ perché $0 \in B_{\mathbb{K}}(0,1)$.

Definizione 2.9 (Sottoinsieme assorbente)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $B \subseteq X$. B è **assorbente** se per ogni $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $t \geq n_x$ si ha $x \in tB$.

Osservazione 2.10.
Poiché in uno SVT le traslazioni $X \to X$ con $x \mapsto x + x_0$ sono omeomorfismi, per descrivere la topologia basta descrivere il filtro degli intorni di 0.

Come notazione sia $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$ l'insieme degli intorni di $0 \in X$.

Proposizione 2.11 (Proprietà intorni di 0)**.**
$\mathcal{U}$ ha le seguenti proprietà

1. *$\mathcal{U}$ è un filtro*
2. *Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$*
3. *Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$ e V bilanciato*
4. *Ogni elemento di $\mathcal{U}$ è assorbente*

Dimostrazione.
Dimostriamo le varie proprietà

1. La proprietà 1. è vera per ogni insieme definito come "gli intorni di x" per x fissato in spazio topologico X.
2. Segue dalla continuità di $+$ in $(0,0) \in X \times X$. Basta definire V in modo tale che $V \times V \subseteq +^{-1}(U)$.
3. Segue dalla continuità di $\cdot$ in $(0,0)$. Se U intorno di 0 in X, siano $\varepsilon > 0$ e $V \in \mathcal{U}$ tali che $B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon) \times V \subseteq \cdot^{-1}(U)$. Allora $B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon) \cdot V$ è bilanciato e contenuto in U per costruzione. Questo insieme è anche un intorno perché si può scrivere come

   $$\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$$

   e poiché V è un intorno di 0, ogni λV è un intorno di 0, quindi anche questa unione.

4. Segue dalla continuità della mappa $\mathbb{R}_+ \to X$ che per fissato $x_0 \in X$ assegna $s \mapsto sx_0$. Infatti per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $0 \leq s \leq \varepsilon$, $sx_0 \in U$ e riscrivendo questo in termini di $t = 1/s$ abbiamo $x_0 \in tU$ per ogni $t \geq 1/\varepsilon$. Come n_{x_0} basta scegliere $\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$.

□

Esercizio 2.12.
Sia X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{U}$ una famiglia si sottoinsiemi di X tali che valgano le quattro proprietà della proposizione precedente (2.11). Allora esiste un'unica topologia su X che rende X uno SVT e tale che $\mathcal{U}$ è il filtro degli intorni di 0. In questa topologia $\mathcal{U}$ è un sistema fondamentale di intorni per 0.

Dimostrazione.
L'idea è che definiamo $A \subseteq X$ aperto se e solo se per ogni $a \in A$, $A - a \in \mathcal{U}$ (sto traducendo "aperto $\iff$ intorno di ogni suo punto"). Si può mostrare che questa scelta definisce una topologia che rende X uno SVT. □

Esercizio 2.13.
Definire analogamente una topologia di SVT su X tramite degli assiomi che si basano una una base di intorni di 0 (al posto di tutti gli intorni). Per esempio la famiglia degli intorni bilanciati di 0.

Osservazione 2.14.
Se uno SVT è T_0 allora è automaticamente T_1 e T_2, basta sfruttare proprietà di simmetria.

Osservazione 2.15.
Ogni SVT è uno spazio topologico regolare, cioè ogni punto ha una base di intorni chiusi. Se X è anche T_0 allora X è T_3.

Dimostrazione.
Sia C un chiuso di X e $x \in X$ con $x \notin C$. Sia $U \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + U \cap C = \emptyset$, che esiste perché C è chiuso. Sia $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $V - V \subseteq U$, allora[3] $(x + V) \cap (C + V) = \emptyset$ dove $C + V$ è un intorno di c per ogni $c \in C$ per definizione. □

Osservazione 2.16.
Se K è compatto, C chiuso con $K \cap C = \emptyset$ allora esiste V tale che $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$.

Dimostrazione.
Per ogni $x \in K$ sia $V_x \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + (V_x + V_x - V_x)$ è disgiunto da C. Abbiamo dunque un ricoprimento $\{x + V_x\}_{x \in K}$ di K, che è compatto, quindi estraggo un sottoricoprimento finito $\{x_i + V_{x_i}\}$ e definisco V come l'intersezione di questi. Allora

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset,$$

infatti se $x \in K + V$ allora $x = k + v$ con $k \in K$ e $v \in V$ ma $k \in x_i + V_{x_i}$ per qualche i, quindi $x = x_i + v_i + v$, e avendo supposto che $x_i + (V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i}) \cap C = \emptyset$ abbiamo che $x = x_i + v_i + v \notin C + V$. □

[3] Un insieme come $C + V$ è detto intorno uniforme di C

2.2 SVT localmente convessi

Definizione 2.17 (SVT localmente convesso)**.**
Uno **spazio vettoriale topologico localmente convesso** (**SVTLC**) è uno SVT tale che 0 ha una base di intorni convessi.

Esempio 2.18.
Diamo alcuni esempi

- Ogni spazio normato
- $C(X)$ con X spazio topologico con la topologia della convergenza uniforme sui compatti
- $C^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e topologia della convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate in ogni ordine

Esercizio 2.19.
Sia $\mathscr{M} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{misurabili}\}$, allora esiste una metrica su $\mathscr{M}$ che lo rende uno SVT e tale che $f_n \to f$ se e solo se $f_n \to f$ in misura, cioè per ogni

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} |\{|f_n| > \varepsilon\}| = 0$$

Mostrare che l'unico intorno convesso di 0 è $\mathscr{M}$ stesso, da cui segue $\mathscr{M}^* = \{0\}$.

Osservazione 2.20.
Per ciò che sappiamo sugli intorni di 0 in uno SVT, se X è SVTLC allora esiste una base $\mathcal{B}$ data dagli intorni di 0 assorbenti, bilanciati e convessi.

Definizione 2.21 (Disco)**.**
Un insieme B è detto **disco** se è assorbente, bilanciato e convesso.

Proposizione 2.22.
Sia X un $\mathbb{R}$-SV e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

- *Per ogni $B \in \mathcal{B}$, B è Assorbente, Bilanciato e Convesso*
- *Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$*

allora $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists r > 0,\ \exists B \in \mathcal{B} \mid rB \subseteq U\}$ è un filtro di insiemi che induce una topologia che rende X uno SVT come da esercizio (2.12). La topologia indotta è anche localmente convessa.

Dimostrazione.
Mostriamo le quattro proprietà:

- Chiaramente $\mathcal{U}$ è un filtro.
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ è assorbente perché lo sono gli elementi di $\mathcal{B}$
- Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$, basta scegliere $V = \frac{1}{2}B$ con $B \subseteq U$ convesso in quanto se B è convesso $B + B = 2B$
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene un bilanciato perché contiene una versione scalata di un elemento di $\mathcal{B}$.

□

Osservazione 2.23.
Se $\mathcal{B}$ è una famiglia di dischi allora definendo $\widetilde{\mathcal{B}} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$ si ha che $\widetilde{\mathcal{B}}$ rispetta gli assiomi della proposizione (2.22) e quindi induce una topologia su X che lo rende uno SVT. Questa è la meno fine tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$. In particolare $\mathcal{U}_X$ ha una base data da $\left\{rB \mid B \in \widetilde{\mathcal{B}}\right\}$.

2.2.1 Funzionali di Minkowski

Definizione 2.24 (Funzionale di Minkowski)**.**
Sia X un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $C \subseteq X$ convesso, $0 \in C$. Il **funzionale di Minkowski** associato a C è dato da:

$$p_C : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \inf\{t \geq 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

dove $\inf \emptyset = \infty$ in questo formalismo.

Osservazione 2.25.
Se $B(0,1) \subseteq C \subseteq \overline{B(0,1)}$ per X normato allora $p_C(x) = \|x\|$.

Proposizione 2.26 (Proprietà funzionali di Minkowski)**.**
Valgono le seguenti proprietà

- *C è assorbente se e solo se $p_C(x) < \infty$ per ogni $x \in X$.*
- *Si ha $\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$*

Dimostrazione.
Mostriamo le varie proprietà

- Evidente dalla definizione di assorbente.
- Se $p_C(x) < 1$ allora esiste $0 \leq t \leq 1$ tale che $x \in tC$, cioè $x = tc$. Poiché $(1-t)0 = 0$ si ha $x = tc + (1-t)0$ e per convessità questo è un elemento di C, cioè $x \in C$.

  Se $x \in C$ allora $1 \in \{t \geq 0 \mid x \in tC\}$, quindi $p_C(x) \leq 1$.

□

Osservazione 2.27 (Famiglia di seminorme induce SVTLC).
Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X, possiamo definire

$$\mathcal{B} = \{B_p(0,r) \mid p \in \mathcal{P},\ r \in \mathbb{R}_+\}, \quad B_p(0,r) = \{y \in X \mid p(x-y) < r\}$$

Si può mostrare che $\mathcal{B}$ è un insieme di dischi e quindi induce una struttura di SVTLC su X.

Osservazione 2.28.
Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X e definiamo

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{\max(p_1, \cdots, p_n) \mid p_i \in \mathcal{P}\}$$

allora $\mathcal{U} = \left\{B_p(0,r) \mid p \in \widetilde{\mathcal{P}}, r > 0\right\}$ è una base di intorni di 0 che induce la topologia dell'osservazione precedente.

Osservazione 2.29 (Ogni SVTLC è indotto da seminorme).
Poiché se B è assorbente, bilanciato e convesso, esso produce una seminorma p_B data dal funzionale di Minkowski tale che $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$, ogni topologia di X come SVTLC si può ottenere a partire da famiglie di seminorme.

Proposizione 2.30.
La topologia di SVTLC indotta da $\mathcal{P}$ insieme di seminorme è T_0 se e solo se $\mathcal{P}$ è separante, cioè per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.

Dimostrazione.
Se $p(x) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$ allora $x \in B(0, r)$ per ogni $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$ e per ogni $r > 0$, quindi $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}_X$, ovvero

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_X} U = \overline{\{0\}}.$$

□

2.3 Continuità di operatori lineari in SVT

Proposizione 2.31 (Continuità mappe lineari)**.**
Sia $T : X \to Y$ lineare tra SVT. Valgono le seguenti affermazioni

1. *T è continua se e solo se è continua in* 0
2. *T è continua se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $T(V) \subseteq U$*
3. *Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente, T è continua se e solo se*
$$\forall q \in \mathcal{Q},\ \exists p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P},\ \exists M \geq 0 \quad \text{tali che}$$
$$\forall x \in X,\ q(Tx) \leq M \max\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\}$$
4. *Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente con $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ stabili per* max *allora T è continua se e solo se $\forall q \in \mathcal{Q}$ esistono $p \in \mathcal{P}$ e $M \geq 0$ tali che*
$$q(Tx) \leq Mp(x)$$

Dimostrazione.
Dimostriamo le affermazioni

1. Basta traslare dato che traslare è un omeomorfismo.
2. Ovvio.
3. La condizione significa che la palla di centro 0 e raggio 1 rispettivamente alla seminorma $\max(p_1, \cdots, p_n)$ di X ha immagine tramite T contenuta nella palla di raggio M rispetto a q, concludendo per il punto 2. a meno di omotetia.
4. Caso sopra.

□

Proposizione 2.32 (Caratterizzazione funzionali continui)**.**
Sia $f \in X'_{alg} \setminus \{0\}$ con X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. *f è continua*
2. $\ker f$ *è chiuso*
3. $\ker f$ *non è denso*
4. *f non è surgettiva su un aperto non vuoto*

5. *f è limitata su un intorno di* 0

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni

$\boxed{1. \implies 2.}$ Ovvio perché $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{K}$.

$\boxed{2. \implies 3.}$ Se $\ker f$ è denso allora $\overline{\ker f} = X$ e quindi ha codimensione 0, ma $\ker f$ ha codimensione 1 in quanto $f \neq 0$, quindi $\ker f \neq \overline{\ker f}$, cioè non è chiuso.

$\boxed{3. \implies 4.}$ Se $\ker f$ non è denso esiste un aperto non vuoto A disgiunto da $\ker f$, cioè $0 \notin f(A)$ e in particolare f non è surgettiva su A.

$\boxed{4. \implies 5.}$ Se f non è surgettiva su aperto non vuoto allora non lo è su un intorno bilanciato U di 0 e quindi $f(U)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}$ diverso da $\mathbb{K}$ in quanto $f \neq 0$, dunque $f(U)$ è un disco e in particolare è limitato.

$\boxed{5. \implies 1.}$ Se $|fx| \leq M$ per ogni $x \in U \in \mathcal{U}_X$ allora per omogeneità

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{M} U \in \mathcal{U}_X$$

per un qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi f è continua in 0. Questo conclude perché

$$f(x) = f(x_0) + f(x - x_0).$$

□

2.4 SVT I-numerabili e paranorme

Definizione 2.33 (Paranorma)**.**
Una **paranorma** sull $\mathbb{K}$-spazio vettoriale X è una funzione $q : X \to [0, \infty)$ tale che

1. $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$
2. $q(\lambda x) \leq q(x)$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$
3. Se $\lambda_k \to 0$ in $\mathbb{K}$ allora $q(\lambda_k x) \to 0$

Inoltre q è **definita** se vale

$$q(x) = 0 \iff x = 0.$$

Osservazione 2.34.
Dalla proprietà 2. segue che $q(\lambda x) = q(x)$ se $|\lambda| = 1$ e che $q(\lambda x) \leq q(\mu x)$ se $|\lambda| \leq |\mu|$. In particolare $q(x) = q(-x)$.

Quindi $d(x, y) = q(x - y)$ è una (semi)distanza su X (distanza se q definita).

Esercizio 2.35.
Dimostrare che (X, d) è uno SVT per d indotta da paranorma q.

Esercizio 2.36.
Sia X un $\mathbb{K}$-SVT I-numerabile. Allora la sua topologia proviene da una paranorma (la quale è definita sse X è T_0).

Dimostrazione.
TRACCIA

- Sia $\{U_n\}_{n\geq 0}$ base numerabile di intorni bilanciati di 0 tali che $U_{n+1}+U_{n+1} \subseteq U_n$.
- Estendiamo la successione per $n < 0$ ponendo $U_k = U_{k+1}+U_{k+1}$ per ogni $k < 0$. Nota che $U_{k+1}+U_{k+1} \subseteq U_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e gli $\{U_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono intorni bilanciati.
- Poniamo
$$q(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{r} 2^{-ki} \mid r \in \mathbb{N}, (k_1, \cdots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \ t.c.\ x \in U_{k_1} + U_{k_2} + \cdots + U_{k_r}\right\}$$
Mostra che q è una paranorma su X.
- Nota che $\left\{q < 2^{-n-1}\right\} \subseteq U_n \subseteq \{q \leq 2^{-n}\}$ e quindi q induce la topologia di X.

$\square$

2.5 Topologie deboli

Proposizione 2.37 (Topologia iniziale nel caso SVT)**.**
Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{F} : \{T_i : X \to Y_i\}$ dove ogni Y_i è SVT e T_i è lineare, allora la topologia iniziale su X indotta[4] *da $\mathcal{F}$ rende X uno SVT.*

Dimostrazione.
Voglio verificare che $+$ e $\cdot$ sono mappe continue per la topologia iniziale.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "+"] \arrow[d, "T_i \times T_i"'] & X \arrow[d, "T_i"] \\ Y_i \times Y_i \arrow[r, "+_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \times X \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "id_{\mathbb{K}} \times T_i"'] & X \arrow[d, "T_i"] \\ \mathbb{K} \times Y_i \arrow[r, "\cdot_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale della topologia iniziale (A.2), vogliamo verificare che $T_i \circ + = +_i \circ (T_i \times T_i)$ è continua per ogni i e similmente per $T_i \circ \cdot$. Questo è vero perché la topologia iniziale è rende T_i continua per ogni i. $\square$

Osservazione 2.38.
Se ogni Y_i inoltre è SVTLC allora anche X lo è.

Definizione 2.39 (Topologie deboli)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathcal{F} \subseteq X'$ (duale algebrico). La topologia iniziale indotta da $\mathcal{F}$ viene detta la **topologia debole di** $\mathcal{F}$ e si indica $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Osservazione 2.40.
$\sigma(X, \mathcal{F}) = \sigma(X, \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}))$ quindi senza perdita di generalità possiamo sempre supporre $\mathcal{F}$ sottospazio vettoriale di X'.

Osservazione 2.41.
La famiglia di seminorme associata a $\mathcal{F}$ (quella che induce la stessa topologia di $SVTLC$) è data da
$$\mathcal{P} = \{|f| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

[4] vedi (A.1)

Osservazione 2.42.
La topologia debole $\sigma(X, \mathcal{F})$ è T_0 (e quindi Hausdorff perché SVT) se e solo se la famiglia $\mathcal{F}$ è separante ($\forall x \in X \setminus \{0\}$, $\exists f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq 0$).

Lemma 2.43.
Siano $f_0, \cdots, f_n \in X'_{alg}$ per X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, allora sono equivalenti

1. $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$
2. $|f_0| \leq M \max_{i \in \{1, \cdots, n\}} |f_i|$ *per qualche* $M \geq 0$
3. $\ker f_0 \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$

Dimostrazione.
Diamo le tre implicazioni

$\boxed{1. \implies 2.}$ Da 1. segue $|f_0| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \, |f_i| \leq M \max |f_i|$ per $M = \sum |\lambda_i|$.

$\boxed{2. \implies 3.}$ Se $x \in \bigcap \ker f_i$, cioè $\langle f_i, x\rangle = 0$ per ogni i, allora $\langle f_0, x\rangle \leq M0 = 0$, cioè $f_0(x) = 0$ e abbiamo l'inclusione voluta.

$\boxed{3. \implies 1.}$ Sia $F : X \to \mathbb{K}^n$ data da $F = (f_1, \cdots, f_n)$, allora

$$\ker F = \bigcap \ker f_i \subseteq \ker f_0$$

quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^n \arrow[ur, dashed, "L"'] & \end{tikzcd}$$

dove $L(x_1, \cdots, x_n) = \sum \lambda_i x_i$ per dei λ_i (in quanto è una forma lineare). Ma allora $f_0 = L \circ F = \sum \lambda_i f_i$ come voluto.

□

Proposizione 2.44 (Duale per topologia debole)**.**
Dato X $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ sottospazio di X'_{alg} allora

$$(X, \sigma(X, \mathcal{F}))^* = \mathcal{F}$$

Dimostrazione.
Sia $f_0 \in (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$, allora per la proposizione (2.31) esistono $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$ e $M \geq 0$ tali che per ogni $x \in X$

$$|f_0(x)| \leq M \max_i |f_i(x)| \,.$$

Dunque per il lemma (2.43) f_0 si scrive come combinazione lineare delle f_i e quindi in particolare $f_0 \in \mathcal{F}$.

L'altra inclusione è ovvia per definizione di topologia debole. □

Osservazione 2.45.
Se X ha dimensione infinita, $\sigma(X, \mathcal{F})$ non è mai localmente limitata. In particolare ogni intorno di 0 contiene uno spazio vettoriale di codimensione finita.

Dimostrazione.
Se U intorno di 0 per $\sigma(X, \mathcal{F})$ allora esistono $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$ tali che[5]

$$U \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \{|f_i| < 1\} \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$$

e l'intersezione di questi nuclei ha codimensione al massimo n. $\square$

Proposizione 2.46 (Duale di lineare continua è debole*-continua)**.**
Se $T : E \to F$ è un operatore lineare e continuo allora $T^* : F^* \to E^*$ è debole-continua.*

Dimostrazione.
Considera le opportune composizione e la definizione di topologia debole. $\square$

2.5.1 Caso degli spazi normati

Definizione 2.47 (Topologia debole)**.**
Se X è normato, la **topologia debole** su X è la topologia debole associata a X^*, cioè $\sigma(X, X^*)$.

Proposizione 2.48.
La topologia debole è localmente convessa e Hausdorff.

Dimostrazione.
Per Hahn-Banach (3.2), il duale X^* separa i punti $\square$

Definizione 2.49 (Topologia debole*)**.**
Su X^* possiamo considerare la topologia debole associata alle valutazioni $X \subseteq X^{**}$, cioè scegliendo

$$\mathcal{F} = \{val_x \in (X^*)' \mid x \in X\}.$$

Questa è la **topologia debole*** su X^* e la indichiamo $\sigma(X^*, X)$.

Osservazione 2.50.
La topologia debole* rende X^* uno SVTLC T_0 (e quindi Hausdorff), infatti se $f \in X^* \setminus \{0\}$ allora esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq 0$.

Osservazione 2.51.
In generale $\sigma(X^*, X)$ è meno fine di $\sigma(X^*, X^{**})$. Abbiamo uguaglianza solo quando $X = X^{**}$ in quanto se $X \neq X^{**}$ allora dalla proposizione (2.44) ricaviamo

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X \neq X^{**} = (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))^*$$

e quindi in partenza $\sigma(X^*, X^{**}) \neq \sigma(X^*, X)$

Osservazione 2.52.
Poiché $(X, \|\cdot\|) \hookrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$ isometricamente allora $(X, \sigma(X, X^*))$ ha la topologia indotta come sottospazio da[6] $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

Dimostrazione.
Questo deriva dalla transitività della topologia iniziale (A.3) dove la prima famiglia è la mappa $X \hookrightarrow X^{**}$ e l'unica altra famiglia sono gli elementi di X^* che vanno verso $\mathbb{K}$. $\square$

[5] vedi lemma (2.43)
[6] nota che X^* lo si può pensare come immerso in $X^{***} = (X^{**})^*$, quindi stiamo considerando la topologia debole* su $(X^*)^*$

2.6 Teorema di Riesz

Teorema 2.53 (Riesz)**.**
Per X SVT T_0 su $\mathbb{K}$ sono equivalenti

1. *X ha dimensione finita*
2. *$X \cong \mathbb{K}^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$*
3. *X è localmente compatto*

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni

$\boxed{1. \implies 2.}$ Sia X SVT T_0 di dimensione n e sia $x_1, \cdots, x_n$ una sua base di Hamel. Allora

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & X \\ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array}$$

è lineare, bigettiva e continua.

Dimostriamo che è aperta: L'insieme $\partial B(0,1) \subseteq \mathbb{K}^n$ visto con la norma euclidea è compatto, quindi $\varphi(\partial B(0,1))$ è compatto, e quindi chiuso perché X è Hausdorff. Per bigettività $0 \notin \varphi(\partial B(0,1))$, quindi esiste un intorno V di 0 in X disgiunto da $\varphi(\partial B(0,1))$. Senza perdita di generalità V bilanciato, allora $\varphi^{-1}(V)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}^n$ disgiunto da $\partial B(0,1)$, dunque $\varphi^{-1}(V) \subseteq B(0,1)$ (se avesse un punto di modulo maggiore a 1 allora in quanto bilanciato conterrebbe tutti i punti tra esso e 0, intersecando il bordo).

Questo mostra che $B(0,1)$ è un intorno di 0 e quindi φ è aperta (per traslazione e omotetia $\varphi(B(\lambda, r))$ è intorno di $\varphi(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^n$ e $r > 0$ e concludo notando che aperti di $\mathbb{K}^n$ sono dati da unioni di palle).

$\boxed{2. \implies 3.}$ $\mathbb{K}^n$ è localmente compatto perché conosciamo la topologia euclidea, quindi anche X lo è.

$\boxed{3. \implies 1.}$ Sia X SVT localmente compatto e T_0. Mostriamo che X è I-numerabile:

Sia V intorno compatto di 0. Mostriamo che $\left\{\frac{1}{n}V\right\}$ è una base di intorni di 0. Sia U un intorno (senza perdita di generalità U bilanciato). Poiché V è compatto e[7] $V \subseteq \bigcup_{n \geq 1} nU = X$ possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$V \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} n_i U \overset{U \text{ bilanciato}}{=} \left(\max_{1 \leq i \leq k} n_i\right) U$$

infatti $\dfrac{n_i}{\max n_i} U \subseteq U$. Questo mostra che $\left\{\frac{1}{n}V\right\}$ è una base numerabile di intorni di $0 \in X$.

Notiamo che V si può coprire con un numero finito di traslati di $\frac{1}{2}V$ in quanto $V \subseteq V + \frac{1}{2}V$ e applico compattezza al variare di $v + \frac{1}{2}V$ per $v \in V$. Sia allora F tale che $V \subseteq \bigcup_{v \in F} v + \frac{1}{2}V$ con F finito e poniamo $Y = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}} F$. Notiamo che Y ha dimensione finita.

Procedendo per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $V \subseteq Y + 2^{-n}V$, ma $\{2^{-n}V\}_{n \geq 0}$ è una base di intorni, quindi

$$\overline{Y} = \bigcap_{n \geq 0} Y + 2^{-n}V \supseteq V$$

[7] U assorbente

e dato che V è un intorno assorbente, $X = \bigcup_{n \geq 0} nV \subseteq \overline{Y}$, cioè Y è denso in X.

Poiché Y ha dimensione finita, per l'implicazione precendente $Y \cong \mathbb{K}^n$, in particolare Y è completo. Se $x \in X = \overline{Y}$, poiché X è I-numerabile, si ha che esiste $y_k \to x$ in X con $y_k \in Y$ con (y_k) di Cauchy in X e quindi anche in Y, che però è completo, quindi $y_k \to y$ per $y \in Y$, ma X è Hausdorff, quindi $y = x$.

□

Osservazione 2.54.
Se non avessimo supposto T_0 potremmo considerare $X/\overline{\{0\}}$ e troveremmo $X \cong \mathbb{K}^n \oplus \overline{\{0\}}$.

2.7 Successioni generalizzate (nets)

Definizione 2.55 (Net)**.**
Un **net** su un insieme X è una funzione $f : D \to X$ su $(D, \geq)$ poset diretto[8].

Esempio 2.56 (Somme di Riemann)**.**
Sia $u : [a, b] \to X$ una funzione con X SVT. La **somma di Riemann** per u relativa ad una suddivisione $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ e una scelta di punti $\Xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ con $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ è

$$S(u; P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Possiamo prendere $D = \{(P, \Xi)\}$ l'insieme delle possibili partizioni e scelte di punti. D è un poset: $(P, \Xi) \geq (P', \Xi')$ se $P \supseteq P'$.

In questo contesto l'integrale di Riemann sarebbe il limite rispetto al net $D \to X$ dato da $(P, \Xi) \mapsto S(u; P, \Xi)$.

Esempio 2.57 (Somme infinite)**.**
Data $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ con X SVT consideriamo

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_{fin}(I) & \longrightarrow & X \\ F & \longmapsto & \sum_{i \in F} x_i \end{array}$$

$\mathscr{P}_{fin}(I)$ è parzialmente ordinato per inclusione e la somma sarebbe il limite.

Definizione 2.58 (Definitivamente e frequentemente)**.**
Diciamo che se $\{P_\alpha\}_{\alpha \in D}$ sono proprietà indicizzate su D insieme diretto allora P_α **vale definivamente** (risp. **frequentemente**) se esiste $\alpha \in D$ tale che per ogni $\beta \geq \alpha$ in D vale P_β (risp. per ogni $\alpha \in D$ esiste $\beta \in D$ tale che vale P_β).

Osservazione 2.59.
Se $D \neq \mathbb{N}$ allora può succedere che "frequentemente"$\neq$"infinite volte".

Definizione 2.60 (Convergenza per net)**.**
Se $f : D \to X$ è un net su X spazio topologico si ha che f **converge a** $x \in X$ se per ogni U intorno di x si ha che $f(i) \in U$ definitivamente.

Definizione 2.61 (Punti di accumulazione per net)**.**
Se $f : D \to X$ è un net su X spazio topologico si ha che x è un **punto di accumulazione** di f se per ogni U intorno di x, $f(i) \in U$ frequentemente.

[8] diretto nel senso che per ogni $i, j \in D$ esiste $k \in D$ tale che $i \leq k$ e $j \leq k$.

Definizione 2.62 (Sottonet)**.**
Una $\varphi : D' \to D$ con D, D' insiemi diretti tale che per ogni $i \in D$ esiste $i' \in D'$ tale che $\varphi(j) \geq i$ per ogni $j \geq i'$ è detta **cofinale**.

Sia $f : D \to X$ un net, allora $f \circ \varphi : D' \to X$ per φ cofinale è un **sottonet** di f.

Osservazione 2.63.
Una successione è un net su $\mathbb{N}$, una sottosuccessione è quindi in particolare un sottonet, ma non tutti i sottonet di una successione sono sottosuccessioni.

Esercizio 2.64.
Se $f : D \to X$ spazio topologico e $x \in X$ allora x è aderente a f se e solo se x è limite di qualche sottonet di f.

Osservazione 2.65.
Dato $f : D \to X$ net, l'insieme A dei punti aderenti a f è

$$A = \bigcap_{j \in D} \overline{\{f(i) \mid i \geq j\}}$$

infatti x è aderente se e sono se per ogni intorno U e ogni $j \in D$ esiste $i \geq j$ tale che $f(i) \in U$, cioè per ogni $j \in D$ $U \cap \{f(i) \mid i \geq j\} \neq \emptyset$, ovvero per ogni $j \in D$ si ha $x \in \overline{f(i) \mid i \geq j}$.

Esercizio 2.66.
X spazio topologico è compatto per ricoprimenti se e solo se ogni net in X ha punti aderenti, cioè se e solo se per ogni net su X esiste un sottonet convergente.

Esercizio 2.67.
Usare l'esercizio sopra per dimostrare Tychonoff.

Dimostrazione.
IDEA:

- Sia $f : D \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ un net, vogliamo trovare dei punti aderenti.
- Consideriamo l'insieme

  $$S = \left\{ (N, x) \mid x \in \prod_{\lambda \in N} X_\lambda,\ N \subseteq \Lambda,\ x \text{ aderente per } P_N \circ f : D \to \prod_{\lambda \in N} X_\lambda \right\}$$

  esso è non vuoto perché se N è un singoletto allora $P_N \circ f$ è un net verso uno spazio compatto, quindi ha un punto aderente. Ordiniamo S ponendo $(N, x) \leq (N', x')$ se $N \subseteq N'$ e $P_N(x') = x$.

  Vale la condizione della catena, infatti se $\{(N_\alpha, x_\alpha)\}$ è una catena ascendente in S allora basta considerare $N = \bigcup N_\alpha$ e $x \in \prod_{\lambda \in N} X_\lambda$ dato da $x(\lambda) = x_\alpha(\lambda)$ per un qualche α tale che $\lambda \in N_\alpha$. Notiamo che x così definito è aderente a $P_N \circ f$ perché gli x_α sono aderenti e questo basta per la definizione di topologia prodotto.

  Dunque per il lemma di Zorn esiste un dominio massimale (N, x)

- Se per assurdo $N \neq \Lambda$ allora esiste $\lambda \in \Lambda \setminus N$, ma allora possiamo estendere (N, x) a $(N \cup \{\lambda\}, \widetilde{x})$ per $\widetilde{x} = x$ fuori λ e uguale a un qualche aderente a $P_{\{\lambda\}} \circ f$ in λ. Questo nega la massimalità.

□

Esercizio 2.68.
Per X spazio topologico e $S \subseteq X$ si ha $x \in \overline{S}$ se e solo se esiste $f : D \to S$ net convergente a x.

Definizione 2.69 (Net di Cauchy)**.**
Sia X SVT. Un net $f : D \to X$ è **di Cauchy** se per ogni $U \in \mathcal{U}_X$ esiste $i \in D$ tale che per ogni $p \geq i$ e $q \geq i$ vale $f(p) - f(q) \in U$.

Equivalentemente il net $\widetilde{f} : D \times D \to X$ definito da $\widetilde{f}(i, j) = f(i) - f(j)$ con $(i, j) \geq (i', j') \iff i \geq i' \wedge j \geq j'$ converge a 0.

Definizione 2.70 (Completo per nets)**.**
Uno SVT è **completo per nets** se ogni net di Cauchy converge.

Esercizio 2.71.
Uno SVT I-numerabile è completo per nets se e solo se è completo per successioni.

Capitolo 3

Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hanh-Banch ci permetterà di costruire funzionali lineari continui.

Funzionali sono i surrogati delle coordinate, che non ci sono in generale, e anche quando ci sono possono essere più complicate di quanto non valga la pena.

3.1 Teorema di Hahn-Banach reale

Definizione 3.1 (Funzione sublineare)**.**
Una funzione $p : X \to \mathbb{R}$ è

- **positivamente omogena** se per $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ abbiamo $p(tu) = tp(u)$,
- **subadditiva** se per ogni $u, v \in X$ vale $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$,
- **sublineare** se è subadditiva e positivamente omogenea.

Pillola filosofica: Teorema di esistenza senza buon criterio per scegliere un candidato spesso chiama l'uso di scelta.

Teorema 3.2 (Hahn-Banach)**.**
Siano X uno spazio vettoriale reale, $M \subseteq X$ sottospazio, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineare, $f : M \to \mathbb{R}$ lineare tale che $f \leq p$ su M.

Allora f si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ lineare tale che $F \leq p$.

Dimostrazione.
Vogliamo applicare il lemma di Zorn. Sia

$$\mathscr{M} = \{g \in N' \mid g \leq p,\ M \subseteq N \subseteq X\}$$

Notiamo che $\mathscr{M}$ è ordinato secondo l'inclusione dei sottografici, cioè

$$g \preceq h \iff \Gamma g \subseteq \Gamma h \iff \begin{cases} \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h \\ g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} g \end{cases}$$

Condizione delle catene vale:

$$\text{se } \{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ catena in } \mathscr{M}$$

allora $\bigcup_\alpha \Gamma g_\alpha$ è ancora il grafico di una funzione lineare minore di p.

Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in $\mathscr{M}$. Per concludere basta mostrare che un massimale di $\mathscr{M}$ è definito su tutto X, cioè vogliamo mostrare che se $g \in \mathscr{M}$ è tale che $\operatorname{dom} g \neq X$ allora esiste $g' \in \mathscr{M}$ che estende g.

Sia dunque per assurdo $x \in X \setminus N$ dove $N = \operatorname{dom} g$. Vogliamo estendere g a $h : N \oplus \langle x \rangle \to \mathbb{R}$ con $h \leq p$. In quanto estensione

$$h(u + tx) = h(u) + th(x) = g(u) + th(x),$$

dove u generico elemento di N. Sia $\alpha = h(x)$ e cerchiamo un opportuno α in modo tale che $h \leq p$.

Chiediamo che $\forall u \in N,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$g(u + tx) \leq p(u + tx),$$

o equivalentemente per ogni $t > 0$ chiediamo

$$\begin{cases} h(u + tx) \leq p(u + tx) \\ h(v - tx) \leq p(v - tx) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} g(u/t) + \alpha \leq p(u/t + x) \\ g(v/t) - \alpha \leq p(v/t - x) \end{cases}$$

dunque vogliamo

$$-p(v/t - x) + g(v/t) \leq \alpha \leq p(u/t + x) - g(u/t)$$

cioè

$$\sup_{v \in N} -p(v - x) + g(v) = m_* \leq \alpha \leq m^* = \inf_{u \in N} p(v + x) - g(u),$$

dunque un tale α esiste solo se $m_* \leq m^*$. Questo è vero perché

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x + v - x) \leq p(u + x) + p(v - x).$$

$\square$

Osservazione 3.3.
Non serve questo teorema per spazi di dimensione finita o spazi di Hilbert, in quanto in quei casi abbiamo estensioni canoniche (se $dom f = N$, considero la proiezione orgonale su N e poi applico f).

Corollario 3.4 (Hahn-Banach per spazi normati)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare allora ogni funzione continua su Y si estende ad una su X con la stessa norma.

Dimostrazione.
Se $f \in Y^*$, per la definizione di norma duale si ha

$$f(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\| \doteqdot p(x),$$

quindi f si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ lineare con $F(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$, cioè $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Poiché F estende f in realtà abbiamo uguaglianza tra le norme[1]. $\square$

[1]consideriamo la stessa successione in Y che realizza la definizione di $\|f\|_{Y^*}$

Osservazione 3.5.
Se X è di Hilbert, una estensione di $f \in Y^*$ è data dal proiettore ortogonale su[2] Y $P : X \to \overline{Y}$. A questo punto definendo $F = f \circ P$.

Corollario 3.6 (ricostruire norma tramite funzionali)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare e $x \in X$, allora la norma di x si può ricostruire dalla norma duale di X^*, in particolare[3]

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle$$

Dimostrazione.
Se $f \in X^*$ e $\|f\| \leq 1$ allora

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies \|x\| \leq \max_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle .$$

D'altra parte, per il corollario precedente (3.4) nel caso particolare di $Y = x\mathbb{R}$, il funzionale lineare continuo

$$\phi : \begin{array}{ccc} x\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\| \end{array}$$

si estende a tutto X con la stessa norma. Se $x = 0$ allora $\|\phi\| = 0$ per linearità, altrimenti $\|\phi\| = 1$ su $x\mathbb{R}$. In ogni caso $\|\phi\| \leq 1$, quindi per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|$. □

Definizione 3.7 (Operatore aggiunto)**.**
Per $T : X \to Y$ lineare continua tra spazi normati, si definisce l'**operatore aggiunto o trasposto** di T come

$$T^* : \begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Proposizione 3.8 (Norma dell'aggiunto)**.**
La norma di T^* coincide con la norma di T, in particolare T^* è continuo.

Dimostrazione.
Segue dai corollari di Hahn-Banach sopra, infatti

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L(Y^*,X^*)} &= \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \|T^* f\|_{X^*} = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1, x \in X} \langle T^* f, x \rangle = \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f, Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, Tx \rangle| \overset{(3.6)}{=} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|_{L(X,Y)} . \end{aligned}$$

□

3.1.1 Immersione isometrica nel biduale

Proposizione 3.9 (Immersione isometrica nel biduale)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale e consideriamo la mappa

$$i_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & val_x \end{array}$$

Essa è una immersione isometrica.

[2]stiamo supponendo Y chiuso a meno di passare alla chiusura
[3]dove $\langle f, x \rangle = f(x)$ quando f è forma lineare, come in questo caso.

Dimostrazione.
È immediato vedere che i_X è lineare e continua[4] Però sappiamo che per ogni $x \in X$ esiste $f \in X$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\|x\| = \langle f, x \rangle$, cioè $\|val_x\| = \|x\|$, ovvero $i_X : X \to X^{**}$ è una immersione isometrica. $\square$

Definizione 3.10 (Spazio riflessivo)**.**
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è **riflessivo** se $i_X : X \to X^{**}$ è surgettiva, ovvero se i_X è una isometria.

Osservazione 3.11.
Esistono spazi di Banach non riflessivi ma isometrici al loro biduale. Nella definizione chiediamo che la mappa canonica i_X sia una isometria.

Lemma 3.12 (Duale è addendo diretto nel triduale)**.**
X^* è sempre un addendo diretto se visto come sottospazio di X^{***}.

Dimostrazione.
Poiché ogni Banach ammette un'immersione isometrica $X \hookrightarrow X^{**}$, esiste una immersione isometrica $X^* \hookrightarrow X^{***}$. Consideriamo allora la composizione

$$X^* \xhookrightarrow{\iota_{X^*}} X^{***} \xrightarrow{(\iota_X)^*} X^*$$

e mostriamo che è l'identità: per ogni $f \in X^*$ e per ogni $x \in X$

$$\langle f, x \rangle = \langle \iota_X(x), f \rangle = \langle \iota_{X^*}(f), \iota_X(x) \rangle = \langle (\iota_X)^*(\iota_{X^*}(f)), x \rangle .$$

Dunque ι_{X^*} e $(\iota_X)^*$ sono una coppia inversa destra e inversa sinistra, quindi

$$X^{***} = \iota_{X^*}(X^*) \oplus \ker((\iota_X)^*).$$

$\square$

Esempio 3.13.
Sia $c_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x(n) = o_n(1)\right\}$. Questo è un sottospazio chiuso di

$$\ell_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty < \infty\right\}$$

Se $\widehat{\mathbb{N}}$ è la compattificazione di $\mathbb{N}$ ad un punto ($\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) allora c_0 sono le funzioni $\widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ continue che valgono 0 in ∞ ristrette a $\mathbb{N}$.

Risulta che l'inclusione $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ è l'inclusione nel biduale, infatti c_0^* si può identificare con

$$\ell_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|f\|_1 = \sum |f_n| < \infty\right\}$$

identificando $f \in \ell_1$ con $\widetilde{f}(x) = \sum f_n x_n$ (che converge perché assolutamente convergente). Risulta che questa identificazione è una isometria.

Con un processo analogo identifichiamo ℓ_1^* con ℓ_∞.

$$\begin{tikzcd}
c_0 \arrow[rr, "\subseteq"] \arrow[dr, "i_{c_0}"'] & & \ell_\infty \arrow[dl, dashed, "\cong"] \\
& c_0^{**} &
\end{tikzcd}$$

[4] $\langle val_x, f + \lambda g \rangle = f(x) + \alpha g(x) = \langle val_x, f \rangle + \lambda \langle val_x, g \rangle$ e $\|val_x\| \leq \|x\|$ in quanto $|\langle val_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$.

Osservazione 3.14.
Se X è Hilbert allora $X \hookrightarrow X^{**}$ è surgettiva tramite l'isomorfismo di Riesz

$$x \mapsto \langle \cdot, x\rangle \mapsto \langle \cdot, \langle \cdot, x\rangle\rangle = val_x$$

Osservazione 3.15.
Se X normato, $i_X : X \to X^{**}$ ci permette di costruire un completamento considerando $\overline{i_X(X)}$ in X^{**} in quanto il biduale è completo.

3.1.2 Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach

Il funzionale p nelle ipotesi è positivamente omogeneo e subadditivo (cioè sublineare).

Osservazione 3.16.
Una funzione f è subadditiva se, detto Γ il grafico di f, $\Gamma + (x, f(x))$ sta sempre sopra Γ.

Esercizio 3.17.
Mostra le seguenti implicazioni

- Positivamente omogeneo e subadditivo implica convesso
- Positivamente omogeneo e convesso implica subadditivo (e quindi sublineare)
- Subadditivo, convesso e $p(0) \leq 0$ implica positivamente omogeneo

Esercizio 3.18.
Trovare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia subadditiva, convessa ma non positivamente omogenea.

Esercizio 3.19.
Nel teorema di Hahn-Banach si può prendere più in generale p convesso?

Si, ma si riconduce al caso standard trovando un nuovo funzionale p_0 che sia sublineare e tale che $f \leq p_0 \leq p$.

3.2 Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach

3.2.1 Teorema di Hahn-Banch complesso

Teorema 3.20 (Hahn-Banach complesso)**.**
Sia X un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale normato, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio vettoriale e $f \in Y^*$, allora f si estende ad un funzionale lineare su X con uguale norma.

Dimostrazione.
Sia $(X_0, \|\cdot\|)$ lo spazio normato reale ottenuto da X per restrizione degli scalari e sia $f_0 = \mathfrak{Re} f$. Notiamo che f_0 è un funzionale lineare continuo reale su Y, che quindi possiamo estendere a $\widetilde{f}_0 \in X^*$ mantenendo la norma. Definiamo

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_0(x) - i\widetilde{f}_0(ix).$$

Notiamo che $\widetilde{f}|_Y = f$, infatti

$$f(y) = \mathfrak{Re}(f(y)) + i\,\mathfrak{Im}(f(y)) = \mathfrak{Re}(f(y)) - i\,\mathfrak{Im}(if(iy)) = \mathfrak{Re}(f(y)) - i\,\mathfrak{Re}(f(iy)).$$

Si ha anche che $\widetilde{f}$ è $\mathbb{C}$-lineare e che $\left\|\widetilde{f}\right\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

(COMPLETA PER ESERCIZIO) $\square$

3.2.2 Teoremi di separazione dei convessi

Proposizione 3.21 (Funzionali di Minkowski sono sublineari)**.**
Se C è convesso e $0 \in C$ allora p_C è sublineare.

Dimostrazione.
Dimostriamo le due proprietà:

$\boxed{\text{pos.omo.}}$ Per ogni $\lambda > 0$, $x \in X$ si ha che

$$p_C(\lambda x) = \inf\{t > 0 \mid \lambda x \in tC\} = \inf\{\lambda s > 0 \mid \lambda x \in \lambda s C\} = \lambda p_C(x)$$

$\boxed{\text{subadd.}}$ Per ogni $x, y \in X$ siano a e b tali che

$$a > p_C(x), \quad b > p_C(y).$$

Se uno tra $p_C(x)$ e $p_C(y)$ è infinito allora la tesi vale trivialmente. Supponiamo dunque che questo non sia il caso. Allora $x \in aC$ e $y \in bC$, cioè $x/a, y/b \in C$. Notiamo che

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$$

dunque $\frac{x+y}{a+b} \in C$ per convessità, cioè $x + y \in (a+b)C$ e quindi $p_C(x+y) \leq a + b$. Passando all'estremo inferiore per $a > p_C(x)$ e $b > p_C(y)$ troviamo

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

□

Osservazione 3.22.
Se C è un disco, cioè è assorbente, bilanciato e convesso allora p_C è una seminorma.

Esercizio 3.23.
Se X SVT, $F : X \to \mathbb{K}$ lineare non continua allora per ogni aperto A non vuoti si deve avere $F(A) = \mathbb{K}$.

Lemma 3.24.
Ogni funzionale lineare non nullo su uno SVT è una mappa aperta

Dimostrazione.
Sia $F \neq 0$ lineare con $F : X \to \mathbb{K}$. Vogliamo mostrare che F manda intorni di $x \in X$ in intorni di $F(x) \in \mathbb{K}$. Poiché X è SVT, basta mostrare che $F(U)$ è intorno di $0 \in \mathbb{K}$ per ogni U intorno di $0 \in \mathbb{K}$. In realtà basta prendere una base di intorni di 0, quindi consideriamo gli U bilanciati. Notiamo che $F(U)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}$, infatti se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$ allora $\lambda F(U) = F(\lambda U) \subseteq F(U)$, quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- $F(U) = \{0\}$, ma allora $F = 0$ assurdo
- $F(U)$ è un disco, dunque è intorno di 0 ok.
- $F(U) = \mathbb{K}$ ok.

□

Corollario 3.25 (Discontinuità per funzionali lineari)**.**
$F : X \to \mathbb{K}$ lineare è discontinua se e solo se è surgettiva su ogni aperto non vuoto.

Dimostrazione.
Se F non è surgettiva su un aperto non vuoto, a meno di traslazione F non è surgettiva su un intorno di 0, quindi non è surgettiva su un qualche aperto bilanciato. Quindi esiste un elemento che non è nella immagine, ma allora F non assume valori di modulo superiore a questo valore non raggiunto. □

Teorema 3.26 (Separazione di convessi)**.**
Valgono i seguenti teoremi:

- *Siano X un $\mathbb{R}$-SVT, A un suo aperto convesso non vuoto e B un convesso non vuoto disgiunto da A. Allora esistono $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A,\ b \in B$ si ha*

$$\langle F, a \rangle < \gamma \leq \langle F, b \rangle \,,$$

cioè $A \subseteq \{F < \gamma\}$ e $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$.

- *Sia X un $\mathbb{R}$-SVTLC[5], K convesso compatto e C convesso chiuso disgiunti. Allora esistono $F \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ tali che per ogni $x \in K$ e per ogni $y \in C$ vale*

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y \rangle$$

ovvero $K \subseteq \{F \leq \gamma_1\}$ e $C \subseteq \{F \geq \gamma_2\}$.

Dimostrazione.
Diamo le due dimostrazioni

- Sia $x_0 \in B - A = \{b - a \mid a \in A,\ b \in B\}$. Poiché $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \neq 0$. Sia

$$C = A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$

Dalla definizione è evidente che C è un aperto (unione di traslati di A che è aperto) e contiene 0. C è convesso perché la somma algebrica di due convessi è un convesso (quindi $A - B$ convesso e traslare un convesso lo lascia convesso). Essendo aperto in particolare è assorbente per (2.11).

Quindi il funzionale di Minkowski associato p_C è un funzionale sublineare $X \to \mathbb{R}$ (non raggiunge $+\infty$ perché assorbente). Sia $f_0 : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da $\langle f_0, x_0 \rangle = 1$. Poiché $0 \notin A - B$, $x_0 \notin C$ e quindi[6] $p_C(x_0) \geq 1$. Applicando il teorema di Hahn-Banach (3.2) f_0 si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ con $F \leq p_C$ in X. Per ogni $a \in A,\ b \in B$, poiché $a - b + x_0 \in C$, si ha

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) \leq 1$$

cioè $F(a) \leq F(b)$. Ponendo $\gamma = \sup_A F$ abbiamo le disuguaglianze volute se mostriamo che $F(a) < \gamma$ per ogni $a \in A$. Per il lemma (3.24) si ha che F è una mappa aperta, quindi $F(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}$ tale che $\sup F(A) \leq \gamma$, ma allora il valore γ non è raggiunto.

Concludiamo notando che F è continuo[7] perché è limitato superiormente sull'aperto A.

[5] La locale convessità serve, infatti esistono SVT metrizzabili che non hanno funzionali lineari continui e in tal caso la tesi non vale neanche per $K = \{x\}$ e $C = \{y\}$.
[6] ricorda che $\{p_C < 1\} \subseteq C$
[7] volendo anche perché limitato su intorno di 0 o anche perché non è surgettiva sull'aperto A. Vedi esercizio sopra per l'ultima.

- Sia V intorno convesso di 0 tale che $(K+V)\cap C=\emptyset$, basta usare (2.16) e poi notare che in questo caso abbiamo una base di intorni convessi. Evidentemente $K+V$ è aperto e convesso[8]. Per il primo punto esiste $F\in X^*$ e $\gamma\in\mathbb{R}$ tale che per ogni $x\in K+V$ e $y\in C$
$$\langle F,x\rangle<\gamma\leq\langle F,y\rangle\,.$$
Sia $\gamma_1=\max_{x\in K}\langle F,x\rangle$, allora $\gamma_1<\gamma$ e quindi se $x\in K$
$$\langle F,x\rangle\leq\gamma_1<\gamma\leq\langle F,y\rangle$$
che è la tesi a meno di definire $\gamma_2=\gamma$.

□

3.3 Parentesi esercizi

Definizione 3.27 (Misura non atomica)**.**
Uno spazio di misura $(X,\mathscr{Q},\mu)$ è **non-atomico** se per ogni $A\in\mathscr{Q}$ di misura positiva contiene $B\in\mathscr{Q}$ di misura positiva strettamente minore.

Esercizio 3.28 (Sierpinski)**.**
Se $(X,\mathscr{Q},\mu)$ è non-atomico allora è divisibile, cioè per ogni $A\in\mathscr{Q}$ e per ogni $\lambda\in[0,\mu(A)]$ esiste $B\subseteq A$, $B\in\mathscr{Q}$, tale che $\mu(B)=\lambda$.

Inoltre, vedendo la misura come funzione $\mu:\mathscr{Q}\to[0,\mu(X)]$, esiste una inversa destra monotona crescente per inclusione $E:[0,\mu(X)]\to\mathscr{Q}$, cioè si ha $\mu\circ E=id$ e per ogni $t\in[0,\mu(X)]$ abbiamo $\mu(E_t)=t$ e $E_t\subseteq E_{t'}$ per ogni $t\leq t'$.

Dimostrazione.
Vogliamo applicare Zorn all'insieme delle inverse destre monotone parziali, cioè
$$\Gamma=\{E:S\to\mathscr{Q}\mid S\subseteq[0,\mu(X)],E\text{ monot. cresc. per }\subseteq,\ \mu(E(t)=t\ \forall t\in S)\}$$
Chiaramente la condizione sulle catene funziona quindi Γ ha un elemento massimale. Mostriamo poi che il dominio del massimale è chiuso e che è denso, e quindi deve essere tutto. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) □

Esercizio 3.29.
Sia $(X,\mathscr{Q},\mu)$ uno spazio di misura e sia $0<p\leq 1$. Definiamo
$$\mathcal{L}^p(X)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid f\text{ misurabile, }\int_X|f|^p\,d\mu<\infty\right\}$$
e sia $q:\mathcal{L}^p\to[0,\infty)$ con $q(f)=\int_X|f|^p\,d\mu=\|f\|_p^p$.

Notiamo che $q(f+g)\leq q(f)+q(g)$, che $q(\lambda f)=|\lambda|\,q(f)$ e che $q(f)=0$ se e solo se $f=0$ q.o.. Dunque q definisce una semidistanza $d_q(f,g)=q(f-g)$, che induce una distanza sul quoziente
$$L^p(X)=\mathcal{L}^p(X)\big/\{0\}$$
Questa distanza rende $L^p(X)$ uno SVT metrico completo omeomorfo a $L^1(X)$.

Mostrare che se $(X,\mathscr{Q},\mu)$ è non-atomico e $p<1$ allora $L^p(X)$ non ha funzionali lineari continui diversi da 0 e non ha aperti convessi diversi da $L^p(X)$.

[8] somma di convessi è convessa

Esercizio 3.30.
Sia $X = \mathbb{N}$ con la misura di cardinalità. In questo caso $L^p(\mathbb{N}) = \ell_p$ con la definizione di prima. Questo è uno SVT metrico completo ma la misura è puramente atomica (misura ricostruibile dai singoletti). Mostra che $(\ell_p)^* = (\ell_1)^*$.

Dimostrazione.
Nota che se $0 < p \leq q \leq \infty$ allora $\ell_p \subseteq \ell_q$ e l'inclusione è una mappa continua, quindi una mappa lineare su ℓ_q restituisce una mappa lineare su ℓ_p, quindi abbiamo $(\ell_p)^* \supseteq (\ell_1)^*$, va mostrato che non ce ne sono altri.(CONCLUDERE PER ESERCIZIO) $\square$

Capitolo 4

Limitatezza e Banach-Steinhaus

4.1 Limitatezza

Definizione 4.1 (Insieme limitato)**.**
Un sottoinsieme S di uno SVT X con $\mathcal{U}$ intorni di 0 è **limitato** se è assorbito da ogni elemento di $\mathcal{U}$, cioè[1] per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nU \supseteq S$.

Osservazione 4.2.
Valgono le seguenti proprietà

1. Se S è limitato allora anche $\overline{S}$ lo è, basta considerare intorni chiusi.
2. Se S e S' sono limitati, $S \cup S'$ lo è.
3. Ogni compatto è limitato, basta scegliere un intorno limitato di x per ogni $x \in K$ e poi estrarre un sottoricoprimento finito. Un tale intorno esiste scalando intorni di 0 bilanciati.
4. Ogni $T : X \to Y$ lineare e continua tra SVT è limitata, cioè per ogni $S \subseteq X$ limitato, $T(S)$ è limitato. In generale non vale il viceversa ma vale se X e Y sono normati.

Proposizione 4.3 (Limitatezza in SVTLC)**.**
Se $(X, \mathcal{P})$ è SVTLC allora $S \subseteq X$ è limitato se e solo se per ogni seminorma $p \in \mathcal{P}$, p è limitata su S.

Dimostrazione.
p limitata su S significa che

$$S \subseteq B_p(0, R_p) = \frac{R_p}{\varepsilon} B_p(0, \varepsilon)$$

e le palle $\{B_p(0, \varepsilon)\}_{p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0}$ sono una prebase di intorni di $0 \in X$. □

Corollario 4.4.
Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora S è limitato se e solo se $\exists R > 0$ tale che $S \subseteq B(0, R)$.

[1] questa condizione è equivalente a chiedere $tU \supseteq S$ per ogni t con $|t| \geq n$ o a chiedere che l'assorbimento valga per elementi di una pre-base di intorni di 0 al posto di tutti gli elementi di $\mathcal{U}$.

Esercizio 4.5.
Se X è I-numerabile e $T : X \to Y$ lineare tale che per ogni $x_k \to 0$ in X esiste x_{k_j} tale che $T(x_{k_j})$ limitata allora T è continua.

Proposizione 4.6 (Caratterizzazione sequenziale della limitatezza)**.**
Se X SVT e $S \subseteq X$, S è limitato se e solo se per ogni (s_k) successione in S e per ogni (α_k) successione in $\mathbb{K}$ infinitesima, si ha $\alpha_k s_k \to 0$.

Dimostrazione.
Sia S limitato, (s_k) successione in S e (α_k) successione infinitesima in $\mathbb{K}$. Sia U intorno bilanciato di 0 e sia n tale che $S \subseteq nU$. Notiamo che definitivamente $|\alpha_k| < \frac{1}{n}$, quindi

$$\alpha_k s_k \in \alpha_k S \subseteq \alpha_k nU \overset{\text{k grande}}{\subseteq} U.$$

Supponiamo ora S non limitato, allora esiste $U \in \mathcal{U}_X$ che non assorbe S, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $s_n \in S \setminus nU$. Dunque (s_n) è una successione in S tale che $\frac{1}{n} s_n \notin U$ per costruzione, dunque $\frac{1}{n} s_n$ non tende a $0 \in X$ nonostante $\frac{1}{n}$ sia infinitesima. $\square$

Proposizione 4.7.
Le successioni di Cauchy sono limitate.

Dimostrazione.
Sia (x_k) una successione di Cauchy in X, cioè per ogni $U \in \mathcal{U}_X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p, q \geq n$ si ha $x_p - x_q \in U$.

Fissiamo $U \in \mathcal{U}_X$ e sia V bilanciato tale che $V + V \subseteq U$. Per la definizione di successione di Cauchy esiste n_0 tale che $x_k - x_{n_0} \in V$ per ogni $k \geq n_0$, cioè $x_k \in x_{n_0} + V$.

Inoltre, esiste m tale che $x_k \in mV$ per ogni $k \leq n_0$ dato che un insieme finito è limitato. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $x_k \in mV + V$, infatti se $k \leq n_0$ allora abbiamo mV, se $k > n_0$ allora $x_{n_0} \in mV$ e $x_k \in x_{n_0} + V \subseteq mV + V$.

Poiché V è bilanciato, $mV + V \subseteq mV + mV = m(V + V) \subseteq mU$. $\square$

4.2 Spazi di Baire e II-categoria

Teorema 4.8 (Baire)**.**
Se $\{A_k\}_{k\geq 0}$ è una famiglia numerabile di aperti densi di uno spazio metrico completo allora $\bigcap A_k$ è denso.

Dimostrazione.
Per induzione si definisce una successione di palle chiuse di X dove B_0 è arbitraria e

$$B_k = \overline{B(x_k, r_k)} \text{ tali che } B_{k+1} \subseteq B_k \cap A_k \text{ e } r_k = o(1)$$

che possiamo fare perché A_k è un aperto denso.

Allora la successione dei centri è una successione di Cauchy, infatti se $p, q \geq n$ si ha $x_p, x_q \in B_n$ e quindi $d(x_p, x_q) \leq 2r_n$. Dunque $x_n \to x^*$ in X per completezza. Inoltre, poiché $x_k \in B_n$ definitivamente, $x^* = \lim x_k \in B_n$ per ogni n (dato che B_n è chiuso). In particolare $x^* \in B_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni n e quindi $x^* \in \bigcap A_n$. Per costruzione $x^* \in B_0$, quindi per ogni palla B_0 abbiamo mostrato che $B_0 \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$, cioè $\bigcap A_n$ è denso. $\square$

Esercizio 4.9.
La stessa conclusione vale se X è localmente compatto al posto di metrico completo.

Definizione 4.10 (Spazio di Baire)**.**
Uno spazio topologico è **di Baire** se ogni intersezione numerabile di aperti densi è densa.

Osservazione 4.11*.*
Ogni aperto non vuoto di X di Baire è ancora di Baire. Basta verificare che ogni aperto denso di A è della forma $A \cap U$ con U aperto denso di X.

Definizione 4.12 (Sottoinsieme di I- e II-categoria)**.**
Un sottoinsieme S di X è di **I-categoria (di Baire) in** X se è unione numerabile di insiemi $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $int(\overline{E_i}) = \emptyset$.

Inoltre S è di **II-categoria (di Baire) in** X se non è di I-categoria.

Osservazione 4.13*.*
Se X è di Baire e $S \subseteq X$ è di I-categoria allora $X \setminus S$ è di II-categoria in quanto X stesso è di II-categoria (se $X = \bigcup E_i$ con E_i chiusi a parte interna vuota allora $\emptyset = \bigcap E_i^c$ con E_i^c aperti densi, ma questo è assurdo perché X di Baire).

4.3 Teorema di Banach-Steinhaus

Definizione 4.14 (Famiglia equicontinua)**.**
Una famiglia Γ di operatori lineari continui fra SVT X e Y è **equicontinua** se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che per ogni $T \in \Gamma$, $T(V) \subseteq U$.

Osservazione 4.15*.*
Possiamo riformulare la condizione nei seguenti modi: per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che

$$\forall T \in \Gamma,\ V \subseteq T^{-1}(U) \Longleftrightarrow V \subseteq \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(U) \doteqdot \Gamma^{-1}(U).$$

Equivalentemente la condizione predica che per ogni $V \in \mathcal{U}_Y$ si abbia $\Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$.

Osservazione 4.16*.*
Se $T : X \to Y$ fra spazi normati, la norma degli operatori

$$\|T\| = \|T\|_{\infty, B(0,1)} = \text{migliore costante di Lipschitz per } T.$$

Esempio 4.17.
Se X e Y sono normati, Γ è equicontinua se e solo se Γ è limitato in $L(X,Y)$ rispetto alla norma degli operatori.

Teorema 4.18 (Banach-Steinhaus / Uniforme limitatezza)**.**
Siano X, Y SVT, $S \subseteq X$ di seconda categoria e $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ con Γ puntualmente limitata su $S \subseteq X$, cioè per ogni $s \in S$, $\Gamma(s) = \bigcup_{T \in \Gamma} T(s)$ è limitato in Y.

Allora Γ è equicontinua.

Dimostrazione.
Sia $U \in \mathcal{U}_Y$ e consideriamo $V \in \mathcal{U}_Y$ chiuso tale che $V - V \subseteq U$. Per ipotesi, per ogni $x \in S$ si ha che $\Gamma(x)$ è limitato in Y, quindi viene assorbito da V, cioè esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $T \in \Gamma$ si ha $T(x) \in n_x V$, cioè tale che

$$x \in \bigcap_{T \in \Gamma} n_x T^{-1}(V) = n_x \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(V) = n_x \Gamma^{-1}(V).$$

Dunque $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \Gamma^{-1}(V)$. Notiamo che poiché V è chiuso, $T^{-1}(V)$ è chiuso e quindi anche $\Gamma^{-1}(V)$ lo è perché intersezione di chiusi. Poiché S è di seconda categoria anche l'unione delle versioni riscalate di $\Gamma^{-1}(V)$ lo è, dunque questo insieme non è unione numerabile di chiusi con parte interna vuota, quindi almeno uno tra gli $n\Gamma^{-1}(V)$ ha parte interna non vuota, quindi anche $\Gamma^{-1}(V)$ ha parte interna non vuota scalando per $\frac{1}{n}$.

Quindi $\Gamma^{-1}(V)$ è intorno di qualche suo punto, dunque[2] $\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$ è un intorno di 0.

Ricordando che $V - V \subseteq U$ si ha

$$T^{-1}(U \supseteq T^{-1}(V-V) = T^{-1}(V) - T^{-1}(V)) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$$

quindi passando all'intersezione su $T \in \Gamma$ si ha

$$\Gamma^{-1}(U) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X,$$

cioè abbiamo mostrato che per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ si ha $\Gamma^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$, che è equivalente all'equicontinuità di Γ. □

Corollario 4.19 (Sottoinsiemi limitati di operatori)**.**
Se X e Y sono Banach e $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ è puntualmente limitata in X (o volendo anche un sottoinseme di X di II-categoria) allora Γ è un insieme limitato in $L(X,Y)$.

Dimostrazione.
Diretta applicazione di Banach-Stenhaus (4.18) notando che spazi di Banach sono in particolare SVT e che equicontinuità per la norma su $L(X,Y)$ significa limitatezza. ************** □

Esercizio 4.20.
Siano X, Y SVT. Trovare la topologia meno fine τ di SVT su $L(X,Y)$ per la quale

$$\Gamma \text{ puntualmente limitato in } L(X,Y) \iff \Gamma \text{ limitato nella topologia } \tau.$$

Corollario 4.21.
Siano X e Y Banach e sia $(T_n) \subseteq L(X,Y)$ puntualmente convergente. Allora il limite T è ancora lineare, continuo e con norma

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

Dimostrazione.
Per il corollario precedente (4.19) si ha che (T_n) sono limitati in $\|\cdot\|$ e il limite puntuale è lineare in quanto

$$T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \to \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Questo mostra che T è limitato e lineare, quindi $T \in L(X,Y)$.

Inoltre per ogni $x \in X$ si ha

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \left(\sup_n \|T_n\|\right) \|x\|,$$

quindi $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|$. Ragionando analogamente per una sottosuccessione di (T_n) che in norma converge a $\liminf_n \|T_n\|$ ricaviamo

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

□

[2] se $a_0 \in int(A)$ allora $A - a_0 \subseteq A - A$ è un intorno di 0.

Osservazione 4.22.
In generale NON vale $T_n \to T$ in $\|\cdot\|$.

Proposizione 4.23 (Bilineare separatamente continua è continua)**.**
Sia $b : X \times Y \to Z$ bilineare e separatamente continua, cioè per ogni $x \in X, y \in Y$ si ha che $b(x, \cdot) : Y \to Z$ e $b(\cdot, y) : X \to Z$ sono lineari e continue. Allora b è continua, cioè

$$\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x, y)\| < \infty.$$

Dimostrazione.
Consideriamo la famiglia

$$\Gamma = \{b(x, \cdot) : Y \to Z\}_{x\in X,\ \|x\|\leq 1} \subseteq L(Y, Z).$$

Per ipotesi Γ è puntualmente limitata in Y, infatti per ogni $y \in Y$

$$\sup_{b(x,\cdot)\in\Gamma} \|b(x, \cdot)\|_{L(Y,Z)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|b(x, y)\|_Z = \|b(\cdot, y)\|_{L(X,Z)} \|y\| < \infty$$

Allora Γ è limitata in $\|\cdot\|_{L(Y,Z)}$, cioè per ogni $x \in X$ tale che $\|x\| \leq 1$ si ha

$$\|b(x, y)\|_Z \leq M \|y\|$$

e quindi al variare di y con $\|y\| \leq 1$ troviamo $\|b\|_{L(X\times Y,Z)} \leq M$. □

Esercizio 4.24.
Esiste una isometria lineare

$$\begin{array}{ccc} L(X, L(Y, Z)) & \longrightarrow & L^2(X \times Y, Z) \\ T & \longmapsto & (x, y) \mapsto T(x)(y) \end{array}$$

dove $L^2(X \times Y, Z)$ sono le bilineari.

Proposizione 4.25 (w*-limitato vs limitato in $\|\cdot\|_{X^*}$)**.**
Sia $Y = \mathbb{K}$ e X Banach. Sia $\Gamma \subseteq X^*$, allora Γ è w*-limitato se e solo se è limitato in $\|\cdot\|_{X^*}$.

Dimostrazione.
Essere limitato nella topologia debole* significa "essere assorbito da ogni intorno w* di X^*" cioè, usando intorni di prebase, essere assorbiti da insiemi della forma

$$\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$$

per $x \in X$. Notiamo che Γ viene assorbito da $\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$ significa $\Gamma(x)$ limitato in $\mathbb{K}$. Per il corollario (4.19) si ha che Γ è limitato in $L(X, \mathbb{K}) = X^*$.

L'altra implicazione è ovvia perché la norma operatore già rende continui gli operatori e indebolire la topologia non può trasformare un insieme limitato in uno non limitato. □

Osservazione 4.26.
Se $E \subseteq F$ è un sottospazio allora $\Gamma \subseteq E$ è limitato in F se e solo se è limitato in E per la topologia indotta.

Proposizione 4.27.
Sia $\Gamma \subseteq X$, allora Γ è w-limitato se e solo se è $\|\cdot\|$-limitato.

Dimostrazione.
Se Γ è $\sigma(X, X^*)$-limitato allora tramite l'immersione isometrica $X \to X^{**}$ troviamo un insieme $\sigma(X^{**}, X^*)$-limitato. A questo punto basta applicare la proposizione precedente (4.25). □

Capitolo 5

Lemma di iterazione e Iniettività / Surgettività di mappe lineari

5.1 Lemma di iterazione

Lemma 5.1 (di iterazione)**.**
Siano X e Y spazi di Banach, B palla unitaria chiusa di X, $T \in L(X, Y)$, U limitato, $U \subseteq Y$ tali che se $0 < t < 1$ allora

$$U \subseteq TB + tU.$$

Allora si ha $(1-t)U \subseteq TB$.

Dimostrazione.
Sia $u_0 \in U$, allora esistono $x_0 \in B$ e $u_1 \in U$ tali che

$$u_0 = T(x_0) + tu_1$$

Iterando troviamo $u_2 \in U$ e $x_1 \in B$ tali che $u_1 = T(x_1) + tu_2$ e così via. Questo definisce quindi due successioni $(u_n) \subseteq U$ e $(x_n) \subseteq B$. Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 = t^{n+1}y_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} t^i T(x_i) = T\left(\sum_{i=0}^{n} t^i x_i\right) + t^{n+1}y_{n+1}.$$

Poiché X è completo, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} t^i x_i$ converge ad un punto $x^* \in \frac{1}{1-t}B$ in quanto $\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$.

Poiché U è limitato esiste $M > 0$ tale che $U \subseteq B(0, M)$, quindi $\left\|t^{n+1}y_{n+1}\right\| \leq t^{n+1}M$ e questa successione converge a 0 quindi $t^{n+1}y_{n+1}$ converge a 0. Segue che

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{i=0}^{n} t^i x_i\right) + \underbrace{t^{n+1}y_{n+1}}_{=o(1)} \overset{T \text{ continua}}{=} T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} t^i x_i\right) = T(x^*)$$

quindi $y_0 \in \frac{1}{1-t}TB$, cioè

$$U \subseteq \frac{1}{1-t}TB \iff (1-t)U \subseteq TB.$$

$\square$

Osservazione 5.2.
Se U è un intorno di 0 limitato in Y, o anche U assorbente, allora T è surgettivo.

Teorema 5.3 (Lemma di Urysohn)**.**
Se X è normale e F_0,F_1 sono chiusi disgiunti di X allora esiste f tale che $F_0 = \{f = 0\}$ e $F_1 = \{f = 1\}$.

Teorema 5.4 (Teorema di estensione di Tietze)**.**
Se X è $T4$, $Y \subseteq X$ chiuso, $f \in C^0(Y, \mathbb{R})$, allora f si estende ad una continua su X.

Dimostrazione.
Basta il caso di f limitata tanto la continuità è una condizione che è invariante componendo per un omeomorfismo e $\mathbb{R} \cong (0, 1)$.

La tesi è che l'operatore di restrizione (il quale è lineare e continuo)

$$R : C_b^0(X) \to C_b^0(Y)$$

è surgettivo. Basta applicare il lemma (5.1) come segue:

$$3B_{C_b(Y)} \subseteq R\left(B_{C_b(X)}\right) + 2B_{C_b(Y)}$$

e chiamiamo $U = 3B_{C_b(Y)}$, $T = (2/3)\cdot$. Sia $f \in 3B_{C_b(Y)}$. Per il lemma di Urysohn esiste $g : X \to [-1, 1]$ continua tale che $g = -1$ su $\{x \in Y \mid -3 \leq f \leq -1\}$ e $g = 1$ su $\{x \in Y \mid 3 \geq f \geq 1\}$ (i due insiemi sono chiusi perché Y è chiuso e f è continua).

$$f = g|_Y + (f - g|_Y)$$

ma notiamo allora che $g \in B_{C_b(X)}$ e quindi $g|_Y \in R(B_{C_b(X)})$, mentre $f - g|_Y \in 2B_{C_b(Y)}$, infatti su $\{x \in Y \mid -3 \leq f \leq -1\}$ abbiamo $g = -1$ e quindi $\|f - g\|_{\infty,Y} \leq 2$, su $\{x \in Y \mid 3 \geq f \geq 1\}$ abbiamo $g = 1$ e quindi di nuovo $\|f - g\|_{\infty,Y} \leq 2$, e infine sui punti rimanenti, siccome $f \in 3B_{C_b(Y)}$, si ha $\|f\| \leq 1$ e stesso per g, quindi $\left\|f - g|_Y\right\|_{\infty,Y} \leq 2$ di nuovo.

Questo verifica le ipotesi del lemma di iterazione (5.1), quindi

$$(1 - 2/3)B_{C_b(Y)} \subseteq R(B_{C_b(X)}).$$

□

Teorema 5.5 (Dugundji)**.**
Sia (M, d) spazio metrico, $A \subseteq M$ chiuso, E banach e $f : A \to E$ continua (basta limitata) allora esiste una estensione di f continua a tutto M con la stessa norma.

Osservazione 5.6.
In realtà l'estensione di f a M si può dare come un operatore di estensione

$$\mathcal{E} : C_b(A, E) \to C_b(M, E).$$

Questo operatore è inverso destro dell'operatore di restrizione $R : C_b(M, E) \to C_b(A, E)$ che abbiamo usato nel teorema di Tietze (5.4).

Teorema 5.7 (Sollevamento per operatori lineari / Bartles-Groves)**.**
Sia $L : E \to F$ lineare continuo surgettivo con E, F banach. M spazio metrico e

$f : M \to F$ continua, allora f si può sollevare a E, cioè esiste $\widetilde{f} : M \to E$ continua tale che $f = L \circ \widetilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "L"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

In altre parole, è surgettivo l'operatore (lineare e continuo)

$$L_* : \begin{array}{ccc} C_b(M, E) & \longrightarrow & C_b(M, F) \\ g & \longmapsto & L \circ g \end{array} .$$

Dimostrazione.
Applichiamo il lemma di surgettività lineare come segue: sia $f \in C_b(M, E)$ e consideriamo un sollevamento approssimato g costruito con partizioni dell'unità a partire da sollevamenti approssimati locali che sono costanti. □

Osservazione 5.8.
Se $M = F$ e $f = id_F$ allora questo restituisce una inversa destra continua (ma possibilmente non lineare) σ di L. Quindi ogni operatore lineare surgettivo ammette una inversa destra continua. Inoltre se L non ammette inversa destra lineare allora σ non è neanche differenziabile in alcun punto (se fosse differenziabile $L \circ \sigma = id \implies L \circ \mathcal{D}\sigma = id$)

Osservazione 5.9.
Se X, Y banach, l'insieme degli operatori surgettivi $\mathcal{SU} = \{L \in L(X, Y, L \text{ surg})\}$ è aperto in $L(X, Y)$.

Dimostrazione.
Se $T \in \mathcal{SU}(X, Y)$ allora esso induce

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d] & Y \\ X/\ker T \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Sia $k = (\left\|\widetilde{T}^{-1}\right\|)^{-1} \in \mathbb{R}$, allora per ogni $H \in L(X, Y)$ con $\|H\| < k$ abbiamo $T + H \in \mathcal{SU}(X, Y)$: per definizione di k vale $\widetilde{T}^{-1}(B_Y) \subseteq \frac{1}{k} B_X$ perché $\frac{1}{k} = \left\|\widetilde{T}^{-1}\right\|$ e quindi

$$kB_Y \subseteq TB_X = \widetilde{T}(\pi B_X) = \widetilde{T}(B_{X/\ker T})$$

Dunque

$$kB_Y \subseteq TB_X \subseteq (T + H)B_X + HB_X \subseteq (T + H)B_X + \frac{\|H\|}{k}(kB_Y)$$

quindi $T + H$ verifica le ipotesi del lemma di iterazione (5.1) con $t = \frac{\|H\|}{k} < 1$. □

5.1.1 Teorema della mappa aperta

Teorema 5.10 (Mappa aperta)**.**
Siano X, Y Banach e $T : X \to Y$ lineare continuo e tale che $T(X)$ è di II-categoria in Y (per esempio T surgettivo). Allora T è una mappa aperta.

Dimostrazione.
Sia B la palla unitaria chiusa di X. Basta mostrare che $T(B)$ è un intorno di 0 in Y (per omotetia e traslazione seguirà che T manda intorni di x in intorni di $T(x)$, cioè è aperta). Notiamo che

$$X = \bigcup_n nB \implies T(X) = \bigcup_n nT(B)$$

Per ipotesi $T(X)$ è di II-categoria in Y, quindi per qualche n si ha che $\overline{nT(B)}$ ha parte interna non vuota e quindi $\overline{T(B)}$ stesso ha parte interna non vuota. Poiché[1]

$$\overline{T(B)} - \overline{T(B)} \subseteq \overline{T(B-B)} = \overline{T(2B)} = 2\overline{T(B)}$$

si ha che $\overline{T(B)}$ è un intorno di $0 \in Y$.

Mostriamo ora che $T(B)$ stesso è un intorno di 0. Poiché la chiusura è l'intersezione degli aperti che contengono $T(B)$ si ha in particolare che

$$\overline{T(B)} = T(B) + \frac{1}{2}\overline{T(B)}.$$

Siccome T è continua, $T(B)$ è limitato e quindi $\overline{T(B)}$ è limitato, quindi per il lemma di iterazione (5.1) di ha

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\overline{T(B)} \subseteq T(B) \iff \overline{T(B)} \subseteq 2T(B),$$

in particolare $T(B)$ è un intorno di 0 per omotetia. $\square$

Osservazione 5.11 (Lineare continuo allora omeo se e solo se bigettivo).
Un operatore lineare continuo è un omeomorfismo se e solo se è bigettivo. Questo è immediato da mappa aperta (5.10).

Osservazione 5.12.
Se $T : X \to Y$ lineare continuo allora induce

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

con $\widetilde{T}$ lineare continua iniettiva. Se T è surgettiva allora per il teorema della mappa aperta (5.10) $\widetilde{T}$ è un omeomorfismo lineare.

Osservazione 5.13.
Se $T : X \to Y$ è lineare e continua allora

$$\text{aperta} \iff \text{surgettiva} \iff \text{identificazione.}$$

[1] ricorda che in generale se f è continua allora $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
In questo caso la mappa è $(x, y) \mapsto x - y$ e usiamo il fatto che T è lineare e

$$\overline{T(B) \times T(B)} = \overline{T(B)} \times \overline{T(B)}.$$

Teorema 5.14 (Grafico chiuso)**.**
Siano X, Y Banach, $T : X \to Y$ lineare. Allora T è continua se e solo se

$$\Gamma = \{(x, T(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

è chiuso.

Dimostrazione.
Data una qualsiasi mappa continua $f : X \to Y$ con Y Hausdorff si ha che Γ è la preimmagine della diagonale di $Y \times Y$ rispetto alla mappa $id_Y \times f$. Poiché Y è un Banach (e quindi metrico e quindi T_2) effettivamente abbiamo la prima implicazione.

Supponiamo ora che Γ sia chiuso. Poiché $X \times Y$ è prodotto di Banach esso stesso è banach e quindi Γ è banach perché chiuso di un Banach. Osserviamo ora che

$$T(x) = P_Y((x, T(x))) = P_Y((P_X|_\Gamma)^{-1}(x)) \implies T = P_Y \circ (P_X|_\Gamma)^{-1}.$$

Poiché $P_X|_\Gamma$ è bigettiva, continua e lineare, per il teorema della mappa aperta (5.10) essa è un omeomorfismo, quindi T è continuo in quanto composizione di P_Y e $P_X|_\Gamma^{-1}$ continue. □

Esercizio 5.15.
Sia $T : X \to Y$ lineare fra Banach. Controntare la continuità di T con le topologie forti e deboli di X e Y

$$\begin{gathered}(X, w) \to (Y, w)\\ (X, w) \to (Y, s)\\ (X, s) \to (Y, w)\\ (X, s) \to (Y, s)\end{gathered}$$

Dimostrazione.
Hint: usare grafico chiuso (5.14) ricordando che sottospazi vettoriali di Banach sono chiusi forti se e solo se sono chiusi deboli e osservando chi è la topologia debole di $X \times Y$ (topologia prodotto)

Tre di queste nozioni sono equivalenti e una no. Quella diversa è più forte? Più debole? □

Norme confrontabili

Proposizione 5.16 (Norme confrontabili su Banach sono equivalenti)**.**
Due norme su Banach confrontabili sullo stesso $\mathbb{K}$-spazio vettoriale sono equivalenti.

Dimostrazione.
Se le norme sono confrontabili, id_X è continua se sul dominio consideriamo la topologia più fine. Chiaramente id_X è lineare, quindi per il teorema della mappa aperta (5.10) si ha che id_X è aperta. Poiché id_X è bigettiva questo mostra che id_X è un omeomorfismo. □

Esercizio 5.17.
Su uno spazio normato X di dimensione infinita esistono sempre forme lineari non continue.

Osservazione 5.18.
Esistono $L : X \to X$ lineari bigettive non continue

Dimostrazione.
Fisso f forma discontinua e fisso $u \in X$, definiamo

$$L(x) = x + f(x)u$$

e notiamo che

$$\begin{aligned} L^2(x) =& L(x + f(x)u) = L(x) + f(x)L(u) = \\ =& x + f(x)u + f(x)(u + f(u)u) = \\ =& x + (2f(x) + f(x)f(u))u. \end{aligned}$$

Se u è tale che $f(u) = -2$ allora $L^2 = id_X$, cioè L involuzione. In particolare L è bigettiva ma continua se e solo se f lo è, e non lo è quindi L non continua su $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach.

Poniamo $\|x\|_2 = \|L(x)\|_2$. Notiamo che $\|\cdot\|_2$ rende X Banach in quanto $L : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ è una isometria. Notiamo dunque che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme che rendono X banach e che non sono equivalenti (L è discontinua per $\|\cdot\|_1$ ma continua per $\|\cdot\|_2$). □

Esercizio 5.19.
Siano $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ norme sullo stesso X e sia $\|\cdot\|_3 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Allora

1. Una successione (x_n) converge a $x \in X$ in $\|\cdot\|_3$ se e solo se converge a x in $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$.
2. (x_n) è di Cauchy in X se e solo se è di Cauchy sia per $\|\cdot\|_1$ che per $\|\cdot\|_2$.

Esercizio 5.20.
TROVA L'IMBROGLIO:
"**Proposizione.**" Tutte le norme di Banach sullo stesso X sono equivalenti.

"Dimostrazione".
Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ di Banach. Notiamo che $\|\cdot\|_3$ è più fine della altre due e che (x_n) è di Cauchy per $\|\cdot\|_3$ se e solo se lo è per le altre due, quindi per il punto 1. della proposizione precedente la successione converge in $\|\cdot\|_3$. Segue dunque che, poiché $\|\cdot\|_3$ è più fine allora è confrontabile con le altre due, quindi le tre norme sono equivalenti. □

5.2 Iniettività e surgettività di mappe lineari

Cerchiamo di capire che relazione c'è tra iniettività e surgettività delle mappe T e T^* per $T : X \to Y$ lineare continua.

5.2.1 Forte iniettività

Definizione 5.21 (Forte iniettività)**.**
Una mappa $T : X \to Y$ lineare continua è **fortemente iniettiva** se esiste $c > 0$ tale che

$$\forall x \in X \qquad \|T(x)\| \geq c\,\|x\|\,.$$

Proposizione 5.22.
Se X e Y sono banach e $T : X \to Y$ lineare continua, T è fortemente iniettiva se e solo se T è iniettiva e $\operatorname{Imm} T$ *è chiuso.*

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni

$\boxed{\Longrightarrow}$ Iniettiva ok. Sia $T' : X \to \operatorname{Imm} T \subseteq Y$ la stessa mappa di T ma con codominio ristretto. Notiamo che T' è invertibile perché iniettiva e surgettiva per costruzione e che ha inversa continua per la disuguaglianza in ipotesi, quindi $\operatorname{Imm}(T)$ è Banach perché X è Banach e quindi $\operatorname{Imm} T$ è chiuso in Y.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Se T è iniettiva con immagine chiusa allora $T' : X \to \operatorname{Imm} T$ è invertibile. Inoltre, poiché $\operatorname{Imm} T$ è Banach perché chiuso di Y, si ha che per mappa aperta (5.10) vale $(T')^{-1}$ continua, cioè T fortemente iniettiva.

□

Proposizione 5.23 (Retrazioni e sezioni per lineari continue).
Sia $T \in L(X, Y)$ con X, Y Banach. Allora T è una[2]

- *inversa destra* $\Longleftrightarrow$ *iniettiva e* $\operatorname{Imm} T$ *è complementato*[3]
- *inversa sinistra* $\Longleftrightarrow$ *surgettivo e* $\ker T$ *è complementato.*

Dimostrazione.
Se $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$ sono una coppia tale che $S \circ T = id_X$ allora $T \circ S = P$ è un proiettore lineare continuo, infatti

$$P^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = T \circ id_X \circ S = T \circ S.$$

Quindi $Y = \ker P \oplus \operatorname{Imm} P$ e $\ker P = \ker S$, $\operatorname{Imm} P = \operatorname{Imm} T$, ovvero

$$Y = \ker S \oplus \operatorname{Imm} T$$

come volevamo.

Viceversa, se T è iniettivo e $\operatorname{Imm} T$ è complementata (rispettivamente S è surgettivo e $\ker S$ complementato) allora considero un proiettore $P_{\operatorname{Imm} T}$ (ok per la decomposizione in somma diretta) e definisco $S = (T')^{-1} \circ P_{\operatorname{Imm} T}$ che è inversa sinistra di T (rispettivamente definisco un proiettore Q su $\ker S$ con $id_Y - Q$ proiettore sul supplementare V fissato di $\ker S$, a questo punto considero $S|_V^{-1}$, che diventa inversa destra). □

Teorema 5.24 (Surgettività e aggiunti).
Sia $T \in L(X, Y)$ con X, Y banach e tale che T^* fortemente iniettivo (iniettivo più immagine chiusa). Allora T è surgettivo.

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità supponiamo $\|T^* y\| \geq \|y\|$ (ricordiamo che fortemente iniettivo significa $\|T^* y\| \geq k \|y\|$ per qualche $k < 1$, ma a meno di riscalare T supponiamo $k = 1$). Sia $0 < t < 1$ e mostriamo che $B_Y \subseteq TB_X + tB_Y$, così facendo possiamo invocare il lemma di iterazione (5.1) e mostrare $B_Y \subseteq T(B_X)$, in particolare T è surgettivo.

Supponiamo per assurdo che non valga $B_Y \subseteq TB_X + tB_Y$, allora esiste $y_0 \in B_Y$ tale che $y_0 \notin TB_X + tB_Y$ (convesso aperto). Per il teorema di Hahn-Banach in forma

[2] cioè esiste $S : Y \to X$ tale che T è l'inversa destra / sinistra di S.
[3] cioè esiste $V \subseteq Y$ tale che $Y = \operatorname{Imm} T \oplus V$.

di separazione di aperti convessi (3.26) esiste $y_0^* \in Y^* \setminus \{0\}$ tale che $\forall x \in B_X$ e $\forall y \in B_y$ si ha

$$\langle y_0^*, Tx + ty\rangle \leq \langle y_0^*, y_0\rangle \leq \|y_0^*\|$$

Allora

$$\langle T^* y_0^*, x\rangle + t\,\langle y_0^*, y\rangle \leq \|y_0^*\|$$

passando all'estremo superiore per $x \in B_X$ e $y \in B_Y$ troviamo

$$\|T^* y_0\| + t\,\|y_0^*\| \leq \|y_0^*\|$$

cioè $\|T^* y_0\| \leq (1-t)\,\|y_0^*\|$, contraddicendo l'ipotesi di forte iniettività ($\|T^* y\| \geq \|y\|$ per ogni y) □

Osservazione 5.25.
In realtà vale anche T^* surgettivo se e solo se T fortemente iniettivo.

5.2.2 Polare, prepolare, annullatore, preannullatore

Definizione 5.26 (Assolutamente convesso)**.**
Un insieme bilanciato e convesso si dice **assolutamente convesso**. Per un insieme S ha senso l'**inviluppo assolutamente convesso**

$$\operatorname{assco}(S) = \bigcap_{\substack{C \text{ ass.conv.} \\ C \supseteq S}} C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid a_1, \cdots, a_n \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\} =$$
$$= \overline{B_{\mathbb{K}}(0,1)}\, \operatorname{co}(S)$$

Definizione 5.27 (Polare e prepolare)**.**
Sia X SVT, $A \subseteq X$, $B \subseteq X^*$. Definiamo la **polare di** A come

$$A^0 = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x\rangle| \leq 1,\ \forall x \in A\} = \bigcap_{x \in A} \{x\}^0$$

Definiamo $x^0 = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x\rangle| \leq 1\} \supseteq \ker(\iota_X(x))$.

Definiamo il **prepolare** di B come

$$B_0 = \{x \in X \mid |\langle x^*, x\rangle| \leq 1, \forall x^* \in B\} = \bigcap_{x^* \in B} \{x^*\}_0$$

Osservazione 5.28.
La polare di un qualche insieme è assolutamente convessa e w*-chiusa. La prepolare è assolutamente convessa e chiusa in X (anche forte).

Definizione 5.29 (Annullatore e preannullatore)**.**
Sia X SVT, $A \subseteq X$ e $B \subseteq X^*$. Definiamo l'**annullatore** di A come

$$A^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = 0,\ \forall x \in A\} = \bigcap_{x \in A} \operatorname{Ann}(x) = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\perp$$

e il **preannullatore** di B come

$$B_\perp = \{x \in X \mid \forall\,\langle x^*, x\rangle = 0,\ \forall x^* \in B\} = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^* = \bigcap_{x^* \in B} (x^*)_\perp.$$

Osservazione 5.30.
Se A e B sono sottospazi vettoriali o coni in generale allora

$$A^0 = A^\perp, \quad B_0 = B_\perp.$$

Da ora in poi supponiamo $(X, \|\cdot\|)$ normato e sia $i_X : X \hookrightarrow X^{**}$.

Proposizione 5.31 (Polare e prepolare in normato)**.**
Della definizione si ha

- $A^0 = (i_X(A))_0$
- $B_0 = i_X^{-1}(B^0) = B^0 \cap X$

Dimostrazione.
Segue dal fatto che $\langle x^*, x\rangle = \langle i_X(x), x^*\rangle$. Per esempio

$$\begin{aligned} A^0 &= \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x\rangle| \leq 1, \forall x \in A\} = \\ &= \{x^* \in X^* \mid |\langle i_X(x), x^*\rangle| \leq 1, \forall x \in A\} = \\ &= \{x^* \in X^* \mid |\langle y, x^*\rangle| \leq 1, \forall y \in i_X(A) \subseteq X^{**}\} = (i_X(A))_0. \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.32.
Per le palle unitarie chiuse vale

$$(B_X)^0 = B_{X^*}, \qquad (B_{X^*})_0 = B_X$$

dove per la seconda uguaglianza usiamo Hahn-Banach per dire $(B_{X^*})^0 \cap X = B_X$.

Proposizione 5.33.
Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq X^*$, allora

$$(A^0)_0 = \overline{\operatorname{assco}(A)}, \qquad (B_0)^0 = \overline{\operatorname{assco}(B)}^{w^*}.$$

Dimostrazione.
Dalla definizione è chiaro che $A \subseteq (A^0)_0$ e $B \subseteq (B_0)^0$. Poiché $(A^0)_0$ è assolutamente convesso e chiuso vale

$$(A_0)^0 \supseteq \overline{\operatorname{assco}(A)}$$

e per lo stesso motivo $(B_0)^0 \supseteq \overline{\operatorname{assco}(B)}^{w^*}$.

Sia $a \notin \overline{\operatorname{assco}(A)}$. Per Hahn-Banach (3.26) esiste[4] $f_0 \in X^*_{\mathbb{R}}$ tale che $\langle f_0, a\rangle > \gamma \geq \langle f_0, x\rangle$ per ogni $x \in \overline{\operatorname{assco}(A)}$. A meno di riscalare f_0 supponiamo $\gamma = 1$. Allora $|\langle f_0, x\rangle| \leq 1$ per ogni $x \in \overline{\operatorname{assco}(A)}$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ poniamo $f = f_0$, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora poniamo $\langle f, x\rangle = \langle f_0, x\rangle - i\,\langle f_0, ix\rangle$ e notiamo che

$$\sup_{x \in \overline{\operatorname{assco}(A)}} |\langle f, x\rangle| = \sup_{x \in \overline{\operatorname{assco}(A)}} |\langle f_0, x\rangle|$$

Dunque $f \in A^0$, ma $|\langle f, a\rangle| \geq \langle f_0, a\rangle > 1$, quindi $a \notin (A^0)_0$. Questo mostra l'inclusione $(A^0)_0 \subseteq \overline{\operatorname{assco}(A)}$. □

[4] $X_{\mathbb{R}}$ è X visto come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Osservazione 5.34.
$(A^\perp)_\perp = \overline{\mathrm{Span}(A)}$ e $(B_\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Span}(B)}^{w^*}$, infatti polare e prepolare coincidono con annullatore e preannullatore per coni e chiaramente

$$(A^\perp)_\perp = (\mathrm{Span}(A)^\perp)_\perp, \qquad (B_\perp)^\perp = (\mathrm{Span}(B)_\perp)^\perp.$$

Osservazione 5.35.
Se $A \subseteq X$ allora A è denso se e solo se $A^\perp = (0)$ e $B \subseteq X^*$ è w^*-denso se e solo se $B_\perp = (0)$.

Proposizione 5.36 (Relazione tra nucleo e immagine tra T e T^*)**.**
Se $T \in L(X,Y)$ allora

- $\ker T = (\mathrm{Imm}\, T^*)_\perp$
- $\ker T^* = (\mathrm{Imm}\, T)^\perp$
- $(\ker T)^\perp = \overline{\mathrm{Imm}\, T^*}^{w^*}$
- $(\ker T^*)_\perp = \overline{\mathrm{Imm}\, T}$.

Dimostrazione.
Abbiamo una catena di equivalenze

$$\begin{gathered} x \in \ker T \\ Tx = 0 \\ \langle y^*, Tx \rangle = 0 \quad \forall y^* \in Y^* \\ \langle T^* y^*, x \rangle = 0 \quad \forall y^* \in Y^* \\ x \in (\mathrm{Imm}\, T^*)_\perp . \end{gathered}$$

dove la seconda equivalenza è data da Hahn-Banach (3.4). Segue che $(\ker T)^\perp = ((\mathrm{Imm}\, T^*)_\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Imm}\, T^*}^{w^*}$.

L'altro caso si fa allo stesso modo. □

Corollario 5.37 (Iniettività e aggiunti)**.**
Sia $T \in L(X,Y)$, allora

$$\begin{aligned} T \textit{ iniettivo } &\iff \mathrm{Imm}\, T^* \textit{ è } w^*\textit{-denso in } X^* \\ T^* \textit{ iniettivo } &\iff \mathrm{Imm}\, T \textit{ è denso in } Y \end{aligned}$$

Dimostrazione.
Segue da (5.36), dove però per dire che $(\ker T)^\perp = X^* \implies \ker T = (0)$ stiamo usando Hahn-Banach (3.4) (se $\ker T$ contiene un vettore non nullo allora possiamo costruire un elemento di X^* che non si annulla su quel vettore, e quindi che non si annulla su $\ker T$). □

Esercizio 5.38.
Scrivere un criterio per "essere inverso sinistro lineare" per $T \in L(X,Y)$ deducendolo dal lemma di iterazione.

Teorema 5.39 (Goldstine)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ normato e $B_X = \overline{B_X(0,1)}$, allora

$$\overline{i_X(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$$

e quindi $\overline{X}^{w^*} = X^{**}$.

Dimostrazione.
Calcoliamo (la topologia debole* su X^{**} è $\sigma(X^{**}, X^*)$):

$$\overline{i_X(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = (i_X(B_X)_0)^0 \overset{(5.31)}{=} (B_X^0)^0 = (B_{X^*})^0 = B_{X^{**}}$$

□

5.2.3 Caso dei Banach

Proposizione 5.40 (Duale di sottospazi e di un quoziente)**.**
Dato Y sottospazio chiuso di X Banach abbiamo le seguenti isometrie lineari:

1. $Y^* \cong X^*/Y^\perp$
2. $(X/Y)^* \cong Y^\perp \subseteq X^*$

Dimostrazione.
Data l'inclusione $j_Y : Y \to X$ otteniamo $j_Y^* : X^* \to Y^*$. Il nucleo di j_Y^* sono i funzionali in X^* che si restringono al funzionale nullo su Y^*, cioè gli $f \in X^*$ tali che

$$j_Y^*(f) = f \circ j_Y = f|_Y = 0$$

e quindi $\ker j_Y^* = Y^\perp$. Per il teorema di Hahn-Banach (3.2), j_Y^* è surgettiva in quanto ogni funzionale su Y si estende ad uno su X perché X Banach e Y chiuso. Per il teorema di isomorfismo esiste un'unica mappa ϕ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "j_Y^*"] \arrow[d, "\pi"'] & Y^* \\ X^*/Y^\perp \arrow[ur, dashed, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Per questioni di algebra ϕ è lineare e poiché j_Y^* è continua e π induce la topologia quoziente, ϕ è continua. Verifichiamo che è una isometria.

$$B_{X^*/Y^\perp}(0,1) = \pi(B_{X^*}(0,1))$$
$$\phi(B_{X^*/Y^\perp}(0,1)) = \phi(\pi(B_{X^*}(0,1))) = j_Y^*(B_{X^*}(0,1)) \overset{(3.2)}{=} B_{Y^*}(0,1).$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estensione data da Hahn-Banach mantiene la norma.

Data la proiezione $\pi : X \to X/Y$ otteniamo $\pi^* : (X/Y)^* \to X^*$. Sia $\varphi \in (X/Y)^*$ e $f = \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi$. Si ha che

$$\varphi(B_{X/Y}) = \varphi(\pi(B_X)) = f(B_X),$$

quindi $\|\varphi\|_{(X/Y)^*} = \|f\|_{X^*}$, cioè π^* è una immersione isometrica.

Sia $f \in X^*$, si ha che $f \in Y^\perp$ se e solo se $Y \subseteq \ker f$ che succede se e solo se f si fattorizza tramite π per proprietà universale. Quindi $f \in Y^\perp$ se e solo se $f = \varphi \circ \pi = \pi^*(\varphi)$ per qualche $\varphi : X/Y \to \mathbb{R}$, cioè se e solo se $f \in \pi^*((X/Y)^*)$. Quindi $\mathrm{Imm}\, \pi^* = Y^\perp$.

Restringendo il codominio all'immagine troviamo quanto voluto. □

Proposizione 5.41 (Banach riflessivi)**.**
Sia X banach[5]*, allora X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.*

Dimostrazione.
Ricordiamo che

$$\begin{tikzcd} & X^{***} \arrow[dr, "(i_X)^*"] & \\ X^* \arrow[ur, "i_{X^*}"] \arrow[rr, "id_{X^*}"'] & & X^* \end{tikzcd}$$

Se X è riflessivo, cioè i_X è isomorfismo, allora $(i_X)^*$ è un isomorfismo per funtorialità. Dal diagramma allora segue che i_{X^*} è un isomorfismo, infatti

$$(i_X)^* \circ i_{X^*} = id_{X^*} \implies i_{X^*} = ((i_X)^*)^{-1} \circ (i_X)^* \circ i_{X^*} = ((i_X)^*)^{-1}.$$

Quindi i_{X^*} è un isomorfismo, cioè X^* è riflessivo.

Viceversa, se i_{X^*} è un isomorfismo allora $(i_X)^*$ è un isomorfismo per motivi analoghi a prima, quindi i_X ha immagine densa (iniettività di $(i_X)^*$ e (5.36)), ma l'immagine di i_X è sempre chiusa, quindi X è riflessivo (iniettività di i_X vale sempre perché immersione isometrica). □

Osservazione 5.42.
Se X non è riflessivo allora nessun duale successivo può essere riflessivo.

Teorema 5.43 (Immagine chiusa)**.**
Siano X, Y banach, $T \in L(X,Y)$, allora sono equivalenti

1. $\operatorname{Imm} T$ *è* $\|\cdot\|$*-chiuso*
2. $\operatorname{Imm} T$ *è* w*-chiuso*
3. $\operatorname{Imm} T^* = (\ker T^*)_\perp$
4. $\operatorname{Imm} T^*$ *è* $\|\cdot\|$*-chiuso*
5. $\operatorname{Imm} T^*$ *è* w^**-chiuso*
6. $\operatorname{Imm} T^* = (\ker T)^\perp$

Dimostrazione.
1. e 2. sono sempre equivalenti per sottospazi vettoriali.

$$\overline{\operatorname{Imm} T} \overset{(5.36)}{=} ((\ker T^*)_\perp)$$

quindi 2. è equivalente a 3. Similmente 5. e 6. sono equivalenti per $\overline{\operatorname{Imm} T^*}^{w^*} = (\ker T)^\perp$. Poiché la topologia debole* è meno fine della topologia forte, 5. implica 4.

Resta da mostrare solo 4. $\implies$ 1. e 1. $\implies$ 6.

$\boxed{4. \implies 1.}$ Supponiamo $\operatorname{Imm} T^*$ chiuso forte. Siano $Z = \overline{\operatorname{Imm} T}$ e $S : X \to Z$ la mappa ottenuta da T restringendo il codominio, che possiamo fare perché $\operatorname{Imm} T \subseteq Z$.

Per costruzione $\operatorname{Imm} S$ è densa in Z e la tesi è S surgettiva. Dualizzando la successione

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, hook] & \\ X \arrow[ur, "S"] \arrow[rr, "T"'] & & Y \end{tikzcd}$$

[5]banach serve perché X^* è isometrico a $\widehat{X}^*$ dove $\widehat{X}$ è il completamento di X.

troviamo

$$\begin{tikzcd} & Z^* \arrow[dr, "S^*"] & \\ Y^* \arrow[ur] \arrow[rr, "T^*"'] & & X^* \end{tikzcd}$$

dove la mappa $Y^* \to Z^*$ è la restrizione del dominio, che è surgettiva per il teorema di Hahn-Banach (3.4), dunque $S^*(Z) = T^*(Y)$. Notiamo che $T^*(Y)$ è chiuso in norma, quindi anche $S^*(Z)$ lo è. Poiché $\operatorname{Imm} S$ è densa, S^* è iniettiva, quindi per la caratterizzazione (5.24) S^* è fortemente iniettivo e perciò S è surgettivo.

$\boxed{1. \implies 6.}$ È sempre vero che $\operatorname{Imm} T^* \subseteq (\ker T)^\perp$ in quanto $(\ker T)^\perp$ è la chiusura di $\operatorname{Imm} T$ per la topologia debole* (5.36).

Sia $x^* \in (\ker T)^\perp$, cioè $\ker T \subseteq \ker x^*$. Consideriamo la mappa lineare (a priori non continua)

$$\xi : \begin{array}{ccc} \operatorname{Imm} T & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ T(x) & \longmapsto & x^*(x) \end{array}$$

che è ben definita perché se $T(x) = T(x')$ allora $x - x' \in \ker T \subseteq \ker x^*$. Notiamo che $x^* = \xi \circ T$.

Poiché $\operatorname{Imm} T$ è chiuso (stiamo assumendo 1.) esso è banach, quindi si ha che T è aperta come mappa $X \to \operatorname{Imm} T$ per il teorema della mappa aperta (5.10), quindi induce la topologia quoziente, il che significa che ξ era un funzionale lineare CONTINUO.

Per il teorema di Hahn-Banach (3.4) ξ si estende a $y^* \in Y^*$ e poiché $x^* = \xi \circ T$ si ha $x^* = y^* \circ T = T^*(y^*)$, cioè $x^* \in \operatorname{Imm} T^*$.

□

Abbiamo dunque

$$T \text{surg.} \iff \begin{cases} \operatorname{Imm} T & \text{chiusa} \\ \operatorname{Imm} T & \text{densa} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Imm} T^* & \text{chiusa} \\ T^* & \text{iniettiva} \end{cases} \iff T^* \text{ fortemente iniettiva}$$

Esercizio 5.44.
Per X, Y banach, i seguenti sottoinsiemi di $L(X, Y)$ sono aperti

- Surgettive
- Inverse sinistre
- Inverse destre
- Fortemente iniettive
- Invertibili

Per T che appartiene ad uno di questi trovare $r > 0$ tale che $B(T, r)$ sia contenuto nell'aperto.

Solution.
Esempio, per T invertibile posso prendere $B(T, 1/\left\|T^{-1}\right\|)$. □

Proposizione 5.45 (Duale è endofuntore su Banach)**.**
La corrispondenza

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ban}^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Ban} \\ X & \longmapsto & X^* \\ T : X \to Y & \longmapsto & T^* : Y^* \to X^* \end{array}$$

è un endofuntore controvariante esatto[6]*.*

Dimostrazione.
Se $\ker \alpha = (0)$ e $\mathrm{Imm}\, \alpha = \ker \beta$ è chiusa (cioè α è fortemente iniettiva) allora α^* ha immagine chiusa e $\mathrm{Imm}\, \alpha^* = (\ker \alpha)^\perp = X^*$, quindi α^* è surgettiva.

Se $\mathrm{Imm}\, \alpha = \ker \beta$ allora

$$\ker \alpha^* = (\mathrm{Imm}\, \alpha)^\perp = (\ker \beta)^\perp = \overline{\mathrm{Imm}\, \beta^*} \overset{\mathrm{Imm}\, \beta \text{ chiusa}}{=} \mathrm{Imm}\, \beta^*$$

Infine β surgettiva implica β^* iniettiva (5.37). $\square$

Corollario 5.46.
Il funtore biduale

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ban} & \longrightarrow & \mathrm{Ban} \\ X & \longmapsto & X^{**} \\ T : X \to Y & \longmapsto & T^{**} : X^{**} \to Y^{**} \end{array}$$

è un funtore covariante esatto. L'inclusione $i_X : X \to X^{**}$ *induce una trasformazione naturale tra il funtore* id_{Ban} *e* $\cdot^{**}$*.*

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] \arrow[dr, phantom, "\in"] & & & & val_x \arrow[dd, mapsto] \arrow[dll, phantom, "\ni"] \\
& X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "T"'] & X^{**} \arrow[d, "T^{**}"] & & \\
& Y \arrow[r, "i_Y"'] & Y^{**} \arrow[rr, phantom, "\ni"] & & T^{**}(val_x) \\
T(x) \arrow[rr, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\in"] & & val_{T(x)} \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}$$

dove $T^{**}(val_x)(f)$ per $f : Y \to \mathbb{K}$ lineare continua è data da

$$(T^{**}(val_x)(f)) = ((val_x \circ T^*)(f)) = (T^*(f))(x) = f(T(x)) = val_{T(x)}(f).$$

$\square$

Osservazione 5.47*.*
Se $j : Y \to X$ è inclusione di sottospazio chiuso (in generale per j fortemente iniettiva) allora j^{**} è fortemente iniettiva, infatti il biduale è un funtore esatto e

$$\mathrm{Imm}\, j^{**} = (\ker j^*)^\perp = (Y^\perp)^\perp = ((i_X(Y))_\perp)^\perp = \overline{i_X(Y)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}$$

cioè Y^{**} è la chiusura w^* di Y visto in X^{**}.

[6] Ricordiamo che un funtore è esatto se per ogni successione esatta corta $0 \to X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \to 0$ (cioè α iniettiva, β surgettiva e $\mathrm{Imm}\, \alpha = \ker \beta$) allora $0 \leftarrow X^* \overset{\alpha^*}{\leftarrow} Y^* \overset{\beta^*}{\leftarrow} Z^* \leftarrow 0$ è ancora esatta.

Osservazione 5.48.
Se $Y \subseteq X$ chiuso e X è riflessivo allora anche Y è riflessivo. Infatti se i_X è surgettivo allora $(X, \sigma(X, X^*)) \cong (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$, quindi $i_X(Y)$ deve essere w^*-chiusa in X^{**} (perché era w-chiuso in X). Perciò $i_X(Y) = \operatorname{Imm} j^{**}$ e quindi $i_Y : Y \to Y^{**}$ è surgettiva.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_Y"'] & X \arrow[d, "i_X"] \\ Y^{**} \arrow[r, "j^{**}"'] & X^{**} \end{tikzcd}$$

Proposizione 5.49 (Criterio riflessivo con sottospazio chiuso)**.**
Se $Y \subseteq X$ è chiuso. X è riflessivo se e solo se Y e X/Y sono riflessivi.

Dimostrazione.
Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_Y"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "i_X"] & X/Y \arrow[r] \arrow[d, "i_{X/Y}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y^{**} \arrow[r, "j^{**}"'] & X^{**} \arrow[r] & (X/Y)^{**} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Se X è riflessivo abbiamo già detto che anche Y lo è. Se Y e X/Y sono riflessivi, due frecce verticali su tre sono isomorfismi, quindi anche la terza lo è per il lemma dei 5.

Per un motivo analogo se X è riflessivo allora anche Y lo è e quindi di nuovo per il lemma dei 5 anche X/Y riflessivo. □

Capitolo 6

Separabilità e Spazi uniformemente convessi

6.1 Separabilità vs Metrizzabilità

[RISCRIVERE POI PERCHÉ NON SI CAPISCE NIENTE]

Lemma 6.1.
Se Y è normato, $Z \subseteq Y$ e $g \in Y$ allora esiste $\varphi \in Y^*$ tale che $\|\varphi\| = 1$, $\langle \varphi, g \rangle = dist(g, Z)$ e $\varphi \in Z^\perp$.

Dimostrazione.
Sia $\pi : Y \to Y/Z$ la mappa quoziente. Applichiamo Hahn-Banach (3.2) a Y/Z: esiste $\psi \in (Y/Z)^*$ tale che

$$\langle \psi, \pi(g) \rangle = \|\pi g\| = dist(g, Z)$$

di norma 1. Poniamo $\varphi = \pi^* \psi$.

$$\langle \varphi, g \rangle = \langle \pi^* \psi, g \rangle = \langle \psi, \pi g \rangle = dist(g, Z)$$

e $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ perché $\pi^* : (Y/Z)^* \to Z^\perp \subseteq Y^*$ è una isometria. $\square$

Teorema 6.2 (Separabilità in termini di metrizzabilità di palle)**.**
Sia X spazio normato. Siano B_X e B_{X^*} palle unitarie chiuse.

1. *se X^* è $\|\cdot\|$-separabile allora anche X lo è.*
2. *X è $\|\cdot\|$-separabile se e solo se $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ è metrizzabile*
3. *X^* è $\|\cdot\|$-separabile se e solo se $(B_X, \sigma(X, X^*))$ è metrizzabile*

Dimostrazione.
Mostriamo le proposizioni:

1. Sia X^* separabile e sia $\{f_k\}$ numerabile denso. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $x_k \in X$ tale che

$$\begin{cases} \|x_k\| = 1 \\ |\langle f_k, x_k \rangle| \geq \frac{1}{2} \|f_k\| \end{cases}$$

Affermiamo che $Y = \mathrm{Span}(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ è denso in X: basta verificare che $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}^{\perp} = (0)$ per (5.36). Sia $f \in X^*$ tale che $\langle f, x_k\rangle = 0$ per ogni k e sia f_{k_j} una sottosuccessione di $\{f_k\}$ che converge a f in norma. Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|f_{k_j}\right\| &\le \left|\left\langle f_{k_j}, x_{k_j}\right\rangle\right| \le \left|\left\langle f_{k_j} - f, x_{k_j}\right\rangle\right| + \left|\left\langle f, x_{k_j}\right\rangle\right| = \\ &= \left|\left\langle f_{k_j} - f, x_{k_j}\right\rangle\right| \le \left\|f_{k_j} - f\right\| \underbrace{\left\|x_{k_j}\right\|}_{=1} = o_{j\to\infty}(1)\end{aligned}$$

dove quella norma è un $o(1)$ perché $f_{k_j} \to f$.

2. Diamo le due implicazioni

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sia X separabile e $\{x_k\}_{k\ge1}$ numerabile denso in B_X. Definiamo una norma su X^* ponendo

$$|||f||| = \sum_{n\ge1} 2^{-n}\left|\langle f, x_n\rangle\right| \overset{\forall m}{\ge} 2^{-m}\langle f, x_m\rangle\,.$$

Per costruzione

$$|||f||| \le \sum_{n\ge1} 2^{-n}\left|f\right|\left\|x_k\right\| \le \left(\sum_{n\ge1} 2^{-n}\right)\|f\| = \|f\|\,,$$

cioè $|||\cdot|||$ è meno fine di $\|\cdot\|$.

Affermiamo che $id : (B_{X^*}, |||\cdot|||) \to (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ è un omeomorfismo[1].

Poiché il dominio è metrico basta mostrare la continuità sequenziale. Sia allora $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in B_{X^*} con $f_k \to f \in B_{X^*}$ convergente per $|||\cdot|||$. Vogliamo mostrare che $f_k \to f$ rispetto alla norma debole*. Senza perdita di generalità supponiamo $f = 0$ (altrimenti basta considerare $\frac{1}{2}(f_k - f)$).

Se $|||f_k||| \to 0$ allora $|||f_k||| \ge 2^{-n}\left|\langle f_k, x_n\rangle\right| = o_k(1)$ per ogni n, quindi f_k converge puntualmente a 0 su (x_n). Inoltre le f_k sono funzioni 1-Lipschitz $B_X \to \mathbb{K}$ e l'insieme di convergenza di una successione di funzioni equicontinue (a valori in spazio metrico completo) è sempre un chiuso per Ascoli Arzelà. Dunque le successioni convergono puntualmente dappertutto per densità su B_X (quindi anche su X per omogeneità).

Il limite è 0 perché è sono funzioni 1-Lipschitz.

Allora $f_k \to 0$ nella topologia debole* perché questa è esattamente la topologia indotta dalla topologia prodotto.

Questo mostra la continuità di $id : (B_{X^*}, |||\cdot|||) \to (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$. Se il dominio è compatto allora abbiamo una mappa bigettiva, continua da compatto in Hausdorff, dunque è un omeomorfismo. $(B_{X^*}, |||\cdot|||)$ è compatto sequenzialmente perché, se $\{f_k\}$ è una successione in B_{X^*} allora le f_k sono 1-Lipschitz e limitate come funzioni su B_X, quindi per argomento diagonale (vedi Ascoli-Arzelà) esiste una sottosuccessione f_{k_j} convergente su ogni x_n. Essendo questa sottosuccessione equicontinua essa converge su tutto X puntualmente. Il limite è f lineare su X e 1-lipschitz e quindi $f \in X^*$. Infine $\left|\left|\left|f_{k_j} - f\right|\right|\right| \to 0$ perché

$$\left|\left|\left|f_{k_j} - f\right|\right|\right| = \sum_{n\ge1} 2^{-n}\left|\left\langle f_{k_j} - f, x_n\right\rangle\right| = o_j(1)$$

[1] nota che $id : (X^*, |||\cdot|||) \to (X^*, \sigma(X^*, X))$ non potrebbe esserlo se $\dim X \ge \aleph_0$.

dove l'ultima ugualgianza vale perché ogni termine è infinitesimo ed è dominata dalla serie geometrica di fattore $1/2$.

Questo mostra che $(B_{X^*}, |||\cdot|||)$ è sequenzialmente compatto e questo conclude.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supponiamo $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ metrizzabile. Osserviamo che per $F \in \mathscr{P}_{fin}(X)$ si ha che

$$F^0 = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, x\rangle| \leq 1 \ \forall x \in F\} = \bigcap_{x \in F} \{x\}^0$$

è un intorno di 0 (F è *finito*) in $(X^*, \sigma(X^*, X))$, in realtà questi sono una base di intorni per la topologia $\sigma(X^*, X)$.

Se $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ è metrizzabile allora in particolare è I-numerabile, quindi esiste una successione $(F_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathscr{P}_{fin}(X)$ tale che $(F_n^0 \cap B_{X^*})_{n\geq 0}$ è una base di intorni di 0. Notiamo in particolare che $\bigcap_{n\geq 0} F_n^0 \cap B_{X^*} = (0)$.

Senza perdita di generalità supponiamo anche $F_{n+1} \supseteq 2F_n$ (se avevamo una successione valida basta aggiungere la riscalatura del termine prima e l'insieme resta finito). Ricordiamo che se $A \subseteq B$ allora $B^0 \subseteq A^0$, quindi gli intorni che prendiamo diventano inscatolati.

$$\begin{aligned}
(0) &= \bigcap_{n\geq 0} (F_n^0 \cap B_{X^*}) = \left(\bigcap_{n\geq 0} F_n^0\right) \cap B_{X^*} = \left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)^0 \cap B_{X^*} = \\
&= \left(\text{assco}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right)^0 \cap B_{X^*} \overset{(\star)}{=} \left(\text{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right)^0 \cap B_{X^*} = \\
&= \left(\text{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right)^{\perp} \cap B_{X^*}
\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza $(\star)$ vale perché per ipotesi $2\bigcup F_n \subseteq \bigcup F_n$, quindi prendendo l'inviluppo assolutamente convesso troviamo esattamente lo Span lineare: se $\sum \lambda_i s_i \in \text{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ allora

$$\sum \lambda_i s_i = \sum \frac{\lambda_i}{2^N}(2^N s_i) \in \text{assco}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right) \qquad \text{per } N \text{ tale che } \sum \frac{|\lambda_i|}{2^N} \leq 1.$$

Dunque, poiché $\left(\text{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right)^{\perp} \cap B_{X^*} = (0)$ e B_{X^*} è una palla,

$$\left(\text{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right)^{\perp} = (0),$$

cioè $\text{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ è denso in X (per $\|\cdot\|$). Quindi X è $\|\cdot\|$-separabile se consideriamo $\text{Span}_{\mathbb{Q}}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ ($\bigcup_{n\geq 0} F_n$ è numerabile perché unione numerabile di finiti).

3. Diamo le due implicazioni

$\boxed{\Longrightarrow}$ Segue dalla stessa freccia nel caso 2. notando che $(B_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*))$ è metrizzabile e quindi anche $(B_X, \sigma(X^{**}, X^*)) = (B_X, \sigma(X, X^*))$ lo è.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sia $(B_X, \sigma(X, X^*))$ metrizzabile. Come per il punto 2. si ha che ogni $F \in \mathscr{P}_{fin}(X^*)$ definisce

$$F_0 = \{x \in X \mid |\langle x^*, x\rangle| \leq 1 \ \forall x^* \in F\} = \bigcap_{x^* \in F} \{x^*\}_0$$

intorno di 0 in $(X, \sigma(X, X^*))$. La famiglia $\{F_0\}_{F \in \mathscr{P}_{fin}(X^*)}$ è quindi una base di intorni di 0 rispetto a $\sigma(X, X^*)$. Poiché B_X è w-metrizzabile essa è I-numerabile quindi esiste una successione $(F_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathscr{P}_{fin}(X^*)$ tale che $(F_n)_0 \cap B_X = i_X(F_n^0) \cap B_X \doteqdot F_n^0 \cap B_X$ sono una base di $\sigma(X, X^*)$ ristretta a B_X.
In particolare $\bigcap_{n\geq 0}(F_n^0 \cap B_X) = (0)$. Assumiamo inoltre $F_{n+1} \supseteq 2F_n$ come prima.[2] Supponiamo per assurdo che $\operatorname{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ non sia $\|\cdot\|$-denso, cioè

$$Z = \overline{\operatorname{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)}^{\|\cdot\|} \neq X^*,$$

cioè esiste $g \in X^* \setminus Z$.
Per il lemma (6.1) esiste $\varphi \in X^{**}$ tale che $\|\varphi\| = 1$, $Z \subseteq \ker\varphi$ e $\langle \varphi, g\rangle = dist(g, Z)$. A meno di cambiare g supponiamo $dist(g, Z) = 1$.
Notiamo che $\left\{x \in B_X \mid \langle g, x\rangle < \frac{1}{2}\right\}$ è un intorno di $0 \in B_X$ nella topologia $\sigma(X, X^*)$, quindi contiene un intorno di base $F_m^0 \cap B_X$. Poniamo

$$A = \left\{\eta \in X^{**} \mid \langle \eta, g\rangle > \frac{1}{2},\ |\langle \eta, f\rangle| < 1 \ \forall f \in F_m\right\}.$$

A è aperto in $\sigma(X^{**}, X^*)$ perché intersezione finita di aperti (la condizione su $\frac{1}{2}$ e una per ogni elemento di F_m). Notiamo che $\varphi \in A$ perché $\langle \varphi, g\rangle = 1$ e $\langle \varphi, f\rangle = 0$ per ogni $f \in Z \supseteq F_m$.
Per Goldstine (5.39) $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$ ma si ha che $A \cap B_X \neq \emptyset$ perché $\varphi \in A \cap B_{X^{**}} = A \cap \overline{B_X}^{w^*}$.
Quindi esiste $\widetilde{x} \in B_X$ tale che $i_X(\widetilde{x}) \in A$, cioè $\langle g, \widetilde{x}\rangle > \frac{1}{2}$ e $|\langle f, \widetilde{x}\rangle| < 1$ per ogni $f \in F_m$, cioè dalla seconda condizione $\widetilde{x} \in F_m^0 \cap B_X$ ma questo era esattamente l'intorno che avevamo scelto dentro $\left\{g < \frac{1}{2}\right\}$, quindi $g(\widetilde{x}) > \frac{1}{2}$ e $g(\widetilde{x}) < \frac{1}{2}$ assurdo.

□

Esercizio 6.3.
Sia X spazio vettoriale con due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ tali che $\|\cdot\|_2$ è più fine di $\|\cdot\|_1$ ($\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ per ogni $x \in X$)[3].

- B_{X_2} è $\sigma(X_1, X_1^*)$-metrizzabile se e solo se X_1^* è separabile rispetto a $\|\cdot\|_{X_2^*}$.

[2] Potremmo provare a ragionare come per il punto 2.:

$$(0) = \left(\operatorname{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)\right)^{\perp} \cap B_X,$$

quindi $\operatorname{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)_{\perp} = (0)$, cioè $\operatorname{Span}\left(\bigcup_{n\geq 0} F_n\right)$ è w^*-denso. Questo non basta.

[3] Come notazione $(X_1, \|\cdot\|_1) = (X, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2) = (X, \|\cdot\|_2)$.

6.2 Spazi uniformemente convessi

Definizione 6.4 (Norma uniformemente convessa)**.**
Per uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, la norma si dice **uniformemente convessa** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in B_X$ si ha

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

Esempio 6.5.
Se H è uno spazio di Hilbert allora è uniformemente convesso e questo è testimoniato dalla identità del parallelogramma:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

e quindi se $\|x\|, \|y\| \leq 1$ allora

$$\|x - y\| \leq \sqrt{4 - \|x+y\|^2} = 2\left(1 - \left(\frac{\|x+y\|}{2}\right)^2\right)^{1/2}$$

Esempio 6.6.
La norma $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{R}^2$ per $1 < p < \infty$ è uniformemente convessa, anche $\|\cdot\|_p$ su L^p.

Teorema 6.7 (Milman-Pettis)**.**
Spazi di Banach uniformemente convessi sono riflessivi.

Dimostrazione (di Kakutani).
Sia $(X, \|\cdot\|)$ banach U.C. e sia $\eta \in X^{**}$. Vogliamo mostrare che η è una valutazione $val_{\widetilde{x}}$ per qualche $\widetilde{x} \in X$.

Per ogni $k \geq 1$ siano $\delta_k > 0$ come nella definizione di U.C. per $\varepsilon = 1/k$, cioè per ogni $x, y \in B_X$ vale

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta_k \implies \|x - y\| < \frac{1}{k}.$$

Senza perdita di generalità supponiamo $\delta_k \to 0$. Sia (f_k) una successione in B_{X^*} massimizzante per $\|\eta\|$, cioè:

$$\|\eta\| \doteqdot \sup_{\|f\|=1} |\langle \eta, f \rangle| \overset{S.P.G.}{=} 1,$$

allora $\|f_k\| = 1$ e $\langle \eta, f_k \rangle > 1 - \delta_k$ per ogni $k \geq 1$. Sia $f_0 \in X^*$ qualsiasi e $\delta_0 = +\infty$. Definiamo

$$A_n = \left\{ \theta \in X^{**} \mid |\langle \theta, f_k \rangle - \langle \eta, f_k \rangle| < \frac{1}{n} \text{ e } \langle \theta, f_k \rangle > 1 - \delta_k \ \forall k \in \{0, \cdots, k\} \right\}$$

Notiamo che A_n è un intorno aperto di η per la topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$, quindi per Goldstine (5.39) si ha $A_n \cap i_X B_X \neq \emptyset$, dunque esiste $x_n \in B_X$ tale che $i_X(x_n) \in A_n$, ovvero (ricorda che $i_X(x_n) = val_{x_n}$)

$$\begin{cases} |\langle f_k, x_n \rangle - \langle \eta, f_k \rangle| < \frac{1}{n} \\ \langle f_k, x_n \rangle > 1 - \delta_k & \forall k \leq n \end{cases}$$

Per $1 \le p < q < \infty$ si ha

$$\left\| \frac{x_p + x_q}{2} \right\| \ge \left\langle f_p, \frac{x_p + x_q}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle f_p, x_p \rangle + \frac{1}{2} \langle f_p, x_q \rangle \ge 1 - \delta_k$$

e quindi $\|x_p - x_q\| \le \frac{1}{p}$, cioè (x_n) è una successione di Cauchy. Poiché X è un Banach e questi punti stanno in B_X si ha che la successione converge a $\widetilde{x} \in B_X$. Prendendo il limite in n del sistema sopra troviamo

$$\begin{cases} \langle f_k, \widetilde{x} \rangle = \langle \eta, f_k \rangle & \forall k \\ \langle f_k, \widetilde{x} \rangle \ge 1 - \delta_k & \forall k \end{cases}$$

Notiamo che il sistema di equazioni $\langle f_k, x \rangle = \langle \eta, f_k \rangle$ al variare di k ha una unica soluzione in B_X, ovvero $\widetilde{x}$: se $\langle f_k, \widetilde{y} \rangle = \langle \eta, f_k \rangle$ allora per ogni k

$$1 \ge \left\| \frac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{2} \right\| \ge \left\langle f_k, \frac{\widetilde{x} + \widetilde{y}}{2} \right\rangle = \langle \eta, f_k \rangle \ge 1 - \delta_k$$

e quindi $\left\| \frac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{2} \right\| = 1$, ma allora per uniforme convessità $\widetilde{x} = \widetilde{y}$.

Quindi, a prescindere dalla scelta di f_0 troviamo sempre lo stesso $\widetilde{x}$, dunque per ogni $f \in X^*$ vale $\langle f, \widetilde{x} \rangle = \langle \eta, f \rangle$ perché 0 era incluso nel sistema che ci stavamo portando dietro. Abbiamo quindi mostrato che $val_{\widetilde{x}}(f) = \eta(f)$ per ogni f, cioè $\eta = val_{\widetilde{x}}$. □

Dimostrazione (via nets).
Sia $\eta \in X^{**}$ con $\|\eta\| = 1$. Per Goldstine (5.39) si ha $\overline{B_X}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$ quindi esiste un net $x : D \to B_X$ convergente a η in $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Consideriamo ora il nuovo net $x_\alpha + x_\beta : D \times D \to X$ e notiamo che $x_\alpha + x_\beta \to 2\eta$. Siano $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ come nella definizione di uniforme convessità e sia $f \in X^*$ tale che $\|f\| = 1$ e $\langle \eta, f \rangle > 1 - \delta$ (ok perché $\|\eta\| = 1$).

Allora $\left\langle f, \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{val_{x_\alpha + x_\beta}}{2}, f \right\rangle \to \langle \eta, f \rangle > 1 - \delta$, quindi

$$\left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\| \ge \left\langle f, \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\rangle \ge 1 - \delta$$

definitivamente e quindi

$$\|x_\alpha - x_\beta\| \le \varepsilon$$

definitivamente, quindi x_α è un net di Cauchy e quindi converge a $\widetilde{x} \in X$ perché X è Banach e quindi è completo anche per nets. Concludiamo notando che $\widetilde{x} = \eta$ per unicità del limite. □

Esempio 6.8.
Per $1 < p < \infty$ gli spazi $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ sono uniformemente convessi e quindi riflessivi per Milman Pettis (6.7).

Esercizio 6.9.
Isomorfismo tra L^q e $(L^p)^*$.

Dimostrazione.
Considerare per p, q coniugati

$$T_{p,g} : \begin{array}{ccc} L^q & \longrightarrow & (L^p)^* \\ g & \longmapsto & f \mapsto \int_X fg d\mu \end{array} .$$

Questa mappa è lineare e isometrica per Hölder, infatti

$$\left|\int_X fg d\mu\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

e quindi $\|T_{p,q}g\| \leq \|g\|_q$, cioè $T_{p,g}$ è continuo con norma degli operatori ≤ 1. In realtà è una isometria perché possiamo scegliere una f opportuna tale che $\|f\|_p = 1$ e $T_{p,g}(g)(f) = \|g\|_q$.

Per provare che $T_{p,q}$ sono surgettive l'idea è considerare α come sotto

$$\begin{tikzcd} L^p \arrow[r, "i_{L^p}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & (L^p)^{**} \arrow[r, "T^*_{p,q}"] & (L^q)^* \end{tikzcd}$$

e notare che $\alpha = T_{q,p}$.

Per Milman-Pettis (6.7) la i_{L^p} è isometrica, quindi si ha che $T_{p,q}$ è surgettivo se e solo se $T^*_{q,p}$ è surgettivo, ma $T^*_{q,p}$ è surgettivo se e solo se (5.36) $T_{q,p}$ è fortemente iniettivo e questo è vero. $\square$

Capitolo 7

Compattezza nei Banach

7.1 Compattezza dei polari: Banach-Alaoglu

Teorema 7.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.**
Sia X SVT e $V \in \mathcal{U}_X$. Allora il polare di V

$$V^0 = \{f \in X^* \mid |\langle f, x\rangle| \leq 1 \ \forall x \in V\}$$

è compatto nella topologia $\sigma(X^*, X)$, cioè[1] *quella indotta su X^* dalla topologia prodotto su $\mathbb{K}^X$.*

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità supponiamo V assolutamente convesso e chiuso:

$$V^0 \overset{(5.33)}{=} \overline{\text{assco}(V)}^0.$$

Sia allora V intorno assolutamente convesso chiuso di 0 in X. Sia p il funzionale di Minkowski di V. Notiamo che p è una seminorma su X e (2.26) $V = \overline{B_p(0,1)}$. Notiamo che $f \in V^0$ se e solo se

$$|\langle f, x\rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

infatti se $|\langle f, x\rangle| \leq 1$ per ogni $x \in V$ allora per $x \in X$ con $p(x) \neq 0$ si ha $p(x/p(x)) = 1$ e quindi $x/p(x) \in V = \overline{B_p(0,1)}$, ma allora $|\langle f, x/p(x)\rangle| \leq 1$, cioè $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$. Se in vece $p(x) = 0$ allora $\text{Span}(x) \in V$ per definizione di p, quindi $\langle f, x\rangle = 0$ e vale comunque $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$.

Viceversa, se $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$ per ogni X in particolare per $x \in V$, poiché lì abbiamo $p(x) \leq 1$ abbiamo $|\langle f, x\rangle| \leq p(x) \leq 1$ per $x \in V$.

Notiamo che la condizione $|\langle f, x\rangle| \leq 1$ su V assicura che f sia continua (perché limitata in intorno di 0 (2.32)), quindi possiamo scrivere

$$V^0 = \left\{f \in X'_{alg} \mid |\langle f, x\rangle| \leq p(x) \ \forall x \in X\right\} = X'_{alg} \cap \underbrace{\prod_{x \in X} \overline{B_{\mathbb{K}}(0, p(x))}}_{\text{compatto per Tychonoff}} \subseteq X^* \subseteq \mathbb{K}^X.$$

[1] proprietà universale

Osserviamo che X'_{alg} è chiuso in $\mathbb{K}^X$ perché si scrive come intersezione di chiusi per la topologia prodotto di $\mathbb{K}^X$

$$\begin{aligned} X'_{alg} &= \bigcap_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{K} \\ x,y\in X}} \left\{f \in \mathbb{K}^X \mid P_{\alpha x+\beta y}(f) - \alpha P_x(f) - \beta P_y(f) = 0\right\} = \\ &= \bigcap_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{K} \\ x,y\in X}} \ker\left(P_{\alpha x+\beta y} - \alpha P_x - \beta P_y\right). \end{aligned}$$

Quindi V^0 si identifica con un chiuso in un compatto per la topologia prodotto, e quindi è compatto per la topologia prodotto su $\mathbb{K}^X$ in quanto è uno spazio Hausdorff. □

Corollario 7.2.
Se X è Banach allora la palla duale chiusa $\overline{B_{X^*}(0,1)}$ è compatta per la topologia w^* su X^*.

Osservazione 7.3.
Da questo corollario scendono varie applicazioni, per esempio al calcolo delle variazioni ma non solo.

Teorema 7.4 (Kakutani)**.**
Uno spazio X di Banach è riflessivo se e solo se B_X (palla unitaria chiusa) è w-compatta.

Dimostrazione.
Se X è riflessivo allora $i_X : (B_X, w) \to (B_{X^{**}}, w^*)$ è un omeomorfismo e quindi (B_X, w) è compatta per Banach-Alaoglu (7.1).

Supponiamo dunque B_X compatta in $\sigma(X, X^*)$, allora anche $i_X(B_X)$ è compatta in X^{**} per $\sigma(X^{**}, X^*)$, in particolare è chiusa. Per il teorema di Goldstine (5.39) $i_X(B_X)$ è anche densa in $B_{X^{**}}$. Mettendo tutto insieme abbiamo $i_X(B_X) = B_{X^{**}}$, quindi i_X è bigettiva e quindi X è riflessivo. □

Osservazione 7.5.
ATTENZIONE: queste compattezze sono per ricoprimenti, non per successioni!!!

Proposizione 7.6 (Banach si immergono in continue su compatto)**.**
Se X banach allora X si immerge isometricamente in $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ per qualche K compatto Hausdorff.

Dimostrazione.
Sia $K = (\overline{B_{X^*}}, \sigma(X^*, X))$. K è T2 compatto per Banach-Alaoglu (7.1), inoltre abbiamo una inclusione

$$X \xhookrightarrow{i_X} X^{**} \longrightarrow C(K)$$

$$f \longmapsto f|_K$$

che è isometrica perhcé $\|x\|_X = \|val_x\|_{X^{**}}$, da cui $\|f\|_{X^{**}} = \|f\|_{\infty,K}$. □

Osservazione 7.7.
Questa proposizione possiamo rappresentare isometricamente X^* come $C(K)^*/X^\perp$ (5.40) e il duale di $C(K)$ si rappresenta via misure di Baire finite.

7.2 Compattezza in Banach per la norma

Teorema 7.8 (Mazur)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ banach, $K \subseteq X$ compatto, allora $\overline{\mathrm{co}(K)}$ è compatto.

Dimostrazione.
Sia $B = B_X(0,1)$. Proviamo che $\mathrm{co}(K)$ è totalmente limitato (quindi relativamente compatto in X che è completo). Sia $\varepsilon > 0$. Siccome K è compatto, esiste $F \in \mathscr{P}_{fin}(X)$ tale che

$$K \subseteq F + \frac{\varepsilon}{2}B = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon/2).$$

Quindi $\mathrm{co}(K) \subseteq \mathrm{co}(F) + \frac{\varepsilon}{2}B$ (perché convesso che contiene K). Se $F = \{f_1, \cdots, f_m\}$ allora $\mathrm{co}(F)$ è compatto, infatti è immagine continua del simplesso standard

$$\Delta^{m-1} = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1\right\}$$

tramite la mappa ovvia $\Phi : \Delta^{m-1} \to X$ data da $e_i \mapsto f_i$.

Quindi esiste un insieme finito $G \in \mathscr{P}_{fin}(X)$ tale che

$$\mathrm{co}(F) \subseteq G + \frac{\varepsilon}{2}B$$

e quindi

$$\mathrm{co}(K) \subseteq \mathrm{co}(F) + \frac{\varepsilon}{2}B \subseteq G + \frac{\varepsilon}{2}B + \frac{\varepsilon}{2}B = G + \varepsilon B,$$

cioè $\mathrm{co}(K)$ è totalmente limitato. □

Teorema 7.9 (Dieudonné)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ banach, $K \subseteq X$ compatto, allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tale che $x_n \to 0$ e $K \subseteq \overline{\mathrm{co}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$.

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità supponiamo $K \subseteq B = B_X(0,1)$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $F_n \in \mathscr{P}_{fin}(K)$ tale che

$$K \subseteq F_n + 4^{-n}B$$

cioè ogni $x \in K$ dista meno di 4^{-n} da qualche $x' \in F_n$. Per comodità $F_0 = \{0\}$ (ok perché abbiamo supposto $K \subseteq B$).

Quindi $D = \bigcup_{n\geq 0} F_n$ è un sottoinsieme denso di K. Sia $y \in D \setminus \{0\}$, allora $y \in F_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}_+$. Siccome F_{n-1} è una 4^{-n+1}-rete di K esiste $y_{n-1} \in F_{n-1}$ tale che $\|y_n - y_{n-1}\| < 4^{-n+1}$. Iterando troviamo $y_n, y_{n-1}, \cdots, y_1, y_0$ con $y_i \in F_i$ e $\|y_i - y_{i-1}\| < 4^{-i+1}$ per ogni $i \leq n$. Notiamo che

$$y = y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k - y_{k-1} + \underbrace{y_0}_{=0} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\left(2^k(y_k - y_{k-1})\right) + \underbrace{2^{-n}y_0}_{=0}$$

è una combinazione convessa di $2^k(y_k - y_{k-1})$ per $k = 1, \cdots, n$ e $y_0 = 0$.

Inoltre, siccome $\|y_k - y_{k-1}\| < 4^{-k+1}$, si ha $\left\|2^k(y_k - y_{k-1})\right\| < 2^{-k+2}$.

Notiamo che per ogni $k \geq 1$ si ha

$$2^k(y_k - y_{k-1}) \in A_k = 2^k(F_k - F_{k-1}) \text{ insieme finito}$$

Inoltre $A_k \subseteq 2^{-k+2}B$ per quanto detto. Ponendo

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \cup \{0\}$$

si ha che ogni $y \in D$ si scrive come combinazione convessa di elementi di A.

Per concludere basta mostrare che A è il supporto di una successione infinitesima: per ogni $\varepsilon > 0$, $A \setminus \varepsilon B$ è finito in quanto

$$A \setminus \varepsilon B \subseteq \bigcup_{2^{-k+2} > \varepsilon} A_k = \bigcup_{k < 2 - \log_2 \varepsilon} A_k.$$

Dunque una qualsiasi enumerazione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di A definisce una successione infinitesima tale che $D \subseteq \mathrm{co}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e quindi $K = \overline{D} \subseteq \overline{\mathrm{co}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$. □

7.3 Topologie polari

Definizione 7.10 (Topologie polari)**.**
Sia X banach e fissiamo $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ dove ogni insieme è limitato. La **topologia polare** su X^* associata a $\mathscr{A}$ è la topologia di SVTLC associate alle (semi)norme uniformi $\left\{ \|\cdot\|_{\infty,A} \mid A \in \mathscr{A} \right\}$. A volte indichiamo la topologia associata a $\mathscr{A}$ con $\tau_{\mathscr{A}}$.

Esempio 7.11.
Se $\mathscr{A} = \mathscr{P}_{fin}(X)$ allora la topologia polare associata è la debole* $\sigma(X^*, X)$

Esempio 7.12.
Se $\mathscr{A} = \mathscr{K}$ è l'insieme dei compatti di X allora la topologia polare associata è la topologia di convergenza uniforme sui compatti.

Osservazione 7.13.
Per il teorema di Dieudonne (7.9) la topologia di convergenza uniforme sui compatti è anche la topologia polare associata a

$$\mathscr{K}_0 = \{K \subseteq X \mid \forall \varepsilon > 0 \ K \setminus \varepsilon B \in \mathscr{P}_{fin}(X)\},$$

cioè gli insiemi che si accumulano al più in 0.

Esempio 7.14.
Se $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ è l'insieme dei sottoinsiemi limitati troviamo la norma duale ($\|\cdot\|_{\infty,B_X} = \|\cdot\|_{B_X^*}$)

Osservazione 7.15.
Si può sempre assumere che $\mathscr{A}$ sia una famiglia di insiemi assolutamente convessi in quanto

$$\|f\|_{\infty,A} = \|f\|_{\infty,\mathrm{assco}(A)}.$$

Osservazione 7.16 (Perché si chiama topologia polare?).
Fissiamo una famiglia $\mathscr{A}$. Ricordiamo che per ogni $A \in \mathscr{A}$ si ha

$$A^0 = \{f \in X^* \mid |\langle f, x \rangle| \leq 1 \ \forall x \in A\} = \overline{B}(0, 1, \|\cdot\|_{\infty,A}).$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $\mathscr{A}$ soddisfi

1. $\forall A \in \mathscr{A}$ e $\forall t > 0$, $tA \in \mathscr{A}$
2. $\forall A, B \in \mathscr{A}$, $\exists C \in \mathscr{A}$ tale che $C \supseteq A \cup B$

Allora la famiglia $\left\{A^0\right\}_{A \in \mathscr{A}}$, cioè le palle unitarie delle norme $\|\cdot\|_{\infty,A}$ è una base di intorni di 0 per la topologia polare associata a $\mathscr{A}$.

7.3.1 Topologia bounded-weak-star e Krein-Šmulian

Definizione 7.17 (Topologia limitata-debole*)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ banach, la topologia **bounded weak*** (abbreviata bw^*) su X^* è la topologia limite topologico di $X_n = (nB_{X^*}, w^*)$. Cioè, un insieme $A \subseteq X^*$ è aperto in questa topologia se e solo se per ogni n, $A_n \cap nB_{X^*}$ è aperto nella topologia w^*.

Osservazione 7.18.
Prendere palle chiuse o aperte, cambiare successione di raggi (purché tenda a $+\infty$) o cambiare il centro delle palle non cambia la topologia bw^*.

Osservazione 7.19.
bw^* è invariante per traslazioni, cioè $A \in bw^* \iff A + v_0 \in bw^*$ per un qualsiasi $v_0 \in X$.

Teorema 7.20.
La topologia bw^* è la topologia della convergenza uniforme su compatti $\tau_{\mathscr{K}}$.

Dimostrazione.
Abbiamo notato che bw^* è invariante per traslazioni, quindi basta mostrare che le due topologie hanno gli stessi intorni di 0.

$\boxed{\tau_{\mathscr{K}_0} \subseteq bw^*}$ Una base di intorni di 0 per $\tau_{\mathscr{K}}$ è

$$\left\{A^0 \mid A \in \mathscr{K}_0\right\} \quad \text{dove } \mathscr{K}_0 = \{K \subseteq X \mid \forall \varepsilon > 0 \ K \setminus \varepsilon B \in \mathscr{P}_{fin}(X)\}.$$

Per ogni $A \in \mathscr{K}_0$ vogliamo mostrare che A^0 è aperto per bw^*, cioè per ogni $n \geq 1$ chiediamo che sia aperta l'intersezione

$$\begin{aligned} A^0 \cap nB_{X^*} =& A^0 \cap nB_X^0 = A^0 \cap \left(\frac{1}{n}B_X\right)^0 = \left(A \cup \frac{1}{n}B_X\right)^0 = \\ &= \left(\left(A \setminus \frac{1}{n}B_X\right) \cup \frac{1}{n}B_X\right)^0 = \\ &= \left(A \setminus \frac{1}{n}B_X\right)^0 \cap nB_{X^*} \end{aligned}$$

Poiché $A \in \mathscr{K}_0$ si ha che $A \setminus \frac{1}{n}B_X$ è finito, quindi $\left(A \setminus \frac{1}{n}B_X\right)^0$ è un intorno di 0 in w^* e quindi $A^0 \cap nB_{X^*}$ è effettivamente w^*-aperto.

$\boxed{bw^* \subseteq \tau_{\mathscr{K}_0}}$ Sia U un intorno aperto di 0 per bw^*. Vogliamo costruire un insieme $A \in \mathscr{K}_0$ tale che $A^0 \subseteq U$.

Costruiamo per induzione una successione (A_n) di insiemi finiti tali che

1. $(A_n)^0 \cap nB_{X^*} \subseteq U$
2. $A_{n+1} \subseteq A_n \cup \frac{1}{n}B_X$

$\boxed{n = 1}$ Poiché U è aperto in bw^* esiste A_1 finito tale che $A_1^0 \cap B_{X^*} \subseteq U \cap B_{X^*} \subseteq U$, infatti gli insiemi $A_1^0 \cap B_{X^*}$ sono base di intorni nella topologia indotta dalla bw^* su B_{X^*} e chiaramente $U \cap B_{X^*}$ è un aperto per questa topologia.

$\boxed{n+1}$ Supponiamo di aver costruito $A_1, \cdots, A_n$ finiti con le due proprietà. Costruiamo A_{n+1}:

$$\begin{aligned}
\emptyset =& A_n^0 \cap nB_{X^*} \cap U^c \cap \underbrace{(n+1)B_{X^*}}_{\text{tecnicamente superflua}} = \\
=& A_n^0 \cap n \left(\bigcup_{x \in B_X} \{x\} \right)^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} = \\
=& A_n^0 \cap \left(\bigcap_{x \in B_X} \left\{ \frac{x}{n} \right\}^0 \right) \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} = \\
=& \bigcap_{x \in B_X} \left(A_n \cup \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^0 \cap (U^c \cap (n+1)B_{X^*}).
\end{aligned}$$

Questa è una intersezione di insiemi w^* chiusi e limitati: U^c è bw^* chiuso perché U aperto in bw^*, B_{X^*} è w^*-chiuso perché è la palla chiusa, quindi l'intersezione è w^* chiusa perché $U \cap B_{X^*}$ è un aperto w^* in B_{X^*}. Ogni $\left(A_n \cup \left\{\frac{x}{n}\right\}\right)^0$ è w^* chiuso per (5.33).

Per Banach-Alaoglu (7.1) questa intersezione è w^*-compatta e quindi esiste $J_n \subseteq B_X$ finito tale che

$$\begin{aligned}
\emptyset =& \bigcap_{x \in J_n} \left(A_n \cup \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} = \\
=& \left(A_n \cup \frac{1}{n} J_n \right)^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*}
\end{aligned}$$

Poniamo $A_{n+1} = A_n \cup \frac{1}{n} J_n$. Verifichiamo le due condizioni

1. $\emptyset = A_{n+1}^0 \cap U^c \cap (n+1)B_{X^*} \implies A_{n+1}^0 \cap (n+1)B_{X^*} \subseteq U$
2. $A_{n+1} \subseteq A_n \cup \frac{1}{n} B_X$ perché $J_n \subseteq B_X$

Sia $A = \bigcup A_n$. La condizione 2. garantisce che A si può accumulare solo in 0, inoltre per ogni n

$$A^0 \cap nB_{X^*} \overset{A^0 \subseteq A_n^0}{\subseteq} A_n^0 \cap nB_{X^*} \subseteq U$$

quindi prendendo l'unione al variare di n, $A^0 \subseteq U$.

□

Osservazione 7.21.
bw^* è una topologia di SVT

Teorema 7.22.
Si ha che $(X^*, \tau_{\mathscr{K}})^* = (X^*, w^*)^*$.

Dimostrazione.
Poiché $\tau_{\mathscr{K}} = bw^*$ è più fine di w^* abbiamo immediatamente $(X^*, w^*)^* \subseteq (X^*, \tau_{\mathscr{K}})^*$.

Sia $\varphi : X^* \to \mathbb{K}$ lineare e $\tau_{\mathscr{K}}$-continua. Vogliamo mostrare che sia una valutazione. La continuità per $\tau_{\mathscr{K}}$ significa:

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } |\langle \varphi, f \rangle| \leq \|f\|_{\infty, K}$$

in quanto $\mathscr{K}$ è già chiuso per omotetie, intersezioni e unioni finite.

Inoltre senza perdita di generalità possiamo considerare $K \in \mathscr{K}_0$, cioè $K = \{x_n\}_{n\geq 0}$ con $x_n \to 0$. Dunque

$$|\langle \varphi, f\rangle| \leq \max_{n\geq 0} |\langle f, x_n\rangle|$$

dove al posto di sup usiamo max perché $|\langle f, x_n\rangle|$ è una successione infinitesima di reali non negativi.

È quindi ben definito un operatore lineare e continuo

$$T : \begin{array}{ccc} X^* & \longrightarrow & c_0 \\ f & \longmapsto & (\langle f, x_n\rangle)_{n\geq 0} \end{array}$$

la continuità vale perché $\|Tf\|_\infty = \max_{n\geq 0} |\langle f, x_n\rangle| \leq (\max \|x_n\|) \|f\|$ dove $\max \|x_n\|$ è ben definito perché $x_n \to 0$.

Inoltre la disuguaglianza $|\langle \varphi, f\rangle| \leq \max_{n\geq 0} |\langle f, x_n\rangle|$ garantisce che $\ker T \subseteq \ker \varphi$, quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{K} \\ T(X) \subseteq c_0 \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

Notiamo che $\widetilde{\varphi}$ è continua perché se $y = Tf$ allora

$$|\langle \widetilde{\varphi}, y\rangle| = |\langle \varphi, f\rangle| \leq \max_{n\geq 0} |\langle f, x_n\rangle| = \|y\|_{c_0} \implies \|\widetilde{\varphi}\| \leq 1.$$

Per Hahn-Banach (3.4) $\widetilde{\varphi}$ si estende a tutto c_0 con la stessa norma, ma i funzionali continui su c_0 sono quelli della forma $(x_i)_{i\geq 0} \mapsto \sum_{i\geq 0} \lambda_i x_i$ per $(\lambda_i)_{i\geq 0} \in \ell_1$.

Quindi esiste $\lambda \in \ell_1$ tale che per ogni $f \in X^*$ si ha

$$\langle \varphi, f\rangle = \langle \widetilde{\varphi}, Tf\rangle = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \langle f, x_n\rangle = \left\langle f, \sum_{n\geq 0} \lambda_n x_n \right\rangle$$

dove l'ultimo passaggio è valido perché la serie è assolutamente convergente e f è continua.

In conclusione, $u = \sum_{n\geq 0} \lambda_n x_n \in X$ rappresenta φ, cioè $\langle \varphi, f\rangle = \langle f, u\rangle$ e questo conclude. □

Teorema 7.23 (Krein-Šmulian)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach, $C \subseteq X^*$ convesso, allora C è w^*-chiuso se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $C \cap nB_{X^*}$ è w^*-chiuso.

Dimostrazione.
La seconda condizione è equivalente a C chiuso in $bw^* = \tau_{\mathscr{K}}$ (7.20) e questa topologia ha lo stesso duale della w^* (7.22) e questo conclude per il teorema di Hanh-Banach/separazione dei convessi (3.26). □

7.4 Compattezza per la topologia debole

7.4.1 Varie nozioni di compattezza

Definizione 7.24 (Numerabile compattezza)**.**
X spazio topologico è **numerabilmente compatto** (abbreviato **NC**) se vale una delle sequenti equivalenti condizioni:

- per ogni $S \subseteq X$ infinito ha punti di ω-accumulazione, cioè esiste $x \in X$ tale che per ogni U intorno di x si ha $|U \cap S| \geq \aleph_0$, ovvero
$$\bigcap_{F \in \mathscr{P}_{fin}(S)} \overline{S \setminus F} \neq \emptyset$$
- Per ogni (F_n) successione di chiusi in X non vuoti decrescenti per inclusione si ha $\bigcap F_n \neq \emptyset$.
- Per ogni ricoprimento aperto $\{U_n\}$ numerabile di X esiste un sottoricoprimento finito.

$A \subseteq X$ è **relativamente numebrabilmente compatto** (abbreviato **RNC**) se vale una delle seguenti

- Ogni $S \subseteq A$ infinito ha punti di ω-accumulazione in X
- Ogni $(a_n) \subseteq A$ successione ha punti di accumulazione in X.

Definizione 7.25 (Sequenzialmente compatto)**.**
X spazio topologico è **sequenzialmente compatto** (abbreviato **SC**) se per ogni (x_n) successione in X esiste una sottosuccessione convergente.

$A \subseteq X$ è **relativamente sequenzialmente compatto** (abbreviato **RSC**) se ogni successione in A ha una sottosuccessione convergente in X.

Proposizione 7.26.
Se $A \subseteq X$ spazi topologici allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{tikzcd}
\overline{C} \arrow[dr, Rightarrow] & & \overline{SC} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \overline{NC} \arrow[dr, Rightarrow] & & RSC \arrow[dl, Rightarrow] \\
& & RNC &
\end{tikzcd}$$

dove la barra sopra la sigla significa che chiediamo che $\overline{A}$ in X abbia la proprietà.

Esempio 7.27 (Compatto T_2 non implica sequenzialmente compatto)**.**
Sia $2 = \{0,1\}$ spazio topologico discreto, $X = 2^{2^{\mathbb{N}}} = \{f : 2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}\} = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. La mappa di valutazione
$$\begin{array}{ccc} 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & 2 \\ (f,n) & \longmapsto & f(n) \end{array}$$
definisce in modo canonico una successione $val : \mathbb{N} \to 2^{2^{\mathbb{N}}}$. Questa successione non ha estratte convergenti, infatti convergenza in uno spazio con la topologia prodotto significa convergenza puntuale, quindi se n_k è una ipotetica successione crescente di naturali che definisce la sottosuccessione allora per ogni $f \in 2^{\mathbb{N}}$ si dovrebbe avere $val_{n_k}(f) = f(n_k)$ convergente (in $2 = \{0,1\}$ con la topologia discreta), cioè $f(n_k)$ definitivamente costante, ma questo non è possibile perché per ogni fissata sottosuccessione val_{n_k} possiamo considerare una funzione tale che $f(n_k) = k \mod 2$.

Esercizio 7.28 (Sequenzialmente compatto non implica compatto)**.**
Sia $X = \omega_1 = [0, \omega_1) = \{\text{ordinali numerabili}\}$ con la topologia dell'ordine (quella che ha per base gli intervalli aperti).

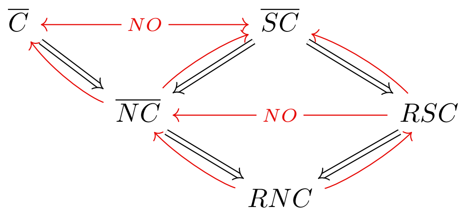
Notiamo che ω_1 è SC, infatti ogni successione ha una sottosuccessione monotona (vero in ogni insieme totalmente ordinato) e questa successione converge: se è decrescente è stazionaria per definizione di buon ordine, se è crescente allora converge al suo estremo superiore, che sta in ω_1.

Eppure X non è compatto perché è unione degli intervalli aperti $\bigcup_{\alpha \in X} [0, \alpha)$, che non ha sottoricoprimenti finiti.

Esercizio 7.29 ($SC \not\Rightarrow \overline{NC}$, e quindi in particolare $RSC \not\Rightarrow \overline{NC}$)**.**
Sia $X = (\omega+1)\times(\omega_1+1)\setminus\{(\omega,\omega_1)\} = [0,\omega_1]\times[0,\omega_1]\setminus\{(\omega,\omega_1)\}$ e sia $A = (\omega+1)\times\omega_1 = [0,\omega]\times[0,\omega_1)$

A è SC perché lo sono $\omega+1$ e ω_1, inoltre $\overline{A} = X$ perché i punti (α, ω_1) sono di accumulazione. Notiamo però che X non è NC infatti l'insieme $B \subseteq X$ dato da $B = \omega \times \{\omega_1\}$ non ha punti di accumulazione in X (è isomorfo a ω e l'unico punto di accumulazione sarebbe l'angolino (ω, ω_1) che X non ha per costruzione).

Questi esempi mostrano che in generale



Osservazione 7.30.
Se $A \subseteq X$, $f : X \to Y$ continua e A è RNC allora $f(A) \subseteq Y$ è RNC.

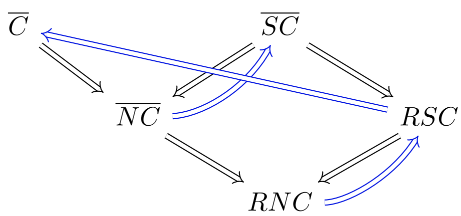
7.4.2 Eberlein-Šmulian

Osservazione 7.31.
Se A è RNC in (X, w) allora è limitato, infatti basta mostrare che per ogni $f \in X^*$ si ha $f(A)$ limitato, che è vero perché $f(A) \subseteq \mathbb{K}$ è RNC ma in $\mathbb{R}^n$ questo implica limitato.

Teorema 7.32 (Eberlein-Šmulian)**.**
Sia E spazio di Banach e $A \subseteq E$. Rispetto alla topologia debole di E sono equivalenti

1. $\overline{A}^w$ *è numerabilmente compatta*
2. A *è relativamente numerabilmente compatto*
3. $\overline{A}^w$ *è sequenzialmente compatta*
4. A *è relativamente sequenzialmente compatto*
5. $\overline{A}^w$ *è compatto*

Dimostrazione.
Basta mostrare le implicazioni in blu



$\boxed{RNC \implies RSC}$ Sia $(a_n) \subseteq A$, dobbiamo mostrare che (a_n) ha una sottosuccessione w-convergente in E. Sia

$$V = \overline{\operatorname{Span}(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})} \subseteq E,$$

in particolare V è un sottospazio vettoriale chiuso e separabile, quindi V^* ha una palla unitaria w^*-separabile[2]. Sia $D \subseteq V^*$ numerabile e denso. Con argomento diagonale troviamo una sottosuccessione di (a_n) (che continuiamo a chiare (a_n)) tale che $\langle f, a_n\rangle$ converge per ogni $f \in D$.

Sia $a_\infty \in E$ un punto di accumulazione di $(a_n) \subseteq A$ (stiamo assumendo A RNC). Allora per ogni $f \in D$, $\langle f, a_\infty\rangle$ è punto di accumulazione della successione convergente $\langle f, a_n\rangle$, quindi $\langle f, a_\infty\rangle$ è il limite ($\mathbb{R}$ è Hausdorff).

Affermo che ciò vale per ogni $f \in V^*$: se non fosse così esisterebbe $g \in V^*$ tale che $\langle g, a_n\rangle \not\to \langle g, a_\infty\rangle$, ma allora estraendo una sottosuccessione esisterebbe una sottosuccessione tale che $\langle g, a_{n_k}\rangle$ converge ad un limite diverso da $\langle g, a_\infty\rangle$. Se $b_\infty \in E$ è di w-accumulazione per (a_{n_k}) si trova come prima che per ogni $f \in D$, $\langle f, a_{n_k}\rangle \to \langle f, b_\infty\rangle$, ma essendo (a_{n_k}) una sottosuccessione di quella di prima $\langle f, a_{n_k}\rangle \to \langle f, a_\infty\rangle$. Eppure $\langle g, a_{n_k}\rangle \to \langle g, b_\infty\rangle \neq \langle g, a_\infty\rangle$ e questo è assurdo perché D è w^*-denso.

Dunque $\langle f, a_n\rangle \to \langle f, a_\infty\rangle$ per ogni $f \in V^*$, quindi $\langle f, a_n\rangle \to \langle f, a_\infty\rangle$ per ogni $f \in E^*$ in quanto $f|_V \in V^*$. Questo significa esattamente che $a_n \to a_\infty$ nella topologia debole, come volevamo.

$\boxed{RSC \implies \overline{C}}$ Mostriamo che la chiusura $\sigma(E^{**}, E^*)$ di A in E^{**} è in realtà contenuta in E. Se questo è vero allora questa è anche la chiusura in $\sigma(E, E^*)$ e quindi è compatta per Banach-Alaoglu (7.1) infatti

$$A \subseteq E \subseteq E^{**} \rightsquigarrow \overline{A}^E = \overline{A}^{E^{**}} \cap E.$$

Sia $\eta \in \overline{A}^{\sigma(E^{**},E^*)}$ e mostriamo che $\eta \in E$. Quello che faremo è mostrare che $\ker \eta \subseteq E^*$ è $\sigma(E^*, E)$-chiuso[3].

Per Krein-Šmulian (7.23) basta vedere che $\ker \eta \cap \overline{B_{E^*}(0,1)}$ è w^*-chiuso (e quindi per omotetia $\ker \eta \cap \overline{B(0,R)}$ chiuso e per Krein-Šmulian questo mostra che $\ker \eta$ stesso è chiuso).

Sia $g_0 \in \overline{\ker \eta \cap B_{E^*}}^{w^*}$ e mostriamo che $g_0 \in \ker \eta$, cioè $\langle \eta, g_0\rangle = 0$ (chiaramente g_0 sta nella palla). Partendo da g_0 costruiamo due successioni $a_n \in A$ e $g_n \in \ker \eta \cap B_{E^*}$ in modo che

$$\begin{cases} \langle g_i, a_n\rangle - \langle \eta, g_i\rangle < \frac{1}{n} & \forall 0 \le i \le n-1 \\ |\langle g_n, a_i\rangle - \langle g_0, a_i\rangle| < \frac{1}{n} & \forall 1 \le i \le n \end{cases}$$

Questo si può fare per induzione: definiti $g_1, \cdots, g_{n-1}$ esiste a_n verificante la prima condizione perché quella condizione definisce un intorno di η per la topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$, che quindi interseca A in quanto η appartiene alla chiusura di A. Definiti $a_1, \cdots, a_n$ esiste g_n che verifica la seconda condizione perché quelle disuguaglianze definiscono un intorno di g_0 nella topologia $\sigma(E, E^*)$ e questo interseca $\ker \eta \cap B_{E^*}$.

[2]Per Banach-Alaoglu (7.1) B_{V^*} è w^*-compatta, ma chiaramente è anche metrizzabile perché V è separabile (6.2), quindi B_{V^*} è separabile.

Alternativamente basta seguire la dimostrazione V^* separabile implica V separabile ma partendo da V e notare che gli stessi passi portano a mostrare che V^* è debolmente*-separabile (vedi nota a margine nella dimostrazione di 3. in (6.2)).

[3]forma lineare è continua se e solo se nucleo è chiuso (2.32) e mostrare che η è w^*-continua è la stessa cosa di dire che η è una valutazione per definizione di topologia debole*.

Poiché $\langle \eta, g_n \rangle = 0$ per ogni $n \geq 1$ vale

$$\begin{cases} \langle g_0, a_n \rangle - \langle \eta, g_0 \rangle = o(1) & \text{prima condizione per } i = 0 \\ \langle g_i, a_n \rangle = o(1) & \text{prima condizione per } i > 0 \\ \langle g_n, a_i \rangle - \langle g_0, a_i \rangle = o(1) & \text{seconda condizione} \end{cases}$$

Poiché A è RSC, a meno di sottosuccessione, $a_n \to a_\infty \in E$ debolmente. La successione $\langle g_n, a_i \rangle \to \langle g_0, a_i \rangle$ per ogni $i < \infty$ per la terza equazione, invece per la seconda si ha $\langle g_i, a_\infty \rangle = 0$, in particolare converge.

Per Banach-Alaoglu (7.1) e l'implicazione RSC $\Longrightarrow$ RNC la successione $(g_n)_n \subseteq B_{E^*}$ ha un punto di w^*-accumulazione g_∞. Per ogni i (anche ∞) si ha che $\langle g_\infty, a_i \rangle$ è un punto di accumulazione per $(\langle g_n, a_i \rangle)_n$, e quindi $\langle g_\infty, a_i \rangle$ è il limite di questa successione.

Facendo il limite per $n \to \infty$ nelle disguguaglianze precedenti troviamo

$$\begin{cases} \langle g_0, a_\infty \rangle = \langle \eta, g_0 \rangle \\ \langle g_i, a_\infty \rangle = 0 \\ \langle g_\infty, a_i \rangle = \langle g_0, a_i \rangle \end{cases}$$

Ora facciamo tendere $i \to \infty$ e troviamo

$$\begin{cases} \langle g_0, a_\infty \rangle = \langle \eta, g_0 \rangle \\ \langle g_\infty, a_\infty \rangle = 0 \\ \langle g_\infty, a_\infty \rangle = \langle g_0, a_\infty \rangle \end{cases}$$

cioè

$$\langle \eta, g_0 \rangle = \langle g_0, a_\infty \rangle = \langle g_\infty, a_\infty \rangle = 0$$

ovvero $g_0 \in \ker \eta$ come volevamo.

$\boxed{\overline{NC} \implies \overline{SC}}$ Per un chiuso $\overline{NC} = RNC$ e similmente $\overline{SC} = RSC$, quindi la freccia $RNC \implies RSC$ conclude.

□

Riassumendo:

- Su X^*
  - Banach-Alaoglu: B_{X^*} è w^*-compatta
  - Se X è separabile allora (B_{X^*}, w^*) è metrizzabile, quindi è anche sequenzialmente compatta. (Mostrato indipendentemente tramite Ascoli-Arzelá).
- Su X
  1. Dieudonné: i compatti (norma) K sono contenuti in $\overline{\text{co}(x_n)}$ per $x_n \to 0$
  2. Eberlein-Šmulian: compatti per debole.

Capitolo 8

Funzioni regolari e funzioni a supporto compatto

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ non vuoto e sia $k(\Omega) = \{K \subseteq \Omega \mid K \text{ compatto}\}$.

8.1 Funzioni regolari

L'insieme
$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \text{continue}\}$$
è uno SVTLC con le seminorme uniformi
$$\left\{\|\cdot\|_{\infty,K}\right\}_{K\in k(\Omega)}$$
Inoltre questo rende $C^0(\Omega)$ metrizzabile in quanto se $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di compatti tale che $K_i \subseteq int(K_{i+1})$ e $\Omega = \bigcup_{j\geq 0} K_j$ allora le seminorme $\left\{\|\cdot\|_{\infty,K_j}\right\}$ topologizzano $C^0(\Omega)$.

Esempio 8.1.
Sia $K_j = \left\{x \in \Omega \mid dist(x, \Omega^c) \leq 2^{-j}\right\} \cap \overline{B}(0, j)$. Una distanza su $C^0(\Omega)$ è data da
$$d(f, g) = \sum_{j\geq 0} 2^{-j} \arctan(\|f - g\|_{\infty,K_j}).$$

Inoltre $C^0(\Omega)$ è completo, infatti $(f_n) \subseteq C^0(\Omega)$ è di Cauchy se per ogni j si ha $(f_n|_{K_j})_n$ di Cauchy in $C^0(K_j)$, quindi f_n converge uniformemente su K_j e il limite è una funzione $f \in C^0(\Omega)$ (definiamo puntualmente ma è una convergenza uniforme su compatti quindi è anche continua).

Definizione 8.2 (Spazio di Fréchet)**.**
Uno spazio topologico è di **Fréchet** se è SVTLC, metrizzabile e completo.

Notazione 8.3.
Sia $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $f \in C^m(\Omega)$, allora
$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f.$$
Chiamiamo n la **lunghezza** di α e $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ il **peso** o **grado** di α.

Per il teorema di Schwarz non importa l'ordine delle derivate sopra.

Definizione 8.4 (Spazio $C^m(\Omega)$).
Poniamo
$$C^m(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall \alpha t.c. \, |\alpha| \leq m, \; \partial^\alpha f \in C^0(\Omega) \right\}.$$

Osservazione 8.5.
Anche $C^m(\Omega)$ è uno SVTLC metrizzabile completo con le seminorme
$$\|f\|_{\alpha,\infty,K} = \|\partial^\alpha f\|_{\infty,K}$$
considerate al variare di $|\alpha| \leq m$ e $K \in k(\Omega)$.

Equivalente possiamo considerare $\{p_{m,K}\}_{K\in k(\Omega)}$ data da
$$p_{m,K}(f) = \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,K}.$$

Per la complettezza basta usare il teorema di limite sotto il segno di derivata: Se $(f_n) \subseteq C^m(\Omega)$ è di Cauchy, cioè $|\alpha| \leq m$ e $\forall K \in k(\Omega)$ si ha $\partial^\alpha f_j$ di Cauchy in $C^0(\Omega)$, allora per ogni $|\alpha| \leq m$ si ha convergenza uniforme sui compatti
$$\partial^\alpha f_j \to g_\alpha$$
per qualche $g_\alpha \in C^0(\Omega)$. Si conclude (per induzione su m) che $f = \lim f_j$ è di classe C^m e che $\partial^\alpha f = g_\alpha$.

Definizione 8.6 (Spazio $C^\infty(\Omega)$).
Definiamo $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\geq 0} C^m(\Omega)$. Anche $C^\infty(\Omega)$ è SVT di Fréchet.

Osservazione 8.7.
I limitati di $C^\infty(\Omega)$ sono relativamente compatti.

Dimostrazione.
Se $A \subseteq C^\infty(\Omega)$ è limitato allora per ogni $K \in k(\Omega)$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha che $\sup_{f\in A} p_{m+1,K}(f) \leq C(m,K) \in \mathbb{R}$, quindi le derivate delle $\partial^\alpha f$ per $f \in A$ sono limitate uniformemente su K. Questo in particolare vale per K compatto convesso, quindi le $\partial^\alpha f$ sono equilipschitz (teorema del valor medio).

Allora per Ascoli-Arzelá abbiamo che $\{\partial^\alpha f\}$ è un compatto in $C^0(K)$. Allora (argomento diagonale) ogni successione $(f_j) \subseteq A$ ha una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti e quindi in $C^\infty(\Omega)$. □

Osservazione 8.8.
Nel caso di $C^m(\Omega)$ si ha che i limitati di $C^{m+1}(\Omega) \subseteq C^m(\Omega)$ sono relativamente compatti in $C^m(\Omega)$.

Osservazione 8.9.
$C^m(\Omega)$ ha la topologia iniziale data dalle mappe
$$\begin{array}{ccc} C^m(\Omega) & \longrightarrow & C^0(K) \\ f & \longmapsto & \partial^\alpha f|_K \end{array}$$
al variare di $K \in k(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$.

8.2 Funzioni a supporto compatto

Definizione 8.10 (Funzioni a supporto compatto)**.**
Definiamo

$$C^0_C(\Omega) = \bigcup_{K \in k(\Omega)} C_K, \qquad C_K = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} f \subseteq K \right\}$$

Analogamente (anche per $m = \infty$)

$$C^m_C(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C^0_C(\Omega) = \bigcup_{K \in k(\Omega)} C^m_K, \qquad C^m_K = C^m(\Omega) \cap C_K.$$

Osservazione 8.11.
$C^0_C(\Omega)$ è denso in $C^0(\Omega)$ e similmente per ordini più alti.

Poiché questi spazi sono definiti in modo naturale come unione, la topologia naturale su $C^m_C(\Omega)$ è la più fine topologia di SVT che renda continue le inclusioni $C^m_K \hookrightarrow C^m_C(\Omega)$, dove C^m_K ha la topologia indotta da $C^m(\Omega)$.

Appendice A

Topologia

Proposizione A.1 (Topologia iniziale)**.**
Sia X un insieme e $\mathcal{F}$ una famiglia di mappe a valori in uno spazio topologici. Notazione:

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \to (Y_j, \tau_j)\}_{j \in I} .$$

Allora esiste la topologia meno fine su X che rende continue le mappe f_j. Una prebase di questa topologia è data da

$$\left\{ f_j^{-1}(A) \mid j \in I, A \in \tau_j \right\} .$$

In realtà basterebbe prendere una prebase per τ_j al posto di tutta la topologia.

Questa topologia è detta ***topologia iniziale della famiglia*** *$\mathcal{F}$ e si denota $\tau_{\mathcal{F}}$.*

Osservazione A.2 (Proprietà universale della topologia iniziale).
Data una mappa $\varphi : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_{\mathcal{F}})$ essa è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione.
Se φ è continua allora $f \circ \varphi$ è composizione di continue. Se sappiamo che $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$ allora, se A è un aperto di X per continuità di $f \circ \varphi$ abbiamo

$$\tau_Z \ni (f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$$

cioè le preimmagini tramite φ di aperti di prebase sono aperti di Z, quindi φ è continua. $\square$

Proposizione A.3 (Transitività della topologia iniziale)**.**
Supponiamo di avere una famiglia di mappe $\mathcal{F}' = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ e per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{G}_i = \{g_{ij} : Y_i \to Z_{ij}\}_{j \in J_i}$ una famiglia di mappe. Su ogni Y_i consideriamo la topologia iniziale determinata da $\mathcal{G}_i$. Allora la topologia iniziale data da $\mathcal{F}'$ su X coincide con la topologia iniziale su X definita da $\mathcal{F} = \{g_{ij} \circ f_i \mid i \in I,\ j \in J_i\}$.

Dimostrazione.
Entrambe le topologie in esame sono generate dagli insiemi $(g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A)$ al variare di $i \in I$, $j \in J_i$ e $A \in \tau_{Z_{ij}}$, infatti

$$\text{prebase per } \mathcal{F} \to (g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A) = f_j^{-1}(g_{ij}^{-1}(A)) \leftarrow \text{prebase per } \mathcal{F}'.$$

$\square$

A.1 Limiti induttivi su spazi topologici

Proposizione A.4.
Sia $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di spazi topologici con inclusioni continue $X_n \subseteq X_{n+1}$. Allora esiste la più fine topologia τ_∞ su $X_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ che rende continue le inclusioni $X_n \subseteq X_\infty$.

La topologia in questione è

$$\begin{aligned}\tau_\infty =& \{A \subseteq X_\infty \mid \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap X_n \in \tau_n\} = \\ =& \left\{A \subseteq X_\infty \mid A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ A_n \subseteq A_{n+1},\ A_n \in \tau_n\right\}.\end{aligned}$$

Dimostrazione.
Poiché la continuità delle inclusioni si traduce in "$\forall n,\ A \cap X_n \in \tau_n$" basta verificare che questa condizione definisce una topologia, ma questo è ovvio perché

- $(\bigcup A_i) \cap X_n = \bigcup A_i \cap X_n$,
- $(A \cap B) \cap X_n = (A \cap X_n) \cap (B \cap X_n)$,
- $\emptyset \cap X_n = \emptyset$ e
- $X_\infty \cap X_n = X_n$.

□

Osservazione A.5.
Se ogni inclusione $X_n \subseteq X_{n+1}$ è inclusione di sottospazio, cioè τ_n è la topologia indotta, allora τ_∞ induce τ_n come topologia di sottospazio $X_n \subseteq X_\infty$.

Dimostrazione.
Se $A_0 \subseteq X_0$ aperto allora esiste $A_1 \in \tau_1$ tale che $A_0 = A_1 \cap X_0$ perché τ_0 è la topologia indotta da τ_1. Iterando troviamo A_n aperti inscatolati, quindi $A = \bigcup_n A_n$ e per costruzione $A \cap X_0 = A_0$. Per gli indici più alti è uguale. □

Osservazione A.6.
$f : X_\infty \to Z$ è continua se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f|_{X_n} \to Z$ è continua.

Osservazione A.7.
Il limite su sottosuccessione $\{X_{n_k}\}_{k\geq 0}$ è sempre X_∞ con la stessa topologia.

A.1.1 Limiti induttivi di SVT

Osservazione A.8.
In generale un limite induttivo di SVT $X_n \subseteq X_{n+1}$ con inclusioni lineari è uno spazio topologico (X_∞, τ_∞) e uno spazio vettoriale, ma NON è uno SVT.

Il motivo è che la somma su X_∞ non è necessariamente continua in quanto in generale $\varinjlim(X_n \times X_n) \neq \varinjlim X_n \times \varinjlim X_n$ anche se vale uguaglianza insiemistica.

$+ : \bigcup X_n \times \bigcup X_n \to \bigcup X_n$ è tale che la restrizione a $X_n \times X_n$ è continua, ma questo non implica la continuità della intera mappa.

Cerchiamo di correggere

Notazione A.9.
Se (V_i) è una successione di sottoinsiemi di X allora

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} V_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} V_i = \{v_1 + \cdots + v_n \mid v_j \in V_j \ \forall j\}$$

Lemma A.10.
Se X è SVT, per ogni $U \in \mathcal{U}_X$ esiste una successione $(V_i)_i \subseteq \mathcal{U}_X$ tale che $\sum_{i\geq 1} V_i \subseteq U$.

Dimostrazione.
Si costruisce (V_i) per induzione in modo che $V_{i+1} + V_{i+1} \subseteq V_i$, $V_0 = U$. Questo funziona perché

$$V_n + \sum_{i=1}^{n} V_i \subseteq V_n + V_1 \subseteq U.$$

□

Lemma A.11.
Per successioni $(V_i)_i$ e $(V_i')_i$ di sottoinsiemi di X spazi vettoriali vale

- $(\sum V_i) + (\sum V_i') = \sum (V_i + V_i')$
- $(\sum V_i) \cap (\sum V_i') \supseteq \sum (V_i \cap V_i')$
- *Se ogni V_i è assorbente / bilanciato / convesso allora anche $\sum V_i$ lo è. Se $\bigcup V_i$ è assorbente allora anche $\sum V_i \supseteq \bigcup V_i$ lo è.*

Dimostrazione.
Ovvia apparentemente. □

Proposizione A.12.
Sia (X_i) una successione di SVT con mappe $X_i \in X_{i+1}$ lineari continue iniettive (senza perdita di generalità inclusioni).

Poniamo $X_\infty = \bigcup_{i\geq 0} X_i$, allora X_∞ è uno spazio vettoriale ed esiste su esso la più fine topologia di SVT che rende continue tutte le inclusioni $X_n \to X_\infty$.

Dimostrazione.
Sia $\mathcal{U}_i$ un sistema di intorni per 0 in X_i, allora la continuità di $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ si esprime dicendo

$$\{U \cap X_i \mid U \in \mathcal{U}_{i+1}\} \subseteq \mathcal{U}_i$$

(l'uguaglianza corrisponderebbe a X_n sottospazio di X_{n+1}).

- Definitamo la base di intorni

  $$\mathcal{U}_\infty = \left\{ \sum_i V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i,\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

  Questa induce una topologia di SVT su X_∞, segue dal secondo lemma.

- Le inclusioni $(X_i, \mathcal{U}_i) \to (X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$ sono continue, infatti per ogni $\sum V_i \in \mathcal{U}_\infty$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

  $$X_n \cap \sum V_i \in \mathcal{U}_n$$

  in quanto l'intersezione contiene V_n.

- Per ogni $L : X_\infty \to Y$ si ha L continua mostriamo che se $L|_{X_i} : X_i \to Y$ continua per ogni Y allora L è continua.

  Sia $U \in \mathcal{U}_Y$. Per quanto visto esiste $(U_i) \subseteq \mathcal{U}_Y$ tale che $\sum U_i \subseteq U$. Per continuità di $L|_{X_i}$ esiste $V_i \in \mathcal{U}_i$ tale che $L(V_i) \subseteq U_i$ e quindi

$$L\left(\sum V_i\right) \subseteq \sum U_i \subseteq U$$

  cioè L è continua.

- Questa topologia è la più fine che rende continue le inclusioni, infatti se $Y = (X_\infty, \tau)$ e $L = id : (X_\infty, \mathcal{U}_\infty) \to (X_\infty, \tau)$ e $(X_i, \mathcal{U}_i) \to (X_\infty, \tau)$ continua per ogni i allora $id : (X_\infty, \mathcal{U}_\infty) \to (X_\infty, \tau)$ è continua per il punto precedente, cioè $\mathcal{U}_\infty$ è più fine di τ.

$\square$

Definizione A.13 (Limite induttivo di SVT)**.**
Sia (X_i) una successione di SVT con mappe $X_i \in X_{i+1}$ lineari continue iniettive (senza perdita di generalità inclusioni). Definiamo il loro **limite induttivo** come $(X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$ con le notazioni della proposizione precedente, cioè

$$\mathcal{U}_\infty = \left\{ \sum_i V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i,\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Osservazione A.14 (Caso SVTLC).
Se tutti gli X_i sono localmente convessi anche X_∞ lo è in quanto $\sum V_i$ è convesso per V_i convessi.

In questo caso una base di intorni in $\mathcal{U}_\infty$ è data da

$$\mathcal{U}'_\infty = \{ C \subseteq X_\infty \mid C \text{ convesso},\ C \cap C_n \in \mathcal{U}_n\ \forall n \}$$

infatti $\{\sum_i V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i \text{ convesso},\ i \in \mathbb{N}\}$ è una base di intorni di $\mathcal{U}_\infty$ e questi $\sum V_i$ sono convessi che contengono V_i quando intersecati con X_i.

Viceversa se $C \subseteq X_\infty$ è convesso e $C \cap X_n \in \mathcal{U}_n$ allora[1]

$$C \supseteq \sum_{i \geq 1} 2^{-i} C \supseteq \sum_{i \geq 1} 2^{-i} (C \cap X_i) \in \mathcal{U}_\infty.$$

Osservazione A.15.
Prendendo sottosuccessioni di (X_i), il limite induttivo resta lo stesso (stesso insieme e stessa topologia).

Definizione A.16 (Limite induttivo stretto)**.**
Se $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ è una inclusione di sottospazio, cioè[2] $\{V \cap X_i \mid V \in \mathcal{U}^*_{i+1}\} = \mathcal{U}^*_i$, allora il limte induttivo in questo caso è detto **stretto**.

Proposizione A.17 (Proprietà limiti induttivi stretti)**.**
Sia $(X_\infty, \mathcal{U}_\infty)$ un limite induttivo stretto di X_i

1. *Ogni X_n è un sottospazio di X_∞*

[1] ricorda che per C convesso, $C + C = 2C$.
[2] $\mathcal{U}^*_i$ è il sistema di tutti gli intorni di 0 in X_i

2. *Se C è chiuso in X_{n_0} allora C è chiuso in X_∞ se e solo se C è chiuso in ogni X_n per $n \geq n_0$.*

3. *Se tutti gli X_n sono T_0 anche X_∞ lo è.*

4. *Se ogni X_n è chiuso in X_{n+1} allora $A \subseteq X_\infty$ è limitato se e solo se è contenuto e limitato in un X_n.*

Dimostrazione.
Nelle ipotesi di limite induttivo stretto, una base di intorni di $\mathcal{U}_\infty$ è data dagli intorni

$$\left\{\sum V_i \mid V_i \in \mathcal{U}_i,\ X_i \cap (V_{i+1} + V_{i+1}) \subseteq V_i\ \forall i\right\},$$

infatti, essendo X_i sottospazio di X_{i+1}, per ogni $V_i \in \mathcal{U}_i$ esiste $W_{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$ tale che $X_i \cap W_{i+1} \subseteq V_i$, quindi basta scegliere $V_{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$ tale che $V_{i+1} + V_{i+1} \subseteq W_{i+1}$. Dunque se avevamo una qualsiasi successione (V_i') con $V_i \in \mathcal{U}_i$ basta restingere iterativamente intersecando ogni volta con l'intorno trovato con il metodo sopra.

Da $X_i \cap (V_{i+1} + V_{i+1}) \subseteq V_i$ segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione di insiemi

$$\left(X_n \cap \left(V_k + \sum_{i=0}^{k} V_i\right)\right)_{k \geq n}$$

è descrescente per inclusione, infatti

$$\begin{aligned} X_n \cap \left(V_{k+1} + \sum_{i=0}^{k+1} V_i\right) \overset{X_k \supseteq X_n}{=} & X_n \cap X_k \cap \left(V_{k+1} + V_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} V_i\right) \overset{\sum_{i=0}^{k} V_i \subseteq X_k}{=} \\ =& X_n \cap \left(X_k \cap (V_{k+1} + V_{k+1}) + \sum_{i=0}^{k} V_i\right) \subseteq \\ \subseteq & X_n \cap \left(V_k + \sum_{i=0}^{k} V_i\right). \end{aligned}$$

Segue che

$$X_n \cap \sum_{i=0}^{N} V_i \subseteq X_n \cap \left(V_N + \sum_{i=0}^{N} V_i\right) \subseteq V_{n+1} + \sum_{i=0}^{n+1} V_i \subseteq V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n.$$

1. Scegliendo intorni come sopra, per ogni n

$$X_n \cap \sum_{i=0}^{\infty} V_i = \bigcup_{N \geq n} X_n \cap \sum_{i=0}^{N} V_i \subseteq V_n$$

quindi X_∞ induce su X_n la topologia di X_n come volevamo.

2. Sia $x \in X_\infty \setminus C$, allora $x \in X_{n_1}$ per qualche $n_1 \geq n_0$. C è chiuso in X_{n_1} per ipotesi quindi c'è un intorno U di x in X_{n_1} disgiunto da C, quindi per il punto 1. esiste un intorno $V \in \mathcal{U}_\infty$ tale che $V \cap X_{n_1} = U$ e quindi $V \cap C = \emptyset$, dunque C è chiuso in X_∞.

3. Se ogni X_i è T_0 allora (0) è chiuso in ogni X_i, quindi è chiuso in X_∞ per il punto precedente, ma (0) chiuso equivale a T_0.

4. Siccome ogni X_i è un sottospazio di X_∞, una $A \subseteq X_i$ è limitato in X_i se e solo se è limitato in X_∞, quindi basta provare che A limitato in X_∞ implica esiste n tale che $A \subseteq X_n$.

   Equivalentemente, mostriamo che se $A \subseteq X_\infty$ e $A \not\subseteq X_n$ per ogni n allora A non è limitato. Se $A \not\subseteq X_n$ per ogni n allora esiste una successione $a_n \in A \setminus X_n$, ma per definizione a_n appartiene a qualche X_i, quindi esiste una succesisone strettamente crescente di indici tale che
$$a_{n_k} \in X_{n_{k+1}} \setminus X_{n_k}.$$
   Poiché X_∞ è invariante per sottosuccessioni X_{n_k} si può supporre reindicizzando
$$a_n \in A, \quad a_n \in X_n \setminus X_{n-1}.$$
   Notiamo che anche $\frac{1}{n}a_n \in X_n \setminus X_{n-1}$.

   Essendo X_{n-1} chiuso in X_n esiste un intorno $U_n \in \mathcal{U}_n$ tale che
$$\left(\frac{1}{n}a_n - U_n\right) \cap X_{n-1} = \emptyset$$
   cioè $\frac{1}{n}a_n \notin X_{n-1}+U_n$. Siano $V_n \in \mathcal{U}_n$ tali che $V_n+V_n \subseteq U_n$ e $X_n \cap (V_{n+1} \cap V_{n+1}) \subseteq V_n$. Notiamo che
$$X_n \cap \left(\sum_{i \geq 0} V_i\right) \overset{\text{monotonia sopra}}{\subseteq} V_n \subseteq X_{n-1} + V_n + V_n \subseteq X_{n-1} + U_n.$$
   Poiché $a_n \in X_n$ e $a_n \notin X_{n-1} + nU_n$ si ha che $a_n \notin n\left(\sum_{i\geq 0} V_i\right)$, quindi per ogni n esiste un elemento di A che non appartiene a $n\left(\sum_{i\geq 0} V_i\right)$, cioè A non è limitato.

□

Esempio A.18.
L'ipotesi di chiusura $X_n \subseteq X_{n+1}$ è necessaria per il punto 4.:

Consideriamo X_n una successione crescente di sottospazi di ℓ_∞ con $X_0 = c_0$ muniti della topologia indotta dalla w^* di $\ell_\infty = \ell_1^*$. Sia $X_\infty \subseteq \ell_i nfty$ il limite induttivo stretto di questi sottospazi.

La palla B_0 di X_0 è limitata (X_0 è c_0 con la topologia indotta dalla w^* di ℓ_∞, cioè $X_0 = (c_0, w)$), quindi la chiusura di B_0 in X_∞ è limitata ma $\overline{B_0}^{X_\infty}$ non appartiene ad alcun X_n:
$$\overline{B_0}^{X_\infty} \cap X_n \overset{\text{limite stretto}}{=} \overline{B_0}^{X_n}.$$
La chiusura per la topologia di X_∞ è comunque la chiusura rispetto alla topologia debole*, quindi per Goldstine $\overline{B_0}^{X_\infty} = \overline{B_0}^{w^*} \cap X_\infty = B_{\ell_\infty} \cap X_\infty$, quindi $\overline{B_0}^{X_\infty} \cap X_n = B_{\ell_\infty} \cap X_n$ che non è tutta B_{ℓ_∞}.

Appendice B

Duali di ℓ_p

B.1 Norme estese

Definizione B.1 (Norma estesa)**.**
Sia $\sigma : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ una **norma estesa**, cioè

1. $\sigma(x + y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$
2. $\sigma(\lambda x) = |\lambda|\, \sigma(x)$
3. $\sigma(x) = 0 \iff x = 0$

Inoltre supponiamo che

4. per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista C_n tale che per ogni $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si abbia $|x(n)| \leq C_n \sigma(x)$
5. σ è LSC[1] rispetto alla convergenza puntale, cioè

$$x^\nu \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall i\ x^\nu(i) \to x(i) \implies \sigma(x) \leq \liminf_{\nu \to +\infty} \sigma(x^\nu)$$

Esempio B.2.
La funzione $\sigma(x) = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$ è una norma estesa su $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ che ha proprietà indicate. Anche $\sigma(x) = \|x\|_\infty$ ha queste proprietà.

Osservazione B.3.
Le proprietà 4. e 5. sono equivalenti a dire che $\{\sigma \leq 1\}$ è compatto in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, infatti

$$4. \iff \{\sigma \leq 1\} \subseteq \prod_n \overline{B(0, C_n)} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

e 5. equivale a chiedere $\{\sigma \leq 1\}$ chiuso, quindi insieme dicono che $\{\sigma \leq 1\}$ è un chiuso in un compatto ($\prod_n \overline{B(0, C_n)}$ è prodotto di compatti).

Definizione B.4 (Dominio di finitezza)**.**
Definiamo il **dominio di finitezza** della norma estesa σ come

$$\ell_\sigma = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sigma < +\infty \right\}$$

Esercizio B.5.
Il dominio di finitezza ℓ_σ è uno spazio di Banach e σ induce la norma.

[1] semicontinua inferiormente

Dimostrazione.
Traccia:

- Verificare che ℓ_σ è uno spazio vettoriale
- σ è una norma
- Verificare la completezza:
  - Sia $(x^\nu)_\nu \subseteq \ell_\sigma$ di Cauchy per σ. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$
  $$(x^\nu(n))_\nu \subseteq \mathbb{K}$$
  è una successione di Cauchy in $\mathbb{K}$ (proprietà 4. insieme al fatto che (x^ν) è Cauchy), quindi esiste $x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ tale che $x^\nu \to x$ puntualmente.
  - Verificare che $x \in \ell_\sigma$: essendo di Cauchy, x^ν è limitata, cioè $\sigma(x^\nu) \le R$ per qualche $R \in \mathbb{R}$, dunque $\sigma(x) \le R$ perché $\{\sigma \le R\}$ è chiuso.
  - Verficare che $\sigma(x^\nu - x) \to 0$: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p, q \ge n$ vale $\sigma(x^p - x^q) \le \varepsilon$. Notiamo che $x^p - x^n \to x - x^n$ puntualmente, quindi per la semicontinuità si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $q \ge n$ vale
  $$\sigma(x - x^q) \le \liminf_{p \to +\infty} \sigma(x^p - x^q) \le \varepsilon$$
  cioè $\sigma(x - x^q) \to 0$ in norma σ.

□

Osservazione B.6.
Questa è una seconda dimostrazione della completezza di ℓ_p per $1 \le p \le \infty$.

Osservazione B.7.
Funziona anche l'analogo per paranorme, quindi in realtà segue anche la completezza di ℓ_p per $0 < p \le 1$.

B.2 Duali di ℓ_p

Proposizione B.8 (Duali di ℓ_p)**.**
Se p e q sono esponenti coniugati ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{1}{\infty} \doteqdot 0$) allora vale l'isometria $(\ell_p)^* \cong \ell_q$.

Dimostrazione.
Esiste una inclusione lineare isometrica data da
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \ell_q & \longrightarrow & (\ell_p)^* \\ y & \longmapsto & \Phi_y : x \mapsto \sum_{i=0}^\infty y_i x_i \end{array},$$
dove la serie in esame converge assolutamente per la disuguaglianza di Hölder:
$$\sum |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q .$$
Effettivamente $\Phi_y : \ell_p \to \mathbb{K}$ è lineare e continua per $\|\cdot\|_{(\ell_p)^*}$, infatti
$$\|\Phi_y\|_{(\ell_p^*)} = \sup_{\|x\|_p \le 1} \left| \sum_{i=0}^\infty x_i y_i \right| \le \sup_{\|x\|_p \le 1} \|x\|_p \|y\|_q = \|y\|_q .$$
La stessa disuguaglianza mostra che Φ stessa è un elemento di $L(\ell_q, (\ell_p)^*)$ di norma minore o uguale a 1.

Resta da mostrare che Φ è isometrica e surgettiva.

$\boxed{1 < p < \infty}$ Per mostrare che $\|\Phi_y\|_{\ell_p^*} = \|y\|_q$ per ogni $y \in \ell_q$ consideriamo $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dato da $x_i = \overline{\operatorname{sgn} y_i}\, |y_i|^{q-1}$. Con questa scelta si ha che

$$x_i y_i = \overline{\operatorname{sgn} y_i} \operatorname{sgn} y_i\, |y_i|^q = |y_i|^q\,,$$

inoltre

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|^p = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^{(q-1)p} = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^q = \|y\|_q^q\,,$$

cioè $x \in \ell_p$ e

$$\|\Phi_y\|_{\ell_p^*} \geq \frac{\Phi_y(x)}{\|x\|_p} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^q}{(\|y\|_q)^{q/p}} = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q\,,$$

d'altronde sappiamo che vale anche l'altra disuguaglianza in generale, quindi abbiamo $\|\Phi_y\|_{\ell_p^*} = \|y\|_q$ come voluto.

$\boxed{p = \infty,\ q = 1}$ Sia $x_i = \overline{\operatorname{sgn} y_i}$. Segue che $\|x\|_\infty \leq 1$ quindi è un elemento valido e

$$\Phi_y(x) = \|y\|_1\,,$$

da cui segue $\|\Phi_y\|_{\ell_\infty^*} \geq \|y\|_1$ come voluto.

$\boxed{p = 1,\ q = \infty}$ In generale $\|\Phi_y\|_{\ell_1^*}$ non è raggiunto come $\Phi_y(x)$ per qualche x [2]. La conclusione però vale comunque.

Mostriamo ora che l'inclusione è surgettiva per $1 \leq p < \infty$. Per ogni $\varphi \in \ell_p^*$ cerchiamo $y \in \ell_q$ tale che $\varphi = \Phi_y$. C'è un solo y possibile, basta valutare φ negli $e_i = (\delta_{ij})_j$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ sia $P_m : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^m$ il proiettore sulle prime m-entrate. Considerando P_m come operatore $P_m : \ell_p \to \mathbb{K}^m \subseteq \ell_p$ restringendo il dominio, definiamo $\varphi_m = \varphi \circ P_m = P_m^* \varphi$. Infine, sia

$$y_m = P_m y = (y(0), y(1), \cdots, y(m-1), 0, 0, \cdots) = \sum_{i=0}^{m-1} y_i e_i,$$

e notiamo che

$$\varphi_m = \Phi_{y_m}$$

infatti sono entrambi elementi di ℓ_p^* e

$$\varphi_m(e_k) = \varphi(P_m(e_k)) = \begin{cases} \varphi(e_k) & \text{se } k < m \\ 0 & \text{se } k \geq m \end{cases}$$

$$\Phi_{y_m}(e_k) = \sum_{i=0}^{\infty} y_m(i) e_k(i) = y_m(i) = \begin{cases} \varphi(e_k) & \text{se } k < m \\ 0 & \text{se } k \geq m \end{cases}$$

quindi φ_m e Φ_{y_m} coincidono su (e_k), quindi sullo span di questi e quindi sulla chiusura di questo span, che è ℓ_p se $p < \infty$.

Essendo Φ isometrica

$$\|y_m\|_q = \|\Phi_{y_m}\|_{\ell_p^*} = \|\varphi_m\|_{\ell_p^*} \leq \|\varphi\|_{\ell_p^*}$$

quindi $\sum_{i=0}^{m-1} |y(i)|^q \leq \|\varphi\|_{\ell_p^*}^q$ per ogni m, dunque passando al sup in m

$$\|y\|_q \leq \|\varphi\|_{\ell_p^*}$$

e quindi y era un elemento valido di ℓ_q. $\square$

[2] per esempio $y_i = 1 - 2^{-i}$ perché in tal caso $\Phi_y(x) = \sum (1 - 2^{-i}) x_i < \sum |x_i| = \|x\|_1$

Proposizione B.9.
Si ha che $\ell_1 \cong c_0^*$

Dimostrazione.
Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \ell_1 & \longrightarrow & c_0^* \\ y & \longmapsto & x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \end{array}$$

Allora Φ è lineare e $|\Phi_y(x)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$. Φ è isometrica

$$\|\Phi_y\|_{c_0^*} = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1, x \in c_0} \sum x_i y_i = \|y\|_1 ,$$

infatti l'estremo superiore si realizza con la successione $x^n = \overline{\operatorname{sgn} y}\chi_{[0,n]}$ ($\Phi_y(x^n) = \sum_{i=0}^n |y_i|$ e passando al limite in n troviamo proprio $\|y\|_1$). Inoltre Φ è surgettiva infatti $(e_k)_k \in \mathbb{N} \subseteq c_0$ genera un sottospazio denso. □

B.2.1 ℓ_1, c_0 e ℓ_∞

Definizione B.10 (Finita additività)**.**
Una funzione $\mu : \mathscr{P}(S) \to \mathbb{K}$ è **finitamente additiva** se per ogni $A, B \subseteq S$ disgiunti, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Osservazione B.11*.*
Domanda: c_0 è un duale? Cioè, esiste X Banach tale che X^* è linearmente omeomorfo a c_0?

NO! Perché c_0 non è complementato in ℓ_∞ (difficile da mostrare). Questo basta per (3.12).

Lemma B.12.
Se X è un sottospazio ∞-dimensionale di ℓ_1 allora esiste una successione $(x_k) \subseteq X$ e una successione di naturali $(T_k) \subseteq \mathbb{N}$ strettamente crescente tali che

$$\begin{cases} \|x_k\|_1 = 1 \\ \|x_k\|_{1,[0,T_k]} = \sum_{i=0}^{T_k} |x_k(i)| \geq 3/4 \\ x_{k+1}|_{[0,T_k]} = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione.
Scegliamo $x_0 \in X$ di norma 1 e $T_0 \in \mathbb{N}$ che abbia la seconda proprietà. Supponiamo ora di aver definito $x_0, \cdots, x_k$ e di avere $T_0 < \cdots, T_k$, allora

$$X \cap \left\{ x \in \ell_1 \mid x|_{[0,T_k]} = 0 \right\} \neq \emptyset$$

in qunato intersezione fra un sottospazo di dimensione infinita e dei sottospazi di codimensione finita, infatti quell'intersezione si può scrivere come

$$\bigcap_{0 \leq i \leq T_k} \{x \in X \mid x(i) = 0\} .$$

Prendendo un elemento x_{k+1} normalizzato in questa intersezione abbiamo esteso la successione. Per scegliere T_{k+1} basta prenderlo maggiore di T_k e tale che

$$\|x_{k+1}\|_{1,[0,T_{k+1}]} \geq 3/4.$$

□

Proposizione B.13.
Se $Y \subseteq \ell_1$ è un sottospazio chiuso di dimensione infinita allora Y contiene una copia di ℓ_1.

Se guardi a lungo dentro ℓ_1, ℓ_1 guarda dentro di te.

Dimostrazione.
Sia X sottospazio chiuso di dimensione infinita di ℓ_1 e siano $(x_k) \subseteq \ell_1$ e $(T_k) \subseteq \mathbb{N}$ come nel lemma (B.12) Definiamo l'operatore lineare

$$L : \begin{array}{ccc} \ell_1 & \longrightarrow & X \\ \lambda & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \end{array}$$

L è ben definita perché la serie è assolutamente convergente rispetto a $\|\cdot\|_1$

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \, \|x_k\|_1 \leq \|\lambda\|_1 .$$

Notiamo anche che X chiuso e quindi L continuo di norma $\|L\| \leq 1$.
Sia $I_k = [0, T_k]$ e notiamo che

$$\begin{aligned} \|L\lambda\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \right\| &\geq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k|_{I_k} \right\| - \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \lambda_k x_k|_{I_k^c} \right\| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \left\| x_k|_{I_k} \right\|_1 - \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \left\| x_k|_{I_k^c} \right\| \geq \\ &\geq \frac{3}{4} \|\lambda\|_1 - \frac{1}{4} \|\lambda\|_1 = \frac{1}{2} \|\lambda\|_1 \end{aligned}$$

dunque $L : \ell_1 \to X$ è fortemente iniettivo e quindi è un isomorfismo con l'immagine in quanto questa è chiusa. $\square$

Esercizio B.14.
c_0 non è un duale.

Dimostrazione.
Segue dalla proposizione (B.13): se esistesse X tale che $X^* \cong c_0$ allora $\iota_X : X \hookrightarrow X^{**} \cong \ell_1$ e quindi per la proposizione X contiene un sottospazio Y isomorfo a ℓ_1, ma allora da $Y \subseteq X$ segue

$$\ell_\infty \cong \ell_1^* \cong Y^* \overset{(5.40)}{\cong} X^* / \operatorname{Ann}(Y) \cong c_0 / \operatorname{Ann} Y$$

ma ℓ_∞ non è separabile mentre c_0 è separabile e ogni quoziente di un separabile deve essere separabile. $\square$

Proposizione B.15.
Si ha che $\ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty^*$ è una immersione isometrica NON surgettiva.

Dimostrazione.
L'iniezione è chiara. Consideriamo le funzioni che hanno limite (le costanti a meno di una infinitesima)

$$c = \left\{ x \in \ell_\infty \mid \exists \lim_{i \to \infty} x_i \right\} \cong c_0 \oplus \mathbb{R}$$

Esiste un funzionale su c dato da

$$\lambda : \begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \lim y_i \end{array}.$$

Questo è continuo perché $\|\lambda\| \leq 1$ (perché $|\lim y_i| \leq \|y\|_\infty$). Per il teorema di Hahn-Banach (3.4) si estende ad un funzionale continuo in ℓ_∞.

Consideriamo

$$ba = \{\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K} \mid \text{limitate e finitamente additive.}\} \subseteq (\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$$

e la mappa

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \ell_\infty^* & \longrightarrow & ba \\ y & \longmapsto & A \mapsto y(\chi_A) \end{array}$$

Notiamo che Ψ è surgettiva: se $\mu \in ba$ e definiamo una funzione lineare su ℓ_∞ come segue

- Se $x \in \ell_\infty$ è della forma $x = \sum c_i \chi_{A_i}$, cioè $x(\mathbb{N}) \subseteq \left\{\sum_{i \in J} c_i \mid J \subseteq \{0, \cdots, n\}\right\}$ è finito, quindi
$$x = \sum_{c \in \mathbb{K}} c\chi_{\{x=0\}} \text{ è una somma finita}$$
Sia S il sottoinsieme di ℓ_∞ delle successioni di questa forma. Mostriamo che $\overline{S} = \ell_\infty$ dove la chiusura è presa rispetto a $\|\cdot\|_\infty$. Per ogni $x \in \ell_\infty$ con $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si ha che
$$x - 2^{-n} \leq x^n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \leq x$$
- Per $x \in S$ dato da $x = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ poniamo $\langle \mu, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$. Chiaramente abbiamo linearità e la buona definizione segue dal fatto che questa espressione coincide con $\sum_{c \in \mathbb{K}} c\mu(\{x = 0\})$ per finita additività, ma questa forma è univocamente determinata da x.
- Vale che $|\langle \mu, x \rangle| \leq \|x\|_\infty \left(\sum_{c \in \mathbb{K}} |\mu(\{x = c\})|\right)$ infatti per ogni c, se $\mu(\{x = c\}) \neq 0$ allora $|c| \leq \|x\|_\infty$ per definizione.
- Per ogni μ esiste C tale che per ogni $x \in S$ si ha
$$|\langle \mu, x \rangle| \leq C \|x\|_\infty$$
(VERIFICARE!)
- Quindi μ si estende alla chiusura di S, che è tutto ℓ_∞.

Notiamo che $ba = \ell_\infty^* = \ell_1^{**} = c_0^{***}$, quindi $\ell_1 \hookrightarrow \ell_1^{**} = ba$ è complementato per il lemma (3.12). $\square$

Proposizione B.16 (Convergenza forte e debole coincidono su ℓ_1)**.**
La convergenza debole e la convergenza in norma per ℓ_1 sono la stessa cosa.

Dimostrazione.
Poiché la topologia debole è meno fine della topologia forte basta mostrare che convergenza debole implica convergenza in $\|\cdot\|_1$.

Sia $f_n \to f$ in w-ℓ_1, cioè per ogni funzionale ϕ lineare continuo su ℓ_1 si ha che $\langle \phi, f_n \rangle \to \langle \phi, f \rangle$. Dunque, ricordando (B.8) che $\ell_\infty = \ell_1^*$, per ogni $\varphi \in \ell_\infty$ si ha

$$\sum_i \varphi(i) f_n(i) \to \sum_i \varphi(i) f(i).$$

Notiamo che, portando f al primo membro possiamo supporre senza perdita di generalità $f = 0$. Per la proprietà di Uhrison (1.49) basta provare che esiste una sottosuccessione di f_n che converge a 0 infatti $f_n \to 0$ se e solo se per ogni sottosuccessione f_{n_k} esiste una sotto-sottosuccessione $f_{h_{k_j}} \to 0$.

Nel caso particolare di successioni f_n a supporto disgiunto la tesi è facile: Se siamo in questo caso scegliamo $\varphi \in \ell_\infty$ data da

$$\varphi = \sum \overline{\operatorname{sgn} f_i} \text{ dove } (\operatorname{sgn} f_i)(x) = \operatorname{sgn}(f_i(x)) = \begin{cases} f_i(x)/\left|f_i(x)\right| & f_i(x) \neq 0 \\ 0 & f_i(x) = 0 \end{cases}$$

in modo tale che $\langle \varphi, f_n \rangle = \left\langle \overline{\operatorname{sgn}(f_n)}, f_n \right\rangle = \|f_n\|_1$ e stesso per f, quindi in questo caso è chiaro che convergenza debole implica convergenza in $\|\cdot\|_1$.

Assumiamo dunque che $f_n \to 0$ debolmente (e quindi puntualmente guardando i funzionali che estraggono la n-esima entrata). Basta provare che esiste una successione $(g_j)_{j \geq 0} \subseteq \ell_1$ e una sottosuccessione f_{n_j} tale che $\left\|f_{n_j} - g_j\right\|_1 \to 0$ e g_j hanno supporto disgiunto.

Costruiamo le g_j per induzione. Notiamo che

- per ogni f_n si ha che $\left\|f_n \chi_{\mathbb{N} \setminus [0,T]}\right\|_1 \to 0$ per $T \to \infty$
- per ogni T si ha $\left\|f_n \chi_{[0,T]}\right\|_1 \to 0$ per $n \to \infty$

quindi per costruire le g_j basta alternare questi fatti prendendo opportuni limiti (credo?). □

Osservazione B.17.
Questo è un esempio dove due topologie diverse hanno "le stesse successioni convergenti".

Fatto B.18.
Esiste $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ di cardinalità del continuo tale che per ogni $A, B \in \mathscr{A}$ dove $A \neq B$ allora $|A \cap B| < \aleph_0$ e $|A| = |B| = \aleph_0$.

Dimostrazione.
Consideriamo $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{N}$, tanto per le cardinalità non cambia nulla. Per ogni irrazionale λ consideriamo $A_\lambda = \{\lfloor n\lambda \rfloor / n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$. Poniamo $\mathscr{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$. Ogni A_λ è inifinito ma se $\lambda \neq \mu$ allora $A_\lambda \cap A_\mu$ è finito perché ogni successione che converge a λ cade definitivamente in un intorno di λ e similmente per μ, allora scelgo intorni disgiunti. □

Lemma B.19.
Ogni sottospazio Y di ℓ_∞ ha duale w^*-separabile.

Dimostrazione (modo diretto).
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $e_k : Y \to \mathbb{K}$ la valutazione $f \mapsto f(k)$. Allora[3] $\operatorname{Span}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}(\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ è w^*-denso in Y^* e quindi Y^* è w^*-separabile: stiamo usando il criterio $\operatorname{Span} S \subseteq Y^*$ è w^*-denso se e solo se $S_\perp = (0)$ (proposizione (5.36) e corollario (5.37)) e

$$(\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}})_\perp = \{y \in Y \mid \langle e_k, y \rangle = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\} = \{0\} \subseteq \ell_\infty.$$

□

[3] $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dimostrazione (concettuale).
Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato separabile, X^{**} è sempre w^*-separabile, quindi consideriamo $X = c_0$, $X^{**} = \ell_\infty$. Questo è vero perché se $S \subseteq X$ è numerabile e $\|\cdot\|$-denso allora la sua chiusura debole* in $X \subseteq X^{**}$ contiene almeno X (su X la $\sigma(X^{**}, X)$ induce $\sigma(X, X^*)$ che è meno fine della topologia forte e quindi $\overline{X}^{\sigma(X^{**},X^*)} = X^{**}$ per Goldstine (5.39)).

Se poi $Y \subseteq \ell_\infty$ sappiamo che Y^* è un quoziente di ℓ^* (dato da $\ell^*_\infty / Y^\perp$) in quanto la mappa $\pi : \ell^*_\infty \to \ell^*_\infty / Y^\perp$ è w^*-continua e surgettiva[4] (e quindi l'immagine di $S \subseteq \ell^*_\infty$ densa resta densa). Se $\overline{S} = \ell^*_\infty$ allora

$$\pi(\ell^*_\infty) = \pi(\overline{S}) \subseteq \overline{\pi(S)}$$

□

Proposizione B.20.
c_0 non è complementato in ℓ_∞.

Dimostrazione.
Supponiamo che esista Y sottospazio chiuso di ℓ_∞ tale che $\ell_\infty = Y \oplus c_0$, allora Y sarebbe omeomorfo al quoziente ℓ_∞ / c_0, ma ogni sottospazio di ℓ_∞ è w^*-separabile per il lemma, ma ℓ_∞ / c_0 non lo è:

Fissiamo $\mathscr{A}$ come nel fatto (B.18). Per ogni $A \in \mathscr{A}$ notiamo che $\chi_A \in \ell_\infty$. Sia ξ_A l'immagine di questa caratteristica in ℓ_∞ / c_0. Sia $g \in (\ell_\infty / c_0)^*$, affermo che

$$S = \{A \in \mathscr{A} \mid \langle g, \xi_A \rangle \neq 0\} \text{ è al più numerabile.}$$

Basta mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $S_\varepsilon = \{A \in \mathscr{A} \mid |\langle g, \xi_A \rangle| \geq \varepsilon\}$ è finito (infatti $S = \bigcup_{\mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0} S_\varepsilon$).

Siano $A_1, \cdots, A_m \in S_\varepsilon$ e definiamo $\xi = \sum_{i=1}^m \overline{\operatorname{sgn}(\langle g, \xi_{A_i} \rangle)} \xi_{A_i}$. Per linearità

$$\xi = \pi \left(\sum_{i=1}^m \overline{\operatorname{sgn}(\langle g, \xi_{A_i} \rangle) \chi_{A_i}} \right),$$

dunque

$$\langle g, \xi \rangle = \sum_{i=1}^m \overline{\operatorname{sgn}(\langle g, \xi_{A_i} \rangle)} \langle g, \xi_{A_i} \rangle = \sum_{i=1}^m |\langle g, \xi_{A_i} \rangle| \geq m\varepsilon.$$

Inoltre $\|\xi\|_{\ell_\infty / c_0} = 1$ perché qualunque combinazione lineare φ delle χ_{A_i} ha valore superiore a 1 solo sulle intersezioni delle A_i e questo è un insieme finito, quindi $\varphi = 1 + h$ per $h \in c_0$, quindi $[\varphi] = 1$.

Mettendo tutto insieme $\|g\| \geq \|\langle g, \xi \rangle\| \geq m\varepsilon$ e quindi $m \leq \|g\| / \varepsilon$, dunque

$$|S_\varepsilon| \leq \frac{\|g\|}{\varepsilon}.$$

Se $G \subseteq (\ell_\infty / c_0)^*$ è un sottoinsieme numerabile allora è numerabile anche

$$\bigcup_{g \in G} \{A \in \mathscr{A} \mid \langle g, \xi_A \rangle \neq 0\}$$

perché unione numerabile di insiemi al più numerabili. Poiché $\mathscr{A}$ non è numerabile esiste $\widetilde{A} \in \mathscr{A}$ tale che

$$\langle g, \xi_{\widetilde{A}} \rangle = 0 \quad \forall g \in G$$

[4] se $j : Y \to X$ è l'inclusione, $j^* = \pi : X^* \to Y^*$ è surgettiva e w^*-continua (2.46).

e $\xi_{\widetilde{A}} \neq 0$ perché ha norma pari a 1, cioè

$$\xi_{\widetilde{A}} \in G_\perp \neq (0)$$

ma ricordiamo che $\overline{\mathrm{Span}(G)}^{w^*} = (G_\perp)^\perp$ e che $\mathrm{Span}(G)$ è w^*-denso se e solo se $G_\perp = (0)$ (5.33). $\square$