Istituzioni di Analisi Matematica

Corso del prof. Pietro Majer

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

Capitolo 1

Norme e Seminorme

Il corso si concentra sulla relazione che si crea tra la struttura lineare e la struttura topologia degli spazi normati.

Per $\mathbb{K}$ intendiamo un campo tra $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1.1 Norme e seminorme

Definizione 1.1 (Seminorma)**.**
Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, una **seminorma** è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ tale che

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Disuguaglianza triangolare*)
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ se $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$ (*Positivamente omogenea*)

2'. $\|\lambda x\| = \|x\|$ se $|\lambda| = 1$ (*Isotropa*)

Se inoltre vale $\|x\| = 0 \iff x = 0$ allora $\|\cdot\|$ è detta **norma**.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio (semi)normato**.

Osservazione 1.2.
Su uno spazio (semi)normato possiamo definire una (semi)distanza indotta ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Diamo alcuni esempi di spazi normati e seminormati:

Esempio 1.3. 1. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i|$

2. Per $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \left\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < \infty\right\}$ con $\|x\|_p = \sum_{i \geq 0} |x_i|^p$
3. $\ell_\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sup |x_i| < \infty\right\}$ con $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$
4. $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{K},\ \text{misurabile},\ \|f\|_p < \infty\right\}$ con

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \\ \operatorname*{supess}_{x \in X} |f(x)| = \inf_{\substack{N \subseteq X, \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è uno spazio seminormato ma non normato.

5. Spazi di Hilbert.

Definizione 1.4 (Funzioni continue, limitate e lineari)**.**
Siano E, F spazi normati e S un insieme, definiamo i seguenti spazi normati:

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(S,E) &= \{f : S \to E,\ \text{limitate}\}\,, & \|f\|_{\infty,S} &= \sup_{s\in S}\|f(s)\|_E \\
\mathscr{B}C(S,E) &= \{f : S \to E,\ \text{continue e limitate}\}\,, & \|f\|_{\infty,S} &= \sup_{s\in S}\|f(s)\|_E \\
L(E,F) &= \{T : E \to F \text{ lineare},\ \|T\| < \infty\}\,, & \|T\| &= \sup_{x\in B_E(0,1)}\|T(x)\|_F
\end{aligned}$$

Definizione 1.5 (Spazio duale)**.**
Sia V uno spazio vettoriale. Denotiamo con V' **il duale algebrico**, cioè l'insieme delle mappe lineari $V \to \mathbb{K}$.

Definiamo lo **spazio duale** a V come $V^* = L(V, \mathbb{K})$, cioè come il sottoinsieme di V' dato dalle mappe continue. La norma su V^* è quindi data da

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| \overset{\text{Lineare}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f(x)|\,.$$

Proposizione 1.6 (Per funzionale limitato equivale continuo)**.**
Per un funzionale lineare in V^*, essere limitato è equivalente ad essere continuo.

Dimostrazione.
Se $\|f\| = M \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| = \left\| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right\| \|x-y\| \le \|f\|\,\|x-y\| = M\,\|x-y\|\,,$$

cioè f è M-lipschitz, e quindi continua.

Sia ora f lineare e continua. Per definizione di continuità in 0 esiste $\delta > 0$ tale che $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \le 1$ per ogni $x \in B_V(0,\delta)$. Segue che

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} f\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \frac{\|x\|}{\delta},$$

cioè $\|f\|_{V^*} \le 1/\delta$ e quindi f limitato. □

Osservazione 1.7.
Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio seminormato e $N = \ker\|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$ allora $\|\cdot\|$ passa al quoziente e lo rende uno spazio normato.

Esempio 1.8.
Considerando lo spazio seminormato $(\mathcal{L}^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$, la costruzione sopra corrisponde a definire lo spazio normato $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$, infatti $\ker\|\cdot\|_p$ sono le funzioni con supporto in un insieme trascurabile.

Osservazione 1.9.
$L(E,F) \hookrightarrow \mathscr{B}(B_E(0,1), F)$ mandando $T \mapsto T|_{B_E(0,1)}$. Infatti per definizione questa mappa è isometrica[1]. Questo identifica il primo spazio con un chiuso del secondo.

[1] $\|T\| = \left\|T|_{B_E(0,1)}\right\|_{\infty, B_E(0,1)}$

1.1.1 Teoremini filosofici

Teorema 1.10 (Banach Mazur)**.**
Sia $(E, \|\cdot\|)$ *normato,* $f : E \to E$ *isometria*[2]*. Allora* f *è affine.*

Dimostrazione. (ESERCIZIO).
TRACCIA:

- Basta provare che $\forall a, b \in E$ vale
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
(conservando questa conserva i razionali 2-adici e quindi per continuità ogni combinazione convessa)

- Fissati $a, b \in E$, definiamo la *deficienza affine* di f (rispetto ad a e b)
$$def(f) = \left\| \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right\} \right\|$$
La tesi è $def(f) = 0$.

- Notiamo che
$$def(f) \leq \left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{f(a)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(b)}{2} \right\| = \frac{1}{2}\left(\|a+b\| + \|a\| + \|b\|\right)$$

- Consideriamo l'applicazione affine che scambia $f(a)$ e $f(b)$ data da
$$\rho(y) = f(a) + f(b) - y$$
Poniamo $\widetilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$.

- Mostrare $def(\widetilde{f}) = 2def(f)$.

- Se $def(f) \neq 0$, iterando otteniamo che esiste g tale che $def(g)$ è arbitrariamente grande (raddoppio $def(f)$ tante volte), ma questo è assurdo perché abbiamo il limite trovato prima che non dipende dalla funzione.

$\square$

Filosoficamente questo vuol dire che la struttura metrica in un qualche modo determina la struttura vettoriale.

Teorema 1.11 (Inclusione isometrica / Fréchet-Kuratowski)**.**
Sia (M, d) *spazio metrico. Allora esso si immerge isometricamente in uno spazio normato*[3]*. In particolare si immerge in* $(\mathscr{B}C(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *via l'assegnazione seguente:*

Fissiamo un punto base $x_0 \in M$*.*[4]

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathscr{B}C(M, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0) \end{array}$$

[2] con questo termine intendiamo che la mappa, oltre a rispettare le distanze, è anche bigettiva. Se non vale bigettività diremo "inclusione isometrica"
[3] addirittura di Banach.
[4] saremmo tentati da $x \mapsto d(\cdot, x)$, ma la funzione in arrivo non è limitata e quindi non esiste una norma ben definita

Dimostrazione.
ESERCIZIO □

Filosoficamente questo vuol dire che studiando mappe tra spazi metrici, possiamo pensare al codomino come spazi normati.
Se consideriamo l'immersione di uno spazio metrico in un Banach, possiamo "incicciottirlo" e trovare uno spazio metrico "vicino" che è localmente contraibile. Queste idee a volte possono aiutare.

1.2 Completezza

Definizione 1.12 (Successione di Cauchy)**.**
Una successione (x_n) è **di Cauchy** o **fondamentale** se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p,\ q > n$ si ha $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Fatto 1.13 (Proprietà delle successioni di Cauchy)**.**

1. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*
2. *Se (x_n) è di Cauchy e $\widetilde{x} \in X$ è un punto ad essa aderente allora $\widetilde{x}$ è il limite.*
3. *Se (x_n) come sopra ha una sottosuccessione convergente, la successione converge allo stesso limite.*
4. *Ogni successione di Cauchy*[5] *(x_n) ha una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che*
$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}.$$

Definizione 1.14 (Spazio completo)**.**
Uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge.
Se $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato è completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$ allora si dice **di Banach**.

Osservazione 1.15.
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie $\sum x_k$ definita a partire da una successione tale che $\|x_k\| < 2^{-k}$ è convergente.
Equivalentemente X di Banach se ogni serie $\sum x_k$ assolutamente convergente[6] è convergente.

Dimostrazione.
Ogni successione si può scrivere come serie, infatti $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ per $x_i = y_i - y_{i-1}$.
Il resto segue pensando sulle definizioni. □

Osservazione 1.16.
Sia $Y \subseteq X$ con (X, d) metrico.

- Se X è completo e Y è chiuso allora Y è completo.
- Se Y è completo allora è anche chiuso.

Proposizione 1.17 (Completamento)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico, allora

[5] questa proprietà è comoda perché implica $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < 2^{-k+1}$ per ogni $p > k$
[6] cioè $\sum \|x_k\|$ convergente

1. *esiste una inclusione isometrica densa di X in uno spazio metrico completo*

$$j : (X, d) \hookrightarrow (\widetilde{X}, \widetilde{d})$$

2. *il completamento è universale, cioè se $j' : (X, d) \to (\widetilde{X}', \widetilde{d}')$ è un'altra mappa come sopra allora esiste un'unica isometria $\phi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & \widetilde{X} \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & \widetilde{X}' \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.
Consideriamo un paio di costruzioni

$\boxed{\textit{Costruzione } 1}$ Consideriamo

$$C_X = \left\{ \xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \xi \text{ di Cauchy} \right\}$$

con una semidistanza[7]

$$d(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(\xi_n, \eta_n).$$

Questo limite esiste perché la successione di queste distanze è di Cauchy in $\mathbb{R}$, che è completo. Notiamo che

$$d(\xi, \eta) = 0 \Longleftrightarrow d(\xi_n, \eta_n) = o(1).$$

Notiamo che X ha una inclusione isometrica in (C_X, d) data associando a x la successione costante al valore x.
Consideriamo

$$\widetilde{X} = {}^{C_X}\!/_{\mathscr{R}}, \qquad \xi \mathscr{R} \eta \Longleftrightarrow d(\xi, \eta) = 0.$$

L'inclusione isometrica di prima definisce $X \hookrightarrow \widetilde{X}$, ma stavolta $\widetilde{X}$ è uno spazio metrico per costruzione.

ESERCIZIO: VERIFICA PROPRIETÀ DI NORMA E DENSITÀ

$\boxed{\textit{Costruzione } 2}$ Definiamo $\widetilde{X}$ come la chiusura in $(\mathscr{B}C(X), \|\cdot\|_\infty)$ dell'immagine di X tramite l'inclusione di Fréchet Kuratowski (1.11).

$\boxed{\textit{Costruzione } 3}$ (Solo per X spazio normato, ma per il teorema di inclusione isometrica (1.11) questo è sufficiente) Vedremo che esiste una inclusione isometrica di X nel suo biduale ($x \mapsto val_x$) e che il biduale stesso è completo, quindi un completamento di X è fornito dalla chiusura di $val.(X) \subseteq X^{**}$

□

Proposizione 1.18 (Estensione per densità di uniformemente continue)**.**
Siano X e Y spazi metrici, Y completo, $D \subseteq X$ denso e $f : D \to Y$ uniformemente continua, allora esiste un'unica estensione continua $\widetilde{f}$ di f a tutto X, inoltre $\widetilde{f}$ è essa stessa uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[7]VERIFICARE CHE LO È

Definizione 1.19 (Categorie di spazi metrici)**.**
Sia Met la categoria degli spazi metrici con mappe date da applicazioni uniformemente continue e CMet la sottocategoria piena dove gli oggetti sono spazi metrici completi

Osservazione 1.20.
L'operazione di completamento è un funtore[8] $\widetilde{\cdot}$: Met $\to$ CMet. Questo funtore è aggiunto al funtore dimenticante / di inclusione j : CMet $\to$ Met, infatti

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CMet}}(\widetilde{X}, Y) = UC(\widetilde{X}, Y) \overset{(1.18)}{\cong} UC(X, j(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Met}}(X, j(Y)).$$

Esercizio 1.21.
Verificare l'aggiunzione.

[8]preserva composizione per l'unicità della mappa tra estensioni

Capitolo 2

Spazi vettoriali topologici

Definizione 2.1 (Spazio vettoriale topologico)**.**
Uno **spazio vettoriale topologico** è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ munito di una topologia che rende continue le mappe

$$+ : X \times X \to X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \to X.$$

Esempio 2.2.
Esempi di SVT sono

- Ogni spazio normato
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.
- Se X è uno spazio topologico qualunque considero $C(X, \mathbb{R})$ con topologia di convergenza uniforme su compatti.

Esercizio 2.3.
La topologia della convergenza uniforme su compatti su $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non è indotta da una norma.

Dimostrazione.
TRACCIA

- Su uno spazio normato, se U e V sono intorni di 0 allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda U \supseteq V$.
- Mostrare che la topologia della convergenza uniforme su compatti non ha questa proprietà.

□

Esercizio 2.4.
Ogni SVT che è T_0 è anche[1] T_3 e[2] $T_{3\frac{1}{2}}$

Esercizio 2.5 (Spazi non T_0 non sono troppi interessanti)**.**
Ogni SVT X si decompone in somma diretta topologica $X = Y \oplus \overline{\{0\}}$ con Y qualunque addendo algebrico di $\overline{\{0\}}$. Segue che $Y \cong X/\overline{\{0\}}$, Y risulta essere T_0 e $\overline{\{0\}}$ ha la topologia indiscreta.

[1] In questo corso con T_3 intendiamo T_3 e Hausdorff
[2] $T_{3\frac{1}{2}}$ è T_3 più esiste una funzione continua che vale 1 sul punto e 0 sul chiuso che sto separando

2.1 Intorni dell'origine in SVT

Definizione 2.6 (Filtro)**.**
Un **filtro** $\mathcal{F}$ su un insieme X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X tale che

- per ogni $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$
- Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subseteq F'$ allora $F' \in \mathcal{F}$
- Se $F, F' \in \mathcal{F}$ allora $F \cap F' \in \mathcal{F}$

Definizione 2.7 (Sottoinsieme bilanciato)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $A \subseteq X$. A è **bilanciato** se per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$ si ha $a \in A \implies \lambda a \in A$, cioè

$$B_{\mathbb{K}}(0,1) \cdot A \subseteq A.$$

Osservazione 2.8.
Se V è bilanciato allora $0 \in V$ perché $0 \in B_{\mathbb{K}}(0,1)$.

Definizione 2.9 (Sottoinsieme assorbente)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $B \subseteq X$. B è **assorbente** se per ogni $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $t \geq n_x$ si ha $x \in tB$.

Osservazione 2.10.
Poiché in uno SVT le traslazioni $X \to X$ con $x \mapsto x + x_0$ sono omeomorfismi, per descrivere la topologia basta descrivere il filtro degli intorni di 0.

Come notazione sia $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$ l'insieme degli intorni di $0 \in X$.

Proposizione 2.11 (Proprietà intorni di 0)**.**
$\mathcal{U}$ ha le seguenti proprietà

1. *$\mathcal{U}$ è un filtro*
2. *Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$*
3. *Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$ e V bilanciato*
4. *Ogni elemento di $\mathcal{U}$ è assorbente*

Dimostrazione.
Dimostriamo le varie proprietà

1. La proprietà 1. è vera per ogni insieme definito come "gli intorni di x" per x fissato in spazio topologico X.
2. Segue dalla continuità di $+$ in $(0,0) \in X \times X$. Basta definire V in modo tale che $V \times V \subseteq +^{-1}(U)$.
3. Segue dalla continuità di $\cdot$ in $(0,0)$. Se U intorno di 0 in X, siano $\varepsilon > 0$ e $V \in \mathcal{U}$ tali che $B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon) \times V \subseteq \cdot^{-1}(U)$. Allora $B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon) \cdot V$ è bilanciato e contenuto in U per costruzione. Questo insieme è anche un intorno perché si può scrivere come

$$\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$$

e poiché V è un intorno di 0, ogni λV è un intorno di 0, quindi anche questa unione.

4. Segue dalla continuità della mappa $\mathbb{R}_+ \to X$ che per fissato $x_0 \in X$ assegna $s \mapsto sx_0$. Infatti per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $0 \leq s \leq \varepsilon$, $sx_0 \in U$ e riscrivendo questo in termini di $t = 1/s$ abbiamo $x_0 \in tU$ per ogni $t \geq 1/\varepsilon$. Come n_{x_0} basta scegliere $\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$.

□

Esercizio 2.12.
Sia X spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{U}$ una famiglia si sottoinsiemi di X tali che valgano le quattro proprietà della proposizione precedente (2.11). Allora esiste un'unica topologia su X che rende X uno SVT e tale che $\mathcal{U}$ è il filtro degli intorni di 0. In questa topologia $\mathcal{U}$ è un sistema fondamentale di intorni per 0.

Dimostrazione.
L'idea è che definiamo $A \subseteq X$ aperto se e solo se per ogni $a \in A$, $A - a \in \mathcal{U}$ (sto traducendo "aperto $\iff$ intorno di ogni suo punto"). Si può mostrare che questa scelta definisce una topologia che rende X uno SVT. □

Esercizio 2.13.
Definire analogamente una topologia di SVT su X tramite degli assiomi che si basano una una base di intorni di 0 (al posto di tutti gli intorni). Per esempio la famiglia degli intorni bilanciati di 0.

Osservazione 2.14.
Se uno SVT è T_0 allora è automaticamente T_1 e T_2, basta sfruttare proprietà di simmetria.

Osservazione 2.15.
Ogni SVT è uno spazio topologico regolare, cioè ogni punto ha una base di intorni chiusi. Se X è anche T_0 allora X è T_3.

Dimostrazione.
Sia C un chiuso di X e $x \in X$ con $x \notin C$. Sia $U \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + U \cap C = \emptyset$, che esiste perché C è chiuso. Sia $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $V - V \subseteq U$, allora[3] $(x + V) \cap (C + V) = \emptyset$ dove $C + V$ è un intorno di c per ogni $c \in C$ per definizione. □

Osservazione 2.16.
Se K è compatto, C chiuso con $K \cap C = \emptyset$ allora esiste V tale che $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$.

Dimostrazione.
Per ogni $x \in K$ sia $V_x \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + (V_x + V_x - V_x)$ è disgiunto da C. Abbiamo dunque un ricoprimento $\{x + V_x\}_{x \in K}$ di K, che è compatto, quindi estraggo un sottoricoprimento finito $\{x_i + V_{x_i}\}$ e definisco V come l'intersezione di questi. Allora

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset,$$

infatti se $x \in K + V$ allora $x = k + v$ con $k \in K$ e $v \in V$ ma $k \in x_i + V_{x_i}$ per qualche i, quindi $x = x_i + v_i + v$, e avendo supposto che $x_i + (V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i}) \cap C = \emptyset$ abbiamo che $x = x_i + v_i + v \notin C + V$. □

[3] Un insieme come $C + V$ è detto intorno uniforme di C

2.2 SVT localmente convessi

Definizione 2.17 (SVT localmente convesso)**.**
Uno **spazio vettoriale topologico localmente convesso** (**SVTLC**) è uno SVT tale che 0 ha una base di intorni convessi.

Esempio 2.18.
Diamo alcuni esempi

- Ogni spazio normato
- $C(X)$ con X spazio topologico con la topologia della convergenza uniforme sui compatti
- $C^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e topologia della convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate in ogni ordine

Esercizio 2.19.
Sia $\mathscr{M} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{misurabili}\}$, allora esiste una metrica su $\mathscr{M}$ che lo rende uno SVT e tale che $f_n \to f$ se e solo se $f_n \to f$ in misura, cioè per ogni

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} |\{|f_n| > \varepsilon\}| = 0$$

Mostrare che l'unico intorno convesso di 0 è $\mathscr{M}$ stesso, da cui segue $\mathscr{M}^* = \{0\}$.

Osservazione 2.20.
Per ciò che sappiamo sugli intorni di 0 in uno SVT, se X è SVTLC allora esiste una base $\mathcal{B}$ data dagli intorni di 0 assorbenti, bilanciati e convessi.

Definizione 2.21 (Disco)**.**
Un insieme B è detto **disco** se è assorbente, bilanciato e convesso.

Proposizione 2.22.
Sia X un $\mathbb{R}$-SV e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

- *Per ogni $B \in \mathcal{B}$, B è Assorbente, Bilanciato e Convesso*
- *Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$*

allora $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists r > 0,\ \exists B \in \mathcal{B} \mid rB \subseteq U\}$ è un filtro di insiemi che induce una topologia che rende X uno SVT come da esercizio (2.12). La topologia indotta è anche localmente convessa.

Dimostrazione.
Mostriamo le quattro proprietà:

- Chiaramente $\mathcal{U}$ è un filtro.
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ è assorbente perché lo sono gli elementi di $\mathcal{B}$
- Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$, basta scegliere $V = \frac{1}{2}B$ con $B \subseteq U$ convesso in quanto se B è convesso $B + B = 2B$
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene un bilanciato perché contiene una versione scalata di un elemento di $\mathcal{B}$.

□

Osservazione 2.23.
Se $\mathcal{B}$ è una famiglia di dischi allora definendo $\widetilde{\mathcal{B}} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$ si ha che $\widetilde{\mathcal{B}}$ rispetta gli assiomi della proposizione (2.22) e quindi induce una topologia su X che lo rende uno SVT. Questa è la meno fine tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$. In particolare $\mathcal{U}_X$ ha una base data da $\left\{rB \mid B \in \widetilde{\mathcal{B}}\right\}$.

2.2.1 Funzionali di Minkowski

Definizione 2.24 (Funzionale di Minkowski)**.**
Sia X un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $C \subseteq X$ convesso, $0 \in C$. Il **funzionale di Minkowski** associato a C è dato da:

$$p_C : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \inf\{t \geq 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

dove $\inf \emptyset = \infty$ in questo formalismo.

Osservazione 2.25.
Se $B(0,1) \subseteq C \subseteq \overline{B(0,1)}$ per X normato allora $p_C(x) = \|x\|$.

Proposizione 2.26 (Proprietà funzionali di Minkowski)**.**
Valgono le seguenti proprietà

- *C è assorbente se e solo se $p_C(x) < \infty$ per ogni $x \in X$.*
- *Si ha $\{p_C < 1\} \subseteq C \, \{p_C \leq 1\}$*

Dimostrazione.
Mostriamo le varie proprietà

- Evidente dalla definizione di assorbente.
- Se $p_C(x) < 1$ allora esiste $0 \leq t \leq 1$ tale che $x \in tC$, cioè $x = tc$. Poiché $(1-t)0 = 0$ si ha $x = tc + (1-t)0$ e per convessità questo è un elemento di C, cioè $x \in C$.

  Se $x \in C$ allora $1 \in \{t \geq 0 \mid x \in tC\}$, quindi $p_C(x) \leq 1$.

□

Osservazione 2.27 (Famiglia di seminorme induce SVTLC).
Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X, possiamo definire

$$\mathcal{B} = \{B_p(0,r) \mid p \in \mathcal{P},\ r \in \mathbb{R}_+\}, \quad B_p(0,r) = \{y \in X \mid p(x-y) < r\}$$

Si può mostrare che $\mathcal{B}$ è un insieme di dischi e quindi induce una struttura di SVTLC su X.

Osservazione 2.28.
Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X e definiamo

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{\max(p_1, \cdots, p_n) \mid p_i \in \mathcal{P}\}$$

allora $\mathcal{U} = \left\{B_p(0,r) \mid p \in \widetilde{\mathcal{P}}, r > 0\right\}$ è una base di intorni di 0 che induce la topologia dell'osservazione precedente.

Osservazione 2.29 (Ogni SVTLC è indotto da seminorme).
Poiché se B è assorbente, bilanciato e convesso, esso produce una seminorma p_B data dal funzionale di Minkowski tale che $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$, ogni topologia di X come SVTLC si può ottenere a partire da famiglie di seminorme.

Proposizione 2.30.
La topologia di SVTLC indotta da $\mathcal{P}$ insieme di seminorme è T_0 se e solo se $\mathcal{P}$ è separante, cioè per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.

Dimostrazione.
Se $p(x) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$ allora $x \in B(0, r)$ per ogni $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$ e per ogni $r > 0$, quindi $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}_X$, ovvero

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_X} U = \overline{\{0\}}.$$

□

2.3 Continuità di operatori lineari in SVT

Proposizione 2.31 (Continuità mappe lineari)**.**
Sia $T : X \to Y$ lineare tra SVT. Valgono le seguenti affermazioni

1. *T è continua se e solo se è continua in 0*
2. *T è continua se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $T(V) \subseteq U$*
3. *Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente, T è continua se e solo se*
$$\forall q \in \mathcal{Q},\ \exists p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P},\ \exists M \geq 0 \quad \text{tali che}$$
$$\forall x \in X,\ q(Tx) \leq M \max\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\}$$
4. *Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ rispettivamente con $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ stabili per* max *allora T è continua se e solo se $\forall q \in \mathcal{Q}$ esistono $p \in \mathcal{P}$ e $M \geq 0$ tali che*
$$q(Tx) \leq Mp(x)$$

Dimostrazione.
Dimostriamo le affermazioni

1. Basta traslare dato che traslare è un omeomorfismo.
2. Ovvio.
3. La condizione significa che la palla di centro 0 e raggio 1 rispettivamente alla seminorma $\max(p_1, \cdots, p_n)$ di X ha immagine tramite T contenuta nella palla di raggio M rispetto a q, concludendo per il punto 2. a meno di omotetia.
4. Caso sopra.

□

Proposizione 2.32 (Caratterizzazione funzionali continui)**.**
Sia $f \in X'_{alg} \setminus \{0\}$ con X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. *f è continua*
2. *$\ker f$ è chiuso*
3. *$\ker f$ non è denso*
4. *f non è surgettiva su un aperto non vuoto*

5. *f è limitata su un intorno di* 0

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni

$\boxed{1. \implies 2.}$ Ovvio perché $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{K}$.

$\boxed{2. \implies 3.}$ Se $\ker f$ è denso allora $\overline{\ker f} = X$ e quindi ha codimensione 0, ma $\ker f$ ha codimensione 1 in quanto $f \neq 0$, quindi $\ker f \neq \overline{\ker f}$, cioè non è chiuso.

$\boxed{3. \implies 4.}$ Se $\ker f$ non è denso esiste un aperto non vuoto A disgiunto da $\ker f$, cioè $0 \notin f(A)$ e in particolare f non è surgettiva su A.

$\boxed{4. \implies 5.}$ Se f non è surgettiva su aperto non vuoto allora non lo è su un intorno bilanciato U di 0 e quindi $f(U)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}$ diverso da $\mathbb{K}$ in quanto $f \neq 0$, dunque $f(U)$ è un disco e in particolare è limitato.

$\boxed{5. \implies 1.}$ Se $|fx| \leq M$ per ogni $x \in U \in \mathcal{U}_X$ allora per omogeneità

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{M} U \in \mathcal{U}_X$$

per un qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi f è continua in 0. Questo conclude perché

$$f(x) = f(x_0) + f(x - x_0).$$

□

2.4 Topologie deboli

Proposizione 2.33 (Topologia iniziale nel caso SVT)**.**
Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{F} : \{T_i : X \to Y_i\}$ dove ogni Y_i è SVT e T_i è lineare, allora la topologia iniziale su X indotta[4] *da $\mathcal{F}$ rende X uno SVT.*

Dimostrazione.
Voglio verificare che $+$ e $\cdot$ sono mappe continue per la topologia iniziale.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "+"] \arrow[d, "T_i \times T_i"'] & X \arrow[d, "T_i"] \\ Y_i \times Y_i \arrow[r, "+_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \times X \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "id_{\mathbb{K}} \times T_i"'] & X \arrow[d, "T_i"] \\ \mathbb{K} \times Y_i \arrow[r, "\cdot_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale della topologia iniziale (A.2), vogliamo verificare che $T_i \circ + = +_i \circ (T_i \times T_i)$ è continua per ogni i e similmente per $T_i \circ \cdot$. Questo è vero perché la topologia iniziale è rende T_i continua per ogni i. □

Osservazione 2.34.
Se ogni Y_i inoltre è SVTLC allora anche X lo è.

[4] vedi (A.1)

Definizione 2.35 (Topologie deboli)**.**
Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathcal{F} \subseteq X'$ (duale algebrico). La topologia iniziale indotta da $\mathcal{F}$ viene detta la **topologia debole di** $\mathcal{F}$ e si indica $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Osservazione 2.36.
$\sigma(X, \mathcal{F}) = \sigma(X, \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}))$ quindi senza perdita di generalità possiamo sempre supporre $\mathcal{F}$ sottospazio vettoriale di X'.

Osservazione 2.37.
La famiglia di seminorme associata a $\mathcal{F}$ (quella che induce la stessa topologia di $SVTLC$) è data da

$$\mathcal{P} = \{|f| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

Osservazione 2.38.
La topologia debole $\sigma(X, \mathcal{F})$ è T_0 (e quindi Hausdorff perché SVT) se e solo se la famiglia $\mathcal{F}$ è separante ($\forall x \in X \setminus \{0\}$, $\exists f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq 0$).

Lemma 2.39.
Siano $f_0, \cdots, f_n \in X'_{alg}$ per X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, allora sono equivalenti

1. $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$
2. $|f_0| \leq M \max_{i \in \{1, \cdots, n\}} |f_i|$ *per qualche* $M \geq 0$
3. $\ker f_0 \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$

Dimostrazione.
Diamo le tre implicazioni

$\boxed{1. \implies 2.}$ Da 1. segue $|f_0| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |f_i| \leq M \max |f_i|$ per $M = \sum |\lambda_i|$.

$\boxed{2. \implies 3.}$ Se $x \in \bigcap \ker f_i$, cioè $\langle f_i, x \rangle = 0$ per ogni i, allora $\langle f_0, x \rangle \leq M0 = 0$, cioè $f_0(x) = 0$ e abbiamo l'inclusione voluta.

$\boxed{3. \implies 1.}$ Sia $F : X \to \mathbb{K}^n$ data da $F = (f_1, \cdots, f_n)$, allora

$$\ker F = \bigcap \ker f_i \subseteq \ker f_0$$

quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^n \arrow[ur, dashed, "L"'] & \end{tikzcd}$$

dove $L(x_1, \cdots, x_n) = \sum \lambda_i x_i$ per dei λ_i (in quanto è una forma lineare). Ma allora $f_0 = L \circ F = \sum \lambda_i f_i$ come voluto.

□

Proposizione 2.40 (Duale per topologia debole)**.**
Dato X $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ sottospazio di X'_{alg} allora

$$(X, \sigma(X, \mathcal{F}))^* = \mathcal{F}$$

Dimostrazione.
Sia $f_0 \in (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$, allora per la proposizione (2.31) esistono $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$ e $M \geq 0$ tali che per ogni $x \in X$

$$|f_0(x)| \leq M \max_i |f_i(x)| \,.$$

Dunque per il lemma (2.39) f_0 si scrive come combinazione lineare delle f_i e quindi in particolare $f_0 \in \mathcal{F}$.

L'altra inclusione è ovvia per definizione di topologia debole. □

Osservazione 2.41.
Se X ha dimensione infinita, $\sigma(X, \mathcal{F})$ non è mai localmente limitata. In particolare ogni intorno di 0 contiene uno spazio vettoriale di codimensione finita.

Dimostrazione.
Se U intorno di 0 per $\sigma(X, \mathcal{F})$ allora esistono $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$ tali che[5]

$$U \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \{|f_i| < 1\} \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$$

e l'intersezione di questi nuclei ha codimensione al massimo n. □

2.4.1 Caso degli spazi normati

Definizione 2.42 (Topologia debole)**.**
Se X è normato, la **topologia debole** su X è la topologia debole associata a X^*, cioè $\sigma(X, X^*)$.

Proposizione 2.43.
La topologia debole è localmente convessa e Hausdorff.

Dimostrazione.
Per Hahn-Banach (4.2), il duale X^* separa i punti □

Definizione 2.44 (Topologia debole*)**.**
Su X^* possiamo considerare la topologia debole associata alle valutazioni $X \subseteq X^{**}$, cioè scegliendo

$$\mathcal{F} = \{val_x \in (X^*)' \mid x \in X\} \,.$$

Questa è la **topologia debole*** su X^* e la indichiamo $\sigma(X^*, X)$.

Osservazione 2.45.
La topologia debole* rende X^* uno SVTLC T_0 (e quindi Hausdorff), infatti se $f \in X^* \setminus \{0\}$ allora esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq 0$.

Osservazione 2.46.
In generale $\sigma(X^*, X)$ è meno fine di $\sigma(X^*, X^{**})$. Abbiamo uguaglianza solo quando $X = X^{**}$ in quanto se $X \neq X^{**}$ allora dalla proposizione (2.40) ricaviamo

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X \neq X^{**} = (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))^*$$

e quindi in partenza $\sigma(X^*, X^{**}) \neq \sigma(X^*, X)$

[5] vedi lemma (2.39)

Osservazione 2.47.
Poiché $(X, \|\cdot\|) \hookrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$ isometricamente allora $(X, \sigma(X, X^*))$ ha la topologia indotta come sottospazio da[6] $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

Dimostrazione.
Questo deriva dalla transitività della topologia iniziale (A.3) dove la prima famiglia è la mappa $X \hookrightarrow X^{**}$ e l'unica altra famiglia sono gli elementi di X^* che vanno verso $\mathbb{K}$. $\square$

2.5 Teorema di Riesz

Teorema 2.48 (Riesz)**.**
Per X SVT T_0 su $\mathbb{K}$ sono equivalenti

1. *X ha dimensione finita*
2. *$X \cong \mathbb{K}^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$*
3. *X è localmente compatto*

Dimostrazione.
Diamo le implicazioni

$\boxed{1. \implies 2.}$ Sia X SVT T_0 di dimensione n e sia $x_1, \cdots, x_n$ una sua base di Hamel. Allora

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & X \\ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array}$$

è lineare, bigettiva e continua.

Dimostriamo che è aperta: L'insieme $\partial B(0,1) \subseteq \mathbb{K}^n$ visto con la norma euclidea è compatto, quindi $\varphi(\partial B(0,1))$ è compatto, e quindi chiuso perché X è Hausdorff. Per bigettività $0 \notin \varphi(\partial B(0,1))$, quindi esiste un intorno V di 0 in X disgiunto da $\varphi(\partial B(0,1))$. Senza perdita di generalità V bilanciato, allora $\varphi^{-1}(V)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}^n$ disgiunto da $\partial B(0,1)$, dunque $\varphi^{-1}(V) \subseteq B(0,1)$ (se avesse un punto di modulo maggiore a 1 allora in quanto bilanciato conterrebbe tutti i punti tra esso e 0, intersecando il bordo).

Questo mostra che $B(0,1)$ è un intorno di 0 e quindi φ è aperta (per traslazione e omotetia $\varphi(B(\lambda, r))$ è intorno di $\varphi(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^n$ e $r > 0$ e concludo notando che aperti di $\mathbb{K}^n$ sono dati da unioni di palle).

$\boxed{2. \implies 3.}$ $\mathbb{K}^n$ è localmente compatto perché conosciamo la topologia euclidea, quindi anche X lo è.

$\boxed{3. \implies 1.}$ Sia X SVT localmente compatto e T_0. Mostriamo che X è I-numerabile:

Sia V intorno compatto di 0. Mostriamo che $\left\{\frac{1}{n}V\right\}$ è una base di intorni di 0. Sia U un intorno (senza perdita di generalità U bilanciato). Poiché V è compatto e[7] $V \subseteq \bigcup_{n \geq 1} nU = X$ possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$V \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} n_i U \overset{U \text{ bilanciato}}{=} \left(\max_{1 \leq i \leq k} n_i\right) U$$

[6]nota che X^* lo si può pensare come immerso in $X^{***} = (X^{**})^*$, quindi stiamo considerando la topologia debole* su $(X^*)^*$
[7]U assorbente

infatti $\dfrac{n_i}{\max n_i} U \subseteq U$. Questo mostra che $\left\{\frac{1}{n}V\right\}$ è una base numerabile di intorni di $0 \in X$.

Notiamo che V si può coprire con un numero finito di traslati di $\frac{1}{2}V$ in quanto $V \subseteq V + \frac{1}{2}V$ e applico compattezza al variare di $v + \frac{1}{2}V$ per $v \in V$. Sia allora F tale che $V \subseteq \bigcup_{v \in F} v + \frac{1}{2}V$ con F finito e poniamo $Y = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}} F$. Notiamo che Y ha dimensione finita.

Procedendo per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $V \subseteq Y + 2^{-n}V$, ma $\{2^{-n}V\}_{n \geq 0}$ è una base di intorni, quindi

$$\overline{Y} = \bigcap_{n \geq 0} Y + 2^{-n}V \supseteq V$$

e dato che V è un intorno assorbente, $X = \bigcup_{n \geq 0} nV \subseteq \overline{Y}$, cioè Y è denso in X.

Poiché Y ha dimensione finita, per l'implicazione precendente $Y \cong \mathbb{K}^n$, in particolare Y è completo. Se $x \in X = \overline{Y}$, poiché X è I-numerabile, si ha che esiste $y_k \to x$ in X con $y_k \in Y$ con (y_k) di Cauchy in X e quindi anche in Y, che però è completo, quindi $y_k \to y$ per $y \in Y$, ma X è Hausdorff, quindi $y = x$.

$\square$

Osservazione 2.49.
Se non avessimo supposto T_0 potremmo considerare $X/\overline{\{0\}}$ e troveremmo $X \cong \mathbb{K}^n \oplus \overline{\{0\}}$.

Capitolo 3

Limitatezza e Banach-Steinhaus

3.1 Limitatezza

Definizione 3.1 (Insieme limitato).
Un sottoinsieme S di uno SVT X con $\mathcal{U}$ intorni di 0 è **limitato** se è assorbito da ogni elemento di $\mathcal{U}$, cioè[1] per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nU \supseteq S$.

Osservazione 3.2.
Valgono le seguenti proprietà

1. Se S è limitato allora anche $\overline{S}$ lo è, basta considerare intorni chiusi.
2. Se S e S' sono limitati, $S \cup S'$ lo è.
3. Ogni compatto è limitato, basta scegliere un intorno limitato di x per ogni $x \in K$ e poi estrarre un sottoricoprimento finito. Un tale intorno esiste scalando intorni di 0 bilanciati.
4. Ogni $T : X \to Y$ lineare e continua tra SVT è limitata, cioè per ogni $S \subseteq X$ limitato, $T(S)$ è limitato. In generale non vale il viceversa ma vale se X e Y sono normati.

Proposizione 3.3 (Limitatezza in SVTLC).
Se $(X, \mathcal{P})$ è SVTLC allora $S \subseteq X$ è limitato se e solo se per ogni seminorma $p \in \mathcal{P}$, p è limitata su S.

Dimostrazione.
p limitata su S significa che

$$S \subseteq B_p(0, R_p) = \frac{R_p}{\varepsilon} B_p(0, \varepsilon)$$

e le palle $\{B_p(0,\varepsilon)\}_{p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0}$ sono una prebase di intorni di $0 \in X$. □

Corollario 3.4.
Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora S è limitato se e solo se $\exists R > 0$ tale che $S \subseteq B(0, R)$.

[1] questa condizione è equivalente a chiedere $tU \supseteq S$ per ogni t con $|t| \geq n$ o a chiedere che l'assorbimento valga per elementi di una pre-base di intorni di 0 al posto di tutti gli elementi di $\mathcal{U}$.

Esercizio 3.5.
Se X è I-numerabile e $T : XtoY$ lineare tale che per ogni $x_k \to 0$ in X esiste x_{k_j} tale che $T(x_{k_j})$ limitata allora T è continua.

Proposizione 3.6 (Caratterizzazione sequenziale della limitatezza)**.**
Se X SVT e $S \subseteq X$, S è limitato se e solo se per ogni (s_k) successione in S e per ogni (α_k) successione in $\mathbb{K}$ infinitesima, si ha $\alpha_k s_k \to 0$.

Dimostrazione.
Sia S limitato, (s_k) successione in S e (α_k) successione infinitesima in $\mathbb{K}$. Sia U intorno bilanciato di 0 e sia n tale che $S \subseteq nU$. Notiamo che definitivamente $|\alpha_k| < \frac{1}{n}$, quindi

$$\alpha_k s_k \in \alpha_k S \subseteq \alpha_k nU \overset{\text{k grande}}{\subseteq} U.$$

Supponiamo ora S non limitato, allora esiste $U \in \mathcal{U}_X$ che non assorbe S, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $s_n \in S \setminus nU$. Dunque (s_n) è una successione in S tale che $\frac{1}{n}s_n \notin U$ per costruzione, dunque $\frac{1}{n}s_n$ non tende a $0 \in X$ nonostante $\frac{1}{n}$ sia infinitesima. $\square$

Proposizione 3.7.
Le successioni di Cauchy sono limitate.

Dimostrazione.
Sia (x_k) una successione di Cauchy in X, cioè per ogni $U \in \mathcal{U}_X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p, q \geq n$ si ha $x_p - x_q \in U$.

Fissiamo $U \in \mathcal{U}_X$ e sia V bilanciato tale che $V + V \subseteq U$. Per la definizione di successione di Cauchy esiste n_0 tale che $x_k - x_{n_0} \in V$ per ogni $k \geq n_0$, cioè $x_k \in x_{n_0} + V$.

Inoltre, esiste m tale che $x_k \in mV$ per ogni $k \leq n_0$ dato che un insieme finito è limitato. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $x_k \in mV + V$, infatti se $k \leq n_0$ allora abbiamo mV, se $k > n_0$ allora $x_{n_0} \in mV$ e $x_k \in x_{n_0} + V \subseteq mV + V$.

Poiché V è bilanciato, $mV + V \subseteq mV + mV = m(V + V) \subseteq mU$. $\square$

3.2 Spazi di Baire e II-categoria

Teorema 3.8 (Baire)**.**
Se $\{A_k\}_{k\geq 0}$ è una famiglia numerabile di aperti densi di uno spazio metrico completo allora $\bigcap A_k$ è denso.

Dimostrazione.
Per induzione si definisce una successione di palle chiuse di X dove B_0 è arbitraria e

$$B_k = \overline{B(x_k, r_k)} \text{ tali che } B_{k+1} \subseteq B_k \cap A_k \text{ e } r_k = o(1)$$

che possiamo fare perché A_k è un aperto denso.

Allora la successione dei centri è una successione di Cauchy, infatti se $p, q \geq n$ si ha $x_p, x_q \in B_n$ e quindi $d(x_p, x_q) \leq 2r_n$. Dunque $x_n \to x^*$ in X per completezza. Inoltre, poiché $x_k \in B_n$ definitivamente, $x^* = \lim x_k \in B_n$ per ogni n (dato che B_n è chiuso). In particolare $x^* \in B_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni n e quindi $x^* \in \bigcap A_n$. Per costruzione $x^* \in B_0$, quindi per ogni palla B_0 abbiamo mostrato che $B_0 \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$, cioè $\bigcap A_n$ è denso. $\square$

Esercizio 3.9.
La stessa conclusione vale se X è localmente compatto al posto di metrico completo.

Definizione 3.10 (Spazio di Baire)**.**
Uno spazio topologico è **di Baire** se ogni intersezione numerabile di aperti densi è densa.

Osservazione 3.11.
Ogni aperto non vuoto di X di Baire è ancora di Baire. Basta verificare che ogni aperto denso di A è della forma $A \cap U$ con U aperto denso di X.

Definizione 3.12 (Sottoinsieme di I- e II-categoria)**.**
Un sottoinsieme S di X è di **I-categoria (di Baire) in** X se è unione numerabile di insiemi $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $int(\overline{E_i}) = \emptyset$.

Inoltre S è di **II-categoria (di Baire) in** X se non è di I-categoria.

Osservazione 3.13.
Se X è di Baire e $S \subseteq X$ è di I-categoria allora $X \setminus S$ è di II-categoria in quanto X stesso è di II-categoria (se $X = \bigcup E_i$ con E_i chiusi a parte interna vuota allora $\emptyset = \bigcap E_i^c$ con E_i^c aperti densi, ma questo è assurdo perché X di Baire).

3.3 Teorema di Banach-Steinhaus

Definizione 3.14 (Famiglia equicontinua)**.**
Una famiglia Γ di operatori lineari continui fra SVT X e Y è **equicontinua** se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che per ogni $T \in \Gamma$, $T(V) \subseteq U$.

Osservazione 3.15.
Possiamo riformulare la condizione nei seguenti modi: per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che

$$\forall T \in \Gamma,\ V \subseteq T^{-1}(U) \iff V \subseteq \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(U) \doteqdot \Gamma^{-1}(U).$$

Equivalentemente la condizione predica che per ogni $V \in \mathcal{U}_Y$ si abbia $\Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$.

Osservazione 3.16.
Se $T : X \to Y$ fra spazi normati, la norma degli operatori

$$\|T\| = \|T\|_{\infty, B(0,1)} = \text{migliore costante di Lipschitz per } T.$$

Esempio 3.17.
Se X e Y sono normati, Γ è equicontinua se e solo se Γ è limitato in $L(X,Y)$ rispetto alla norma degli operatori.

Teorema 3.18 (Banach-Steinhaus / Uniforme limitatezza)**.**
Siano X, Y SVT, $S \subseteq X$ di seconda categoria e $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ con Γ puntualmente limitata su $S \subseteq X$, cioè per ogni $s \in S$, $\Gamma(s) = \bigcup_{T \in \Gamma} T(s)$ è limitato in Y.

Allora Γ è equicontinua.

Dimostrazione.
Sia $U \in \mathcal{U}_Y$ e consideriamo $V \in \mathcal{U}_Y$ chiuso tale che $V - V \subseteq U$. Per ipotesi, per ogni $x \in S$ si ha che $\Gamma(x)$ è limitato in Y, quindi viene assorbito da V, cioè esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $T \in \Gamma$ si ha $T(x) \in n_x V$, cioè tale che

$$x \in \bigcap_{T \in \Gamma} n_x T^{-1}(V) = n_x \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(V) = n_x \Gamma^{-1}(V).$$

Dunque $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\Gamma^{-1}(V)$. Notiamo che poiché V è chiuso, $T^{-1}(V)$ è chiuso e quindi anche $\Gamma^{-1}(V)$ lo è perché intersezione di chiusi. Poiché S è di seconda categoria anche l'unione delle versioni riscalate di $\Gamma^{-1}(V)$ lo è, dunque questo insieme non è unione numerabile di chiusi con parte interna vuota, quindi almeno uno tra gli $n\Gamma^{-1}(V)$ ha parte interna non vuota, quindi anche $\Gamma^{-1}(V)$ ha parte interna non vuota scalando per $\frac{1}{n}$.

Quindi $\Gamma^{-1}(V)$ è intorno di qualche suo punto, dunque[2] $\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$ è un intorno di 0.

Ricordando che $V - V \subseteq U$ si ha

$$T^{-1}(U \supseteq T^{-1}(V - V) = T^{-1}(V) - T^{-1}(V)) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$$

quindi passando all'intersezione su $T \in \Gamma$ si ha

$$\Gamma^{-1}(U) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X,$$

cioè abbiamo mostrato che per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ si ha $\Gamma^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$, che è equivalente all'equicontinuità di Γ. □

Corollario 3.19 (Sottoinsiemi limitati di operatori)**.**
Se X e Y sono Banach e $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ è puntualmente limitata in X (o volendo anche un sottoinseme di X di II-categoria) allora Γ è un insieme limitato in $L(X,Y)$.

Dimostrazione.
Diretta applicazione di Banach-Stenhaus (3.18) notando che spazi di Banach sono in particolare SVT e che equicontinuità per la norma su $L(X,Y)$ significa limitatezza. ************** □

Esercizio 3.20.
Siano X, Y SVT. Trovare la topologia meno fine τ di SVT su $L(X,Y)$ per la quale

$$\Gamma \text{ puntualmente limitato in } L(X,Y) \iff \Gamma \text{ limitato nella topologia } \tau.$$

Corollario 3.21.
Siano X e Y Banach e sia $(T_n) \subseteq L(X,Y)$ puntualmente convergente. Allora il limite T è ancora lineare, continuo e con norma

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

Dimostrazione.
Per il corollario precedente (3.19) si ha che (T_n) sono limitati in $\|\cdot\|$ e il limite puntuale è lineare in quanto

$$T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \to \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Questo mostra che T è limitato e lineare, quindi $T \in L(X,Y)$.

Inoltre per ogni $x \in X$ si ha

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \left(\sup_n \|T_n\|\right) \|x\|,$$

quindi $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|$. Ragionando analogamente per una sottosuccessione di (T_n) che in norma converge a $\liminf_n \|T_n\|$ ricaviamo

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

□

[2] se $a_0 \in int(A)$ allora $A - a_0 \subseteq A - A$ è un intorno di 0.

Osservazione 3.22.
In generale NON vale $T_n \to T$ in $\|\cdot\|$.

Proposizione 3.23 (Bilineare separatamente continua è continua)**.**
Sia $b : X \times Y \to Z$ bilineare e separatamente continua, cioè per ogni $x \in X, y \in Y$ si ha che $b(x, \cdot) : Y \to Z$ e $b(\cdot, y) : X \to Z$ sono lineari e continue. Allora b è continua, cioè

$$\sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \|b(x, y)\| < \infty.$$

Dimostrazione.
Consideriamo la famiglia

$$\Gamma = \{b(x, \cdot) : Y \to Z\}_{x\in X,\ \|x\|\leq 1} \subseteq L(Y, Z).$$

Per ipotesi Γ è puntualmente limitata in Y, infatti per ogni $y \in Y$

$$\sup_{b(x,\cdot)\in\Gamma} \|b(x, \cdot)\|_{L(Y,Z)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|b(x, y)\|_Z = \|b(\cdot, y)\|_{L(X,Z)} \|y\| < \infty$$

Allora Γ è limitata in $\|\cdot\|_{L(Y,Z)}$, cioè per ogni $x \in X$ tale che $\|x\| \leq 1$ si ha

$$\|b(x, y)\|_Z \leq M \|y\|$$

e quindi al variare di y con $\|y\| \leq 1$ troviamo $\|b\|_{L(X\times Y,Z)} \leq M$. $\square$

Esercizio 3.24.
Esiste una isometria lineare

$$\begin{array}{ccc} L(X, L(Y, Z)) & \longrightarrow & L^2(X \times Y, Z) \\ T & \longmapsto & (x, y) \mapsto T(x)(y) \end{array}$$

dove $L^2(X \times Y, Z)$ sono le bilineari.

Proposizione 3.25 (w*-limitato vs limitato in $\|\cdot\|_{X^*}$)**.**
Sia $Y = \mathbb{K}$ e X Banach. Sia $\Gamma \subseteq X^*$, allora Γ è w*-limitato se e solo se è limitato in $\|\cdot\|_{X^*}$.

Dimostrazione.
Essere limitato nella topologia debole* significa "essere assorbito da ogni intorno w* di X^*" cioè, usando intorni di prebase, essere assorbiti da insiemi della forma

$$\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$$

per $x \in X$. Notiamo che Γ viene assorbito da $\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$ significa $\Gamma(x)$ limitato in $\mathbb{K}$. Per il corollario (3.19) si ha che Γ è limitato in $L(X, \mathbb{K}) = X^*$.

L'altra implicazione è ovvia perché la norma operatore già rende continui gli operatori e indebolire la topologia non può trasformare un insieme limitato in uno non limitato. $\square$

Osservazione 3.26.
Se $E \subseteq F$ è un sottospazio allora $\Gamma \subseteq E$ è limitato in F se e solo se è limitato in E per la topologia indotta.

Proposizione 3.27.
Sia $\Gamma \subseteq X$, allora Γ è w-limitato se e solo se è $\|\cdot\|$-limitato.

Dimostrazione.
Se Γ è $\sigma(X, X^*)$-limitato allora tramite l'immersione isometrica $X \to X^{**}$ troviamo un insieme $\sigma(X^{**}, X^*)$-limitato. A questo punto basta applicare la proposizione precedente (3.25). $\square$

3.3.1 Teorema della mappa aperta

Teorema 3.28 (Mappa aperta)**.**
Siano X, Y Banach e $T : X \to Y$ lineare continuo e tale che $T(X)$ è di II-categoria in Y (per esempio T surgettivo). Allora T è una mappa aperta.

Dimostrazione.
Sia B la palla unitaria chiusa di X. Basta mostrare che $T(B)$ è un intorno di 0 in Y (per omotetia e traslazione seguirà che T manda intorni di x in intorni di $T(x)$, cioè è aperta). Notiamo che

$$X = \bigcup_n nB \implies T(X) = \bigcup_n nT(B)$$

Per ipotesi $T(X)$ è di II-categoria in Y, quindi per qualche n si ha che $\overline{nT(B)}$ ha parte interna non vuota e quindi $\overline{T(B)}$ stesso ha parte interna non vuota. Poiché[3]

$$\overline{T(B)} - \overline{T(B)} \subseteq \overline{T(B - B)} = \overline{T(2B)} = 2\overline{T(B)}$$

si ha che $\overline{T(B)}$ è un intorno di $0 \in Y$.

Mostriamo ora che $T(B)$ stesso è un intorno di 0. Poiché la chiusura è l'intersezione degli aperti che contengono $T(B)$ si ha in particolare che

$$\overline{T(B)} = T(B) + \frac{1}{2}\overline{T(B)}.$$

Se $y_0 \in \overline{T(B)}$ allora esistono $x_0 \in B$ e $y_1 \in \frac{1}{2}\overline{T(B)}$ tali che $y_0 = T(x_0) + \frac{1}{2}y_1$.

Iterando troviamo $y_2 \in \overline{T(B)}$ tale che $y_1 = T(x_1) + \frac{1}{2}y_1$ per $x_1 \in B$. Questo definisce due successioni $(x_n) \subseteq B$ e $(y_n) \subseteq \overline{T(B)}$ tali che $y_n = T(x_n) + \frac{1}{2}y_{n+1}$, quindi

$$y_0 = T(x_0) + \frac{1}{2}T(x_1) + \cdots + 2^{-n}T(x_n) + 2^{-n-1}y_{n+1} = T\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}x_i\right) + 2^{-n-1}y_{n+1}.$$

Poiché X è completo la serie $\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}x_i$ converge as un punto $x^* \in 2B$ (perché assolutamente convergente e $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} = 2$).

Siccome T è continua, $T(B)$ è limitato e quindi $\overline{T(B)}$ è limitato, quindi

$$\left\|2^{-n-1}y_{n+1}\right\| \leq 2^{-n-1}\left\|T\right\| \to 0,$$

quindi (per continuità di T) si ha $y_0 = T(x^*)$, cioè

$$\overline{T(B)} \subseteq 2T(B),$$

in particolare $T(B)$ è un intorno di 0 per omotetia. $\square$

[3] ricorda che in generale se f è continua allora $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
In questo caso la mappa è $(x, y) \mapsto x - y$ e usiamo il fatto che T è lineare e

$$\overline{T(B) \times T(B)} = \overline{T(B)} \times \overline{T(B)}.$$

Capitolo 4

Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hanh-Banch ci permetterà di costruire funzionali lineari continui.

Funzionali sono i surrogati delle coordinate, che non ci sono in generale, e anche quando ci sono possono essere più complicate di quanto non valga la pena.

4.1 Teorema di Hahn-Banach reale

Definizione 4.1 (Funzione sublineare)**.**
Una funzione $p : X \to \mathbb{R}$ è

- **positivamente omogena** se per $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ abbiamo $p(tu) = tp(u)$,
- **subadditiva** se per ogni $u, v \in X$ vale $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$,
- **sublineare** se è subadditiva e positivamente omogenea.

Pillola filosofica: Teorema di esistenza senza buon criterio per scegliere un candidato spesso chiama l'uso di scelta.

Teorema 4.2 (Hahn-Banach)**.**
Siano X uno spazio vettoriale reale, $M \subseteq X$ sottospazio, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineare, $f : M \to \mathbb{R}$ lineare tale che $f \leq p$ su M.

Allora f si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ lineare tale che $F \leq p$.

Dimostrazione.
Vogliamo applicare il lemma di Zorn. Sia

$$\mathscr{M} = \{g \in N' \mid g \leq p,\ M \subseteq N \subseteq X\}$$

Notiamo che $\mathscr{M}$ è ordinato secondo l'inclusione dei sottografici, cioè

$$g \preceq h \iff \Gamma g \subseteq \Gamma h \iff \begin{cases} \operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h \\ g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} g \end{cases}$$

Condizione delle catene vale:

$$\text{se } \{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ catena in } \mathscr{M}$$

allora $\bigcup_\alpha \Gamma g_\alpha$ è ancora il grafico di una funzione lineare minore di p.

Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in $\mathscr{M}$. Per concludere basta mostrare che un massimale di $\mathscr{M}$ è definito su tutto X, cioè vogliamo mostrare che se $g \in \mathscr{M}$ è tale che $\operatorname{dom} g \neq X$ allora esiste $g' \in \mathscr{M}$ che estende g.

Sia dunque per assurdo $x \in X \setminus N$ dove $N = \operatorname{dom} g$. Vogliamo estendere g a $h : N \oplus \langle x \rangle \to \mathbb{R}$ con $h \leq p$. In quanto estensione

$$h(u + tx) = h(u) + th(x) = g(u) + th(x),$$

dove u generico elemento di N. Sia $\alpha = h(x)$ e cerchiamo un opportuno α in modo tale che $h \leq p$.

Chiediamo che $\forall u \in N,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$g(u + tx) \leq p(u + tx),$$

o equivalentemente per ogni $t > 0$ chiediamo

$$\begin{cases} h(u + tx) \leq p(u + tx) \\ h(v - tx) \leq p(v - tx) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} g(u/t) + \alpha \leq p(u/t + x) \\ g(v/t) - \alpha \leq p(v/t - x) \end{cases}$$

dunque vogliamo

$$-p(v/t - x) + g(v/t) \leq \alpha \leq p(u/t + x) - g(u/t)$$

cioè

$$\sup_{v \in N} -p(v - x) + g(v) = m_* \leq \alpha \leq m^* = \inf_{u \in N} p(v + x) - g(u),$$

dunque un tale α esiste solo se $m_* \leq m^*$. Questo è vero perché

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x + v - x) \leq p(u + x) + p(v - x).$$

$\square$

Osservazione 4.3.
Non serve questo teorema per spazi di dimensione finita o spazi di Hilbert, in quanto in quei casi abbiamo estensioni canoniche (se $domf = N$, considero la proiezione orgonale su N e poi applico f).

Corollario 4.4 (Hahn-Banach per spazi normati)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare allora ogni funzione continua su Y si estende ad una su X con la stessa norma.

Dimostrazione.
Se $f \in Y^*$, per la definizione di norma duale si ha

$$f(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\| \doteqdot p(x),$$

quindi f si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ lineare con $F(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$, cioè $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Poiché F estende f in realtà abbiamo uguaglianza tra le norme[1]. $\square$

[1]consideriamo la stessa successione in Y che realizza la definizione di $\|f\|_{Y^*}$

Osservazione 4.5.
Se X è di Hilbert, una estensione di $f \in Y^*$ è data dal proiettore ortogonale su[2] Y $P : X \to \overline{Y}$. A questo punto definendo $F = f \circ P$.

Corollario 4.6 (ricostruire norma tramite funzionali)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare e $x \in X$, allora la norma di x si può ricostruire dalla norma duale di X^*, in particolare[3]

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle$$

Dimostrazione.
Se $f \in X^*$ e $\|f\| \leq 1$ allora

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies \|x\| \leq \max_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle .$$

D'altra parte, per il corollario precedente (4.4) nel caso particolare di $Y = x\mathbb{R}$, il funzionale lineare continuo

$$\phi : \begin{array}{ccc} x\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\| \end{array}$$

si estende a tutto X con la stessa norma. Se $x = 0$ allora $\|\phi\| = 0$ per linearità, altrimenti $\|\phi\| = 1$ su $x\mathbb{R}$. In ogni caso $\|\phi\| \leq 1$, quindi per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|$. □

Definizione 4.7 (Operatore aggiunto)**.**
Per $T : X \to Y$ lineare continua tra spazi normati, si definisce l'**operatore aggiunto o trasposto** di T come

$$T^* : \begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Proposizione 4.8 (Norma dell'aggiunto)**.**
La norma di T^* coincide con la norma di T, in particolare T^* è continuo.

Dimostrazione.
Segue dai corollari di Hahn-Banach sopra, infatti

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L(Y^*, X^*)} = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \|T^* f\|_{X^*} &= \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1, x \in X} \langle T^* f, x \rangle = \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f, Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, Tx \rangle| \overset{(4.6)}{=} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|_{L(X,Y)} . \end{aligned}$$

□

4.1.1 Inclusione isometrica nel biduale

Proposizione 4.9 (Inclusione isometrica nel biduale)**.**
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale e consideriamo la mappa

$$i_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & val_x \end{array}$$

Essa è una inclusione isometrica.

[2] stiamo supponendo Y chiuso a meno di passare alla chiusura
[3] dove $\langle f, x \rangle = f(x)$ quando f è forma lineare, come in questo caso.

Dimostrazione.
È immediato vedere che i_X è lineare e continua[4] Però sappiamo che per ogni $x \in X$ esiste $f \in X$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\|x\| = \langle f, x \rangle$, cioè $\|val_x\| = \|x\|$, ovvero $i_X : X \to X^{**}$ è una inclusione isometrica. $\square$

Definizione 4.10 (Spazio riflessivo)**.**
Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è **riflessivo** se $i_X : X \to X^{**}$ è surgettiva, ovvero se i_X è una isometria.

Osservazione 4.11.
Esistono spazi di Banach non riflessivi ma isometrici al loro biduale. Nella definizione chiediamo che la mappa canonica i_X sia una isometria.

Esempio 4.12.
Sia $c_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x(n) = o_n(1)\right\}$. Questo è un sottospazio chiuso di

$$\ell_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty < \infty\right\}$$

Se $\widehat{\mathbb{N}}$ è la compattificazione di $\mathbb{N}$ ad un punto ($\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) allora c_0 sono le funzioni $\widehat{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ continue che valgono 0 in ∞ ristrette a $\mathbb{N}$.

Risulta che l'inclusione $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ è l'inclusione nel biduale, infatti c_0^* si può identificare con

$$\ell_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|f\|_1 = \sum |f_n| < \infty\right\}$$

identificando $f \in \ell_1$ con $\widetilde{f}(x) = \sum f_n x_n$ (che converge perché assolutamente convergente). Risulta che questa identificazione è una isometria.

Con un processo analogo identifichiamo ℓ_1^* con ℓ_∞.

$$\begin{tikzcd}
c_0 \arrow[rr, "\subseteq"] \arrow[dr, "i_{c_0}"'] & & \ell_\infty \arrow[dl, "\cong"] \\
& c_0^{**} &
\end{tikzcd}$$

Osservazione 4.13.
Se X è Hilbert allora $X \hookrightarrow X^{**}$ è surgettiva tramite l'isomorfismo di Riesz

$$x \mapsto \langle \cdot, x \rangle \mapsto \langle \cdot, \langle \cdot, x \rangle \rangle = val_x$$

Osservazione 4.14.
Se X normato, $i_X : X \to X^{**}$ ci permette di costruire un completamento considerando $\overline{i_X(X)}$ in X^{**} in quanto il biduale è completo.

4.1.2 Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach

Il funzionale p nelle ipotesi è positivamente omogeneo e subadditivo (cioè sublineare).

Osservazione 4.15.
Una funzione f è subadditiva se, detto Γ il grafico di f, $\Gamma + (x, f(x))$ sta sempre sopra Γ.

Esercizio 4.16.
Mostra le seguenti implicazioni

[4] $\langle val_x, f + \lambda g \rangle = f(x) + \alpha g(x) = \langle val_x, f \rangle + \lambda \langle val_x, g \rangle$ e $\|val_x\| \leq \|x\|$ in quanto $|\langle val_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$.

- Positivamente omogeneo e subadditivo implica convesso
- Positivamente omogeneo e convesso implica subadditivo (e quindi sublineare)
- Subadditivo, convesso e $p(0) \leq 0$ implica positivamente omogeneo

Esercizio 4.17.
Trovare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia subadditiva, convessa ma non positivamente omogenea.

Esercizio 4.18.
Nel teorema di Hahn-Banach si può prendere più in generale p convesso?

Si, ma si riconduce al caso standard trovando un nuovo funzionale p_0 che sia sublineare e tale che $f \leq p_0 \leq p$.

4.2 Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach

4.2.1 Teorema di Hahn-Banch complesso

Teorema 4.19 (Hahn-Banach complesso)**.**
Sia X un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale normato, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio vettoriale e $f \in Y^*$, allora f si estende ad un funzionale lineare su X con uguale norma.

Dimostrazione.
Sia $(X_0, \|\cdot\|)$ lo spazio normato reale ottenuto da X per restrizione degli scalari e sia $f_0 = \mathfrak{Re} f$. Notiamo che f_0 è un funzionale lineare continuo reale su Y, che quindi possiamo estendere a $\widetilde{f}_0 \in X^*$ mantenendo la norma. Definiamo

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_0(x) - i\widetilde{f}_0(ix).$$

Notiamo che $\widetilde{f}|_Y = f$, infatti

$$f(y) = \mathfrak{Re}(f(y)) + i\,\mathfrak{Im}(f(y)) = \mathfrak{Re}(f(y)) - i\,\mathfrak{Im}(if(iy)) = \mathfrak{Re}(f(y)) - i\,\mathfrak{Re}(f(iy)).$$

Si ha anche che $\widetilde{f}$ è $\mathbb{C}$-lineare e che $\left\|\widetilde{f}\right\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

(COMPLETA PER ESERCIZIO) □

4.2.2 Teoremi di separazione dei convessi

Proposizione 4.20 (Funzionali di Minkowski sono sublineari)**.**
Se C è convesso e $0 \in C$ allora p_C è sublineare.

Dimostrazione.
Dimostriamo le due proprietà:

pos.omo. Per ogni $\lambda > 0$, $x \in X$ si ha che

$$p_C(\lambda x) = \inf\{t > 0 \mid \lambda x \in tC\} = \inf\{\lambda s > 0 \mid \lambda x \in \lambda s C\} = \lambda p_C(x)$$

subadd. Per ogni $x, y \in X$ siano a e b tali che

$$a > p_C(x), \quad b > p_C(y).$$

Se uno tra $p_C(x)$ e $p_C(y)$ è infinito allora la tesi vale trivialmente. Supponiamo dunque che questo non sia il caso. Allora $x \in aC$ e $y \in bC$, cioè $x/a, y/b \in C$. Notiamo che

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$$

dunque $\frac{x+y}{a+b} \in C$ per convessità, cioè $x + y \in (a + b)C$ e quindi $p_C(x + y) \leq a + b$. Passando all'estremo inferiore per $a > p_C(x)$ e $b > p_C(y)$ troviamo

$$p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

□

Osservazione 4.21.
Se C è un disco, cioè è assorbente, bilanciato e convesso allora p_C è una seminorma.

Esercizio 4.22.
Se X SVT, $F : X \to \mathbb{K}$ lineare non continua allora per ogni aperto A non vuoti si deve avere $F(A) = \mathbb{K}$.

Lemma 4.23.
Ogni funzionale lineare non nullo su uno SVT è una mappa aperta

Dimostrazione.
Sia $F \neq 0$ lineare con $F : X \to \mathbb{K}$. Vogliamo mostrare che F manda intorni di $x \in X$ in intorni di $F(x) \in \mathbb{K}$. Poiché X è SVT, basta mostrare che $F(U)$ è intorno di $0 \in \mathbb{K}$ per ogni U intorno di $0 \in \mathbb{K}$. In realtà basta prendere una base di intorni di 0, quindi consideriamo gli U bilanciati. Notiamo che $F(U)$ è un insieme bilanciato di $\mathbb{K}$, infatti se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$ allora $\lambda F(U) = F(\lambda U) \subseteq F(U)$, quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- $F(U) = \{0\}$, ma allora $F = 0$ assurdo
- $F(U)$ è un disco, dunque è intorno di 0 ok.
- $F(U) = \mathbb{K}$ ok.

□

Corollario 4.24 (Discontinuità per funzionali lineari)**.**
$F : X \to \mathbb{K}$ lineare è discontinua se e solo se è surgettiva su ogni aperto non vuoto.

Dimostrazione.
Se F non è surgettiva su un aperto non vuoto, a meno di traslazione F non è surgettiva su un intorno di 0, quindi non è surgettiva su un qualche aperto bilanciato. Quindi esiste un elemento che non è nella immagine, ma allora F non assume valori di modulo superiore a questo valore non raggiunto. □

Teorema 4.25 (Separazione di convessi)**.**
Valgono i seguenti teoremi:

- *Siano X un $\mathbb{R}$-SVT, A un suo aperto convesso non vuoto e B un convesso non vuoto disgiunto da A. Allora esistono $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A,\ b \in B$ si ha*

$$\langle F, a\rangle < \gamma \leq \langle F, b\rangle\,,$$

  cioè $A \subseteq \{F < \gamma\}$ e $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$.

- *Sia X un $\mathbb{R}$-SVTLC[5], K convesso compatto e C convesso chiuso disgiunti. Allora esistono $F \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ tali che per ogni $x \in K$ e per ogni $y \in C$ vale*

$$\langle F, x\rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y\rangle$$

  ovvero $K \subseteq \{F \leq \gamma_1\}$ e $C \subseteq \{F \geq \gamma_2\}$.

[5] La locale convessità serve, infatti esistono SVT metrizzabili che non hanno funzionali lineari continui e in tal caso la tesi non vale neanche per $K = \{x\}$ e $C = \{y\}$.

Dimostrazione.
Diamo le due dimostrazioni

- Sia $x_0 \in B - A = \{b - a \mid a \in A,\ b \in B\}$. Poiché $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \neq 0$. Sia
$$C = A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$
Dalla definizione è evidente che C è un aperto (unione di traslati di A che è aperto) e contiene 0. C è convesso perché la somma algebrica di due convessi è un convesso (quindi $A - B$ convesso e traslare un convesso lo lascia convesso). Essendo aperto in particolare è assorbente per (2.11).

  Quindi il funzionale di Minkowski associato p_C è un funzionale sublineare $X \to \mathbb{R}$ (non raggiunge $+\infty$ perché assorbente). Sia $f_0 : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da $\langle f_0, x_0 \rangle = 1$. Poiché $0 \notin A - B$, $x_0 \notin C$ e quindi[6] $p_C(x_0) \geq 1$. Applicando il teorema di Hahn-Banach (4.2) f_0 si estende a $F : X \to \mathbb{R}$ con $F \leq p_C$ in X. Per ogni $a \in A,\ b \in B$, poiché $a - b + x_0 \in C$, si ha
$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) \leq 1$$
cioè $F(a) \leq F(b)$. Ponendo $\gamma = \sup_A F$ abbiamo le disuguaglianze volute se mostriamo che $F(a) < \gamma$ per ogni $a \in A$. Per il lemma (4.23) si ha che F è una mappa aperta, quindi $F(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}$ tale che $\sup F(A) \leq \gamma$, ma allora il valore γ non è raggiunto.

  Concludiamo notando che F è continuo[7] perché è limitato superiormente sull'aperto A.

- Sia V intorno convesso di 0 tale che $(K + V) \cap C = \emptyset$, basta usare (2.16) e poi notare che in questo caso abbiamo una base di intorni convessi. Evidentemente $K + V$ è aperto e convesso[8]. Per il primo punto esiste $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in K + V$ e $y \in C$
$$\langle F, x \rangle < \gamma \leq \langle F, y \rangle .$$
Sia $\gamma_1 = \max_{x \in K} \langle F, x \rangle$, allora $\gamma_1 < \gamma$ e quindi se $x \in K$
$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma \leq \langle F, y \rangle$$
che è la tesi a meno di definire $\gamma_2 = \gamma$.

□

4.3 Parentesi esercizi

Definizione 4.26 (Misura non atomica)**.**
Uno spazio di misura $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è **non-atomico** se per ogni $A \in \mathcal{Q}$ di misura positiva contiene $B \in \mathcal{Q}$ di misura positiva strettamente minore.

Esercizio 4.27 (Sierpinski)**.**
Se $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è non-atomico allora è divisibile, cioè per ogni $A \in \mathcal{Q}$ e per ogni $\lambda \in [0, \mu(A)]$ esiste $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{Q}$, tale che $\mu(B) = \lambda$.

[6] ricorda che $\{p_C < 1\} \subseteq C$
[7] volendo anche perché limitato su intorno di 0 o anche perché non è surgettiva sull'aperto A. Vedi esercizio sopra per l'ultima.
[8] somma di convessi è convessa

Inoltre, vedendo la misura come funzione $\mu : \mathscr{Q} \to [0, \mu(X)]$, esiste una inversa destra monotona crescente per inclusione $E : [0, \mu(X)] \to \mathscr{Q}$, cioè si ha $\mu \circ E = id$ e per ogni $t \in [0, \mu(X)]$ abbiamo $\mu(E_t) = t$ e $E_t \subseteq E_{t'}$ per ogni $t \leq t'$.

Dimostrazione.
Vogliamo applicare Zorn all'insieme delle inverse destre monotone parziali, cioè

$$\Gamma = \{E : S \to \mathscr{Q} \mid S \subseteq [0, \mu(X)], E \text{ monot. cresc. per } \subseteq, \mu(E(t) = t \ \forall t \in S)\}$$

Chiaramente la condizione sulle catene funziona quindi Γ ha un elemento massimale. Mostriamo poi che il dominio del massimale è chiuso e che è denso, e quindi deve essere tutto. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) $\square$

Esercizio 4.28.
Sia $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $0 < p \leq 1$. Definiamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}, \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

e sia $q : \mathcal{L}^p \to [0, \infty)$ con $q(f) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p$.

Notiamo che $q(f + g) \leq q(f) + q(g)$, che $q(\lambda f) = |\lambda| \, q(f)$ e che $q(f) = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.. Dunque q definisce una semidistanza $d_q(f, g) = q(f - g)$, che induce una distanza sul quoziente

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) \big/ \{0\}$$

Questa distanza rende $L^p(X)$ uno SVT metrico completo omeomorfo a $L^1(X)$.

Mostrare che se $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è non-atomico e $p < 1$ allora $L^p(X)$ non ha funzionali lineari continui diversi da 0 e non ha aperti convessi diversi da $L^p(X)$.

Esercizio 4.29.
Sia $X = \mathbb{N}$ con la misura di cardinalità. In questo caso $L^p(\mathbb{N}) = \ell_p$ con la definizione di prima. Questo è uno SVT metrico completo ma la misura è puramente atomica (misura ricostruibile dai singoletti). Mostra che $(\ell_p)^* = (\ell_1)^*$.

Dimostrazione.
Nota che se $0 < p \leq q \leq \infty$ allora $\ell_p \subseteq \ell_q$ e l'inclusione è una mappa continua, quindi una mappa lineare su ℓ_q restituisce una mappa lineare su ℓ_p, quindi abbiamo $(\ell_p)^* \supseteq (\ell_1)^*$, va mostrato che non ce ne sono altri.(CONCLUDERE PER ESERCIZIO) $\square$

Capitolo 5

Costruzioni su spazi normati

Osservazione 5.1.
Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio vettoriale e $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora Y è (semi)normato con la norma indotta. La topologia indotta è quella di sottospazio

Definizione 5.2 (Prodotto di spazi (semi)normati)**.**
Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi (semi)normati, la (semi)norma prodotto è data da

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max \{\|x\|_X , \|y\|_Y\} .$$

Questa rende $X \times Y$ uno spazio (semi)normato e

$$B_{X \times Y}((0, 0), 1) = B_X(0, 1) \times B_Y(0, 1),$$

cioè la topologia indotta è la topologia prodotto.

Definizione 5.3 (Somma diretta topologica)**.**
Due sottospazi di $(X, \|\cdot\|)$ Y e Z sono in **somma diretta algebrica** se $+|_{Y \times Z} : Y \times Z \to X$ è bigettiva. Se $+|_{Y \times Z}$ è anche un omeomorfismo diciamo che X è la **somma diretta topologica** di Y e Z.

Osservazione 5.4.
X è la somma diretta topologica di Y e Z se X è isomorfo come spazio normato a $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$.

Osservazione 5.5.
La mappa $+|_{Y \times Z}$ è sempre continua, ma in generale non è un omeomorfismo.

Definizione 5.6 (Proiettore)**.**
Un endomorfismo lineare $P : X \to X$ si dice **proiettore** se è idempotente, cioè $P^2 = P$.

Osservazione 5.7.
Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta algebrica $X = \ker P \oplus \operatorname{Imm} P$. Viceversa, ad ogni decomposizione in somma diretta algebrica possiamo associare un proiettore

Osservazione 5.8.
I proiettori $P_Y : X \to Y$ e $P_Z = id - P_Y : X \to Z$ sono continui se e solo se la somma è topologica, infatti

$$(+|_{Y \times Z})^{-1} = P_Y \times P_Z.$$

Definizione 5.9 (Spazio (semi)normato quoziente)**.**
Se $(X, \|\cdot\|)$ è (semi)normato e Y è un suo sottospazio allora come spazio vettoriale

$$X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}.$$

Su essa definiamo la seguente norma: se $\xi \in X/Y$ allora[1]

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

Esercizio 5.10.
$\|\cdot\|_{X/Y}$ è una seminorma su X/Y e rende la proiezione $\pi : X \to X/Y$ una applicazione aperta e continua. Più precisamente

$$\pi(B_X(0,1)) = B_{X/Y}(0,1)$$

Dimostrazione.
Continua perché $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|$ per definizione di estremo inferiore, quindi π ha norma come operatore ≤ 1, e quindi è continua. □

Osservazione 5.11.
Notiamo che X/Y ha effettivamente la topologia quoziente indotta da π

Esercizio 5.12.
La (semi)norma quoziente è una norma se e solo se Y è chiuso (a prescindere dal fatto che $\|\cdot\|_X$ sia una norma o seminorma).

Osservazione 5.13.
Se Y e Z sono seminormati allora $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$ come spazi seminormati.

Osservazione 5.14.
Se $Y \subseteq X$ ed esiste[2] Z tale che $X = Y \oplus Z$ allora $Z \cong X/Y$.

Osservazione 5.15.
In generale X non è isomorfo a $Y \times X/Y$.

Osservazione 5.16.
Per quanto riguarda la completezza in queste costruzioni:

- Y sottospazio di X con X di Banach è un Banach se e solo se è chiuso
- $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$ è Banach se e solo se lo sono sia Y che Z
- Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato e $Y \subseteq X$ è un sottospazio chiuso allora $(X, \|\cdot\|)$ è completo se e solo se sia Y che X/Y sono completi.

Notiamo che l'ultima proprietà implica la seconda, infatti $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$

[1] pensando a ξ come un traslato di Y, la norma che stiamo definendo è la distanza di questo spazio affine dall'origine.
[2] ci sono casi in cui non esite, come $c_0 \subseteq \ell_\infty$

5.1 Costruzione di duali

Proposizione 5.17 (Duale del prodotto)**.**
Dati X e Y spazi di Banach, il duale di $X \times Y$ è isometricamente isomorfo a

$$(X^* \times Y^*, \|\cdot\|)$$

dove $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{X^*} + \|\eta\|_{Y^*}$ (che è topologicamente equivalente a $\|\cdot\|_{X^* \times Y^*}$).

$$(X^* \times Y^*, \|P_{X^*}(\cdot)\|_{X^*} + \|P_{Y^*}(\cdot)\|_{Y^*}) \cong ((X \times Y)^*, \|\cdot\|_{(X \times Y)^*}).$$

Proposizione 5.18 (Duale di sottospazi e di un quoziente)**.**
Dato Y sottospazio chiuso di X Banach abbiamo le seguenti isometrie lineari:

1. $Y^* \cong X^*/Y^\perp$
2. $(X/Y)^* \cong Y^\perp \subseteq X^*$

dove $Y^\perp = \operatorname{Ann}(Y) = \left\{ f \in X^* \mid f|_Y = 0 \right\} = \{ f \in X^* \mid Y \subseteq \ker f \}$.

Dimostrazione.
Data l'inclusione $j_Y : Y \to X$ otteniamo $j_Y^* : X^* \to Y^*$. Il nucleo di j_Y^* sono i funzionali in X^* che si restringono al funzionale nullo su Y^*, cioè gli $f \in X^*$ tali che

$$j_Y^*(f) = f \circ j_Y = f|_Y = 0$$

e quindi $\ker j_Y^* = \operatorname{Ann}(Y)$. Per il teorema di Hahn-Banach (4.2), j_Y^* è surgettiva in quanto ogni funzionale su Y si estende ad uno su X perché X Banach e Y chiuso. Per il teorema di isomorfismo esiste un'unica mappa ϕ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "j_Y^*"] \arrow[d, "\pi"'] & Y^* \\ X^*/\operatorname{Ann}(Y) \arrow[ur, dashed, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Per questioni di algebra ϕ è lineare e poiché j_Y^* è continua e π induce la topologia quoziente, ϕ è continua. Verifichiamo che è una isometria.

$$B_{X^*/\operatorname{Ann}(Y)}(0,1) = \pi(B_{X^*}(0,1))$$
$$\phi(B_{X^*/\operatorname{Ann}(Y)}(0,1)) = \phi(\pi(B_{X^*}(0,1))) = j_Y^*(B_{X^*}(0,1)) \overset{(4.2)}{=} B_{Y^*}(0,1).$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estensione data da Hahn-Banach mantiene la norma.

Data la proiezione $\pi : X \to X/Y$ otteniamo $\pi^* : (X/Y)^* \to X^*$. Sia $\varphi \in (X/Y)^*$ e $f = \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi$. Si ha che

$$\varphi(B_{X/Y}) = \varphi(\pi(B_X)) = f(B_X),$$

quindi $\|\varphi\|_{(X/Y)^*} = \|f\|_{X^*}$, cioè π^* è una immersione isometrica.

Sia $f \in X^*$, si ha che $f \in \operatorname{Ann}(Y)$ se e solo se $Y \subseteq \ker f$ che succede se e solo se f si fattorizza tramite π per proprietà universale. Quindi $f \in \operatorname{Ann}(Y)$ se e solo se $f = \varphi \circ \pi = \pi^*(\varphi)$ per qualche $\varphi : X/Y \to \mathbb{R}$, cioè se e solo se $f \in \pi^*((X/Y)^*)$. Quindi $\operatorname{Imm} \pi^* = \operatorname{Ann}(Y)$.

Restringendo il codominio all'immagine troviamo quanto voluto. □

Capitolo 6

Completezza e duali di qualche spazio

6.1 Elenco di spazi completi

Proposizione 6.1.
Sia S insieme e E Banach, allora lo spazio normato $(\mathscr{B}(S,E), \|\cdot\|_{\infty,S})$ è completo

Dimostrazione.
[PERSO, RIGUARDA POI]
tale che $\|f(s)\| = \|\sum_k f_k(s)\| \leq \sum_k \|f_k(s)\| \leq \sum \|f\|_{\infty,S}$
quindi $\|f\|_{\infty,S}$ □

Uno degli strumenti dell'analista: aggiungere e togliere, cioè

$$\pi\rho o\sigma\tau\alpha\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$$

Lemma 6.2.
Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{B}(S,E)$ con f_k continua in s_0 per ogni k e $f_k \to f$ uniformemente allora anche f è continua in s_0

Dimostrazione.
Consideriamo

$$\begin{aligned}\|f(s) - f(s_0)\| \leq &\|f(s) - f_k(s)\| + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| + \|f_k(s_0) - f(s_0)\| \leq \\ \leq &2\|f - f_k\|_{\infty,S} + \|f_k(s) - f_k(s_0)\|\end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di $f_k \to f$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_n\|_{\infty,S} \leq \varepsilon/3$.

Per la continuità in s_0 di f_n esiste un intorno U di s_0 rale che $\|f_n(s) - f_n(s_0)\| \leq \varepsilon/3$ per ogni $s \in U$. Allora per ogni $s \in U$ si ha

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 6.3.
Sia S spazio topologico, E banach, allora $\mathscr{B}C(S,E)$ è completo.

Dimostrazione.
Basta mostrare che $\mathscr{B}C(S,E)$ è chiuso in $\mathscr{B}(S,E)$. Questo segue dal fatto che la continuità in un punto $s_0 \in S$ si conserva per convergenza uniforme, che è il lemma precedente. $\square$

Esempio 6.4.
Sia $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{N}$ e E un banach, allora

$$c(E) \doteqdot \{x : \mathbb{N} \to E, \text{ convergente}\} \cong \mathscr{B}C(S,E)$$

Questo mostra che $c(E)$ è chiuso (e quindi completo) in $\ell_\infty(E) = \mathscr{B}(\mathbb{N}, E)$.

Conseguenze:

Proposizione 6.5.
Lo spazio $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ è completo

Dimostrazione.
Considerando l'inclusione isometrica

$$R : \begin{array}{ccc} L(X,Y) & \longrightarrow & \mathscr{B}(B_X(0,1),Y) \\ T & \longmapsto & T|_{B_X(0,1)} \end{array}$$

basta vedere che $R(L(X,Y))$ è chiuso.

Se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ è tale che $R(T_n) \to f$ uniformemente in $\mathscr{B}(B_X(0,1),Y)$ allora mostriamo che f è la restrizione a $B_X(0,1)$ di una qualche lineare T.

Mostriamo che le T_n convergono puntualmente per ogni $x \in X$: se $x = 0$ ok, se $x \neq 0$

$$T_n(x) = \|x\| T_n(x/\|x\|) = \|x\| R(T_n)(x/\|x\|) \to \|x\| f(x/\|x\|)$$

Sia $T : X \to Y$ definita da $T(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$

[MOSTRARE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME, ME LO SONO PERSO] $\square$

Corollario 6.6 (Duale di spazio normato è banach)**.**
Il duale di uno spazio normato è sempre banch.

Teorema 6.7 (Integrazione per serie)**.**
Sia $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è uno spazio di misura e sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X,\mathscr{Q},\mu)$ tali che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$$

Allora $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge q.o. e in norma 1.

Dimostrazione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n : X \to \mathbb{R}$ data da

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|.$$

Notiamo che (g_n) è una successione di funzioni misurabili non negative crescente. Inoltre $g_n \to \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|$ per definizione di serie.

Per convergenza monotona

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f\|_1 \leftarrow \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_1 = \inf_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu$$

cioè $\inf_X g d\mu = \sum k \in \mathbb{N} \|f\|_1 < \infty$, cioè $g \in \mathcal{L}^1$.

Inoltre $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ è una successione dominata da g:

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq g(x).$$

Quindi la serie $\sum f_k(x)$ è una serie assolutamente convergente per ogni x dove $g < \infty$. Poiché $\int g < \infty$ le eccezioni sono trascurabili, quindi quasi ovunque $\sum f_k(x)$ è assolutamente convergente.

Sia $f(x) = \sum f_k(x)$ dove la serie converge. Notiamo che

$$|f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| = g(x),$$

quindi $\|f\|_1 \leq \int g d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1$.

Applicando come prima la stima alle code

$$\|f - s_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_1 = o(1)$$

dove l'ultimo termine va a 0 perché $\sum \|f_k\|_1$ è convergente. □

Corollario 6.8 (Weil)**.**
Siano $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathscr{Q}, \mu)$ convergenti in $\|\cdot\|_1$. Allora esiste n_k successione strettamente crescente di indici tali che f_{n_k} converge quasi ovunque ed è dominata in $\mathcal{L}^1$.

Dimostrazione.
Sia f il limite in $\|\cdot\|_1$. Data questa convergenza consideriamo una sottosuccessione n_k tale che $\|f - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$. Scrivendo la successione in termini di una somma telescopica

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$$

si ha per il teorema di integrazione per serie[1] (6.7) f_{n_k} converge quasi ovunque e in Lc^1, inoltre è dominata da

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right| \geq |f_{n_k}(x)|$$

con $g(x) \in \mathcal{L}^1$. □

Proposizione 6.9 (L^1 è completo)**.**
Se $(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è uno spazio di misura, $L^1(X, \mathscr{Q}, \mu)$ è completo.

Dimostrazione.
Segue immediatamente dal teorema di integrazione per serie (6.7). □

Osservazione 6.10.
La convergenza quasi ovunque di funzioni $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ è **NON** è la convergenza rispetto a una topologia opportuna su $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$.

Ogni convergenza topologica in X insieme ha la seguente proprietà **di Urisohn**: $x_n \to x$ rispetto alla topologia se e solo se per ogni sottosuccessione x_{n_k} esiste una sotto-sottosuccessione $x_{n_{k_j}} \to x$.

[1] $\|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right\|_1 \leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_j} - f\right\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_{j-1}} - f\right\|_1 < \infty$

Dimostrazione.
Se $x_n \to x$ converge ok. Se non converge allora esiste un intorno U di x tale che $x_n \notin U$ frequentemente, quindi troviamo una sottosuccessione x_{n_k} che sta sempre fuori da U, quindi nessuna sua sotto-sottosuccessione può convergere a x. $\square$

La convergenza q.o. per successioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ non ha la proprietà di Urisohn.

Definizione 6.11 (Operatore di composizione)**.**
Se E è uno spazio di funzioni con codominio $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo l'operatore di composizione per f come $E \ni u \mapsto f \circ u$.

Lemma 6.12.
Sia u_k una successione che converge a u in $\|\cdot\|_p$. A meno di sottosuccessione $u_k \to u$ quasi ovunque e dominata in $\mathcal{L}^p$.

Dimostrazione.
Teorema di Weil (6.8) in $\mathcal{L}^p$. $\square$

Proposizione 6.13.
Lo spazio $L^p(X, \mathscr{Q}, \mu)$ per $0 \leq p < \infty$ è completo.

Dimostrazione.
L^p ed L^1 NON sono isomorfi come spazi di Banach in generale[2], ma esiste un omeomorfismo localmente Lipschitz e questo basta a mostrare la completezza: se u_k è una successione di Cauchy in L^p, se Φ è Lipschitz allora $\Phi(u_k)$ è ancora di Cauchy in L^1 e quindi converge, poi torno indietro con Φ^{-1}, che mantiene il limite per continuità.

Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \\ u & \longmapsto & |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$

Chiaramente è invertibile mandando $v \in L^1$ in $|v|^{1/p} \operatorname{sgn} v$. La mappa Φ è l'operatore di composizione con la funzione $f(t) = |t|^p \operatorname{sgn} t$. La continuità degli operatori di composizione è un fatto generale. Se $u_k \to u$ converge in $\|\cdot\|_p$ allora per il lemma a meno di sottosuccessione converge q.o. e dominata, quindi componendo con f abbiamo ancora convergenza quasi ovunque per continuità ($f(u_k) \to f(u)$ q.o.). Se $|u_k| \leq g$ in $\mathcal{L}^p$ allora $|u_k|^p \leq g^p$ in $\mathcal{L}^1$, similmente per Φ^{-1}, quindi effettivamente Φ è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che Φ è localmente lipschitz: siano $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 = \int_X |f(u(x)) - f(v(x))| \, d\mu(x)$$

ma se $t < s$ allora $|f(t) - f(s)| \leq \sup_{t \leq \xi \leq s} |f'(\xi)| \, |t - s|$ e $|f'(xi)| = p\,|xi|^{p-1} \leq p(\max\{|t|, |s|\})^p$, quindi

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 \leq & p \int_X \max\left\{|u(x)|^{p-1}, |v(x)|^{p-1}\right\} |u(x) - v(x)| \, d\mu \leq \\
\leq & p \int_X \left(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\right) |u(x) - v(x)| \, d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \\
\leq & p \left(\left(\int_X |u|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\int_X |v|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \right) \left(\int_X |u - v|^p\right)^{1/p} = \\
\overset{p-1=p/q}{=} & p(\|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1}) \, \|u - v\|_p
\end{aligned}$$

quindi Φ è Lipschitz di costante $2pR^{p-1}$ sulla palla $B_{L^p}(0, R) \subseteq L^p$ $\square$

[2] cursiosità non banale da vedere

Proposizione 6.14.
Lo spazio $L^\infty(X, \mathscr{Q}, \mu)$ *è completo*

Dimostrazione.
[NON HO VISTO, RIGUARDA I PDF] $\square$

$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{\infty,\Omega}$. Questa norma rende continua l'immaersione $C_b^1 \to (C_b^0)^{n+1}$ data da $f \mapsto (f, \partial_1 f, \cdots, \partial_n f)$

Proposizione 6.15.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto. Lo spazio*

$$C_b^k(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \textit{di classe } C^k \textit{ con derivate limitate su } \Omega \textit{ fino all'ordine } k \right\}$$

è completo.

Dimostrazione.
Il caso $k = 1$ è una conseguenza del teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $\partial_i f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ è tale che $\partial_i f_k \to g_i$ uniformemente in Ω e $f_k \to f$ puntualmente in Ω allora esiste $\partial_i f$ e vale g_i. Se poi $f_k \in C^1(\Omega)$ allora la g_i è continua perché limite uniforme di $\partial_i f_k$ continue, quindi per il teorema del differenziale totale la f è anche C^1.

Per il teorema di limite sotto il segno di derivata, l'immersione $C_b^1 \to (C_b^0)^{n+1}$ ha immagine chiusa, infatti una successione $(f_k, \partial_1 f_k, \cdots, \partial_n f_k)$ nell'immagine convergente a $(f, g_1, \cdots, g_n)$ è proprio una delle ipotesi del teorema di convergenza sotto segno di derivata, quindi $f_k \to f$ in C^1 $\square$

6.2 Duali di spazi concreti

Appendice A

Topologia

Proposizione A.1 (Topologia iniziale)**.**
Sia X un insieme e $\mathcal{F}$ una famiglia di mappe a valori in uno spazio topologici. Notazione:

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \to (Y_j, \tau_j)\}_{j \in I}\,.$$

Allora esiste la topologia meno fine su X che rende continue le mappe f_j. Una prebase di questa topologia è data da

$$\left\{ f_j^{-1}(A) \mid j \in I, A \in \tau_j \right\}.$$

In realtà basterebbe prendere una prebase per τ_j al posto di tutta la topologia.

*Questa topologia è detta **topologia iniziale della famiglia** $\mathcal{F}$ e si denota $\tau_{\mathcal{F}}$.*

Osservazione A.2 (Proprietà universale della topologia iniziale).
Data una mappa $\varphi : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_{\mathcal{F}})$ essa è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione.
Se φ è continua allora $f \circ \varphi$ è composizione di continue. Se sappiamo che $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$ allora, se A è un aperto di X per continuità di $f \circ \varphi$ abbiamo

$$\tau_Z \ni (f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$$

cioè le preimmagini tramite φ di aperti di prebase sono aperti di Z, quindi φ è continua. □

Proposizione A.3 (Transitività della topologia iniziale)**.**
Supponiamo di avere una famiglia di mappe $\mathcal{F}' = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ e per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{G}_i = \{g_{ij} : Y_i \to Z_{ij}\}_{j \in J_i}$ una famiglia di mappe. Su ogni Y_i consideriamo la topologia iniziale determinata da $\mathcal{G}_i$. Allora la topologia iniziale data da $\mathcal{F}'$ su X coincide con la topologia iniziale su X definita da $\mathcal{F} = \{g_{ij} \circ f_i \mid i \in I,\ j \in J_i\}$.

Dimostrazione.
Entrambe le topologie in esame sono generate dagli insiemi $(g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A)$ al variare di $i \in I$, $j \in J_i$ e $A \in \tau_{Z_{ij}}$, infatti

$$\text{prebase per } \mathcal{F} \to (g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A) = f_j^{-1}(g_{ij}^{-1}(A)) \leftarrow \text{prebase per } \mathcal{F}'.$$

□