

Istituzioni di Analisi Matematica
Corso del prof. Pietro Majer

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2024/25

Indice

1	Norme e Seminorme	2
1.1	Norme e seminorme	2
1.1.1	Teoremini filosofici	4
1.2	Completezza	5
2	Spazi vettoriali topologici	8
2.1	Intorni dell'origine in SVT	9
2.2	SVT localmente convessi	11
2.2.1	Funzionali di Minkowski	12
2.3	Continuità di operatori lineari in SVT	13
2.4	Topologie deboli	14
2.4.1	Caso degli spazi normati	16
2.5	Teorema di Riesz	17
3	Limitatezza e Banach-Steinhaus	19
3.1	Limitatezza	19
3.2	Spazi di Baire e II-categoria	20
3.3	Teorema di Banach-Steinhaus	21
3.3.1	Teorema della mappa aperta	24
3.4	SVT I-numerabili e paranorme	27
4	Teorema di Hahn-Banach	29
4.1	Teorema di Hahn-Banach reale	29
4.1.1	Inclusione isometrica nel biduale	31
4.1.2	Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach	32
4.2	Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach	33
4.2.1	Teorema di Hahn-Banach complesso	33
4.2.2	Teoremi di separazione dei convessi	33
4.3	Parentesi esercizi	35
5	Costruzioni su spazi normati	37
5.1	Costruzione di duali	39
6	Completezza e duali di qualche spazio	40
6.1	Elenco di spazi completi	40
6.2	Duali di spazi concreti	44
A	Topologia	45

Capitolo 1

Norme e Seminorme

Il corso si concentra sulla relazione che si crea tra la struttura lineare e la struttura topologia degli spazi normati.

Per \mathbb{K} intendiamo un campo tra \mathbb{R} o \mathbb{C} .

1.1 Norme e seminorme

Definizione 1.1 (Seminorma).

Se X è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , una **seminorma** è una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Disuguaglianza triangolare*)
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ (*Positivamente omogenea*)
- 2'. $\|\lambda x\| = \|x\|$ se $|\lambda| = 1$ (*Isotropia*)

Se inoltre vale $\|x\| = 0 \iff x = 0$ allora $\|\cdot\|$ è detta **norma**.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio (semi)normato**.

Osservazione 1.2.

Su uno spazio (semi)normato possiamo definire una (semi)distanza indotta ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Diamo alcuni esempi di spazi normati e seminormati:

Esempio 1.3. 1. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$

2. Per $1 \leq p < \infty$, $\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < \infty \right\}$ con $\|x\|_p = \left(\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{1/p}$

3. $\ell_\infty = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup |x_i| < \infty \right\}$ con $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$

4. $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ misurabile, } \|f\|_p < \infty \right\}$ con

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf_{\substack{N \subseteq X, \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

è uno spazio seminormato ma non normato.

5. Spazi di Hilbert.

Definizione 1.4 (Funzioni continue, limitate e lineari).

Siano E, F spazi normati e S un insieme, definiamo i seguenti spazi normati:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(S, E) &= \{f : S \rightarrow E, \text{ limitate}\}, & \|f\|_{\infty, S} &= \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \\ \mathcal{BC}(S, E) &= \{f : S \rightarrow E, \text{ continue e limitate}\}, & \|f\|_{\infty, S} &= \sup_{s \in S} \|f(s)\|_E \\ L(E, F) &= \{T : E \rightarrow F \text{ lineare}, \|T\| < \infty\}, & \|T\| &= \sup_{x \in B_E(0,1)} \|T(x)\|_F\end{aligned}$$

Definizione 1.5 (Spazio duale).

Sia V uno spazio vettoriale. Denotiamo con V' il **duale algebrico**, cioè l'insieme delle mappe lineari $V \rightarrow \mathbb{K}$.

Definiamo lo **spazio duale** a V come $V^* = L(V, \mathbb{K})$, cioè come il sottoinsieme di V' dato dalle mappe continue. La norma su V^* è quindi data da

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \stackrel{\text{Lineare}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Proposizione 1.6 (Per funzionale limitato equivale continuo).

Per un funzionale lineare in V^ , essere limitato è equivalente ad essere continuo.*

Dimostrazione.

Se $\|f\| = M \in \mathbb{R}_+$ allora

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \left\| f \left(\frac{x - y}{\|x - y\|} \right) \right\| \|x - y\| \leq \|f\| \|x - y\| = M \|x - y\|,$$

cioè f è M -lipschitz, e quindi continua.

Sia ora f lineare e continua. Per definizione di continuità in 0 esiste $\delta > 0$ tale che $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \leq 1$ per ogni $x \in B_V(0, \delta)$. Segue che

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} f \left(\delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\delta},$$

cioè $\|f\|_{V^*} \leq 1/\delta$ e quindi f limitato. □

Osservazione 1.7.

Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio seminormato e $N = \ker \|\cdot\| = \{x \in X \mid \|x\| = 0\}$ allora $\|\cdot\|$ passa al quoziente e lo rende uno spazio normato.

Esempio 1.8.

Considerando lo spazio seminormato $(\mathcal{L}^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$, la costruzione sopra corrisponde a definire lo spazio normato $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$, infatti $\ker \|\cdot\|_p$ sono le funzioni con supporto in un insieme trascurabile.

Osservazione 1.9.

$L(E, F) \hookrightarrow \mathcal{B}(B_E(0, 1), F)$ mandando $T \mapsto T|_{B_E(0,1)}$. Infatti per definizione questa mappa è isometrica¹. Questo identifica il primo spazio con un chiuso del secondo.

¹ $\|T\| = \left\| T|_{B_E(0,1)} \right\|_{\infty, B_E(0,1)}$

1.1.1 Teoremini filosofici

Teorema 1.10 (Banach Mazur).

Sia $(E, \|\cdot\|)$ normato, $f : E \rightarrow E$ isometria². Allora f è affine.

Dimostrazione. (ESERCIZIO).

TRACCIA:

- Basta provare che $\forall a, b \in E$ vale

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

(conservando questa conserva i razionali 2-adici e quindi per continuità ogni combinazione convessa)

- Fissati $a, b \in E$, definiamo la *deficienza affine* di f (rispetto ad a e b)

$$def(f) = \left\| \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right\} \right\|$$

La tesi è $def(f) = 0$.

- Notiamo che

$$def(f) \leq \left\| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| + \left\| \frac{f(a)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(b)}{2} \right\| = \frac{1}{2} (\|a+b\| + \|a\| + \|b\|)$$

- Consideriamo l'applicazione affine che scambia $f(a)$ e $f(b)$ data da

$$\rho(y) = f(a) + f(b) - y$$

Poniamo $\tilde{f} = f^{-1} \circ \rho \circ f$.

- Mostrare $def(\tilde{f}) = 2def(f)$.
- Se $def(f) \neq 0$, iterando otteniamo che esiste g tale che $def(g)$ è arbitrariamente grande (raddoppio $def(f)$ tante volte), ma questo è assurdo perché abbiamo il limite trovato prima che non dipende dalla funzione.

□

Filosoficamente questo vuol dire che la struttura metrica in un qualche modo determina la struttura vettoriale.

Teorema 1.11 (Inclusione isometrica / Fréchet-Kuratowski).

Sia (M, d) spazio metrico. Allora esso si immerge isometricamente in uno spazio normato³. In particolare si immerge in $(\mathcal{BC}(M, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ via l'assegnazione seguente:

Fissiamo un punto base $x_0 \in M$.⁴

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{BC}(M, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d(\cdot, x) - d(\cdot, x_0) \end{array}$$

²con questo termine intendiamo che la mappa, oltre a rispettare le distanze, è anche bigettiva. Se non vale bigettività diremo "inclusione isometrica"

³addirittura di Banach.

⁴saremmo tentati da $x \mapsto d(\cdot, x)$, ma la funzione in arrivo non è limitata e quindi non esiste una norma ben definita

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

Filosoficamente questo vuol dire che studiando mappe tra spazi metrici, possiamo pensare al codominio come spazi normati.

Se consideriamo l'immersione di uno spazio metrico in un Banach, possiamo “incicciottirlo” e trovare uno spazio metrico “vicino” che è localmente contraibile. Queste idee a volte possono aiutare.

1.2 Completezza

Definizione 1.12 (Successione di Cauchy).

Una successione (x_n) è **di Cauchy** o **fondamentale** se $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p, q > n$ si ha $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Fatto 1.13 (Proprietà delle successioni di Cauchy).

1. Ogni successione convergente è di Cauchy.
2. Se (x_n) è di Cauchy e $\tilde{x} \in X$ è un punto ad essa aderente allora \tilde{x} è il limite.
3. Se (x_n) come sopra ha una sottosuccessione convergente, la successione converge allo stesso limite.
4. Ogni successione di Cauchy⁵ (x_n) ha una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}.$$

Definizione 1.14 (Spazio completo).

Uno spazio metrico (X, d) è **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge.

Se $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato è completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$ allora si dice **di Banach**.

Osservazione 1.15.

Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie $\sum x_k$ definita a partire da una successione tale che $\|x_k\| < 2^{-k}$ è convergente.

Equivalentemente X di Banach se ogni serie $\sum x_k$ assolutamente convergente⁶ è convergente.

Dimostrazione.

Ogni successione si può scrivere come serie, infatti $y_n = \sum_{i=0}^n x_i$ per $x_i = y_i - y_{i-1}$. Il resto segue pensando sulle definizioni. □

Osservazione 1.16.

Sia $Y \subseteq X$ con (X, d) metrico.

- Se X è completo e Y è chiuso allora Y è completo.
- Se Y è completo allora è anche chiuso.

Proposizione 1.17 (Completamento).

Sia (X, d) uno spazio metrico, allora

⁵questa proprietà è comoda perché implica $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < 2^{-k+1}$ per ogni $p > k$

⁶cioè $\sum \|x_k\|$ convergente

1. esiste una inclusione isometrica densa di X in uno spazio metrico completo

$$j : (X, d) \hookrightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$$

2. il completamento è universale, cioè se $j' : (X, d) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{d}')$ è un'altra mappa come sopra allora esiste un'unica isometria $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ & \searrow j' & \downarrow \phi \\ & & \tilde{X}' \end{array}$$

Dimostrazione.

Consideriamo un paio di costruzioni

Costruzione 1 Consideriamo

$$C_X = \{\xi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \xi \text{ di Cauchy}\}$$

con una semidistanza⁷

$$d(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \eta_n).$$

Questo limite esiste perché la successione di queste distanze è di Cauchy in \mathbb{R} , che è completo. Notiamo che

$$d(\xi, \eta) = 0 \iff d(\xi_n, \eta_n) = o(1).$$

Notiamo che X ha una inclusione isometrica in (C_X, d) data associando a x la successione costante al valore x .

Consideriamo

$$\tilde{X} = C_X / \mathcal{R}, \quad \xi \mathcal{R} \eta \iff d(\xi, \eta) = 0.$$

L'inclusione isometrica di prima definisce $X \hookrightarrow \tilde{X}$, ma stavolta \tilde{X} è uno spazio metrico per costruzione.

ESERCIZIO: VERIFICA PROPRIETÀ DI NORMA E DENSITÀ

Costruzione 2 Definiamo \tilde{X} come la chiusura in $(\mathcal{BC}(X), \|\cdot\|_{\infty})$ dell'immagine di X tramite l'inclusione di Fréchet Kuratowski (1.11).

Costruzione 3 (Solo per X spazio normato, ma per il teorema di inclusione isometrica (1.11) questo è sufficiente) Vedremo che esiste una inclusione isometrica di X nel suo biduale ($x \mapsto \text{val}_x$) e che il biduale stesso è completo, quindi un completamento di X è fornito dalla chiusura di $\text{val}_*(X) \subseteq X^{**}$

□

Proposizione 1.18 (Estensione per densità di uniformemente continue).

Siano X e Y spazi metrici, Y completo, $D \subseteq X$ denso e $f : D \rightarrow Y$ uniformemente continua, allora esiste un'unica estensione continua \tilde{f} di f a tutto X , inoltre \tilde{f} è essa stessa uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{I} \cap & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

⁷VERIFICARE CHE LO È

Definizione 1.19 (Categorie di spazi metrici).

Sia Met la categoria degli spazi metrici con mappe date da applicazioni uniformemente continue e CMet la sottocategoria piena dove gli oggetti sono spazi metrici completi

Osservazione 1.20.

L'operazione di completamento è un funtore⁸ $\sim : \text{Met} \rightarrow \text{CMet}$. Questo funtore è aggiunto al funtore dimenticante / di inclusione $j : \text{CMet} \rightarrow \text{Met}$, infatti

$$\text{Hom}_{\text{CMet}}(\tilde{X}, Y) = UC(\tilde{X}, Y) \stackrel{(1.18)}{\cong} UC(X, j(Y)) = \text{Hom}_{\text{Met}}(X, j(Y)).$$

Esercizio 1.21.

Verificare l'aggiunzione.

⁸preserva composizione per l'unicità della mappa tra estensioni

Capitolo 2

Spazi vettoriali topologici

Definizione 2.1 (Spazio vettoriale topologico).

Uno **spazio vettoriale topologico** è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ munito di una topologia che rende continue le mappe

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X.$$

Esempio 2.2.

Esempi di SVT sono

- Ogni spazio normato
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.
- Se X è uno spazio topologico qualunque considero $C(X, \mathbb{R})$ con topologia di convergenza uniforme su compatti.

Esercizio 2.3.

La topologia della convergenza uniforme su compatti su $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non è indotta da una norma.

Dimostrazione.

TRACCIA

- Su uno spazio normato, se U e V sono intorni di 0 allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda U \supseteq V$.
- Mostrare che la topologia della convergenza uniforme su compatti non ha questa proprietà.

□

Esercizio 2.4.

Ogni SVT che è T_0 è anche¹ T_3 e² $T_{3\frac{1}{2}}$

Esercizio 2.5 (Spazi non T_0 non sono troppi interessanti).

Ogni SVT X si decompone in somma diretta topologica $X = Y \oplus \overline{\{0\}}$ con Y qualunque addendo algebrico di $\{0\}$. Segue che $Y \cong X/\{0\}$, Y risulta essere T_0 e $\{0\}$ ha la topologia indiscreta.

¹In questo corso con T_3 intendiamo T_3 e Hausdorff

² $T_{3\frac{1}{2}}$ è T_3 più esiste una funzione continua che vale 1 sul punto e 0 sul chiuso che sto separando

2.1 Intorni dell'origine in SVT

Definizione 2.6 (Filtro).

Un **filtro** \mathcal{F} su un insieme X è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X tale che

- per ogni $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$
- Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subseteq F'$ allora $F' \in \mathcal{F}$
- Se $F, F' \in \mathcal{F}$ allora $F \cap F' \in \mathcal{F}$

Definizione 2.7 (Sottoinsieme bilanciato).

Sia X un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $A \subseteq X$. A è **bilanciato** se per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$ si ha $a \in A \implies \lambda a \in A$, cioè

$$B_{\mathbb{K}}(0, 1) \cdot A \subseteq A.$$

Osservazione 2.8.

Se V è bilanciato allora $0 \in V$ perché $0 \in B_{\mathbb{K}}(0, 1)$.

Definizione 2.9 (Sottoinsieme assorbente).

Sia X un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $B \subseteq X$. B è **assorbente** se per ogni $x \in X$ esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $t \geq n_x$ si ha $x \in tB$.

Osservazione 2.10.

Poiché in uno SVT le traslazioni $X \rightarrow X$ con $x \mapsto x + x_0$ sono omeomorfismi, per descrivere la topologia basta descrivere il filtro degli intorni di 0.

Come notazione sia $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$ l'insieme degli intorni di $0 \in X$.

Proposizione 2.11 (Proprietà intorni di 0).

\mathcal{U} ha le seguenti proprietà

1. \mathcal{U} è un filtro
2. Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$
3. Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$ e V bilanciato
4. Ogni elemento di \mathcal{U} è assorbente

Dimostrazione.

Dimostriamo le varie proprietà

1. La proprietà 1. è vera per ogni insieme definito come “gli intorni di x ” per x fissato in spazio topologico X .
2. Segue dalla continuità di $+$ in $(0, 0) \in X \times X$. Basta definire V in modo tale che $V \times V \subseteq +^{-1}(U)$.
3. Segue dalla continuità di \cdot in $(0, 0)$. Se U intorno di 0 in X , siano $\varepsilon > 0$ e $V \in \mathcal{U}$ tali che $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \times V \subseteq \cdot^{-1}(U)$. Allora $B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon) \cdot V$ è bilanciato e contenuto in U per costruzione. Questo insieme è anche un intorno perché si può scrivere come

$$\bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$$

e poiché V è un intorno di 0, ogni λV è un intorno di 0, quindi anche questa unione.

4. Segue dalla continuità della mappa $\mathbb{R}_+ \rightarrow X$ che per fissato $x_0 \in X$ assegna $s \mapsto sx_0$. Infatti per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $0 \leq s \leq \varepsilon$, $sx_0 \in U$ e riscrivendo questo in termini di $t = 1/s$ abbiamo $x_0 \in tU$ per ogni $t \geq 1/\varepsilon$. Come n_{x_0} basta scegliere $\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$.

□

Esercizio 2.12.

Sia X spazio vettoriale su \mathbb{K} e \mathcal{U} una famiglia di sottoinsiemi di X tali che valgano le quattro proprietà della proposizione precedente (2.11). Allora esiste un'unica topologia su X che rende X uno SVT e tale che \mathcal{U} è il filtro degli intorni di 0. In questa topologia \mathcal{U} è un sistema fondamentale di intorni per 0.

Dimostrazione.

L'idea è che definiamo $A \subseteq X$ aperto se e solo se per ogni $a \in A$, $A - a \in \mathcal{U}$ (sto traducendo “aperto \iff intorno di ogni suo punto”). Si può mostrare che questa scelta definisce una topologia che rende X uno SVT. □

Esercizio 2.13.

Definire analogamente una topologia di SVT su X tramite degli assiomi che si basano su una base di intorni di 0 (al posto di tutti gli intorni). Per esempio la famiglia degli intorni bilanciati di 0.

Osservazione 2.14.

Se uno SVT è T_0 allora è automaticamente T_1 e T_2 , basta sfruttare proprietà di simmetria.

Osservazione 2.15.

Ogni SVT è uno spazio topologico regolare, cioè ogni punto ha una base di intorni chiusi. Se X è anche T_0 allora X è T_3 .

Dimostrazione.

Sia C un chiuso di X e $x \in X$ con $x \notin C$. Sia $U \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + U \cap C = \emptyset$, che esiste perché C è chiuso. Sia $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $V - V \subseteq U$, allora³ $(x + V) \cap (C + V) = \emptyset$ dove $C + V$ è un intorno di c per ogni $c \in C$ per definizione. □

Osservazione 2.16.

Se K è compatto, C chiuso con $K \cap C = \emptyset$ allora esiste V tale che $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

Dimostrazione.

Per ogni $x \in K$ sia $V_x \in \mathcal{U}_X$ tale che $x + (V_x + V_x - V_x)$ è disgiunto da C . Abbiamo dunque un ricoprimento $\{x + V_x\}_{x \in K}$ di K , che è compatto, quindi estraggo un sottoricoprimento finito $\{x_i + V_{x_i}\}$ e definisco V come l'intersezione di questi. Allora

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset,$$

infatti se $x \in K + V$ allora $x = k + v$ con $k \in K$ e $v \in V$ ma $k \in x_i + V_{x_i}$ per qualche i , quindi $x = x_i + v_i + v$, e avendo supposto che $x_i + (V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i}) \cap C = \emptyset$ abbiamo che $x = x_i + v_i + v \notin C + V$. □

³Un insieme come $C + V$ è detto intorno uniforme di C

2.2 SVT localmente convessi

Definizione 2.17 (SVT localmente convesso).

Uno **spazio vettoriale topologico localmente convesso** (SVTLC) è uno SVT tale che 0 ha una base di intorni convessi.

Esempio 2.18.

Diamo alcuni esempi

- Ogni spazio normato
- $C(X)$ con X spazio topologico con la topologia della convergenza uniforme sui compatti
- $C^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e topologia della convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate in ogni ordine

Esercizio 2.19.

Sia $\mathcal{M} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{misurabili}\}$, allora esiste una metrica su \mathcal{M} che lo rende uno SVT e tale che $f_n \rightarrow f$ se e solo se $f_n \rightarrow f$ in misura, cioè per ogni

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\{ |f_n| > \varepsilon \}| = 0$$

Mostrare che l'unico intorno convesso di 0 è \mathcal{M} stesso, da cui segue $\mathcal{M}^* = \{0\}$.

Osservazione 2.20.

Per ciò che sappiamo sugli intorni di 0 in uno SVT, se X è SVTLC allora esiste una base \mathcal{B} data dagli intorni di 0 assorbenti, bilanciati e convessi.

Definizione 2.21 (Disco).

Un insieme B è detto **disco** se è assorbente, bilanciato e convesso.

Proposizione 2.22.

Sia X un \mathbb{R} -SV e \mathcal{B} una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

- Per ogni $B \in \mathcal{B}$, B è Assorbente, Bilanciato e Convesso
- Per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

allora $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid \exists r > 0, \exists B \in \mathcal{B} \mid rB \subseteq U\}$ è un filtro di insiemi che induce una topologia che rende X uno SVT come da esercizio (2.12). La topologia indotta è anche localmente convessa.

Dimostrazione.

Mostriamo le quattro proprietà:

- Chiaramente \mathcal{U} è un filtro.
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ è assorbente perché lo sono gli elementi di \mathcal{B}
- Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V + V \subseteq U$, basta scegliere $V = \frac{1}{2}B$ con $B \subseteq U$ convesso in quanto se B è convesso $B + B = 2B$
- Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene un bilanciato perché contiene una versione scalata di un elemento di \mathcal{B} .

□

Osservazione 2.23.

Se \mathcal{B} è una famiglia di dischi allora definendo $\tilde{\mathcal{B}} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$ si ha che $\tilde{\mathcal{B}}$ rispetta gli assiomi della proposizione (2.22) e quindi induce una topologia su X che lo rende uno SVT. Questa è la meno fine tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$. In particolare \mathcal{U}_X ha una base data da $\{rB \mid B \in \tilde{\mathcal{B}}\}$.

2.2.1 Funzionali di Minkowski

Definizione 2.24 (Funzionale di Minkowski).

Sia X un \mathbb{R} -spazio vettoriale, $C \subseteq X$ convesso, $0 \in C$. Il **funzionale di Minkowski** associato a C è dato da:

$$p_C : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \inf \{t \geq 0 \mid x \in tC\} \end{array}$$

dove $\inf \emptyset = \infty$ in questo formalismo.

Osservazione 2.25.

Se $B(0, 1) \subseteq C \subseteq \overline{B(0, 1)}$ per X normato allora $p_C(x) = \|x\|$.

Proposizione 2.26 (Proprietà funzionali di Minkowski).

Valgono le seguenti proprietà

- C è assorbente se e solo se $p_C(x) < \infty$ per ogni $x \in X$.
- Si ha $\{p_C < 1\} \subseteq C \subseteq \{p_C \leq 1\}$

Dimostrazione.

Mostriamo le varie proprietà

- Evidente dalla definizione di assorbente.
- Se $p_C(x) < 1$ allora esiste $0 \leq t \leq 1$ tale che $x \in tC$, cioè $x = tc$. Poiché $(1-t)0 = 0$ si ha $x = tc + (1-t)0$ e per convessità questo è un elemento di C , cioè $x \in C$.
Se $x \in C$ allora $1 \in \{t \geq 0 \mid x \in tC\}$, quindi $p_C(x) \leq 1$.

□

Osservazione 2.27 (Famiglia di seminorme induce SVTLC).

Se \mathcal{P} è una famiglia di seminorme su X , possiamo definire

$$\mathcal{B} = \{B_p(0, r) \mid p \in \mathcal{P}, r \in \mathbb{R}_+\}, \quad B_p(0, r) = \{y \in X \mid p(x - y) < r\}$$

Si può mostrare che \mathcal{B} è un insieme di dischi e quindi induce una struttura di SVTLC su X .

Osservazione 2.28.

Se \mathcal{P} è una famiglia di seminorme su X e definiamo

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\max(p_1, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathcal{P}\}$$

allora $\mathcal{U} = \{B_p(0, r) \mid p \in \tilde{\mathcal{P}}, r > 0\}$ è una base di intorni di 0 che induce la topologia dell'osservazione precedente.

Osservazione 2.29 (Ogni SVTLC è indotto da seminorme).

Poiché se B è assorbente, bilanciato e convesso, esso produce una seminorma p_B data dal funzionale di Minkowski tale che $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$, ogni topologia di X come SVTLC si può ottenere a partire da famiglie di seminorme.

Proposizione 2.30.

La topologia di SVTLC indotta da \mathcal{P} insieme di seminorme è T_0 se e solo se \mathcal{P} è separante, cioè per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.

Dimostrazione.

Se $p(x) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$ allora $x \in B(0, r)$ per ogni $p \in \tilde{\mathcal{P}}$ e per ogni $r > 0$, quindi $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{U}_X$, ovvero

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_X} U = \overline{\{0\}}.$$

□

2.3 Continuità di operatori lineari in SVT

Proposizione 2.31 (Continuità mappe lineari).

Sia $T : X \rightarrow Y$ lineare tra SVT. Valgono le seguenti affermazioni

1. T è continua se e solo se è continua in 0
2. T è continua se e solo se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che $T(V) \subseteq U$
3. Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme \mathcal{P} e \mathcal{Q} rispettivamente, T è continua se e solo se

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \exists M \geq 0 \quad \text{tali che}$$

$$\forall x \in X, q(Tx) \leq M \max \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$$

4. Se X e Y sono SVTLC con topologia indotta dalle famiglie di seminorme \mathcal{P} e \mathcal{Q} rispettivamente con \mathcal{P} e \mathcal{Q} stabili per max allora T è continua se e solo se $\forall q \in \mathcal{Q}$ esistono $p \in \mathcal{P}$ e $M \geq 0$ tali che

$$q(Tx) \leq Mp(x)$$

Dimostrazione.

Dimostriamo le affermazioni

1. Basta traslare dato che traslare è un omeomorfismo.
2. Ovvio.
3. La condizione significa che la palla di centro 0 e raggio 1 rispettivamente alla seminorma $\max(p_1, \dots, p_n)$ di X ha immagine tramite T contenuta nella palla di raggio M rispetto a q , concludendo per il punto 2. a meno di omotetia.
4. Caso sopra.

□

Proposizione 2.32 (Caratterizzazione funzionali continui).

Sia $f \in X'_{alg} \setminus \{0\}$ con X un \mathbb{K} -spazio vettoriale. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. f è continua
2. $\ker f$ è chiuso
3. $\ker f$ non è denso
4. f non è surgettiva su un aperto non vuoto

5. f è limitata su un intorno di 0

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

1. \implies 2. Ovvio perché $\{0\}$ è chiuso in \mathbb{K} .
2. \implies 3. Se $\ker f$ è denso allora $\overline{\ker f} = X$ e quindi ha codimensione 0, ma $\ker f$ ha codimensione 1 in quanto $f \neq 0$, quindi $\ker f \neq \overline{\ker f}$, cioè non è chiuso.
3. \implies 4. Se $\ker f$ non è denso esiste un aperto non vuoto A disgiunto da $\ker f$, cioè $0 \notin f(A)$ e in particolare f non è surgettiva su A .
4. \implies 5. Se f non è surgettiva su aperto non vuoto allora non lo è su un intorno bilanciato U di 0 e quindi $f(U)$ è un insieme bilanciato di \mathbb{K} diverso da \mathbb{K} in quanto $f \neq 0$, dunque $f(U)$ è un disco e in particolare è limitato.
5. \implies 1. Se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in U \in \mathcal{U}_X$ allora per omogeneità

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{M}U \in \mathcal{U}_X$$

per un qualsiasi $\varepsilon > 0$, quindi f è continua in 0. Questo conclude perché

$$f(x) = f(x_0) + f(x - x_0).$$

□

2.4 Topologie deboli

Proposizione 2.33 (Topologia iniziale nel caso SVT).

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\mathcal{F} : \{T_i : X \rightarrow Y_i\}$ dove ogni Y_i è SVT e T_i è lineare, allora la topologia iniziale su X indotta⁴ da \mathcal{F} rende X uno SVT.

Dimostrazione.

Voglio verificare che $+$ e \cdot sono mappe continue per la topologia iniziale.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{+} & X \\ T_i \times T_i \downarrow & & \downarrow T_i \\ Y_i \times Y_i & \xrightarrow{+_i} & Y_i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \xrightarrow{\cdot} & X \\ id_{\mathbb{K}} \times T_i \downarrow & & \downarrow T_i \\ \mathbb{K} \times Y_i & \xrightarrow{\cdot_i} & Y_i \end{array}$$

Per la proprietà universale della topologia iniziale (A.2), vogliamo verificare che $T_i \circ + = +_i \circ (T_i \times T_i)$ è continua per ogni i e similmente per $T_i \circ \cdot$. Questo è vero perché la topologia iniziale è rende T_i continua per ogni i . □

Osservazione 2.34.

Se ogni Y_i inoltre è SVTLC allora anche X lo è.

⁴vedi (A.1)

Definizione 2.35 (Topologie deboli).

Sia X un \mathbb{K} -spazio vettoriale e $\mathcal{F} \subseteq X'$ (duale algebrico). La topologia iniziale indotta da \mathcal{F} viene detta la **topologia debole di \mathcal{F}** e si indica $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Osservazione 2.36.

$\sigma(X, \mathcal{F}) = \sigma(X, \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}))$ quindi senza perdita di generalità possiamo sempre supporre \mathcal{F} sottospazio vettoriale di X' .

Osservazione 2.37.

La famiglia di seminorme associata a \mathcal{F} (quella che induce la stessa topologia di $SVTLC$) è data da

$$\mathcal{P} = \{|f| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

Osservazione 2.38.

La topologia debole $\sigma(X, \mathcal{F})$ è T_0 (e quindi Hausdorff perché SVT) se e solo se la famiglia \mathcal{F} è separante ($\forall x \in X \setminus \{0\}, \exists f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq 0$).

Lemma 2.39.

Siano $f_0, \dots, f_n \in X'_{alg}$ per X un \mathbb{K} -spazio vettoriale, allora sono equivalenti

1. $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$
2. $|f_0| \leq M \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i|$ per qualche $M \geq 0$
3. $\ker f_0 \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$

Dimostrazione.

Diamo le tre implicazioni

1. \implies 2. Da 1. segue $|f_0| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |f_i| \leq M \max |f_i|$ per $M = \sum |\lambda_i|$.

2. \implies 3. Se $x \in \bigcap \ker f_i$, cioè $\langle f_i, x \rangle = 0$ per ogni i , allora $\langle f_0, x \rangle \leq M \cdot 0 = 0$, cioè $f_0(x) = 0$ e abbiamo l'inclusione voluta.

3. \implies 1. Sia $F : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ data da $F = (f_1, \dots, f_n)$, allora

$$\ker F = \bigcap \ker f_i \subseteq \ker f_0$$

quindi abbiamo una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{K} \\ F \downarrow & \nearrow L & \\ \mathbb{K}^n & & \end{array}$$

dove $L(x_1, \dots, x_n) = \sum \lambda_i x_i$ per dei λ_i (in quanto è una forma lineare). Ma allora $f_0 = L \circ F = \sum \lambda_i f_i$ come voluto.

□

Proposizione 2.40 (Duale per topologia debole).

Dato X \mathbb{K} -spazio vettoriale e \mathcal{F} sottospazio di X'_{alg} allora

$$(X, \sigma(X, \mathcal{F}))^* = \mathcal{F}$$

Dimostrazione.

Sia $f_0 \in (X, \sigma(X, \mathcal{F}))^*$, allora per la proposizione (2.31) esistono $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ e $M \geq 0$ tali che per ogni $x \in X$

$$|f_0(x)| \leq M \max_i |f_i(x)|.$$

Dunque per il lemma (2.39) f_0 si scrive come combinazione lineare delle f_i e quindi in particolare $f_0 \in \mathcal{F}$.

L'altra inclusione è ovvia per definizione di topologia debole. \square

Osservazione 2.41.

Se X ha dimensione infinita, $\sigma(X, \mathcal{F})$ non è mai localmente limitata. In particolare ogni intorno di 0 contiene uno spazio vettoriale di codimensione finita.

Dimostrazione.

Se U intorno di 0 per $\sigma(X, \mathcal{F})$ allora esistono $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tali che⁵

$$U \supseteq \bigcap_{i=1}^n \{|f_i| < 1\} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$$

e l'intersezione di questi nuclei ha codimensione al massimo n . \square

2.4.1 Caso degli spazi normati

Definizione 2.42 (Topologia debole).

Se X è normato, la **topologia debole** su X è la topologia debole associata a X^* , cioè $\sigma(X, X^*)$.

Proposizione 2.43.

La topologia debole è localmente convessa e Hausdorff.

Dimostrazione.

Per Hahn-Banach (4.2), il duale X^* separa i punti \square

Definizione 2.44 (Topologia debole*).

Su X^* possiamo considerare la topologia debole associata alle valutazioni $X \subseteq X^{**}$, cioè scegliendo

$$\mathcal{F} = \{val_x \in (X^*)' \mid x \in X\}.$$

Questa è la **topologia debole*** su X^* e la indichiamo $\sigma(X^*, X)$.

Osservazione 2.45.

La topologia debole* rende X^* uno SVTLC T_0 (e quindi Hausdorff), infatti se $f \in X^* \setminus \{0\}$ allora esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq 0$.

Osservazione 2.46.

In generale $\sigma(X^*, X)$ è meno fine di $\sigma(X^*, X^{**})$. Abbiamo uguaglianza solo quando $X = X^{**}$ in quanto se $X \neq X^{**}$ allora dalla proposizione (2.40) ricaviamo

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X \neq X^{**} = (X^*, \sigma(X^*, X^{**}))^*$$

e quindi in partenza $\sigma(X^*, X^{**}) \neq \sigma(X^*, X)$

⁵vedi lemma (2.39)

Osservazione 2.47.

Poiché $(X, \|\cdot\|) \hookrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$ isometricamente allora $(X, \sigma(X, X^*))$ ha la topologia indotta come sottospazio da⁶ $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

Dimostrazione.

Questo deriva dalla transitività della topologia iniziale (A.3) dove la prima famiglia è la mappa $X \hookrightarrow X^{**}$ e l'unica altra famiglia sono gli elementi di X^* che vanno verso \mathbb{K} . \square

2.5 Teorema di Riesz

Teorema 2.48 (Riesz).

Per X SVT T_0 su \mathbb{K} sono equivalenti

1. X ha dimensione finita
2. $X \cong \mathbb{K}^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$
3. X è localmente compatto

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

1. \implies 2. Sia X SVT T_0 di dimensione n e sia x_1, \dots, x_n una sua base di Hamel. Allora

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & X \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array}$$

è lineare, bigettiva e continua.

Dimostriamo che è aperta: L'insieme $\partial B(0, 1) \subseteq \mathbb{K}^n$ visto con la norma euclidea è compatto, quindi $\varphi(\partial B(0, 1))$ è compatto, e quindi chiuso perché X è Hausdorff. Per bigettività $0 \notin \varphi(\partial B(0, 1))$, quindi esiste un intorno V di 0 in X disgiunto da $\varphi(\partial B(0, 1))$. Senza perdita di generalità V bilanciato, allora $\varphi^{-1}(V)$ è un insieme bilanciato di \mathbb{K}^n disgiunto da $\partial B(0, 1)$, dunque $\varphi^{-1}(V) \subseteq B(0, 1)$ (se avesse un punto di modulo maggiore a 1 allora in quanto bilanciato conterrebbe tutti i punti tra esso e 0, intersecando il bordo).

Questo mostra che $B(0, 1)$ è un intorno di 0 e quindi φ è aperta (per traslazione e omotetia $\varphi(B(\lambda, r))$ è intorno di $\varphi(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^n$ e $r > 0$ e concludo notando che aperti di \mathbb{K}^n sono dati da unioni di palle).

2. \implies 3. \mathbb{K}^n è localmente compatto perché conosciamo la topologia euclidea, quindi anche X lo è.

3. \implies 1. Sia X SVT localmente compatto e T_0 . Mostriamo che X è I-numerabile:

Sia V intorno compatto di 0. Mostriamo che $\{\frac{1}{n}V\}$ è una base di intorni di 0. Sia U un intorno (senza perdita di generalità U bilanciato). Poiché V è compatto e⁷ $V \subseteq \bigcup_{n \geq 1} nU = X$ possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$V \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} n_i U \stackrel{U \text{ bilanciato}}{=} \left(\max_{1 \leq i \leq k} n_i \right) U$$

⁶nota che X^* lo si può pensare come immerso in $X^{***} = (X^{**})^*$, quindi stiamo considerando la topologia debole* su $(X^*)^*$

⁷ U assorbente

infatti $\frac{n_i}{\max n_i}U \subseteq U$. Questo mostra che $\{\frac{1}{n}V\}$ è una base numerabile di intorni di $0 \in X$.

Notiamo che V si può coprire con un numero finito di traslati di $\frac{1}{2}V$ in quanto $V \subseteq V + \frac{1}{2}V$ e applico compattezza al variare di $v + \frac{1}{2}V$ per $v \in V$. Sia allora F tale che $V \subseteq \bigcup_{v \in F} v + \frac{1}{2}V$ con F finito e poniamo $Y = \text{Span}_{\mathbb{K}} F$. Notiamo che Y ha dimensione finita.

Procedendo per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $V \subseteq Y + 2^{-n}V$, ma $\{2^{-n}V\}_{n \geq 0}$ è una base di intorni, quindi

$$\overline{Y} = \bigcap_{n \geq 0} Y + 2^{-n}V \supseteq V$$

e dato che V è un intorno assorbente, $X = \bigcup_{n \geq 0} nV \subseteq \overline{Y}$, cioè Y è denso in X .

Poiché Y ha dimensione finita, per l'implicazione precedente $Y \cong \mathbb{K}^n$, in particolare Y è completo. Se $x \in X = \overline{Y}$, poiché X è I-numerabile, si ha che esiste $y_k \rightarrow x$ in X con $y_k \in Y$ con (y_k) di Cauchy in X e quindi anche in Y , che però è completo, quindi $y_k \rightarrow y$ per $y \in Y$, ma X è Hausdorff, quindi $y = x$.

□

Osservazione 2.49.

Se non avessimo supposto T_0 potremmo considerare $X/\overline{\{0\}}$ e troveremmo $X \cong \mathbb{K}^n \oplus \overline{\{0\}}$.

Capitolo 3

Limitatezza e Banach-Steinhaus

3.1 Limitatezza

Definizione 3.1 (Insieme limitato).

Un sottoinsieme S di uno SVT X con \mathcal{U} intornoi di 0 è **limitato** se è assorbito da ogni elemento di \mathcal{U} , cioè¹ per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nU \supseteq S$.

Osservazione 3.2.

Valgono le seguenti proprietà

1. Se S è limitato allora anche \overline{S} lo è, basta considerare intornoi chiusi.
2. Se S e S' sono limitati, $S \cup S'$ lo è.
3. Ogni compatto è limitato, basta scegliere un intorno limitato di x per ogni $x \in K$ e poi estrarre un sottoricoprimento finito. Un tale intorno esiste scalando intornoi di 0 bilanciati.
4. Ogni $T : X \rightarrow Y$ lineare e continua tra SVT è limitata, cioè per ogni $S \subseteq X$ limitato, $T(S)$ è limitato. In generale non vale il viceversa ma vale se X e Y sono normati.

Proposizione 3.3 (Limitatezza in SVTLC).

Se (X, \mathcal{P}) è SVTLC allora $S \subseteq X$ è limitato se e solo se per ogni seminorma $p \in \mathcal{P}$, p è limitata su S .

Dimostrazione.

p limitata su S significa che

$$S \subseteq B_p(0, R_p) = \frac{R_p}{\varepsilon} B_p(0, \varepsilon)$$

e le palle $\{B_p(0, \varepsilon)\}_{p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0}$ sono una prebase di intornoi di $0 \in X$. □

Corollario 3.4.

Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora S è limitato se e solo se $\exists R > 0$ tale che $S \subseteq B(0, R)$.

¹questa condizione è equivalente a chiedere $tU \supseteq S$ per ogni t con $|t| \geq n$ o a chiedere che l'assorbimento valga per elementi di una pre-base di intornoi di 0 al posto di tutti gli elementi di \mathcal{U} .

Esercizio 3.5.

Se X è I-numerabile e $T : X \rightarrow Y$ lineare tale che per ogni $x_k \rightarrow 0$ in X esiste x_{k_j} tale che $T(x_{k_j})$ limitata allora T è continua.

Proposizione 3.6 (Caratterizzazione sequenziale della limitatezza).

Se X SVT e $S \subseteq X$, S è limitato se e solo se per ogni (s_k) successione in S e per ogni (α_k) successione in \mathbb{K} infinitesima, si ha $\alpha_k s_k \rightarrow 0$.

Dimostrazione.

Sia S limitato, (s_k) successione in S e (α_k) successione infinitesima in \mathbb{K} . Sia U intorno bilanciato di 0 e sia n tale che $S \subseteq nU$. Notiamo che definitivamente $|\alpha_k| < \frac{1}{n}$, quindi

$$\alpha_k s_k \in \alpha_k S \subseteq \alpha_k nU \stackrel{\text{k grande}}{\subseteq} U.$$

Supponiamo ora S non limitato, allora esiste $U \in \mathcal{U}_X$ che non assorbe S , cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $s_n \in S \setminus nU$. Dunque (s_n) è una successione in S tale che $\frac{1}{n}s_n \notin U$ per costruzione, dunque $\frac{1}{n}s_n$ non tende a 0 in X nonostante $\frac{1}{n}$ sia infinitesima. \square

Proposizione 3.7.

Le successioni di Cauchy sono limitate.

Dimostrazione.

Sia (x_k) una successione di Cauchy in X , cioè per ogni $U \in \mathcal{U}_X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p, q \geq n$ si ha $x_p - x_q \in U$.

Fissiamo $U \in \mathcal{U}_X$ e sia V bilanciato tale che $V + V \subseteq U$. Per la definizione di successione di Cauchy esiste n_0 tale che $x_k - x_{n_0} \in V$ per ogni $k \geq n_0$, cioè $x_k \in x_{n_0} + V$.

Inoltre, esiste m tale che $x_k \in mV$ per ogni $k \leq n_0$ dato che un insieme finito è limitato. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $x_k \in mV + V$, infatti se $k \leq n_0$ allora abbiamo mV , se $k > n_0$ allora $x_{n_0} \in mV$ e $x_k \in x_{n_0} + V \subseteq mV + V$.

Poiché V è bilanciato, $mV + V \subseteq mV + mV = m(V + V) \subseteq mU$. \square

3.2 Spazi di Baire e II-categoria

Teorema 3.8 (Baire).

Se $\{A_k\}_{k \geq 0}$ è una famiglia numerabile di aperti densi di uno spazio metrico completo allora $\bigcap A_k$ è denso.

Dimostrazione.

Per induzione si definisce una successione di palle chiuse di X dove B_0 è arbitraria e

$$B_k = \overline{B(x_k, r_k)} \text{ tali che } B_{k+1} \subseteq B_k \cap A_k \text{ e } r_k = o(1)$$

che possiamo fare perché A_k è un aperto denso.

Allora la successione dei centri è una successione di Cauchy, infatti se $p, q \geq n$ si ha $x_p, x_q \in B_n$ e quindi $d(x_p, x_q) \leq 2r_n$. Dunque $x_n \rightarrow x^*$ in X per completezza. Inoltre, poiché $x_k \in B_n$ definitivamente, $x^* = \lim x_k \in B_n$ per ogni n (dato che B_n è chiuso). In particolare $x^* \in B_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni n e quindi $x^* \in \bigcap A_n$. Per costruzione $x^* \in B_0$, quindi per ogni palla B_0 abbiamo mostrato che $B_0 \cap \bigcap A_n \neq \emptyset$, cioè $\bigcap A_n$ è denso. \square

Esercizio 3.9.

La stessa conclusione vale se X è localmente compatto al posto di metrico completo.

Definizione 3.10 (Spazio di Baire).

Uno spazio topologico è **di Baire** se ogni intersezione numerabile di aperti densi è densa.

Osservazione 3.11.

Ogni aperto non vuoto di X di Baire è ancora di Baire. Basta verificare che ogni aperto denso di A è della forma $A \cap U$ con U aperto denso di X .

Definizione 3.12 (Sottoinsieme di I- e II-categoria).

Un sottoinsieme S di X è di **I-categoria (di Baire) in X** se è unione numerabile di insiemi $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $\text{int}(\overline{E_i}) = \emptyset$.

Inoltre S è di **II-categoria (di Baire) in X** se non è di I-categoria.

Osservazione 3.13.

Se X è di Baire e $S \subseteq X$ è di I-categoria allora $X \setminus S$ è di II-categoria in quanto X stesso è di II-categoria (se $X = \bigcup E_i$ con E_i chiusi a parte interna vuota allora $\emptyset = \bigcap E_i^c$ con E_i^c aperti densi, ma questo è assurdo perché X di Baire).

3.3 Teorema di Banach-Steinhaus

Definizione 3.14 (Famiglia equicontinua).

Una famiglia Γ di operatori lineari continui fra SVT X e Y è **equicontinua** se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che per ogni $T \in \Gamma$, $T(V) \subseteq U$.

Osservazione 3.15.

Possiamo riformulare la condizione nei seguenti modi: per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che

$$\forall T \in \Gamma, V \subseteq T^{-1}(U) \iff V \subseteq \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(U) \doteq \Gamma^{-1}(U).$$

Equivalentemente la condizione predica che per ogni $V \in \mathcal{U}_Y$ si abbia $\Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$.

Osservazione 3.16.

Se $T : X \rightarrow Y$ fra spazi normati, la norma degli operatori

$$\|T\| = \|T\|_{\infty, B(0,1)} = \text{migliore costante di Lipschitz per } T.$$

Esempio 3.17.

Se X e Y sono normati, Γ è equicontinua se e solo se Γ è limitato in $L(X, Y)$ rispetto alla norma degli operatori.

Teorema 3.18 (Banach-Steinhaus / Uniforme limitatezza).

Siano X, Y SVT, $S \subseteq X$ di seconda categoria e $\Gamma \subseteq L(X, Y)$ con Γ puntualmente limitata su $S \subseteq X$, cioè per ogni $s \in S$, $\Gamma(s) = \bigcup_{T \in \Gamma} T(s)$ è limitato in Y .

Allora Γ è equicontinua.

Dimostrazione.

Sia $U \in \mathcal{U}_Y$ e consideriamo $V \in \mathcal{U}_Y$ chiuso tale che $V - V \subseteq U$. Per ipotesi, per ogni $x \in S$ si ha che $\Gamma(x)$ è limitato in Y , quindi viene assorbito da V , cioè esiste $n_x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $T \in \Gamma$ si ha $T(x) \in n_x V$, cioè tale che

$$x \in \bigcap_{T \in \Gamma} n_x T^{-1}(V) = n_x \bigcap_{T \in \Gamma} T^{-1}(V) = n_x \Gamma^{-1}(V).$$

Dunque $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \Gamma^{-1}(V)$. Notiamo che poiché V è chiuso, $T^{-1}(V)$ è chiuso e quindi anche $\Gamma^{-1}(V)$ lo è perché intersezione di chiusi. Poiché S è di seconda categoria anche

l'unione delle versioni riscalate di $\Gamma^{-1}(V)$ lo è, dunque questo insieme non è unione numerabile di chiusi con parte interna vuota, quindi almeno uno tra gli $n\Gamma^{-1}(V)$ ha parte interna non vuota, quindi anche $\Gamma^{-1}(V)$ ha parte interna non vuota scalando per $\frac{1}{n}$.

Quindi $\Gamma^{-1}(V)$ è intorno di qualche suo punto, dunque² $\Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$ è un intorno di 0.

Ricordando che $V - V \subseteq U$ si ha

$$T^{-1}(U \supseteq T^{-1}(V - V) = T^{-1}(V) - T^{-1}(V)) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V)$$

quindi passando all'intersezione su $T \in \Gamma$ si ha

$$\Gamma^{-1}(U) \supseteq \Gamma^{-1}(V) - \Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X,$$

cioè abbiamo mostrato che per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ si ha $\Gamma^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$, che è equivalente all'equicontinuità di Γ . \square

Corollario 3.19 (Sottoinsiemi limitati di operatori).

Se X e Y sono Banach e $\Gamma \subseteq L(X, Y)$ è puntualmente limitata in X (o volendo anche un sottoinsieme di X di II-categoria) allora Γ è un insieme limitato in $L(X, Y)$.

Dimostrazione.

Diretta applicazione di Banach-Stenhaus (3.18) notando che spazi di Banach sono in particolare SVT e che equicontinuità per la norma su $L(X, Y)$ significa limitatezza.
***** \square

Esercizio 3.20.

Siano X, Y SVT. Trovare la topologia meno fine τ di SVT su $L(X, Y)$ per la quale

$$\Gamma \text{ puntualmente limitato in } L(X, Y) \iff \Gamma \text{ limitato nella topologia } \tau.$$

Corollario 3.21.

Siano X e Y Banach e sia $(T_n) \subseteq L(X, Y)$ puntualmente convergente. Allora il limite T è ancora lineare, continuo e con norma

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

Dimostrazione.

Per il corollario precedente (3.19) si ha che (T_n) sono limitati in $\|\cdot\|$ e il limite puntuale è lineare in quanto

$$T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \rightarrow \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Questo mostra che T è limitato e lineare, quindi $T \in L(X, Y)$.

Inoltre per ogni $x \in X$ si ha

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \left(\sup_n \|T_n\| \right) \|x\|,$$

quindi $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|$. Ragionando analogamente per una sottosuccessione di (T_n) che in norma converge a $\liminf_n \|T_n\|$ ricaviamo

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

\square

²se $a_0 \in \text{int}(A)$ allora $A - a_0 \subseteq A - A$ è un intorno di 0.

Osservazione 3.22.

In generale NON vale $T_n \rightarrow T$ in $\|\cdot\|$.

Proposizione 3.23 (Bilineare separatamente continua è continua).

Sia $b : X \times Y \rightarrow Z$ bilineare e separatamente continua, cioè per ogni $x \in X, y \in Y$ si ha che $b(x, \cdot) : Y \rightarrow Z$ e $b(\cdot, y) : X \rightarrow Z$ sono lineari e continue. Allora b è continua, cioè

$$\sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|b(x, y)\| < \infty.$$

Dimostrazione.

Consideriamo la famiglia

$$\Gamma = \{b(x, \cdot) : Y \rightarrow Z\}_{x \in X, \|x\| \leq 1} \subseteq L(Y, Z).$$

Per ipotesi Γ è puntualmente limitata in Y , infatti per ogni $y \in Y$

$$\sup_{b(x, \cdot) \in \Gamma} \|b(x, \cdot)\|_{L(Y, Z)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|b(x, y)\|_Z = \|b(\cdot, y)\|_{L(X, Z)} \|y\| < \infty$$

Allora Γ è limitata in $\|\cdot\|_{L(Y, Z)}$, cioè per ogni $x \in X$ tale che $\|x\| \leq 1$ si ha

$$\|b(x, y)\|_Z \leq M \|y\|$$

e quindi al variare di y con $\|y\| \leq 1$ troviamo $\|b\|_{L(X \times Y, Z)} \leq M$. \square

Esercizio 3.24.

Esiste una isometria lineare

$$\begin{array}{ccc} L(X, L(Y, Z)) & \longrightarrow & L^2(X \times Y, Z) \\ T & \longmapsto & (x, y) \mapsto T(x)(y) \end{array}$$

dove $L^2(X \times Y, Z)$ sono le bilineari.

Proposizione 3.25 (w^* -limitato vs limitato in $\|\cdot\|_{X^*}$).

Sia $Y = \mathbb{K}$ e X Banach. Sia $\Gamma \subseteq X^*$, allora Γ è w^* -limitato se e solo se è limitato in $\|\cdot\|_{X^*}$.

Dimostrazione.

Essere limitato nella topologia debole* significa “essere assorbito da ogni intorno w^* di X^* ” cioè, usando intorni di prebase, essere assorbiti da insiemi della forma

$$\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$$

per $x \in X$. Notiamo che Γ viene assorbito da $\{f \in X^* \mid |f(x)| < 1\}$ significa $\Gamma(x)$ limitato in \mathbb{K} . Per il corollario (3.19) si ha che Γ è limitato in $L(X, \mathbb{K}) = X^*$.

L'altra implicazione è ovvia perché la norma operatore già rende continui gli operatori e indebolire la topologia non può trasformare un insieme limitato in uno non limitato. \square

Osservazione 3.26.

Se $E \subseteq F$ è un sottospazio allora $\Gamma \subseteq E$ è limitato in F se e solo se è limitato in E per la topologia indotta.

Proposizione 3.27.

Sia $\Gamma \subseteq X$, allora Γ è w -limitato se e solo se è $\|\cdot\|$ -limitato.

Dimostrazione.

Se Γ è $\sigma(X, X^*)$ -limitato allora tramite l'immersione isometrica $X \rightarrow X^{**}$ troviamo un insieme $\sigma(X^{**}, X^*)$ -limitato. A questo punto basta applicare la proposizione precedente (3.25). \square

3.3.1 Teorema della mappa aperta

Teorema 3.28 (Mappa aperta).

Siano X, Y Banach e $T : X \rightarrow Y$ lineare continuo e tale che $T(X)$ è di II-categoria in Y (per esempio T surgettivo). Allora T è una mappa aperta.

Dimostrazione.

Sia B la palla unitaria chiusa di X . Basta mostrare che $T(B)$ è un intorno di 0 in Y (per omotetia e traslazione seguirà che T manda intorni di x in intorni di $T(x)$, cioè è aperta). Notiamo che

$$X = \bigcup_n nB \implies T(X) = \bigcup_n nT(B)$$

Per ipotesi $T(X)$ è di II-categoria in Y , quindi per qualche n si ha che $\overline{nT(B)}$ ha parte interna non vuota e quindi $\overline{T(B)}$ stesso ha parte interna non vuota. Poiché³

$$\overline{T(B)} - \overline{T(B)} \subseteq \overline{T(B - B)} = \overline{T(2B)} = 2\overline{T(B)}$$

si ha che $\overline{T(B)}$ è un intorno di $0 \in Y$.

Mostriamo ora che $T(B)$ stesso è un intorno di 0. Poiché la chiusura è l'intersezione degli aperti che contengono $T(B)$ si ha in particolare che

$$\overline{T(B)} = T(B) + \frac{1}{2}\overline{T(B)}.$$

Se $y_0 \in \overline{T(B)}$ allora esistono $x_0 \in B$ e $y_1 \in \frac{1}{2}\overline{T(B)}$ tali che $y_0 = T(x_0) + \frac{1}{2}y_1$.

Iterando troviamo $y_2 \in \overline{T(B)}$ tale che $y_1 = T(x_1) + \frac{1}{2}y_2$ per $x_1 \in B$. Questo definisce due successioni $(x_n) \subseteq B$ e $(y_n) \subseteq \overline{T(B)}$ tali che $y_n = T(x_n) + \frac{1}{2}y_{n+1}$, quindi

$$y_0 = T(x_0) + \frac{1}{2}T(x_1) + \dots + 2^{-n}T(x_n) + 2^{-n-1}y_{n+1} = T\left(\sum_{i=0}^n 2^{-i}x_i\right) + 2^{-n-1}y_{n+1}.$$

Poiché X è completo la serie $\sum_{i=0}^n 2^{-i}x_i$ converge ad un punto $x^* \in 2B$ (perché assolutamente convergente e $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} = 2$).

Siccome T è continua, $T(B)$ è limitato e quindi $\overline{T(B)}$ è limitato, quindi

$$\|2^{-n-1}y_{n+1}\| \leq 2^{-n-1}\|T\| \rightarrow 0,$$

quindi (per continuità di T) si ha $y_0 = T(x^*)$, cioè

$$\overline{T(B)} \subseteq 2T(B),$$

in particolare $T(B)$ è un intorno di 0 per omotetia. □

Osservazione 3.29 (Lineare continuo allora omeo se e solo se bigettivo).

Un operatore lineare continuo è un omeomorfismo se e solo se è bigettivo. Questo è immediato da mappa aperta (3.28).

³ricorda che in generale se f è continua allora $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

In questo caso la mappa è $(x, y) \mapsto x - y$ e usiamo il fatto che T è lineare e

$$\overline{T(B) \times T(B)} = \overline{T(B)} \times \overline{T(B)}.$$

Osservazione 3.30.

Se $T : X \rightarrow Y$ lineare continuo allora induce

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ X/\ker T & & \end{array}$$

con \tilde{T} lineare continua iniettiva. Se T è surgettiva allora per il teorema della mappa aperta (3.28) \tilde{T} è un omeomorfismo lineare.

Osservazione 3.31.

Se $T : X \rightarrow Y$ è lineare e continua allora

$$\text{aperta} \iff \text{surgettiva} \iff \text{identificazione}.$$

Teorema 3.32 (Grafico chiuso).

Siano X, Y Banach, $T : X \rightarrow Y$ lineare. Allora T è continua se e solo se

$$\Gamma = \{(x, T(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

è chiuso.

Dimostrazione.

Data una qualsiasi mappa continua $f : X \rightarrow Y$ con Y Hausdorff si ha che Γ è la preimmagine della diagonale di $Y \times Y$ rispetto alla mappa $id_Y \times f$. Poiché Y è un Banach (e quindi metrico e quindi T_2) effettivamente abbiamo la prima implicazione.

Supponiamo ora che Γ sia chiuso. Poiché $X \times Y$ è prodotto di Banach esso stesso è Banach e quindi Γ è Banach perché chiuso di un Banach. Osserviamo ora che

$$T(x) = P_Y((x, T(x))) = P_Y((P_X|_{\Gamma})^{-1}(x)) \implies T = P_Y \circ (P_X|_{\Gamma})^{-1}.$$

Poiché $P_X|_{\Gamma}$ è bigettiva, continua e lineare, per il teorema della mappa aperta (3.28) essa è un omeomorfismo, quindi T è continuo in quanto composizione di P_Y e $P_X|_{\Gamma}^{-1}$ continue. \square

Esercizio 3.33.

Sia $T : X \rightarrow Y$ lineare fra Banach. Controntare la continuità di T con le topologie forti e deboli di X e Y

$$\begin{aligned} (X, w) &\rightarrow (Y, w) \\ (X, w) &\rightarrow (Y, s) \\ (X, s) &\rightarrow (Y, w) \\ (X, s) &\rightarrow (Y, s) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Hint: usare grafico chiuso (3.32) ricordando che sottospazi vettoriali di Banach sono chiusi forti se e solo se sono chiusi deboli e osservando chi è la topologia debole di $X \times Y$ (topologia prodotto)

Tre di queste nozioni sono equivalenti e una no. Quella diversa è più forte? Più debole? \square

Definizione 3.34 (Forte iniettività).

Una mappa $T : X \rightarrow Y$ lineare continua è **fortemente iniettiva** se esiste $c > 0$ tale che

$$\forall x \in X \quad \|T(x)\| \geq c \|x\|.$$

Proposizione 3.35.

Se X e Y sono banach e $T : X \rightarrow Y$ lineare continua, T è fortemente iniettiva se e solo se T è iniettiva e $\text{Imm } T$ è chiuso.

Dimostrazione.

Diamo le implicazioni

\Rightarrow Iniettiva ok. Sia $T' : X \rightarrow \text{Imm } T \subseteq Y$ la stessa mappa di T ma con codominio ristretto. Notiamo che T' è invertibile perché iniettiva e surgettiva per costruzione e che ha inversa continua per la disuguaglianza in ipotesi, quindi $\text{Imm}(T)$ è Banach perché X è Banach e quindi $\text{Imm } T$ è chiuso in Y .

\Leftarrow Se T è iniettiva con immagine chiusa allora $T' : X \rightarrow \text{Imm } T$ è invertibile. Inoltre, poiché $\text{Imm } T$ è Banach perché chiuso di Y , si ha che per mappa aperta (3.28) vale $(T')^{-1}$ continua, cioè T fortemente iniettiva.

□

Proposizione 3.36 (Retrazioni e sezioni per lineari continue).

Sia $T \in L(X, Y)$ con X, Y Banach. Allora T è una⁴

- *inversa destra* \iff *iniettiva e* $\text{Imm } T$ *è complementato*⁵
- *inversa sinistra* \iff *surgettivo e* $\ker T$ *è complementato.*

Dimostrazione.

Se $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow X$ sono una coppia tale che $S \circ T = id_X$ allora $T \circ S = P$ è un proiettore lineare continuo, infatti

$$P^2 = (T \circ S) \circ (T \circ S) = T \circ id_X \circ S = T \circ S.$$

Quindi $Y = \ker P \oplus \text{Imm } P$ e $\ker P = \ker S$, $\text{Imm } P = \text{Imm } T$, ovvero

$$Y = \ker S \oplus \text{Imm } T$$

come volevamo.

Viceversa, se T è iniettivo e $\text{Imm } T$ è complementata (rispettivamente S è surgettivo e $\ker S$ complementato) allora considero un proiettore $P_{\text{Imm } T}$ (ok per la decomposizione in somma diretta) e definisco $S = (T')^{-1} \circ P_{\text{Imm } T}$ che è inversa sinistra di T (rispettivamente definisco un proiettore Q su $\ker S$ con $id_Y - Q$ proiettore sul supplementare V fissato di $\ker S$, a questo punto considero $S|_V^{-1}$, che diventa inversa destra). □

Proposizione 3.37 (Norme confrontabili su Banach sono equivalenti).

Due norme su Banach confrontabili sullo stesso \mathbb{K} -spazio vettoriale sono equivalenti.

Dimostrazione.

Caso particolare di “ T bigettiva continua” scegliendo $T = id_X$. □

⁴cioè esiste $S : Y \rightarrow X$ tale che T è l’inversa destra / sinistra di S .

⁵cioè esiste $V \subseteq Y$ tale che $Y = \text{Imm } T \oplus V$.

Esercizio 3.38.

Su uno spazio normato X di dimensione infinita esistono sempre forme lineari non continue.

Osservazione 3.39.

Esistono $L : X \rightarrow X$ lineari bigettive non continue

Dimostrazione.

Fisso f forma discontinua e fisso $u \in X$, definiamo

$$L(x) = x + f(x)u$$

e notiamo che

$$\begin{aligned} L^2(x) &= L(x + f(x)u) = L(x) + f(x)L(u) = \\ &= x + f(x)u + f(x)(u + f(u)u) = \\ &= x + (2f(x) + f(x)f(u))u. \end{aligned}$$

Se u è tale che $f(u) = -2$ allora $L^2 = id_X$, cioè L involuzione. In particolare L è bigettiva ma continua se e solo se f lo è, e non lo è quindi L non continua su $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach.

Poniamo $\|x\|_2 = \|L(x)\|_2$. Notiamo che $\|\cdot\|_2$ rende X Banach in quanto $L : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ è una isometria. Notiamo dunque che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme che rendono X banach e che non sono equivalenti (L è discontinua per $\|\cdot\|_1$ ma continua per $\|\cdot\|_2$). \square

Esercizio 3.40.

Siano $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ norme sullo stesso X e sia $\|\cdot\|_3 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Allora

1. Una successione (x_n) converge a $x \in X$ in $\|\cdot\|_3$ se e solo se converge a x in $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$.
2. (x_n) è di Cauchy in X se e solo se è di Cauchy sia per $\|\cdot\|_1$ che per $\|\cdot\|_2$.

Esercizio 3.41.

TROVA L'IMBROGLIO:

“**Proposizione.**” Tutte le norme di Banach sullo stesso X sono equivalenti.

“Dimostrazione.”

Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ di Banach. Notiamo che $\|\cdot\|_3$ è più fine delle altre due e che (x_n) è di Cauchy per $\|\cdot\|_3$ se e solo se lo è per le altre due, quindi per il punto 1. della proposizione precedente la successione converge in $\|\cdot\|_3$. Segue dunque che, poiché $\|\cdot\|_3$ è più fine allora è confrontabile con le altre due, quindi le tre norme sono equivalenti. \square

3.4 SVT I-numerabili e paranorme

Definizione 3.42 (Paranorma).

Una **paranorma** sull \mathbb{K} -spazio vettoriale X è una funzione $q : X \rightarrow [0, \infty)$ tale che

1. $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$
2. $q(\lambda x) \leq q(x)$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| \leq 1$
3. Se $\lambda_k \rightarrow 0$ in \mathbb{K} allora $q(\lambda_k x) \rightarrow 0$

Inoltre q è **definita** se vale

$$q(x) = 0 \iff x = 0.$$

Osservazione 3.43.

Dalla proprietà 2. segue che $q(\lambda x) = q(x)$ se $|\lambda| = 1$ e che $q(\lambda x) \leq q(\mu x)$ se $|\lambda| \leq |\mu|$.
In particolare $q(x) = q(-x)$.

Quindi $d(x, y) = q(x - y)$ è una (semi)distanza su X (distanza se q definita).

Esercizio 3.44.

Dimostrare che (X, d) è uno SVT per d indotta da paranorma q .

Esercizio 3.45.

Sia X un K -SVT I-numerabile. Allora la sua topologia proviene da una paranorma (la quale è definita sse X è T_0).

Dimostrazione.

TRACCIA

- Sia $\{U_n\}_{n \geq 0}$ base numerabile di intorno bilanciati di 0 tali che $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$.
- Estendiamo la successione per $n < 0$ ponendo $U_k = U_{k+1} + U_{k+1}$ per ogni $k < 0$.
Nota che $U_{k+1} + U_{k+1} \subseteq U_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e gli $\{U_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sono intorno bilanciati.
- Poniamo

$$q(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^r 2^{-k_i} \mid r \in \mathbb{N}, (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \text{ t.c. } x \in U_{k_1} + U_{k_2} + \dots + U_{k_r} \right\}$$

Mostra che q è una paranorma su X .

- Nota che $\{q < 2^{-n-1}\} \subseteq U_n \subseteq \{q \leq 2^{-n}\}$ e quindi q induce la topologia di X .

□

Capitolo 4

Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di Hahn-Banach ci permetterà di costruire funzionali lineari continui.

Funzionali sono i surrogati delle coordinate, che non ci sono in generale, e anche quando ci sono possono essere più complicate di quanto non valga la pena.

4.1 Teorema di Hahn-Banach reale

Definizione 4.1 (Funzione sublineare).

Una funzione $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ è

- **positivamente omogenea** se per $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ abbiamo $p(tu) = tp(u)$,
- **subadditiva** se per ogni $u, v \in X$ vale $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$,
- **sublineare** se è subadditiva e positivamente omogenea.

Pillola filosofica: Teorema di esistenza senza buon criterio per scegliere un candidato spesso chiama l'uso di scelta.

Teorema 4.2 (Hahn-Banach).

Siano X uno spazio vettoriale reale, $M \subseteq X$ sottospazio, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublineare, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $f \leq p$ su M .

Allora f si estende a $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $F \leq p$.

Dimostrazione.

Vogliamo applicare il lemma di Zorn. Sia

$$\mathcal{M} = \{g \in N' \mid g \leq p, M \subseteq N \subseteq X\}$$

Notiamo che \mathcal{M} è ordinato secondo l'inclusione dei sottografici, cioè

$$g \preceq h \iff \Gamma g \subseteq \Gamma h \iff \begin{cases} \text{dom } g \subseteq \text{dom } h \\ g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \text{dom } g \end{cases}$$

Condizione delle catene vale:

se $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ catena in \mathcal{M}

allora $\bigcup_{\alpha} \Gamma g_{\alpha}$ è ancora il grafico di una funzione lineare minore di p .

Dunque per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale in \mathcal{M} . Per concludere basta mostrare che un massimale di \mathcal{M} è definito su tutto X , cioè vogliamo mostrare che se $g \in \mathcal{M}$ è tale che $\text{dom } g \neq X$ allora esiste $g' \in \mathcal{M}$ che estende g .

Sia dunque per assurdo $x \in X \setminus N$ dove $N = \text{dom } g$. Vogliamo estendere g a $h : N \oplus \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ con $h \leq p$. In quanto estensione

$$h(u + tx) = h(u) + th(x) = g(u) + th(x),$$

dove u generico elemento di N . Sia $\alpha = h(x)$ e cerchiamo un opportuno α in modo tale che $h \leq p$.

Chiediamo che $\forall u \in N, \forall t \in \mathbb{R}$

$$g(u + tx) \leq p(u + tx),$$

o equivalentemente per ogni $t > 0$ chiediamo

$$\begin{cases} h(u + tx) \leq p(u + tx) \\ h(v - tx) \leq p(v - tx) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} g(u/t) + \alpha \leq p(u/t + x) \\ g(v/t) - \alpha \leq p(v/t - x) \end{cases}$$

dunque vogliamo

$$-p(v/t - x) + g(v/t) \leq \alpha \leq p(u/t + x) - g(u/t)$$

cioè

$$\sup_{v \in N} -p(v - x) + g(v) = m_* \leq \alpha \leq m^* = \inf_{u \in N} p(u + x) - g(u),$$

dunque un tale α esiste solo se $m_* \leq m^*$. Questo è vero perché

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x + v - x) \leq p(u + x) + p(v - x).$$

□

Osservazione 4.3.

Non serve questo teorema per spazi di dimensione finita o spazi di Hilbert, in quanto in quei casi abbiamo estensioni canoniche (se $\text{dom } f = N$, considero la proiezione ortogonale su N e poi applico f).

Corollario 4.4 (Hahn-Banach per spazi normati).

Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare allora ogni funzione continua su Y si estende ad una su X con la stessa norma.

Dimostrazione.

Se $f \in Y^*$, per la definizione di norma duale si ha

$$f(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\| \doteq p(x),$$

quindi f si estende a $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare con $F(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$, cioè $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Poiché F estende f in realtà abbiamo uguaglianza tra le norme¹. □

¹consideriamo la stessa successione in Y che realizza la definizione di $\|f\|_{Y^*}$

Osservazione 4.5.

Se X è di Hilbert, una estensione di $f \in Y^*$ è data dal proiettore ortogonale su² Y $P : X \rightarrow \bar{Y}$. A questo punto definendo $F = f \circ P$.

Corollario 4.6 (ricostruire norma tramite funzionali).

Se $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato reale e Y è sottospazio lineare e $x \in X$, allora la norma di x si può ricostruire dalla norma duale di X^* , in particolare³

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle$$

Dimostrazione.

Se $f \in X^*$ e $\|f\| \leq 1$ allora

$$\langle f, x \rangle \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies \|x\| \leq \max_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle.$$

D'altra parte, per il corollario precedente (4.4) nel caso particolare di $Y = x\mathbb{R}$, il funzionale lineare continuo

$$\phi : \begin{array}{ccc} x\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\| \end{array}$$

si estende a tutto X con la stessa norma. Se $x = 0$ allora $\|\phi\| = 0$ per linearità, altrimenti $\|\phi\| = 1$ su $x\mathbb{R}$. In ogni caso $\|\phi\| \leq 1$, quindi per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|$. \square

Definizione 4.7 (Operatore aggiunto).

Per $T : X \rightarrow Y$ lineare continua tra spazi normati, si definisce l'**operatore aggiunto** o **trasposto** di T come

$$T^* : \begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array}$$

Proposizione 4.8 (Norma dell'aggiunto).

La norma di T^* coincide con la norma di T , in particolare T^* è continuo.

Dimostrazione.

Segue dai corollari di Hahn-Banach sopra, infatti

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L(Y^*, X^*)} &= \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \|T^* f\|_{X^*} = \sup_{f \in Y^*, \|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1, x \in X} \langle T^* f, x \rangle = \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f, Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, Tx \rangle| \stackrel{(4.6)}{=} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|_{L(X, Y)}. \end{aligned}$$

\square

4.1.1 Inclusione isometrica nel biduale

Proposizione 4.9 (Inclusione isometrica nel biduale).

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale e consideriamo la mappa

$$i_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & val_x \end{array}$$

Essa è una inclusione isometrica.

²stiamo supponendo Y chiuso a meno di passare alla chiusura

³dove $\langle f, x \rangle = f(x)$ quando f è forma lineare, come in questo caso.

Dimostrazione.

È immediato vedere che i_X è lineare e continua⁴ Però sappiamo che per ogni $x \in X$ esiste $f \in X$ tale che $\|f\| \leq 1$ e $\|x\| = \langle f, x \rangle$, cioè $\|val_x\| = \|x\|$, ovvero $i_X : X \rightarrow X^{**}$ è una inclusione isometrica. \square

Definizione 4.10 (Spazio riflessivo).

Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è **riflessivo** se $i_X : X \rightarrow X^{**}$ è surgettiva, ovvero se i_X è una isometria.

Osservazione 4.11.

Esistono spazi di Banach non riflessivi ma isometrici al loro biduale. Nella definizione chiediamo che la mappa canonica i_X sia una isometria.

Esempio 4.12.

Sia $c_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x(n) = o_n(1)\}$. Questo è un sottospazio chiuso di

$$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\infty < \infty\}$$

Se $\widehat{\mathbb{N}}$ è la compattificazione di \mathbb{N} ad un punto ($\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) allora c_0 sono le funzioni $\widehat{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ continue che valgono 0 in ∞ ristrette a \mathbb{N} .

Risulta che l'inclusione $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ è l'inclusione nel biduale, infatti c_0^* si può identificare con

$$\ell_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|f\|_1 = \sum |f_n| < \infty\right\}$$

identificando $f \in \ell_1$ con $\tilde{f}(x) = \sum f_n x_n$ (che converge perché assolutamente convergente). Risulta che questa identificazione è una isometria.

Con un processo analogo identifichiamo ℓ_1^* con ℓ_∞ .

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{\subseteq} & \ell_\infty \\ & \searrow i_{c_0} & \swarrow \cong \\ & c_0^{**} & \end{array}$$

Osservazione 4.13.

Se X è Hilbert allora $X \hookrightarrow X^{**}$ è surgettiva tramite l'isomorfismo di Riesz

$$x \mapsto \langle \cdot, x \rangle \mapsto \langle \cdot, \langle \cdot, x \rangle \rangle = val_x$$

Osservazione 4.14.

Se X normato, $i_X : X \rightarrow X^{**}$ ci permette di costruire un completamento considerando $i_X(X)$ in X^{**} in quanto il biduale è completo.

4.1.2 Sulle ipotesi del teorema di Hahn-Banach

Il funzionale p nelle ipotesi è positivamente omogeneo e subadditivo (cioè sublineare).

Osservazione 4.15.

Una funzione f è subadditiva se, detto Γ il grafico di f , $\Gamma + (x, f(x))$ sta sempre sopra Γ .

Esercizio 4.16.

Mostra le seguenti implicazioni

⁴ $\langle val_x, f + \lambda g \rangle = f(x) + \lambda g(x) = \langle val_x, f \rangle + \lambda \langle val_x, g \rangle$ e $\|val_x\| \leq \|x\|$ in quanto $|\langle val_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\|$.

- Positivamente omogeneo e subadditivo implica convesso
- Positivamente omogeneo e convesso implica subadditivo (e quindi sublineare)
- Subadditivo, convesso e $p(0) \leq 0$ implica positivamente omogeneo

Esercizio 4.17.

Trovare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia subadditiva, convessa ma non positivamente omogenea.

Esercizio 4.18.

Nel teorema di Hahn-Banach si può prendere più in generale p convesso?

Sì, ma si riconduce al caso standard trovando un nuovo funzionale p_0 che sia sublineare e tale che $f \leq p_0 \leq p$.

4.2 Estensioni e altre versioni di Hahn-Banach

4.2.1 Teorema di Hahn-Banach complesso

Teorema 4.19 (Hahn-Banach complesso).

Sia X un \mathbb{C} -spazio vettoriale normato, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio vettoriale e $f \in Y^*$, allora f si estende ad un funzionale lineare su X con uguale norma.

Dimostrazione.

Sia $(X_0, \|\cdot\|)$ lo spazio normato reale ottenuto da X per restrizione degli scalari e sia $f_0 = \Re f$. Notiamo che f_0 è un funzionale lineare continuo reale su Y , che quindi possiamo estendere a $\tilde{f}_0 \in X^*$ mantenendo la norma. Definiamo

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0(x) - i\tilde{f}_0(ix).$$

Notiamo che $\tilde{f}|_Y = f$, infatti

$$f(y) = \Re(f(y)) + i\Im(f(y)) = \Re(f(y)) - i\Im(if(iy)) = \Re(f(y)) - i\Re(f(iy)).$$

Si ha anche che \tilde{f} è \mathbb{C} -lineare e che $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

(COMPLETA PER ESERCIZIO)

□

4.2.2 Teoremi di separazione dei convessi

Proposizione 4.20 (Funzionali di Minkowski sono sublineari).

Se C è convesso e $0 \in C$ allora p_C è sublineare.

Dimostrazione.

Dimostriamo le due proprietà:

pos.omo. Per ogni $\lambda > 0$, $x \in X$ si ha che

$$p_C(\lambda x) = \inf \{t > 0 \mid \lambda x \in tC\} = \inf \{\lambda s > 0 \mid \lambda x \in \lambda sC\} = \lambda p_C(x)$$

subadd. Per ogni $x, y \in X$ siano a e b tali che

$$a > p_C(x), \quad b > p_C(y).$$

Se uno tra $p_C(x)$ e $p_C(y)$ è infinito allora la tesi vale trivialmente. Supponiamo dunque che questo non sia il caso. Allora $x \in aC$ e $y \in bC$, cioè $x/a, y/b \in C$. Notiamo che

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b}$$

dunque $\frac{x+y}{a+b} \in C$ per convessità, cioè $x+y \in (a+b)C$ e quindi $p_C(x+y) \leq a+b$. Passando all'estremo inferiore per $a > p_C(x)$ e $b > p_C(y)$ troviamo

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

□

Osservazione 4.21.

Se C è un disco, cioè è assorbente, bilanciato e convesso allora p_C è una seminorma.

Esercizio 4.22.

Se X SVT, $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineare non continua allora per ogni aperto A non vuoti si deve avere $F(A) = \mathbb{K}$.

Lemma 4.23.

Ogni funzionale lineare non nullo su uno SVT è una mappa aperta

Dimostrazione.

Sia $F \neq 0$ lineare con $F : X \rightarrow \mathbb{K}$. Vogliamo mostrare che F manda intorno di $x \in X$ in intorno di $F(x) \in \mathbb{K}$. Poiché X è SVT, basta mostrare che $F(U)$ è intorno di $0 \in \mathbb{K}$ per ogni U intorno di $0 \in \mathbb{K}$. In realtà basta prendere una base di intorno di 0 , quindi consideriamo gli U bilanciati. Notiamo che $F(U)$ è un insieme bilanciato di \mathbb{K} , infatti se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$ allora $\lambda F(U) = F(\lambda U) \subseteq F(U)$, quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- $F(U) = \{0\}$, ma allora $F = 0$ assurdo
- $F(U)$ è un disco, dunque è intorno di 0 ok.
- $F(U) = \mathbb{K}$ ok.

□

Corollario 4.24 (Discontinuità per funzionali lineari).

$F : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineare è discontinua se e solo se è surgettiva su ogni aperto non vuoto.

Dimostrazione.

Se F non è surgettiva su un aperto non vuoto, a meno di traslazione F non è surgettiva su un intorno di 0 , quindi non è surgettiva su un qualche aperto bilanciato. Quindi esiste un elemento che non è nella immagine, ma allora F non assume valori di modulo superiore a questo valore non raggiunto. □

Teorema 4.25 (Separazione di convessi).

Valgono i seguenti teoremi:

- Siano X un \mathbb{R} -SVT, A un suo aperto convesso non vuoto e B un convesso non vuoto disgiunto da A . Allora esistono $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A$, $b \in B$ si ha

$$\langle F, a \rangle < \gamma \leq \langle F, b \rangle,$$

cioè $A \subseteq \{F < \gamma\}$ e $B \subseteq \{F \geq \gamma\}$.

- Sia X un \mathbb{R} -SVTLC⁵, K convesso compatto e C convesso chiuso disgiunti. Allora esistono $F \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ tali che per ogni $x \in K$ e per ogni $y \in C$ vale

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \langle F, y \rangle$$

ovvero $K \subseteq \{F \leq \gamma_1\}$ e $C \subseteq \{F \geq \gamma_2\}$.

⁵La locale convessità serve, infatti esistono SVT metrizzabili che non hanno funzionali lineari continui e in tal caso la tesi non vale neanche per $K = \{x\}$ e $C = \{y\}$.

Dimostrazione.

Diamo le due dimostrazioni

- Sia $x_0 \in B - A = \{b - a \mid a \in A, b \in B\}$. Poiché $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \neq 0$. Sia

$$C = A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$

Dalla definizione è evidente che C è un aperto (unione di traslati di A che è aperto) e contiene 0. C è convesso perché la somma algebrica di due convessi è un convesso (quindi $A - B$ convesso e traslare un convesso lo lascia convesso). Essendo aperto in particolare è assorbente per (2.11).

Quindi il funzionale di Minkowski associato p_C è un funzionale sublineare $X \rightarrow \mathbb{R}$ (non raggiunge $+\infty$ perché assorbente). Sia $f_0 : \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da $\langle f_0, x_0 \rangle = 1$. Poiché $0 \notin A - B$, $x_0 \notin C$ e quindi⁶ $p_C(x_0) \geq 1$. Applicando il teorema di Hahn-Banach (4.2) f_0 si estende a $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $F \leq p_C$ in X . Per ogni $a \in A$, $b \in B$, poiché $a - b + x_0 \in C$, si ha

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p_C(a - b + x_0) \leq 1$$

cioè $F(a) \leq F(b)$. Ponendo $\gamma = \sup_A F$ abbiamo le disuguaglianze volute se mostriamo che $F(a) < \gamma$ per ogni $a \in A$. Per il lemma (4.23) si ha che F è una mappa aperta, quindi $F(A)$ è un aperto di \mathbb{R} tale che $\sup F(A) \leq \gamma$, ma allora il valore γ non è raggiunto.

Concludiamo notando che F è continuo⁷ perché è limitato superiormente sull'aperto A .

- Sia V intorno convesso di 0 tale che $(K + V) \cap C = \emptyset$, basta usare (2.16) e poi notare che in questo caso abbiamo una base di intorni convessi. Evidentemente $K + V$ è aperto e convesso⁸. Per il primo punto esiste $F \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in K + V$ e $y \in C$

$$\langle F, x \rangle < \gamma \leq \langle F, y \rangle.$$

Sia $\gamma_1 = \max_{x \in K} \langle F, x \rangle$, allora $\gamma_1 < \gamma$ e quindi se $x \in K$

$$\langle F, x \rangle \leq \gamma_1 < \gamma \leq \langle F, y \rangle$$

che è la tesi a meno di definire $\gamma_2 = \gamma$.

□

4.3 Parentesi esercizi

Definizione 4.26 (Misura non atomica).

Uno spazio di misura (X, \mathcal{Q}, μ) è **non-atomico** se per ogni $A \in \mathcal{Q}$ di misura positiva contiene $B \in \mathcal{Q}$ di misura positiva strettamente minore.

Esercizio 4.27 (Sierpinski).

Se (X, \mathcal{Q}, μ) è non-atomico allora è divisibile, cioè per ogni $A \in \mathcal{Q}$ e per ogni $\lambda \in [0, \mu(A)]$ esiste $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{Q}$, tale che $\mu(B) = \lambda$.

⁶ricorda che $\{p_C < 1\} \subseteq C$

⁷volendo anche perché limitato su intorno di 0 o anche perché non è surgettiva sull'aperto A . Vedi esercizio sopra per l'ultima.

⁸somma di convessi è convessa

Inoltre, vedendo la misura come funzione $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \mu(X)]$, esiste una inversa destra monotona crescente per inclusione $E : [0, \mu(X)] \rightarrow \mathcal{Q}$, cioè si ha $\mu \circ E = id$ e per ogni $t \in [0, \mu(X)]$ abbiamo $\mu(E_t) = t$ e $E_t \subseteq E_{t'}$ per ogni $t \leq t'$.

Dimostrazione.

Vogliamo applicare Zorn all'insieme delle inverse destre monotone parziali, cioè

$$\Gamma = \{E : S \rightarrow \mathcal{Q} \mid S \subseteq [0, \mu(X)], E \text{ monot. cresc. per } \subseteq, \mu(E(t)) = t \forall t \in S\}$$

Chiaramente la condizione sulle catene funziona quindi Γ ha un elemento massimale. Mostriamo poi che il dominio del massimale è chiuso e che è denso, e quindi deve essere tutto. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) \square

Esercizio 4.28.

Sia (X, \mathcal{Q}, μ) uno spazio di misura e sia $0 < p \leq 1$. Definiamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

e sia $q : \mathcal{L}^p \rightarrow [0, \infty)$ con $q(f) = \int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$.

Notiamo che $q(f+g) \leq q(f) + q(g)$, che $q(\lambda f) = |\lambda| q(f)$ e che $q(f) = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.. Dunque q definisce una semidistanza $d_q(f, g) = q(f - g)$, che induce una distanza sul quoziente

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \overline{\{0\}}$$

Questa distanza rende $L^p(X)$ uno SVT metrico completo omeomorfo a $L^1(X)$.

Mostrare che se (X, \mathcal{Q}, μ) è non-atomico e $p < 1$ allora $L^p(X)$ non ha funzionali lineari continui diversi da 0 e non ha aperti convessi diversi da $L^p(X)$.

Esercizio 4.29.

Sia $X = \mathbb{N}$ con la misura di cardinalità. In questo caso $L^p(\mathbb{N}) = \ell_p$ con la definizione di prima. Questo è uno SVT metrico completo ma la misura è puramente atomica (misura ricostruibile dai singoletti). Mostra che $(\ell_p)^* = (\ell_1)^*$.

Dimostrazione.

Nota che se $0 < p \leq q \leq \infty$ allora $\ell_p \subseteq \ell_q$ e l'inclusione è una mappa continua, quindi una mappa lineare su ℓ_q restituisce una mappa lineare su ℓ_p , quindi abbiamo $(\ell_p)^* \supseteq (\ell_1)^*$, va mostrato che non ce ne sono altri. (CONCLUDERE PER ESERCIZIO) \square

Capitolo 5

Costruzioni su spazi normati

Osservazione 5.1.

Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio vettoriale e $(X, \|\cdot\|)$ è normato allora Y è (semi)normato con la norma indotta. La topologia indotta è quella di sottospazio

Definizione 5.2 (Prodotto di spazi (semi)normati).

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi (semi)normati, la (semi)norma prodotto è data da

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max \{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Questa rende $X \times Y$ uno spazio (semi)normato e

$$B_{X \times Y}((0, 0), 1) = B_X(0, 1) \times B_Y(0, 1),$$

cioè la topologia indotta è la topologia prodotto.

Definizione 5.3 (Somma diretta topologica).

Due sottospazi di $(X, \|\cdot\|)$ Y e Z sono in **somma diretta algebrica** se $+|_{Y \times Z} : Y \times Z \rightarrow X$ è bigettiva. Se $+|_{Y \times Z}$ è anche un omeomorfismo diciamo che X è la **somma diretta topologica** di Y e Z .

Osservazione 5.4.

X è la somma diretta topologica di Y e Z se X è isomorfo come spazio normato a $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$.

Osservazione 5.5.

La mappa $+|_{Y \times Z}$ è sempre continua, ma in generale non è un omeomorfismo.

Definizione 5.6 (Proiettore).

Un endomorfismo lineare $P : X \rightarrow X$ si dice **proiettore** se è idempotente, cioè $P^2 = P$.

Osservazione 5.7.

Un proiettore definisce una decomposizione in somma diretta algebrica $X = \ker P \oplus \text{Imm } P$. Viceversa, ad ogni decomposizione in somma diretta algebrica possiamo associare un proiettore

Osservazione 5.8.

I proiettori $P_Y : X \rightarrow Y$ e $P_Z = id - P_Y : X \rightarrow Z$ sono continui se e solo se la somma è topologica, infatti

$$(+|_{Y \times Z})^{-1} = P_Y \times P_Z.$$

Definizione 5.9 (Spazio (semi)normato quoziente).

Se $(X, \|\cdot\|)$ è (semi)normato e Y è un suo sottospazio allora come spazio vettoriale

$$X/Y = \{x + Y \mid x \in X\}.$$

Su essa definiamo la seguente norma: se $\xi \in X/Y$ allora¹

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

Esercizio 5.10.

$\|\cdot\|_{X/Y}$ è una seminorma su X/Y e rende la proiezione $\pi : X \rightarrow X/Y$ una applicazione aperta e continua. Più precisamente

$$\pi(B_X(0, 1)) = B_{X/Y}(0, 1)$$

Dimostrazione.

Continua perché $\|\pi(x)\|_{X/Y} \leq \|x\|$ per definizione di estremo inferiore, quindi π ha norma come operatore ≤ 1 , e quindi è continua. \square

Osservazione 5.11.

Notiamo che X/Y ha effettivamente la topologia quoziente indotta da π

Esercizio 5.12.

La (semi)norma quoziente è una norma se e solo se Y è chiuso (a prescindere dal fatto che $\|\cdot\|_X$ sia una norma o seminorma).

Osservazione 5.13.

Se Y e Z sono seminormati allora $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$ come spazi seminormati.

Osservazione 5.14.

Se $Y \subseteq X$ ed esiste² Z tale che $X = Y \oplus Z$ allora $Z \cong X/Y$.

Osservazione 5.15.

In generale X non è isomorfo a $Y \times X/Y$.

Osservazione 5.16.

Per quanto riguarda la completezza in queste costruzioni:

- Y sottospazio di X con X di Banach è un Banach se e solo se è chiuso
- $(Y \times Z, \|\cdot\|_{Y \times Z})$ è Banach se e solo se lo sono sia Y che Z
- Se $(X, \|\cdot\|)$ è normato e $Y \subseteq X$ è un sottospazio chiuso allora $(X, \|\cdot\|)$ è completo se e solo se sia Y che X/Y sono completi.

Notiamo che l'ultima proprietà implica la seconda, infatti $Y \cong \frac{Y \times Z}{Z}$

¹pensando a ξ come un traslato di Y , la norma che stiamo definendo è la distanza di questo spazio affine dall'origine.

²ci sono casi in cui non esiste, come $c_0 \subseteq \ell_\infty$

5.1 Costruzione di duali

Proposizione 5.17 (Duale del prodotto).

Dati X e Y spazi di Banach, il duale di $X \times Y$ è isometricamente isomorfo a

$$(X^* \times Y^*, \|\cdot\|)$$

dove $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{X^*} + \|\eta\|_{Y^*}$ (che è topologicamente equivalente a $\|\cdot\|_{X^* \times Y^*}$).

$$(X^* \times Y^*, \|P_{X^*}(\cdot)\|_{X^*} + \|P_{Y^*}(\cdot)\|_{Y^*}) \cong ((X \times Y)^*, \|\cdot\|_{(X \times Y)^*}).$$

Proposizione 5.18 (Duale di sottospazi e di un quoziente).

Dato Y sottospazio chiuso di X Banach abbiamo le seguenti isometrie lineari:

1. $Y^* \cong X^*/Y^\perp$
2. $(X/Y)^* \cong Y^\perp \subseteq X^*$

dove $Y^\perp = \text{Ann}(Y) = \{f \in X^* \mid f|_Y = 0\} = \{f \in X^* \mid Y \subseteq \ker f\}$.

Dimostrazione.

Data l'inclusione $j_Y : Y \rightarrow X$ otteniamo $j_Y^* : X^* \rightarrow Y^*$. Il nucleo di j_Y^* sono i funzionali in X^* che si restringono al funzionale nullo su Y^* , cioè gli $f \in X^*$ tali che

$$j_Y^*(f) = f \circ j_Y = f|_Y = 0$$

e quindi $\ker j_Y^* = \text{Ann}(Y)$. Per il teorema di Hahn-Banach (4.2), j_Y^* è surgettiva in quanto ogni funzionale su Y si estende ad uno su X perché X Banach e Y chiuso. Per il teorema di isomorfismo esiste un'unica mappa ϕ che fa commutare

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{j_Y^*} & Y^* \\ \pi \downarrow & \searrow \phi & \\ X^*/\text{Ann}(Y) & & \end{array}$$

Per questioni di algebra ϕ è lineare e poiché j_Y^* è continua e π induce la topologia quoziente, ϕ è continua. Verifichiamo che è una isometria.

$$B_{X^*/\text{Ann}(Y)}(0, 1) = \pi(B_{X^*}(0, 1))$$

$$\phi(B_{X^*/\text{Ann}(Y)}(0, 1)) = \phi(\pi(B_{X^*}(0, 1))) = j_Y^*(B_{X^*}(0, 1)) \stackrel{(4.2)}{=} B_{Y^*}(0, 1).$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'estensione data da Hahn-Banach mantiene la norma.

Data la proiezione $\pi : X \rightarrow X/Y$ otteniamo $\pi^* : (X/Y)^* \rightarrow X^*$. Sia $\varphi \in (X/Y)^*$ e $f = \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi$. Si ha che

$$\varphi(B_{X/Y}) = \varphi(\pi(B_X)) = f(B_X),$$

quindi $\|\varphi\|_{(X/Y)^*} = \|f\|_{X^*}$, cioè π^* è una immersione isometrica.

Sia $f \in X^*$, si ha che $f \in \text{Ann}(Y)$ se e solo se $Y \subseteq \ker f$ che succede se e solo se f si fattorizza tramite π per proprietà universale. Quindi $f \in \text{Ann}(Y)$ se e solo se $f = \varphi \circ \pi = \pi^*(\varphi)$ per qualche $\varphi : X/Y \rightarrow \mathbb{R}$, cioè se e solo se $f \in \pi^*((X/Y)^*)$. Quindi $\text{Imm } \pi^* = \text{Ann}(Y)$.

Restringendo il codominio all'immagine troviamo quanto voluto. \square

Capitolo 6

Completezza e duali di qualche spazio

6.1 Elenco di spazi completi

Proposizione 6.1.

Sia S insieme e E Banach, allora lo spazio normato $(\mathcal{B}(S, E), \|\cdot\|_{\infty, S})$ è completo

Dimostrazione.

[PERSO, RIGUARDA POI]

tale che $\|f(s)\| = \|\sum_k f_k(s)\| \leq \sum_k \|f_k(s)\| \leq \sum \|f\|_{\infty, S}$
quindi $\|f\|_{\infty, S}$

□

Uno degli strumenti dell'analista: aggiungere e togliere, cioè

προσθαφαίρεσις

Lemma 6.2.

Se $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(S, E)$ con f_k continua in s_0 per ogni k e $f_k \rightarrow f$ uniformemente allora anche f è continua in s_0

Dimostrazione.

Consideriamo

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(s_0)\| &\leq \|f(s) - f_k(s)\| + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| + \|f_k(s_0) - f(s_0)\| \leq \\ &\leq 2\|f - f_k\|_{\infty, S} + \|f_k(s) - f_k(s_0)\| \end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di $f_k \rightarrow f$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_n\|_{\infty, S} \leq \varepsilon/3$.

Per la continuità in s_0 di f_n esiste un intorno U di s_0 tale che $\|f_n(s) - f_n(s_0)\| \leq \varepsilon/3$ per ogni $s \in U$. Allora per ogni $s \in U$ si ha

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 6.3.

Sia S spazio topologico, E banach, allora $\mathcal{BC}(S, E)$ è completo.

Dimostrazione.

Basta mostrare che $\mathcal{BC}(S, E)$ è chiuso in $\mathcal{B}(S, E)$. Questo segue dal fatto che la continuità in un punto $s_0 \in S$ si conserva per convergenza uniforme, che è il lemma precedente. \square

Esempio 6.4.

Sia $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di \mathbb{N} e E un banach, allora

$$c(E) \doteq \{x : \mathbb{N} \rightarrow E, \text{ convergente} \} \cong \mathcal{BC}(S, E)$$

Questo mostra che $c(E)$ è chiuso (e quindi completo) in $\ell_\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

Conseguenze:

Proposizione 6.5.

Lo spazio $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ è completo

Dimostrazione.

Considerando l'inclusione isometrica

$$R : \begin{array}{ccc} L(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{B}(B_X(0, 1), Y) \\ T & \longmapsto & T|_{B_X(0, 1)} \end{array}$$

basta vedere che $R(L(X, Y))$ è chiuso.

Se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L(X, Y)$ è tale che $R(T_n) \rightarrow f$ uniformemente in $\mathcal{B}(B_X(0, 1), Y)$ allora mostriamo che f è la restrizione a $B_X(0, 1)$ di una qualche lineare T .

Mostriamo che le T_n convergono puntualmente per ogni $x \in X$: se $x = 0$ ok, se $x \neq 0$

$$T_n(x) = \|x\| T_n(x/\|x\|) = \|x\| R(T_n)(x/\|x\|) \rightarrow \|x\| f(x/\|x\|)$$

Sia $T : X \rightarrow Y$ definita da $T(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$

[MOSTRARE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME, ME LO SONO PERSONO] \square

Corollario 6.6 (Duale di spazio normato è banach).

Il duale di uno spazio normato è sempre banach.

Teorema 6.7 (Integrazione per serie).

Sia (X, \mathcal{Q}, μ) è uno spazio di misura e sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ tali che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$$

Allora $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$ converge q.o. e in norma 1.

Dimostrazione.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_k(x)|.$$

Notiamo che (g_n) è una successione di funzioni misurabili non negative crescente. Inoltre $g_n \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)|$ per definizione di serie.

Per convergenza monotona

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 \leftarrow \sum_{k=0}^n \|f_k\|_1 = \int_X g_n d\mu \rightarrow \int_X g d\mu$$

cioè $\inf_X g d\mu = \sum k \in \mathbb{N} \|f\|_1 < \infty$, cioè $g \in \mathcal{L}^1$.

Inoltre $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ è una successione dominata da g :

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f_k(x)| \leq g(x).$$

Quindi la serie $\sum f_k(x)$ è una serie assolutamente convergente per ogni x dove $g < \infty$. Poiché $\int g < \infty$ le eccezioni sono trascurabili, quindi quasi ovunque $\sum f_k(x)$ è assolutamente convergente.

Sia $f(x) = \sum f_k(x)$ dove la serie converge. Notiamo che

$$|f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| = g(x),$$

quindi $\|f\|_1 \leq \int g d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1$.

Applicando come prima la stima alle code

$$\|f - s_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_1 = o(1)$$

dove l'ultimo termine va a 0 perché $\sum \|f_k\|_1$ è convergente. □

Corollario 6.8 (Weil).

Siano $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ convergenti in $\|\cdot\|_1$. Allora esiste n_k successione strettamente crescente di indici tali che f_{n_k} converge quasi ovunque ed è dominata in \mathcal{L}^1 .

Dimostrazione.

Sia f il limite in $\|\cdot\|_1$. Data questa convergenza consideriamo una sottosuccessione n_k tale che $\|f - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$. Scrivendo la successione in termini di una somma telescopica

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=1}^k (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$$

si ha per il teorema di integrazione per serie¹ (6.7) f_{n_k} converge quasi ovunque e in \mathcal{L}^1 , inoltre è dominata da

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \geq |f_{n_k}(x)|$$

con $g(x) \in \mathcal{L}^1$. □

Proposizione 6.9 (L^1 è completo).

Se (X, \mathcal{Q}, μ) è uno spazio di misura, $L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è completo.

Dimostrazione.

Segue immediatamente dal teorema di integrazione per serie (6.7). □

Osservazione 6.10.

La convergenza quasi ovunque di funzioni $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ è **NON** la convergenza rispetto a una topologia opportuna su $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$.

Ogni convergenza topologica in X insieme ha la seguente proprietà **di Urison**: $x_n \rightarrow x$ rispetto alla topologia se e solo se per ogni sottosuccessione x_{n_k} esiste una sotto-sottosuccessione $x_{n_{k_j}} \rightarrow x$.

¹ $\|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\|_1 \leq \|f_{n_0}\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} - f\|_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j-1}} - f\|_1 < \infty$

Dimostrazione.

Se $x_n \rightarrow x$ converge ok. Se non converge allora esiste un intorno U di x tale che $x_n \notin U$ frequentemente, quindi troviamo una sottosuccessione x_{n_k} che sta sempre fuori da U , quindi nessuna sua sotto-sottosuccessione può convergere a x . \square

La convergenza q.o. per successioni in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ non ha la proprietà di Urisohn.

Definizione 6.11 (Operatore di composizione).

Se E è uno spazio di funzioni con codominio \mathbb{R} e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo l'operatore di composizione per f come $E \ni u \mapsto f \circ u$.

Lemma 6.12.

Sia u_k una successione che converge a u in $\|\cdot\|_p$. A meno di sottosuccessione $u_k \rightarrow u$ quasi ovunque e dominata in \mathcal{L}^p .

Dimostrazione.

Teorema di Weil (6.8) in \mathcal{L}^p . \square

Proposizione 6.13.

Lo spazio $L^p(X, \mathcal{Q}, \mu)$ per $0 \leq p < \infty$ è completo.

Dimostrazione.

L^p ed L^1 NON sono isomorfi come spazi di Banach in generale², ma esiste un omeomorfismo localmente Lipschitz e questo basta a mostrare la completezza: se u_k è una successione di Cauchy in L^p , se Φ è Lipschitz allora $\Phi(u_k)$ è ancora di Cauchy in L^1 e quindi converge, poi torno indietro con Φ^{-1} , che mantiene il limite per continuità.

Consideriamo

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 \\ u & \longmapsto & |u|^p \operatorname{sgn}(u) \end{array}$$

Chiaramente è invertibile mandando $v \in L^1$ in $|v|^{1/p} \operatorname{sgn} v$. La mappa Φ è l'operatore di composizione con la funzione $f(t) = |t|^p \operatorname{sgn} t$. La continuità degli operatori di composizione è un fatto generale. Se $u_k \rightarrow u$ converge in $\|\cdot\|_p$ allora per il lemma a meno di sottosuccessione converge q.o. e dominata, quindi componendo con f abbiamo ancora convergenza quasi ovunque per continuità ($f(u_k) \rightarrow f(u)$ q.o.). Se $|u_k| \leq g$ in \mathcal{L}^p allora $|u_k|^p \leq g^p$ in \mathcal{L}^1 , similmente per Φ^{-1} , quindi effettivamente Φ è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che Φ è localmente lipschitz: siano $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|_1 = \int_X |f(u(x)) - f(v(x))| d\mu(x)$$

ma se $t < s$ allora $|f(t) - f(s)| \leq \sup_{t \leq \xi \leq s} |f'(\xi)| |t - s|$ e $|f'(xi)| = p |xi|^{p-1} \leq p(\max\{|t|, |s|\})^p$, quindi

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)|_1 &\leq p \int_X \max\{|u(x)|^{p-1}, |v(x)|^{p-1}\} |u(x) - v(x)| d\mu \leq \\ &\leq p \int_X \left(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\right) |u(x) - v(x)| d\mu \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq p \left(\left(\int_X |u|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\int_X |v|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \right) \left(\int_X |u - v|^p \right)^{1/p} = \\ &\stackrel{p-1 \equiv p/q}{=} p(\|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1}) \|u - v\|_p \end{aligned}$$

quindi Φ è Lipschitz di costante $2pR^{p-1}$ sulla palla $B_{L^p}(0, R) \subseteq L^p$ \square

²cursiosità non banale da vedere

Proposizione 6.14.

Lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{Q}, \mu)$ è completo

Dimostrazione.

[NON HO VISTO, RIGUARDA I PDF] □

$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty, \Omega} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{\infty, \Omega}$. Questa norma rende continua l'immersione $C_b^1 \rightarrow (C_b^0)^{n+1}$ data da $f \mapsto (f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f)$

Proposizione 6.15.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Lo spazio

$$C_b^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{di classe } C^k \text{ con derivate limitate su } \Omega \text{ fino all'ordine } k\}$$

è completo.

Dimostrazione.

Il caso $k = 1$ è una conseguenza del teorema di limite sotto il segno di derivata, infatti se $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial_i f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\partial_i f_k \rightarrow g_i$ uniformemente in Ω e $f_k \rightarrow f$ puntualmente in Ω allora esiste $\partial_i f$ e vale g_i . Se poi $f_k \in C^1(\Omega)$ allora la g_i è continua perché limite uniforme di $\partial_i f_k$ continue, quindi per il teorema del differenziale totale la f è anche C^1 .

Per il teorema di limite sotto il segno di derivata, l'immersione $C_b^1 \rightarrow (C_b^0)^{n+1}$ ha immagine chiusa, infatti una successione $(f_k, \partial_1 f_k, \dots, \partial_n f_k)$ nell'immagine convergente a (f, g_1, \dots, g_n) è proprio una delle ipotesi del teorema di convergenza sotto segno di derivata, quindi $f_k \rightarrow f$ in C^1 □

6.2 Duali di spazi concreti

Appendice A

Topologia

Proposizione A.1 (Topologia iniziale).

Sia X un insieme e \mathcal{F} una famiglia di mappe a valori in uno spazio topologici.

Notazione:

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \rightarrow (Y_j, \tau_j)\}_{j \in I}.$$

Allora esiste la topologia meno fine su X che rende continue le mappe f_j . Una prebase di questa topologia è data da

$$\{f_j^{-1}(A) \mid j \in I, A \in \tau_j\}.$$

In realtà basterebbe prendere una prebase per τ_j al posto di tutta la topologia.

Questa topologia è detta **topologia iniziale della famiglia \mathcal{F}** e si denota $\tau_{\mathcal{F}}$.

Osservazione A.2 (Proprietà universale della topologia iniziale).

Data una mappa $\varphi : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X, \tau_{\mathcal{F}})$ essa è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione.

Se φ è continua allora $f \circ \varphi$ è composizione di continue. Se sappiamo che $f \circ \varphi$ è continua per ogni $f \in \mathcal{F}$ allora, se A è un aperto di X per continuità di $f \circ \varphi$ abbiamo

$$\tau_Z \ni (f \circ \varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$$

cioè le preimmagini tramite φ di aperti di prebase sono aperti di Z , quindi φ è continua. \square

Proposizione A.3 (Transitività della topologia iniziale).

Supponiamo di avere una famiglia di mappe $\mathcal{F}' = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ e per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{G}_i = \{g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij}\}_{j \in J_i}$ una famiglia di mappe. Su ogni Y_i consideriamo la topologia iniziale determinata da \mathcal{G}_i . Allora la topologia iniziale data da \mathcal{F}' su X coincide con la topologia iniziale su X definita da $\mathcal{F} = \{g_{ij} \circ f_i \mid i \in I, j \in J_i\}$.

Dimostrazione.

Entrambe le topologie in esame sono generate dagli insiemi $(g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A)$ al variare di $i \in I, j \in J_i$ e $A \in \tau_{Z_{ij}}$, infatti

$$\text{prebase per } \mathcal{F} \rightarrow (g_{ij} \circ f_i)^{-1}(A) = f_i^{-1}(g_{ij}^{-1}(A)) \leftarrow \text{prebase per } \mathcal{F}'.$$

\square