RIPASSO

Le varietà algebriche classiche formano categoria Var_K con oggetti $V(I)$ e morfismi funzioni regolari

Le regolari da X a K sono una K algebra $K[X]$ fin. gen. ridotta.

Se $f: X \to Y$ regolare, $f^*: K[Y] \to K[X]$
$$\psi \mapsto \psi \circ f$$

EQUIVALENZA DI CATEGORIE

$$Var_K^{op} \leftrightarrow K\text{-alg. f.g. rid.}$$

Se A è K-alg. fin. gen. ridotta, come costruisco insieme algebrico? scegliamo $\varphi: K[x_1, \dots, x_n] \to A$ surg.
se $I = \ker \varphi$, associo $A \mapsto V(I) = X$

Nota X non è canonico a partire da A, ma può essere costruito in modo canonico come spazio topologico.

Def $\text{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \in \text{Spec} A \mid \mathfrak{m} \text{ max}\}$ spettro massimale
$$X \to \text{Specm}(A)$$
$$P \mapsto \mathfrak{m}_P = \{f \in A \mid f(P) = 0\}$$

Nullstellensatz La mappa è biunivoca

se I ideale di A, $V_m(I) = \{ m \in \operatorname{Specm}(A) \mid I \subseteq m \}$

(1) I $V_m(I)$ sono i chiusi di una topologia su $\operatorname{Specm}(A)$

(2) $X \to \operatorname{Specm} A$ è un omeomorfismo

(3) se I, J ideali di A, $V_m(I) = V_m(J) \overset{NSS}{\iff} \sqrt{I} = \sqrt{J}$

se $f: X \to Y$ è regolare $f^*: K[Y] \to K[X]$

$\underset{\operatorname{Specm}(K[X])}{\cong} \quad \cong \operatorname{Specm}(K[Y])$

se $P \in X \longleftrightarrow m_P$ allora $m_{f(P)} = (f^*)^{-1}(m_P)$

N.B. Spazio top. NON determina X come varietà

curve irriducibili si ha $|X| = |K|$ e topologia cofinita
ma due curve irriducibili non sono in generale isomorfe

VANTAGGI SCHEMI

(1) Gli schemi hanno "funzioni regolari" che possono essere nilpotenti $\neq 0$

In $\mathbb{A}^1 = K$, considero $K[\mathbb{A}^1] = K[x]$,

$x=0$ e $x^2=0$ determinano lo stesso insieme algebrico

invece per schemi li distinguo ($x=0$ determina il punto, $x^2=0$ è un punto topologicamente, ma ha una "funz. regolare" x con $x^2=0$ ma $x \neq 0$.)

Questo secondo schema corrisponde a $\frac{K[x]}{(x^2)}$ NON ridotta

OK, quindi tengo conto dell'algebra, ma perché non lavoro direttamente con algebre? Roba geometrica si incolla

(2) Se $K \neq \bar{K}$? $x^2+y^2=3$ non ha sol in $\mathbb{Q}^2$, ma sì in $\mathbb{R}^2$

non vorremmo che questo sia il vuoto

(3) si può lavorare su $\mathbb{Z}$. Se $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. $f=0$ ha senso in $\mathbb{Q}^n$, ma anche in $\mathbb{F}_p^n$ o $\mathbb{C}^n$

Idea di Grothendieck:

schemi affini $\leftrightarrow$ Anelli commutativi

Primo tentativo: A anello, $A \mapsto \mathrm{Specm}(A)$

Problema 1.) In generale $V_m(I) = V_m(J)$ NON è vero che $\sqrt{I} = \sqrt{J}$

Esempio anello locale, $V_m(I)$ tutti uguali ($I \neq 1$)

Problema 2.) Specm non è funtoriale: se $\varphi: A \to B$ omo anelli, $q \in \mathrm{Specm}(B)$, non è detto che $\varphi^{-1}(q) \in \mathrm{Specm}(A)$

Soluzione Considero $\mathrm{Spec}\,A$

Questo è un funtore $\mathrm{Ring}^{op} \to \mathrm{Top}$

Prop Se I ideale, $\bigcap_{p \in V(I)} p = \sqrt{I}$

Cor $V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$

Funtoriale Se $\varphi: A \to B \rightsquigarrow \varphi^*: \mathrm{Spec}\,B \to \mathrm{Spec}\,A$

$$q \mapsto \varphi^{-1}(q)$$

ed è continua perché $(\varphi^*)^{-1}(V(I)) = V(IB)$ chiuso.

<u>Esempi</u> (1) se K campo, $\operatorname{Spec} K = \operatorname{Specm} K = \{(0)\}$

(2) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \operatorname{Specm} \mathbb{Z} \cup \{(0)\} = \{(0), (p) \text{ per } p \text{ primo}\}$

Ma la topologia? se $I \trianglelefteq \mathbb{Z}$, $I = (n)$, $n \in \mathbb{Z}$

se $n = 0$, $V(I) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, se $n \neq 0$, $V(I) = \#$finito di primi (fattorizzo n)

(0) è contenuto in ogni aperto non vuoto $\Leftrightarrow$ (0) è punto denso

$\operatorname{Specm} \mathbb{Z} \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ dà una bigezione tra aperti:

cioè ogni aperto di $\operatorname{Specm} \mathbb{Z}$ è restrizione di un unico aperto di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

(3) Discorso analogo per $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \underbrace{\operatorname{Specm} \mathbb{C}[x]}_{\cong \mathbb{C}} \cup \{(0)\}$

(4) Sia R un DVR $\operatorname{Spec} R = \{(0), m\}$, ma gli aperti sono

$\operatorname{Spec} R$, $\{(0)\}$, $\emptyset$ (Non c'è $\{m\}$!)

TOPOLOGIA DI SPEC R

Prop Spec R è quasi-compatto (QC) [Compatto = q.c. + T_2]

Dim $X = \mathrm{Spec}\, R$ sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento. $U_\alpha = X \setminus V(I_\alpha)$

$\rightsquigarrow \bigcap_\alpha V(I_\alpha) = \emptyset \rightsquigarrow V(\sum I_\alpha) = \emptyset \rightsquigarrow 1 \in \sum I_\alpha$

$\rightsquigarrow 1 \in \sum_{\text{finita}} I_\alpha \rightsquigarrow V(\sum_{\text{finita}} I_\alpha) = \emptyset \rightsquigarrow \bigcap_{\text{finita}} V(I_\alpha) = \emptyset$

$\rightsquigarrow \bigcup_{\text{finita}} U_\alpha = X$ $\square$

[si preferisce dire q.c. per ragioni storiche e perché dire cose come "$\mathbb{A}^n$ è compatto" è strano]

Sia $I \trianglelefteq A$, $X = \mathrm{Spec}\, A$, $\pi : A \to A/I \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}\, A$

Esercizio $\mathrm{Spec}\, A/I \cong V(I)$

Nota se $I, J \trianglelefteq A$, $V(I) \subseteq V(J) \iff \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$

Recall $T_1 \iff$ singoletti chiusi
$T_0 \iff$ dati $p, q \in X$, $\exists\, U \subseteq X$ aperto t.c. $p \in U, q \notin U \vee q \in U, p \notin U$

Prop $X = \mathrm{Spec}\, A$ è T_0

Dim se $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ diversi, $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$ oppure $\mathfrak{q} \nsubseteq \mathfrak{p}$ $\square$

Oss se $\mathfrak{p} \in X$, $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

Dim $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} V(I) = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} V(I) = V(\mathfrak{p})$ $\square$

Cor I punti chiusi sono i massimali

IRRIDUCIBILITÀ

Oss Se $V = \overline{\{P\}}$ allora V è irriducibile.

Def P è il punto generico di V.

Oss Se V è T_0, il punto generico è unico.

Def X è irriducibile se
① $X \neq \emptyset$
② se $X_1, X_2 \subseteq X$ chiusi t.c. $X = X_1 \cup X_2$ allora $X = X_1 \vee X = X_2$

② $\Leftrightarrow$ ogni aperto non vuoto è denso in X
$\Leftrightarrow$ ogni aperto non vuoto è connesso
$\Leftrightarrow$ due aperti non vuoti hanno intersezione non vuota

Prop se $I \trianglelefteq A$, $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} A$ chiuso.
$$V(I) \text{ irrid.} \Leftrightarrow \sqrt{I} \text{ primo}$$

Dim SPG $I = \sqrt{I}$. Poiché $\operatorname{Spec} A/_I \cong V(I)$ basta mostrare che se A anello ridotto, $\operatorname{Spec} A$ irrid $\Leftrightarrow (0)$ primo
(A dominio)

$\boxed{\Leftarrow}$ $V((0)) = \operatorname{Spec} A$ OK

$\boxed{\Rightarrow}$ A ridotto e $\operatorname{Spec} A$ irrid (e quindi $\neq \emptyset$, cioè $A \neq 0$).

Se $a, b \in A$ t.c. $ab = 0$, $V((a)) \cup V((b)) = V((ab)) = V((0)) = \operatorname{Spec} A$
$\rightsquigarrow$ $V((a)) = \emptyset$ $\vee$ $V((b)) = 0$. SPG $V((a)) = 0 \rightsquigarrow a \in \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \sqrt{(0)} = (0)$
cioè $a = 0$

$\square$

Cor Chiuso irrid. di $\operatorname{Spec} A$ ammette punto generico
[se $V(I) = V(P)$ allora P è il punto generico]

$$\operatorname{Spec} A \longleftrightarrow \{\text{chiusi irriducibili di } \operatorname{Spec} A\}$$

ANELLI DI JACOBSON

Prop Sia $X \in \text{Top}$, $Y \subseteq X$ TFAE
① Ogni aperto di Y è della forma $A \cap Y$ per un UNICO $A \subseteq X$ aperto
② Se $A \subseteq X$ è chiuso, $Y \cap A$ è denso in X
[Y è **molto denso** in X]

Def A è di **Jacobson** se $\text{Specm} A$ è molto denso in $\text{Spec} A$

Prop Sia A un anello. TFAE
① A di Jacobson
② $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec} A$, $\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Gamma} \mathfrak{m}$ per qualche $\Gamma \subseteq \text{Specm} A$
③ ogni ideale radicale è intersezione di massimali

Dim ② ⟺ ③ ovvio. Resto ESERCIZIO □

Ex (1) Un campo o un Artiniano ($\text{Specm} A = \text{Spec} A$)
(2) $\mathbb{Z}$, $k[x]$ per k campo
(3) DVR NON sono di Jacobson.

Th (NSS generalizzato) Sia R di Jacobson, A una R-alg. f.g. con $\varphi : R \to A$ omo, allora
① A è di Jacobson
② Se $\mathfrak{m} \in \text{Specm} A$, $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ è massimale in R e
$$R/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow A/\mathfrak{m} \text{ è estensione finita di campi}$$

Dim Vedi Eisenbud. □

Cor Se A è algebra fin. gen. su K, A è di Jacobson e se $\mathfrak{m} \in \text{Specm} A$, $A/\mathfrak{m}$ è estensione finita di K.
Se $K = \overline{K}$, $A/\mathfrak{m} = K \rightsquigarrow$ ritrovo il NSS classico

Cor Se A è $\mathbb{Z}$-alg f.g. allora A di Jacob. e se $\mathfrak{m} \in \text{Specm} A$, $A/\mathfrak{m}$ è campo finito

Sia A di Jacobson, cioè $\mathrm{Specm}\,A$ è molto denso.

$$\left\{\begin{matrix}\text{chiusi irrid.}\\ \text{di } \mathrm{Spec}\,A\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\text{chiusi irrid.}\\ \text{di } \mathrm{Specm}\,A\end{matrix}\right\}$$
biunivoca (la so per chiusi, ma vero anche per irrid)

$$V \mapsto V \cap \mathrm{Specm}\,A$$

punti di $\mathrm{Specm}\,A$ perché i massimali sono i punti chiusi.

Quindi:
$$\mathrm{Spec}\,A \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{chiusi irrid.}\\ \text{di } \mathrm{Specm}\,A\end{matrix}\right\}$$
$$\mathfrak{p} \longmapsto \overline{\{\mathfrak{p}\}} \cap \mathrm{Specm}\,A$$

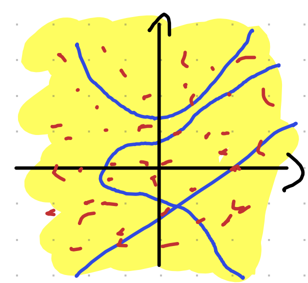
Quindi "costruisco $\mathrm{Spec}\,A$ aggiungendo a $\mathrm{Specm}\,A$ i chiusi irrid."

Oss Se $U \subseteq \mathrm{Specm}\,A$ aperto, $U' \subseteq \mathrm{Spec}\,A$ aperto t.c.
$$U' \cap \mathrm{Specm}\,A = U$$
allora $\mathfrak{p} \in U' \Leftrightarrow \overline{\{\mathfrak{p}\}} \cap U' \neq \emptyset \Leftrightarrow (\overline{\{\mathfrak{p}\}} \cap \mathrm{Specm}\,A) \cap U \neq \emptyset$

Questo descrive la topologia di $\mathrm{Spec}\,A$

Ex $A = \mathbb{C}[X,Y]$. $\mathrm{Specm}\,A = \mathbb{C}^2$, I chiusi irrid. sono:

1) i massimali
2) (p) con $p \in \mathbb{C}[X,Y]$ irriducibile
3) (0)



Ex (Specm $A \subseteq$ Spec A denso ma non molto denso)

$\overline{\mathrm{Specm}\,A} = V(I)$, $I = \sqrt{I} \iff I \subseteq \bigcap_{m \in \mathrm{Specm}\,A} m$

Fatto: $\overline{\mathrm{Specm}\,A} = V(J(A))$

$$\mathrm{Specm}\,A \text{ è denso} \iff J(A) = \sqrt{(0)}$$

Sia R un DVR, $m_R = (t)$. Sia $A = R[X]$, $K = R/m_R = R/(t)$

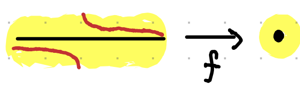
Prop $\overline{\mathrm{Specm}\,A} = \mathrm{Spec}\,A$ ma non è di Jacobson.

Dim recall $J(A) = \{ f \in A \mid 1 - af \in A^\times \ \forall a \in A \}$
ma $1 - af \in A^\times = R$ e quindi se $f \neq 0$, $\exists a(x)$ t.c. $1 - af \notin R$
$\rightsquigarrow J(A) = 0 = \sqrt{(0)}$.

$V(X) \cong \mathrm{Spec}\, R[X]/(X) = \mathrm{Spec}\, R$ chiuso in Spec A che contiene un solo massimale che non è denso. $\square$

COSA STA SUCCEDENDO GEOMETRICAMENTE?

$R \to A \rightsquigarrow \mathrm{Spec}\,A \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\,R$ $\qquad f^{-1}(m) = V(t)$ in Spec A



$$V(t) = \mathrm{Spec}\, \frac{R[x]}{(t)} = \underbrace{\mathrm{Spec}\, K[X]}_{\text{la retta in mezzo, fibra}}$$

$\overline{\mathrm{Specm}\,A} = \mathrm{Spec}\,A \Rightarrow \mathrm{Specm}\,A \not\subseteq V(t)$

esempio: $(Xt - 1)$. $\frac{R[x]}{(xt-1)} \cong R_t$ campo $\Rightarrow (Xt-1)$ massimale

ALCUNE OPERAZIONI

Prop Se $A_1, \dots, A_r$ anelli, $\operatorname{Spec}(A_1 \times \dots \times A_n) = \coprod_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} A_i$

Oss Non vale per prodotti infiniti: $\operatorname{Spec}\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \neq \coprod_{i \in I} \operatorname{Spec} A_i$

perché unione infinita disgiunta di punti non è q.c. !!!

Oss Se $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ $\rightsquigarrow$ $\varphi^* : \operatorname{Spec} S^{-1}A \to \operatorname{Spec} A$

Def Se $I \trianglelefteq A$, $\varphi(I)(S^{-1}A) = S^{-1}I$. $\varphi^{-1}(S^{-1}I) = I_S$

I_S è la <u>S-saturazione di I</u> $\left(a \in A \text{ t.c. } \exists s \in S, as \in I \right)$

Oss $S^{-1}I_S = S^{-1}I$, quindi $\{\text{ideali } S^{-1}A\} \longleftrightarrow \{\text{ideali } S\text{-saturi in } A\}$

Oss Se $I = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ allora $\mathfrak{p}_S = \begin{cases} A & \text{se } \mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset \\ \mathfrak{p} & \text{perché primo} \end{cases}$

Prop $\varphi^* : \operatorname{Spec} S^{-1}A \to \operatorname{Spec} A$ è una immersione topologica

Ex Sia $A = \mathbb{C}[X,Y]$, $S = \mathbb{C}[X,Y] \setminus (X,Y)$, $S^{-1}A = \mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}$

$\operatorname{Spec} S^{-1}A \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y] \mid \mathfrak{p} \subseteq (X,Y)\} = \{(0), (X,Y)\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{curve} \\ \text{irrid.} \\ \text{che passano} \\ \text{per } (0,0) \end{array} \right\}$

APERTI PRINCIPALI

Ex se $f \in A$, $S_f = \{1, f, f^2, \dots\}$, $S_f^{-1} A = A_f = A[x]/(xf-1)$

$\operatorname{spec} A_f \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec} A \setminus V(f) \doteq (\operatorname{Spec} A)_f$

Se $X = \operatorname{spec} A$, X_f è un aperto. $X_f = \emptyset \iff f \in \sqrt{0} A$

$X_f = X \iff f \in A^\times$

Prop $\{X_f \mid f \in A\}$ è una base di aperti per X

Dim $X_f \cap X_g = X_{fg}$ e se $\mathfrak{p} \in U$ aperto, $U = X \setminus V(I)$

sia $f \in I$ t.c. $f \notin \mathfrak{p}$ (ok perché $\mathfrak{p} \notin V(I)$), allora $\mathfrak{p} \in X_f$

e $X_f = X \setminus V(f) \subseteq X \setminus V(I)$ perché $V(I) \subseteq V(f)$ $\square$

VOGLIAMO SCHEMI!!!

Spec A non è abbastanza ($\forall \mathbb{K}$ campo Spec $\mathbb{K}$ è un punto)

Vorrei $(\text{schemi affini})^{op} \simeq (\text{Anelli})$

$A \longmapsto \operatorname{Spec} A$. Voglio pensare agli elt. di A come funzioni "regolari" su Spec A

(questo risolverebbe il problema di Spec $\mathbb{K}$!)

Idea: Ad ogni aperto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ associo un anello
$\mathcal{O}(U) =$ "funzioni regolari"

Richieste: ① $\mathcal{O}(X) = A$

② posso incollare

PREFASCI

Sia X sp. top. Se $U \subseteq X$ aperto posso considerare
$$C_X(X) = \{ f : U \to \mathbb{C} \mid \text{continue} \}$$

<u>OSS</u> Se $V \subseteq U$, $C_X(U) \longrightarrow C_X(V)$ è un omomorfismo.
$$f \longmapsto f|_V$$
Se $W \subseteq V \subseteq U$, $(f|_V)|_W = f|_W$

Se $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, U, U_i aperti, $f_i \in C_X(U_i)$ $\forall i$ e $\forall i, j \in I$
$$f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$$
Allora $\exists !\, f \in C_X(U)$ t.c. $f|_{U_i} = f_i$

<u>Def</u> Sia X sp. top. Un prefascio di grp. abel / anell. comm. id consiste di:
1. $\forall U \subseteq X$ aperto, abbiamo $P(U)$ grp. abel / anello comm.
2. Se $V \subseteq U$, $P(U) \to P(V)$ omomorfismo di <u>restrizione</u>
$$f \longmapsto f|_U$$

Si richiede inoltre che:

(1) $f|_U = f$ (2) se $W \subseteq V \subseteq U$, $(f|_V)|_W = f|_W$

<u>Ex</u> • C_X dato prima • C_X^* con $C_X^*(U) = \{ U \to \mathbb{C}^* \mid \text{cont.} \}$

• Se A grp. abel / anello, definiamo il prefascio costante P_A
$$P_A(U) = A, \quad f|_V = f$$

• Se $K = \overline{K}$, $X \subseteq K^n$ insieme algebrico, $\mathcal{O}_X(U) = \{ \text{funz. regolari su } U \}$

• Se A grp. abel / anello, A_X con $A_X(U) = \{ U \to A \text{ loc. costanti} \}$

Def Un omomorfismo di prefasci su X $\varphi: P \to Q$ è

$\forall U$ aperto $\varphi_U : P(U) \to Q(U)$ omomorfismo

se $V \subseteq U$
$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "|_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Q(U) \arrow[d, "|_V"] \\ P(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & Q(V) \end{tikzcd}$$
cioè $(\varphi_U(f))|_V = \varphi_V(f|_V)$

Composizione e identità ovvie, quindi otteniamo categorie
$$\mathrm{Pre}(X) \quad e \quad \mathrm{Pre}_{an}(X)$$

Def Se P è prefascio, un sottoprefascio $Q \subseteq P$ consiste di $\forall U$, $Q(U) \subseteq P(U)$ con $Q(U)$ sottogruppo / sottoanello e se $V \subseteq U$, $|_V(Q(U)) \subseteq Q(V)$

Un sottoprefascio Q di P è prefascio con la struttura che rende l'inclusione un morfismo di prefasci

Esempi • $\mathbb{Z}_X \subseteq \mathcal{C}_X$ • $L_X \subseteq \mathcal{C}_X$ sottoprefascio delle funz. limitate

Def Se $\varphi : P \to Q$ omo. di prefasci consideriamo
$$\ker \varphi \subseteq P, \quad (\ker \varphi)(U) = \ker \varphi_U$$
$$\mathrm{im}\, \varphi \subseteq Q, \quad (\mathrm{im}\, \varphi)(U) = \mathrm{Im}\, \varphi_U$$

Ex $\exp : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_X^*$, $f \mapsto e^f$ è un omomorfismo,
$\ker \exp = (2\pi i \mathbb{Z})_X$

$(\mathrm{im} \exp)(U) = \{ f : U \to \mathbb{C}^* \text{ che ammette un logaritmo} \}$

Def Se $Q \subseteq P$ di gruppi abel., $P/_Q(U) = P(U)/_{Q(U)}$
questo è un prefascio (perché $\cdot|_V(Q(U)) \subseteq Q(V)$)

[Pre(X) è una categoria abeliana]

Ex $C_X/L_X \doteq P$. Un elt. $f \in P(U)$ è un elt di $C_X(U)/_{L_X(U)}$
è tale che $\exists \{U_i\}$ ricoprimento di U t.c. $f|_{U_i} = 0$, ma f magari non è nullo (continua anche non limitata è sempre loc. limitata).

Oss $\mathrm{Hom}_{Pre(X)}(P, Q)$ è grp. abel

Oss Se $\varphi : P \to Q$, $\psi : R \to P$ allora ψ si fattorizza tramite $\ker\varphi$ sse $\varphi \circ \psi = 0$

Oss $\mathrm{im}\,\varphi \cong P/_{\ker\varphi}$ **Def** $\mathrm{coker}\,\varphi = Q/_{\mathrm{im}\,\varphi}$

Def Se $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prefasci, $\prod_{\alpha \in I} P_\alpha$ è un prefascio.
Per grp. abel definisco $\bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$

FASCI

Def Un fascio $\mathcal{F}$ su X (di grp. abel / anelli) è un prefascio su X t.c. $\forall U \subseteq X$ aperto, se $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U allora

$$\forall \{s_i \in \mathcal{F}(U_i) \mid s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}} \ \forall i,j\}, \ \exists!\, s \in \mathcal{F}(U) \text{ t.c. } s|_{U_i} = s_i$$

Se vale unicità (ma non necessariamente esistenza) $\mathcal{F}$ è un prefascio separato.

Oss Se $\mathcal{F}$ prefascio separato allora $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$

Dim $\emptyset = \{U_i\}_{i \in \emptyset}$ è un ricoprimento di $\emptyset$. Se $f, g \in \mathcal{F}(\emptyset)$ $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ $\forall i$ perché condizione vuota $\Rightarrow f = g$ $\square$

Cor Se $U_{ij} = \emptyset$ $\forall i \neq j$ allora $\mathcal{F}(\coprod U_i) = \prod \mathcal{F}(U_i)$

Ex
- $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}^*_X, \mathcal{O}_X$ sono fasci.
- $L_X \subseteq \mathcal{C}_X$ è separato ma non è sempre un fascio.
- $\operatorname{im} \exp \simeq \mathcal{C}_X / (2\pi i \mathbb{Z})_X$ è separato ma non fascio
- $\mathcal{C}_X / L_X$ non è in generale separato.
- se $A \neq 0$, P_A non è separato.

Def morfismo di fasci è un morfismo di prefasci

$Sh(X)$ è sottocategoria piena di $Pre(X)$

$Sh_{an}(X)$ " " " $Pre_{an}(X)$

Oss Se $\mathcal{F}$ fascio, $P \subseteq \mathcal{F}$ è un fascio sse:
dato $U \subseteq X$ aperto, $U = \bigcup U_i$, $s \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $s|_{U_i} \in P(U_i) \Rightarrow s \in P(U)$

Esempio Se X varietà C^∞, il prefascio $C^\infty_X \subseteq C_X$ è un fascio perché essere C^∞ è una proprietà locale

Casi semplici • $\mathrm{Pre}(\emptyset) \simeq Ab$, $Sh(\emptyset) \simeq \{0\}$

• $\mathrm{Pre}(pt)$ = due gruppi e un omomorfismo

morfismo tra prefasci ⇝ diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ A' & \to & B' \end{array}$$

$Sh(pt) \simeq Ab$ $\quad (A \xrightarrow{\sim} 0$ per $A \in Ab)$

• Sia X discreto. $Sh(X) = ?$

$\forall x \in X$, $A_x = \mathcal{F}(\{x\})$, $\quad \mathcal{F}(U) \cong \prod_{x \in U} A_x$

Quindi $Sh(X) = \prod_{x \in X} Ab$ prodotto di categorie

Prop Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ omo. fasci, $\ker \varphi$ è un fascio

Dim esercizio. $\square$

Problema: $\mathrm{im}\, \varphi \subseteq \mathcal{G}$ non è un fascio...
anche $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ come prefascio non è un fascio (per esempio perché $\mathrm{im} = \frac{\mathrm{dom}}{\ker}$)

In realtà anche $Sh(X)$ è categ. abeliana, ma l'immersione non è esatta.

SPIGHE

Def $P \in Pre(X)$, $x \in X$. ottengo un gruppo abel/anello di germi detto spiga dato da:

$$P_x \doteq \coprod_{\substack{U \subseteq X \text{ aperto} \\ x \in U}} P(U) \Big/ \sim \qquad (U,s) \sim (V,t) \iff \exists\, W \subseteq U \cap V \text{ t.c. } s|_W = t|_W$$

[$[(U,s)] + [(V,t)] = [(U \cap V, s|_{U\cap V} + t|_{U \cap V})]$ e analogo prodotto se anelli]

Oss $P_x = \varinjlim_{x \in U} P(U)$. Se $x \in X$, $s \in P(U)$, $s_x = [(U,s)] \in P_x$

Ex
- Se A gruppo, $P_A(U) = A$ (prefascio costante) allora $P_x = A$
- se X discreto $P_x = P(\{x\})$
- Se $A \in Ab$, $X \in Top$, $\mathcal{A}_X$ funzioni loc. cost. $(\mathcal{A}_X)_x = A$

Oss $s \in P(U)$. $s_x = 0\ \forall x \in U \iff \exists$ ricoprimento $U = \bigcup U_i$ t.c. $s|_{U_i} = 0\ \forall i$.

Oss se $\varphi: P \to Q$ morfismo induce $\varphi_x : P_x \to Q_x$

Def φ è localmente iniettiva se φ_x iniettiva $\forall x \in X$
φ è localmente surgettiva se φ_x surgettiva $\forall x \in X$

Oss Iniettivo $\forall U \Rightarrow$ loc. iniettivo
Surgettivo $\forall U \Rightarrow$ loc. surgettivo MA NON VICEVERSA

Oss Se $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di FASCI allora loc. inj. $\iff$ inj.

IDEA Per fasci vogliamo surgettivo $\doteq$ loc. surgettivo.

FASCIFICAZIONE

Def Se P prefascio esiste P^{sh} con $P \to P^{sh}$ tale che

$\forall \mathcal{F} \in Sh(X)$
$\forall P \to \mathcal{F}$ morfismo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \\ P^{sh} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Inoltre

(1) $P \to P^{sh}$ è loc. inj e loc. surg.
(2) se $P \to \mathcal{F}$ omo, $\mathcal{F}$ fascio, $P^{sh} \to \mathcal{F}$ è iniettiva / loc surg. / isomorfismo $\iff P \to \mathcal{F}$ loc. inj. / loc. surj. / loc. iso.

Se $P \subseteq \mathcal{F}$ sottoprefascio di fascio, $P^{sh} \to \mathcal{F}$ è iniettiva, in realtà $P^{sh} \subseteq \mathcal{F}$.

Def $P \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ fascio. il sottofascio generato da P è
$\bar{P}(U) = \{ s \in U \mid \exists$ ricopr. aperto di U $\{U_i\}$: $s|_{U_i} \in P(U_i) \forall i \}$
$\iff \bar{P}(U) = \{ s \in U \mid s_x \in P_x \subseteq \mathcal{F}_x \ \forall x \in U \}$

Oss $P \subseteq \bar{P}$, $\bar{P}$ fascio, $P \subseteq \bar{P}$ loc. surg.
$\bar{P}$ è il più piccolo sottofascio di $\mathcal{F}$ che contiene P

In questo caso $P^{sh} \to \bar{P}$ è un isomorfismo.

Dim ($\exists P^{sh}$) Costruiamo un fascio $\mathcal{F}$ e $P \to \mathcal{F}$ t.c.
$\ker(U) = \{ s \in P(U) \mid s_x = e \ \forall x \in U \}$

Sia $\tilde{P}(U) = \prod_{x \in U} P_x$ e notiamo che è un fascio,

$\varphi : P \to \tilde{P}$ dato da $\begin{aligned} P(U) &\to \tilde{P}(U) \\ s &\mapsto (s_x)_{x \in U} \end{aligned}$

Definiamo P^{sh} come il sottofascio di $\tilde{P}$ generato da $\operatorname{im}\varphi$

Oss $P \to P^{sh}$ è loc. iso. $\rightsquigarrow \varphi_x : P_x \to P^{sh}_x$ iso. $\forall x \in X$

Prop Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ omo di fasci

$$\varphi \text{ è iso} \iff \varphi_x \text{ iso } \forall x \in X$$

Dim ESERCIZIO ■

Prop Se $\varphi, \psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci, $\varphi = \psi \iff \varphi_x = \psi_x \ \forall x \in X$

Sia $\mathcal{F}$ un fascio qualsiasi e $\varphi : P \to \mathcal{F}$ morfismo.

Allora abbiamo $\tilde{\varphi} : \tilde{P} \to \tilde{\mathcal{F}}$ $\quad \left(\tilde{\varphi}(s_x)_{x \in U} = (\varphi_x(s_x))_{x \in U} \right)$

e
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{P} \arrow[d] \\ \mathcal{F} \arrow[r] & \tilde{\mathcal{F}} \end{tikzcd}$$
Inoltre $\tilde{\varphi} : P^{sh} \to \mathcal{F}^{sh}$, quindi ottengo $\varphi^{sh} : P^{sh} \to \mathcal{F}^{sh}$ t.c.
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & P^{sh} \arrow[d, "\varphi^{sh}"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{F}^{sh} \end{tikzcd}$$

Allora fattorizzo $P \to P^{sh} \to \mathcal{F}$

e questa fattorizzazione è unica perché so cosa fa sulle spighe. □

OSS $\forall x \in X$, $P \to P^{sh}$ induce $P_x \xrightarrow{\sim} P^{sh}_x$

EX $P_A \to A_X$ $\quad$ Nota $\forall x \in X$, $(P_A)_x \to (A_X)_x$ iso $\Rightarrow A_X = P_A^{sh}$

$a \in A \mapsto c_a$ funz. cost. in a $\quad$ (Nota che non è iniettivo: $P_A(\emptyset) = A$, $A_X(\emptyset) = 0$)

Questo risolve il problema dell'immagine: d'ora in poi useremo dei nostri prefasci

Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci.

- $\ker \varphi$ è un fascio
- sia $\widetilde{\operatorname{im}\varphi}$ l'immagine come prefascio, $\operatorname{im}\varphi = (\widetilde{\operatorname{im}\varphi})^{sh}$.

φ è surgettiva di fasci $\iff \operatorname{im}\varphi = \mathcal{G} \iff \varphi$ è loc. surg. come prefasci

$\iff \varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ surg. $\forall x$

OSS φ è iso $\iff \varphi$ è inj. e surg. COME FASCIO

Def Se $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ sottofascio, $\widetilde{\mathcal{F}/\mathcal{G}}$ prefascio quoziente è separato (ma non un fascio). Definiamo

$$\mathcal{F}/\mathcal{G} = \left(\widetilde{\mathcal{F}/\mathcal{G}}\right)^{sh}$$

Oss Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ è morfismo e $\varphi|_{\mathcal{G}} = 0$ allora

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{H} \\ \mathcal{F}/\mathcal{G} \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Oss Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci, $\mathcal{F}/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$ come fasci

Oss Se $x \in X$, $\operatorname{Ker}(\varphi_x) = (\operatorname{Ker}\varphi)_x$, $\operatorname{im}(\varphi_x) = (\operatorname{im}\varphi)_x$

Def $\mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ è esatta se $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$

Prop $\mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ è esatta sse $\forall x \in X$

$$\mathcal{F}'_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{F}''_x \text{ è esatta}$$

Dim Esercizio $\square$

Notazione Se $\mathcal{F}$ fascio $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$

$\Gamma(X, -) : Sh(X) \to Ab/Ring$ è un funtore

$\Gamma(X, -)$ preserva iniettività ma non surgettività

Prop $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \to 0$ esatta in $Sh(X)$, allora

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X) \quad \text{è esatta}$$

Dim La composizione è 0 OK, voglio che se $s \in \mathcal{F}(X)$ va in 0 allora venga da $\mathcal{F}'(X)$, ma questo è vero localmente e incollo $\square$

<u>Ex</u> $0 \to \mathbb{Z}_X \xrightarrow{2\pi i \cdot} \mathcal{C}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}^*_X \to 1$ è esatta.

$0 \to \mathbb{Z}_X(X) \xrightarrow{2\pi i \cdot} \mathcal{C}_X(X) \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}^*_X(X)$ anche, ma perdo suriettività ($\nexists$ log globale)

È possibile definire funtori $H^i(X,-): Sh(X) \to Ab$ t.c. $H^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ e se $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ esatta allora abbiamo

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}') \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{F}'') \to H^1(X,\mathcal{F}') \to$$
$$\to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F}'') \to H^2(X,\mathcal{F}') \to \cdots$$

<u>Esempio</u> se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto conn., $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{C}^\infty_X \to \mathcal{C}^{\infty *}_X \to 0$, allora

$$0 \to H^0(X,\mathbb{Z}_X) \to H^0(X,\mathcal{C}^\infty_X) \to H^0(X,\mathcal{C}^{\infty *}_X) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathbb{Z}_X) \to \cdots$$

$$H^1(X,\mathbb{Z}_X) \overset{\text{fidati}}{=} \operatorname{Hom}(\pi_1(X,x_0),\mathbb{Z})$$

$$\delta: H^0(X,\mathcal{C}^*_X) \to H^1(X,\mathbb{Z}_X) = \operatorname{Hom}(\pi_1(X,x_0),\mathbb{Z})$$
$$f: X \to \mathbb{C}^\times \longmapsto \left([\gamma] \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right)$$

ostruzione, vorrei fosse 0 quando costruisco log.

PRODOTTI E COPRODOTTI

Def Se $\{P_\alpha\}$ collezione di prefasci $(\prod_\alpha P_\alpha)(U) = \prod_\alpha P_\alpha(U)$

Se i P_α sono fasci allora $\prod_\alpha P_\alpha$ è fascio.

Def Se $\{P_\alpha\}$ collezione di prefasci $(\tilde{\bigoplus}_\alpha P_\alpha)(U) = \bigoplus_\alpha P_\alpha(U)$

Se la somma è finita $\tilde{\bigoplus} P_\alpha = \prod P_\alpha$ e in particolare se i P_α sono fasci anche $\tilde{\bigoplus} P_\alpha$ lo è.

Se la somma è infinita $\tilde{\bigoplus} P_\alpha$ non è in generale un fascio

$$\bigoplus_\alpha \mathcal{F}_\alpha = \left(\tilde{\bigoplus}_\alpha \mathcal{F}_\alpha\right)^{sh} \subseteq \prod_\alpha \mathcal{F}_\alpha$$

Valgono le proprietà universali.

Oss $(\bigoplus_\alpha \mathcal{F}_\alpha)_p = \bigoplus_\alpha (\mathcal{F}_\alpha)_p$

⚠ Se I infinito $\left(\prod_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha\right)_p \neq \prod_{\alpha\in I} (\mathcal{F}_\alpha)_p$

cioè, $\prod$ facile da definire ma attento alle spighe,
$\bigoplus$ va fascificato ma spighe buone

PUSHFORWARD

Def $f: X \to Y$ continua definisce funtore

$$f_*: Pre(X) \longrightarrow Pre(Y)$$ e passa a fasci.

$$P \longmapsto \begin{cases} f_*P(V) = P(f^{-1}(V)) \\ f_*\rho^U_V : f_*P(U) \longrightarrow f_*P(V) \\ \qquad x \longmapsto x|_{f^{-1}(V)} \end{cases}$$

$$\varphi: P \to Q \longmapsto \begin{cases} f_*\varphi : f_*P \to f_*Q \\ \qquad f_*P(U) \to f_*Q(U) \\ \qquad\quad x \longmapsto \varphi_{f^{-1}(U)}(x) \end{cases}$$

Oss $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, $\quad id_{X*} = id_{Pre(X)}$

Ex • $Y = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f: X \hookrightarrow Y$.

$f_* \mathbb{Z}_X = \mathbb{Z}_Y$ perché se ad un aperto connesso levo un punto resta connesso.

• $Y = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f: X \hookrightarrow Y \quad f_*\mathbb{Z}_X \supsetneq \mathbb{Z}_Y$

$$(f_*\mathbb{Z}_X)_p = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p \neq 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{se } p = 0 \end{cases}$$ (valore a dx di 0 e a sx)

• $f: S^1 \longrightarrow S^1$ $\qquad (f_*\mathbb{Z}_{S^1})_p = \mathbb{Z}^2 \quad \forall p$

$\quad z \longmapsto z^2 \qquad\qquad s \longmapsto (s(\sqrt{p}), s(-\sqrt{p}))$

$(f_*\mathbb{Z}_{S^1})_p \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2} = (\mathbb{Z}_{S^1}{}^{\oplus 2})_p$

MA $f_*\mathbb{Z}_{S^1} \not\cong \mathbb{Z}_{S^1}^{\oplus 2}$ perché diverse sezioni globali

• $X \in \mathrm{Top}$. $X^d = (X,$ top. discreta$)$. $f: X^d \to X$ continua.
$x \mapsto x$

$$(f_* \mathbb{Z}_{X^d})(U) = \mathbb{Z}^U$$

<u>Oss</u> $f: X \to Y$, $p \in X$, $\mathcal{F} \in Sh(X)$ c'è un omo. canonico

$$(f_* \mathcal{F})_{f(p)} \to \mathcal{F}_p$$

Se $f(p) \in V \subseteq Y$ e $(f_* \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ la mappa è

$$s_{f(p)} \mapsto s_p$$

<u>Ex</u> Se $f: X \to \{pt\}$ (ricorda $Sh(pt) \simeq Ab/Ring$)
$(f_* \mathcal{F})(pt) = \mathcal{F}(X)$, quindi $f_* = H^0$
Quindi $(f_* \mathcal{F})_{f(p)} \to \mathcal{F}_p$ e in generale non è né surg. né inj.
$\mathcal{F}(X) \ni s \longmapsto s_p$

<u>Oss</u> Se $Y \subseteq X$ è molto denso $(\{$aperti di $Y\} \leftrightarrow \{$aperti di $X\})$
allora $f: Y \hookrightarrow X$ inclusione definisce $f_*: Sh(Y) \to Sh(X)$ isomorfismo.

FASCIO STRUTTORALE

Se A di Jacobson $Sh(\mathrm{Specm}(A)) \simeq Sh(\mathrm{Spec}(A))$

Se A è k-alg. f.g. ridotta, $K=\bar{K}$ allora

$Y=\mathrm{Specm}(A)$ è un insieme algebrico e A le sue funz. reg.

su Y c'è un fascio $\mathcal{O}_Y$ delle funzioni regolari

Ma allora questo si estende a $\mathcal{O}_X$ su $X=\mathrm{Spec}(A)$

$\mathcal{O}_X(X)=\mathcal{O}_Y(Y)\cong A$. Se $f\in A$, $X_f=X\setminus V(f)=\mathrm{Spec}\, A_f$

Allora $\mathcal{O}_X(X_f)=\mathcal{O}_Y(\{y\in Y \mid f(y)\neq 0\})\cong A_f$

Voglio generalizzare a ogni anello

$\forall A$, $X=\mathrm{Spec}\, A$ voglio un fascio $\mathcal{O}_X$ t.c.

(1) $A\cong \Gamma(X,\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_X(X)$

(2) se $f\in A$, $X_f=X\setminus V(f)$ allora esiste $\varphi: A_f \xrightarrow{\sim} \Gamma(X_f,\mathcal{O}_X)$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{loc.}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[d, "\text{restr.}"] \\
A_f \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & \Gamma(X_f,\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Questo determina $\mathcal{O}_X$ in modo unico.

Oss se $P\in X$ allora

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[d] & s \arrow[d, mapsto] \\
A_P \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_{X,P} & s_P
\end{tikzcd}$$

Costruzione di $\mathcal{O}_X$ (alla Hartshorne)

Definiamo $\tilde{\mathcal{O}}_X$ dato da $\tilde{\mathcal{O}}_X(U) = \{ s : U \to \coprod_{p \in U} A_p \mid s(p) \in A_p \}$

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ s \in \tilde{\mathcal{O}}_X(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall p \in U \ \exists f \in A \text{ t.c. } p \in X_f \subseteq U, \ \varphi \in A_f \text{ t.c.} \\ \forall q \in X_f \quad \varphi_q = s(q) \end{array} \right\}$$

Prop $\mathcal{O}_X \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_X$ è un sotto fascio di anelli

Dim ESERCIZIO $\square$

Teorema Se $f \in A$, $A_f \longrightarrow \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ è un isomorfismo.
$\varphi \longmapsto (p \mapsto \varphi_p)$

Dim Vedi Hartshorne $\square$

Def Uno *spazio localmente anulato* è uno spazio topologico con un fascio di anelli tale che $\forall p \in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello locale

Oss $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anulato.

Definiremo i morfismi di spazi localmente anulati, dando una categoria SpLAn.

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec} : \mathrm{Ring}^{op} &\longrightarrow \mathrm{SpLAn} \\ A &\longmapsto (\mathrm{Spec}\,A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}) \end{aligned}$$

sarà un funtore pienamente fedele.

Def $(X, \mathcal{F}) \in \mathrm{SpLAn}$ è uno *schema affine* se è nell'immagine essenziale di Spec.

Uno *schema* è $(X, \mathcal{F}) \in \mathrm{SpLAn}$ t.c. localmente affine.

SPAZI LOCALMENTE ANULATI

Def Uno spazio (localmente) anulato è uno spazio topologico con un fascio di anelli (tale che $\forall p \in X$, $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello locale)

Def Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è loc. anulato, $p \in X$, il campo residuo è

$$K(p) = \mathcal{O}_{X,p} / m_p$$

Ex
- $(\{pt\}, \mathcal{O}_X)$ anulato è dato da un anello.
- Se $X \in Top \setminus \{\emptyset\}$ allora $(X, \mathbb{Z}_X)$ è anulato ma non loc. anulato.
- $(X, \mathcal{C}_X)$ $\mathcal{C}_X$ continue verso $\mathbb{R} / \mathbb{C}$ allora è loc. anulato
  $\forall p \in X$ $K(p) = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e $m_p = \{ f \in \mathcal{C}_{X,p} \mid f(p) = 0 \}$ è l'unico massimale
  perché ogni altro germe è invertibile
- Se X è varietà C^∞, $\mathcal{C}^\infty_X$ fascio delle C^∞ verso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ allora $(X, \mathcal{C}^\infty_X)$ è loc. anulato
- se A anello, $X = \operatorname{Spec} A$ allora $\exists\, \mathcal{O}_X$ fascio di anelli t.c. $A \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $f \in A \Rightarrow$
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} A & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & f \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ A_p & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X,p} & f_p \end{array}$$

Def Se A, B anelli locali, $\varphi : A \to B$ è locale se $\varphi^{-1}(m_B) = m_A$
$\iff \varphi(m_A) \subseteq m_B$

Def $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ sp. (loc.) anulati. Un morfismo è

$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ con $f : X \longrightarrow Y$ continua,
$f^\# : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$ omo di fasci
(t.c. $\forall p \in X$, $f^\#_p : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \to (f_* \mathcal{O}_X)_{f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ è un omo. locale.)

Oss se $V \subseteq Y$ aperto $f^\#_V : \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$

Ex se $f: X \to Y$ è C^∞ tra varietà C^∞ allora
$f^\#: \mathcal{C}^\infty_Y \to f_*\mathcal{C}^\infty_X \qquad f^\#(\varphi) = \varphi \circ f$
però potremmo anche prendere $f^\#(\varphi) = \overline{\varphi \circ f}$ $(\mathcal{C}^\infty(U) = C^\infty(U, \mathbb{C}))$

Oss Se X sp. loc. an. $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$, $p \in U$, $k(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$
possiamo definire $\varphi(p) = [\varphi_p] \in k(p)$.

Ex • se prendo $(X, \mathcal{C}_X)$ o $(X, \mathcal{C}^\infty_X)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_X(U)$, $p \in X$
allora $\varphi(p) \in k(p) = \mathbb{R}$ è il valore di φ in p
• se $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $p \in X$, $n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{Z}$ allora

$$n(p) = \begin{cases} n \in \mathbb{Q} & \text{se } p = (0) \\ n \bmod p \in \mathbb{F}_p & \text{se } p = (p) \end{cases}$$

Oss se $f: X \to Y$ è morfismo di sp. an. allora è morfismo di sp. loc. an. sse

$$\forall p \in X,\ \varphi \in \mathcal{O}_Y(V), \qquad \varphi(f(p)) = 0 \Rightarrow (f^\#\varphi)(p) = 0$$

Composizione: se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ morfismi di sp. loc. an,
allora posso definire $g \circ f = (g \circ f, (g \circ f)^\#)$ con

$$\begin{tikzcd}
(g\circ f)^\#: \mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[dr, "g^\#"'] & (g\circ f)_* \mathcal{O}_X = g_*(f_*\mathcal{O}_X) \\
& g_*\mathcal{O}_Y \arrow[u, "g_*(f^\#)"']
\end{tikzcd}$$

$\longleftarrow$ funtorialità di g_*

cioè $(g \circ f)^\# = g_*(f^\#) \circ g^\#$

Morale: C'è una categoria degli sp. loc. An.
$\mathrm{id}_{(X, \mathcal{O}_X)} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X})$

SCHEMI

Sia A anello, X sp. loc. anulato, allora $\exists$ funzione naturale

$$\mathrm{Hom}_{(L.A)}(X, \operatorname{Spec} A) = \{\text{morfismi loc. anulati } X \to \operatorname{Spec} A\} \qquad (f, f^\#)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathrm{Hom}_{(Ring)}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \qquad f^\#_{\operatorname{Spec} A} : \underset{\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})}{\overset{\|}{A}} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

Th Questa è una corrispondenza biunivoca.

Def Se A anello e X sp. top. un fascio di A-algebre $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli t.c. $\forall\, U \subseteq X$ $\mathcal{O}_X(U)$ è A-algebra e le restrizioni sono A-lineari

Oss Se $R \to S$ è omo di anelli e R è A-algebra allora $\exists!$ struttura di A-alg. su S che rende l'omo. lineare: $A \to R \to S$,

Oss Se $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è A-alg, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ è A-algebra tramite le restrizioni

$\mathrm{Hom}_{(Ring)}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \leftrightarrow$ strutture di fascio di A-alg su $\mathcal{O}_X$

Dim (Teorema)

Inj.) Consideriamo $(f, f^\#), (g, g^\#) : X \to \operatorname{Spec} A$ e supponiamo $f^\#_{\operatorname{Spec} A} = g^\#_{\operatorname{Spec} A} : A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

$f = g$) Sia $x \in X$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & & \varphi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(x)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & & \varphi_x \end{array}$$

$\mathfrak{p} = f(x)$

$$\|$$

$f^\#_x : A_{\mathfrak{p}} \to \mathcal{O}_{X,x}$ omo. locale $\Rightarrow \mathfrak{p} = f^{\#\,-1}_x(\mathfrak{m}_x)$

cioè $\mathfrak{p} = \left(f^{\#}_{\operatorname{Spec} A}\right)^{-1}\left(\{\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid \varphi(x) = 0\}\right)$

Quindi f è determinato da $f^{\#}_{\operatorname{Spec} A} = g^{\#}_{\operatorname{Spec} A} \rightsquigarrow f = g$.

$f^{\#} = g^{\#}$) $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \overset{f^{\#}}{\underset{g^{\#}}{\rightrightarrows}} f_* \mathcal{O}_X = g_* \mathcal{O}_X$

esercizio: $f^{\#} = g^{\#}$ ($f_{\operatorname{Spec} A}$ induce $f^{\#}_X$ quindi se confronto $f^{\#}_V(s)$ e $g^{\#}_V(s)$ vedo che $\forall x \in X$ hanno stesso germe)

Surj.) Dato $\varphi : A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ cerco $f : X \to \operatorname{Spec} A$ t.c. $f^{\#}_{\operatorname{Spec} A} = \varphi$.

f) Dato $x \in X$, $f(x) = \varphi^{-1}(\underbrace{\{u \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid u(x) = 0\}}_{\mathfrak{p}})$

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ perché $\mathfrak{p} = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow k(x))$

Sia $S = \operatorname{Spec} A$. mostriamo $f : X \to S$ continua.

Per $a \in A$, $S \setminus V(a) = S_a$ sono una base quindi basta che $f^{-1}(S_a)$ aperto (ESERCIZIO, idea: che se una sezione non si annulla in P allora germe invertibile e quindi invert. in intorno)

$f^{\#}$) sezioni globali OK. se $a \in A$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_a & \dashrightarrow & \Gamma(f^{-1}(S_a), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

esiste per prop. universale della localizzazione e dal fatto che in loc. annulato invert. locale $=$ invertibilità questo definisce $f^\#_{S_a}: \mathcal{O}_S(S_a) \to (f_*\mathcal{O}_X)(S_a) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(S_a))$

Prop se S è sp. top. e $\{S_i\}$ base di aperti e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fasci su S, se $\forall i$ abbiamo $\varphi_i: \mathcal{F}(S_i) \to \mathcal{G}(S_i)$ tali che restrizioni funzionano, allora $\exists! \varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ t.c. $\varphi_{S_i} = \varphi_i$.

Dim Copro U con gli S_i e sulle intersezioni OK, quindi incollo $\square$

Quindi otteniamo $f^\#: \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$. Si conclude verificando che $f^\#_p$ è locale $\forall p \in X$ (ESERCIZIO) $\square$

Cor Se A, B sono anelli, abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\mathrm{Hom}_{(L.A.)}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ring})}(A, B)$$

cioè il funtore $\mathrm{Spec}: (\mathrm{Ring})^{op} \to (L.A.)$ pienamente fedele.

Def $X \in (L.A.)$ è uno schema affine se appartiene all'immagine essenziale di Spec.

Questo definisce $(\mathrm{Aff}) \subseteq (L.A.)$ la categoria degli schemi affini.

Oss c'è una equivalenza di categorie $(\mathrm{Ring}) \simeq (\mathrm{Aff})$

Lo pseudo-inverso è dato da $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

Def Se $X \in (L.A.)$ e $U \subseteq X$ aperto, U ha in modo naturale una struttura di sp. loc. an. data da $(U, \mathcal{O}_X|_U)$

Se $j: U \hookrightarrow X$ inclusione esiste $j^\#: \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_U$

$\rho^V_{U\cap V}: \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(V \cap U)$

Def Uno **schema** è uno spazio loc. anulato che ammette un ricoprimento aperto i cui elementi sono schemi affini

Lemma (Isom. in L.A.) se $X, Y \in (L.A.)$, $f = (f, f^{\#}) : X \to Y$ iso. sse (1) f omeomorfismo (2) $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ isomorfismo.

Dim (1) e (2) sono necessarie.

Se valgono definisco $f^{-1} = \left(f^{-1}, (f^{-1})_* {f^{\#}}^{-1}\right)$

infatti ${f^{\#}}^{-1} : f_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ quindi devo ancora fare il pushfwd. □

OSS se vale (1) allora (2) $\iff \forall p \in X$ $\mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ è un iso.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,f(p)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,p} \\ (f_* \mathcal{O}_X)_{f(p)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dim

se f omeo, $(f_* \mathcal{O}_X)_{f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ è iso, quindi

$$\forall p \ \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p} \text{ iso.} \iff \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to (f_* \mathcal{O}_X)_{f(p)} \ \forall p \text{ iso.}$$
$$\iff (2)$$
□

EX (1) $\not\Rightarrow$ (2), esempio: punti, id. su X con fasci diversi,
$\mathbb{A}^1$ vs $V(y^2 - x^3)$

(2) $\not\Rightarrow$ (1), due punti con topologia indiscreta $\to$ un punto.
"stessi aperti ma spazi diversi"

Prop $\mathrm{Hom}_{(L.A.)}(\mathrm{Spec}\,B, \mathrm{Spec}\,A) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ring})}(A,B)$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ (f,f^{\#}) & \longleftrightarrow & \varphi \end{array}$$

(1) $f = \varphi^{*} : \mathrm{Spec}\,B \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$

$\qquad\qquad q \longmapsto \varphi^{-1}(q)$

(2) $f^{\#} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}A} \longrightarrow f_{*}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B}$, $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}A}(U) \rightsquigarrow \left(f^{\#}_{U}(s)\right)_q = \varphi_p(s_q)$

Dim (1) $\Gamma(\mathrm{Spec}A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}A}) = A \xrightarrow{\varphi} B = \Gamma(\mathrm{Spec}B, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B})$

sia $p = f(q)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}A,p} = A_p \arrow[r] & B_q = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}B,q} \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ omo. locale $\Rightarrow p = \varphi^{-1}(q)$ $\square$

Oss sia $A \in (\mathrm{Ring})$, $f \in A$, $X = \mathrm{Spec}A$, $X_f \text{``=''} \mathrm{Spec}A_f \subseteq \mathrm{Spec}A$

immersione aperta

Aperti principali di X.

Consideriamo il morfismo di sp.loc.an. $\mathrm{Spec}\,A_f \longrightarrow X$ determinato dalla localizzazione.

Topologicamente immersione di $\mathrm{Spec}A_f$ in X con immagine aperta X_f

ma c'è anche struttura di sp.loc.an. su $\mathrm{Spec}A_f$

Otteniamo morfismo di sp.loc.anulati $\mathrm{Spec}A_f \longrightarrow X_f$ che è omeomorfismo.

Prop $\mathrm{Spec}\,A_f \longrightarrow X_f$ è un isomorfismo!

Dim Se $X \in (L.A)$, $U \subseteq X$ aperto, $p \in U$ allora $\exists\ \mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{U,p}$ isomorfismo (stesso limite).

$\mathrm{Spec}A_f \to X_f$ omeo., se $p \in X_f$ abbiamo $\underset{\substack{\| \\ A_p}}{\mathcal{O}_{X_f,p}} \to \mathcal{O}_{A_f,p_f}$ dove $p_f = pA_f$. Voglio che $A_p \to (A_f)_{p_f}$ sia un iso. e lo è.

$\square$

Prop Un aperto di uno Schema è uno schema.

Dim Sia X schema $U \subseteq X$ aperto. SPG X affine perché X si copre con affini, quindi copro U con aperti in affini. Se $X = \operatorname{Spec} A$ allora X ha una base $\{X_f \mid f \in A\}$ di schemi affini, OK. $\square$

Nota se $R \in (\mathrm{Ring})$, $\mathbb{A}^n_R = \operatorname{Spec}(R[x_1, \dots, x_n])$

EX Se K campo troviamo aperto di $\mathbb{A}^2_K$ non affine

$$X \overset{\shortparallel}{=} \mathbb{A}^2_K \setminus \{(0,0)\} \overset{\shortparallel}{=} \mathbb{A}^2_K \setminus \{(x,y)\}$$

$\mathbb{A}^2_K = \operatorname{Spec}(K[x_1,x_2])$, $X_i = X_{x_i} = X \setminus V(x_i)$ (piano \ un asse)

$$X = X_1 \cup X_2 . \quad X_i = \operatorname{Spec}(K[x_1,x_2]_{x_i})$$

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \{(f_1,f_2) \mid f_i \in K[x_1,x_2]_{x_i}, \ f_1 = f_2 \text{ in } K[x_1,x_2]_{x_1x_2}\}$

$\Rightarrow f_1 = f_2 \in K[x_1,x_2]$

Quindi $X \hookrightarrow \mathbb{A}^2_K$ dà un isomorfismo di anelli

$$\Gamma(\mathbb{A}^2_K, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_K}) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

Quindi se X fosse affine $X \hookrightarrow \mathbb{A}^2_K$ sarebbe isomorfismo, ma non è suriettiva! $\blacksquare$

PUNTO DI VISTA RELATIVO

Def Sia R anello, un R-schema è uno schema X con un morfismo $X \to \operatorname{Spec} R$, o equivalentemente uno schema con una struttura di fascio di R-algebre su $\mathcal{O}_X$

Def Se X e Y R-schemi, un morfismo di R-schemi è un morfismo di schemi $f: X \to Y$ t.c.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} R & \end{tikzcd}$$

o equivalentemente $f^\#: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ omo. di R-algebre.

Se $X \in (Sch)$ $\exists !$ morfismo $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ $(\leftrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)))$

quindi $(Sch/\mathbb{Z}) = (Sch)$

TOPOLOGIA DEGLI SCHEMI

Oss Se $X \in (Sch)$, X è T_0 (cioè $\forall p, q \in X$ $\overline{\{p\}} = \overline{\{q\}} \Leftrightarrow p = q$)

Oss Se $X \in (Sch)$, $V \subseteq X$ chiuso irrid. allora $\exists!\, z \in X$ t.c.
$V = \overline{\{z\}}$. z è il punto generico di V.

Dim Vero se X affine. Unicità perché X è T_0.

Esistenza: Sia $V \subseteq X$ irrid. in particolare $V \neq \emptyset$. Sia $q \in V$ allora $q \in U \subseteq X$ con U affine. $V \cap U \neq \emptyset$ irrid.
$\rightsquigarrow \exists\, p \in V \cap U$ t.c. $\overline{\{p\}}^U = V \cap U \Rightarrow \overline{\{p\}} = V$ perché V irrid. $\square$

INCOLLAMENTO

Oss Se $\{X_i\}$ schemi $\coprod X_i$ è uno schema. $\mathcal{O}_{\coprod X_i}(V) = \prod \mathcal{O}_{X_i}(V \cap X_i)$

Prop Siano X_1, X_2 schemi, $U_1 \subseteq X_1$, $U_2 \subseteq X_2$ aperti
$\varphi : U_1 \to U_2$ isomorfismo di schemi.
Allora esiste uno schema X, due aperti Y_1, Y_2 di X
tali che $X_i \cong Y_i$, $Y_1 \cap Y_2 \cong U_1 \cong U_2$ e l'iso è φ.

Dim Possiamo definire $X = X_1 \amalg_\varphi X_2 = \dfrac{X_1 \amalg X_2}{x_2 \sim x_1 \iff \varphi(x_1) = x_2 \text{ or } x_1 = x_2}$
topologicamente.

Inoltre abbiamo $\pi : X_1 \amalg X_2 \to X$ mappa aperta con
$\pi|_{X_1} = i_1$ e $\pi|_{X_2} = i_2$ immersioni aperte
Inoltre $\pi(U_1) = \pi(U_2) = U$

Manca il fascio: voglio definire $\mathcal{O}_X \subseteq \pi_* \mathcal{O}_{X_1 \amalg X_2} = i_{1*}\mathcal{O}_{X_1} \times i_{2*}\mathcal{O}_{X_2}$

Sia $V \subseteq X$.

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ \begin{array}{l} (s_1, s_2) \in \pi_* \mathcal{O}_{X_1 \amalg X_2}(V) = \mathcal{O}_{X_1}(X_1 \cap V) \times \mathcal{O}_{X_2}(X_2 \cap V) \\ \quad \text{t.c. } s_1|_{U_1} = \varphi^{\#}_{U_1}(s_2|_{U_2}) \end{array} \right\}$$

Le altre verifiche sono esercizio $\left(\begin{array}{l} \mathcal{O}_X|_{X_i} \cong \mathcal{O}_{X_i} \Rightarrow \text{localm. anellati} \\ X_i \hookrightarrow X \text{ come schemi} \end{array} \right)$

□

QUALCHE SCHEMA NON AFFINE

Def R anello, $\mathbb{A}^n_R = \operatorname{Spec}(R[x_1,\dots,x_n])$

- $\mathbb{A}^n_K \setminus \{(x_1,\dots,x_n)\}$ non è affine se $n \geq 2$

- $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^n_K$, $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^n_K \setminus \{(x_1,\dots,x_n)\}$, $\varphi = id_{\mathbb{A}^n_K \setminus \{(x_1,\dots,x_n)\}}$

Allora $X_1 \amalg_\varphi X_2$ è "lo spazio affine con due origini"

Dim (Non affine) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \{(f_1, f_2) \in K[x_1,\dots,x_n]^2 \mid f_1|_U = f_2|_U\}$

Ma $\Gamma(\mathbb{A}^n_K, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$ è iniettiva

$\rightsquigarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong K[x_1,\dots,x_n] \rightsquigarrow X \to \mathbb{A}^n_K$ dovrebbe essere iso. ma non è iniettivo come funzione. ∎

Dim (X non è un aperto di uno schema affine)

Se A è un anello, $g: X \to \operatorname{Spec} A$ un morfismo allora abbiamo

$A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightsquigarrow$ ho una fattorizzazione

$X \to \mathbb{A}^n_K \to \operatorname{Spec} A$ quindi la composizione $X \to \operatorname{Spec} A$ non è iniettiva perché in ogni caso collassa le origini ∎

- $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1_K$, $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(x)\} = \operatorname{Spec} K[x, x^{-1}]$
$\varphi : U_1 \to U_2$ con $\varphi^\# : K[x^{\pm 1}] \to K[x^{\pm 1}]$
$x \longmapsto x^{-1}$

Otteniamo $\mathbb{P}^1_K$

$\Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}) = \{ (f_1, f_2) \in K[X]^2 \mid f_1(\frac{1}{x}) = f_2(x) \text{ in } K[x^{\pm 1}] \} \simeq K$

Se $f : \mathbb{P}^1_K \to \operatorname{spec} A$ morfismo $\longleftrightarrow A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \underset{\text{punto}}{\operatorname{Spec} K} \to \operatorname{Spec} A \rightsquigarrow \mathbb{P}^1_K \to \operatorname{Spec} A$ sempre costante!

SCHEMI PROIETTIVI

Def Un anello $\mathbb{Z}$-graduato è $A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ come gruppo abeliano e $\cdot : A_i \times A_j \to A_{i+j}$. Diremo graduato se $A_i = 0 \ \forall i<0$

EX • $A=K[x_1,\dots,x_n]$, $\deg x_i = d_i \in \mathbb{N}$

• $A=K[x,x^{-1}]$ con $\deg x = 1$, $\deg x^{-1} = -1$

Oss se A è $\mathbb{Z}$-graduato, $1\in A_0$ (NON OVVIO perché nessuno garantisce che 1 è omogeneo.)

Oss $A_0 \subseteq A$ sottoanello.

Def se A è $\mathbb{Z}$-graduato, $I \trianglelefteq A$ è omogeneo se $\forall x\in I$, se $x=\sum x_i$ allora $x_i \in I_i \ \forall i$. $\iff I = \bigoplus I\cap A_i \iff I$ generato da omog.

Oss se $I \trianglelefteq A$ graduato, A/I è graduato.

Notaz $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_i$. $A^+ = \bigcup_{d\geq 0} A_d$ (gli elementi omogenei)

Oss se $\{I_{(i)}\}$ omog $\bigcap I_{(i)}$, $\bigoplus I_{(i)}$, $\prod I_{(i)}$ omog.

se I, J omog. IJ omog.

Oss se A graduato, A è dominio sse $A\neq 0$ e $xy=0 \Rightarrow x=0$ or $y=0$ $\forall x,y\in A^+$

Dim $\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow$ siano x,y qualunque, scrivi in componenti, guarda le componenti omogenee di grado più piccolo. $\square$

Cor $I \trianglelefteq A$ omog. I primo $\iff I\neq A$ e $xy\in I \Rightarrow x\in I$ or $y \in I$ $\forall x,y\in A^+$

Def Se $I \trianglelefteq A$ qualunque posso definire $I^h = \sum_{i=0}^{\infty} I \cap A_i$ più grande ideale omogeneo contenuto in I

Oss I è primo sse I^h è primo.

COSTRUZIONE PROJ

Sia A anello $\mathbb{Z}$-graduato definiamo lo sp. top. $\operatorname{Proj} A$:

$$\operatorname{Proj} A = \{ \mathfrak{p} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{p} \text{ primo omogeneo}, A_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \}$$ spettro proiettivo di A

"voglio separare punti con funzioni omogenee di grado posit."

Se $I \trianglelefteq A$ ideale omog., $V_+(I) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A \mid I \subseteq \mathfrak{p} \}$

Prop I $V_+(I)$ sono i chiusi di una topologia.

Oss $V_+(I \cap A_+) = V_+(I)$

Dim se $\mathfrak{p} \in V_+(I \cap A_+)$, in particolare $A_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \rightsquigarrow \exists f \in A^+ \setminus \mathfrak{p}$

se $a \in I$, $fa \in I \cap A^+ \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow fa \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ $\square$

Oss $V_+(A) = V_+(A_+) = \emptyset$ ma $A \neq \sqrt{A_+} = A_+$

Prop Se I omogeneo, $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ omog} \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p}$ e in particolare $\sqrt{I}$ omog.

Dim

$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}$. $\quad I \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I \subseteq \mathfrak{p}^h$ perché I omog e $\mathfrak{p}^h$ primo contenuto in $\mathfrak{p}$ $\square$

Prop Se I, J omog. $V_+(I) \subseteq V_+(J) \iff J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I} \cap A_+$

In particolare $V_+(I) = V_+(J) \iff \sqrt{J} \cap A_+ = \sqrt{I} \cap A_+$

Cor $\operatorname{Proj} A = \emptyset \iff A_+ \subseteq \sqrt{(0)}$, cioè A_+ è un nilideale

SCHEMATIZZIAMO PROJ

Ricopriamo Proj A topologicamente con schemi affini

Localizzazione omogenea:

Sia A graduato, $S \subseteq A$ sist. molt., $\forall s \in S$ s omogeneo.

Allora $S^{-1}A$ ha una struttura naturale di anello $\mathbb{Z}$-graduato

Se $d \in \mathbb{Z}$, $(S^{-1}A)_d = \{ \frac{a}{s} \mid a \text{ omogeneo t.c. } \deg a - \deg s = d \}$

[Verifica che $S^{-1}A = \bigoplus (S^{-1}A)_d$ e che $(S^{-1}A)_d (S^{-1}A)_e \subseteq (S^{-1}A)_{d+e}$]

Ex $A = K[X]$, $S = \{1, X, X^2, \dots\} \rightsquigarrow S^{-1}A = K[X^{\pm 1}]$ $\mathbb{Z}$-graduato.

Oss $(S^{-1})A \doteq (S^{-1}A)_0$ è sottoanello di $S^{-1}A$

Ex $A = R[x_0, \dots, x_n]$, $S = \{1, x_0, \dots\}$

$$(S^{-1})A = A_{(x_0)} = \left\{ \frac{p(x_0, \dots, x_n)}{x_0^d} \,\middle|\, p \text{ omogeneo di grado } d \right\} = R\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$$

$$\frac{p(x_0, \dots, x_n)}{x_0^d} = p\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Ex $A = R[x_0, x_1, x_2]$, $\deg x_0 = 2$, $\deg x_1 = \deg x_2 = 1$

$$A_{(x_0)} = \left\{ \frac{p(x_0, x_1, x_2)}{x_0^d} \,\middle|\, p \in A_{2d} \right\} = R\Big[\underbrace{\frac{x_1^2}{x_0}}_{u}, \underbrace{\frac{x_1 x_2}{x_0}}_{w}, \underbrace{\frac{x_2^2}{x_0}}_{v}\Big]$$

con questa graduazione

$w^2 = uv$

In realtà ogni elemento di $A_{(x_0)}$ si può scrivere in modo unico come $q_1(u,v) + w\, q_2(u,v)$

$$\rightsquigarrow A_{(x_0)} = \frac{R[u, v, w]}{(w^2 - uv)}$$

<u>Esempi</u> • Se A graduato, $f \in A^+ = \bigcup_{i>0} A_i$, $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ allora possiamo definire $(S^{-1})A = S^{-1}A_0 = A_{(f)} = \{\frac{a}{f^d} \mid a \in A_d\}$

• se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$, $S = \{$elementi omogenei di A non in $\mathfrak{p}\}$

$$(S^{-1})A = A_{(\mathfrak{p})}$$

<u>Prop</u> $A_{(\mathfrak{p})}$ è locale

<u>Dim</u> Sia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$, $f \in A^+ \setminus \mathfrak{p}$ (perché $A_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$). Allora ho omomorfismo

$$\begin{aligned} A_{(f)} &\longrightarrow A_{(\mathfrak{p})} \\ \tfrac{a}{f^d} &\longmapsto \tfrac{a}{f^d} \end{aligned}$$

Possiamo considerare $P_{(f)} = \{\frac{a}{f^d} \mid a \in \mathfrak{p}\}$ ideale primo di $A_{(f)}$

Otteniamo $\underbrace{(A_{(f)})_{P_{(f)}}}_{\text{localizz. normale}} \longrightarrow A_{(\mathfrak{p})}$ e questo è un isomorfismo. $\square$

Sia $X = \operatorname{Proj} A$, $f \in A^+$. $X_f \doteq X \setminus V_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ aperto di X.

Al variare di f troviamo un ricoprimento di X in realtà una base

(perché se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$, $A_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \exists f \in A^+$ t.c. $f \notin \mathfrak{p}$)

Se $\{f_\alpha\} \subseteq A^+$, $V_+((\{f_\alpha\})) = \bigcap V_+(f_\alpha)$.

Se chiedo $\bigcup X_{f_\alpha} = X$ allora $\bigcap V_+(f_\alpha) = \emptyset \iff V_+((\{f_\alpha\})) = \emptyset$
$\iff A_+ \subseteq \sqrt{(\{f_\alpha\})}$.

Quindi se $\{f_\alpha\}$ sono generatori di A_+, $\bigcup X_{f_\alpha} = X$.

<u>Ex</u> $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} R[x_0, \dots, x_n]$. $\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^n (\mathbb{P}^n_R)_{x_i}$

Prop $X = \operatorname{Proj} A$. $f \in A^+$. $X_f \cong \operatorname{Spec} A_{(f)}$

Dim IDEA $\quad X_f \longrightarrow \operatorname{Spec} A_{(f)}$ è continua.
$$\mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}_{(f)}$$

$\operatorname{Spec} A_{(f)} \longrightarrow X_f$ vorrei omogeneizzare ma
$\mathfrak{q} \longmapsto ?$ $\quad$ f potrebbe non avere grado 1

sia $e = \deg f$, $\quad \mathfrak{q}_d \doteq \{ a \in A_d \mid \frac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{q} \}$

$\mathfrak{q} \longmapsto \bigoplus \mathfrak{q}_d \leftarrow$ effettivamente elemento di X_f.

Esercizio: entrambe continue e inverse $\square$

Def ($\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}$) $X = \operatorname{Proj} A$. $\widetilde{\mathcal{O}}_X$ fascio di anelli t.c.
$$\widetilde{\mathcal{O}}_X(U) = \{ s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{(\mathfrak{p})} \mid \forall \mathfrak{p} \in U \ \ s(\mathfrak{p}) \in A_{(\mathfrak{p})} \}$$
$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ s \in \widetilde{\mathcal{O}}_X(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{se } U = \bigcup X_{f_i},\ \exists\, a_i \in A_{(f_i)} \text{ t.c.} \\ \forall \mathfrak{p} \in X_{f_i},\ a_i/1 = s(\mathfrak{p}) \text{ in } A_{(\mathfrak{p})} \end{array} \right\}$$

Nota che $\mathcal{O}_X$ è fascio di anelli (unica cosa tosta è la restrizione)

$V \subseteq U$, $\mathfrak{p} \in V$. allora $\mathfrak{p} \in V \cap X_{f_i}$ per qualche f_i

V aperto $\Rightarrow \exists g \in A^+$ t.c. $\mathfrak{p} \in X_g \subseteq V \rightsquigarrow \mathfrak{p} \in X_{f_i g} \subseteq V$

$$\begin{tikzcd} A_{(f_i)} \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_{(\mathfrak{p})} \\ & A_{(f_i g)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Questo mostra che $\mathcal{O}_X$ è sottoprefascio, ma gli incollamenti sono ovvi.

Nota che se $\mathfrak{p} \in X$, $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{(\mathfrak{p})}$ è isomorfismo
$$[s]_\mathfrak{p} \longmapsto s(\mathfrak{p})$$

Ricordando l'omeomorfismo $X_f \longrightarrow \operatorname{Spec} A_{(f)}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p \longmapsto p_{(f)}$

ma sapendo ora che $X \in (L.A.)$ possiamo verificare che X_f è isomorfo a $\operatorname{Spec} A_{(f)}$

Per definire un morfismo da X_f a $\operatorname{Spec} A_{(f)}$ occorre dare un omo. di anelli:

$$\begin{aligned} A_{(f)} &\longrightarrow \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X|_{X_f}) \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_X(X_f) \\ s &\longmapsto (p \mapsto s_p) \end{aligned}$$

Nota che induce la funzione giusta perché

$$\begin{tikzcd} p_{(f)} & A_{(f)} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\ & A_{(p)} \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{O}_{X,p} \\ p_{(f)}A_{(p)} \arrow[u, mapsto] & & p \arrow[ll, mapsto] \end{tikzcd}$$

Questo definisce $\varphi^\#: \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{(f)}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{X_f}$ e $\varphi: X_f \to \operatorname{Spec} A_{(f)}$ morfismo di schemi. per concludere (sapendo φ omeo.) basta vedere che $\varphi^\#$ è iso di fasci: vediamo su spighe

$$\begin{tikzcd} \varphi^\#_p : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{(f)}, p_{(f)}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{X,p} \arrow[d, "\wr"] \\ (A_{(f)})_{p_{(f)}} \arrow[r, "\sim"] & A_{(p)} \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ per commutatività $\varphi^\#_p$ iso

PECULIARITÀ

Se A, B anelli e $\operatorname{Spec} A \cong \operatorname{Spec} B$ come schemi affini allora $A \cong B$.

MA se A, B graduati, $\operatorname{Proj} A \cong \operatorname{Proj} B \not\Rightarrow A \cong B$

Ex se $A = A_0$, $B = B_0$ allora $\operatorname{Proj} A = \operatorname{Proj} B = \emptyset$

Ex $\mathbb{P}^1$ con diverse immersioni $\left(\operatorname{Proj} k[x_0, x_1] \text{ vs } \operatorname{Proj} \frac{k[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 x_0 - x_2^2)}\right)$

Oss se $X = \operatorname{Proj} A$, $A_0 \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (per def. o perché $A_0 \to A_{(f)}$ per qualche f)

Prop se $A = R[x_0, \dots, x_n]$, $\deg x_i = 1$ e $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} A$ allora

$$A_0 = R \cong \Gamma(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R})$$

Dim $\mathbb{P}^n_R = \bigcup (\mathbb{P}^n_R)_{x_i} \cong \bigcup \operatorname{Spec} R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] = \bigcup U_i$

Una sezione globale sta in tutti questi:

se $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O})$, $s|_{U_i} = \frac{p_i(x_0, \dots, x_n)}{x_i^{d_i}}$.

se $i \neq j$ $$\frac{p_i(x_0, \dots, x_n)}{x_i^{d_i}} = \frac{p_j(x_0, \dots, x_n)}{x_j^{d_j}} \quad \text{in } R[x_0, \dots, x_n]_{(x_i x_j)}$$

$\rightsquigarrow d_i = 0 = d_j \rightsquigarrow$ costanti

espando e confronto i termini (evito di dire "divisibile per") $\square$

In generale $A_0 \not\cong \Gamma(\operatorname{Proj} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A})$

Ex $\emptyset = \operatorname{Proj} R$ ma $R_0 = R$, ma ci sono esempi non stupidi

<u>Ex</u> • $\mathbb{P}^0_R = \mathrm{Proj}(R[t]) = X$

$X = \bigcup X_{f_\alpha} \iff V_+(\{f_\alpha\}) = \emptyset \iff A_+ \subseteq \sqrt{(\{f_\alpha\})}$

quindi $X = X_t = \mathrm{Spec}\, R[t/t] = \mathrm{Spec}\, R$

• $\mathbb{P}^1_R = \mathrm{Proj}(R[x_0, x_1]) = X$, $X = \mathrm{Spec}\, R[\underbrace{x_0/x_1}_{t_0}] \cup \mathrm{Spec}\, R[\underbrace{x_1/x_0}_{t_1}]$

$X_{x_0} \cap X_{x_1} = \mathrm{Spec}\, R[t_0^{\pm 1}] = \mathrm{Spec}\, R[t_1^{\pm 1}]$

• k campo, $X = \mathrm{Proj}\, \dfrac{k[x_0,x_1]}{(x_0x_1)} = X_{x_0} \cup X_{x_1}$

$X_{x_0} = \mathrm{Spec}\left(\dfrac{k[x_0,x_1]}{(x_0x_1)}_{(x_0)}\right) = \mathrm{Spec}\left(k[x_0]_{(x_0)}\right) = \mathrm{Spec}\, k$

analogo per X_{x_1}. $X_{x_0} \cap X_{x_1} = X_{x_0x_1} = X_0 = \emptyset$

Quindi $X = \mathrm{Spec}\, k \amalg \mathrm{Spec}\, k$ come schema.

$A_0 = k$ ma $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k^2$

MORFISMI COME FASCIO

Slogan: I morfismi di schemi formano un fascio

Siano X, Y schemi, $\{X_\alpha\}$ ricopr. aperto, $j_\alpha : X_\alpha \overset{\subseteq}{\to} X$

se $f: X \to Y$ morfismo, $f|_{X_\alpha} = f \circ j_\alpha$

- $f|_{X_\alpha}|_{X_\alpha \cap X_\beta} = f|_{X_\alpha \cap X_\beta}$

<u>Prop</u> Date $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ $\forall \alpha$, $f_\alpha|_{X_{\alpha\beta}} = f_\beta|_{X_{\alpha\beta}}$ $\quad X_{\alpha\beta} = X_\alpha \cap X_\beta$

Allora $\exists !$ $f: X \to Y$ morfismo t.c. $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$ $\forall \alpha$.

<u>Dim</u> Al livello della funzione continua è ovvio.

$$f^\#: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X \quad \text{chi è?}$$

Se $V \subseteq Y$ aperto cerco $f^\#_V : \mathcal{O}_Y(V) \to f_* \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$

Se vale $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$ allora $\forall \alpha$ e $\forall s \in \mathcal{O}_Y(V)$ dobbiamo

avere $\quad f^\#_V(s)|_{X_\alpha \cap f^{-1}(V)} = f^\#_V(s)|_{f_\alpha^{-1}(V)} = f^\#_{\alpha\, V}(s)$

Inoltre $\quad f^\#_{\alpha\, V}(s)|_{X_{\alpha\beta} \cap f^{-1}(V)} = f^\#_{\beta\, V}(s)|_{X_{\alpha\beta} \cap f^{-1}(V)}$

$\rightsquigarrow$ definisce $f^\#_V(s)$

$\square$

<u>Oss</u> $\mathrm{Hom}_{(Sch)}(-, Y)$ è un fascio su X

<u>Ex</u> $A_0 \to \Gamma(\mathrm{Proj}\, A, \mathcal{O})$ dà un morfismo $\mathrm{Proj}\, A \to \mathrm{Spec}\, A_0$

$$p \longmapsto p \cap A_0$$

$X_f = \mathrm{Spec}\, A_{(f)}$, $A_0 \to A_{(f)} \rightsquigarrow X_f \to \mathrm{Spec}\, A_0$ e queste sono compatibili

$X \to \mathrm{Spec}\, A_0$ $\leftarrow$

FUNTORIALITÀ DI PROJ

Sia $k=\overline{k}$, $f_0,\dots,f_n \in k[x_0,\dots,x_m]$ polinomi omogenei di grado d

posso definire $\quad \mathbb{P}^m \setminus V_+(f_0,\dots,f_n) \longrightarrow \mathbb{P}^n$

$$x \longmapsto [f_0(x):\dots:f_n(x)]$$

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \parallel & & \parallel \\ k[x_0,\dots,x_n] & \longrightarrow & k[x_0,\dots,x_m] \\ x_i & \longmapsto & f_i \end{array}$$

è omo di anelli ma non preserva i gradi, $A_i \to B_{id}$

<u>Def</u> Se A, B graduati, $d \in \mathbb{N}_+$, $\varphi: A \to B$ <u>omo di grado d</u> se omo. di anelli e $\varphi(A_i) \subseteq B_{i\cdot d}$

φ definisce $\quad \varphi^*: \ \operatorname{Proj} B \setminus V_+(A_+B) \longrightarrow \operatorname{Proj} A$

insiemisticamente

$$\mathfrak{q} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

$$A_+ \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \iff \varphi(A_+) \subseteq \mathfrak{q} \iff A_+B = \varphi(A_+)B \subseteq \mathfrak{q}$$

Se $f \in A^+$, $X = \operatorname{Proj} A$, $Y = \operatorname{Proj} B$ $\quad \varphi^{-1}(X_f) = Y_{\varphi(f)}$

φ induce $\quad A_{(f)} \to B_{(\varphi(f))} \rightsquigarrow \operatorname{Spec} B_{(\varphi(f))} \longrightarrow \operatorname{Spec} A_{(f)}$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B_{(\varphi(f))} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A_{(f)} \\ \parallel & & \parallel \\ Y_{\varphi(f)} & & X_f \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Morfismo di schemi $\varphi^*: \operatorname{Proj} B \setminus V_+(A_+B) \longrightarrow \operatorname{Proj} A$
che insiemisticamente è quello di prima

<u>Oss</u> $\varphi: A \to B$ omo. surj. di grado 1. $\left[B = A/I,\ I \trianglelefteq A \text{ id. omo} \right]$

$A_+B = B_+$ per surgettività $\rightsquigarrow V_+(A_+B) = \emptyset$

$\Rightarrow \operatorname{Proj} B \to \operatorname{Proj} A$ morfismo. $\quad$ ESER: induce omeo $\operatorname{Proj} B \cong V_+(I)$

Ex $A = K[x_0, x_1]$, $B = K[y_0, y_1, y_2]$ $A_+ = (x_0, x_1)$

$\varphi: \begin{array}{l} x_0 \mapsto y_0^2 \\ x_1 \mapsto y_1^2 \end{array}$ omomorfismo di grado 2,

$V_+(A_+ B) = V_+((y_0^2, y_1^2)) = V_+(y_0, y_1)$

$$P \doteq \operatorname{Spec} K \cong \operatorname{Proj}(K[y_2]) \cong \operatorname{Proj}\left(\frac{K[y_0, y_1, y_2]}{(y_0, y_1)}\right)$$

Quindi φ definisce $\varphi^*: \mathbb{P}^2_K \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$

$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^1)_{x_0} \cup (\mathbb{P}^1)_{x_1} = U_0 \cup U_1$

$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{P}^2)_{y_0} \cup (\mathbb{P}^2)_{y_1} \cup (\mathbb{P}^2)_{y_2} = V_0 \cup V_1 \cup V_2$

$\varphi^{*-1}(U_0) = (\mathbb{P}^2)_{y_0^2} = (\mathbb{P}^2)_{y_0} = V_0$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: K[x_0, x_1]_{(x_0)} & \longrightarrow & K[y_0, y_1, y_2]_{(y_0)} \\ \| & & \| \\ K[\underbrace{x_1/x_0}_{s_1}] & \longrightarrow & K[\underbrace{y_1/y_0, \; y_2/y_0}_{t_1 \qquad t_2}] \\ s_1 & \longmapsto & t_1^2 \end{array}$$

$\varphi^{*-1}(U_1) = (\mathbb{P}^2)_{y_1} = V_1$ $\varphi: K[\underbrace{x_0/x_1}_{s_1}] \longrightarrow K[\underbrace{y_0/y_1, \; y_2/y_1}_{t_1, t_2}]$

$s_1 \longmapsto t_1^2$

Oss $B = A/I$ e $f \in A^+$, $g = f + I$, $B_{(g)} = A_{(f)}/I_{(f)}$

Ex
$$\varphi : k[x_0, x_1] \longrightarrow k[y_0, y_1, y_2]$$
$$x_0 \longmapsto y_0^2 + y_1^2$$
$$x_1 \longmapsto y_0^2 + y_2^2$$

$$\rightsquigarrow \varphi^* : \mathbb{P}^2_k \setminus \underbrace{V_+(y_0^2+y_1^2, y_0^2+y_2^2)}_{\mathrm{Proj}\left(\frac{k[y_0,y_1,y_2]}{(y_0^2+y_1^2,\, y_0^2+y_2^2)}\right) = S} \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$$

$S = S_{y_0} \cup S_{y_1} \cup S_{y_2}$ $\qquad S \setminus S_{y_0} = \mathrm{Proj}\, \frac{k[y_0, y_1, y_2]}{(y_0, y_0^2+y_1^2, y_0^2+y_2^2)} = \emptyset$

$$S_{y_0} = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[y_0, y_1, y_2]}{(y_0^2+y_1^2, y_0^2+y_2^2)}_{(y_0)}\right) = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[t_1, t_2]}{(1+t_1^2, t_2^2+1)}\right) = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[t_1, t_2]}{(1+t_1^2, t_1^2-t_2^2)}\right)$$

supponiamo char $k = 2$

allora abbiamo qualcosa della forma $\mathrm{Spec}\left(\frac{k[z_1, z_2]}{(z_1^2, z_2^2)}\right)$ "punto grasso"

supponiamo char $k \neq 2$

$$S = S_{y_0} = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[t_1, t_2]}{(1+t_1^2, 1+t_2^2)}\right)$$

$$A = \frac{k[t_1, t_2]}{(1+t_1^2, t_1^2-t_2^2)} = \underbrace{\frac{k[t_1]}{(1+t_1^2)}}_{R}[t_2] \Big/ (t_1^2 - t_2^2) = \frac{R[t_2]}{(t_1^2-t_2^2)} = \frac{R[t_2]}{(t_1-t_2)(t_1+t_2)}$$

$(t_1 - t_2, t_1 + t_2) = (1)$ in $R[t_2]$

Quindi: $\dfrac{R[t_2]}{(t_1^2 - t_2^2)} \overset{CRT}{=} \dfrac{R[t_2]}{(t_1 - t_2)} \times \dfrac{R[t_2]}{(t_1 + t_2)} \cong R^2$

$R = \dfrac{K[t]}{(t^2+1)}$

se $K = \mathbb{C}$ $\quad R \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightsquigarrow A \cong \mathbb{C}^4$ $\qquad S = \coprod_{\alpha=1}^{4} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$

se $K = \mathbb{R}$, $\quad R = \dfrac{K[t]}{(t^2+1)} \cong \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow S = \operatorname{Spec} \mathbb{C} \amalg \operatorname{Spec} \mathbb{C}$

Esercizio: descrivi $\mathbb{P}^2_K \setminus S \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$

PROIETTIVI PESATI

Def $\mathbb{P}_R(d_0, \dots, d_n) = \operatorname{Proj} R[x_0, \dots, x_n]$ con $\deg x_i = d_i$

Oss $d_0 = \dots = d_n = 1$ restituisce $\mathbb{P}^n_R$

Ex $\mathbb{P}_K(1,1,2) = X$.

$X_{x_2} = \operatorname{Spec} K\left[\frac{x_0^2}{x_2}, \frac{x_0 x_1}{x_2}, \frac{x_1^2}{x_2}\right] = \operatorname{Spec}\left(\frac{K[u,v,w]}{(w^2 - uv)}\right)$

Oss • $\mathbb{P}_R(\underbrace{d, \dots, d}_{n+1}) \cong \mathbb{P}^n_R$

• $\mathbb{P}_R(d_0, d_1) \cong \mathbb{P}^1_R$ $\qquad$ • $\mathbb{P}_R(1,2,2) \cong \mathbb{P}^2_R$

SOTTOSPAZI CHIUSI

Def (Immersione chiusa) Un morfismo $i: Y \to X$ in (L.A.) è una *immersione chiusa* se

(1) immersione chiusa topologicamente

(2) $i^\#: \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$ è surgettiva [pensa a funzioni lisce su sottovarietà]

Oss se $i: Y \to X$ è imm. chiusa in Top, $\mathcal{F} \in Sh(Y)$, $p \in Y$ allora abbiamo una mappa $(i_* \mathcal{F})_p \to \mathcal{F}_p$ che è un isomorphismo

Quindi se abbiamo (1) allora (2) $\iff \forall p \in Y$ $\mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{Y,p}$ surg.

Ex $\varphi: A \to B$ omo. di anelli, $i = \varphi^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

φ surg. $\iff$ i imm. chiusa

Dim Sia $I = \ker \varphi$. φ surg. $\Rightarrow B \cong A/I \rightsquigarrow \operatorname{Spec} B \cong V(I) \subseteq \operatorname{Spec} A$

Se $q \in \operatorname{Spec} B$, $p = i(q) = \varphi^{-1}(q)$, $A \otimes A/_p \longrightarrow B \otimes A/_p \underset{\uparrow}{=} B \otimes B/_q$

resta surg. per esattezza della localizzazione. $\boxed{A/_p = A/_{I+q} = B/_q}$ $\square$

Prop Composizione di imm. chiuse è imm. chiusa.

Dim OVVIO $\square$

Def Due imm. chiuse $i: Y \to X$ e $i': Y' \to X$ sono equivalenti se $\exists$ isomorfismo in (L.A.) tra Y e Y' t.c.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "i"'] & & Y' \arrow[dl, "i'"] \\ & X \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

Oss In particolare $i(Y) = i'(Y')$ insiemisticamente, ma non basta

Ex se $I \trianglelefteq A$ nilpotente non nullo, $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ imm. chiusa ma non equiv. a $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$

Prop Se esiste $\varphi : Y \to Y'$ iso. che rende $i : Y \to X$ e $i' : Y' \to X$ imm. chiuse equivalenti allora φ è unico.

Dim supponiamo φ esista. Chiaramente unica insiemisticamente

$p \in Y \longleftrightarrow p' = \varphi(p) \in Y'$

$$\begin{tikzcd}
 & f' \arrow[dl, mapsto] \arrow[drr, mapsto, bend left] & \mathcal{O}_{X,p} \arrow[dl, "i^\#"'] \arrow[dr, "(i')^\#"] & & \\
f \arrow[drrr, mapsto, bend right] & \mathcal{O}_{Y,p} \arrow[rr, "\sim", "\varphi^\#_{p'}"'] & & \mathcal{O}_{Y',p'} & (i')^\#(f') \\
 & & & (i')^\#(f') &
\end{tikzcd}$$

una sola possibilità per la surgettività

forzato $\Rightarrow \exists!\ \varphi^\#_{p'}$ $\square$

Def Un sottospazio chiuso di X è una classe di equivalenza di immersioni chiuse.

Def $\mathcal{I}$ è un fascio di ideali di $\mathcal{A}$ fascio di anelli se $\forall U$ aperto $\mathcal{I}(U) \trianglelefteq \mathcal{A}(U) \Longleftrightarrow \forall p\ \mathcal{I}_p \trianglelefteq \mathcal{A}_p$

Oss $\mathcal{I} \trianglelefteq \mathcal{O}_X \rightsquigarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ è fascio di anelli e abbiamo morfismo di fasci $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$

Def se $Y \hookrightarrow X$ imm. chiusa posso considerare il fascio di ideali $\mathcal{I}_Y = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y)$. Se $p \in Y$

$$(\mathcal{I}_Y)_p = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{Y,p})$$

Def Se $Y \hookrightarrow X$ imm. chiusa posso definire $Sh_Y(X)$ sottocategoria dei fasci su X t.c. $\mathcal{F}|_{X \setminus Y} = 0$

[Fasci a supporto su Y]. $i_*: Sh(Y) \to Sh_Y(X)$ equivalenza di cat.

Idea: $\mathcal{F} \in Sh_Y(X)$, $V \subseteq Y$ aperto, sia U aperto di X t.c. $U \cap Y = V$
Se $U' \subseteq U$ e $U' \cap Y = U \cap Y$ allora $\rho^U_{U'}$ è un isomorfismo (copro V con U' e $U \setminus Y$)
Quindi $\forall$ aperto $V \subseteq Y$ scegliamo $U \subseteq X$ aperto t.c. $U \cap Y = V$ e definiamo
$\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}(U) \rightsquigarrow \mathcal{G}$ fascio su Y, unica possibilità se $i_* \mathcal{G} = \mathcal{F}$ $\square$

Oss Se $Y \hookrightarrow X$, $Y' \hookrightarrow X$ equivalenti, $\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_{Y'}$

Th Corrispondenza biunivoca

$$\{\text{sottospazi chiusi}\} \longleftrightarrow \{\text{fasci di ideali di } \mathcal{O}_X\}$$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ ovvio

$\boxed{\Leftarrow}$ Come insieme $Y = \{p \in X \mid \mathcal{I}_p \neq \mathcal{O}_{X,p}\}$
Voglio che Y sia schema chiuso.

Se $p \in X \setminus Y$, $\mathcal{I}_p = \mathcal{O}_{X,p} \iff \exists s \in \mathcal{I}(U)$ t.c. $p \in U$, $s_p = 1$

Restringendo U prendo $s = 1$ in $\mathcal{I}(U) \rightsquigarrow U \subseteq X \setminus Y$
cioè Y è un chiuso topologicamente.

Ora cerco $\mathcal{O}_Y$ t.c. $\mathcal{O}_{Y,p} = \mathcal{O}_{X,p}/\mathcal{I}_p$ $\forall p \in Y$
sia $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ fascio di anelli su X
$\mathcal{Q}|_{X \setminus Y} = 0$ per definizione di Y.
Quindi $\exists! \mathcal{O}_Y \in Sh(Y)$ t.c. $i_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{Q}$.

Fatto questo $(Y, \mathcal{O}_Y) \in (L.A.)$ e $i^\#: \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{Q} \cong i_* \mathcal{O}_Y$

ho l'immersione chiusa. $\square$

Def $Y, Y' \subseteq X$ sottospazi chiusi. $Y \subseteq Y'$ se $\mathcal{I}_{Y'} \subseteq \mathcal{I}_Y$. implica anche insiemisticamente.

Oss equivalentemente $\exists\, j : Y \to Y'$ imm. chiusa t.c.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & Y' \arrow[dl, "i'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Def Sia $X \in (L.A.)$, $Y_1, Y_2 \subseteq X$ sottospazi chiusi
posso considerare $\mathcal{I}_{Y_1} + \mathcal{I}_{Y_2} \subseteq \mathcal{O}_X$
con $\mathcal{I}_{Y_1} + \mathcal{I}_{Y_2} = (\mathcal{I}_{Y_1} \tilde{+} \mathcal{I}_{Y_2})^{sh}$ e $(\mathcal{I}_{Y_1} \tilde{+} \mathcal{I}_{Y_2})(U) = \mathcal{I}_{Y_1}(U) + \mathcal{I}_{Y_2}(U)$
Definisco $Y_1 \cap Y_2$ come il chiuso associato a

$$\mathcal{I}_{Y_1 \cap Y_2} = \mathcal{I}_{Y_1} + \mathcal{I}_{Y_2}$$

Oss Insiemisticamente $Y_1 \cap Y_2$ è la cosa giusta

Oss Se $Y \subseteq X$ è sottospazio chiuso, $U \subseteq X$ aperto, $Y \cap U$ è sottospazio chiuso di U

Prop Se $X \in (L.A.)$, $\{X_\alpha\}$ ricopr. aperto, $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$ ssp. chiuso t.c. $Y_\alpha \cap X_{\alpha\beta} = Y_\beta \cap X_{\alpha\beta}$.
Allora $\exists!\, Y \subseteq X$ ssp. chiuso t.c. $Y \cap X_\alpha = Y_\alpha$.

Dim $\mathcal{I}_Y \trianglelefteq \mathcal{O}_X$ dato da $\mathcal{I}_Y(U) = \{ s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s|_{U \cap X_\alpha} \in \mathcal{I}_{Y_\alpha}\ \forall \alpha \}$ $\square$

SOTTOSCHEMI CHIUSI

Def se X è uno schema, un sottoschema chiuso $Y \subseteq X$ è un sottospazio chiuso che è uno schema

EX $X = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec} K[x]$. $Y = \{(x)\}$ come insieme

Come Y_n posso prendere $\operatorname{Spec} K[x]/(x^{n+1})$, $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$

Considero l'intersezione $\mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I}_{Y_n}$ $\quad \mathcal{I}_0 \supseteq \mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \supseteq \cdots$

$\mathcal{I}(U) = \bigcap \mathcal{I}_{Y_n}(U) \subseteq \mathcal{O}_X$ fascio di ideali

$\mathcal{O}_{X,0} = K[x]_{\overset{\text{come ideale primo}}{(x)}} \rightsquigarrow Y$ è punto e l'anello è $K[x]_{(x)}$

$\rightsquigarrow (Y, \mathcal{O}_Y) = (pt, K[x]_{(x)})$ e non è schema:

$\operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}_Y) = \operatorname{Spec} K[x]_{(x)}$ due punti, non uno.

EX Se A è anello, $A \twoheadrightarrow B$, $I = \operatorname{Ker}(A \to B)$,
$\operatorname{Spec} B$ è sottoschema chiuso di $\operatorname{Spec} A$

Se $A \twoheadrightarrow B$, $A \twoheadrightarrow B'$, $\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} B'$ come sottoschemi chiusi
sse $\operatorname{Ker}(A \to B) = \operatorname{Ker}(A \to B')$

Th Tutti i sottoschemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ sono del tipo $\operatorname{Spec} B$ per $A \twoheadrightarrow B$ $\left(\text{se } I = \mathcal{I}(\operatorname{Spec} A), I \otimes A_f = \mathcal{I}(\operatorname{Spec} A_f) \right)$

EX I sottoschemi chiusi di $\mathbb{A}^1_K$ con supporto $\{0\}$ sono
$\operatorname{Spec} \{ K[x]/(x^{n+1}) \}$

Def Schema X è ridotto se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) $\mathcal{O}_X(U)$ ridotto $\forall\, U$ aperto di X

(2) $\{U_\alpha\}$ ricoprimento di aperti affini $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$ t.c. A_α ridotto $\forall \alpha$

(3) $\mathcal{O}_{X,P}$ ridotto $\forall P \in X$

Dim (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) ovvio □

Th Ogni chiuso topologico di uno schema X ha un'unica struttura di sottoschema ridotto.

Dim Per gli affini ovvio, poi incolla. □

Oss La struttura ridotta è la minima tra quelle di sottoschema chiuso.

Oss Se $X = \bigcup U_i$ e $Y_i \subseteq U_i$ sottoschema chiuso t.c.

$Y_i \cap U_{ij} = Y_j \cap U_{ij}$ allora $\exists !\, Y \subseteq X$ sottoschema chiuso t.c. $Y \cap U_i = Y_i$

Def Se $X \in Sch_R$, X è proiettivo se esiste una immersione chiusa

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_R \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

per qualche n.

Oss Se A anello graduato, $I \trianglelefteq A$ omogeneo, $B = A/_I$, $\pi : A \twoheadrightarrow B$

π è un omo. di anelli graduati. Questo induce

$$\operatorname{Proj} B \setminus V_+(\underbrace{A_+ B}_{= B_+ \leadsto V_+(B_+) = \emptyset}) \longrightarrow \operatorname{Proj} A = X$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\operatorname{Proj} B \qquad\qquad$$

Che è una immersione chiusa, infatti: $X = \bigcup_{f \in A^+} \overbrace{\operatorname{Spec} A_{(f)}}^{X_f}$

$\varphi^{-1}(X_f) = \operatorname{Spec} B_{(\pi(f))}$ e $A_{(f)} \twoheadrightarrow B_{(\pi(f))}$ perché $A_f \to B_f = B_{\pi(f)}$

surj. per esattezza ma anche omo graduato, quindi in grado 0 ancora surj.

Th Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_R$ sottoschema chiuso, R anello. Allora esiste $I \trianglelefteq R[x_0,\dots,x_n]$ omogeneo t.c. $X = \mathrm{Proj}\left(\frac{R[x_0,\dots,x_n]}{I}\right)$

Dim $\mathbb{P}^n_R = \bigcup U_i$ con $U_i = (\mathbb{P}^n_R)_{x_i} = \mathrm{Spec}\left(R\left[\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right]\right)$

$X \cap U_i$ è un sottoschema chiuso di U_i, quindi

$$X \cap U_i = \mathrm{Spec}\left(\frac{R\left[\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right]}{J_i}\right)$$

Definisco $I \trianglelefteq A = R[x_0,\dots,x_n]$ come l'ideale omogeneo generato dagli

$$f \in A^{(d)} \text{ tali che } f/x_i^d \in A_{(x_i)} \text{ appartiene a } J_i \ \forall i$$

$$\mathrm{Proj}\left(A/I\right) = X \iff I_{(x_i)} = J_i \ \forall i$$

$\subseteq$ ovvia per costruzione

$\supseteq$ sia $u \in J_i$, $u = \frac{f_i}{x_i^d}$ con $f_i \in A^{(d)}$. Voglio verificare

che $x_i^e f_i \in I$ per $e \gg 0$ (NON è vero in generale che $f_i \in I$)

cioè che $\frac{x_i^e f_i}{x_j^{d+e}} \in J_j$ per $e \gg 0$ e $\forall j$

so che $(J_i)_{\frac{x_j}{x_i}} = (J_j)_{\frac{x_i}{x_j}}$ in $A_{(x_i x_j)}$, quindi

$$\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^h \cdot \frac{f_i}{x_i^d} \in J_j \text{ per } h \gg 0.$$

Scrivendo $h = d + e_j$ si ha $\frac{x_i^{e_j} f_i}{x_j^{d+e_j}} \in J_j$.

Scegliendo $e = \max_j \{e_j\}$ si ha $\frac{x_i^e f_i}{x_j^{d+e}} \in J_j \ \forall j$

$\Rightarrow x_i^e f_i \in I$ CVD $\square$

Cor Gli schemi proiettivi su R sono quelli della forma $\operatorname{Proj} A$ con A una R-algebra graduata con $A_0 = R$, A_1 R-modulo fin. gen. e A generata da A_1 come R-algebra.

Domanda $d_0, \dots, d_n$, $\mathbb{P}_R(d_0, \dots, d_n) = \operatorname{Proj}(R[x_0, \dots, x_n])$ $\deg x_i = d_i$

È vero che $\mathbb{P}_R(d_0, \dots, d_n)$ è proiettivo su R? Sì!

Se A graduato, $d > 0$, $A^{(d)}$ è anello graduato e $A^{(d)}_i = A_{id}$

$A^{(d)} \subseteq A$ è omo. di grado d

trovo $\operatorname{Proj} A \setminus V_+(A_+^{(d)} A) \longrightarrow \operatorname{Proj} A^{(d)}$

ma $\sqrt{A_+^{(d)} A} = \sqrt{A_+}$ quindi ho morfismo $\operatorname{Proj} A \to \operatorname{Proj} A^{(d)}$

questo è un isomorfismo.

Fatto $f : X \to Y$ morfismo, $Y = \bigcup V_i$ aperti, $f|_{f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \to V_i$ iso. allora f iso.

Dim Basta mostrare che le inverse si incollano, ma è vero perché derivano dalla stessa f $\square$

Dim ($\operatorname{Proj} A \to \operatorname{Proj} A^{(d)}$ iso)

Sia $X = \operatorname{Proj} A$, $Y = \operatorname{Proj} A^{(d)}$, $Y = \bigcup_{f \in (A^{(d)})^+} Y_f$ $Y_f = \operatorname{Spec} A^{(d)}_{(f)}$

ma $A^{(d)}_f = A_f \rightsquigarrow \varphi^{-1}(Y_f) = X_f = \operatorname{Spec} A_{(f)}$

$\square$

Ex • $\mathbb{P}_R(1,2,2) = \mathrm{Proj}\ \underbrace{R[x,y,z]}_{A}$ $\deg x = 1$, $\deg y = \deg z = 2$

$A^{(2)} = R[x^2, y, z]$ anello di polinomi con $\deg x^2 = \deg y = \deg z = 1$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}_R(1,2,2) \cong \mathbb{P}^2_R$

• $\mathbb{P}_R(1,1,2) = \mathrm{Proj}\ A$ $A = R[x,y,z]$, $\deg x = \deg y = 1$, $\deg z = 2$

$A^{(2)} = R[x^2, y^2, xy, z]$ $\left(\cong \dfrac{R[u,v,w,z]}{(uv - w^2)} \right)$

generato in grado 1

$\Rightarrow \mathbb{P}_R(1,1,2) \hookrightarrow \mathbb{P}^3_R$

Fatto $A = R[x_0, \dots, x_n]$, $\deg x_i = d_i$, $d = \mathrm{lcm}(d_0, \dots, d_n)$

Allora $A^{(d)}$ è generato in grado 1 e ha stesso Proj.

PROPRIETÀ DEGLI SCHEMI

Abbiamo visto: X ridotto se $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_{X,x}$ ridotto
Questa è una proprietà locale.

Qualche proprietà topologica:

- Connessione

  Oss X connesso $\iff$ $\mathcal{O}(X)$ non è prodotto, cioè non ha idempotenti non banali e $0 \neq 1$

- Irriducibilità Oss X è irrid. $\iff$ ha un punto generico.

Def X è integro se è ridotto e irriducibile

Oss Aperto non vuoto in integro è integro (aperti $\neq \emptyset$ di irrid. sono irrid.)

Lemma Sia X schema coperto da affini U_α t.c.
(1) $\mathcal{O}(U_\alpha)$ dominio
(2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\forall \alpha, \beta$
$\implies X$ integro

Dim Ridotto ovvio. Resto esercizio. $\square$

Prop X schema, X è integro sse
$X \neq \emptyset$ e $\mathcal{O}(U)$ è un dominio $\forall U$ aperto di X non vuoto.

Dim Basta mostrare che X integro $\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ dominio in quanto gli aperti non vuoti sono ancora integri.

$\mathcal{O}(X) \neq 0$ perché $X \neq \emptyset$. Se $fg = 0$, $X = V(fg) = V(f) \cup V(g)$
quindi $X = V(f)$ o $X = V(g)$ come sp. top. allora SPG
f è localmente nilpotente, ma X ridotto $\Rightarrow f_x = 0$ $\forall x \rightsquigarrow f = 0$

Viceversa, ridotto è ovvio. Il resto segue dal lemma:
copro con affini U_α. Se $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, $\mathcal{O}(U_\alpha \cup U_\beta) = \mathcal{O}(U_\alpha) \times \mathcal{O}(U_\beta)$ $\in$ NON dom
$\square$

Oss se $X = \operatorname{Spec} A$, X integro sse A dominio.

Ex se R dominio, $\mathbb{P}^n_R$ è integro.

infatti: $\mathbb{P}^n_R = \bigcup (\mathbb{P}^n_R)_{x_i}$ e questi aperti si intersecano e sono spettri di domini.

Def Uno schema è quasicompatto se è quasicompatto come sp. top.

Prop X q.c. $\iff$ Unione finita di affini.

Ex • $\mathbb{P}^n_R$ è q.c.

• $X = \operatorname{Spec} k[x_1, x_2, \dots] \setminus V((x_1, x_2, \dots))$. X è integro perché aperto non vuoto di spettro di dominio

Ma non è q.c. perché $\{U_n\}$ con $U_n = X \setminus V(x_1, \dots, x_n)$ è ricoprimento, $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots$ ma non si estrae sotto ricopr. finito.

SCHEMI NOETHERIANI

Def Uno schema X è **localmente noetheriano** se per ogni U aperto affine $\mathcal{O}(U)$ è Noetheriano.

Prop
- Se $X = \operatorname{Spec} A$, X è loc. noeth. sse A noeth.
- Un aperto in uno schema loc. noeth. è loc. noeth.
- Se $X = \bigcup U_\alpha$ con U_α aperti loc. noeth. allora X è loc. noeth

Dim
- $\Rightarrow$ ovvia.

$\Leftarrow$ Sia $X = \operatorname{Spec} A$ con A noeth. Sia $U = \operatorname{Spec} B$ aperto affine
Voglio mostrare che B è noeth.

Se $f \in A$, $X_f = \operatorname{Spec} A_f$ è aperto e chiaramente A_f noeth.

posso ricoprire $\operatorname{Spec} B$ con un numero finito di spettri di anelli noetheriani: $Y = \operatorname{Spec} B = \underbrace{\operatorname{Spec} A_1}_{X_1} \cup \dots \cup \underbrace{\operatorname{Spec} A_r}_{X_r}$

Abbiamo $B \to A_i$ $\forall i$ Se $p \in \operatorname{Spec} A_i \subseteq \operatorname{Spec} B$

allora localizzo $B_p \to (A_i)_p$,

$$\begin{array}{ccc} B_p & \to & (A_i)_p \\ \| & & \| \\ A_p & \xrightarrow{\sim} & A_p \end{array} \qquad B_p = (A_i)_p$$

Sia $I \trianglelefteq B$. IA_i è fin. gen $\forall i$
$\leadsto \exists S \subseteq I$ finito t.c.
$J = (S) \subseteq I$ e $JA_i = IA_i$ $\forall i$.

Basta mostrare che $I = J$:

per qualche i

$Q = I/J$ localizzo in p $\forall p \in B$ e diventa $I_p/J_p = I_p/J_p A_i = 0$
$\to Q = 0 \iff I = J$

■

- Altri punti per esercizio, stessa idea □

Cor X loc. noeth sse ha ricoprimento di spettri noeth.

Dim $\Rightarrow$ per definizione. $\Leftarrow$ Proposizione □

Def Uno schema è noetheriano se è loc. noeth. e q.c.

Equivalentemente, X è noetheriano se può essere coperto con un numero finito di spettri di anelli noetheriani.

Oss se $X = \operatorname{Spec} A$ come sp. top. e A Noeth. allora vale la DCC sui chiusi di X

Def Uno sp. top. è Noetheriano se soddisfa la DCC sui chiusi.

Oss X sp. top. è Noeth. sse vale ACC su aperti sse ogni aperto di X è q.c.

Cor Un aperto di uno schema noeth. è noeth.

Oss ogni sottospazio di uno sp. top. noeth è noeth.

Oss Uno schema noetheriano è noetheriano anche come sp. top.

NON vale l'altra implicazione.

Ex k campo, V sp. vett. su K, $A = K \oplus V$ con $vw = 0 \ \forall v, w \in V$

$nil(A) = \sqrt{(0)A} = V$. se $W \subseteq V$ ssp. vett. allora è ideale.

se $\dim V$ infinita, A non è noeth. ma $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} K$ che è noetheriano.

Prop se Y è sottoschema chiuso di X (loc.) noeth. allora Y è (loc.) noeth.

Dim per localmente noeth. basta guardare gli affini e notare che quozienti di noeth sono noeth.

per noeth usa il fatto che sottosp. top. di sp. top. noeth. sono noeth. $\square$

Prop Se R noeth., uno schema proiettivo su R è noeth.

Dim Basta dimostrare che $\mathbb{P}^n_R$ è noeth.

$$\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^{n} U_i \qquad U_i = \operatorname{Spec}\left(R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right)$$

noeth. per th. base di Hilb. $\square$

MORFISMI Q.C.

Def $f: X \to Y$ morfismo di schemi è quasi-compatto se $\forall V \subseteq Y$ aperto q.c., $f^{-1}(V)$ è q.c.

Oss f è q.c. se $f^{-1}(V)$ è q.c. $\forall V \subseteq Y$ aperto affine.

Def Una proprietà $\mathcal{P}$ di morfismi di schemi è locale sulla base/sul codominio se

(1) dato $f: X \to Y$ con $\mathcal{P}$, se $V \subseteq Y$ aperto, $f|_{f^{-1}(V)}$ ha $\mathcal{P}$.

(2) se $Y = \bigcup V_\alpha$ è ricopr. aperto, $f: X \to Y$ morfismo t.c. $f|_{f^{-1}(V_\alpha)}$ ha $\mathcal{P}$ $\forall \alpha$ allora f ha $\mathcal{P}$.

Una proprietà $\mathcal{Q}$ è locale sul dominio se

(1) se $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ aperti t.c. $U \subseteq f^{-1}(V)$ allora se $f: X \to Y$ ha $\mathcal{Q}$ allora $f|_U : U \to V$ ha $\mathcal{Q}$

(2) se $\{X_\alpha\}$ ricopr. aperto di X e $f|_{X_\alpha} : X_\alpha \to Y$ ha $\mathcal{Q}$ $\forall \alpha$ allora $f: X \to Y$ ha $\mathcal{Q}$

Oss q.c. non è locale sul dominio [pensa a $Y = \operatorname{Spec} K$]

Prop Sia $f: X \to Y$ morfismo, $\{Y_\alpha\}$ ric. aperto affine. Se $f^{-1}(Y_\alpha)$ è q.c. $\forall \alpha$ allora f è q.c.

Dim Basta mostrare
"se X è q.c. e Y affine allora ogni $X \to Y$ è q.c."

Infatti in tal caso $f^{-1}(Y_\alpha) \to Y_\alpha$ è q.c.. Se $V \subseteq Y$ aperto q.c., $V = \bigcup V_i$ con $V_i \subseteq Y_{\alpha_i}$. $f^{-1}(V) = \bigcup f^{-1}(V_i)$ unione finita di q.c. $\leadsto$ q.c.

Mostriamo il claim: SPG X affine (X q.c. $\Rightarrow X$ unione finita di affini)

$X = \operatorname{Spec} A \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} B = Y \leftrightsquigarrow \varphi : B \to A$

Se $b \in B$, $Y_b = \operatorname{Spec} B_b$ aperto di Y. $f^{-1}(Y_b) = X_{\varphi(b)}$ affine

Se V aperto in Y, $V = \bigcup_{\text{finita}} Y_b \rightsquigarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{\text{finita}} X_{\varphi(b)}$ q.c. $\square$

Cor Se X è q.c. e Y affine allora ogni $X \to Y$ è q.c.

Cor Essere q.c. è proprietà locale sulla base

Dim Verifico (2): copro Y_α con affini: trovo nuovo ricopr. per la prop. allora tutto f è q.c. $\square$

⚠ se $\{Y_\alpha\}$ è ricoprimento aperto di Y, Y_α q.c. $\forall \alpha$, $f^{-1}(Y_\alpha)$ q.c.
NON è detto che f sia q.c.

EX Può succedere che $f: X \to Y$ con X, Y q.c. non sia q.c.:

sia X affine con un aperto $U \subseteq X$ non q.c.

sia $Y = X \amalg_U X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 \cong X_2 \cong X$ e $X_1 \cap X_2 = U$

X e Y sono q.c. perché X affine e Y unione di due affini,

ma $\underbrace{X \cong X_1 \hookrightarrow Y}_{f}$ immersione aperta non è q.c. perché $f^{-1}(X_2) = U$

MORFISMI AFFINI

Def $f: X \to Y$ morfismo di schemi è affine se per ogni aperto affine $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ è affine

Thm (lemma di Yoneda) Se X, Y schemi supponiamo che $\forall T \in Sch$ ci sia bigezione $Mor(T, X) \cong Mor(T, Y)$ funtoriale in T, allora $X \cong Y$.

Prop Se $X = \operatorname{Spec} A \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} B = Y$ morfismo, $V \subseteq Y$ aperto affine, allora $f^{-1}(V)$ affine.

Dim Ricorda: se $U \subseteq X$ aperto allora è sottoschema. Se T schema

$$\{T \to U\} \longleftrightarrow \{T \to X \mid \operatorname{imm} T \subseteq U\}$$

Sia $V \subseteq Y$ aperto affine, $V = \operatorname{Spec} C$.
Nota che $A \otimes_B C$ ha la seguente proprietà universale

$$\begin{tikzcd} D & A \otimes_B C \arrow[l, dashed] & A \arrow[l] \arrow[ll, bend right] \\ & C \arrow[u] \arrow[ul, bend left] & B \arrow[l] \arrow[u, "\varphi = f^{\#}"'] \end{tikzcd}$$

Mostriamo $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A \otimes_B C)$:

Sia T uno schema e considero $T \to f^{-1}(V)$. Da esso

deriva
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ V \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd} \longleftrightarrow \begin{tikzcd} \mathcal{O}(T) & A \arrow[l] \\ C \arrow[u] & B \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \to \text{per prop. univ.}$$

$$A \otimes_B C \to \mathcal{O}(T)$$
$$\updownarrow$$
$$T \to \operatorname{Spec} A \otimes_B C$$

Per il lemma di Yoneda
$f^{-1}(V) \cong \operatorname{Spec}(A \otimes_B C)$!

(nota che la corrispondenza data tra $T \to f^{-1}(V)$ e $T \to \operatorname{Spec} A \otimes_B C$ è funtoriale)

$\square$

Prop se Y affine $X \to Y$ affine $\iff$ X affine

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $X = f^{-1}(Y)$

$\boxed{\Leftarrow}$ se $V \subseteq Y$ affine, $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(X))$ $\square$

Prop Essere affine è locale sulla base, cioè

(1) se $V \subseteq Y$ aperto, $f: X \to Y$ affine $\Rightarrow f^{-1}(V) \to V$ affine

(2) se $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ ricopr. $f^{-1}(Y_\alpha) \longrightarrow Y_\alpha$ affine $\forall \alpha$ implica f affine.

Ex (1) Le imm. chiuse sono affini

(2) Le immersioni aperte NON sono necessariamente affini

(X affine, $U \subseteq X$ aperto non affine, $U \hookrightarrow X$)

(3) $A = \bigoplus_{i \geq 0}^{\infty} A_i$ anello graduato, $A_0 = A/A_+$

Costruiamo $\underbrace{\operatorname{Spec} A}_{\substack{\shortparallel \\ Y}} \setminus V_+(A_+) \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ X}}{\operatorname{Proj} A}$

se $f \in A^+$, $X_f = \operatorname{Spec} A_{(f)}$, $Y_f = \operatorname{Spec} A_f$

$A_{(f)} \subseteq A_f \rightsquigarrow Y_f \longrightarrow X_f$ morfismo

$\bigcup_{f \in A^+} X_f = X$, $\bigcup_{f \in A^+} Y_f = \operatorname{Spec} A \setminus V_+((A^+)) = \operatorname{Spec} A \setminus V_+(A_+)$

$\rightsquigarrow Y \setminus V_+(A_+) \xrightarrow{\pi} X$ per compatibilità

$$\begin{array}{ccccc} Y_g & \supseteq & Y_{fg} & \subseteq & Y_f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_g & \supseteq & X_{fg} & \subseteq & X_f \end{array}$$

Per esempio: $A = R[x_0, \dots, x_n]$, $\deg x_i = 1$

$\mathbb{A}^{n+1}_R \setminus \operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n_R$ $\quad (\mathbb{A}^{n+1}_R)_{x_i} \longrightarrow (\mathbb{P}^n_R)_{x_i}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^{n+1}_R)_{x_i} & \longrightarrow & (\mathbb{P}^n_R)_{x_i} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \operatorname{Spec} R[x_0, \dots, x_n]_{x_i} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \end{array}$$

Fatto $\pi: \mathrm{Spec}\, A \setminus V(A_+) \longrightarrow \mathrm{Proj}\, A$ è affine

Dim Occorre verificare che $\pi^{-1}(X_f) \cap Y_g = Y_{fg}$

resto ESERCIZIO $\square$

MORFISMI DI TIPO FIN.

Def R anello, $X \to \mathrm{Spec}\, R$ morfismo.
X è localmente di tipo finito su R se $\forall\, U \subseteq X$ aperto affine $\mathcal{O}(U)$ è una R-alg. di tipo finito (fin. gen.)
X è di tipo finito su R se è loc. tipo finito e q.c.

Thm (1) $X = \mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, R$ è (loc) di tipo finito su R sse A è una R-alg. fin. gen. ← irrilevante perché spettri sono q.c.
(2) se $X = \bigcup U_\alpha$ con U_α loc. di tipo finito su R allora X è loc. di tipo finito
↑ aperti

oss X è loc. di tipo finito su R se $X = \bigcup U_\alpha$, U_α aperti e $\mathcal{O}(U_\alpha)$ è fin. gen su R.
X è di tipo fin. se $X = \bigcup U_\alpha$ con sopra un finiti U_α.

EX Se X è proj. su R allora è di tipo finito su R.

Dim $X \subseteq \mathbb{P}^n_R \to \mathrm{Spec}\, R$, $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$, $X_i = X \cap \underbrace{(\mathbb{P}^n_R)_{x_i}}_{\cong \mathbb{A}^n_R}$ e chiusi di $\mathbb{A}^n_R$ sono di tipo finito. $\square$

Def $f: X \to Y$ è (loc.) di tipo finito se $\forall V \subseteq Y$ affine
$f^{-1}(V) \to V = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(V))$ è (loc.) di tipo finito su $\mathcal{O}(V)$.

Fatti: (1) $X \to \operatorname{Spec} R$ è (loc.) di tipo finito sse X è (loc.) di tipo finito su R.

(2) Essere loc. di tipo finito è locale sul dominio.

(3) Essere di tipo finito è locale sulla base

(4) La composizione di due (loc.) fin. type è (loc.) fin. type.

PUNTI

Sia X schema e $P \in X$. ricordiamo che
$$K(P) = \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P$$

Se $P \in U \subseteq X$ e $U = \operatorname{Spec} A$ aperto di X allora P è un primo di A $\rightsquigarrow$
$$K(P) = A_P/\mathfrak{m}_P = \operatorname{Frac}(A/P)$$

se P massimale, $K(P) = A/P$

$\operatorname{Spec} K(P)$ è uno schema e per abbiamo $\operatorname{Spec} K(P) \longrightarrow \operatorname{Spec} A/P$

$$X \supseteq U \supseteq \operatorname{Spec} A/P$$

Quindi otteniamo un morfismo $\operatorname{Spec} K(P) \longrightarrow X$ con immagine P.

Sia K campo e $\varphi: \operatorname{Spec} K \to X$ morfismo di schemi topologicamente $\operatorname{Im} \varphi = \{P\}$ per qualche $P \in X$.
Se $U = \operatorname{Spec} A$ e $P \in U$ ho una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Spec} A \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

e in $\operatorname{Spec} A$, $P = \ker(A \to K)$

Questo induce un'immersione $K(P) \subseteq K$

$$A \to A/P \hookrightarrow K(P) \subseteq K$$

In realtà esiste un'unica fattorizzazione
$$\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} K(P) \longrightarrow \operatorname{Spec} A/P$$
$\rightsquigarrow$ $\operatorname{Spec} K(P) \to \operatorname{Spec} A/P$ è universale e quindi unico.

se $p \in X$ e a p do una struttura di schema $p = \mathrm{Spec}\, k(p)$ in modo che $p \hookrightarrow X$ è un morfismo.

se K campo e $\mathrm{Spec}\, K \to X$ ha immagine p allora

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, K \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"'] & X \\ p \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>Esempio</u> supponiamo X integro e sia $\xi \in X$ pt. generico.
Se $U \subseteq X$ è aperto affine non vuoto, $\xi \in U$ e quindi ξ è anche il pt. generico di $U = \mathrm{Spec}\, A$, che è l'ideale (0).
(A dominio!)

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{(0)} = \mathrm{Frac}\, A$$

<u>Def</u> $\mathcal{O}_{X,\xi}$ è il <u>campo delle funzioni razionali</u> di X

$$\xi = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,\xi}$$

Quindi se $X = \mathbb{A}^n_K = \mathrm{Spec}\, K[x_1, \dots, x_n]$, $\xi = \mathrm{Spec}(K(x_1, \dots, x_n))$

<u>Recall</u> Se $p \in \mathrm{Spec}\, A$, p chiuso in $\mathrm{Spec}\, A$ sse p è massimale in A
se $p \in U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq X$ è chiuso in U non è necessariamente chiuso in X

<u>Esempio:</u> $X = \mathrm{Spec}\, R$, $R = DVR$, π uniformizzante

$K = R_\pi \simeq \mathrm{Frac}\, R$, $\mathrm{Spec}\, K \subseteq \mathrm{Spec}\, R$ aperto

$\rightsquigarrow$ $p = U = \mathrm{Spec}\, K \subseteq \mathrm{Spec}\, R$ è un esempio

<u>Oss</u> se $X = \bigcup U_\alpha$ e $p \in U_\alpha$ chiuso (magari $\emptyset$) $\forall \alpha$
allora p chiuso in X

Se $X \to \operatorname{Spec} K$ e $P \in X$ — estensione di campi

$$\operatorname{Spec} K(P) \to X \to \operatorname{Spec} K \rightsquigarrow K \hookrightarrow K(P)$$

Def Un punto $P \in X$ è razionale su K se $K(P) = K$ cioè le sezioni di $X \to \operatorname{Spec} K$, ovvero

$$\{\varphi \in \operatorname{Hom}_{Sch/K}(\operatorname{Spec} K, X) \mid \pi \circ \varphi\} \doteq X(K)$$

Oss Un punto razionale è chiuso

[passo agli affini, $A \to K$ omomorfismo surj $\Rightarrow \ker$ è max]

Lemma se $k \subseteq K$ est. finita, $k \subseteq C \subseteq K$ con C sotto k-alg allora C è un campo

Thm se $X \to \operatorname{Spec} K$ è loc. tipo finito allora p chiuso sse $K(P)/K$ è finita come estensione

Dim SPG $X = \operatorname{Spec} A$ perché loc. tipo finito è locale sul dominio

se A è alg. fin. gen su K e $P \in \operatorname{Spec} A$

$$K \hookrightarrow A \to A/p \hookrightarrow K(P)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ lemma mostra $A/p = \operatorname{Frac}(A/p) = K(P)$, cioè P massimale

$\boxed{\Rightarrow}$ P chiuso $\Leftrightarrow A/p = K(P)$ e A di tipo finito $\rightsquigarrow A$ è K-alg. fin. gen.

$\Rightarrow A/p = K(P)$ è K-alg. fin. gen $\xRightarrow{\text{lemma Zariski}} K(P)/K$ finita

$\square$

Oss $\boxed{\Leftarrow}$ vale senza assumere A di tipo finito.

Cor se $K = \bar{K}$, $X \to \operatorname{Spec} K$ loc. tipo finito, pt chiusi $= X(K)$

in particolare $X(K)$ è molto denso.

Esempio (1) $\mathbb{A}^n_K(K) = K^n$

(2) $(\mathbb{P}^n_K)(K)$, usando $\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{(x_0, \dots, x_n)\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$

troviamo
$$\begin{array}{c} K^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} \longrightarrow (\mathbb{P}^n_K)(K) \\ \| \\ \left(\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{(x_0,\dots,x_n)\}\right)(K) \end{array}$$

Sia $P \in \mathbb{P}^n_K(K)$, se $P \in (\mathbb{P}^n_K)_{x_0} = \operatorname{Spec} K[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}]$

$\pi^{-1}((\mathbb{P}^n_K)_{x_0}) = (\mathbb{A}^{n+1}_K)_{x_0} \Longrightarrow \pi^{-1}((\mathbb{P}^n_K)_{x_0})(K) = \{(a_0, \dots, a_n) \mid a_0 \neq 0\}$

π manda $(a_0, \dots, a_n)$ in $\left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) \in (\mathbb{P}^n_K)_{x_0}(K)$

Quindi π è surg. sui punti razionali $\left((b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{P}^n_K)_{x_0}(K) \right.$
viene da $\left. (1, b_1, \dots, b_n) \right)$

Se $a, b \in (\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\})(K) \cong K^{n+1} \setminus \{0\}$, $\pi(a) = \pi(b)$

$\Longleftrightarrow \exists t \in K^\times$ t.c. $b = t a$

MORFISMI FINITI

Def $A \to B$ omo. di anelli è finito se B è A-mod fin. gen.

Def $f: X \to Y$ morfismo di schemi è finito se:
(1) è affine (2) $\forall V \subseteq Y$ aperto affine, $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$ è finito su $\mathcal{O}(V)$

Prop se $A \to B$ omo anelli
$Y = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = X$ finito $\Longleftrightarrow$ B finito su A

Dim $\Rightarrow$ ovvio
$\Leftarrow$ se $U \subseteq X$ aperto affine, $f^{-1}(U)$ affine e vale $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \mathcal{O}(U))$
se B finito su A, $B \otimes_A \mathcal{O}(U)$ è finito su $\mathcal{O}(U)$ $\square$

Oss Essere finito è locale sulla base, più precisamente

Prop Sia $f: X \to Y$ affine, $\{Y_\alpha\}$ ricopr. affine di Y.
Se $\mathcal{O}(f^{-1}(Y_\alpha))$ è finito $\forall \alpha$ allora f è finito.

Dim Sia $V \subseteq Y$ aperto affine. So che $f^{-1}(Y_\alpha) \to Y_\alpha$ è finito.

SPG (raffinando gli Y_α) suppongo $V = \bigcup_{\text{alcuni}} Y_\alpha$

Quindi SPG $Y = V$ affine e voglio mostrare $\mathcal{O}(Y)$ finito su $\mathcal{O}(X)$

$\mathcal{O}(f^{-1}(Y_\alpha)) = \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(Y_\alpha)$ è finito su $\mathcal{O}(Y_\alpha)$

e per compattezza $\exists S \subseteq \mathcal{O}(X)$ finito t.c. le immagini di S in $\mathcal{O}(f^{-1}(Y_\alpha))$ generano $\mathcal{O}(f^{-1}(Y_\alpha))$ come $\mathcal{O}(Y_\alpha)$-mod
(S indip. da α perché SPG $\{Y_\alpha\}$ finito)

Affermiamo che S genera $\mathcal{O}(X)$, infatti se

$$M = \mathcal{O}(Y) \cdot S \subseteq \mathcal{O}(X) \quad \text{allora}$$

se $p \in Y$ $\quad M_p \subseteq \mathcal{O}(X)_p = (\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(Y_\alpha))_p = M_p$ $\square$

Oss finito $\Rightarrow$ tipo finito.

Esempi • $\mathbb{A}^1_K \to \operatorname{Spec} K$ è chiuso ma non ha fibre finite

• Un'immersione aperta ha fibre finite ma non è chiuso.

Lemma $B \to A$, $p \in \operatorname{Spec} B$, allora $\quad f^{-1}(p) = \operatorname{Spec}(K(P) \otimes_B A)$

Dim

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & A\otimes_B B_p \arrow[r] & A\otimes_B K(P) \\ B \arrow[u] \arrow[r] & B_p \arrow[u] \arrow[r] & K(P) \arrow[u] \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \arrow[d] & \operatorname{Spec} A_p \arrow[l] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A\otimes_B K(P) \arrow[l, "\text{imm chiusa}"'] \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} B & \operatorname{Spec} B_p \arrow[l] & \operatorname{Spec} K(P) \arrow[l, "\text{imm chiusa}"] \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Spec}(A_p) = \{q \in \operatorname{Spec} A \mid \varphi^{-1}(q) \subseteq p\}$

Quindi $\operatorname{Spec}(A \otimes K(P)) = \{q \in \operatorname{Spec} A \mid \varphi^{-1}(q) = P\} = f^{-1}(P)$ $\square$

Oss Se $\varphi: B \to A$ omo. e $f = \operatorname{Spec}\varphi$ allora $\operatorname{Spec}(A\otimes_B K(P)) \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo di $\operatorname{Spec}(A\otimes_B K(P))$ con $f^{-1}(p) \subseteq \operatorname{Spec} A$.

Thm finito $\Rightarrow$ chiuso e a fibre finite

Dim $f: X \to Y$ finito. SPG X, Y affini per località delle due proprietà. ($X \cong \operatorname{Spec} A$, $Y \cong \operatorname{Spec} B$)

Se $I = \ker(B \to A)$ $\qquad B \to B/I \to A$

$$X = \operatorname{Spec} A \longrightarrow Y' = \operatorname{Spec} B/I \xhookrightarrow{\text{imm. chiusa}} \operatorname{Spec} B$$

Ma $X \to Y'$ è surj.

Quindi $f(X) = Y'$ è chiuso in Y. Se $X' \subseteq X$ chiuso $X' \to Y$ è ancora finito e quindi ha immagine chiusa $\Rightarrow f$ chiuso.

Se $\varphi: B \to A$ finito, $A \otimes_B K(P)$ è anello artiniano, quindi ha spettro finito e discreto $\square$

PRODOTTI FIBRATI

Def Se $\mathcal{C}$ categoria, $f: X \to S$ e $g: Y \to S$ frecce, un loro prodotto fibrato è un oggetto $X \times_S Y$ e due frecce (proiezioni) $pr_1 : X \times_S Y \to X$ e $pr_2 : X \times_S Y \to Y$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\langle \pi_1, \pi_2 \rangle"] \arrow[drr, bend left, "\pi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

Oss Se S terminale ($\forall X \in \mathcal{C}\ \exists!\, X \to S$) allora S irrilevante.
In questo caso $X \times_S Y$ si scrive $X \times Y$ e si chiama prodotto.

Def Categoria comma di $\mathcal{C}$ e S: se $S \in \mathcal{C}$ allora definiamo $(\mathcal{C}/S)$ come: $obj(\mathcal{C}/S) = \{X \to S\}$

$$mor(\mathcal{C}/S) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"'] \\ & S \end{tikzcd} \right\}$$

Oss $X \times_S Y = (X \to S) \times (Y \to S)$ in $\mathcal{C}/S$

Esempio: Se $\mathcal{C} = Set$ o Top $X \times_S Y$ esiste e vale
$$X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \text{ in } S\}$$

Oss se $X \times_S Y$ esiste è unico a meno di iso.

Def Un diagramma commutativo
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
è cartesiano se $Z = X \times_S Y$.

Si scrive
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Proprietà: • $X \times_S Y$ è funtoriale in X e Y:

dati $\varphi: X' \to X$ e $\psi: Y' \to Y$, $f: X \to S$, $g: Y \to S$

allora $\exists!\ X' \times_S Y' \xrightarrow{\Phi} X \times_S Y$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "\psi"] & Y \\
X' \times_S Y' \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & X \times_S Y \arrow[u] \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "\varphi"] & X
\end{tikzcd}$$

- prendendo $S \xrightarrow{id} S$, $\quad X \times_S S = X$
- $\exists\ \tau: X \times_S Y \xrightarrow{\sim} Y \times_S X$ t.c.
$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] \arrow[dr, "\tau"] & Y \\
X & Y \times_S X \arrow[l, "pr_2"] \arrow[u, "pr_1"']
\end{tikzcd}$$
  commuta.

- Dati $X \to S$, $Y \to S$ e $Z \to S$ allora
$$(X \times_S Y) \times_S Z \underset{\text{canonico}}{\cong} X \times_S (Y \times_S Z)$$

- Dati
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\square"] & \bullet \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[r, dashed] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Più in generale,
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[rr, dashed, bend left] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$
allora
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, dashed] & \bullet
\end{tikzcd}$$
cartesiano sse il primo quadrato è cartesiano.

Date $S' \to S$ e $\mathcal{C}$ ha prodotti fibrati, ho un funtore

$$(\mathcal{C}/S) \longrightarrow (\mathcal{C}/S')$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} S'\times_S X \arrow[d] \\ S' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd}[column sep=small] S'\times_S X \arrow[rr] \arrow[dr] & & S'\times_S Y \arrow[dl] \\ & S' & \end{tikzcd}$$

Esercizio: $(\mathcal{C}/S) \to (\mathcal{C}/S')$ manda prodotti fibrati in prodotti fibrati:

$$S'\times_S (X\times_S Y) \cong (S'\times_S X)\times_{S'}(S'\times_S Y)$$

$$\begin{tikzcd}
(S'\times_S X)\times_{S'}(S'\times_S Y) \arrow[rrr] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddd] & & & S'\times_S Y \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X\times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \\
& X \arrow[r] & S & \\
S'\times_S X \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & S' \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Dati: $X \to S$, $Y \to S$, $S \to S'$ allora

$$X\times_S Y \longrightarrow X\times_{S'} Y$$

$$\begin{tikzcd}
X\times_S Y \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X\times_{S'} Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left] & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[drr] & S \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& & & S'
\end{tikzcd}$$

Se $S \xrightarrow{\varphi} S'$ è un MONOMORFISMO ($\varphi\circ f = \varphi\circ g \Rightarrow f = g$)

allora $X\times_S Y \longrightarrow X\times_{S'} Y$ è un isomorfismo.

($\varphi\circ f\circ pr_1 = \varphi\circ g\circ pr_2 \Rightarrow f\circ pr_1 = g\circ pr_2 \rightsquigarrow$ altra freccia)

PRODOTTO FIBRATO DI SCHEMI

Oss • Se $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} R$ allora

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd} \longleftrightarrow \begin{tikzcd} & B \\ A & R \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} A\otimes_R B & B \arrow[l] \\ A \arrow[u] & R \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \text{ universale}$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(A\otimes_R B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

• $\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$ con j imm. aperta, allora $X \times_S Y = f^{-1}(Y)$

Oss Siano $f: X \to S$, $g: Y \to S$, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, $W \subseteq S$ aperti t.c.

$f(U) \subseteq W$, $g(V) \subseteq W$, allora

$$U \times_W V = pr_1^{-1}(U) \cap pr_2^{-1}(V) \subseteq X \times_S Y \text{ è aperto}$$

Dim Notiamo che $U \times_W V = U \times_S V$ perché $W \hookrightarrow S$ mono.

modo 1:

Verifichiamo che $pr_1^{-1}(U) \cap pr_2^{-1}(V)$ ha la proprietà universale

modo 2: $\begin{tikzcd} pr_1^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X\times_S Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$ ora ripeti con $\begin{tikzcd} pr_1^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$

$\square$

Teorema Sch ha prodotti fibrati

Dim Supponiamo S affine, $X = \bigcup U_\alpha$, $Y = \bigcup V_\beta$ con U_α e V_β aperti affini.

$\{U_\alpha \times_S V_\beta\}$ "è un ricopr. aperto di $X \times_S Y$"

Vogliamo incollare questi aperti

"$(U_\alpha \times_S V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times_S V_{\beta'}) = (U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times_S (V_\beta \cap V_{\beta'})$"

Fidatevi che si può.

Se S non è affine, $S = \bigcup W_\alpha$, $U_\alpha = f^{-1}(W_\alpha)$, $V_\alpha = g^{-1}(W_\alpha)$

allora so costruire $U_\alpha \times_{W_\alpha} V_\alpha = U_\alpha \times_S V_\alpha$ e incollo $\square$

Def Se $X \in Sch_S$, $S' \to S$, $X \times_S S'$ è il cambio di base di X a S'.

Questo dà un funtore $(Sch/S) \to (Sch/S')$

$$X \longmapsto X \times_S S'$$

$$\begin{array}{ccc} f: X \to Y & \longmapsto & X \times_S S' \to Y \times_S S' \\ \searrow S \swarrow & & \searrow S' \swarrow \end{array}$$

Ex Se $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec} R'$ allora

$$Sch/R \to Sch/R'$$

* $\mathbb{A}^n_R \times_R \operatorname{Spec} R' = \operatorname{Spec} R' \otimes_R R[x_1, \dots, x_n] = \operatorname{Spec} R'[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{A}^n_{R'}$
* A una R-alg grad. $\operatorname{Proj} A \to \operatorname{Spec} A_0 \to \operatorname{Spec} R$

considero $R' \otimes_R A$, che è una R'-alg grad e

abbiamo $A \to R' \otimes_R A$ morfismo anelli
$a \longmapsto 1 \otimes a$ graduati di grado 1

$A_+ (R' \otimes_R A) = (R' \otimes_R A)_+$, quindi otteniamo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(R' \otimes_R A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}\, A \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, R' \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, R \end{tikzcd}$$

Questo dà un morfismo di R'-schemi

$$\mathrm{Proj}(R' \otimes A) \to \mathrm{Spec}\, R' \times_{\mathrm{Spec}\, R} \mathrm{Proj}\, A$$

<u>Notaz</u> $X_{R'} = X \times_{\mathrm{Spec}\, R} \mathrm{Spec}\, R'$

<u>Prop</u> $\mathrm{Proj}(R' \otimes A) \to \mathrm{Spec}\, R' \times_R \mathrm{Proj}\, A$ è un iso

<u>Dim</u> $X = \mathrm{Proj}\, A$, $X' = \mathrm{Proj}(R' \otimes_R A)$,

$X = \bigcup_{f \in A^+} X_f \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}(X_f) \arrow[r] \arrow[d] & pr_2^{-1}(X_f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_f \arrow[d, hook, "\text{imm. aperta}"] \\ X' \arrow[r] \arrow[drr, bend right] \arrow[rr, bend right, dashed] & X_{R'} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}\, R' \arrow[r] & \mathrm{Spec}\, R \end{tikzcd}$$

Voglio che $\forall f \in A^+$, $\varphi^{-1}(X_f) \to pr_2^{-1}(X_f)$ sia iso.

$$\begin{tikzcd} pr_2^{-1}(X_f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_f \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} R' \arrow[r] & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

e X_f affine ($\operatorname{Spec} A_{(f)}$) quindi $pr_2^{-1}(X_f) = \operatorname{Spec}(A_{(f)} \otimes_R R')$

D'altronde $\varphi : X' \to X$ è indotto dalla mappa $A \to R' \otimes_R A = A'$, $a \mapsto 1 \otimes_R a$

quindi $\varphi^{-1}(X_f) = \operatorname{Spec}(A'_{(1 \otimes_R f)})$

$$\begin{array}{ccc} A_{(f)} & \longrightarrow & A'_{(1\otimes f)} \\ & & \| \\ R' \otimes A_{(f)} & \longrightarrow & (R' \otimes_R A)_{(1 \otimes f)} \end{array}$$

iso?

Sì! $R' \otimes_R A_f \xrightarrow{\sim} (R' \otimes_R A)_{1 \otimes f} \Rightarrow R' \otimes_R A_{(f)} \xrightarrow{\sim} (R' \otimes_R A)_{(1 \otimes f)}$

dunque $\varphi^{-1}(X_f) \to pr_2^{-1}(X_f)$ è iso. $\forall f \in A^+ \rightsquigarrow$ $X' \to X_{R'}$ iso. $\square$

<u>Ex</u> * $\operatorname{Spec} R' \times_{\operatorname{Spec} R} \mathbb{P}^n_R = \mathbb{P}^n_{R'}$

* $X = \operatorname{Proj}\left(\frac{R[x_0, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_r)}\right) \subseteq \mathbb{P}^n_R$, f_i omog.

$\operatorname{Spec} R' \times_{\operatorname{Spec} R} X = \operatorname{Proj}\left(\frac{R'[x_0, \dots, x_n]}{(f_1', \dots, f_r')}\right)$ dove $f_i' = 1 \otimes f_i$ cioè applico $R \to R'$ ai coeff.

* $X = \operatorname{Spec}\left(\frac{R[x_1, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_r)}\right) \subseteq \mathbb{A}^n_R$ analogo

<u>Oss</u> Il prodotto fib. su S è un prodotto in Sch/S

<u>Ex</u> $S = \operatorname{Spec} K$, K campo. $X \times Y := X \times_K Y$ se $X, Y \in \mathrm{Sch}/K$

<u>Oss</u> $(X \times_{\operatorname{Spec} K} Y)(K) = \operatorname{Mor}_{\mathrm{Sch}/K}(\operatorname{Spec} K, X \times_K Y) \cong \operatorname{Mor}(K, X) \times \operatorname{Mor}(K, Y)$

$$\operatorname{Mor}(K,X) \times \operatorname{Mor}(K,Y) = X(K) \times Y(K)$$

In generale $X \times_K Y$ come insieme NON è il prodotto cartesiano

Ex $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ $\quad$ $\mathbb{C} \to$ insieme $\bullet \times \bullet = \bullet$

ma $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightsquigarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C} = \operatorname{Spec} \mathbb{C} \amalg \operatorname{Spec} \mathbb{C}$

Esercizio sia E/K est. fin. galois, $G = \operatorname{Gal}(E/K)$

Allora $E \otimes_K E \cong \prod_G E$

Ex $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Ho una funzione insiemistica

$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$$
$$p \longmapsto (p \cap \mathbb{C}[x], p \cap \mathbb{C}[y])$$

se $p \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ pt. gen. della curva $C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ allora se C non è retta vert. o orizz. si ha

$$(pr_1(p), pr_2(p)) = ((0), (0)) \rightsquigarrow \text{Non inj.}$$

IMMAGINI INVERSE

Abbiamo visto

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, hook, "\text{imm. aperta}"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \rightsquigarrow U \times_Y X = f^{-1}(U)$$

Per imm chiuse?

<u>Prop</u> Se $Y' \hookrightarrow Y$ imm. chiusa allora anche $X' \to X$ lo è $X' = Y' \times_Y X$. Insiemisticamente $Y' \times_Y X = f^{-1}(Y')$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

<u>Dim</u> <u>Caso affine:</u> $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $Y' = \operatorname{Spec} B/I$

$X' = \operatorname{Spec}(B/I \otimes_B A) = \operatorname{Spec}(A/IA)$ chiuso!

<u>Caso generale:</u> Mi riduco a Y affine: $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ aperti affini

$$\begin{tikzcd} pr_1^{-1}(Y' \cap Y_\alpha) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, bend right] & \square & f^{-1}(Y_\alpha) \arrow[dl] \arrow[ddd, bend left] \\ & X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] & \\ & Y' \arrow[r, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y & \\ Y' \cap Y_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "\cup"] & & Y_\alpha \arrow[ul, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

posso assumere Y affine prendo $f^{-1}(Y_\alpha)$ copre X

ora mi riconduco a X affine: $X = \bigcup X_\alpha$

$$\begin{tikzcd} pr_2^{-1}(X_\alpha) \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\alpha \\ X' \arrow[u, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \rightsquigarrow pr_2^{-1}(X_\alpha) = Y' \times_Y X_\alpha$$

quindi mi sono ricondotto al caso affine $\square$

Def se $p \in X$ e $f : Y \to X$, la fibra di p è

$$\begin{tikzcd} p \times_X Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} K(p) = p \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Prop $p \times_X Y \to Y$ induce omeo tra $p \times_X Y$ e $f^{-1}(p)$

Dim Visto nel caso affine.

- Sia $U \subseteq X$ affine t.c. $p \in U$

$$\begin{tikzcd} p \times_U f^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & f^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ p \arrow[r] & U \subseteq & X \end{tikzcd} \rightsquigarrow p \times_X Y = p \times_U f^{-1}(U)$$

- riduci a Y affine (esercizio) $\square$

STABILITÀ PER CAMBIO DI BASE

Def P è stabile per cambiamento di base se: se f ha P allora anche f' ha P

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Ex • Essere omeo. NON è stabile per base change

Prop suriettività è stabile per base-change.

Dim Sia $f : X \to Y$ surg. Vogliamo mostrare che $\forall p \in Y'$ $p \times_{Y'} X' \neq \emptyset$:

$$\begin{tikzcd} p \times_{Y'} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ p \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \rightsquigarrow p \times_{Y'} X' = p \times_Y X$$

$\neq \emptyset$ perché f surg.

SPG $Y' = \operatorname{Spec} K$.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & p \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ p \arrow[r] & \operatorname{Spec} K \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ SPG $Y = \operatorname{Spec} L$.

sappiamo anche $X \neq \emptyset$. Sia $Q \in X$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(K \otimes_L k(Q)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Q \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K \times_L X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} L
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ SPG $X = \operatorname{Spec} E$

e ora è ovvio perché $K \otimes_L E \neq 0$

$\square$

MORFISMI PROIETTIVI

Def $X \to Y$ è proiettivo se si fattorizza

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y \to Y \quad \text{dove } X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y \text{ imm. chiusa.}$$

Oss Essere proiettivo è stabile per cambio di base:

Dim

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \arrow[dl, bend left] \\ \mathbb{P}^n_{Y'} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$\square$

Def (Embedding di Segre) $\mathbb{P}^m_Z \times_Z \mathbb{P}^n_Z \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn+n+m}_Z$

se $Z = \operatorname{Spec} R$ allora è dato: $(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto (x_i y_j)_{i,j}$

formalmente: $U_i = (\mathbb{P}^m_R)_{x_i}$, $V_j = (\mathbb{P}^n_R)_{y_j}$, $W_{ij} = (\mathbb{P}^{mn+m+n}_R)_{t_{ij}}$

allora $U_i \times V_j \hookrightarrow W_{ij}$ e poi incollo le imm. chiuse

$$\frac{x_\alpha}{x_i} \otimes \frac{y_\beta}{y_j} \longleftarrow \frac{t_{\alpha\beta}}{t_{ij}}$$

Esercizio: (1) Le restrizioni di $U_i \times V_j \to W_{ij}$ a intersez. tornano

(2) $\Phi^{-1}(W_{ij}) = U_i \times V_j$ quindi si incollano a imm. chiusa.

Altro approccio $\mathbb{A}^{m+1}_0 \doteq \mathbb{A}^{m+1}_R \setminus \operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^m_R$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{m+1}_0 \times \mathbb{A}^{n+1}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^{(m+1)(n+1)}_0 \arrow[d] \\ \mathbb{P}^m_R \times_R \mathbb{P}^n_R \arrow[r, dashed, "\exists!"'] & \mathbb{P}^N_R \end{tikzcd}$$

questa la so definire

eser.

Prop Essere proj. è stabile per composizione.

Dim

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} & \mathbb{P}^{mn+m+n}_Z \arrow[dddr, bend left] & {} \\
{} & {} & \mathbb{P}^m_Z \times_Z \mathbb{P}^n_Z \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & {} & {} \\
{} & \mathbb{P}^m_Y \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & {} & \mathbb{P}^n_Z \arrow[dr] & {} \\
X \arrow[ur, hook] \arrow[rr] & {} & Y \arrow[ur, hook] \arrow[rr] & {} & Z
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{P}^m_Y = \underbrace{Y \times_Z \mathbb{P}^m_Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Z \times_Z \mathbb{P}^m_Z}_{Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Z \ + \text{ base change}}$$

$\square$

DIMENSIONE

Def X sp. top. $V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r$ catena di chiusi irrid. di lunghezza r. $\dim X = \sup\{r \text{ al variare di catene}\}$

Se $Y \subseteq X$ è chiuso irrid. la codimensione è
$$\operatorname{codim}_Y X = \sup\{r \mid V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r \text{ catene con } V_0 = Y\}$$

Oss ① Se $U \subseteq X$ aperto e $Y \cap U \neq \emptyset$ allora
$$\operatorname{codim}_{Y\cap U} U = \operatorname{codim}_Y X$$
($\overline{V_i \cap U} = V_i$ per irriducibilità)

② Se X è uno schema $Y = \overline{\{\eta\}}$ e $\operatorname{codim}_Y X = \dim \mathcal{O}_{X,\eta}$

Se $Y \subseteq X$ è chiuso ma NON irriducibile
$$\operatorname{codim}_Y X = \inf_{\substack{Y' \subseteq Y \\ \text{irriducibile}}} \operatorname{codim}_{Y'} X$$

Prop (1) $\dim X = \sup_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{chiuso irrid.}}} \operatorname{codim}_Y X$

(2) Se $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ allora $\dim X = \sup_\alpha \dim U_\alpha$

(3) Se $Y \subseteq X$ irrid. $\dim Y + \operatorname{codim}_Y X \leq \dim X$

Si può avere disuguaglianza propria.

Thm Se X è schema loc. noeth., $Y \subseteq X$ chiuso irrid

$$\operatorname{codim}_Y X = \dim \mathcal{O}_{X,\eta} < \infty$$

Achtung esistono A noeth. t.c. $\dim A = \infty$

Ex $\exists$ A dominio noeth. di dim finita t.c. $\dim A_m < \dim A$ per un certo m massimale

per esempio: • R DVR con $m_R = (t)$, $A = R[x]$

$m = (t, x)$ vs $m = (xt - 1)$ i quozienti sono campi

• semilocalizzazione

Prop X schema loc. Noeth. Allora

dim 0 $\iff$ sp. top. discreto

Dim $\Rightarrow$ localmente ho spettro di Noeth dim 0 $\rightsquigarrow$ spettro di Artin.

$\Leftarrow$ ovvio $\square$

Prop Se $Y \to X$ morfismo finito surgettivo allora $\dim Y = \dim X$

Dim morfismo finito è affine, quindi SPG X, Y affini.

$$X = \operatorname{Spec} A,\ Y = \operatorname{Spec} B,\ I = \ker(A \to B).$$

I è un nilideale quindi SPG $I = (0)$

Allora $A \subseteq B$ estensione finita $\to$ Going up + incomparabilità $\square$

Thm (Hauptidealsatz) A noeth. loc. $I=(f_1,\dots,f_r)\subseteq A$ allora $ht(I)\leq r$

Achtung Ci si aspetta che se $p\subsetneq q$ con $p,q\in \operatorname{Spec} A$ allora tutte le catene massimali di primi tra p e q abbiano la stessa lunghezza. NO

Thm • Se R Noeth, $A=R[x_1,\dots,x_n]$ allora $\dim A=\dim R+n$

• Se $R=K$ campo, $\dim A_m=n$ per ogni massimale

Cor se X schema integro di tipo finito su K, $K(X)=\mathcal{O}_{X,\xi}$ campo dei quozienti di X, $d=\operatorname{trdeg}_K K(X)$
Allora $d=\dim X=\operatorname{codim}_p X$ $\forall p\in X$ chiuso.
Inoltre, se $Y\subseteq X$ chiuso irrid.,

$$\dim X=\dim Y+\operatorname{codim}_Y X$$

Cor se X schema integro di tipo finito su K, se $U\subseteq X$ è aperto, $U\neq\emptyset$, $\dim U=\dim X$

Thm Se X integro di tipo finito su K e K'/K ext. allora tutte le comp. irrid. di $X_{K'}$ hanno $\dim=\dim X$

Sketch $\dim X_{K'}=\dim X$ segue da Norm. di Noether il fatto che OGNI componente abbia la stessa dim è più delicato

$\square$

SCHEMI NORMALI

Def Uno schema irrid. è **normale** se $\forall p \in X$ $\mathcal{O}_{X,p}$ è un dominio normale.

Ex Se $X = \operatorname{Spec} A$ e A dominio
X normale $\Longleftrightarrow$ A dominio integralmente chiuso

Prop Se X integro, $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$ allora X normale sse A_α normale $\forall \alpha$

Ex (1) Se R dominio normale, $\mathbb{A}^n_R$ e $\mathbb{P}^n_R$ sono normali

(2) k campo char $k \neq 2$ $X = \operatorname{Spec}\left(\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1x_2 - x_3^2)}\right)$ è uno schema normale

Dim Sia $A = \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_1x_2 - x_3^2)}$, irrid. monico in x_3

Sia $\mathbb{K} = \operatorname{Frac} A$, $B = k[x_1,x_2]$, $A = \frac{B[x_3]}{(x_1x_2 - x_3^2)}$

$\rightsquigarrow A = B \oplus x_3 B \rightsquigarrow \mathbb{K} = k(x_1,x_2)(\sqrt{x_1x_2})$

Sia $f \in \mathbb{K}$ che sia integro su A. Facciamo vedere che $f \in A$.

$$f = f_0(x_1,x_2) + x_3 f_1(x_1,x_2)$$

azione di $\operatorname{Gal}(\mathbb{K}/k(x_1,x_2))$

$$\bar{f} = f_0(x_1,x_2) - x_3 f_1(x_1,x_2)$$

$\Rightarrow 2f_0 = f + \bar{f}$ integro su $A \Rightarrow$ integro su B

$\Rightarrow 2f_0 \in A \Rightarrow f_0 \in A.$

$x_3 f_1(x_1, x_2)$ è intero su A

$\Rightarrow x_1 x_2 f_1^2$ è intero su $A \rightsquigarrow$ su B

$\rightsquigarrow x_1 x_2 f_1^2 \in B \Rightarrow f_1 \in B$ perché $x_1 x_2$ non quadrato in B $\blacksquare$

Thm Se A dominio noeth. normale, $K = \operatorname{Frac} A$

(1) Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, $A_{\mathfrak{p}}$ è DVR

(2) $A = \bigcap_{\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$

Cor Sia X integro loc. noeth. normale, $Y \subseteq X$ chiuso $\operatorname{codim}_Y X \geq 2$. Allora

$$\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X \setminus Y) \text{ è un isomorfismo}$$

Dim Caso affine e segue dal teorema punto (2) $\square$

Ex $A = \{f \in k[x,y] \mid f \text{ non contiene termini lineari in } x, y\}$

A è sottoalgebra di $k[x,y]$.

$A = k[x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3]$ tipo finito$/k$.

$A \subseteq k[x,y]$ induce $\mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} A$ tipo finito

È un omeomorfismo;

$(x,y) \longmapsto \mathfrak{m} = (x^2, xy, \dots)$, $\mathfrak{m} = \sqrt{(x^2, y^2)}$

$\rightsquigarrow \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\} = \operatorname{Spec} A_{x^2} \cup \operatorname{Spec} A_{y^2}$

$A_{x^2} \to K[x,y]_{x^2} = K[x,y]_x$ è iso. (iniettiva perché inclusione ma suriett. perché $\frac{f}{x^n} = \frac{f x^n}{x^{2n}}$

$\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A \setminus \{m\}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^2_k \setminus \{(x,y)\})$
$= K[x,y] \supsetneq A$ quindi non ho restrizione $\square$

Def Uno schema X è normale se è unione disgiunta di schemi irriducibili normali.

Ex se X noeth con $X_1, \dots, X_r$ comp. irrid. allora

X normale $\iff$ X ridotto, $X_i \cap X_j = \emptyset$, X_i normale

NORMALIZZAZIONE

se A dominio, $K = \operatorname{Frac} A$, $\bar{A}$ = chiusura intera di A (in K)

Note In generale $\bar{A}$ non è finito su A, anche se A Noeth., anche noeth. di dim 1

Thm se A è f.g. su campo, $\bar{A}$ è finito su A

Dim Dimostriamo che se L/K è ext. fin. allora $\overline{A}^L$ è fin su A, $K = \operatorname{Frac} A$.

Per Norm. di Noeth. $\exists R \subseteq A$ sottoalgebra con $R \cong k[x_1, \dots, x_r]$ e A finito su R

e $\overline{A}^L = \overline{R}^L$, quindi possiamo assumere $A = R$

Passo 1 L/K separabile

Lemma In generale, L/K separabile finita, $A \subseteq K$ normale. Allora $B = \overline{A}^L$ è finita su A [A Noeth.!]

Dim $\tau : L \times L \to K$ accoppiamento non degenere
$(x, y) \mapsto tr_{L/K}(xy)$ se $x, y \in B$, $\tau(x, y) \in A$

$d = [L:K]$, $b_1, \dots, b_d$ base di L su K t.c. $b_1, \dots, b_d \in B$.

[$x \in L \setminus \{0\}$ voglio che $\exists a \in K \setminus \{0\}$ t.c. $ax \in B$
x ha poly minimo su K, c'è versione su A
se non è monico, moltiplico per il leadin coeff.
ad una opportuna potenza $\rightsquigarrow ax \in \overline{A}^L$]

c'è una base duale $b_i' \in L$ t.c. $\tau(b_i, b_j') = \delta_{ij}$

se $x \in B$, $x = \sum \alpha_i b_i'$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_i = \tau(b_i, x) \in A$

$\Rightarrow B \subseteq \langle b_1', \dots, b_d' \rangle_A \Rightarrow B$ finito per Noetherianità

Nota Questo chiude char $= 0$.

Passo 2 L/K puramente insep. $A = K[x_1, \dots, x_n]$

$$L = K(\sqrt[p^t]{\ell_1}, \dots, \sqrt[p^t]{\ell_r}) \subseteq K'(x_1^{1/p^t}, \dots, x_n^{1/p^t}) \subseteq \bar{L}$$

K' finito su K, definito dai coeff. di $\sqrt[p^t]{\ell_i}$ come funzione razionale su K

Pongo $A' = K'[x_1^{1/p^t}, \dots, x_n^{1/p^t}]$

A' è finito su A, ma $A \subseteq B \subseteq A'$ $\Rightarrow$ B finito su A

passo 3 generale.

L/K finita. SPG (estendendo L) L/K normale

$L^{\mathrm{Aut}(L/K)}/K$ è puramente inseparabile

quindi usando passo 2 su questa e passo 1 su $L/L^{\mathrm{Aut}(L/K)}$ finiamo $\square$

Def Se A dominio con $K = \mathrm{Frac}\,A$, $\bar{A}$ è la chiusura intera o Normalizzazione di A

Oss $\bar{A}$ è il più piccolo dominio normale che contiene A con lo stesso campo dei quozienti

Oppure, se C è dominio normale e $A \xrightarrow{\varphi} C$ iniettivo allora

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & C \\ \bar{A} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Thm Sia X schema integro, allora $\exists!$ morfismo dominante $\bar{X} \to X$, dove $\bar{X}$ normale, t.c. se $Y \to X$ dominante con Y normale allora

$$\begin{tikzcd} & \bar{X} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, "\exists!"] & X \end{tikzcd}$$

Inoltre $\bar{X} \to X$ induce $K(X) = \mathcal{O}_{X,\xi} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{X},\bar{\xi}} = K(\bar{X})$ e
(1) se $X = \operatorname{Spec} A$, $\bar{X} = \operatorname{Spec} \bar{A}$
(2) se X loc. tipo fin. su K allora $\bar{X} \to X$ finito

Sketch • Nella prop. univ. SPG $Y = \operatorname{Spec} B$, infatti $Y \to X$ dominante, $Y = \bigcup Y_\alpha$ con Y_α normale affine

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} Y \arrow[r] & X \\ Y_\alpha \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, dotted, "f_\alpha"] & \bar{X} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ancora dominante

suppongo per affini

ma posso incollare gli f_α perché unicità soll. per affini $\Rightarrow$ unicità soll.
quindi $f_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} = f_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}$

• Se $X = \operatorname{Spec} A$ allora verifico che $\bar{X} = \operatorname{Spec} \bar{A}$ ha la prop. univ.

• Se $\pi : \bar{X} \to X$ ha prop. univ. e $U \subseteq X$ allora $\pi^{-1}(U) \to U$ ha ancora la prop. univ.

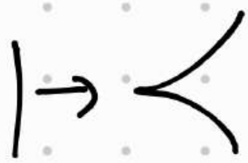
• Copro X con aperti affini, li normalizzo e poi incollo

$\square$

Ex $X = \operatorname{Spec} k[t^2,t^3]$ $\qquad \dfrac{k[x,y]}{(y^2-x^3)} \cong k[t^2,t^3] \subseteq k[t]$

dato che $\operatorname{Frac} k[t^2,t^3] = \operatorname{Frac} k[t] = k(t)$ e $k[t]$ int. chiuso

$\bar{X} = \operatorname{Spec} k[t] = \mathbb{A}^1_k$



Ex $A = \dfrac{k[x,y]}{(y^2-x^2(1+x))} \subseteq k[t]$

con $y/x = t$

$\cancel{x^2}\, t^2 = \cancel{x^2}(1+x) \longrightarrow t^2-1 = x$

$y = t^3 - t \rightsquigarrow A = k[t^3-t, t^2-1]$

SCHEMI REGOLARI

Recall se A loc. Noeth, $m \triangleleft A$ max, $k = A/m$ allora $\dim m/m^2 \geq \dim A$.

A regolare se vale $=$.

Fatti (1) A loc. reg. è UFD (e quindi normale)

(2) se A loc. reg. $p \in \operatorname{Spec} A$, A_p regolare

Def A noeth. è regolare se A_p regolare $\forall p \in \operatorname{Spec} A$
$\iff A_m$ regolare $\forall m \in \operatorname{Spec}_{max} A$

Oss se A regolare, A è prodotto di un numero finito di domini regolari

Dim $X = \operatorname{Spec} A$, $X_1, \dots, X_r$ comp. irrid. X ridotto per regolarità e $X_i \cap X_j = \emptyset$ perché altrimenti se $p \in X_i \cap X_j$ allora $\mathcal{O}_{X,p}$ avrebbe almeno due primi minimali e quindi dei div. di zero. ↯ $\square$

Def se X schema noeth. è regolare se $\mathcal{O}_{X,p}$ regolare $\forall p \in X$.
Equivalentemente, se X noeth, $X = \bigcup \operatorname{Spec} A_\alpha$ con A_α regolari.

Oss X regolare sse $\mathcal{O}_{X,p}$ regolare $\forall p \in X$ chiuso

Auslander-Buchsbaum-Serre

Def $X \in Sch/K$ loc. tipo finito, $p \in X(K)$.
Lo spazio tangente a X in p è $\left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^\vee$

Thm X affine tipo fin. su K, $X = \operatorname{Spec} \dfrac{K[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_K)} \subseteq \mathbb{A}^n_K$
sia $p \in X(K) \subseteq \mathbb{A}^n_K(K)$.

$$\dim_K \left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right) = n - \operatorname{rnk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j}$$

Dim $\mathbb{A}^n_K(K) \text{"="} K^n$, scriviamo dunque $p = (p_1, \dots, p_n)$

Sia $I = (f_1, \dots, f_r)$
$$\begin{aligned} R^r &\to R \to A \to 0 \\ (\varphi_1,\dots,\varphi_r) &\mapsto \sum \varphi_i f_i \end{aligned}$$

$M_p = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \subseteq R$, $\mathfrak{m}_p$ stesso ideale ma in A

$$R^r \to M_p \to \mathfrak{m}_p \to 0$$
$$\big\downarrow \otimes_R K$$
$$K^r \to M_p/M_p^2 \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \to 0$$

Dunque M_p/M_p^2 ha come base $\overline{x_1 - p_1}, \dots, \overline{x_n - p_n}$

$$\begin{aligned} K^r &\to K^n \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \to 0 \\ e_j &\mapsto [f_j] \in M_p/M_p^2 \cong K^n \end{aligned}$$

per la formula di Taylor

$$f_j = \underbrace{f_j(p)}_{=0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \text{grado } 2$$

$$\rightsquigarrow [f_j] = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)^T$$

$\rightsquigarrow K^r \to K^n$ è rappresentata in matrice dalla matrice Jacobiana.

Questo mostra il teorema per esattezza di
$$0 \to \operatorname{Imm}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \to K^n \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \to 0$$
$\square$

Oss $\dim_K(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2) \geq \dim \mathcal{O}_{X,p} = \max_{\substack{Y \text{ comp. irrid.}\\ p\in Y}} \dim Y$

Cor $\operatorname{rnk}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right) \leq n - \operatorname{codim}_p X$ e vale $=$ sse p regolare

Recall $p \in X$ chiuso $\Longleftrightarrow K(p)/K$ è finita. ($X \in Sch/K$ tipo fin.)

Cor Se $K = \overline{K}$, X regolare sse $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right)$ ha rango massimo ($n - \operatorname{codim}_p X$) per ogni p.

Ex Sia $p = \operatorname{char} K$, K non perfetto, cioè $\exists\, a \in K \setminus K^p$
$K' = \frac{K[x]}{(x^p - a)}$ estensione puramente inseparabile di K

$X = \operatorname{Spec} K' \subseteq \mathbb{A}^1_K$. X è regolare di dimensione 0

$$\text{MA } \frac{\partial(x^p - a)}{\partial x} = px^{p-1} = 0$$

Cosa è successo?

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right) \in \mathcal{M}(r, n, K(p))$$ NON K

Costruzione $X \to \operatorname{Spec} K$ loc. tipo fin. $p \in X$ pt. chiuso

$K(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$ estensione finita di K

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(p) \arrow[r] \arrow[d] & P = \operatorname{Spec} K(p) \arrow[d] \\ X_{K(p)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ P \arrow[r] \arrow[u, bend left, "p'"] & \operatorname{Spec} K \end{tikzcd}$$

$\pi^{-1}(P) = P \times_K P = \operatorname{Spec}(K(P) \otimes_K K(P))$

e $K(P) \otimes_K K(P) \to K(P)$

$a \otimes b \longmapsto ab$

$\Updownarrow$

$\pi^{-1}(P) \leftarrow p'$

e ora p' è razionale in $X_{K(p)}$

Def $p \in X$, $T_p X = T_{p'}(X_{K(p)})$

Ex Sia $p = \operatorname{char} K$, K non perfetto, cioè $\exists\, a \in K \setminus K^p$

$K' = \dfrac{K[x]}{(x^p - a)}$ estensione puramente inseparabile di K

$X = \operatorname{Spec} K' \subseteq \mathbb{A}^1_K$.

$$X_{K'} = \operatorname{Spec}\left(\frac{K'[x]}{(x^p - a)}\right) = \operatorname{Spec}\left(\frac{K'[x]}{(x^p - \alpha^p)}\right) \overset{t = x-\alpha}{=} \operatorname{Spec}\left(\frac{K'[t]}{(t^p)}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} X_{K'}(K') \subseteq \mathbb{A}^1_{K'}(K') & = & K' \\ \Psi & & \Psi \\ p' & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

$T_p X = T_{p'} X_{K'} = \dfrac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2} \cong K'$

ora torna!

PUNTI LISCI

Def $X \to \operatorname{Spec} K$ loc. tipo finito, $p \in X$ chiuso.
① p regolare se $\mathcal{O}_{X,p}$ è regolare
② p è liscio se $\mathcal{O}_{X_{\overline{K}(p)},p'}$ è regolare

Oss se P è razionale ($P \in X(K)$) allora liscio sse regolare

Oss $X = \operatorname{Spec} \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_r)}$, $\operatorname{rnk} \underbrace{\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \right)}$ $\leq n - \operatorname{codim}_p X =$
$= n - \operatorname{codim}_{p'} X_{\overline{K}(p)}$
estendendo scalari la matrice non cambia

Sospetto che in generale liscio è più forte di regolare

Ex $K = K_0(t)$ con $\operatorname{char} K_0 = p > 2$

$X = \operatorname{Spec} \frac{K[x,y]}{(\underbrace{y^{p-1}x + x^p - t}_{\doteq f})}$. Si verifica che $f(x,y)$ è irrid. in $\overline{K}[x,y]$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{p-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -y^{p-2}x$, si annullano simultaneamente per $y=0$.

$\begin{cases} y=0 \\ y^{p-1}x + x^p - t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y=0 \\ x = \sqrt[p]{t} \end{cases}$, c'è un punto singolare

$$\xi = \operatorname{Spec} \frac{K[x,y]}{(y, x^p - t)}, \quad K(\xi) = K(\sqrt[p]{t})$$

Passando alla chiusura algebrica ξ è una cuspide
Quindi ξ non liscio

Eppure X è regolare:

$R = K_0[t,x,y]/(y^{p-1}x + x^p - t) \cong K_0[x,y]$

Quindi $\dfrac{K[x,y]}{(y^{p-1}x + x^p - t)}$ è una localizzazione di R (dividi per t) e quindi regolare perché R regolare.

Recall Se $A \to B$ piatto locale, A e B Noeth., B regolare allora A regolare [usa gldim]

Thm (1) se $P \in X$ come sopra è liscio allora è regolare
(2) se $K(P)/K$ è separabile allora P liscio $\Leftrightarrow$ regolare
In particolare se K perfetto allora liscio = regolare

Dim (1)

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \\ X_{K(P)} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ P \arrow[r] & \operatorname{Spec} K \end{tikzcd}$$

$X = \operatorname{Spec} A$, $X_{K(P)} = \operatorname{Spec} A'$

$A' = K(P) \otimes_K A$ piatto su A

$\Rightarrow A_P \xrightarrow{\text{piatto}} A'_P = A' \otimes A_P \xrightarrow{\text{piatto}} A'_{P'}$

$\Rightarrow A'_{P'}$ piatto su A_P

Questo chiude per il recall.

(2) $K(P) = K' \overset{\text{elemento primitivo}}{=} \dfrac{K[t]}{(f(t))}$ per $f(t) \in K[t]$ irrid.

Per separatezza, f ha radici semplici.

$$\begin{tikzcd} p' \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \pi^{-1}(p) \arrow[r] \arrow[d] & p \arrow[d] \\ & X_{K(p)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & p \arrow[r] & \operatorname{Spec} K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K' & K'\otimes_K K' \arrow[l] & K' \arrow[l] \\ & K'\otimes_K A \arrow[ul] \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\square"] \\ & K' \arrow[u] & K \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$K'\otimes_A(K'\otimes_K A) = K'\otimes_K K'$

Sia $\alpha = [t] \in K'$. Notiamo che p' è isolato in $\pi^{-1}(p)$:

$$\begin{array}{ccccccc} K'\otimes_K K' & = & \frac{K'[t]}{(f)} & = & \frac{K'[t]}{(t-\alpha)} \times \frac{K'[t]}{(g)} & \cong & K' \times \frac{K'[t]}{(g)} \\ \downarrow \quad a\otimes b & & \downarrow \quad [p(t)] & & & & \downarrow \pi_1 \\ K' \quad \ \ ab & & K' \quad \ p(\alpha) & & & & K' \end{array}$$

Abbiamo omo. locale piatto $A_p \to (A\otimes_K K')_{p'}$ $\qquad K' = K(p) = K(p')$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to m_p \to A_p \to K' \to 0 \\ \qquad\qquad \downarrow \otimes_{A_p} A'_{p'} \\ 0 \to m_p\otimes_{A_p}A'_{p'} \to A'_{p'} \to \underset{\cong K'}{(K'\otimes K')_p} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m_p\otimes_{A_p}A'_{p'} = m_{p'}$$

$\otimes_{A'_{p'}} K'$

$$\frac{m_p}{m_p^2} = m_p\otimes_{A_p}\frac{A_p}{m_p} = m_p\otimes_{A_p}\left(A'_{p'}\otimes_{A'_{p'}}\frac{A_p}{m_p}\right) = \frac{m_{p'}}{m_{p'}^2}$$

Siccome $\dim A_p = \dim A'_{p'}$ chiudo $\square$

Oss Se K'/K è estensione, $X \to \operatorname{Spec} K$ tipo fin., $p \in X$ punto chiuso,

$$\begin{tikzcd} X_{K'} \arrow[r] & X \\ p' \arrow[r] \arrow[u] & p \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$p \in X$ è liscio sse p' è liscio su $X_{K'}$

Dim SPG X affine, $X = \operatorname{Spec} A$, $A = \frac{K[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_r)}$

$X_{K'} = \operatorname{Spec} A'$, $A' = \frac{K'[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_r)}$.

$\dim_p X = \dim_{p'} X_{K'}$, la matrice Jacobiana è la stessa a meno di inclusione $M(r,n,K(p)) \subseteq M(r,n,K(p'))$

$\square$

Def $X \to \operatorname{spec} K$ loc. tipo finito, X è liscio sse P liscio $\forall P \in X$

Prop Sia K'/K estensione $X_{K'}$ liscio sse X liscio

- X liscio $\Rightarrow X$ regolare
- Se K perfetto X regolare sse liscio

Def (geometricamente) se P è una proprietà di schemi su un campo. Si dice che $X \to \operatorname{spec} K$ ha P geometricamente / è geometricamente P se $X_{K'}$ ha P $\forall K'$ estensione K'/K.

Ex X è geometricamente regolare sse è liscio.

Prop Se K'/K estensione, K' perfetto (tipo $K' = \bar{K}$) allora X è liscio sse $X_{K'}$ è regolare

MODULI PIATTI

Richiami: • Se A noeth e M finito su A

M piatto $\Leftrightarrow$ M_p è un A_p-mod libero $\forall p \in \operatorname{Spec} A$
$\Leftrightarrow$ M_m -- — ... ... $\forall m \in \operatorname{Specmax} A$

Prop Se A noeth M finito e piatto

$$f_M \quad \begin{aligned} \operatorname{Spec} A &\to \mathbb{N} \\ p &\longmapsto \dim_{K(p)} M \otimes K(p) \end{aligned}$$

Questa funzione è localmente costante

Dim M_p libero $\rightsquigarrow$ $\forall p \in \operatorname{Spec} A$ $\exists f \in A \setminus p$ t.c. M_f è libero

$\exists e_1, \dots, e_r$ in M t.c. $\left\{\frac{e_i}{1}\right\}$ base di M_p su A_p

Ora considero $A^r \xrightarrow{\varphi} M$ $\rightsquigarrow$ φ_p è iso $\forall p$

$(a_1, \dots, a_r) \mapsto \sum a_i e_i$ $\rightsquigarrow$ $\ker \varphi_p = 0$, $\operatorname{coker} \varphi_p = 0$ $\forall p$

$\rightsquigarrow$ $\exists f$ t.c. $\varphi_f : A_f^r \to M_f$ iso $\square$

Oss Se M finito su A, f_M è semicontinua superiormente

$\left[\{p \mid f_M(p) \geq n\} \text{ chiuso } \forall n \right]$

Nota (Non vale l'opposto) $A = K[\varepsilon]$

$M = A/_m = K$ ha funzione costante ma M non libero

Prop Se A ridotto Noeth, $M \in \mathrm{Mod}_A$ finito e f_M loc. costante allora M è piatto.

Dim Possiamo assumere A locale (M piatto sse M_p piatto)

Sia $r = \dim_{k(m_A)} M \otimes k(m_A)$. Se M libero, lo è di questo rango.

$A^r \xrightarrow{\varphi} M$ surgettivo per Nakayama. Se $K = \mathrm{Frac} A$

(se A dominio) $K = k((0)) \Rightarrow \dim_K M \otimes_A K = r$, quindi se

$L = \ker \varphi$, $L \otimes K = 0$, ma L è privo di torsione

$\Rightarrow L = 0$

(se A ridotto generale vanno studiati i primi minimali) $\square$

Oss Se A di Jacobson, se $\mathrm{Spec}_{MAX} A \to \mathbb{N}$, $p \mapsto \dim_{k(p)} M \otimes k(p)$ è loc. cost. allora f_M è loc. cost.

Prop Se A dominio regolare di dim 1, M un A-Mod allora M piatto $\Leftrightarrow$ privo di torsione

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Vale per tutti i domini

$\boxed{\Leftarrow}$ Possiamo assumere A locale, quindi DVR

Un modulo finito su A privo di torsione è libero

Allora scrivo $M = \varinjlim_{\substack{\text{sottomoduli} \\ \text{finiti}}} M_i$ con M_i finiti
$\rightsquigarrow$ piatti perché è modulo libero di torsione

e limite induttivo di piatti è piatto $\square$

Ex (1) $A = K[X,Y]$, $M = (X,Y)$ non è piatto

$0 \to M \to A \to A/M = K \to 0$ $\quad \dim_{K(P)} M \otimes K(P) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \neq (x,y) \\ 2 & \text{se } p = (x,y) \end{cases}$

(2) $A = \dfrac{K[X,Y]}{(Y^2 - X^2(X+1))}$, $M = (X,Y)$

$\dim_{K(P)} M \otimes K(P) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \neq (x,y) \\ 2 & \text{se } p = (x,y) \end{cases}$

Def $M \in \mathrm{Mod}\,A$ è fedelmente piatto se dato $\varphi: N' \to N$
φ iniettivo sse $\varphi \otimes id_M$ iniettivo

equivalentemente M f. piatto sse (1) M piatto e
(2) $\forall N$, $N \otimes M = 0 \iff N = 0$

Prop M è f. piatto sse
(1) M piatto
(2) $M \otimes K(P) \neq 0$ $\forall p \in \mathrm{specmax}\, A$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ ovvia $\boxed{\Leftarrow}$ Dobbiamo verificare che $N \neq 0 \Rightarrow N \otimes M \neq 0$

se $N \neq 0$ e $N' \subseteq N$ sottomodulo non banale, per piattezza
$N' \otimes M \hookrightarrow N \otimes M$ quindi SPG prendo N ciclico

$N = A/I$ con I ideale proprio. $\rightsquigarrow I \in \mathfrak{p}$ max

$\rightsquigarrow A/I$ è un $K(\mathfrak{p})$-sp. vett

$$M \otimes A/I \cong (M \otimes K(\mathfrak{p}))^{\dim_{K(\mathfrak{p})} A/I} \neq 0$$

$\square$

Def $\varphi: A \to B$ (f.)piatto se B (f.)piatto come A-modulo.

Fatti • composizione di morfismi piatti è piatto

• Se $A \to B$ piatto, $A \to A'$ omo. abbiamo $A' \to B' = \underbrace{B \otimes_A A'}_{\text{cambio di base}}$

$A' \to B'$ è ancora piatto.

Prop Sia $\varphi: A \to B$ piatto TFAE

(1) φ è fedelmente piatto

(2) $\varphi^* = \operatorname{spec} \varphi: \operatorname{spec} B \to \operatorname{spec} A$ è surgettiva

(3) $\operatorname{specmax} A \subseteq \operatorname{Imm} \varphi^*$

Dim Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$, $\underset{\text{non vuoto sse}}{(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{p})} = \operatorname{Spec}(\underset{\text{non zero}}{B \otimes_A K(\mathfrak{p})})$

e chiudo con i criteri sopra $\square$

Cor Omo. locale piatto è fedelmente piatto

Oss f. piatto $A \to B$ è iniettivo

Oss Se $\varphi: A \to B$ omo. φ piatto sse $\forall \mathfrak{q} \in \operatorname{spec} B$, posto $\varphi^*(\mathfrak{q})$, $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ piatto

$\Rightarrow$ $B_\mathfrak{q}$ piatto su B piatto su A $\rightsquigarrow$ piatto su $A_\mathfrak{p}$

$N \hookrightarrow N' \overset{\otimes B}{\rightsquigarrow} N\otimes B \longrightarrow N'\otimes B$ iniettiva? sse lo è in ogni localizzazione

ma $(N\otimes B \to N'\otimes B)_q = (N\otimes A_p \otimes B_q \to N'\otimes A_p \otimes B_q)$

MORFISMI PIATTI

Def $f: X\to Y$ è piatto se $\forall p\in X$ $f^\#: \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ piatto.

Oss se $\varphi: A\to B$ omo, φ piatto sse $\varphi^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ piatto

Oss se $f: X\to Y$, $\{U_\alpha\}$ ricop. affine di X e $\forall\alpha$ $V_\alpha \subseteq Y$ aperto affine t.c. $f(U_\alpha)\subseteq V_\alpha$,

f piatto $\iff$ $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \to V_\alpha$ $\forall\alpha$ piatto $\iff$ $\mathcal{O}(V_\alpha)\to\mathcal{O}(U_\alpha)$ $\forall\alpha$ piatto

Prop Essere piatto è locale sulla base e stabile per cambiamento di base.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f\downarrow & \square & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

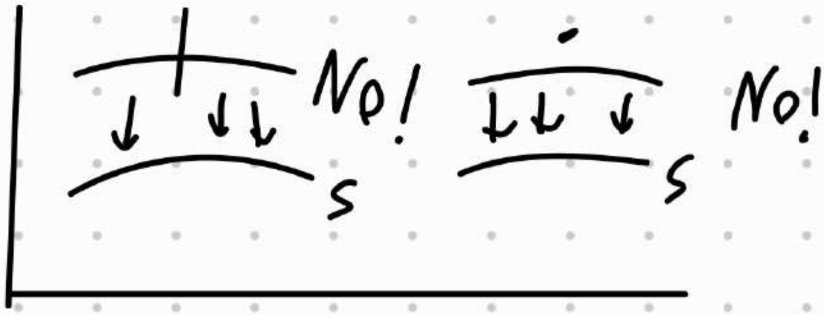
f piatto $\Rightarrow$ f' piatto

Prop Sia S schema integro noeth.
$f: X\to S$ morfismo, X noeth.

se f piatto, $X_1,\dots,X_r$ comp. irrid. di X $\Rightarrow$ $f|_{X_i}: X_i \to S$ dominante

Dim SPG $S = \mathrm{Spec}\, R$

$X_i = X = \mathrm{Spec}\, A$



R dominio e A dominio

(su X_i prendo la struttura ridotta)

A privo di torsione e piatto su R $\Rightarrow$ $R \to A$ iniettivo $\square$

Oss Sia $f: X \to Y$ morfismo finito di schemi noeth.

Sia $q \in Y$, $f^{-1}(q) = q \times_Y X$. Se $q \in V \subseteq Y$, V affine

$f^{-1}(V) = U$ affine con $\mathcal{O}_X(U)$ finito su $\mathcal{O}_Y(V)$.

$$q \times_Y X = q \times_V U = \mathrm{Spec}\big(\underbrace{\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} k(q)}_{``\mathcal{O}(f^{-1}(q))"}\big)$$

Quindi, se f piatto, $Y \to \mathbb{N}$, $q \mapsto \dim_{k(q)} \mathcal{O}(f^{-1}(q))$ è loc. cost.

Ex $\mathbb{A}^1_k \to X = \mathrm{Spec}\, k[t^2, t^3] = \mathrm{Spec}\, \dfrac{k[x,y]}{(y^2 - x^3)}$

$$\dim_{k(q)} \mathcal{O}(f^{-1}(q)) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \neq (x,y) \\ 2 & \text{se } q = (x,y) \end{cases}$$

$f^{-1}((x,y))$ è un punto "grasso"

"Per mappe di tipo finito, piatto più o meno significa che le fibre variano in modo continuo"

Ex $\mathbb{A}^1_k \longrightarrow X = \operatorname{Spec} \dfrac{k[x,y]}{(y^2 - x^2(x+1))}$

$$t \longmapsto (t^2-1,\ t(t^2-1))$$

$$\dim_{k(q)} \mathcal{O}(f^{-1}(q)) = \begin{cases} 1 & \text{se } q \neq (x,y) \\ 2 & \text{se } q = (x,y) \end{cases}$$

Ma l'idea è un po' diversa: $f^{-1}(x,y) = \operatorname{Spec} k \amalg \operatorname{Spec} k$

Ex $\mathbb{A}^2_k \longrightarrow \mathbb{A}^2_k$ $\quad (u,v) \longmapsto (uv, v)$

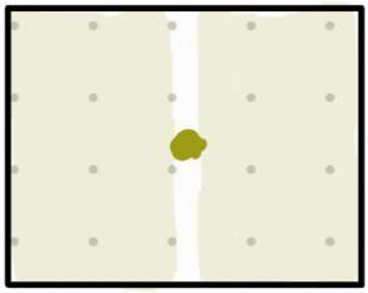
$\quad \operatorname{Spec} k[u,v] = \mathbb{A}^2_k$, $\quad \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x,y]$

$$k[x,y] \longrightarrow k[u,v]$$
$$x \longmapsto uv$$
$$y \longmapsto v$$

$$k[x,y]_y \xrightarrow{\ \sim\ } k[u,v]_v$$

e $f^{-1}(V(y)) = V(v) = L$ ma $f(L) = \{(x,y)\}$

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{A}^2_k \setminus V(y) \cup \{(x,y)\}$$



Questa mappa non è piatta:
su $\mathbb{A}^2_k \setminus V(y)$ la fibra è un punto ma su $V(y)$ è tutta una retta. !

Se X è di tipo finito su k, $\dim_p X = \max_{\substack{X_i \text{ comp. irrid.} \\ \text{di } X \text{ t.c.} \\ p \in X_i}} \dim X_i$

Sia $f: X \to S$ morfismo tipo finito.

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto \dim_p \underbrace{f^{-1}(f(p))} \end{aligned}$$

in $\mathbb{N}$ perché tipo finito e $f^{-1}(f(p)) \neq \emptyset$ perché $p \in f^{-1}(f(p))$

schema di tipo finito su $k(f(p))$

Thm La funzione è superiormente semicontinua

Thm Se $f: X \to S$ piatto di tipo finito e S loc. Noeth. la funzione è localmente costante.

Cor $\mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ non è piatto.
$(u,v) \mapsto (uv, v)$

Si vede anche algebricamente: (x,y) è $k[x,y]$ modulo

$$0 \to (x,y) \to k[x,y] \to k \to 0 \quad \otimes k[u,v]$$

$$(x,y) \otimes k[u,v] \to k[u,v] \to k[u,v]/(uv,v) = k[u] \to 0$$

$$(v)$$

$k[u,v]/(u,v)$

NON iniettiva: $((x,y) \otimes_{k[x,y]} k[u,v]) \otimes_{k[u,v]} k =$

$= (x,y) \otimes_{k[x,y]} \dfrac{k[x,y]}{(x,y)} = \dfrac{(x,y)}{(x,y)^2}$ ← dimensione 2 su k

ma $(v) \otimes k$ ha dimensione 1 su k, quindi c'è una relazione

Oss la costanza di $P \mapsto \dim_P f^{-1}(f(P))$ non basta per la piattezza (punto → cosa e caso, tipo $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} k[\varepsilon]$)

Thm Sia $A \to B$ omo locale con A, B noeth.
$C = B \otimes_A (A/\mathfrak{m}) = B/\mathfrak{m}B$. Allora

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} C \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} B \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K(\mathfrak{m}) \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

(1) $\dim B \leq \dim A + \dim C$
(2) se $A \to B$ piatto vale $=$
(3) se A e B regolari e vale $=$ allora $A \to B$ piatto

Cor $f : X \to Y$ morfismo di schemi di tipo fin. su K
$P \in X$ punto chiuso, allora
(1) $\dim_P X \leq \dim_{f(P)} Y + \dim_P f^{-1}(f(P))$
(2) se f piatto $\dim_P X = \dim_{f(P)} Y + \dim_P f^{-1}(f(P))$
(3) se X, Y regolari e vale $=$ per ogni P chiuso allora f è piatto.

Dim $A = \mathcal{O}_{Y, f(P)}$, $B = \mathcal{O}_{X,P}$, $C = \mathcal{O}_{f^{-1}(f(P)), P}$ $\square$

Cor Se $f : X \to Y$ è morfismo finito surg. tra schemi regolari, f è piatto.

Thm $A \to B$ omo. locale piatto, A, B noeth, allora
(0) è iniettivo (perché fedelmente piatto)
(1) se B regolare, A regolare [usa finitezza di gldim]
(2) se B dominio normale, A dominio normale

Def Un morfismo di schemi è fedelmente piatto se è piatto e surg.

Cor Se $f: X \to Y$ f. piatto, X e Y loc. noeth, allora
(1) X regolare $\Rightarrow$ Y regolare
(2) X integro e normale $\Rightarrow$ Y integro e normale

Oss se X non normale e $\overline{X}$ normalizzazione, $\overline{X} \to X$ non è piatto.

Thm Sia S schema noeth regolare integro di dimensione 1. Sia $f: X \to S$ morfismo con X noeth. Supponiamo X ridotto. Allora

f piatto $\Longleftrightarrow$ tutte le comp. irrid. di X dominano S

Dim $\Rightarrow$ Se una comp. non domina S non può essere piatto

$\Leftarrow$ SPG X e S affini; $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$

f corrisponde a $R \to A$ e voglio che A sia privo di torsione

se X irriducibile A dominio e $X \to S$ dominante $\Rightarrow R \to A$ inj
ma A dominio e $R \to A$ inj. $\Rightarrow A$ è privo di torsione su R.

In generale siano $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ i primi minimali.

$A_{\mathfrak{p}_i} = K_i$ campo (dim 0 ridotto locale) e
$\operatorname{Ker}(A \to \prod_i A_{\mathfrak{p}_i}) = \sqrt{0_A} = (0) \rightsquigarrow R \to A \hookrightarrow \prod A_{\mathfrak{p}_i}$

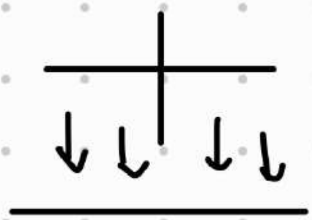
$\ker(R \to A \to \prod A_{p_i} \to A_{p_i}) \subseteq f(p_i) = (0)R$ ← pt. generico

$\rightsquigarrow R \hookrightarrow A_{p_i}$ (Fatto: se A ridotto, i primi minimali sono gli associati)

$\Rightarrow \varphi^{-1}(p_1 \cup \dots \cup p_r) = (0)R \underset{?}{\rightsquigarrow}$ A è privo di torsione

vedo $p_1, \dots, p_r$ come associati □

Ex



$X = \operatorname{Spec} \frac{k[x,y]}{(xy)}$ Non è piatto perché una componente si schiaccia

$S = \mathbb{A}^1_k$

Ex Ridotto serve $R = k[x]$, $A = \frac{k[x,y]}{(y^2, xy)}$

$k[x] \hookrightarrow \frac{k[x,y]}{(y^2,xy)}$ ora però x è uno zero-divisore in A

$\rightsquigarrow$ A non è privo di torsione come R-modulo

$\rightsquigarrow R \hookrightarrow A$ non è piatto.

Thm Se $f: X \to S$ morfismo piatto di tipo finito con S loc. noeth. allora f è aperto.

Ex Se X, Y tipo finito su campo $pr_1 : X \times_k Y \to X$ e $pr_2 : X \times_k Y \to Y$ sono aperte (piatte per cambiamento di base)

LOC. CHIUSO, SEPARATO

Recall $X \in \mathrm{Top}$ è T_2 sse $\Delta \subseteq X \times X$ è chiuso.
Cioè $X \to X \times X$ è immersione chiusa.
$x \mapsto (x,x)$

Def $f: X \to Y$ è una immersione localmente chiusa se

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "\text{imm. chiusa}"'] & & Y \\ & U \arrow[ur, hook, "\text{imm. aperta}"'] & \end{tikzcd}$$

Equivalentemente: $f: X \to Y$ imm. localmente chiusa se
(1) è imm. localmente chiusa topologicamente
(2) $\forall p \in X$, $f^\#_p : \mathcal{O}_{Y,p} \to f_*\mathcal{O}_{X,p}$ è surg.

Dim $\Downarrow$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,p} \arrow[rr] \arrow[dr, "2"'] & & \mathcal{O}_{X,p} \\ & \mathcal{O}_{U,p} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \Rightarrow f^\#_p \text{ surg.}$$

$\Uparrow$ Sia $U \subseteq Y$ che contiene X, fattorizzo
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ U \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
e poi verifico che $X \to U$ è imm. chiusa, ok $\square$

Prop Composizione di imm. loc. chiuse è loc. chiusa

Dim ESERCIZIO $\square$

Prop Essere imm. loc. chiusa è
(1) stabile per cambio di base
(2) locale sulla base

Prop Se imm. loc. chiusa $f: X \to Y$ ha immagine chiusa in Y allora è imm. chiusa.

Dim Topologicamente ok. Per vedere $f^\#: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ surg. vedo che se $p \in X$ ok per loc. chiusa, se $p \in Y \setminus X$ $f_*\mathcal{O}_{X,p} = 0$ e quindi surg. $\square$

Def (Diagonale) Dato $f: X \to Y$, $\delta: X \to X \times_Y X$ è dato da $pr_1 \circ \delta = pr_2 \circ \delta = id_X$ per prop. univ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "\delta"] \arrow[dr, "id_X"'] \arrow[rr, bend left, "id_X"] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Oss Se X e Y affini, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$

$X \times_Y X = \operatorname{Spec}(A \otimes_B A)$, $\delta: X \to X \times_Y X$

$$\text{surgettiva!} \to A \leftarrow A \otimes_B A$$
$$aa' \leftarrow\!\shortmid a \otimes a'$$

$\rightsquigarrow$ $\delta: X \to X \times_Y X$ è chiuso per affini.

Prop $f: X \to Y$ morfismo, $\delta: X \to X \times_Y X$ è imm. loc. chiusa

Dim
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & X \times_Y X \\ Y & \end{tikzcd}$$
$\leftarrow$ copro Y con affini e trovo ricoprimento aperto di $X \times_Y X$

Dato che imm. loc. chiusa è questione locale su base

SPG Y affine.

Sia $\{U_i\}$ ric. affine di X, $U_i \times_Y U_i \subseteq X \times_Y X$

$\delta^{-1}(U_i \times_Y U_i) = U_i \rightsquigarrow U_i$ chiuso di $U_i \times_Y U_i$
per il caso affine.

Sia $U = \bigcup U_i \times_Y U_i$. $X \subseteq U$ chiuso e U aperto di $X \times_Y X$

imm chiusa è locale su base $\square$

Oss: $\delta^{-1}(U_i \times_Y U_j) = U_i \cap U_j$, quindi δ imm chiusa

se $\forall i, j$, $U_i \cap U_j$ chiuso di $U_i \times_Y U_j$

Ex (1) $Y = \operatorname{Spec} K$, $X = \dfrac{\mathbb{A}^2 \amalg \mathbb{A}^2}{x \sim y \iff x = y \neq 0}$

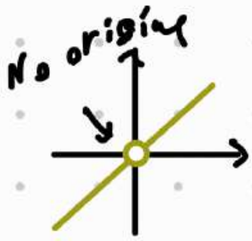
$X = U_1 \cup U_2$, U_1 e $U_2 \cong \mathbb{A}^2_K$, $U_1 \cap U_2$ non è affine
e quindi non è chiuso di un
affine, come $U_1 \times_K U_2$

(2) $Y = \operatorname{Spec} K$, $X = \dfrac{\mathbb{A}^1 \amalg \mathbb{A}^1}{x \sim y \iff x = y \neq 0}$

$X = U_1 \cup U_2$, U_1 e $U_2 \cong \mathbb{A}^1_K$, $U_1 \cap U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \times_K U_2 \cong \mathbb{A}^2_K \rightsquigarrow$ l'immagine è

$x \longmapsto (x, x)$

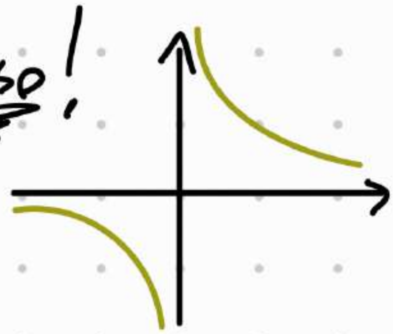


(3) $X = \mathbb{P}^1_K$, $Y = \operatorname{Spec} K$, $U_1 = (\mathbb{P}^1_K)_{x_1}$, $U_2 = (\mathbb{P}^1_K)_{x_2}$

$X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{A}^1_K \setminus \{0\}$

$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \times_K U_2 = \mathbb{A}^2_K$ chiuso!

$x \longmapsto (x, x^{-1})$



Quindi: Nei casi (1) e (2) δ non è imm. chiusa, ma per (3) sì.

Def $f : X \to Y$ è separato se $\delta : X \hookrightarrow X \times_Y X$ è immersione chiusa.

Uno schema è separato se $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ è separato

Oss Se X schema, $\{U_i\}$ ricoprimento affine, X separato se
(1) $U_i \cap U_j$ affine $\forall\, i,j$
(2) $\mathcal{O}(U_i) \otimes \mathcal{O}(U_j) \to \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ surg. $\forall\, i,j$.

Ex $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj}(R[x_0, \dots, x_n])$, $U_i = \operatorname{Spec}\left(R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right)$

$U_i \cap U_j = \operatorname{Spec}\left(R[x_0, \dots, x_n]_{(x_i x_j)}\right)$ e

$\mathcal{O}(U_i) \otimes \mathcal{O}(U_j) \to \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ è sempre surg.

Quindi $\mathbb{P}^n_R$ è separato.

Ex $id_X : X \to X$ è separato $\forall X$.

Oss Un'immersione aperta è separata

Prop Per $f: X \to Y$, essere separato è locale sulla base

Dim
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & X \times_Y X \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$
copro Y con affini e trovo ricoprimento aperto di $X \times_Y X$

Dato che imm. loc. chiusa è questione locale su base SPG Y affine. $\square$

Oss Un morfismo affine è sempre separato.

Prop Essere separato è stabile per cambio di base

Dim
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$
visto $\Longrightarrow$ $Y' \times_Y X = X'$, $Y' \times_Y (X \times_Y X) = X' \times_{Y'} X'$

Inoltre
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{X'}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\delta_X"] \\ X' \times_{Y'} X' \arrow[r] & X \times_Y X \end{tikzcd}$$

Quindi $\delta_{X'}$ imm. chiusa sse δ_X imm. chiusa. $\square$

Prop Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ morfismi e suppongo g separato, allora f separato sse $g \circ f$ separato

Dim
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X"] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \times_Z X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

Per def. del prodotto fibrato

imm. chiusa

$X \times_Y X \to X \times_Z X$ è imm. chiusa quindi, poiché

$$\begin{tikzcd} & & \delta^Y \arrow[dr, phantom, "X \hookrightarrow X\times_Y X"] & \\ X & & & X\times_Y X \arrow[d] \\ & & \delta^Z \arrow[r] & X\times_Z X \end{tikzcd}$$

loc. chiuse

imm. chiuse

δ^Y chiusa $\Longleftrightarrow$ δ^Z chiusa □

Cor composizione di separati è separato

Cor Se X è uno schema separato, $X \to Y$ è separato

Dim Un'immersione aperta è separata.

$\{Y_i\}$ ric. aperto affine di Y, $f^{-1}(Y_i) \to X$ imm. aperta

$f^{-1}(Y_i) \to X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow f^{-1}(Y_i)$ separato, ma essere separato è locale sulla base $\Longrightarrow X \to Y$ separato □

Oss Se $X \to Y$ imm. loc. chiusa, $\delta : X \to X \times_Y X$ è iso.
Quindi imm. loc. chiusa è separata.

Def $X \to Y$ è quasi-proiettivo se $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y \to Y$ con $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y$ loc. chiusa

Oss Se $X \to Y$ q.proj., esso è separato

Def Sia X schema, $U \subseteq X$ aperto è schematicamente denso se il solo sottoschema chiuso $Y \subseteq X$ che contiene U $(Y \cap U = U)$ è $Y = X$

Prop Se X ridotto, $U \subseteq X$ aperto denso allora U è schematicamente denso.

Dim Se $U \subseteq X$ aperto denso, $U \subseteq Y \subseteq X$ con Y sottoschema chiuso allora $Y = X$ topologicamente, ma la struttura di sottoschema chiuso ridotto è minimale, quindi $Y = X$ come schema. $\square$

Ex $X = \operatorname{Spec} \dfrac{K[x,y]}{(y^2, xy)}$

$$U = \operatorname{Spec}\left(\left(\frac{K[x,y]}{(y^2,xy)}\right)_x\right) = \mathbb{A}^1_K \setminus \{0\} \rightsquigarrow U \subseteq X_{red} = \mathbb{A}^1_K$$

$\longrightarrow$ U denso non schematicamente denso.

Prop Se X schema, $U \subseteq X$ schematicamente denso. Siano $f, g : X \to Y$ morfismi con Y separato. Se $f|_U = g|_U$ allora $f = g$

Dim f e g definiscono

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed] \arrow[rr, hook, bend left] \arrow[dr, bend right, "f|_U = g|_U"'] & F^{-1}(\delta(Y)) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "F = (f,g)"] \\
& Y \arrow[r, hook, "\delta"'] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

cioè $U \subseteq F^{-1}(\delta(Y))$ come schema, ma

$F^{-1}(\delta(Y))$ chiuso e U schem. denso $\Rightarrow F^{-1}(\delta(Y)) = X$

Allora ho
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d] & Y \times_Z Y \\ Y \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$
cioè $f = g$.

$\square$

Ex (1) $Y = \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^1 /_{x = y \neq 0}$, ci sono due immersioni $\mathbb{A}^1 \to Y$ che coincidono su $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ ma sono diverse

schem. denso perché denso e $\mathbb{A}^1$ ridotto

(2) $X = \operatorname{Spec} \dfrac{K[x,y]}{(y^2, xy)}$ "  " oppure "  "

$Y = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec} K[t]$

$X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1$ $\rightsquigarrow$ $K[t] \to A \to A_x$ $\left(= K[x]_x\right)$ $\qquad U = X_x$

$(x,y) \mapsto y \qquad t \mapsto y \mapsto 0$

$X \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1$ $\quad K[t] \to A$ $\longrightarrow$ $f|_U = g|_U$ perché

$t \mapsto 0$ $\qquad$ entrambi sono $K[t] \to K[x]_x$

$t \mapsto 0$

ma $f \neq g$

PUNTI ASSOCIATI

Recall A noeth. $M \in \mathrm{Mod}_A$, $m \in M \setminus \{0\}$

Allora $\mathrm{Ann}_A(m)$ è ideale proprio.

Oss I massimali tra gli annullatori propri sono primi

Def $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ t.c. $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m)$ è un primo associato

$$\mathrm{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \text{associato}\}$$

Oss $\mathrm{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \exists\, A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M\}$

Prop Se $M \neq 0$ $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \emptyset$

Oss Se $0 \to M' \hookrightarrow M \to M'' \to 0$ esatta allora

$$\mathrm{Ass}_A(M') \subseteq \mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M'') \cup \mathrm{Ass}_A(M')$$

Prop Se M fin. gen. $\mathrm{Ass}_A(M)$ è finito

Prop Se $S \subseteq A$ sistema moltiplicativo $\left(\mathrm{Spec}\, S^{-1}A \subseteq \mathrm{Spec}\, A\right)$

allora $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$

Cor Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$, $\mathfrak{p}$ associato ad M se e solo se

$$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$$

Cor I primi minimali sono associati (ad A)

Def I primi associati non minimali sono componenti immerse

Oss Se A ridotto non ha componenti immerse

Fatto Se $f \in K[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$, $A = \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{(f)}$ allora A non ha comp. immerse (Hauptidealsatz).

Ex $A = \frac{K[X,Y]}{(Y^2, XY)}$. $\mathrm{Ass}(A) = \{\underbrace{(Y)}_{\text{punto generico}}, \underbrace{(X,Y)}_{\mathrm{Ann}(y)}\}$

Def Sia X schema noeth., $p \in X$ punto associato se $\mathfrak{m}_p \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X,p})$. Scriviamo $p \in \mathrm{Ass}(X)$

Oss Se $X = \mathrm{Spec}\, A$, $\mathrm{Ass}(X) = \mathrm{Ass}(A)$.

Oss Se $U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq X$ aperto, $\mathrm{Ass}(A) = \mathrm{Ass}(U) = \mathrm{Ass}(X) \cap U$

Oss I punti generici di comp. irrid. sono associati

Thm X noeth.

(1) $U \subseteq X$ è denso sse contiene tutti i punti generici delle comp. irrid.

(2) $U \subseteq X$ è schematicamente denso sse $\mathrm{Ass}(X) \subseteq U$

Dim (1) Facile

(2) suppongo $X = \mathrm{Spec}\, A$:

Se $V \supset \mathrm{Spec}\, A \subseteq X$ aperto, $\mathrm{Ass}(X) \cap V = \mathrm{Ass}(A)$.

Se val il risultato per affini allora:

Se $Ass(X) \subseteq U$ allora $U \cap V$ è sch. denso in V $\forall V$ affine

$\Rightarrow$ U sch. denso in X coprendolo con affini.

l'altra implicazione usa strumenti più avanzati

Sia dunque $X = \operatorname{Spec} A$. con A noeth.

$\boxed{\text{Recall } \operatorname{supp} M = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid M_p \neq 0\} \text{ con } M \in \operatorname{Mod} A}$

$U \subseteq X$ non è sch. dens. sse $\exists\, I \triangleleft A$ con $I \neq 0$ e $\operatorname{supp} I \cap U = \emptyset$

infatti se $Y = \operatorname{Spec} A/I \subseteq X$ chiuso

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{come schemi!}}}{U \subseteq} \operatorname{Spec} A/I \iff \forall p \in U,\quad
\begin{tikzcd}
A_p \arrow[r, "\sim"] & A_p/I_p \\
A \arrow[u] \arrow[r] & A/I \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad \overset{\operatorname{supp} I \cap U = \emptyset}{\Longleftarrow}$$

$$\left[\;
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "\text{im aperta}"] \arrow[dr, dashed] & X \\
& Y \arrow[u, hook, "\text{im chiusa}"']
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(U) \\
A/I \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
A_p \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{U,p} = A_p \\
A_p/I_p \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
\;\right]$$

Nota che se $p \in Ass(A)$ allora A/p ideale di A e $\operatorname{supp}(A/p) = \overline{\{p\}}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ se $p \in Ass(A) \setminus U$ allora segue $\overline{\{p\}} \cap U = \emptyset$ perché U aperto e quindi U non è schematicamente denso (uso $I = A/p$) ok

$\boxed{\Leftarrow}$ se U non è sch. denso trovo $U \subseteq Y \subseteq X$ con Y chiuso proprio, allora $Y = \operatorname{Spec} A/I$ con $I \neq 0$

$\operatorname{supp} I \cap U = \emptyset$ per il criterio detto.

se $p \in Ass(I) \subseteq Ass(A)$, $A/p \subseteq I \Rightarrow p \in \operatorname{supp} I$

$\Rightarrow p \notin U$ cioè $Ass(A) \not\subseteq U$ $\square$

Recall se $U \subseteq X$ sch. denso, $f, g : X \to Y$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$Y \to S$ separato, $f|_U = g|_U$

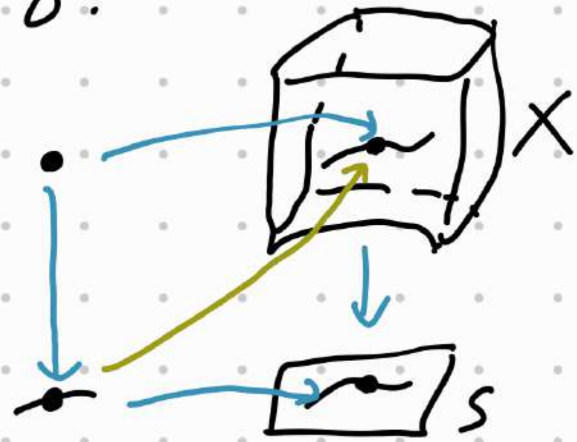
Allora $f = g$.

Ex Sia R DVR, $K = \mathrm{Frac}\, R$, $X \to S$ separato.

se
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, K \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, R \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "f"] \arrow[ur, shift right, "g"'] & S \end{tikzcd}$$
commuta allora per il criterio $f = g$.

Geometricamente:

"unicità del limite" dove il punto è "il limite" e il DVR lo vedo come successioni:



Thm (Criterio valutativo di separazione)

Sia $X \to S$ morfismo loc. tipo finito, S loc. noeth. Suppongo che $\forall$ DVR R con $K = \mathrm{Frac}\, R$, se

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

$\exists$ al max. una

Allora $X \to S$ è separato.

FUNZIONI RAZIONALI

Sia K campo. Considero schemi di tipo finito separati e integri.

Oss Se X e Y sono come sopra, $U_1, U_2 \subseteq X$ aperti non vuoti, siano $f_1 : U_1 \to Y$, $f_2 : U_2 \to Y$ e supponiamo che $f_1|_V = f_2|_V$ con $V \subseteq U_1 \cap U_2$ aperto.

Allora $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$ (V è sch. denso in $U_1 \cap U_2$)

Dunque $\exists!\, f : U_1 \cup U_2 \to Y$ t.c. $f|_{U_1} = f_1$, $f|_{U_2} = f_2$

Oss Su $\{(U,f) \mid U \subseteq X \text{ aperto non vuoto}, f : U \to Y\}$

$(U,f) \sim (V,g) \iff f|_{U\cap V} = g|_{U \cap V}$ è rel. eq.

Def Una funzione razionale $f : X \dashrightarrow Y$ è una classe di (U,f) come sopra.

Se $\{(U_i, f_i)\}$ è la classe allora $U = \bigcup U_i$ è il dominio e $\exists\, f : U \to Y$ t.c. $(U,f) \in \{(U_i, f_i)\}$

Ex X tipo finito separato integro, sia ξ pt. generico

$K(X) = \mathcal{O}_{X,\xi}$ campo dei quozienti.

(1) $f: X \dashrightarrow \mathbb{A}^1_K$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}(U) \longleftrightarrow (U \to \mathbb{A}^1_K)$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}^1_K \\ U \arrow[ur] & K[x] \arrow[dl] \\ \mathcal{O}(U) & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_{X,\xi} \longleftrightarrow (X \dashrightarrow \mathbb{A}^1_K)$$

(2) $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1_K = \mathbb{A}^1_K \cup \{\infty\}$ se $f(U) = \{\infty\}$,

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^1_K \\ U \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

poichè $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$, c'è un solo morfismo

$$U \to \operatorname{Spec} K \xrightarrow{\infty} \mathbb{P}^1_K$$

sto usando U ridotto!

Altrimenti $f: U \to \mathbb{P}^1_K$ ho $f = \underbrace{U \cap f^{-1}(\mathbb{A}^1_K)} \to \mathbb{A}^1_K$

aperto $\neq \emptyset$

dunque $f \in \begin{cases} \{\infty\} \text{ costante oppure} \\ K(X) \end{cases}$

Prop $\xi = \operatorname{Spec} K(X) \longrightarrow X$, quindi $f: U \to Y$ dà un morfismo $\operatorname{Spec} K(X) \to Y$

Questa costruzione dà una corrisp. biunivoca

$$\{X \dashrightarrow Y\} \longleftrightarrow \{\operatorname{Spec} K(X) \longrightarrow Y\} = Y(K(X))$$

Dim (Idea) Dato $\varphi: \underbrace{\operatorname{Spec} K(X)}_{=\xi} \to Y$ costruisco $X \dashrightarrow Y$

Sia $V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ intorno affine di $\varphi(\xi)$

Posso assumere $X = \operatorname{Spec} A$ (tanto voglio costruire f su aperto)

$B = K[b_1, \dots, b_n]$ φ corrisponde a $\psi: B \to K(X)$ omo.

$\varphi(b_i) = \frac{p_i}{q_i} \in K(X)$ con $p_i, q_i \in A$, $q_i \neq 0$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & K(X) \\ & \searrow & \cup\!\!\! \mid \\ & & A_{q_1 \cdots q_r} = A_q \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad f : \operatorname{Spec} A_q \longrightarrow Y$$

$\uparrow$ aperto di $\operatorname{Spec} A = X$

$\square$

Vorremmo una categoria dove gli oggetti sono schemi di tipo fin. su K, separati, integri e frecce sono funzioni razionali

Problema: La composizione non è definita.

Se $f : X \dashrightarrow Y$ e $g : Y \dashrightarrow Z$ posso definire $g \circ f$ se $\operatorname{Imm} f$ contiene un aperto di Y, cioè $f(\xi_X) \in \operatorname{dom} g$.

In particolare, se f dominante OK.

Oss Esiste una categoria come voluto se le frecce sono mappe razionali dominanti

Dato X come sopra si può considerare il gruppo di automorfismi $\operatorname{Bir}(X)$ in questa categoria

$f : X \dashrightarrow Y$ dominante $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Spec} K(X) \to Y$ con immagine ξ_Y

$\Longleftrightarrow \operatorname{Spec} K(X) \to \operatorname{Spec} K(Y) \Longleftrightarrow$ immersioni $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ che fissano K

Quindi: $Bir(X) = Aut_K(K(X))$

Def $Bir(\mathbb{P}^n_K)$ è il gruppo di Cremona e si vede come $\underbrace{Aut_K K(x_1,\dots,x_n)}$

quasi tutto ciò che si sa su questo usa geometria algebrica.

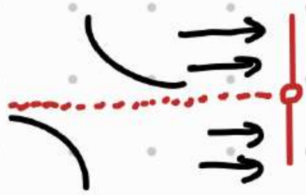
MORFISMI PROPRI

Def $f: X \to Y$ morfismo è proprio se è:
(1) di tipo finito (loc. tipo finito + q. compatto)
(2) è separato e
(3) è universalmente chiuso, cioè:
$\forall\, Y' \to Y$ è morfismo, $X \times_Y Y' \to Y'$ è chiusa

EX $\mathbb{A}^1_K \to Spec\, K$ è di tipo finito, separato e chiuso,

MA
$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2_K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{A}^1_K \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1_K \arrow[r] & Spec\, K \end{tikzcd}$$
e $\mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^1_K$ NON è chiusa

$Imm(V(xy-1)) = \mathbb{A}^1_K \setminus \{0\}$



Ex (1) Un'immersione chiusa è propria
(2) I morfismi finiti sono propri.

Thm Morfismo affine di tipo finito è proprio sse è finito.

"ciò che mi aspetto non sia proprio non lo è"

Oss Per controllare se $X \to Y$ è univ. chiuso basta considerare cambi di base $Y' \to Y$ con Y' affine (essere chiuso è locale sulla base)

Prop Essere proprio è
(1) locale sulla base
(2) stabile per composizione
(3) stabile per cambiamento di base

Prop Un morfismo proiettivo è proprio.

Dim Ricordo $X \to Y$ proiettivo se fattorizza
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{im. chiusa}"'] & Y \\ \mathbb{P}^n_Y \arrow[ur, "pr"'] & \end{tikzcd}$$
Quindi, essendo imm. chiuse proprie basta mostrare $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ propria, ma essendo stabile per camb. di base basta vedere $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ propria.

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ è di tipo finito e separata (visto)

Per U.C. basta mostrare che se R anello (vedi criterio)
$$pr: \mathbb{P}^n_R \to \operatorname{Spec} R \text{ è chiusa}$$

I chiusi di $\mathbb{P}^n_R$ sono $V_+(I)$ con I omogeneo.
Voglio che $pr(V_+(I))$ sia chiuso.

$$V_+(I) = \operatorname{Proj} \underbrace{\frac{R[x_0,\dots,x_n]}{I}}_{:=A} = X$$

generata in grado 1

Voglio $\pi : X \to \operatorname{Spec} R$ abbia imm chiusa, cioè

$\operatorname{Spec} R \setminus \pi(X)$ aperto.

Sia $p \in \operatorname{Spec} R$, $\pi^{-1}(p) = p \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Proj} A = \operatorname{Proj}(k(p) \otimes_R A)$

$p \notin \pi(X) \iff \pi^{-1}(p)$ vuoto $\iff \operatorname{Proj}(k(p) \otimes_R A) = \emptyset$

$\iff \underbrace{(k(p) \otimes_R A)_+}_{B_+}$ è un nil-ideale $\underset{\text{Noeth.}}{\overset{B}{\iff}} (B_+)^t = 0$ per qualche $t > 0$

$\underset{B \text{ i genera}}{\iff} B_t = k(p) \otimes_R A_t = 0$ per qualche $t > 0$

Per Nakayama, fissato t

$\{p \in \operatorname{Spec} R \mid k(p) \otimes_R A_t = 0\}$ è aperto

$$\operatorname{Spec} R \setminus \pi(X) = \bigcup_{t > 0} \{p \in \operatorname{Spec} R \mid k(p) \otimes_R A_t = 0\}$$ unione di aperti $\square$

Ex Gli schemi proiettivi su un campo sono propri

Ma esistono schemi propri su $\mathbb{C}$ non proiettivi (difficili da trovare)

Prop Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ due morfismi. Se
(1) $g: Y \to Z$ separato e
(2) $g \circ f : X \to Z$ è proprio
allora $f : X \to Y$ è proprio

Dim

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z \\
Y \times_Z X \arrow[u] \arrow[r, "(id_Y, f)"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y \times_Z Y \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y \arrow[u] \\
X \arrow[u] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

quindi da $X \to Z$ proprio segue $Y \times_Z X \to Y$ proprio

Per ipotesi δ imm. chiusa, quindi $X \to Y \times_Z X$ imm. chiusa

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "id_X"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & Y \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

è proprio perché comp. di imm. chiuse e proprie $\square$

Ex $X = \mathbb{P}^1$, $U = \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$, $Y = X \sqcup_U X$, $Z = \mathrm{Spec}\, k$

$Y \to Z$ non è separato, $X \to Z$ è proprio e in effetti $X \to Y$ si può immergere in modo non chiuso, quindi neanche è proprio.

Cor Se $X \subseteq \mathbb{P}^n_K$ è sottoschema loc. chiuso e proprio su K allora X è chiuso in $\mathbb{P}^n_K$

Thm (Criterio valutativo per morfismi propri) Sia $f : X \to Y$ proprio
R un DVR, $K = \mathrm{Frac}\, R$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\, K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\, R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

$\exists!$ tale sollevamento

Dim L'unicità è per separatezza, mostriamo esistenza.

Sia $S = \operatorname{Spec} R \times_Y X$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, bend right, "\text{aperto}"'] & S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} R \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Quindi $S \to \operatorname{Spec} R$ è proprio

Sia $S_K = \operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} R} S \subseteq S$

aperto, fibra del pt. gen. di R, che è aperto.

$$\begin{tikzcd} S_K \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[u, bend left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

$P = \operatorname{Imm} \sigma$ è punto chiuso in S_K (perché punto razionale)

Sia $V = \overline{\{P\}} \subseteq S$ con la struttura ridotta.

V è integro e $V \cap S_K = \{P\}$ perché P chiuso in S_K

$V \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec} R$ è surgettiva perché deve essere una mappa chiusa e $\operatorname{Spec} K$ non è chiuso in $\operatorname{Spec} R$

Sia $q \in V$ t.c. $\pi(q) = m \in \operatorname{Spec} R$, sia $A = \mathcal{O}_{V,q}$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & V \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & S \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} R & \end{tikzcd}$$

$R \subseteq K$ e $A \subseteq K$ perché $\operatorname{Spec} K \subseteq V$ è un aperto

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & K \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & K \end{tikzcd} \quad \text{locale} \quad \Longrightarrow R = A$$

e questo conclude:

$$\operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} A \to V \subseteq S$$

$\square$

Thm Se $f: X \to Y$ tipo finito e Y loc. noeth.

f proprio $\iff$ per ogni:
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd} \quad \exists!$$
con R DVR

RAGIONEVOLEZZA SU $\mathbb{C}$

Se X tipo finito su $\mathbb{C}$, $X(\mathbb{C})$ ha un analogo classico:

se $X = \operatorname{Spec}(A)$, A algebra tipo fin. su $\mathbb{C}$

$X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \Rightarrow X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^n$ che ha una topologia euclidea classica.

$X^{cl} = X(\mathbb{C})$ con questa topologia indotta

Se $U \subseteq X$ aperto affine, $U \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, la topologia classica di X induce $U^{cl} = U(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^n$.

Thm Se X come sopra. $Y \subseteq X$ sottoschema loc. chiuso

Allora Y chiuso in X se e solo se $Y^{cl} \subseteq X^{cl}$ chiuso

(Nella top. euclidea!).

Oss $(X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}} Y)^{cl} = X^{cl} \times Y^{cl}$

Cor Applicando quanto sopra a $X \xhookrightarrow{\delta_X} X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}} X$

$X \in \mathrm{Sch}/\mathbb{C}$ è separato sse X^{cl} è separato

Thm $X \in \mathrm{Sch}/\mathbb{C}$ è proprio su $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ sse X^{cl} è cpt. T_2