FASCI DI $\mathcal{O}_X$-MODULI

Def Se $(X, \mathcal{O}_X)$ sp. loc. anulato, un prefascio di $\mathcal{O}_X$-moduli è un prefascio P di gruppi abeliani su X tale che $P(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo $\forall U$ aperto e la molt. per scalare è compatibile con le restrizioni

Un omomorfismo di prefasci di $\mathcal{O}_X$-moduli è un morfismo di prefasci tale che induce omomorfismi di moduli

Oss Se P psh di $\mathcal{O}_X$-mod e $Q \subseteq P$ sottoprsh di $\mathcal{O}_X$-mod P/Q è in modo canonico prefascio di $\mathcal{O}_X$-mod

Oss I prefasci di $\mathcal{O}_X$-mod formano cat. abel. $\mathrm{Pre}(\mathcal{O}_X)$

Def Un fascio di $\mathcal{O}_X$-mod è un prefascio di $\mathcal{O}_X$-mod che è un fascio. Ho sottocategoria piena $\mathrm{Sh}(\mathcal{O}_X) \subseteq \mathrm{Pre}(\mathcal{O}_X)$

Prop Se P prefascio di $\mathcal{O}_X$-mod, P^{sh} ha un'unica struttura di fascio di $\mathcal{O}_X$-mod t.c.

$$P \longrightarrow P^{sh} \text{ è omo. di prefasci di } \mathcal{O}_X\text{-mod}$$

Oss Se P prefascio di $\mathcal{O}_X$-mod, $x \in X$, allora

$$P_x \text{ è in modo canonico un } \mathcal{O}_{X,x} \text{ modulo}$$

chiedendo che $\begin{matrix} P(U) \longrightarrow P_x \\ s \longmapsto s_x \end{matrix}$ sia compatibile con $\begin{matrix} \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \\ f \longmapsto f_x \end{matrix}$

Oss Anche $\mathrm{Sh}(\mathcal{O}_X)$ cat. abel. definendo F/G come $\left(F/G^{pre}\right)^{sh}$

Ex se X varietà liscia, $\mathcal{O}_X = C^\infty_X = C^\infty_{X,\mathbb{R}}$ allora per $i \geq 0$ posso prendere Ω^i_X fascio delle i-forme diff. e questo è fascio di C^∞_X-moduli

Ex Un fascio di ideali $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ è fascio di $\mathcal{O}_X$-mod.

Oss $Sh(\mathcal{O}_X)$ ha prodotti e somme dirette arbitrari.

Def Se $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh(\mathcal{O}_X)$ ho un prefascio P di $\mathcal{O}_X$-mod

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

$V \subseteq U$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{G}(V) \\
\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

ok per prop. univ.

Definisco $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ come P^{sh}.

Oss Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ fasci di $\mathcal{O}_X$-mod

$h : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismo di fasci di insiemi che è $\mathcal{O}_X$-bilineare allora

$$\left[\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \times \mathcal{G} \arrow[d] \\
\mathcal{F} \otimes^{pre}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \arrow[d] \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}
\end{tikzcd}\right]
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \times \mathcal{G} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{H} \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \arrow[ur, dotted, "\exists !"'] &
\end{tikzcd}$$

Prop se $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh(\mathcal{O}_X)$, $p \in X$ allora

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_p \cong \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p$$

Dim Esercizio

[$\sum_i f_p^{(i)} \otimes g_p^{(i)} = (\sum f^{(i)} \otimes g^{(i)})_p$ su intorno piccolo
l'iniettività è più tosta] $\square$

FASCI QUASICOERENTI

Sia A anello e $X = \operatorname{Spec} A$.

$A = \mathcal{O}_X(X)$, quindi ho un funtore

$$\begin{aligned} Sh(\mathcal{O}_X) &\longrightarrow Mod(A) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{F}(X) \end{aligned}$$

Costruiamo un funtore $\begin{aligned} Mod(A) &\longrightarrow Sh(\mathcal{O}_X) \\ M &\longmapsto \widetilde{M} \end{aligned}$

tale che $M \cong \widetilde{M}(X)$ in modo canonico e

$$\operatorname{Hom}_{Sh(\mathcal{O}_X)}(\widetilde{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{F}(X))$$

[$\widetilde{\cdot}$ aggiunta sinistra di $\Gamma(X, \cdot)$]

Inoltre avremo $\widetilde{\cdot} : Mod(A) \to Sh(\mathcal{O}_X)$
pienamente fedele e esatto.

Vogliamo anche $\widetilde{M}_p = M_p$ e $\widetilde{A} = \mathcal{O}_X$

Costruzione Ricordiamo che

$$\mathcal{O}_X^d(U) = \{ s : U \to \coprod_{p \in U} A_p \mid s(p) \in A_p \}$$

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ s \in \mathcal{O}_X^d(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall p \in X \; \exists f \in A \text{ t.c. } f \notin p,\ X_f \subseteq U \\ \text{e } \exists \varphi \in A_f \text{ t.c. } s_q = \varphi_q \ \forall q \in X_f \end{array} \right\}$$

Definiamo $\tilde{M}$ allo stesso modo cambiando A in M:

$$\tilde{M}^d(U) = \{ t : U \to \coprod_{p \in U} M_p \mid t(p) \in M_p \}$$

$$\tilde{M}(U) = \left\{ t \in \tilde{M}^d(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall p \in X \; \exists f \in A \text{ t.c. } p \in X_f \subseteq U \text{ e} \\ \exists \varphi \in M_f \text{ t.c. } t_q = \varphi_q \ \forall q \in X_f \end{array} \right\}$$

Oss $\tilde{M}$ è fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli

Se $p \in X$, $\begin{array}{ccccc} \tilde{M}_p & \subseteq & \tilde{M}^d_p & \to & M_p \\ t & \mapsto & t & \longmapsto & t(p) \end{array}$, questa composizione è un iso.

Thm L'omo. $\begin{array}{rcl} M & \to & \tilde{M}(X) \\ m & \mapsto & (p \mapsto m \in M_p) \end{array}$ è un iso.

Def Se $\varphi : M \to N$ omo di A-mod

$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : \tilde{M} & \to & \tilde{N} \\ t & \mapsto & (p \mapsto \varphi_p(t(p))) \end{array}$ è omo di fasci di $\mathcal{O}_X$-mod

Oss Questo rende $\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}(A) & \to & \mathrm{Sh}(\mathcal{O}_X) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{array}$ funtore

Thm $\mathrm{Hom}_{sh(\mathcal{O}_X)}(\tilde{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{F}(X))$

Dim Dato
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{F}(X) \arrow[d] \\ \tilde{M}_p = M_p \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \mathcal{F}_p \end{tikzcd}$$
$\mathcal{F}_p$ è un A_p-mod $\Rightarrow M \to \mathcal{F}_p$ fattorizza attraverso M_p

Questo rende iniettività: se f, g t.c. $f_X = g_X$ allora $f_p = g_p \ \forall p \in X$ e quindi $f = g$.

Per surgettività: se ho φ, ricavo φ_p come sopra, quindi:
$$\tilde{M}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}^{sh}(U) = \{\textstyle\coprod_{p\in U} \mathcal{F}_p \mid \text{coerenti}\}$$
$$s \longmapsto (\varphi_p(s_p))_{p\in U}$$
è poi facile verificare la coerenza di $\nearrow$ $\square$

Prop Sia $U \subseteq X = \mathrm{Spec}\,A$ aperto affine, $U = \mathrm{Spec}\,B$, allora $\widetilde{(M \otimes_A B)} \cong \tilde{M}|_U$ come $\mathcal{O}_U$-moduli

Dim
$$\begin{tikzcd} M \arrow[d] \arrow[dr] & \cong \tilde{M}(X) \arrow[d] \\ M \otimes_A B \arrow[r, dashed] & \tilde{M}(U) \end{tikzcd}$$
$\overset{\text{teorema}}{\rightsquigarrow}$ $\widetilde{M \otimes_A B} \longrightarrow \tilde{M}|_U$

$\uparrow$ prop. univ. del prodotto tensore perché $\tilde{M}(U)$ è un B-modulo

se $p \in U$ $\quad (\widetilde{M \otimes_A B})_p = (M \otimes_A B)_p = M_p \otimes_{A_p} B_p \cong M_p \otimes_{A_p} A_p = M_p = (\tilde{M}|_U)_p$

quindi $\widetilde{M \otimes_A B} \to \tilde{M}|_U$ è iso. sulle spighe $\square$

Thm $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{O}_X)$ è pienamente fedele e esatto

Dim Esatto perché le spighe sono localizzazioni in primi

Pienamente fedele: $\mathrm{Hom}(M,N) = \mathrm{Hom}(M, \tilde{N}(X)) \cong \mathrm{Hom}(\tilde{M}, \tilde{N})$ $\square$

Def Se $X = \mathrm{Spec}\,A$, $\mathcal{F}$ fascio di $\mathcal{O}_X$-mod è quasicoerente se è isomorfo ad un fascio $\tilde{M}$ per qualche $M \in \mathrm{Mod}(A)$

Cioè $\mathrm{QCoh}(X) \subseteq \mathrm{Sh}(\mathcal{O}_X)$ è l'immagine essenziale di $\mathrm{Mod}(A)$.

Segue che
$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}(A) &\cong \mathrm{QCoh}(\mathrm{Spec}\,A) \\ M &\longmapsto \tilde{M} \\ \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\,A) &\longleftarrow\!\shortmid \mathcal{F} \end{aligned}$$

Cor Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ omo. di fasci QCoh su X, $\ker\varphi$ e $\mathrm{imm}\,\varphi$ sono quasicoerenti

Come riconosco fasci quasi coerenti?
Se $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\mathcal{O}_X)$ ho $\widetilde{\mathcal{F}(X)} \to \mathcal{F}$ per un teorema

Prop TFAE
(0) $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X) \iff \widetilde{\mathcal{F}(X)} \to \mathcal{F}$ iso.
(1) Se $U \subseteq X$ aperto affine, $\mathcal{O}(U) \otimes_A \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ è iso.
(2) $\forall f \in A$ $\mathcal{F}(X)_f \to \mathcal{F}(X_f)$ è iso.
(3) $\forall p \in X$ $\mathcal{F}(X)_p \to \mathcal{F}_p$ è iso.

Se $\{F_\alpha\}$ fasci di $\mathcal{O}_X$-mod

$$\bigoplus F_\alpha = \left(U \mapsto \bigoplus_\alpha F_\alpha(U)\right)^{sh} \text{ è fascio di } \mathcal{O}_X\text{-mod.}$$

Poichè X è q.compatto $\left(\bigoplus_\alpha F_\alpha\right)(U) = \bigoplus_\alpha F_\alpha(U)$

Se F_α quasicoerenti, $F_\alpha = \widetilde{F_\alpha(X)}$, allora $\bigoplus_\alpha F_\alpha$ è ancora q.coerente per i criteri sopra.

In generale i prodotti infiniti di fasci q.c. non sono q.c.

Ex Se $A = K[t]$, $\operatorname{Spec} A = \mathbb{A}^1_K$, allora $\mathcal{O}_X^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X$ non è q.c.

infatti se $P = (t)$, $\left(K[t]^{\mathbb{N}}\right)_P \longrightarrow \left(\prod \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}\right)_P$ non è iso.

successioni di polinomi $K[t]$ e divido per polinomio che non si annulla in 0

più grosso perchè non impongo limite ai denominatori

[successioni di polinomi in $K[t, t^{-1}]$]

Ex $X = \mathbb{A}^1_K$, $I_n = t^n \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_K} \rightsquigarrow I_n = \widetilde{(t^n)}$

$\bigcap I_n = 0$. Se $I(U) = \bigcap I_n(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U)$ allora

$$I(U) = \begin{cases} 0 & \text{se } (t) \in U \\ \mathcal{O}_X(U) & \text{se } (t) \notin U \end{cases}$$

I è fascio di $\mathcal{O}_X$-mod non q.c. ($I(X) = 0$ e $I \neq 0$)

Oss Se $M, N \in \mathrm{Mod}(A)$, $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} = \left(U \mapsto \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \tilde{N}(U)\right)^{sh}$

$$M \otimes_A N = \tilde{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \tilde{N}(X) \longrightarrow (\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N})(X)$$

$$\rightsquigarrow \widetilde{M \otimes_A N} \longrightarrow \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$$

Oss Se $\mathcal{B}$ base di aperti di uno spazio X posso definire "fasci su $\mathcal{B}$" come funtori $F : \mathcal{B}^{op} \to Ab$ con proprietà di incollamento. $Sh(X) \cong Sh_{\mathcal{B}}(X)$

Prop $\widetilde{M \otimes_A N} \longrightarrow \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$ è un iso.

Dim Sia $\mathcal{B} = \{\text{aperti affini}\}$. Per $U \in \mathcal{B}$

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}(U) = \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \tilde{N}(U) = (M \otimes_A N) \otimes_A \mathcal{O}(U) = \widetilde{M \otimes_A N}(U)$$

Dunque $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \big|_{\mathcal{B}} = \widetilde{M \otimes_A N} \big|_{\mathcal{B}} \Rightarrow \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} = \widetilde{M \otimes_A N}$ $\square$

Cor Se $p \in \mathrm{Spec} A = X$ allora

$$(\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N})_p = (\widetilde{M \otimes_A N})_p = (M \otimes_A N)_p = M_p \otimes_{A_p} N_p = \tilde{M}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \tilde{N}_p$$

Prop (Essere QCoh è locale) Se $F \in Sh(\mathcal{O}_X)$, $\{X_\alpha\}$ r.c. affine allora $F|_{X_\alpha} \in QCoh(X_\alpha)\ \forall \alpha \Rightarrow F \in QCoh(X)$

Dim $X = \mathrm{Spec} A$ q.c. $\Rightarrow$ SPG $\{X_\alpha\}$ finito

Se $U \subseteq X$ affine voglio che

$$\mathcal{O}(U) \otimes_A F(X) \longrightarrow F(U) \quad \text{sia iso.}$$

$U_\alpha = X_\alpha \cap U$ è ancora affine. Nota che

sarebbe $\prod$ ma ho scelto ric. finito

$$0 \to F(X) \to \bigoplus_\alpha F(X_\alpha) \to \bigoplus_{\alpha,\beta} F(X_{\alpha\beta})$$

è esatta e che $\mathcal{O}(U)$ è piatto su A ($U \hookrightarrow X$ imm. aperta è piatta!) Quindi

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(X)\otimes_A \mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_\alpha F(X_\alpha)\otimes \mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\alpha\beta} F(X_{\alpha\beta})\otimes \mathcal{O}(U) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] & \bigoplus_\alpha F(U_\alpha) \arrow[r] & \bigoplus_{\alpha,\beta} F(U_{\alpha\beta}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Poiché $F|_{X_\alpha}$ è Quasi coerente $\forall \alpha$,

sono iso.

Dunque anche è iso., cioè $F \in QCoh(X)$ □

Ha quindi senso la definizione

Def X schema, $F \in Sh(\mathcal{O}_X)$ è Quasi coerente se $\forall U \subseteq X$ aperto affine, $F|_U \in QCoh(U)$

Per la proposizione, F è q.coer. sse lo è su un ricoprimento.

Abbiamo $QCoh(X) \subseteq Sh(\mathcal{O}_X)$ immersione esatta di categorie

Oss $\mathcal{O}_X$ è quasicoerente

Oss Se X schema, $Y \overset{i}{\subseteq} X$ sottospazio loc. anulato chiuso, allora $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y \to 0$ esatta

Prop TFAE ① $\mathcal{I}_Y \in QCoh(X)$
② $i_* \mathcal{O}_Y \in QCoh(X)$
③ $Y \subseteq X$ schema

Dim ①$\Leftrightarrow$② esattezza di $QCoh(X) \subseteq Sh(\mathcal{O}_X)$

Per "②$\Leftrightarrow$③" SPG $X = \operatorname{Spec} A$.

Noto che ② $\Leftarrow$ $i_* \mathcal{O}_Y = \widetilde{B}$ dove $B = A/J$ con $J \trianglelefteq A$

$\Leftrightarrow Y = \operatorname{Spec} B$, $B = A/J$

① $\Rightarrow \mathcal{I}_Y = \widetilde{J} \Rightarrow i_* \mathcal{O}_Y = \widetilde{A/J}$ $\square$

Oss Se $X = \operatorname{Spec} A$, $\{M_\alpha\}$ moduli su A, $\widetilde{\bigoplus M_\alpha} = \bigoplus \widetilde{M_\alpha}$

Quindi se $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ $QCoh(X)$ per X qualsiasi, $\bigoplus \mathcal{F}_\alpha$ è $QCoh$.

FASCI COERENTI

Prop Sia X schema, $\mathcal{F} \in QCoh(X)$, $\{X_\alpha\}$ ric. di aperti affini di X. TFAE

① $\mathcal{F}(X_\alpha)$ è f.g. come $\mathcal{O}(X_\alpha)$ modulo

② $\forall U$ affine di X, $\mathcal{F}(U)$ è f.g. su $\mathcal{O}(U)$

Dim Esercizio. Hint: prima caso X affine $X = X_\alpha$
$(\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(X) \otimes_A \mathcal{O}(U)$ e $\mathcal{F}(X)$ f.g. su $A)$

poi X affine con $\{X_\alpha\}$ su che più di uno
(SPG finito, $F(X_\alpha) \cong F(X) \otimes \mathcal{O}(X_\alpha) \rightsquigarrow$ scelgo generatori $\forall \alpha$) $\square$

Def Sia X schema loc. noeth. $F \in QCoh(X)$ è coerente se soddisfa le condizioni sopra

Oss $Coh(X) \subseteq QCoh(X)$ è sottocategoria esatta

Aside Ci sono due definizioni che generalizzano coerente a schemi non loc. noeth. ma non le trattiamo.

Recall Sia A graduato

sia $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ A-modulo omogeneo

se $S \subseteq A^+ = \bigcup_{i>0} A_i$ sistema moltiplicativo ha senso

$S^{-1}M$ come $S^{-1}A$-modulo graduato

La loc. omogenea $(S^{-1})M = (S^{-1}M)_0$ è un $(S^{-1})A$-mod.

Se $P \in \mathrm{Proj}\, A$, $M_{(P)} = ((A^+ \setminus P)^{-1})M$ è un $A_{(P)}$-mod.

Se $f \in A^+ \setminus P$, $M_{(P)} \cong (M_{(f)})_{P(f)}$ come $A_{(P)} = (A_{(f)})_{P(f)}$-mod.

Costruction Voglio $\hat{M}$ fascio di $\mathcal{O}_X$ moduli su $X = \mathrm{Proj}\, A$

$$\hat{M}(U) = \left\{ \begin{array}{l} s : U \to \prod M_{(P)} \\ \quad P \longmapsto s(P) \in M_{(P)} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall P\, \exists f \in A^+ \text{ t.c. } P \in X_f \subseteq U \\ \text{t.c. } \exists\, m \in M_{(f)} \text{ t.c. } s(Q) = m_Q \\ \forall Q \in X_f \end{array} \right\}$$

Oss $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}A} = \hat{A}$

Oss $M_{(f)} \longrightarrow \tilde{M}(X_f)$ è un iso.

Oss $\widehat{M}(X_{fg}) = M_{(fg)} = A_{(fg)} \otimes_{A_{(f)}} M_{(g)} = \mathcal{O}(X_{fg}) \otimes_{\mathcal{O}(X_f)} \widehat{M}(X_g)$

cioè $\widehat{M}|_{X_f} = \widetilde{M_{(f)}}$. In particolare $\widehat{M} \in QCoh(X)$

Def $A = R[x_0, \dots, x_n]$, grad. standard, $\operatorname{Proj} A = \mathbb{P}^n_R$

sia $d \in \mathbb{Z}$, definisco un A-modulo omogeneo $A(d)$

che è A come modulo (non omog.) ma traslo i gradi:

$$A(d)_i = A_{i+d}$$

Poniamo $\boxed{\widetilde{A(d)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)}$

Oss Come A_0-moduli, $M_0 \to \widetilde{M}(X)$, quindi:

$$A_d \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d))$$

$\mathbb{P}^n_R = \bigcup U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} A_{(x_i)}$,

$$\mathcal{O}(d)|_{U_i} = A(d)_{(x_i)} = \left\{ \frac{f(x_0, \dots, x_n)}{x_i^r} \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ omogeneo di grado} \\ r \text{ in } A(d), \text{ cioè } r+d \text{ in } A \end{array} \right\}$$

$$\underset{\text{come } A_{(x_i)}\text{-mod}}{\cong} A_{(x_i)}$$

Dove l'isomorfismo è

$$\begin{aligned} A_{(x_i)} &\longrightarrow A(d)_{(x_i)} \\ f &\longmapsto x_i^d f \end{aligned}$$

OK perché x_i invertibile $\rightsquigarrow \dfrac{g}{x_i^d} \longleftarrow g$

Quindi: $\mathcal{O}(d)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$

Prop $n \geq 1$ $A_d \to \Gamma(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d))$ è un isomorfismo

Dim Come nel caso $d=0$:

$g_j/X_i^d = g_i/X_j^d$ $\forall i,j \Rightarrow g_i$ di grado 0 in $A(d)_{(X_i)}$

$\rightsquigarrow$ polinomio omog. di grado d

$\square$

Cor $\operatorname{rnk}_R \mathcal{O}(d)(\mathbb{P}^n_R) = \begin{cases} 0 & \text{se } d<0 \\ \binom{d+n}{n} & \text{se } d \geq 0 \end{cases}$

In particolare $\mathcal{O}(d) \cong \mathcal{O}_X \iff d=0$ e se $d_1, d_2 \geq 0$ $\mathcal{O}(d_1) \cong \mathcal{O}(d_2) \iff d_1 = d_2$. Per i negativi?

Oss Se $F, G \in QCoh(X)$, $F \otimes_{\mathcal{O}_X} G \in QCoh(X)$ e valgono le solite proprietà

Prop Se $X = \mathbb{P}^n_R$, $\mathcal{O}(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(e) \cong \mathcal{O}(d+e)$

Dim Costruiamo $\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(e) \to \mathcal{O}(d+e)$ e vediamo che è iso.

Su U_i, $\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(e)|_{U_i}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(d+e)|_{U_i}(U)$

$$\left\{ \frac{f}{X_i^r} \,\middle|\, \deg f = r+d \right\} \otimes \left\{ \frac{g}{X_i^s} \,\middle|\, \deg g = s+e \right\} \otimes \mathcal{O}(U) \longrightarrow \left\{ \frac{h}{X_i^r} \,\middle|\, \deg h = r+d+e \right\} \otimes \mathcal{O}(U)$$

$$\frac{f}{X_i^r} \otimes \frac{g}{X_i^s} \otimes 1 \longmapsto \frac{fg}{X_i^{r+s}} \otimes 1$$

le restrizioni fanno la cosa giusta quindi incolliamo.

localmente è iso perché $A(d)_{(x_i)} \otimes A(e)_{(x_i)} = A(d+e)_{(x_i)}$ $\square$

Cor $\mathcal{O}(d) \cong \mathcal{O}(e) \Leftrightarrow d = e$

Dim $\mathcal{O}(d-e) = \mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(-e) \cong \mathcal{O}(e) \otimes \mathcal{O}(-e) \cong \mathcal{O}(e-e) = \mathcal{O}$ $\square$

Def Se X schema, $F \in Sh(\mathcal{O}_X)$ è loc. libero di rango r se $\exists$ ric. aperto U_α di X t.c.

$$F|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}$$

Oss loc. libero $\Rightarrow$ QCoh

Def loc. libero di rango 1 si dice invertibile

Thm Sia $X = \operatorname{Spec} A$, $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ succ. ex. di $\mathcal{O}_X$-moduli. Se F' è QCoh allora

$$0 \to F'(X) \to F(X) \to F''(X) \to 0 \text{ è esatta}$$

Ex Sia $X = \mathbb{P}^1_K$, $S \subseteq X$ sottoschema chiuso proprio $\neq \emptyset$

$$0 \to \mathcal{I}_S \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_S \to 0$$ e non è pt. razionale

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathcal{I}_S} \to K \to \mathcal{O}_S(S)$$

non è surg. perché $\dim_K \mathcal{O}_S(S) > 1$

<u>Prop</u> Sia X schema, $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ succ. di fasci di $\mathcal{O}_X$-mod.
Se due dei tre sono QCoh allora lo è anche il terzo.

<u>Dim</u> Se i due sono $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}$ o $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}''$ allora ok perché $QCoh(X)$ sottocategoria esatta.

Supponiamo dunque $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ QCoh.

SPG X affine perché essere QCoh è questione locale e restringere succ. ex. di fasci la fa restare esatta.

$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X) \to 0$ esatta per il teorema.

ora fascifico:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{F}'(X)} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \widetilde{\mathcal{F}(X)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{F}''(X)} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

allora le mappe verticali sono indotte dalla prop. univ. di fascificazione, iso. ai lati perché $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ QCoh, riga in alto esatta perché fascificare è esatto.

Questo chiude per lemma dei 5 $\square$

PUSHFORWARD

Dato $A \to B$ omo anelli abbiamo

$$\mathrm{Mod}(B) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A) \qquad \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Mod}(B)$$
$$N \longmapsto N|_A \text{ (restr. scalari)} \qquad M \longmapsto M \otimes_A B$$

Queste costruzioni sono aggiunte:

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

Queste si estendono a schemi

Def Se $f: X \to Y$ morfismo di sp. loc. anulati

$$f_*: Sh(X) \to Sh(Y) \qquad f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$$

Se poi $F \in Sh(\mathcal{O}_X)$, $F(f^{-1}(V))$ è un $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$-modulo

dato che $f^\#_V: \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(V)$, restringendo

scalari: ho che f_*F è un $\mathcal{O}_Y$-modulo.

Abbiamo un funtore $f_*: Sh(\mathcal{O}_X) \longrightarrow Sh(\mathcal{O}_Y)$

Dati $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sempre di sp. loc. anulati

$$(gf)_* = g_* f_*: Sh(\mathcal{O}_X) \to Sh(\mathcal{O}_Z)$$

In generale, se $f: X \to Y$ morfismo di schemi, NON è vero che f_* porta $QCoh(X)$ in $QCoh(Y)$

Ex Sia $Y = \mathbb{A}^1_k$, $X = \coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{A}^1_k$, $X \to Y$ quello ovvio che collassa le copie di $\mathbb{A}^1$

$$f_* \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X\Big(\coprod_{\mathbb{N}} V\Big) = \prod_{\mathbb{N}} \mathcal{O}_Y(V)$$

Quindi $f_* \mathcal{O}_X = \prod \mathcal{O}_Y$ e abbiamo visto che questo non è QCoh.

Def Un morfismo di schemi $f: X \to Y$ è quasi-separato se $\delta_X : X \to X \times_Y X$ è quasi-compatta (come morfismo)

Oss Se X è Noeth allora ogni $f: X \to Y$ è q-sep.
(ricorda che sp. top. è Noeth. sse ogni aperto è q.c.)

Thm Se $f: X \to Y$ è q-sep e q.c. allora $f_*: Sh(\mathcal{O}_X) \to Sh(\mathcal{O}_Y)$ porta $QCoh(X)$ in $QCoh(Y)$

Dim caso X e Y affini)

$f: X \to Y \rightsquigarrow \varphi: B \to A$. se $F \in QCoh(X)$ allora $F \cong \widetilde{M}$

Voglio mostrare che $f_* F$ è canonicamente isomorfo a $\widetilde{M|_B}$.

$$M = F(X) = f_* F(Y)$$

Per la prop. univ. c'è $\widetilde{M|_B} \to f_* F$

basta mostrare che questo è un iso.

ESERCIZIO (hint: restringere $QCoh = \otimes \mathcal{O}(U)$)

caso f separato) SPG $Y = \operatorname{Spec} R$ dato che essere QCoh è locale.

Copro X con $\{X_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} X\}$ aperti affini, ric. finito perché f q.c. e Y affine $\Rightarrow X$ q.c.

Sia $F_\alpha = F|_{X_\alpha}$, $F_{\alpha\beta} = F|_{X_\alpha \cap X_\beta}$

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, hook, "j_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Se $V \subseteq Y$ è aperto, $f_* F(V) = F(f^{-1}(V))$. Abbiamo ex.

$$0 \to F(f^{-1}(V)) \to \bigoplus_\alpha F_\alpha(f_\alpha^{-1}(V)) \to \bigoplus_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}(f_{\alpha\beta}^{-1}(V)) \to 0$$

Poiché X separato, $X_{\alpha\beta}$ è affine

$$0 \to f_* F \to \bigoplus_\alpha f_{\alpha *} F_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta *} F_{\alpha\beta} \to 0$$ è dunque esatta

quasi coerenti $\Rightarrow$ $f_* F$ è quasi coerente

caso generale) NO $\square$

Applicazione: Chiusura schematica

Def X schema, $Y \hookrightarrow X$ sottoschema loc. chiuso, cioè $Y \hookrightarrow U \hookrightarrow X$
$$\underset{\text{imm chiusa}}{Y \hookrightarrow} U \underset{\text{imm aperta}}{\hookrightarrow} X$$

La chiusura schematica $\overline{Y}$ di Y è $\displaystyle\bigcap_{\substack{Z \hookrightarrow X \\ \text{sottoschema chiuso} \\ \text{t.c. } Y \subseteq Z \cap U}} Z$

cioè $\mathcal{I}_{\overline{Y}} = \sum \mathcal{I}_Z$.

Oss $\mathcal{I}_{\overline{Y}}$ è q.c. perché $\mathcal{I}_{\overline{Y}} = \operatorname{imm}\left(\bigoplus \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_X\right)$ in particolare definisce un sottoschema di X.

Prop Se X noeth. oppure Y ridotto allora $\overline{Y} \cap U = Y$

Dim Se Y ridotto ok perché vero topologicamente e ogni chiuso ha un'unica struttura ridotta.
Se X noeth. allora U è noeth. sia $j : U \to X$ inclusione.
Abbiamo $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_Y \to 0$
e $j_* \mathcal{I}_Y$, $j_* \mathcal{O}_U$ sono QCoh. (sto usando U noeth.)

$$j^\# : \mathcal{O}_X \to j_* \mathcal{O}_U, \text{ sia } \mathcal{J} = (j^\#)^{-1}(j_* \mathcal{I}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X$$
$$\mathcal{J} = \{ s \in \mathcal{O}_X \mid s|_U \text{ si annulla su } Y \}$$

$\mathcal{J}$ è QCoh perché è
$$\operatorname{Ker}\left(\mathcal{O}_X \to j_* \mathcal{O}_U \to j_* \mathcal{O}_U / j_* \mathcal{I}_Y\right)$$

Quindi $\mathcal{J} = \mathcal{I}_Z$ per qualche Z sottoschema chiuso $Z \subseteq X$ tale che $Z \cap U = Y$.

$\overline{Y} \subseteq Z \Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \cap U \subseteq Z \cap U = Y \Rightarrow \overline{Y} \cap U = Y$ $\square$

Recall se X loc. noeth, $Coh(X) \subseteq QCoh(X)$

Oss se $u : B \to A$ omo anelli e M fin. gen. per A
$M|_B$ fin. gen. sse u è finito

Cor se $f: X \to Y$ morfismo finito con Y loc. noeth allora $f_* : QCoh(X) \to QCoh(Y)$ preserva Coh

Thm se $f: X \to Y$ morfismo proprio, Y loc. noeth (da cui X loc. noeth) e $F \in Coh(X)$ allora $f_* F \in Coh(Y)$.

Cor se R anello noeth, $f: X \to \operatorname{Spec} R$ proprio e $F \in Coh(X)$ allora $F(X)$ è un R-mod fin. gen.

Ex $X = \mathbb{P}^n_R$, $F = \mathcal{O}(d)$ con $d \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(d)) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } d < 0 \\ R^{\binom{n+d}{n}} & \text{se } d \geq 0 \end{cases}$$
, in particolare è fin. gen.

ESTENSIONE DI CAMPI

Ex Sia $X \to \operatorname{Spec} K$ proprio, allora $\mathcal{O}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è una K-algebra finita, cioè prodotto finito di K-alg locali artiniane.

Quindi X è connesso sse $\mathcal{O}(X)$ è locale artiniano.

X connesso ridotto $\implies \mathcal{O}(X)$ è un campo

Se $K = \bar{K}$ allora X connesso ridotto $\implies \mathcal{O}(X) = K$

Def Se $X \to \operatorname{Spec} K$ schema, X è geometricamente connesso se $X_{K'}$ connesso per ogni estensione K'/K

Ex $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ non è geometricamente connesso

Oss Se $X_{K'}$ conn. e K'/K con $X \in \mathrm{Sch}/K$ allora X conn.

Prop Se $K = \bar{K}$ e $X \to \operatorname{Spec} K$ connesso allora è geom. conn.

Cor X geom. conn $\iff X_{\bar{K}}$ conn.

Oss R anello, $X \to \operatorname{Spec} R$ separato e q.c., sia $R \to R'$ omo.

$pr_2 : X_{R'} \to X$ induce $\quad \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{pr_2^\#} \Gamma(X_{R'}, \mathcal{O}_{X_{R'}})$

$X_{R'} = \operatorname{Spec} R' \times_{\operatorname{Spec} R} X$ $\quad$ omo. di anelli compatibile con $R \to R'$

Abbiamo cioè un omomorfismo di R'-moduli

$$R' \otimes_R \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X_{R'}, \mathcal{O}_{X_{R'}})$$

Prop Se $R \to R'$ piatto allora $R' \otimes_R \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X_{R'}, \mathcal{O}_{X_{R'}})$ come sopra è un iso.

Dim Se $X = \operatorname{Spec} A$ allora la tesi è vera anche senza la piattezza, infatti

$$R'\otimes_R A \to \Gamma(\mathrm{Spm}(R'\otimes_R A), \mathcal{O}) = R'\otimes_R A$$

Sia ora $\{X_\alpha\}$ ric. (finito) di aperti affini di X.
Poiché X separato, $X_{\alpha\beta}$ ancora affini.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(X) \arrow[r] & \bigoplus_\alpha \mathcal{O}(X_\alpha) \arrow[r] & \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathcal{O}(X_{\alpha\beta}) \arrow[d, "\otimes R'"] \\
0 \arrow[r] & R'\otimes\mathcal{O}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus R'\otimes\mathcal{O}(X_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \bigoplus R'\otimes\mathcal{O}(X_{\alpha\beta}) \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(X_{R'}) \arrow[r] & \bigoplus \mathcal{O}((X_\alpha)_{R'}) \arrow[r] & \bigoplus \mathcal{O}((X_{\alpha\beta})_{R'})
\end{tikzcd}$$

(ancora ex perché $R\to R'$ piatto)

tiro indietro il ricoprimento

iso. perché X_α e $X_{\alpha\beta}$ affini

Quindi:

$R'\otimes\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X_{R'})$ CVD □

Cor Se $X\to\mathrm{Spm}\,K$ è q.c. e separato, K'/K allora
$$\Gamma(X_{K'}, \mathcal{O}_{X_{K'}}) \cong K'\otimes_K \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

Cor $K=\bar{K}$, se $X\to\mathrm{Spm}\,K$ è proprio e X_K connesso allora X è geom. conn.

Dim SPG X ridotto, K'/K estensione
$$K' = K'\otimes_K K = K'\otimes_K \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X_{K'}, \mathcal{O}_{X_{K'}})$$
$\Rightarrow X_{K'}$ connesso □

Cor Se $X\to\mathrm{Spm}\,k$ proprio e $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)=k$ allora X geom. conn.

Dim $\bar{k}/k$ piatto $\Rightarrow \Gamma(X_{\bar{k}}, \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}) = \bar{k}\otimes_k\Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \bar{k}$ □

PULLBACK

Cerchiamo di emulare l'estensione di scalari

Vogliamo cioè per $f: X \to Y$ un funtore

$$f^*: Sh(\mathcal{O}_Y) \to Sh(\mathcal{O}_X) \quad \text{t.c.}$$

- $(gf)^* \cong f^* g^*$ canonicamente
- $f^*: QCoh(Y) \to QCoh(X)$
- se $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$,

$$\begin{tikzcd}
QCoh(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, leftrightarrow] & QCoh(X) \arrow[d, leftrightarrow] \\
Mod(B) \arrow[r] & Mod(A) \\
N \arrow[r, mapsto] & A \otimes_B N
\end{tikzcd}$$

- f^* è aggiunto sinistro di f_*

Se $f: X \to Y$ funzione continua costruiamo $f^{-1}: Sh(Y) \to Sh(X)$ aggiunto sinistro di $f_*: Sh(X) \to Sh(Y)$

Come primo passo costruiamo aggiunto sx per prefasci

$$f^P: Pre(Y) \to Pre(X)$$

$$G \longmapsto f^P G(U) = \varinjlim_{\substack{V \supseteq f(U) \\ V \subseteq Y \text{ aperto}}} G(V)$$

se $U \subseteq U'$, $f^P G(U') \to f^P G(U)$ ok

perché $f(U) \subseteq f(U')$

Oss Sia $f: X \to Y$ continua, $F \in Pre(X)$, $G \in Pre(Y)$

$$Hom_{Pre(X)}(f^P G, F) \cong Hom_{Pre(Y)}(G, f_* F)$$

Dim Sia $\phi: G \to f_* F$, cerco $\psi: f^p G \to F$:

$$f^p G(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} G(V) \xrightarrow{\phi} \varinjlim_{f(U)\subseteq V} f_* F(V) = F(f^{-1}(f(U))) \xrightarrow{res} F(U)$$

ψ
s

$s \in G(V)$ per qualche V + compatibilità $\rightsquigarrow$ applico ϕ

Viceversa $$G(U) = G(f(f^{-1}(U))) = f^p G(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\psi} F(f^{-1}(U)) = f_* F(U)$$ $\square$

Oss In generale f^p non manda fasci in fasci

Ex Sia Y = punto, G fascio su Y, $A = G(pt)$

$$f^p G(U) = \begin{cases} A & \text{se } U \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } U = \emptyset \end{cases}$$ e questo non è un fascio per X generale $\square$

Def $f^{-1}: Sh(Y) \to Sh(X)$
$G \longmapsto (f^p G)^{sh}$

Prop $f^{-1}: Sh(Y) \to Sh(X)$ è aggiunto sx di $f_*: Sh(X) \to Sh(Y)$

Dim $$\mathrm{Hom}_{Sh(X)}(f^{-1}G, F) \cong \mathrm{Hom}_{Pre(X)}(f^p G, F) = \mathrm{Hom}_{Pre(Y)}(G, f_* F) = \mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(G, f_* F)$$ $\square$

Ex (1) $Y = pt$, G fascio costante ad A
$f^{-1}A = A_X$ = fascio di funz. loc. cost. in A

(2) $X = P$ punto, $f: P \to Y$, $f^{-1}G \begin{cases} G_{f(P)} & \text{spiga (su } P) \\ 0 & \text{su } \emptyset \end{cases}$

Prop Date due mappe $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ cont. abbiamo iso. canonico
$$(gf)^{-1} \cong f^{-1} g^{-1} : Sh(Z) \to Sh(X)$$

Dim Per il lemma di Yoneda basta mostrare che $f^{-1} g^{-1}$ è aggiunto sx di $(gf)_* = g_* f_*$
$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1} g^{-1} G, F) = \mathrm{Hom}_Y(g^{-1} G, f_* F) = \mathrm{Hom}_Z(G, g_* f_* F) \quad \square$$

Cor Se $f: X \to Y$ continua, $P \in X$, $G \in Sh(Y)$, allora
$$(f^{-1} G)_P \cong G_{f(P)}$$

Dim $P \xrightarrow{h} X \to Y$ e $h^{-1}(F) = F_P$ $\square$

Oss Se $j: U \hookrightarrow X$ imm. aperta, $F \in Sh(X)$
$$j^{-1} F = F|_U$$

Ora trattiamo fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli

Ex Se $X \xrightarrow{f} \mathrm{Spec} K$ morfismo di schemi, $f^{-1} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} K} = K_X$ e K_X non è un $\mathcal{O}_X$-modulo in generale
(moltiplico loc. cost. per una funzione e spero di trovare loc. cost.?)

Sia $f: X \to Y$ morfismo di Sp. Loc. An e $G \in Sh(\mathcal{O}_Y)$
$f^{-1} G$ è un $f^{-1} \mathcal{O}_Y$-modulo in modo naturale
(esercizio)

f^{-1} è un funtore $Sh(\mathcal{O}_Y) \to Sh(f^{-1}\mathcal{O}_Y)$

$f^{\#}: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ per aggiunzione restituisce
$f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$

$\rightsquigarrow$

Dato $G \in Sh(\mathcal{O}_Y)$, $f^*G = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}G \in Sh(\mathcal{O}_X)$

Prop f^* è aggiunto sx di f_* su fasci di moduli

$$\left[\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{Sh(\mathcal{O}_X)}(f^*G, F) = \mathrm{Hom}_{Pre(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}G, F) = \mathrm{Hom}_{Pre(f^{-1}\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}G, F) = \\ &= \mathrm{Hom}_{Sh(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}G, F) = \mathrm{Hom}_{Sh(\mathcal{O}_Y)}(G, f_*F) \qquad 2. \end{aligned}\right]$$

Ex Y schema, $G \in Sh(\mathcal{O}_Y)$, $X = P \in Y$, $P = \mathrm{Spec}\, K(P) \xrightarrow{f} Y$

$$f^*G = \left(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, K(P)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}G\right)(P) = K(P) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,P}} G_P$$

Ex Se $j: U \hookrightarrow X$ imm. aperta, $F \in Sh(\mathcal{O}_X)$

$$j^*F = \mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_U} F|_U = F|_U$$

Prop Dati due morfismi $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ di Sp.Loc.An allora $(gf)^* \cong f^* g^*$

Prop Sia $f: X \to Y$ mor. di sp. loc. an. Sia $\mathcal{G} \in Sh(\mathcal{O}_Y)$
se $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ aperti t.c. $f(U) \subseteq V$, allora
Allora $f^*\mathcal{G}|_U \cong (f|_U)^*(\mathcal{G}|_V)$ canonicamente

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & X \\ {\scriptstyle f|_U}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ V & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

Prop Sia $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $N \in Mod(B)$, $f: X \to Y$
$\qquad \varphi: B \to A$
Allora $f^*(\tilde{N}) \cong \widetilde{N \otimes_B A}$

Dim Sia $\mathcal{F} \in Sh(\mathcal{O}_X)$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{A \otimes_B N}, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Hom}_A(A \otimes_B N, \mathcal{F}(X)) = \operatorname{Hom}_B(N, \mathcal{F}(X)|_B) =$$

$$= \operatorname{Hom}_B(N, (f_*\mathcal{F})(Y)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{N}, f_*\mathcal{F}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^*\tilde{N}, \mathcal{F})$$

e quindi per Yoneda $\widetilde{A \otimes_B N} \cong f^*\tilde{N}$ $\square$

Cor Se $f: X \to Y$ morfismo di schemi e $\mathcal{G} \in QCoh(Y)$
allora $f^*\mathcal{G} \in QCoh(X)$

Dim Appena mostrato per X e Y affini
Poi uso $f^*\mathcal{G}|_U = (f|_U)^*(\mathcal{G}|_V)$ coprendo Y con affini
e X con affini che finiscono in quelli scelti per Y $\square$

COH($\mathbb{P}^n_K$)

Sia $A = K[x_0, \dots, x_n]$ con graduazione standard

se M modulo graduato, $\widetilde{M}$ fascio QCoh su $\mathbb{P}^n_K$.

se M è anche f.g. allora coerente.

se $p \in \mathbb{P}^n_K$ primo omogeneo, $\widetilde{M}_p = M_{(p)}$

Abbiamo un funtore

$$\mathrm{Modgr}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}(A_{(p)}) \quad \text{esatto}$$

dunque è esatto
$$\begin{aligned} \mathrm{Modgr}_A &\longrightarrow \mathrm{QCoh}(\mathbb{P}^n_K) \\ M &\longmapsto \widetilde{M} \end{aligned}$$

EX sia $f \in K[x_0, \dots, x_n]_d \setminus \{0\}$, $X = \mathrm{Proj}(A/(f)) \overset{i}{\subseteq} \mathbb{P}^n_K$

Nota che $A(-d) \overset{\cdot f}{\hookrightarrow} A$, quindi $(f) \cong A(-d)$

$$0 \to A(-d) \to A \to A/(f) \to 0$$
fascifico

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K} \to i_* \mathcal{O}_X \to 0$$

ma il nucleo è $\mathcal{I}_X$ per definizione, quindi per ipersuperfici $\mathcal{I}_X = \mathcal{O}(-d)$.

Ora applico sezioni globali $(d>0)$

$$0 \to 0 \to K \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cdots \to 0$$

surg.?

se $d=1$ sì perché $X \cong \mathbb{P}^{n-1}_K$ ma

se $d>1$ allora può non scoppiare.

Per esempio $n=1$, $d=2$ $\to$ di solito 2 punti razionali

Recall se $X \to \operatorname{Spec} K$ proprio, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K \Rightarrow X$ geom. conn.

Fatto se $n \geq 2$ allora $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K$

(ipotesi su X

FASCI FIACCHI

Def Un fascio F è *fiacco* se tutte le restristrizioni sono suriettive.

Ex (1) se $X \in Top$, $A: X \longrightarrow Ab$, $p \longmapsto A_p$ funzione (assioma rimpiazzamento)

Definisco un fascio $F(U) = \prod_{p \in U} A_p$, il quale è fiacco.

(2) se X irriducibile, $A \in Ab$

$$A_X(U) \begin{cases} A & \text{se } U \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } U = \emptyset \end{cases}$$ è fiacco.

Thm Se $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ è esatta in $Sh(X)$ allora se F' fiacco, $0 \to F'(X) \xrightarrow{\alpha} F(X) \xrightarrow{\beta} F''(X) \to 0$ esatta

dim Sia $s'' \in F''(X)$, prendo $\{(U, s) \mid U \subseteq X \text{ aperto}, s \in F(U), \beta(s) = s''|_U\}$

Questo è un poset Zorn-abile, prendo (U, s) massimale. Se $x \in X$, prendo $x \in V \subseteq X$ e $t \in F(V)$ t.c. $\beta(t) = s''|_V$. Voglio incollare t e s ma apriori $s|_{U\cap V} \neq t|_{U \cap V}$, però $\beta(t|_{U\cap V} - s|_{U\cap V}) = 0$

quindi per l'esattezza $\exists\, s' \in F'(U \cap V)$ t.c. $\alpha(s') = t|_{U\cap V} - s|_{U \cap V}$

per fiacchezza $s_1' \in F'(X)$ che lo estende e pongo $s_1 = \alpha(s_1')$ e

$t_1 = t - s_1|_V \in F(V)$. $t_1|_{U\cap V} = t - s_1|_{U\cap V} = s|_{U\cap V}$ $\square$

Oss Ogni fascio è contenuto in un fascio fiacco:

$\mathcal{G}^0 F : U \mapsto \prod_{p\in U} F_p$ fascio delle sezioni discontinue di F.

$F \subseteq \mathcal{G}^0 F$ con $s \mapsto (p \mapsto s_p)$

Oss Se F fiacco, $(\mathcal{G}^0 F)/F$ è fiacco:

se $U \subseteq X$ aperto, $0 \to F(U) \to \mathcal{G}^0 F(U) \to (\mathcal{G}^0 F/F)(U) \to 0$

e quindi sollevo su quoziente passando da $\mathcal{G}^0 F(U)$, $\mathcal{G}^0 F(X)$ e poi riproietto

Def Una risoluzione $R^\bullet$ di un fascio F è una successione esatta $0 \to 0 \to R^0 \to R^1 \to R^2 \to \cdots$ con $F \cong \ker(R^0 \to R^1)$

Def Abbiamo una risoluzione fiacca canonica, di Godement:

$$0 \to 0 \to \mathcal{G}^0 F \to \mathcal{G}^1 F \to \mathcal{G}^2 F \to \cdots$$

con $\mathcal{G}^1 F = \mathcal{G}^0(\mathcal{G}^0 F/F)$, $\mathcal{G}^i F = \mathcal{G}^0(\operatorname{coker}(\mathcal{G}^{i-2} F \to \mathcal{G}^{i-1} F))$

Oss Queste risoluzione è funtoriale in F:

$$\begin{array}{ccccc} F & & \mathcal{G}^\circ F & & (s_p) \\ \downarrow \varphi & \rightsquigarrow & \downarrow & & \mapsto \\ F' & & \mathcal{G}^\circ F' & & (\varphi_p(s_p)) \end{array}$$

e costruito così

Oss Se $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ succ. ex di fasci abbiamo

$$0 \to \mathcal{G}^\bullet F' \to \mathcal{G}^\bullet F \to \mathcal{G}^\bullet F'' \to 0 \quad \text{succ. ex di complessi}$$

e addirittura $0 \to \mathcal{G}^\bullet F'(X) \to \mathcal{G}^\bullet F(X) \to \mathcal{G}^\bullet F''(X) \to 0$ ex.

COOMOLOGIA

Oss Se $R^\bullet$ risoluzione di F, $R^\bullet(X)$ complesso di grp. abeliani

$$H^0(R^\bullet(X)) \cong F(X)$$

Def Se $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(X,F) := H^i(\mathcal{G}^\bullet F(X))$

Oss $H^0(X,F) = \Gamma(X,F)$.

Proprietà (1) $F \mapsto H^i(X,F)$ è un funtore $Sh(X) \to Ab$

(2) Se $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ ex. di fasci troviamo

$$0 \to H^0(X,F') \to H^0(X,F) \to H^0(X,F'') \xrightarrow{\delta} H^1(X,F') \to H^1(X,F) \to \cdots$$

Il cobordo è funtoriale nelle successioni esatte

(cioè abbiamo un δ-funtore)

idea: siccome $\mathcal{G}^\bullet F$ risoluzione fiacca

$$0 \to \mathcal{G}^\bullet F'(X) \to \mathcal{G}^\bullet F(X) \to \mathcal{G}^\bullet F''(X) \to 0 \quad \text{è esatta}$$

(3) se F fiacco, $H^i(X,F)=0 \quad \forall i \geq 1$

dim: in generale, dato F ho succ. ex. corte

$0 \to F \to \mathcal{G}^0 F \to Q^1 \to 0$ ora, F fiacco $\Rightarrow$ Q^1 fiacco

$0 \to Q^1 \to \mathcal{G}^1 F \to Q^2 \to 0$ Q^1 fiacco $\Rightarrow$ Q^2 fiacco ...

$\vdots$

Quindi:
$$0 \to F(X) \to \mathcal{G}^0 F(X) \to Q^1(X) \to 0$$
$$0 \to Q^1(X) \to \mathcal{G}^1 F(X) \to Q^2(X) \to 0$$
$$0 \to Q^2(X) \to \mathcal{G}^2 F(X) \to Q^3(X) \to 0$$
$\vdots$

tutte esatte

$\mathcal{G}^\bullet F(X)$ esatta $\Rightarrow$ omologia banale $\square$

Ex $X \subseteq \mathbb{P}^n_K$ ipersuperficie di grado $d>0$

$$0 \to \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K} \to i_* \mathcal{O}_X \to 0$$

$$\rightsquigarrow 0 \to 0 \to K \to H^0(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}(-d))$$

Quindi $H^1(X,\mathcal{O}(-d))=0 \Rightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X)=K \rightsquigarrow X$ geom. conn.

COME CALCOLO STA ROBA?

(1) Risoluzioni acicliche

(2) Coomologia di Čech

Def $F \in Sh(X)$ è aciclico se $H^i(X,F)=0$ $\forall i>0$

Se F fascio una sua risoluzione $R^\bullet$ è aciclica se R^i fascio aciclico

Thm Se $R^\bullet$ ris. aciclica di F

$$H^i(X,F) \cong H^i(R^\bullet(X))$$

Idea
$$0 \to F \to R^0 \to Q^1 \to 0 \qquad H^0(X,F) \cong \operatorname{Ker}(R^0(X) \to Q^1(X))$$
$$0 \to Q^1 \to R^1 \to Q^2 \to 0$$
$$0 \to Q^2 \to R^2 \to Q^3 \to 0$$
$$\vdots$$

ogni pezzo dà ex. lunga

$$0 \to F(X) \to R^0(X) \to Q^1(X) \to H^1(X,F) \to 0 \to H^1(X,Q^1) \to H^2(X,F) \to 0$$

$$\Rightarrow H^1(X,F) \cong \operatorname{Coker}(R^0(X) \to Q^1(X)) = H^1(R^\bullet(X))$$

$$Q^1(X) = \ker(R^1(X) \to R^2(X))$$

e $H^1(X,Q^1) \cong H^2(X,F)$,
$H^2(X,Q^1) \cong H^3(X,F)$ ecc. uso le altre successioni ex. $\square$

Ex calcolare $H^1(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^1_K})$ per $K=\overline{K}$

sia $\mathcal{K} = K(\mathbb{P}^1_K) \cong K(t)$, noto $\mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^1_K} \subseteq \mathcal{K}^*_{\mathbb{P}^1_K}$

$$0 \to \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^1_K} \to \mathcal{K}^*_{\mathbb{P}^1_K} \to Q \to 0$$

Se $P \in \mathbb{P}^1_K(K)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K, P}$ è un DVR, con valutazione v_P

$$0 \to \mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1_K} \to K^\times_{\mathbb{P}^1_K} \to \bigoplus_{P \in \mathbb{P}^1_K(K)} \mathbb{Z} \to 0$$

$$f \longmapsto (v_P(f))$$

$K^\times_{\mathbb{P}^1_K}$ è fiacco perché $\mathbb{P}^1_K$ è irrid.

$\bigoplus_{P \in \mathbb{P}^1_K(K)} \mathbb{Z}$ è fiacco perché $\mathbb{P}^1$ è noetheriano

$$\left(\bigoplus F_i\right)(U) = \bigoplus F_i(U) \text{ quando } U \text{ q.c.}$$

e noeth $\Leftrightarrow$ ogni aperto è q.c.

Quindi $H^i(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^1_K}) = 0$ per $i \geq 2$ e

$H^1(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^1_K}) = \operatorname{coker}\left(K(t)^\times \to \bigoplus \mathbb{Z}\right)$ e

per il teorema dei residui questo è $\mathbb{Z}$.

Ex $H^i(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}) = ?$ $\qquad i_P : P \hookrightarrow \mathbb{P}^1$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to K_{\mathbb{P}^1} \to \bigoplus_{P \in \mathbb{P}^1(K)} i_{P*} K/\mathcal{O}_{X,P} \to 0$$

$\rightsquigarrow H^i(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}) = 0$ per $i \geq 2$

$H^1(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}) = \operatorname{coker}\left(K(t) \to \bigoplus K/\mathcal{O}_P\right)$

Chi è $K/\mathcal{O}_p$? $\quad f \in K \rightsquigarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-p)^k$

$K/\mathcal{O}_p \rightsquigarrow$ solo pezzo negativo $\qquad$ sviluppo di Laurent

$K \to \bigoplus K/\mathcal{O}_p$ surgettiva significa che se ho un po' di punti e specifico uno sviluppo di Laurent in gradi negativi

Oss se $i : Y \hookrightarrow X$ chiuso, $F \in Sh(Y)$, se $p \in X$

$$(i_* F)_p \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin Y \\ F_p & \text{se } p \in Y \end{cases} \Rightarrow \mathcal{G}^\bullet(i_* F) = i_* \mathcal{G}^\bullet F$$

$$\Rightarrow H^i(X, i_* F) = H^i(Y, F)$$

Oss se R anello, F fascio di R-mod su X (esempio: $X \in Sch/R$, $F \in QCoh(X)$) allora $\mathcal{G}^\bullet F$ è complesso di fasci di R-moduli

$\Rightarrow H^i(X, F)$ è R-mod.

EX $K = \overline{K}$, $H^i(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}) \begin{cases} K & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i > 0 \end{cases}$

Sia $P \in \mathbb{P}^1_K(K)$ punto chiuso, $I_P = \mathcal{O}(-1)$

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to i_* \mathcal{O}_P \to 0 \qquad i : P \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1))} \to \underset{\substack{\| \\ K}}{H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O})} \to \underset{\substack{\| \\ K}}{H^0(\mathbb{P}^1, i_* \mathcal{O}_p)} \to H^1(\mathcal{O}(-1)) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(\mathcal{O})} \to \cdots$$

se $i \geq 2$ $\quad \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^{i-1}(\mathcal{O}_p)} \to H^i(\mathcal{O}(-1)) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^i(\mathcal{O})}$

$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}(-1)) = 0 \quad \forall i \geq 0$

Oss $\mathcal{O}(d)$ è localmente libero di rango 1

se $L \in Sh(\mathcal{O}_X)$ (X loc. anulato) e L loc. libero

$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ esatta, allora

$0 \to L \otimes_{\mathcal{O}_X} F' \to L \otimes_{\mathcal{O}_X} F \to L \otimes_{\mathcal{O}_X} F'' \to 0$ ancora esatta

Su $\mathbb{P}^1_K$, $(i_* \mathcal{O}_p) \otimes \mathcal{O}(d) \cong i_* \mathcal{O}_p$, quindi ho

$$0 \to \mathcal{O}(d-1) \to \mathcal{O}(d) \to i_* \mathcal{O}_p \to 0 \qquad (?)$$

So che $H^1(\mathcal{O}) = 0 = H(i_* \mathcal{O}_p) \Rightarrow H^1(\mathcal{O}(d)) = 0 \ \forall d \geq -1$

$\Rightarrow$ se $d \geq 0$, $\dim H^0(\mathcal{O}(d)) = 1 + \dim H^0(\mathcal{O}(d-1))$

$\Rightarrow \dim H^0(\mathcal{O}(d)) = d+1$

$d=-1 \Rightarrow H^0(\mathcal{O}(-2))=0$,

$$0 \to 0 \to \underset{\substack{\| \\ K}}{H^0(\mathcal{O}_p)} \to H^1(\mathcal{O}(-2)) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(\mathcal{O}(-1))}$$

$\rightsquigarrow H^1(\mathcal{O}(-2))=K$

$\rightsquigarrow \dim H^1(\mathcal{O}(d)) = -d-1$ per $d \leq -1$

Quindi:

$$\dim H^0(\mathcal{O}(d)) \begin{cases} d+1 & \text{se } d \geq -1 \\ 0 & \text{se } d \leq -1 \end{cases}$$

$$\dim H^1(\mathcal{O}(d)) \begin{cases} 0 & \text{se } d \geq -1 \\ -d-1 & \text{se } d \leq -1 \end{cases}$$

Def $\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d)) = \dim H^0(\mathcal{O}(d)) - \dim H^1(\mathcal{O}(d))$

Oss $\chi(\mathcal{O}(d)) = d+1$

COOMOLOGIA DI ČECH

sia X sp. top., F prefascio su X, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricopr. aperto

Fisso ordine totale su I

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, F) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} F(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

se F fascio, $0 \to F(X) \to \check{C}^0(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^1(\mathcal{U}, F)$ ex.

generalizzo: $\delta : \check{C}^p(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, F)$

$$s \longmapsto \delta(s)$$

con $(\delta(s))_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum (-1)^i s_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} \big|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}}$

Oss $\delta^2 = 0$

Oss $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, -)$ è funtore

Def $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) = H^p((\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F), \delta))$

Oss se $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ esatta di prefasci

$0 \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F') \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F'') \to 0$ esatta

$\Rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, -)$ è δ-funtore $Pre(X) \to Ab$

Fact $\check{H}^p(\mathcal{U},-)$ sono i funtori derivati di $\check{H}^0(\mathcal{U},-)$

Thm se F fascio allora abbiamo morfismo naturale

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U},F) \to H^\bullet(X,F).$$

Inoltre, se $\forall \alpha_0,\dots,\alpha_p \in I$, $H^i(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}, F|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}})=0$ allora quella mappa è iso.

Dim **Lemma** se $X \in \mathcal{U}$ allora $\check{H}^p(\mathcal{U},F)=0 \ \forall p>0$ per qualunque prefascio F

Dim voglio omotopia $T: \check{C}^\bullet(\mathcal{U},F) \to \check{C}^\bullet(\mathcal{U},F)$ di grado -1 t.c. $T\delta+\delta T = \mathrm{id}$ in grado >0

se $X = U_\beta$, $T: \check{C}^p(\mathcal{U},F) \to \check{C}^{p-1}(\mathcal{U},F)$

$(T s)_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}} = s_{\beta\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}$ resto è un conto
(ok perché $U_{\beta\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}} = U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}$) ∎

Lemma se F fiacco su X allora $\check{H}^p(\mathcal{U},F)=0 \ \forall p>0$

Sketch Definisco complesso di fasci

$$\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U},F)(V) = \check{C}^\bullet(\mathcal{U}|_V, F|_V)$$

se $j_{\alpha_0\cdots\alpha_p}: U_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \hookrightarrow X$, $\underline{\check{C}}^p(\mathcal{U},F) = \prod_{\alpha_0\cdots\alpha_p} (j_{\alpha_0\cdots\alpha_p})_* F|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}$

Noto che $\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U},F)$ è esatto in grado positivo:

$$\underline{\check{C}}^0(\mathcal{U},F) \to \underline{\check{C}}^1(\mathcal{U},F) \to \dots$$

se valuto su aperto piccolo cado dentro un U_β ⇝ lemma sopra + colimite di l'esattezza

$\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U},F)$ è una risoluzione (sempre)

se F fiacco anche gli $\underline{\check{C}}^p(\mathcal{U},F)$ sono fiacchi

e questo chiude ∎

<u>Recall</u> • $C^{\bullet,\bullet}$ complesso doppio: $C^{p,q}=0$ se $p<0$ o $q<0$

$d': C^{p,q} \to C^{p+1,q}$, $d'': C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ t.c. $d'd''=d''d'$

• $\mathrm{Tot}(C^{\bullet,\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$, $d = d' + (-1)^p d''$

<u>Oss</u> $(\ker(d'': C^{\bullet,0} \to C^{\bullet,0+1}), d') \subseteq \mathrm{Tot}(C^{\bullet,\bullet})$

<u>lemma</u> se $(C^{p,\bullet}, d'')$ esatto in grado >0 allora

$(\ker(d''), d') \subseteq \mathrm{Tot}(C^{p,\bullet})$ induce iso. in coom.

Sia F fascio, costruisco un complesso doppio

$$C^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}^q F) \text{ con } d' = \check{d},\ d'' = \delta_{\text{Godement}}$$

se fissiamo q ho complesso esatto in grado >0 perché $\mathcal{G}^q F$ fiacco.

se fissiamo p ho complesso $\prod_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} \mathcal{G}^\bullet F(U_{\alpha_0\dots\alpha_p})$

e la coomologia di questo è il prodotto delle

coomologie di $\mathcal{G}^\bullet F|_{U_{\alpha_0\dots\alpha_p}}$

in grado 0 da un lato calcolo Čech, dall'altro sheaf coom $\square$

Ex $X=S^1$, $\mathcal{U}=\{U_0,U_1\}$ con $U_0=S^1\setminus\{N\}$, $U_1=S^1\setminus\{S\}$

Supponiamo di sapere che $H^i(\mathbb{R},\mathbb{Z})=0$ per $i>0$

$U_0\cong U_1\cong\mathbb{R}$, $U_0\cap U_1\cong \mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
-1 & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(U_0,\mathbb{Z})\oplus\Gamma(U_1,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Gamma(U_{01},\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & \| & & \| & & & & \\
 & & \mathbb{Z}^2 & & (\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R},\mathbb{Z}) & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & (a,b) & \longmapsto & \mathbb{Z}^2 & & & & \\
 & & & & (b-a,b-a) & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \check{H}^0(S^1,\mathbb{Z})=\ker\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cong\mathbb{Z}$$

$$\check{H}^1(S^1,\mathbb{Z})=H^1(S^1,\mathbb{Z})=\operatorname{coker}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cong\mathbb{Z}$$

CARATT. EULERO

Thm (Grothendieck) Se X sp. Noeth e F fascio su X

$H^i(X,F)=0 \quad \forall i > \dim X$ "catene chiusi irrid."

Thm Se X schema affine, $F \in QCoh(X)$,

$H^i(X,F)=0 \quad \forall i \geq 0$

Cor Se X schema separato (cioè intersezioni di affini sia affine),

$\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ ric. di aperti affini, $F \in QCoh(X)$ allora

$$\check{H}^i(\mathcal{U},F)=H^i(X,F)$$

Ex $X=\mathbb{P}^1_R$, $\mathcal{U}=\{U_0,U_1\}$, $U_0=\operatorname{Spec} R[X_1/X_0]$, $U_1=\operatorname{Spec} R[X_0/X_1]$

$H^i(\mathbb{P}^1_R,\mathcal{O}(d))=?$ $\qquad U_{01}=\operatorname{Spec} R[t,t^{-1}]$, $t=\frac{X_1}{X_0}$

complesso di Čech:

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & 0 & & 1 & & \\ 0 & \to & \Gamma(U_0,\mathcal{O}(d))\oplus\Gamma(U_1,\mathcal{O}(d)) & \to & \Gamma(U_{01},\mathcal{O}(d)) & \to & 0 \end{array}$$

$$(s_0,s_1) \longmapsto s_1|_{U_{01}}-s_0|_{U_{01}}$$

$s_0=\frac{f_0}{X_0^i}$, $s_1=\frac{f_1}{X_1^i} \longmapsto \frac{f_0}{X_0^i}=\frac{f_1}{X_1^i} \rightsquigarrow$ polinomi se $s_{01} = \frac{f}{(x_0 x_1)^i}$ sta nell'immagine se è sia $\frac{g_1}{x_1^j}$ che $\frac{g_0}{x_0^j}$

$\rightsquigarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d)) \overset{0}{\leftarrow} R^{-d-1}$ come prima.

<u>Thm</u> $H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d)) = 0$ se $i = 1, \dots, n-1$ oppure $i > n$

$H^0(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d)) = R^{\binom{n+d}{n}}$ se $d \geq -n$

$H^n(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d)) = R^{\binom{-d-1}{n}}$ se $d \leq 0$

<u>Oss</u> $\binom{n+d}{n} = (-1)^n \binom{-d-1}{n}$

<u>Mnemonica</u>
- $\operatorname{rnk} H^n(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d)) = (-1)^n \binom{n-d-(n+1)}{n}$ se $d<0$
- $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{rnk} H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d)) = \operatorname{rnk} H^0(\mathcal{O}(d)) + (-1)^n \operatorname{rnk} H^n(\mathcal{O}(d))$

$$\begin{array}{c} \| \\ \binom{n+d}{n} \end{array}$$

<u>Cor</u> Un'ipersuperficie in $\mathbb{P}^n$ per $n \geq 2$ è geom. conn.

<u>Def</u> se $F \in \operatorname{Coh}(\mathbb{P}^n_K)$, $\chi(F) = \sum_{i=0}^{n} \dim_K H^i(\mathbb{P}^n_K, F)$

vedremo che è finita

<u>Prop</u> se $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ esatta di fasci coerenti su $\mathbb{P}^n_K$

allora $\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$

BÉZOUT

Siano $f_1, f_2 \in k[x_0,x_1,x_2] \setminus \{0\}$ polinomi omogenei di gradi d_1 e d_2 senza fattori comuni.

Siano $C_i = \operatorname{Proj}\left(\frac{k[x_0,x_1,x_2]}{(f_i)}\right) \subseteq \mathbb{P}^2_k$ curve

C_1 e C_2 non hanno comp. comuni $\rightsquigarrow$ $\dim C_1 \cap C_2 =$

$$= \dim \operatorname{Proj} \frac{k[x_0,x_1,x_2]}{(f_1,f_2)} = 0$$

$H^i(\mathbb{P}^2_k, i_* \mathcal{O}_{C_1\cap C_2}) = H^i(C_1 \cap C_2, \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2}) = 0$ se $i > 0$ e

$\dim H^0(\mathcal{O}_{C_1\cap C_2})$ "conta" il numero di punti di intersezione con molteplicità:

Oss $\dim_k H^0(\mathcal{O}_{C_1\cap C_2}) = \sum_{p \in C_1 \cap C_2} \ell(\mathcal{O}_{C_1\cap C_2, p})[k(p):k]$

Dim (Bézout)

Cerco una risoluzione di $\mathcal{O}_{C_1\cap C_2}$ come $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-mod:

Sia $A = \frac{k[x_0,x_1,x_2]}{(f_1,f_2)}$, $R = k[x_0,x_1,x_2]$.

L'idea è trovare una risoluzione di $A \in \mathrm{Mod}_R$ e fascificare

$$0 \to R \to R^2 \qquad h \mapsto (-hf_2, hf_1)$$

$$R^2 \to (f_1,f_2) \to 0, \qquad 0 \to (f_1, f_2) \to R \to A \to 0$$

$g_1 f_1 + g_2 f_2 = 0 \Rightarrow f_2 | g_1,\ f_1 | g_2$

$\rightsquigarrow \Leftrightarrow g_1 = -h f_2,\ g_2 = h f_1$

Abbiamo quindi: $0 \to R \to R^2 \to R \to A \to 0$, ora tenendo conto dei gradi

$$0 \to R(-d_1-d_2) \to R(-d_1) \oplus R(-d_2) \to R \to A \to 0$$

ora fascifico:

$$0 \to \mathcal{O}(-d_1-d_2) \to \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k} \to \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2} \to 0$$

$$\Rightarrow \dim_k H^0(\mathcal{O}_{C_1 \cap C_2}) = \chi(\mathcal{O}_{C_1 \cap C_2}) = 1 - \binom{2-d_1}{2} - \binom{2-d_2}{2} + \binom{2-d_1-d_2}{2}$$

$$= d_1 d_2 \qquad \square$$

AF + BG di Noether

Problema Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{P}^n_k$ ipersuperfici senza comp. comuni di gradi d_1 e d_2 di equazioni f_1, f_2.

Sia $f \in k[x_0, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ polinomio omogeneo di grado d.
$X = V_+(f) \subseteq \mathbb{P}^n_k$

(or 0 se $d < d_i$)

$f = g_1 f_1 + g_2 f_2$ con g_1, g_2 omog. di grado $d - d_1$ e $d - d_2$

significa $f \in (f_1, f_2)$, ovvero $(f) \subseteq (f_1, f_2)$.

In questo caso $X_1 \cap X_2 \subseteq X$ come schema

<u>Thm (AF+BG di Noether)</u> Se $n \geq 2$ e $X_1 \cap X_2 \subseteq X$ allora $f \in (f_1, f_2)$.

<u>Dim</u> Usiamo la successione

$$0 \to \mathcal{O}(-d_1-d_2) \to \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{X_1 \cap X_2} \to 0$$

spezzandola in $0 \to \mathcal{O}(-d_1-d_2) \to \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \to \mathcal{I} \to 0$

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{X_1 \cap X_2} \to 0$$

[<u>OSS</u> se $n \geq 3$, $H^1(\mathcal{I}) = 0 \Rightarrow H^0(\mathcal{O}_{X_1 \cap X_2}) = k \Rightarrow X_1 \cap X_2$ geom. conn.]

tensorizzo con $\mathcal{O}(d)$ (che è piatto perché loc. libero)

$$0 \to \mathcal{I}(d) \to \mathcal{O}(d) \to \mathcal{O}_{X_1 \cap X_2}(d) \to 0$$

se $f \in H^0(\mathcal{O}(d)) = k[x_0, \dots, x_n]_d$, f va a 0 in $H^0(\mathcal{O}_{X_1 \cap X_2}(d))$,

cioè $f \in H^0(\mathcal{I}(d))$, se e solo se lo è localmente,

che si traduce in $X_1 \cap X_2 \subseteq X$

ora tensorizzo l'altra sucessione

$$0 \to \mathcal{O}(d-d_1-d_2) \to \mathcal{O}(d-d_1) \oplus \mathcal{O}(d-d_2) \to \mathcal{I}(d) \to 0, \quad \mathcal{I}(d) \subseteq \mathcal{O}(d)$$

$$g_1, g_2 \longmapsto g_1 f_1 + g_2 f_2$$

$$\begin{array}{c} H^0(d-d_1) \oplus H^0(d-d_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(d)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap\!| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^0(\mathcal{O}(d)) \end{array}$$

Quindi il teorema si riduce a dire che

$$H^0(d-d_1) \oplus H^0(d-d_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(d)) \text{ è surgettiva,}$$

che è vero perché $H^1(\mathcal{O}(d-d_1-d_2)) = 0$ per $n \geq 2$ $\square$

Ex

$C_1 \cap C_2$ non è contenuto in una conica ($d=2$)

Se $f \in K[x_0,x_1,x_2]_3 \setminus \{0\}$ è eq. di una cubica che passa per quei punti, $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$

$\in K$

FORMULA DI PROIEZ.

Supponiamo $f: X \to Y$ separato con X, Y Noeth.

Abbiamo $f^*: QCoh(Y) \to QCoh(X)$ tale che

(1) Funtoriale (2) se f imm. aperta, $f^* = |_X$

(3) se $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $F = \tilde{N}$ allora $f^*\tilde{N} = \widetilde{N \otimes_B A}$

(4) $f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$

f^* ha aggiunta f_* e $f^*: H^0(Y, G) \to H^0(X, f^*G)$.

Nel caso affine $Y = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} A$, $G = \tilde{N}$, $f^*G = \widetilde{N \otimes A}$

$H^0(G) = N$, $H^0(f^*G) = N \otimes A$ e $f^*: H^0(G) \to H^0(f^*G)$
$$x \longmapsto x \otimes 1_A$$

Oss Se F fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli,

$$H^0(X, F) = F(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, F)$$
$$s \longleftrightarrow (a \mapsto as)$$

$$G(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y, G) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underbrace{f^*\mathcal{O}_Y}_{= \mathcal{O}_X}, f^*G) = f^*G(X)$$

Thm (Formula di proiezione) Sia $f: X \to Y$ morfismo di schemi noetheriani, E fascio loc. libero di rango finito su Y, $F \in QCoh(X)$. Allora esiste un iso. canonico in $QCoh(Y)$

$$E \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*F \cong f_*(f^*E \otimes_{\mathcal{O}_X} F)$$

Sketch Se $E \cong \mathcal{O}_Y^{\oplus r}$, entrambi i termini sono $(f_*F)^{\oplus r}$

l'isomorfismo risultante non dipende dalla scelta di isomorfismo di E con $\mathcal{O}_Y^{\oplus r}$.

Questo funziona su un ricoprimento banalizzante e sulle intersezioni si incollano perchè non ho dipendenza dall'iso $E|_U \cong \mathcal{O}_Y|_U^{\oplus r}$ $\square$

Ex Sia $i: X \subseteq \mathbb{P}^n_K$ chiuso. Allora
$$(i_* \mathcal{O}_X)(d) = i_*(i^* \mathcal{O}(d)),$$

quindi $H^i(X, i^*\mathcal{O}(d)) = H^i(\mathbb{P}^n_K, i_*\mathcal{O}_X(d))$

Più in generale, se $F \in Coh(X)$,
$$H^i(X, F \otimes i^*\mathcal{O}(d)) = H^i(\mathbb{P}^n_K, i_* F(d))$$

FASCI GEN. DA SEZ. GLOB.

Sia X noeth. $F \in Coh(X)$. Se $s \in H^0(F)$ allora s lo vedo come $s: \mathcal{O}_X \to F$.

sarebbe Π ma X noeth.

Se $\{s_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq H^0(F)$ abbiamo $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{O}_X \to F$
$$\{f_\alpha\} \mapsto \sum_{\alpha \in I} f_\alpha s_\alpha$$

Def Le sezioni $\{s_\alpha\}$ generano F se $\bigoplus \mathcal{O}_X \to F$ è surg.

in questo caso F è "generato da sezioni globali"

Oss Per noeth. F è gen. da sez. globali sse $\exists s_1, \dots, s_n \in H^0(F)$ che generano F (sto anche usando $F \in Coh$)

Oss Questo equivale a F quoziente di $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ per qualche n

Ex (1) Se X affine ogni fascio coerente è gen. da sezioni globali ($\tilde{M}$ è generato da $m_1, \dots, m_n$ per $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$)

(2) $\mathcal{O}_X$ è generato da sez. glob.

(3) $\mathcal{O}(d)$ per $\mathbb{P}^n_R$ è gen. da sez. glob. sse $d \geq 0$
e se $d \geq 0$ allora posso prendere $x_0^d, \dots, x_n^d$.

Thm (A di Serre) Se R anello noeth. e $F \in Coh(\mathbb{P}^n_R)$ allora $F(d)$ è gen. da sez. glob. per $d \gg 0$.

Dim $\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^n U_i \qquad U_i = \mathrm{Spec}\left(R\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(d)|_{U_i} & \Longrightarrow & F(d)|_{U_i} \cong F|_{U_i} \\ f \longmapsto f \cdot x_i^d & & s \otimes x_i^d \longleftarrow s \end{array}$$

Basta mostrare che $\forall\, s \in F(U_i)$, $s \otimes x_i^d \in F(d)(U_i)$ è nell'immagine di $H^0(F(d))$ per $d \gg 0$.

Noto questo pesco finiti generatori $\forall\, F(U_i)$, un $d \gg 0$ che va bene per ogni generatore e i generatori globali ora li ho.

Mostriamo il claim: Fisso $s \in F(U_i)$.
I passi sono: per $d \gg 0$ mostra

(1) se $j \neq i$ esiste $s_j \in F(d)(U_j)$ t.c. $s_j|_{U_{ij}} = s_i \otimes x_i^d|_{U_{ij}}$

(2) $s_j|_{U_{jk}} = s_k|_{U_{jk}}$ $\forall j,k$

Dettagli per ESERCIZIO

$\square$

Cor se R noeth., $X \to \operatorname{Spec} R$ proiettivo, $F \in \operatorname{Coh}(X)$
Allora $H^i(X,F)$ è un R-mod finito

Dim Sia $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ imm. chiusa. $H^i(X,F) = H^i(\mathbb{P}^n_R, i_*F)$
quindi SPG $X = \mathbb{P}^n_R$.

Sia $d \in \mathbb{Z}$ t.c. $F(d)$ è generato da sez. glob.

$$\underset{\text{esatta}}{\mathcal{O}^{\oplus r} \to F(d) \to 0} \quad \rightsquigarrow \quad 0 \to K \to \mathcal{O}(-d)^{\oplus r} \to F \to 0$$

La tesi è vera per $F = \mathcal{O}(-d)^{\oplus r}$ (conto)

$H^i(F) = 0$ se $i > n$.

$$H^n(\mathcal{O}(-d))^r \to H^n(F) \to \underset{0}{\underset{\|}{H^{n+1}(K)}} \Rightarrow H^n(F) \text{ quoziente di fin. gen.}$$

K è coh, quindi anche $H^n(K)$ è f.g..
Procedo con induzione in discesa $\square$

Fact Vale anche per $X \to \operatorname{spec} R$ proprio. La dim. si riconduce al caso proiettivo tramite il

Lemma (Chow) se R noeth, $X \to \operatorname{spec} R$ proprio
Allora $\exists\, X' \to X$ birazionale t.c. $X' \to \operatorname{spec} R$ proiett.

Cor (Thm. B di Serre) se R noeth, $F \in \operatorname{Coh}(\mathbb{P}^n_R)$
allora $H^i(\mathbb{P}^n_R, F(d)) = 0 \quad \forall d \gg 0 \quad \forall i > 0$

Dim se $e \gg 0$, $F(e)$ è generato in $H^0 \Rightarrow$

$$0 \to K \to \mathcal{O}(-e)^{\oplus r} \to F \to 0$$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H^n(\mathcal{O}(d-e)^{\oplus r})} \text{ se } d \geq e \to H^n(F(d)) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^{n+1}(K(d))}$$

procedo per induzione discendente $\square$

MORFISMI IN $\mathbb{P}^n_R$

Def Un fascio su uno schema X è invertibile se quasicoerente, loc. libero di rango 1.

Oss $f: Y \to X$ morfismo, L invertibile su X
(1) f^*L è invertibile
(2) se L_1, L_2 inv., $L_1 \otimes L_2$ inv.
(3) $L^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$ è inv.

Oss Se $f: X \to \mathbb{P}^n_R$ morfismo, $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)$ è invertibile e globalmente generato da $\{f^\#_X(x_i)\}_{i\in\{0,\dots,n\}}$

Def Se $(L, s_0, \dots, s_n)$ $n+1$-upla con L invertibile e $s_0, \dots, s_n \in L(X)$ che generano L allora
$$(L, s_0, \dots, s_n) \sim (L', s_0', \dots, s_n')$$
se $\exists\, \varphi: L \to L'$ iso. in $Sh(\mathcal{O}_X)$ t.c. $\varphi(s_i) = s_i'$ $\forall i$

Oss se φ esiste è unico.

Oss Dato $X \in Sch/R$
$$\mathrm{Hom}_{Sch/R}(X, \mathbb{A}^n_R) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(R[x_1, \dots, x_n], \mathcal{O}(X)) \leftrightarrow \mathcal{O}(X)^n$$

Oss Se $s, t \in L(X)$ per L inv. allora $\exists!\, f \in \mathcal{O}(X)$ t.c. $fs = t$. scriviamo $f = t/s$.

Thm Sia $X \in Sch/R$, allora abbiamo corrispondenza

$$\{(L, s_0, \dots, s_n) \text{ su } X\} \longleftrightarrow Hom_{Sch/R}(X, \mathbb{P}^n_R)$$

Dim Da $f: X \to \mathbb{P}^n_R$ prendo $(f^*\mathcal{O}(1), f^*x_0, \dots, f^*x_n)$.

Considero ora $(L, s_0, \dots, s_n)$

supponiamo che s_i generi, cioè $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot s_i} L$ iso.,

ovvero $s_i(x) \in L \otimes k(x) \setminus \{0\}$ $\forall x$, allora ottengo

$\left(\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}\right) \in \mathcal{O}(X)^n$, cioè una mappa $X \to U_i$.

Otteniamo $\{(L, s_0, \dots, s_n) \mid s_i \text{ genera}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}^n_R \\ & U_i \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd} \right\}$

Se ora $(L, s_0, \dots, s_n)$ generale, $X_i = X \setminus supp\left(coker\left(\mathcal{O}_X \xrightarrow{s_i} L\right)\right)$

si ha che $s_i|_{X_i}$ genera $L|_{X_i}$ e quindi una mappa

$$X_i \xrightarrow{f_i} U_i \subseteq \mathbb{P}^n_R$$

Per concludere noto che $f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$

[sembbe ok capire perché $f^* x_i \longleftrightarrow s_i$ e perché $f^*\mathcal{O}(1) = L$.]

$\square$

Ex Se $s_0, \dots, s_N$ è una base di $H^0(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}(d))$ si ha che $s_0, \dots, s_N$ generano $\mathcal{O}(d)$.

Abbiamo un morfismo $\mathbb{P}^n_R \longrightarrow \mathbb{P}^N_R$

Scegliamo $s_0, \dots, s_N$ dati da monomi per qualche ordine

Affermo che $\mathbb{P}^n_R \to \mathbb{P}^N_R$ è imm. chiusa (emb. di Veronese di grado d)

Se $i \in \{0, \dots, n\}$, $f^{-1}\Big(\overbrace{(\mathbb{P}^N_R)_{y_{j_i}}}^{V_i}\Big) = U_i \subseteq \mathbb{P}^n_R$

dove j_i è l'indice t.c. $s_{j_i} = x_i^d$

gli $f^* y_j$ contengono gli $\frac{x_k}{x_i}$, che generano $R[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$

Quindi $U_i \xhookrightarrow{f} V_i$ imm. chiusa

$\Rightarrow \mathbb{P}^n_R \xhookrightarrow{f} \mathbb{P}^N_R$ immersione localmente chiusa.

ma $\mathbb{P}^n_R$ è proprio $\Rightarrow f$ è imm. chiusa.

Ex $X = \mathbb{P}^m_R \times \mathbb{P}^n_R$ (prodotto di R-schemi)

Voglio $\mathbb{P}^m_R \times \mathbb{P}^n_R \longrightarrow \mathbb{P}^N_R$.

$L = pr_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_R}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_R \times \mathbb{P}^n_R}} pr_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)$, $s_{ij} = pr_1^* x_i \otimes pr_2^* y_j$

Affermo che le s_{ij} generano L:

$\mathcal{U}_i = (\mathbb{P}^m_R)_{x_i}$, $V_j = (\mathbb{P}^n_R)_{y_j}$, allora s_{ij} genera $L|_{\mathcal{U}_i \times V_j}$

$\left(\mathcal{O} \overset{x_i}{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1),\ \mathcal{G} \overset{y_j}{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \Rightarrow \mathcal{O} \cong \mathcal{G} \otimes \mathcal{O} = L \right)$

Ottengo morfismo $\mathbb{P}^m_R \times \mathbb{P}^n_R \to \mathbb{P}^N_R$ (embedding di Segre)

Anche questo è imm. chiusa (ESERCIZIO) $\square$

FLAT BASE CHANGE

Thm Sia $X \in Sch/R$ separato q.c., $F \in Qcoh(X)$

$R \to R'$ omo. piatto. $X_{R'} = \operatorname{spec} R' \otimes_{\operatorname{spec} R} X$

Allora $F_{R'} = pr_2^* F \in Qcoh(X_{R'})$

$$H^i(X_{R'}, F_{R'}) \cong R' \otimes_R H^i(X, F)$$

Dim Se $X = \operatorname{Spec} A$ affine $F = \tilde{M}$, $X_{R'} = \operatorname{Spec} A \otimes_R R'$

$F_{R'} = \widetilde{M \otimes_R R'}$

e il teorema vale

(anche senza aver usato R' piatto su R!)

costr i complessi di Čech hanno $\oplus$ e non $\prod$

Sia ora $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}$ ric. di aperti affini finito di X

$\mathcal{U}_{R'} = \{(\mathcal{U}_i)_{R'}\}$ ancora ric. affine di $X_{R'}$

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F) \otimes_R R' \cong \check{C}^\bullet(\mathcal{U}_{R'}, F_{R'})$$

esercizio, usa che F è Qcoh.

se $R \to R'$ piatto, $H^i(R' \otimes_R \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)) = R' \otimes_R H^i(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F))$
(commuta con i vari quozienti, nuclei ecc.) $\square$

GRADO E POLY. HILB.

Sia $F \in Coh(\mathbb{P}^n_K)$. Voglio definire $\deg F$.

Oss Se $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ imm. chiusa, $\deg_{\mathbb{P}^n_K} X = \deg i_* \mathcal{O}_X$

Thm se $F \in Coh(\mathbb{P}^n_K)$, $\begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ t \longmapsto \chi(F(t)) \end{array}$ è un polinomio $\mathbb{Q}[t]$, detto polinomio di Hilbert di F
cioè $\exists\, H_F \in \mathbb{Q}[t]$ t.c. $H_F(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ e
$H_F(t) = \chi(F(t))$ $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, il grado di H_F è la dimensione di supp F e il coeff. di testa è della forma $\frac{d}{r!}$ con $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$. d è il grado di F

Dim sia $\pi = pr_2 : \mathbb{P}^n_{\bar{K}} = \operatorname{Spec} \bar{K} \times \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$.

$$\operatorname{supp} F_{\bar{K}} = \pi^{-1}(\operatorname{supp} F) = \operatorname{Spec} \bar{K} \times \operatorname{Supp} F.$$

inoltre $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\bar{K}}}(1)$.

Inoltre per flat base-change $\chi(F(t)) = \chi(F_{\bar{K}}(t))$

Quindi SPG $K = \bar{K}$!

Procediamo per induzione su $r = \dim \operatorname{supp} F$

$\boxed{r=0}$ $r=0$ ($\Leftrightarrow F \neq 0$ e $\operatorname{supp} F$ un po' di punti chiusi)

$\Leftrightarrow F = \bigoplus_{p \in \operatorname{supp}} i_{p*} F_p$ e $\mathcal{O}(t)|_{U_p} \cong \mathcal{O} \Rightarrow F(t) \cong F \Rightarrow \chi(F(t))$ cost.

quindi $\chi(F(t)) = \chi(F)$ e $H^i(F) = 0 \quad \forall i > 0$ (perché $\dim \operatorname{supp} = 0$)

$\Rightarrow \chi(F(t)) = \dim H^0(F) \cdot t^0$

$\boxed{r-1 \Rightarrow r}$ sia $H \subseteq \mathbb{P}^n_K$ iperpiano. Otteniamo

$$\begin{array}{ll} & 0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0 \\ \otimes \mathcal{O}(t) & \\ & 0 \to \mathcal{O}(t-1) \to \mathcal{O}(t) \to \mathcal{O}_H(t) \to 0 \\ \otimes F & \\ & F(t-1) \to F(t) \to (F \otimes \mathcal{O}_H)(t) \to 0 \end{array}$$

Noto che $\operatorname{supp}(F \otimes \mathcal{O}_H) = H \cap \operatorname{supp} F$ $\left(\begin{array}{l} \supseteq \text{ ovvio} \\ \subseteq \text{ Nakayama} \end{array}\right)$

Se H non contiene nessuna comp. irrid. di $\operatorname{supp} F$

allora $\dim \operatorname{supp}(F \otimes \mathcal{O}_H) = r-1$ sto usando $K = \bar{K}$ (campo infinito) per pescare H buono.

$\Rightarrow \chi(F \otimes \mathcal{O}_H(t))$ è polinomio di grado $r-1$ con

coeff. direttore $\frac{d}{(r-1)!}$ con $d > 0$

Se potessi assumere che $F(t-1) \to F(t)$ è iniettiva (cioè che $F(-1) \to F$ iniettiva) allora abbiamo concluso perché

$$\chi(F \otimes \mathcal{O}_H(t)) = \chi(F(t)) - \chi(F(t-1))$$

Possiamo farlo per opportuno H!!!

[Ricordo che i punti associati di F sono
$\mathrm{Ass}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F) = \{ p \in \mathbb{P}^n_K \mid \mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_p}$ è un primo associato di $F_p\}$
e che $\mathrm{Ass}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F) \cap U = \mathrm{Ass}_{\mathcal{O}(U)}(F(U))$ per U affine.]

I punti associati di supp F stanno in $\mathrm{Ass}_{\mathcal{O}_X}(F)$

Poiché F coerente, $\mathrm{Ass}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F) \cap U$ è finito

$\Rightarrow \mathrm{Ass}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F)$ è finito per q. compt. di $\mathbb{P}^n$

Gli zero-divisori in $F(U)$ sono gli elementi che stanno in qualche primo associato.

Sia $H \subseteq \mathbb{P}^n_K$ iperpiano con equazione $f = 0$ $\left(f \in K[x_0, \dots, x_n]_1 \setminus \{0\}\right)$

Nota che $F(-1) \xrightarrow{\cdot f} F$ e questa è iniettiva sse f non è mai zero divisore nelle spighe del supporto $\Leftrightarrow$ H scansa i punti associati

$\square$

Oss Se non volessi fare il discorso sui primi associati sarebbero casini: perché in $0 \to K(t) \to F(t-1) \to F(t) \to (F \otimes \mathcal{O}_H)(t) \to 0$
$\chi(K(t))$ potrebbe rompere i termini dominanti nell'induzione

Ex $X = \mathrm{Proj}\left(\frac{K[x_0,\dots,x_n]}{(f)}\right)$ con $f \in K[x_0,\dots,x_n]_d \setminus \{0\}$

$$0 \to \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to i_*\mathcal{O}_X \to 0$$

$$\hookrightarrow 0 \to \mathcal{O}(t-d) \to \mathcal{O}(t) \to i_*\mathcal{O}_X(t) \to 0$$

$$\Rightarrow H_X(t) = \chi(i_*\mathcal{O}_X(t)) = \chi(\mathcal{O}(t)) - \chi(\mathcal{O}(t-d)) =$$

$$= \binom{n+t}{n} - \binom{n+t-d}{n} = \dots = \frac{d}{(n-1)!} t^{n-1} + \text{roba di grado minore}$$

Ex $\mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^N_K$ con $N = \binom{n+d}{n} - 1$ (emb. Veronese).

Voglio $\chi((i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})(t))$ ... come?

<u>Recall: Formula di proiezione</u>

$$(i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t) = i_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \otimes i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)\right) = i_* i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)$$

Quindi $\chi((i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})(t)) = \chi(i_* i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)) =$

$$= \chi(i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)) \underset{\uparrow}{=} \chi(\underbrace{\mathcal{O}(d) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(d)}_{t \text{ volte}}) = \chi(\mathcal{O}(dt))$$

$$i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = \mathcal{O}(d) \quad + \quad f^*(F_1 \otimes F_2) = f^*F_1 \otimes f^*F_2$$

$$\chi(\mathcal{O}(dt)) = \binom{dt+n}{n}$$

$$\frac{d^n}{n!} t^n + \text{altro}$$

Quindi il grado di Veronese è d^n

Ex $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xhookrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^N$ con $N = mn+n+m$, grado?

Più in generale, $X \subseteq \mathbb{P}^m$, $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ sottoschemi chiusi di gradi d ed e, $X \times Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ che grado ha?

$L = pr_1^* \mathcal{O}(1) \otimes pr_2^* \mathcal{O}(1)$ su $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, cioè

$L = i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$

scriviamo $\mathcal{O}_X(1) = i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$

$\mathcal{O}_Y(1) = i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$

Vogliamo calcolare la coomologia di

$$i^* L = pr_1^* \mathcal{O}_X(1) \otimes pr_2^* \mathcal{O}_Y(1)$$

Più in generale, dati $X, Y \in Sch/K$,

$F \in QCoh(X)$, $G \in QCoh(Y)$, com'è fatto

$$H^i(X \times Y, pr_1^* F \otimes pr_2^* G)\ ?$$

Vogliamo mettere in relazione $\chi(X \times Y, pr_1^* \mathcal{O}_X(t) \otimes \cdots)$

con $\chi(X, \mathcal{O}_X(t))$ e $\chi(Y, \mathcal{O}_Y(t))$

Thm (Formula di Künneth) Se $X, Y \in Sch/K$ separati q.c. $F \in QCoh(X)$, $G \in QCoh(Y)$. Allora

$$H^p(X \times Y, pr_1^* F \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} pr_2^* G) = \sum_{i+j=p} H^i(X, F) \otimes_K H^j(Y, G)$$

Cor Se X, Y propri su K e F, G coerenti allora

$$\chi(X\times Y, pr_1^*F\otimes pr_2^*G) = \chi(X,F)\chi(Y,G)$$

Nel caso $X\subseteq\mathbb{P}^m$, $Y\subseteq\mathbb{P}^n$ di gradi d ed e

$X\times Y\subseteq\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n\subseteq\mathbb{P}^N$, siano $r=\dim X$, $s=\dim Y$

$$\chi(X,\mathcal{O}_X(t)) = \frac{d}{r!}t^r + \text{roba.}$$

$$\chi(Y,\mathcal{O}_Y(t)) = \frac{e}{s!}t^s + \text{roba.}$$

$$\chi(X\times Y, pr_1^*\mathcal{O}_X(t)\otimes pr_2^*\mathcal{O}_Y(t)) = \frac{de}{r!s!}t^{r+s} + \text{roba.}$$

Quindi il grado di $X\times Y\subseteq\mathbb{P}^N$ è $\boxed{de\binom{r+s}{r}}$

In particolare il grado di $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ in $\mathbb{P}^N$ è $\binom{m+n}{m}$

Se $F\in Coh(\mathbb{P}^n_K)$, $r=\dim \operatorname{supp} F$ considero

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}&\to\mathbb{Z}\\ t&\mapsto\chi(F(t))\end{aligned}$$

$r=-\infty \iff F=0 \Rightarrow \chi(F(t))=0$

$r=0$ ($\iff F\neq 0$ e $\operatorname{supp}F$ un po' di punti chiusi)

$\iff F=\bigoplus_{p\in\operatorname{supp}} i_{p*}F_p$ e $\mathcal{O}(t)|_{U_p}\cong\mathcal{O}$

$\Longrightarrow F(t)\cong F \Rightarrow \chi(F(t))$ cost.

quindi $\chi(F(t)) = \chi(F)$ e $H^i(F) = 0$ $\forall i > 0$
(perché dim supp $= 0$)

$\Rightarrow \chi(F(t)) = \dim H^0(F) \cdot t^0$

$\Rightarrow \deg F = \dim H^0(F)$

sempre con dim supp $F = 0$

se $F = i_* \mathcal{O}_X$, il grado di X in $\mathbb{P}^n$ è $\dim H^0(\mathcal{O}_X)$, che è "il numero di punti contati con molteplicità")

Def se $p \in X$, $\mu_p(X) = \text{length}(\mathcal{O}_{X,p})$ è la molteplicità di X in p.

Ex $\deg X = \sum_{p \in X} \mu_p(X) [K(p) : K] = \sum_{p \in X} \mu_p(X) \deg p$

$$= \sum_{p \in X} \ell(\mathcal{O}_{X,p}) \dim_K K(p)$$

Fatto $F \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n_K)$, $r = \dim F$, se $V_1, \dots, V_m$ sono le comp. irrid. di supp F di dimensione r (non tutte!)

$\mu_{V_i}(F) = \ell_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, \xi_i}}(F_{\xi_i})$ con $\xi_i \in V_i$ pt. generico

Allora $\deg F = \sum_{i=1}^{m} \mu_{V_i}(F) \deg V_i$

PICARD

Se X sp. Loc. An, i fasci loc. liberi di rango 1 a meno di iso. Formano un gruppo con $\otimes$, il gruppo di Picard

$$[L_1][L_2]=[L_1\otimes L_2],\quad 0=[\mathcal{O}_X],\quad -[L]=[L^\vee]$$

Ex Sia X schema, allora i fasci invertibili sono QCoh (e Coh se X Noeth)

Sia $X=\operatorname{Spec} A$ con A un PID

$$\operatorname{Pic}(X)=0$$

- chi è $\operatorname{Pic}\mathbb{P}^n_K$, $n\geq 1$, K campo.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \operatorname{Pic}\mathbb{P}^n_K \\ 1 &\longmapsto [\mathcal{O}(1)] \end{aligned}$$

è omo. iniettivo
in realtà è un iso (non ovvio)

Oss Se $f: Y\to X$ morfismo, L invertibile su X allora f^*L è invertibile. Ottengo

$$f^*:\operatorname{Pic}(X)\to\operatorname{Pic}(Y)$$

Ex $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$? Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} &\to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1) \\ (d,e) &\longmapsto [pr_1^*\mathcal{O}(d)\otimes pr_2^*\mathcal{O}(e)] \end{aligned}$$

Fissiamo $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1 \times \infty \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, bend right, "id_{\mathbb{P}^1}"] \arrow[ddr, bend right, "\infty"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "pr_1"] \arrow[dd, bend left, "pr_2"] \\ & \mathbb{P}^1 \\ & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

a tiro indietro $pr_1^* \mathcal{O}(d) \otimes pr_2^* \mathcal{O}(e)$ tramite i

ottengo $\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(e)_\infty = \mathcal{O}(d)$

similmente per l'altra componente, quindi

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ è iniettiva!

GRUPPO DELLE CLASSI

Sia X noeth. integro e normale.

$$X^{(1)} := \{ p \in X \mid \dim \mathcal{O}_{X,p} = 1 \} \longleftrightarrow \{ V \subseteq X \mid \text{chiusi irrid. di codim. } 1 \}$$

Se $p \in X^{(1)}$, $\mathcal{O}_{X,p} \subseteq K(X)$ è DVR, quindi definisce

$$v_p : K(X)^* \to \mathbb{Z} \quad \text{valutazione}$$

Se X normale e $U \subseteq X$ aperto non vuoto

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ f \in K(X) \mid v_p(f) \geq 0 \ \forall p \in U^{(1)} = X^{(1)} \cap U \}$$

Def Il gruppo dei divisori $\operatorname{Div}(X)$ è il gruppo abeliano libero su $X^{(1)}$.

$X^{(1)} \subseteq \operatorname{Div}(X)$ sono i divisori primi. $\forall D \in \operatorname{Div}(X)$

$D = \sum_{i=1}^{r} d_i V_i$, $V_1, \dots, V_r$ divisori primi distinti

D è effettivo ($D \geq 0$) se $d_i \geq 0 \ \forall i$

Se $f \in K(X)^*$, definisco $\operatorname{div} f = \sum_{p \in X^{(1)}} v_p(f) p$

Prop Se $f \in K(X)^*$ allora $\{p \in X^{(1)} \mid v_p(f) \neq 0\}$ è finito.

Dim $\exists\, U$ aperto di X nonvuoto t.c. $f \in \mathcal{O}^*(U)$
(f è definita su U_1, f^{-1} su U_2, $U = U_1 \cap U_2$)
allora $v_p(f) = 0 \ \forall p \in U$.

$$\{p \in X^{(1)} \setminus U\} \longleftrightarrow \{V \subseteq X \setminus U \text{ irrid. di codim. } 1\}$$
$$\cap\!\!|$$
finito perché X noeth. $\longrightarrow \{\text{comp. irrid. di } X \setminus U\}$

$\square$

Oss $f, g \in K(X)^*$, $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} g$

Oss $f \in K(X)^*$ allora $f \in \mathcal{O}(X) \Longleftrightarrow \operatorname{div} f \geq 0$

$f \in \mathcal{O}(X)^* \Longleftrightarrow \operatorname{div} f = 0$

Quindi abbiamo $K(X)^* \xrightarrow{\operatorname{div}} \operatorname{Div}(X)$ con nucleo $\mathcal{O}^*(X)$.

Def Il gruppo delle classi è $Cl(X) = \operatorname{coker} \operatorname{div}$

Def L'immagine di div sono i divisori principali

Thm sia A dominio noeth. normale. TFAE

(1) $Cl(A) := Cl(\operatorname{Spec} A) = 0$

(2) I primi di altezza 1 in A sono principali

(3) A è UFD

$\Updownarrow$ per questo non serve normale

Dim (3) $\Rightarrow$ (2) "facile"

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia $a \in A$ non invertibile. $(a) \subseteq \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ primo minimale su (a) $\underset{HIS}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1 \Rightarrow \mathfrak{p} = (b)$ con b primo

$\Rightarrow a = b \cdot c$ con a irrid. e b primo $\Rightarrow a$ e b associati

$\Rightarrow a$ è primo

(1) $\Rightarrow$ (2) sia $\mathfrak{p} \subseteq A$ primo di altezza 1.

Poiché $Cl(A) = 0$, $\mathfrak{p} = \operatorname{div} f$ con $f \in K^* := \operatorname{Frac} A^*$

se $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} A)^{(1)}$, $v_{\mathfrak{q}}(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \\ 0 & \text{se } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p} \end{cases} \Rightarrow f \in A$

(mai valut. < 0)

anzi, $f \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p} = \{g \in A \mid v_{\mathfrak{p}}(g) > 0\}$

se $g \in \mathfrak{p}$, $v_{\mathfrak{q}}(g/f) \geq 0 \quad \forall \mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} A)^{(1)}$

$\Rightarrow g \in (f) \Rightarrow \mathfrak{p} = (f)$

(2) $\Rightarrow$ (1) Facile. $[\mathfrak{p} = (p) \Rightarrow \mathfrak{p} = \operatorname{div} p]$

$\square$

Cor Se K campo $Cl(\mathbb{A}^n_K)=0$ perché $K[X_1,\dots,X_n]$ è UFD

Thm Sia X con le ipotesi sopra, $U\subseteq X$ aperto non vuoto $V_1,\dots,V_r$ comp. irrid. di $X\setminus U$ che hanno codim $=1$

Allora c'è omo. naturale

$$res_U : \begin{aligned} Cl(X) &\to Cl(U) \\ [P] &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } P\notin U \\ [P] & \text{se } P\in U \end{cases} \end{aligned}$$

surgettivo con nucleo $\langle [V_1],\dots,[V_r]\rangle$.

Inoltre, se $f\in K(X)^*=K(U)^*$, $\operatorname{div}_U f=(\operatorname{div} f)|_U$

Dim suriettività ovvia.

Sia $[D]\in \ker(Cl(X)\to Cl(U))$, cioè $D|_U=\operatorname{div}_U f$

$D-\operatorname{div} f\in\langle [V_1],\dots,[V_r]\rangle$ (perché gli altri si cancellano) $\square$

Cor $Cl(\mathbb{P}^n_K)\cong\mathbb{Z}$, generato dalla classe di un iperpiano.

Dim Sia $H\leq\mathbb{P}^n_K$ iperpiano.

$\mathbb{P}^n_K\setminus H\cong\mathbb{A}^n_K$ e $Cl(\mathbb{A}^n_K)=0 \implies$

$$Cl(\mathbb{P}^n_K)=\langle \mathbb{P}^n_K\setminus H\rangle=\langle [H]\rangle$$

se $d\in\mathbb{Z}$ e $d[H]=0$ allora $\exists f\in K(\mathbb{P}^n_K)^*$ tale

$\operatorname{div} f = dH$, allora $f|_{\mathbb{A}^n} \in \mathcal{O}^*(\mathbb{A}^n) = K \Rightarrow \operatorname{div} f = 0$
$\Rightarrow d = 0$ $\square$

Cor $Cl(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generato da $H_1 \times \mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^m \times H_2$ con $H_1 \subseteq \mathbb{P}^m$ e $H_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ iperpiani

Dim Quelli sono schemi integri. Se li levo trovo $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^{m+n}$ con gruppo classi nullo. No relazioni per motivo simile. $\square$

Oss Sia $f \in K[x_0, \dots, x_n]_d$ irriducibile e sia $V = \operatorname{Proj}\left(\frac{K[x_0, \dots, x_n]}{(f)}\right)$. V è un divisore primo

Se $H \subseteq \mathbb{P}^n_K$ iperpiano allora $[V] = d[H]$, infatti $\operatorname{div}\left(f/x_0^d\right) = [V] - d[H]$ $\quad$ ($H = V(x_0)$ per esempio)

Cor Se $f \in K[x_0, \dots, x_n]_d$ irrid. Allora

$$Cl\left(K[x_0, \dots, x_n]_{(f)}\right) = \mathbb{Z}/(d)$$

Dim $X = \mathbb{P}^n_K$, $Cl(X) \twoheadrightarrow Cl(X_f)$ ha nucleo generato da $[V(f)] = d[H] \Rightarrow$

$$Cl(K[x_0, \dots, x_n]_{(f)}) = Cl(X_f) = \frac{Cl(X)}{\langle d[H] \rangle} \cong \mathbb{Z}/(d) \quad \square$$

MAPPA $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$

Def Sia $\xi = \mathrm{Spec}\, K(X) \to X$ il pt. generico e sia L invertibile su X. $s \in L_\xi \setminus \{0\}$ è una sezione razionale non nulla. $L_\xi \cong \mathcal{O}_{X,\xi}$ perché invertibile

Se $p \in X^{(1)}$, $p \in U$ intorno aperto banalizzante per L.
Definisco $v_p(s) = v_p(\varphi_\xi(s))$ dove $\varphi : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}|_U$

Eser (1) $v_p(s)$ non dipende da U e φ
($\varphi_\xi(s)$ cambia con moltipl. per invertibile)

(2) $\{p \in X^{(1)} \mid v_p(s) \neq 0\}$ è finito

Ex $X = \mathbb{P}^n_K$, $f \in K[x_0, \dots, x_n]_d$ irrid. $V \subseteq \mathbb{P}^n_K$ ipersuperficie associata
$f \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{O}(d)_\xi$
Allora $\mathrm{div}\, f = V$

Sia $s \in L_\xi \setminus \{0\}$. Se $p \in X^{(1)}$, $p \in U$ come prima

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_U &\xrightarrow{\sim} L|_U \\ f &\longmapsto f s_0 \\ s/s_0 &\longleftarrow\!\shortmid\; s \end{aligned} \qquad v_p(s) \geq 0 \iff s \in L_p$$

Prop $s \in H^0(X, L) \subseteq L_\xi \iff v_p(s) \geq 0 \;\; \forall p \in X^{(1)}$

Dim $v_p(s) \geq 0 \iff s \in L_p \;\forall p \Rightarrow s \in H^0(U, L|_U) \;\forall$ ricoprim banalizzante e sulle spighe forma $\rightsquigarrow s \in H^0(X,L)$ $\square$

Thm Sia X noeth. norm. integro, allora esiste
$$\mathrm{Pic}(X) \subseteq Cl(X).$$
[Se X è regolare allora vale uguaglianza.]

Dim Definiamo un gruppo $\widetilde{\mathrm{Pic}}(X)$ dove gli elementi sono <u>classi di iso.</u> di coppie (L,s), L fascio invertibile, $s \in L_\xi \setminus \{0\}$

$$[(L_1,s_1)]+[(L_2,s_2)]=[(L_1\otimes L_2, s_1\otimes s_2)]$$

$$0=[(\mathcal{O}_X,1)], \quad -[(L,s)]=[(L^\vee,s^\vee)]$$

dove $s^\vee \in L_\xi^\vee = \mathrm{Hom}_{K(X)}(L_\xi, K(X))$ è la trasposta, cioè $s^\vee(s)=1$.

$$\mathrm{div}: \widetilde{\mathrm{Pic}}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \text{ è omo.:}$$
$$[(L,s)] \longmapsto \mathrm{div}\, s$$

dati (L_1,s_1) e (L_2,s_2), $\mathrm{div}(s_1\otimes s_2)=\mathrm{div}\, s_1+\mathrm{div}\, s_2$

Abbiamo omo. $\widetilde{\mathrm{Pic}}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ surgettivo.
$$[(L,s)] \longmapsto [L]$$

Il nucleo è $\{[(\mathcal{O}_X,s)]\} \cong K(X)^* / \mathcal{O}^*(X)$ tiene conto di "classi di iso"

Abbiamo diag. comm. con righe esatte

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}^*(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K(X)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathrm{Pic}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}^*(X) \arrow[r] & K(X)^* \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Div}(X) \arrow[r] & \mathcal{Cl}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Quindi otteniamo $\mathrm{Pic}(X) \to \mathcal{Cl}(X)$.

$\mathrm{Pic}(X) \to \mathcal{Cl}(X)$ inj. sse $\widetilde{\mathrm{Pic}}(X) \to \mathrm{Div}(X)$ inj.

supponiamo di avere (L, s) t.c. $\mathrm{div}\, s = 0$

Ma $\mathrm{div}\, s = 0 \Rightarrow s \in H^0(X, L) \Leftrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} L$

e $\mathcal{O}_X \to L$ è iso. $\Rightarrow (L, s) \cong (\mathcal{O}_X, 1)$ $\square$

Cor Un fascio invertibile su $\mathbb{P}^n_K$ è iso. a $\mathcal{O}(d)$

Dim $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_K) \hookrightarrow \mathcal{Cl}(\mathbb{P}^n_K) \cong \mathbb{Z}$ e

$$[\mathcal{O}(1)] \rightsquigarrow [(\mathcal{O}(1), h)] \rightsquigarrow [\mathrm{div}\, h] = [H]$$

e $[H]$ genera, quindi è anche surg. $\square$

DIVISORI DI CARTIER

Def Un divisore di Cartier su X è un divisore localmente principale, cioè se esiste $\{U_i\}$ ric. ap.

t.c. $D|_{U_i} = \operatorname{div} f$ per qualche $f \in K(U_i)^*$

I divisori di Cartier formano un sottogruppo
$$CDiv(X) \subseteq Div(X)$$

Prop L'immagine di $\widetilde{Pic}(X) \to Div(X)$ è $CDiv(X)$

In particolare $Pic(X) = \dfrac{CDiv(X)}{\operatorname{Im} \operatorname{div}} \subseteq Cl(X)$

Dim Se $D = \operatorname{div} s$ per $[(L,s)] \in \widetilde{Pic}(X)$ allora chiaramente D è loc. principale.

Ora ci chiediamo:

COME SI RICOSTRUISCE $[(L,s)]$

A PARTIRE DA $D \in CDiv(X)$?

Se $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$, $t \in L_\xi \supseteq L(U)$, allora
$$t \in L(U) \Longleftrightarrow \operatorname{div} t|_U \geq 0 \ (\text{oppure } t = 0)$$

D'altronde ho $L_\xi \cong \mathcal{O}_{X,\xi} = K(X)$ con iso.
$$s \longleftrightarrow 1$$

Se $t \in L_s \setminus \{0\}$, $\operatorname{div}(t) = \operatorname{div}(t/s) + \operatorname{div}(s) = \operatorname{div}(t/s) + D$

Cioè, $L(U) \longleftrightarrow \{ f \in K(X) \mid f = 0 \text{ oppure } (\operatorname{div} f + D)|_U \geq 0 \}$

$$s \longleftrightarrow 1 = s/s$$

Dunque definisco $\operatorname{Div}(X) \longrightarrow \widetilde{\operatorname{Pic}}(X)$

$$D \longmapsto [(\mathcal{O}_X(D), 1)]$$

dove $\mathcal{O}_X(D)(U) = \{ f \in K(X) \mid f = 0 \text{ oppure } (\operatorname{div} f + D)|_U \geq 0 \}$

Se $D = \operatorname{div} \varphi$ per $\varphi \in K(X)^*$, $\mathcal{O}_X(D)(U) = \{ f \in K(X)^* \mid f = 0$ or $\operatorname{div}(f\varphi)|_U \geq 0 \}$

$$f \longmapsto f\varphi$$

$$\simeq \mathcal{O}_X(D)$$

Quindi $\mathcal{O}_X(\operatorname{div}(\varphi)) \simeq \mathcal{O}_X$

Se D è localmente principale e $D|_U$ principale

$\mathcal{O}_X(D)|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D)$ è invertibile.

Oss $\operatorname{div} 1 = D$ con 1 visto come sezione di $\mathcal{O}_X(D)$

Dim Se $\{U_i\}$ t.c. $D|_{U_i} = \operatorname{div} f_i|_{U_i}$, $\mathcal{O}_X(D)(U_i) = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_X(U_i)$

$\rightsquigarrow \operatorname{div}(1)|_{U_i}$ come sez. raz. di $\mathcal{O}_X(D)$ è $\operatorname{div} f_i|_{U_i} = D|_{U_i}$ $\forall i$ ■ $\square$

Oss $\operatorname{Pic}(X) = \mathcal{C}\ell(X) \Longleftrightarrow \widetilde{\operatorname{Pic}}(X) = \operatorname{Div}(X) \Leftrightarrow \operatorname{CDiv}(X) = \operatorname{Div}(X)$

Cioè ogni $p \in X^{(1)}$ è localmente principale, ossia

$\exists$ ric. aperto $\{U_i\}$ t.c. $\forall U_i \neq \emptyset$ $\exists f_i \in K(U_i)^* = K(X)^*$ t.c.

$$\operatorname{div} f_i|_{U_i} = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin U_i \\ p & \text{se } p \in U_i \end{cases}$$

Se $p \in U_i$, la condizione è $\operatorname{div} f_i|_{U_i} = P$.
Se $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ allora la condizione è $p = (f_i)$

Dunque $\operatorname{Pic}(X) = \operatorname{Cl}(X) \iff \forall V \subseteq X$ irrid. di codim 1 il fascio di ideali $\mathcal{I}_V \subseteq \mathcal{O}_X$ è localmente principale, (cioè invertibile)

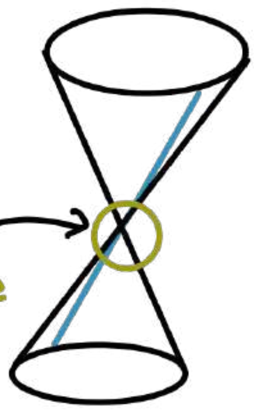
Lemma Se R dominio locale noeth., $f \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Se $R/(f)$ è regolare allora anche R è regolare

Cor Se X integro noeth. normale, $V \subseteq X$ chiuso t.c. $\mathcal{I}_V$ localmente principale e $p \in V$ t.c. V regolare in p allora X regolare in p.

EX $X = \operatorname{Spec} \dfrac{k[x,y,z]}{(x^2 - yz)} \subseteq \mathbb{A}^3_k$ sia $L = \operatorname{Spec} \dfrac{k[x,y,z]}{(x,z)} \subseteq X$

L NON È un divisore di Cartier

Se $\mathcal{I}_L$ fosse localmente principale, siccome $\mathcal{I}_L$ è regolare nell'origine, X dovrebbe esserlo, ma non lo è.



$\Rightarrow \operatorname{Pic}(X) \subsetneq \operatorname{Cl}(X)$ e $[L] \in \operatorname{Cl}(X) \setminus \operatorname{Pic}(X)$.

Nota che $X \setminus L = X_z$ $\quad (x^2 \in (z))$

ma $\left(\frac{K[x,y,z]}{(x^2-yz)}\right)_z \cong K[x,z]_z \rightsquigarrow X\setminus L \cong \mathbb{A}^2 \setminus V(z)$

$\rightsquigarrow Cl(X\setminus L)=0$ $\qquad L \cong \mathbb{A}^1_K$ irrid.

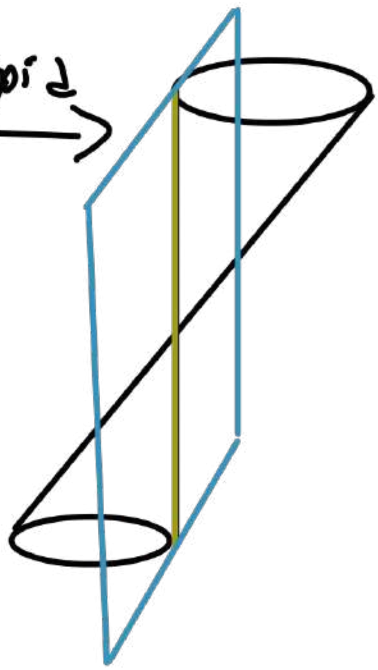
aperto di $\mathbb{A}^2$

$\rightsquigarrow Cl(X) = \langle [L] \rangle.$

$[L]\neq 0$ perché $L \notin CDiv(X) \ni 0$.

$z \in K(X)^*$. $\operatorname{div} z = d[L]$ perché $V(z)=L_{red}$

con $d=2$ $\xrightarrow{\text{intersezione doppia}}$



si può dire bene algebricamente.

Quindi $Cl(X)=\mathbb{Z}/(2)$
$Pic(X)=0$

Def Uno schema integro noeth. è localmente fattoriale se $\mathcal{O}_{X,p}$ è UFD $\forall p \in X$

Ex Uno schema noeth. regolare è loc. fattoriale.

Oss Se $X=\operatorname{Spec} A$ con A dominio normale regolare, X loc. fatt. sse A_p UFD $\forall p$, ma questo NON implica A UFD

Ex $A = k[x_0, \dots, x_n]_{(f)}$, $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ irrid.

A regolare $\Rightarrow$ loc. fatt. MA $Cl(A) = \mathbb{Z}/(d) \Rightarrow$ A non è UFD

Thm Se R anello locale regolare, $f \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, se $A = R/(f)$ è regolare al di fuori di un chiuso $C \subseteq \operatorname{Spec} A$ di codimensione almeno 3 allora A è fattoriale

Thm Se X integro noeth. normale allora
$$\operatorname{Pic}(X) = Cl(X) \iff X \text{ loc. fattoriale}$$

Dim $\operatorname{Pic}(X) = Cl(X) \iff V \subseteq X$ integro chiuso codim 1 è loc. princip.

$\iff \forall p \in V$, $I_{V,p} \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$ è principale $\equiv$

$\equiv$ I primi di altezza 1 in $\mathcal{O}_{X,p}$ sono principali

$\overset{\uparrow}{\iff}$ $\mathcal{O}_{X,p}$ UFD.

varie ipotesi su X

$\square$

Sia $X \in Sch/K$ proprio, integro, $\dim X = 1$ e normale

($\Rightarrow$ regolare perché normale + dim 1)

Se $p \in X^{(1)}$ allora p è un punto chiuso

$\rightsquigarrow K(P)/K$ è finita.

Posso definire $\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\sum_{P \in X^{(1)}} n_P P \longmapsto \sum_{P \in X^{(1)}} n_P [K(P):K]$$

Thm Se $f \in K(X)^*$, $\deg \operatorname{div} f = 0$

Dim Rivedremo poi $\square$

Oss Otteniamo $\deg \, Cl(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$

Ex (1) $X = \mathbb{P}^1$, $Cl(X) \cong \mathbb{Z}$ generato da un punto razionale $P \in \mathbb{P}^1(K)$.

$$\deg : \begin{array}{l} Cl(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ P \longmapsto 1 \cdot [K:K] = 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \deg \text{ è un iso.}$$

(2) $X \subseteq \mathbb{P}^2_K$ conica senza punti razionali

$$\left[K = \mathbb{R}, \quad X = \operatorname{Proj}\left(\frac{\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]}{(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)} \right) \right]$$

se $P \in X^{(1)}$, $K(P) = \mathbb{C}$

e altri punti chiusi ci sono.

$\Longrightarrow \deg : Cl(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ha immagine $2\mathbb{Z}$

(3) In generale vedremo che $\deg \, Cl(X) \to \mathbb{Z}$ non è iniettiva.

DIFFERENZIALI

Recall se X varietà liscia ho fascio Ω_X localmente libero di rango d

Vogliamo versione in Geo. Alg.

ALGEBRA (CASO AFFINE)

Def sia R anello, A una R-algebra, $M \in Mod_A$

Una A-derivazione è $A \xrightarrow{D} M$ R-lineare

t.c. $D(fg) = fD(g) + gD(f) \quad \forall f, g \in A$

Oss se $D : A \to M$ soddisfa la regola di Leibniz allora D lineare sse manda costanti in 0

Ex se X varietà C^∞, $R = \mathbb{R}$, $A = C^\infty(X)$ allora

$$d : C^\infty(X) \to \Omega(X) \quad \text{è una } \mathbb{R}\text{-derivazione}$$
$$f \longmapsto df$$

Ex $A = R[X]$, $D : A \to A$
$$f(x) \mapsto f'(x)$$

Abbiamo un funtore

$$\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A \qquad R\text{-derivazioni } A \to M$$
$$M \longmapsto \mathrm{Der}_R(A,M)$$

$\mathrm{Der}_R(A,M)$ è un A-modulo

Thm Il funtore è rappresentabile, cioè dati R, A esiste una R-derivazione universale $A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R}$ cioè $\forall D \in \mathrm{Der}_R(A,M)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega_{A/R} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Dim Se F è l'A-modulo libero sugli elementi di A, cioè $f \in A \leftrightarrow \bar{f} \in F$ elt. di base

$$\Omega_{A/R} := F \big/ \langle \overline{f+g} - \bar{f} - \bar{g},\ \overline{rf} - r\bar{f},\ \overline{fg} - f\bar{g} - g\bar{f} \rangle \qquad \left(df = [\bar{f}]\right)$$

$\square$

R, A, M, $A \oplus M$ è R-algebra con $\forall m,n \in M$ $mn = 0$

$$A \hookrightarrow A \oplus M \to A \qquad \text{se } D : A \to M \text{ omo di grp. abel}$$
$$a \longmapsto (a,0) \qquad \phi_D : A \to A \oplus M$$
$$(a,m) \longmapsto a \qquad a \mapsto a + Da$$

Prop $D: A \to M$ è R-deriv. sse $\phi_D : A \to A \oplus M$ è omo. di R-algebre

Dim $\Rightarrow$ R-lineare perché D è R-lineare

$$ab + D(ab) = ab + bDa + aDb = (a + Da)(b + Db)$$

$\Leftarrow$ R-lineare ok. $D(ab) = ab + D(ab) - ab = (a + D(a))(b + D(b)) - ab$

$$= aD(b) + bD(a) + \underbrace{D(a)D(b)}_{=0} = aD(b) + bD(a)$$

$\square$

Sia $\mu : A \otimes_R A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$, $I = \operatorname{Ker} \mu$.

spezzamento

$$0 \to I/I^2 \subseteq \frac{A \otimes_R A}{I^2} \to A \to 0 \qquad 0 \to A \to \frac{(A \otimes_R A)}{I^2}, \quad a \mapsto [a \otimes 1]$$

(2° teo. isomorfismo)

Oss $\dfrac{A \otimes_R A}{I^2} = A \oplus I/I^2$ come R-algebre

(questo è il motivo per cui dividiamo per I^2)

L'altra sezione $a \mapsto [1 \otimes a]$ corrisponde sotto l'iso. con $A \oplus I/I^2$ di prima a

$$a \longmapsto a + \underbrace{[1 \otimes a - a \otimes 1]}_{da :=} \text{ "} = [1 \otimes a] + a - [a \otimes 1] \text{"}$$

$A \to I/I^2$, $a \mapsto [1 \otimes a - a \otimes 1]$ è una R-derivazione per la proposizione

Thm $\Omega_{A/R} \longrightarrow I/I^2$ è un isomorfismo.
$df \longleftrightarrow [1\otimes f - f\otimes 1]$

Dim Data R-derivazione $D: A \to M$

$\exists!$ omo. di R-algebre
$$A\otimes_R A \to A\oplus M$$
$$a\otimes 1 \longmapsto a$$
$$1\otimes a \longmapsto a+Da$$

inoltre I^2 va in 0 quindi ottengo unico

$\varphi: I/I^2 \to M$ con $\varphi[1\otimes f - f\otimes 1] = Df$ $\square$

Ex $A = R[x_1,\dots,x_n]$

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{A/R} \xrightarrow{\varphi} M & \longleftrightarrow & \begin{array}{c} R[x_1,\dots,x_n] \\ \shortparallel \\ A \longrightarrow A\oplus M \\ f \longmapsto f+\varphi(df) \end{array} \\ \text{omo. di } A\text{-mod} & & \text{omo. di } R\text{-algebre} \end{array}$$

Quindi dati $m_1,\dots,m_n \in M$ $\exists!$ omo di A-moduli

$\Omega_{A/R} \to M$ t.c. $\varphi(dx_i) = m_i$

Cioè $\Omega_{A/R}$ è il modulo libero $\bigoplus dx_i A$

Ex $d: R[x_1,\dots,x_n] \to \Omega_{A/R} = A\,dx_1 \oplus \dots \oplus A\,dx_n$
$$f \longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

EX Se $S \subseteq A$ sistema moltiplicativo

$$\Omega_{S^{-1}A/R} = S^{-1}\Omega_{A/R}$$

Idea L'enunciato equivale a: Se M è un $S^{-1}A$-modulo allora ogni derivazione $A \to M$ si estende in modo unico a derivazione $S^{-1}A \to M$

$$A \to A \oplus M \to S^{-1}A \oplus M \rightsquigarrow S^{-1}A \to S^{-1}A \oplus M$$
$$a + m \longmapsto \tfrac{a}{1} + m$$

$\square$

Quoziente per ideale

Se A è R-alg., $I \trianglelefteq A$, $B = A/I$ allora

$\exists !$ omo $\Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$ perché $A \to B \xrightarrow{d_B} \Omega_{B/R}$

$df \longmapsto d[f]$ è una derivazione

Otteniamo $B \otimes_A \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$ perché $\Omega_{B/R}$ è B-modulo.

$\frac{\Omega_{A/R}}{I\Omega_{A/R}} \cong$

Noto ora $I \subseteq A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R} \to B \otimes \Omega_{A/R}$

perché $d[f] = 0$ per $f \in I$

$I \longrightarrow B \otimes \Omega_{A/R}$ e $1 \otimes df \longmapsto 0$ in $\Omega_{B/R}$

$f \longmapsto 1 \otimes df$

Se $g, f \in I$, $gf \mapsto 1 \otimes (g\,df - f\,dg) = 0$ in $B \otimes_A \Omega_{A/R}$ perché $g, f \in I$.

Dunque ho $I/I^2 \longrightarrow B \otimes \Omega_{A/R}$ mappa R-lineare

$[f] \longmapsto 1 \otimes df$

In realtà è A-lineare e B-lineare

Thm La successione di B-moduli

$$I/I^2 \longrightarrow B\otimes_A \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R} \to 0$$ è esatta.

Dim Basta dimostrare che $\forall$ B-modulo M è esatta

$$0\to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) \to \underbrace{\mathrm{Hom}_B(B\otimes_A \Omega_{A/R}, M)}_{=\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_B(I/I^2, M)}_{\mathrm{Hom}_A(I, M)}$$

cioè $0\to \mathrm{Der}_R(B,M)\to \mathrm{Der}_R(A,M)\to \mathrm{Hom}_A(I,M)$

$$D \longmapsto D\circ(A\to B)$$

iniettiva ovvio.

$$\Delta \longmapsto \Delta|_I$$

E una der. da A viene da B sse ristretta a I fa 0 per prop. univ. del quoziente $\square$

Ex $A = R[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_r)$ $\quad R[\underline{x}] = R[x_1,\dots,x_n]$, $I=(f_1,\dots,f_r)$

I/I^2 è A-mod. generato da $[f_i]$

$$I/I^2 \longrightarrow A\otimes_{R[\underline{x}]} \Omega_{R[\underline{x}]/R} \to \Omega_{A/R}\to 0$$

$$A\otimes_{R[\underline{x}]}\Omega_{R[\underline{x}]/R} = A\otimes_{R[\underline{x}]} \bigoplus dx_i R[\underline{x}] = \bigoplus dx_i A$$

$$I/I^2 \longrightarrow A\otimes_{R[\underline{x}]}\Omega_{R[\underline{x}]/R} \rightsquigarrow \Omega_{A/R} = \frac{A\,dx_1\oplus\cdots\oplus A\,dx}{\langle df_1,\dots,df_r\rangle}$$

$$[f_i]\longmapsto [df_i] = \Big[\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\Big]$$

Cor Se A è R-alg. f.g. allora $\Omega_{A/R}$ è A-mod. f.g.

Ex K campo, $R=K$, $A=K[x]/(x^n-a)$ $\quad a\in K$, $n\in\mathbb{Z}$, $n>0$

$$\Omega_{A/K} = \frac{A\,dx}{\langle d(x^n-a)\rangle} = A/(nx^{n-1}) = \frac{K[x]}{(x^n-a,\, nx^{n-1})}$$

Se $\operatorname{char} K \nmid n$, $\Omega_{A/K} = \begin{cases} K[x]/(x^{n-1}) & \text{se } a=0 \\ 0 & \text{se } a\neq 0 \end{cases}$

Se $\operatorname{char} K \mid n$, $\Omega_{A/K} \cong A$ è libero

Ex Sia $A=\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2)$ $\rightsquigarrow$  geometricamente

$$\Omega_{A/\mathbb{C}} = \frac{A\,dx \oplus A\,dy}{\langle x\,dx + y\,dy\rangle}$$ se $p\in \operatorname{Max}(A)$

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{A/\mathbb{C}}\otimes_A k(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{k(p)\,dx \oplus k(p)\,dy}{\langle p_x\,dx + p_y\,dy\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{se } p\neq (x,y) \\ 2 & \text{se } p=(x,y) \end{cases}$$

Thm Se K campo, A una K-algebra, $p\in \operatorname{Spec} A$, $k(p)=K$ $\quad (p=\ker(A\to K))$

Allora, ricordando che ho

$$\underset{\left(= \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \text{ in } A_p\right)}{p/p^2} \longrightarrow k(p)\otimes_A \Omega_{A/K} \to \underset{=0}{\Omega_{K/K}} \to 0$$

Quindi: $p/p^2 \twoheadrightarrow k(p)\otimes_A \Omega_{A/K}$. In realtà è un isomorfismo!

$$[f] \longmapsto [df]$$

Dim considero $A \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$, $f \mapsto [f - f(p)]$ e questa è una K-derivazione

Quindi c'è $\Omega_{A/K} \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$, $df \mapsto [f - f(p)]$ e questa

fattorizza per $K(p) \otimes \Omega_{A/K}$ chiaramente

$$\begin{aligned} K(p) \otimes \Omega_{A/K} &\longrightarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \\ [df] &\longmapsto [f - f(p)] \end{aligned}$$

è una inversa del lato giusto

$(f \mapsto df \mapsto f - f(p) = f - 0 = f)$

$\square$

Cambiamento di base

Prop Se $R \to R'$ omo. anelli, A una R-alg. $A' = R' \otimes_R A$

Allora $\Omega_{A'/R'} \cong R' \otimes_R \Omega_{A/R}$

Sketch Uso Yoneda. Se M' è A'-modulo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A'}(\Omega_{A'/R'}, M') \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Hom}_{R'}(R' \otimes_R \Omega_{A/R}, M') \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
 & \mathrm{Hom}_R(\Omega_{A/R}, M') \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\mathrm{Der}_{R'}(A', M') \arrow[d, phantom, "\subseteq" rotate=-90] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{cerco un iso.}"'] & \mathrm{Der}_R(A, M') \arrow[d, phantom, "\subseteq" rotate=-90] \\
\mathrm{Hom}_{R'}(A', M') \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_R(A, M')
\end{tikzcd}$$

Per concludere basta vedere che derivazioni vanno in derivazioni tramite l'iso.

$$\mathrm{Hom}_{R'}(R'\otimes_R A, M') \cong \mathrm{Hom}_R(A, M')$$ $\square$

Considero ora $R \to A \xrightarrow{\varphi} B$ omo. di anelli.
Voglio collegare $\Omega_{A/R}$, $\Omega_{B/R}$ e $\Omega_{B/A}$

Thm C'è una succ. esatta

$$B\otimes \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R} \to \Omega_{B/A} \to 0$$

$$b\otimes df \longmapsto b\,d\varphi(f)$$

$$db \longmapsto db$$

Dim Se M è B-modulo $\mathrm{Der}_A(B,M) \subseteq \mathrm{Der}_R(B,M)$
In realtà abbiamo succ. esatta

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathrm{Der}_A(B,M) & \to & \mathrm{Der}_R(B,M) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{Der}_R(A,M) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) & & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) & & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \\ & & & & \| \\ & & & & \mathrm{Hom}_B(B\otimes_A \Omega_{A/R}, M) \end{array}$$ $\square$

Ex $R=K$, $A=K[t]$, $B=K[x]$, $A\to B$
$t \longmapsto x^n - a$

$$\begin{array}{ccccc} B\otimes_A \Omega_{A/K} & \to & \Omega_{B/K} & \to & \Omega_{B/A} \to 0 \\ \| & & \| & & \\ B\,dt & & B\,dx & & \end{array}$$

$$dt \longmapsto d(x^n - a) = nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \Omega_{B/A} = \frac{K[x]}{(nx^{n-1})} \begin{cases} K[x]/(x^{n-1}) & \text{se char}\, K \nmid n \\ K[x] & \text{se char}\, K \mid n \end{cases}$$

Eser Se $I \trianglelefteq A$, $B = A/I$ allora $\Omega_{B/A} = 0$

e abbiamo $I/I^2 \to B \otimes_A \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R} \to 0$

$[f] \longmapsto 1 \otimes df$

esatta

DIFFERENZIALI

$\boxed{\text{GLOBALIZZIAMO}}$

Def Sia $X \to S$ morfismo di schemi e $F \in QCoh(X)$

$\mathcal{O}_X \xrightarrow{D} F$ è una S-derivazione se la composizione $f^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X \to F$ è nulla, è additiva e vale la regola di Leibniz.

Thm $\exists$ S-derivazione naturale $d: \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ dove $\Omega_{X/S} \in QCoh(X)$. Questo fascio è t.c.

(1) se $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$, $\Omega_{X/S} = \widetilde{\Omega_{A/R}}$

(2) se $U \subseteq X$ e $V \subseteq S$ aperti t.c. $f(U) \subseteq V$ allora
$\Omega_{U/V} = \Omega_{X/S}|_U$

Volendo potremmo definire $\Omega_{X/S}$ incollando gli $\widetilde{\Omega_{A/R}}$ su ricoprimenti, ma c'è un altro modo:

<u>Recall</u> se $R \to A$ omo. t.c. $I = \ker(A \otimes_R A \to A)$ allora $\Omega_{A/R} = I/I^2$ e $d: A \to \Omega_{A/R}$

$f \mapsto [1 \otimes f - f \otimes 1]$

vogliamo globalizzare questa idea:

Def se $Y \xhookrightarrow{i} X$ è imm. localmente chiusa e $U \subseteq X$ aperto t.c. $Y \subseteq U$ chiuso allora definiamo il fascio conormale come

$$\mathcal{C}_Y X = \mathcal{I}_U / \mathcal{I}_U^2 = i^* \mathcal{I}_U$$

($\mathcal{I}_U$ è il fascio di Y come chiuso $Y \subseteq U$)

Nota che non dipende da U

Prop se X e Y regolari allora $\mathcal{C}_Y X$ è localmente libero di rango pari a $\operatorname{codim}_Y X$

Dim SPG $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $Y \subseteq X$ chiuso $B = A/I$. $\mathcal{C}_Y X = \widetilde{I/I^2}$.

se $q \in Y$, cioè $q \subseteq B$, corrisponde a $p \subseteq A$

$B_q = A_p / I_p$, A_p e B_q sono regolari, quindi esiste un sistema di parametri $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{m}_p$ t.c. le immagini $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathfrak{m}_q$ sono un sistema di parametri e $I_p = (a_{n+1}, \dots, a_m)$

<u>ESER</u> $I_p / I_p^2 = I_p \otimes_A B_q$ è libero come B_q-modulo con base $[a_{n+1}], \dots, [a_m]$.

[ha a che fare con il fatto che $gr_{\mathfrak{m}_p} A \cong k(p)[x_1, \dots, x_n]$]

$\square$

<u>Def</u> Se $X \xrightarrow{f} S$ è morfismo definiamo
$$\Omega_{X/S} = \mathcal{C}_X(X \times_S X).$$

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X/S}$$
$$g \longmapsto [pr_2^* g - pr_1^* g]$$

(nota che se g viene da S allora $pr_2^* g = pr_1^* g$ perché siamo in $X \times_S X$)

<u>Oss</u> Se $X = \operatorname{Spec} A$, $S = \operatorname{Spec} R$ allora $\Omega_{X/S} \overset{\text{def.}}{=} I/I^2 \overset{\text{visto}}{=} \Omega_{A/R}$ dove $I = \ker(A \otimes_R A \to A)$

<u>Proprietà</u> (1) Se $S \to S'$ allora abbiamo
$$\Omega_{X/S'} \to \Omega_{X/S}$$
perché $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ è una S'-derivazione

- se $S \to S'$ è imm. loc. chiusa allora
$$\Omega_{X/S} \longrightarrow \Omega_{X/S'} \text{ è un isomorfismo.}$$

(funzioni su S vengono localmente da funzioni su S')

(2) Se $S = \operatorname{Spec} K$, $X \to \operatorname{Spec} K$ morfismo, $p \in X(K)$

allora $\Omega_{X/K} \otimes_{\mathcal{O}_X} \underset{\underset{K}{\shortparallel}}{K(p)} \cong \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ (visto per affine e quindi in generale)

($\Omega_{X/K}$ è il fascio dei differenziali o cotangente)

[In generale $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \to \Omega_{X/K} \otimes K(p) \to \Omega_{K(p)/K} \to 0$
quindi per avere $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = \Omega_{X/K} \otimes K(p)$ serve almeno $\Omega_{K(p)/K} = 0$]

(3) Se $X \to S$ è loc. tipo finito e S è loc. noeth. allora $\Omega_{X/S}$ è coerente.

(4) Se $X \xrightarrow{f} S$ e $S' \to S$ sono morfismi

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

, allora $\Omega_{X'/S'} \cong pr_2^* \Omega_{X/S}$

(localmente il cambio di base nel caso affine)

(5) Se $Y \to X \to S$ morfismi allora ho successione esatta

$$f^* \Omega_{X/S} \to \Omega_{Y/S} \to \Omega_{Y/X} \to 0$$

(visto nel caso affine, incolla)

(6) se $Y \subseteq X$ imm. chiusa e $\mathcal{I}_Y$ il fascio di ideali ho una successione esatta

$$\mathcal{I}_Y|_Y = \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to \underset{\substack{\| \\ \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}}}{\Omega_{X/S}|_Y} \to \Omega_{Y/S}$$

$$[f] \longmapsto df|_Y$$

Thm Se $X \to \operatorname{Spec} K$ è liscio di dimensione n allora $\Omega_{X/K}$ è loc. libero di dim n

Dim Consideriamo il caso $K = \overline{K}$:

Basta dire che $\Omega_{X/K} \otimes_{\mathcal{O}_X} K(p) \cong K^n$ per ogni $p \in X(K)$.

[se vale $\forall p$ ok. In realtà bastano i punti chiusi = razionali, esercizio di algebra]

Ma $\Omega_{X/K} \otimes_{\mathcal{O}_X} K(p) \cong \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ e $\underset{\text{liscio}}{\dim X = n}$

$\dim_K \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = n$ ✓

Consideriamo ora K generale:

Notiamo che $X \to \operatorname{Spec} K$ è liscio sse $X_{\overline{K}} \to \operatorname{Spec} \overline{K}$ è liscio. Sia $X_{\overline{K}} \xrightarrow{pr} X$ la proiezione, che è affine e fedelmente piatta.

$\Omega_{X_{\bar{K}}/\bar{K}} \cong pr^* \Omega_{X/K}$ e questo è libero di rango n.

Questo basta per fedele-piattezza $\square$

SUCCESSIONE DI EULERO

Vogliamo descrivere $\Omega_{\mathbb{P}^n_R/R}$ per R anello.

Thm c'è una successione esatta

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n_R/R} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \to 0$$

$$(f_0, \dots, f_n) \longmapsto x_0 f_0 + \dots + x_n f_n$$

omog. di grado -1

Dim Per comodità sia $R = K$ campo.

Per definire $\Omega_{\mathbb{P}^n_{K/K}} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1}$ cerco una derivazione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1}$.

Una sezione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}$ è localmente data da un $f \in K(x_0, \dots, x_n)$ funzione razionale omogenea di grado 0.

Poniamo $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in \mathcal{O}(-1)^{n+1}$, che è una derivazione

Otteniamo $\Omega_{\mathbb{P}^n_K/K} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1}$

$$df \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

se f è omogenea di grado 0 sappiamo (proprietà di Eulero)

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+\dots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \implies \Omega_{\mathbb{P}^n_K/K}\to \mathcal{O}(-1)^{n+1}\to\mathcal{O}$$

è nulla.

Mostriamo l'esattezza:

Restringendo a U_i abbiamo $U_i=\operatorname{Spec}\underbrace{K\left[\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right]}_{A:=}=$

$=\operatorname{Spec}K[t_1,\dots,t_n]$

$t_j=\frac{x_j}{x_i}$, $t_i=1$

$$\Omega_{\mathbb{P}^n_{K}/K}\big|_{U_i}\cong A\,dt_1\oplus\dots\oplus A\,dt_n$$

$$0\to A\,dt_1\oplus\dots\oplus A\,dt_n\to A\frac{1}{x_i}^{n+1}\to A$$

$$dt_j\mapsto\left(\frac{\partial t_j}{\partial x_0},\dots,\frac{\partial t_j}{\partial x_n}\right)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & & j & & \end{array}\\ \left(0,\dots,0,\underbrace{-\frac{x_j}{x_i^2}}_{=-\frac{t_j}{x_i}},0,\dots,0,\frac{1}{x_i},0,\dots,0\right)\end{array}$$

$$=\frac{1}{x_i}\left(0,\dots,0,\underset{\substack{\wedge\\ i}}{-t_i},0,\dots,0,\underset{\substack{\wedge\\ j}}{1},0,\dots,0\right)$$

$$\left(\frac{\varphi_0}{x_i},\dots,\frac{\varphi_n}{x_i}\right)\mapsto\sum_{i=0}^n t_i\varphi_i$$

È facile vedere che questa è esatta.

surgettività di $\mathcal{O}(-1)^{n+1}\to\mathcal{O}$ chiara $\square$

Ex $n=1$, $0\to\Omega_{\mathbb{P}^1_K/K}\to\mathcal{O}(-1)^2\to\mathcal{O}\to 0$

$(f_0,f_1)\mapsto x_0f_0+x_1f_1$

C'è una successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \to \mathcal{O}(-1)^2 \to \mathcal{O} \to 0$$

$$u \longmapsto (x_1 u, -x_0 u)$$

$$(u_0, u_1) \longmapsto x_0 u_0 + x_1 u_1$$

Quindi $\Omega_{\mathbb{P}^1_k/k} \cong \mathcal{O}(-2)$

Altra dimostrazione: siccome $\mathbb{P}^1_k$ è liscio di dimensione 1, $\Omega_{\mathbb{P}^1_k/k}$ è isomorfo a $\mathcal{O}(d)$ per qualche $d \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1_k)$. su $U_0 = \mathrm{Spec}\, k\left[\frac{x_1}{x_0}\right] = \mathrm{Spec}\, k[t]$

Considero $dt \in \Omega_{\mathbb{P}^1_k/k}(U_0)$ sezione razionale.

$\mathrm{div}(dt) = d\,\infty$ perché dt regolare su U_0.

allora scriviamo dt in U_1: $s = \frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{t}$

$dt = d\frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}ds \leadsto \mathrm{div}(dt) = -2\,\infty$

$\leadsto \Omega_{\mathbb{P}^1_k/k} \cong \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(-2)$

Vedremo che $\Omega_{\mathbb{P}^2_k/k}$ non è della forma $\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(b)$

Problema esistono fibrati loc. liberi su $\mathbb{P}^n$ di rango 2 per $n\geq 5$ non del tipo $\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(b)$?

Congettura: per $n\geq 7$ no.

DET. E FASCIO CANON.

Def Se E è fascio di $\mathcal{O}_X$-mod su spazio loc. anulato X, $\forall d\geq 0$ possiamo definire $\Lambda^d E$, fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli con una d-forma alternante

$$E\times\cdots\times E \longrightarrow \Lambda^d E$$
$$(v_1,\dots,v_d)\longmapsto v_1\wedge\dots\wedge v_d$$

Possiamo realizzare $\Lambda^d E$ come quoziente di $E^{\otimes d}$ imponendo alternanza.

Oss se $U\subseteq X$ aperto, $(\Lambda^d E)|_U = \Lambda^d(E|_U)$

Oss se E è loc. libero di rango r, $\Lambda^d E$ è loc. libero di rango $\binom{r}{d}$.

Se $E|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus r}$, dove l'iso. è $\mathcal{O}_U^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} E|_U$
$(f_1, \dots, f_r) \mapsto f_1 e_1 + \dots + f_r e_r$

Allora $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq r$ è base di $\Lambda^d E|_U$.

Def $\Lambda^r E$ è un fascio invertibile, il determinante.
Scriviamo $\det E = \Lambda^r E$

Def Se $f: E \to E$ allora l'omo. indotto $\det(E) \to \det(E)$ corrisponde alla moltiplicazione per $\underline{\det(f)}$

Def Se $X \to \operatorname{Spec} K$ liscio di dimensione pura n.
Il determinante di $\Omega_{X/K}$, scritto $\omega_{X/K} = \det \Omega_{X/K}$ è il fascio canonico.

Thm Se $0 \to E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \to 0$ succ. esatta di fasci loc. liberi, allora c'è un iso. canonico

$$\det(E) \cong \det(E') \otimes_{\mathcal{O}_X} \det(E'')$$

Dim Sia $r' = \operatorname{rnk} E'$, $r'' = \operatorname{rnk} E''$, $r = r' + r'' = \operatorname{rnk} E$.

Vogliamo $\Lambda^r E \cong \Lambda^{r'} E' \otimes \Lambda^{r''} E''$

Voglio definire omo. $\Lambda^{r'} E' \otimes \Lambda^{r''} E'' \to \Lambda^r E$,

ossia $\Lambda^{r'} E' \times \Lambda^{r''} E'' \to \Lambda^r E$ bilineare, ossia una funzione r-lineare $\underbrace{E' \times \cdots \times E'}_{r'} \times \underbrace{E'' \times \cdots \times E''}_{r''} \to \Lambda^r E$

che sia alternante nelle prime r' e nelle ultime r'' entrate.

C'è una funzione r-lineare

$$\underbrace{E' \times \cdots \times E'}_{r'} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{r''} \to \Lambda^r E$$

$$(v_1', \dots, v_{r'}', v_1, \dots, v_{r''}) \mapsto \alpha(v_1') \wedge \cdots \wedge \alpha(v_{r'}') \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r''}$$

dipende solo da $v_1', \dots, v_{r'}', \beta(v_1), \dots, \beta(v_{r''})$ perché se $\tilde{v}_1 = v_1 + w$ con $\beta(w) = 0$

allora $w = \alpha(z)$ e dato che $\operatorname{rnk} E' = r'$

$$\alpha(v_1') \wedge \cdots \wedge \alpha(v_{r'}') \wedge (v_1 + \alpha(z)) \wedge \cdots \wedge v_{r''} =$$
$$= \alpha(v_1') \wedge \cdots \wedge \alpha(v_{r'}') \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r''} +$$
$$\underbrace{\alpha(v_1') \wedge \cdots \wedge \alpha(v_{r'}') \wedge \alpha(z)}_{= 0 \text{ perché } \operatorname{rnk} E' = r'} \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{r''}$$

sia $e_1', \dots, e_{r'}'$ base locale di E',
$\alpha(e_1'), \dots, \alpha(e_{r'}')$ si estende con $e_1, \dots, e_{r''}$ a base locale di E t.c. $\beta(e_1), \dots, \beta(e_{r''})$ base locale di E''.

Allora $(e_1' \wedge \cdots \wedge e_{r'}') \otimes (\beta(e_1), \dots, \beta(e_{r''}))$ è base locale di $\det(E') \otimes \det(E'')$. Questa va a finire in $\alpha(e_1') \wedge \cdots \wedge \alpha(e_{r'}') \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{r''}$ tramite la mappa, che è base locale di $\det E$

$\square$

CALCOLIAMO $\omega_{\mathbb{P}^n/K}$

Succ. di Eulero: $0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n/K} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O} \to 0$

$$\det(\mathcal{O}(-1)^{n+1}) \overset{\text{induz:}}{\cong} \mathcal{O}(-1)^{\otimes(n+1)} = \mathcal{O}(-n-1).$$

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}(-1)^{k+1} \to \mathcal{O}(-1)^{k} \to 0$$

$\cong$

$$\omega_{\mathbb{P}^n/K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} = \omega_{\mathbb{P}^n/K}$$

$$\rightsquigarrow \omega_{\mathbb{P}^n_K/K} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(-n-1)$$

Prop $\Omega_{\mathbb{P}^n} := \Omega_{\mathbb{P}^n_K/K}$ non è somma di fasci invertibili se $n \geq 2$

Dim Se $\Omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_n)$. Per succ. di Eulero

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O} \to 0$$

$$\rightsquigarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}) \subseteq H^0(\mathcal{O}(-1))^{n+1} = 0 \Rightarrow a_1, \dots, a_n < 0$$

Anzi, $0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \to \mathcal{O}^{n+1} \to \mathcal{O}(1) \to 0$

perchè la mappa è unica.

$$\Rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)) \subseteq \operatorname{Ker}\left(\begin{array}{c} K^{n+1} \to H^0(\mathcal{O}(1)) \\ e_i \longmapsto x_i \end{array}\right) = 0$$

$\Rightarrow a_1, \dots, a_n < -1$ cioè $a_1, \dots, a_n \leq -2$.

$$\mathcal{O}(-n-1) \cong \omega_{\mathbb{P}^n} = \det \Omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(a_1 + \dots + a_n)$$

$$\Rightarrow -n-1 = a_1 + \dots + a_n \leq -2n \Rightarrow n \leq 1$$

$\square$

FASCIO NORMALE

Sia $X \to \operatorname{Spec} k$ liscio, $Y \subseteq X$ sottoschema liscio chiuso
$\dim X = m$, $\dim Y = n$.

$\mathcal{C}_Y X = \mathcal{I}_Y / \mathcal{I}_Y^2 = \mathcal{I}_Y|_Y$ è il fascio conormale

loc. libero di rango $m-n$

Def Il fascio normale di $Y \subseteq X$ è

$$N_Y X = (\mathcal{C}_Y X)^\vee$$

ancora loc. libero di rango $m-n$.

C'è succ. esatta $\mathcal{C}_Y X \to \underbrace{\Omega_{X/k}|_Y}_{\text{rank}=m} \to \underbrace{\Omega_{Y/k}}_{\text{rank}=n} \to 0$

Il nucleo $K = \ker(\Omega_{X/k}|_Y \to \Omega_{Y/k})$ è loc. libero di rango $m-n$

Chiaramente $\mathcal{C}_Y X \twoheadrightarrow K$ e sono loc. liberi dello stesso rango $\Rightarrow \mathcal{C}_Y X \cong K$, dunque

$$\boxed{0 \to \mathcal{C}_Y X \to \Omega_{X/k}|_Y \to \Omega_{Y/k} \to 0}$$

Questa è succ. esatta di loc. liberi

<u>Oss</u> $\boxed{\omega_X|_Y \cong \omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \det(\mathcal{C}_Y X)}$

<u>Def</u> $T_X = \Omega_{X/k}^\vee$, $T_Y = \Omega_{Y/k}^\vee$ fasci tangenti

<u>Fact</u> se E loc. libero su X, $\underbrace{E^\vee|_Y = (E|_Y)^\vee}$ e $(\Lambda^d E)|_Y = \Lambda^d(E|_Y)$

per questo serve E fibrato

<u>Sketch</u> $E^\vee/I_Y E^\vee = E^\vee|_Y \longrightarrow (E|_Y)^\vee$ c'è sempre.
è iso se E fibrato vett.

L'altra vale sempre $\square$

Otteniamo dualizzando

$$\boxed{0 \to T_Y \to T_X|_Y \to N_Y X \to 0}$$

(la definizione solita di $N_Y X$).

Fact Se E loc. libero, $\det(E)^\vee \cong \det(E^\vee)$,

più in generale $(\Lambda^d E)^\vee \cong \Lambda^d(E^\vee)$

Sketch ho accoppiamento $\Lambda^d E \times \Lambda^d(E^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}$

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_d, w_1 \wedge \dots \wedge w_d) \longmapsto \det(\langle v_i, w_j \rangle) \qquad \square$$

Thm (Formula di aggiunzione) Se $X \to$ Spec k liscio

$Y \subseteq X$ sottoschema chiuso liscio, allora

$$\omega_Y \cong (\omega_X|_Y) \otimes \det(N_Y X)$$

Dim Tensorizzo $\omega_X|_Y \cong \omega_Y \otimes \det(C_Y X)$ con $\det(N_Y X)$ $\square$

Ex $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ ipersup. di grado d, $\mathcal{I}_X = \mathcal{O}(-d)$

Pongo $\mathcal{O}_X(e) = \mathcal{O}(e)|_X$. $\mathcal{O}_X(-d) = C_X \mathbb{P}^n$

$\rightsquigarrow N_Y X \cong \mathcal{O}_X(d)$, $\omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-n-1)$

Quindi $\omega_X = \mathcal{O}_X(d-n-1)$

Ex curve lisce in $\mathbb{P}^2$: $d=1 \rightsquigarrow X$ è retta $\cong \mathbb{P}^1$

$\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \rightsquigarrow \omega_X \cong \mathcal{O}_X(-2)$ (come sapevamo)
$= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$

$d=2 \rightsquigarrow X$ conica.

$\omega_X = \mathcal{O}_X(-1)$. Se $X(K)\neq\emptyset$, $X\cong\mathbb{P}^1$ ma

$\mathcal{O}_X(1)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ in questo iso, quindi form.

$d=3 \quad \omega_X = \mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$

$d=4 \quad \omega_X = \mathcal{O}_X(1)$

Ex superfici in $\mathbb{P}^3$:

$d=2 \quad \omega_X \cong \mathcal{O}_X(2)$ (si può vedere $X\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \underset{\text{segre}}{\subseteq} \mathbb{P}^3$)

Immersione di segre $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\subseteq\mathbb{P}^3$,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1)\cong pr_1^*\mathcal{O}(1)\otimes pr_2^*\mathcal{O}(1)$$

Fatto Se $X\to\operatorname{Spec}K$ e $Y\to\operatorname{Spec}K$ allora

$$\Omega_{X\times Y/K}\cong pr_1^*\Omega_{X/K}\oplus pr_2^*\Omega_{Y/K}$$

Quindi $\Omega_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1/K}\cong pr_1^*\mathcal{O}(-2)\oplus pr_2^*\mathcal{O}(-2)$

$\rightsquigarrow \omega_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1/K}\cong pr_1^*\mathcal{O}(-2)\otimes pr_2^*\mathcal{O}(-2)$

$d=3 \quad \omega_X = \mathcal{O}_X(-1)$

$d=4 \quad \omega_X\cong\mathcal{O}_X$

Ex Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{P}^n_K$ ipersuperfici di grado d_1, d_2

t.c. $X = X_1 \cap X_2$ è liscio di codimensione 2

ricordo $0 \to \mathcal{O}(-d_1-d_2) \xrightarrow{\varphi \mapsto f_2\varphi - f_1\varphi} \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \to I_X \to 0$

Restringiamo a X:

$$\mathcal{O}_X(-d_1-d_2) \to \mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \mathcal{O}_X(-d_2) \to \mathcal{C}_X \mathbb{P}^n_K \to 0$$

$$\varphi \longmapsto 0\varphi - 0\varphi = 0$$

$\rightsquigarrow \mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \mathcal{O}_X(-d_2) \cong \mathcal{C}_X \mathbb{P}^n_K$ (o volendo perchè surgezione con stesso rango)

$\Rightarrow \det(N_X \mathbb{P}^n) = \mathcal{O}_X(d_1+d_2)$

$\rightsquigarrow \omega_X \cong \mathcal{O}_X(d_1+d_2-n-1)$ per la formula di aggiunzione.

[infatti curva in $\mathbb{P}^3$ data intersecando due quadriche liscie è una curva ellittica]

FASCI AMPI E MOLTO AMPI

$X \to$ spuck proiettivo.

Def L invertibile su X è molto ampio se $\exists$ immersione chiusa $X \to \mathbb{P}^n$ t.c. $\mathcal{O}_X(1) \cong L$

Oss $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è definita da $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L)$ date da $s_i = x_i|_X$

Prop L è molto ampio $\Leftrightarrow$ una base di $H^0(X, L)$ definisce una immersione $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ ovvia

$\boxed{\Rightarrow}$ se $s_0, \dots, s_n$ non sono lin. ind. allora $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ con $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in k$ non tutti nulli

è una sezione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ che ristretta a X è nulla,

cioè esiste un iperpiano $H = V(\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n)$

t.c.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathbb{P}^n \\ & H \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$H \cong \mathbb{P}^{n-1}$, quindi

in realtà abbiamo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)|_X \cong L$.

Iterando posso assumere $s_0, \dots, s_n$ lin. ind.

Allora completo a base $s_0,\dots,s_n,\dots,s_N$.

Queste definiscono $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ e questa è

un'immersione $\square$

Def $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ è degenere se $\exists H$ iperpiano t.c. $X \hookrightarrow H \subseteq \mathbb{P}^n$

Oss Il prodotto di fasci molto ampi è molto ampio

se $X \overset{j_1}{\subseteq} \mathbb{P}^{n_1}$, $X \overset{j_2}{\subseteq} \mathbb{P}^{n_2}$, $j_1^*\mathcal{O}(1)=L_1$, $j_2^*\mathcal{O}(1)=L_2$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "{(j_1,j_2)}"] \arrow[rr, bend right, "K"'] & \mathbb{P}^{n_1}\times\mathbb{P}^{n_2} \arrow[r, hook, "J", "\text{segre}"'] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

$J^*\mathcal{O}(1)=pr_1^*\mathcal{O}(1)\otimes pr_2^*\mathcal{O}(1)$

$K^*\mathcal{O}(1)=L_1\otimes L_2$

Def Un fascio inv. su X è ampio se $L^{\otimes d}$ è molto ampio per qualche $d>0$

$\Leftrightarrow L^{\otimes d}$ molto ampio $\forall d \gg 0$

Thm Sia L invert. su X proiettiva. TFAE

① L ampio

② se F coerente su X allora $F\otimes L^d$ è gen. da sez. globali per $d\gg 0$

③ se F coerente su X, $H^i(X,F\otimes L^{\otimes d})=0$ $\forall i>0$, $\forall d\gg 0$

Idea Usa Teoremi A e B di Serre $\square$

Thm (Dualità di Serre) Sia $X \to \operatorname{Spec} k$ liscia proiettiva e connessa, $\dim X = n$, $\omega_X = \det(\Omega_{X/k})$

se E è loc. libero su X allora c'è iso. canonico di k-sp. vett.

$$\forall i \geq 0 \qquad H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega)^\vee$$

Def Se F fascio coerente su X, $h^i(F) \doteq \dim_k H^i(X,F)$

Cor (S.D.) $h^i(E) = h^{n-i}(E^\vee \otimes \omega)$

In particolare $h^n(\mathcal{O}_X) = h^0(\omega)$.

Def $h^0(\omega)$ è il genere geometrico di X

CURVE !!!

Def Una Curva è uno schema liscio proiettivo geom. connesso di dimensione 1 sul campo K.

Oss Se X curva $H^0(\mathcal{O}_X)=K \Rightarrow H^1(X,\omega_K) \overset{D.S.}{\cong} K$ ← canonico!

Def Il genere di X è il genere geometrico di X, cioè

$$g=g(X):=h^0(\omega)=h^1(\mathcal{O}_X)$$

Oss $\chi(\mathcal{O}_X)=1-g$

Ex Se $X\subseteq \mathbb{P}^2_K$ è curva proiettiva di grado d liscia allora è geom. conn. (noto) e abbiamo

$$0\to\mathcal{O}(-d)\to\mathcal{O}\to\mathcal{O}_X\to 0$$

$$\rightsquigarrow\ 1-g=\chi(\mathcal{O}_X)=\chi(\mathcal{O})-\chi(\mathcal{O}(-d))=1-\underbrace{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}_{\binom{d-2+1}{2}}$$

$$\Rightarrow g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Prop. Se X e Y curve $f:X\to Y$ morfismo di schemi su K allora abbiamo 2 possibilità

(1) f è costante in $P\in Y(K)$ perché

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} K(P) \arrow[r] & Y \\ & & X \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ $K(P)\to H^0(X,\mathcal{O}_X)=K \Rightarrow K(P)=K$

(2) f surgettiva e $f: X \to Y$ ha fibre finite

Thm (Chevalley) Se $f: X \to Y$ proprio a fibre finite e Y loc. noeth. allora f è finito.

$\rightsquigarrow$ f non costante è finito

$\Rightarrow$ f è piatto perché Y regolare dim 1, X ridotto e ogni componente di X domina Y (X irrid. e f surg.)

Quindi se f non è costante allora è finito e piatto di qualche grado $d>0$, dato da $[K(X):K(Y)]$.

Se $q \in Y$ chiuso, $\underbrace{\dim_{k(q)} H^0(f^{-1}(q), \mathcal{O})}_{h^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q)})} = d$

Ma $H^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q)}) = \bigoplus_{p \in f^{-1}(q)} H^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q),p})$ (scompongo anello artiniano)

Se $t_q \in \mathcal{O}_{Y,q}$ uniformizzante

$$H^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q),p}) = H^0\left(\frac{\mathcal{O}_{X,p}}{\underbrace{(f^\# t_q)}_{= \mathfrak{m}_p^{v_p(f^\# t_q)}}}\right)$$

$(\dim_{k(q)} H^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q),p}))$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q),p}) = \underbrace{[K(p):k(q)]}_{\text{ma la voglio su } k(q)} \underbrace{v_p(f^* t_q)}_{\text{dim su } k(p)}$

Def L'indice di ramificazione di f in p è $e_p(f) = v_p(f^* t_q)$

Oss $d = \deg f = \sum_{P \in f^{-1}(q)} e_P(f)\,[K(P) : K(q)]$

Se $K = \overline{K}$ $\deg f = \sum_{P \in f^{-1}(q)} e_P(f)$

Recall $X \dashrightarrow Y$ razionale si estende a $X \to Y$
(dominio massimale contiene i punti di codim $=1$, visto appuntato)

Recall $X \dashrightarrow Y \iff$ morfismi $\mathrm{Spec}\,K(X) \to Y$

e $X \dashrightarrow Y$ dominante $\iff \mathrm{Spec}\,K(X) \to Y$ dominante
$\iff K(Y) \to K(X)$

Cor Un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ è un isomorfismo sse $\deg f = 1$

Recall $X \to \mathbb{P}^1 \equiv X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \iff K(X) \cup \{\infty\}$

e le funzioni dominanti $X \to \mathbb{P}^1$ corrispondono a
$K(t) \hookrightarrow K(X) \iff K(X) \setminus K$

Prop Se $X = \mathbb{P}^1$, cioè morfismi dominanti $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

corrispondono a $f \in K(x) \setminus K$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x) \in K[x]$ non nulli non entrambi costanti suppongo p e q relativamente primi, allora

$$\deg f = \max(\deg p, \deg q)$$

Dim Supponiamo $\deg p \geq \deg q$

$\deg f = \dim_K H^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(q)})$ e $f^{-1}(0) = \operatorname{spec} \frac{K[x]}{(p(x))}$?

perché $f(\infty) = \infty$ in queste ipotesi

se $\deg q > \deg p$, $\deg f = \deg f^{-1}$ $\square$

$X \to \mathbb{P}^1$ non costante $\iff f \in K(X) \setminus K$

$$\operatorname{div} f = \sum_{P \in X^{(1)}} v_P(f) P = \underbrace{\sum_{\substack{P \in X^{(1)} \\ v_P(f) > 0}} v_P(f) P}_{\operatorname{div}_+ f} - \underbrace{\sum_{\substack{P \in X^{(1)} \\ v_P(f) < 0}} -v_P(f) P}_{\operatorname{div}_- f}$$

Def Se $D \in \operatorname{Div}(X)$, $D = \sum_{P \in X^{(1)}} n_P \cdot P$,

$\deg D = \sum n_P [K(P):K] \rightsquigarrow \deg : \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ omo.

Se $f: X \to \mathbb{P}^1$ non cost. $P \in f^{-1}(0) \iff v_P(f) > 0$ e

$P \in f^{-1}(\infty) \iff v_P(f) < 0$

$$\deg \operatorname{div}_+ f = \sum_{f(P)=0} v_P(f) [K(P):K] = h^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(0)}) = \deg f$$

$$\deg \operatorname{div}_- f = \sum_{f(P)=\infty} v_P(f)[k(P):k] = h^0(\mathcal{O}_{f^{-1}(\infty)}) = \deg f$$

$$\Rightarrow \deg \operatorname{div} f = 0$$

Quindi $\deg : \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ si fattorizza.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Div}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\ \operatorname{Pic}(X) \cong \mathcal{C}\ell(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Quindi possiamo parlare del grado di un fascio invertibile.

Ex $X = \mathbb{P}^1$, $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}(1) \rangle$

e $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{Z}$ quindi è un iso.
$\mathcal{O}(1) \longmapsto 1$

Prop Se $k = \bar{k}$, X curva su k, se $\deg : \operatorname{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ è iniettiva allora $X \cong \mathbb{P}^1$.

Più precisamente, se $p, q \in X(k)$ con $p \neq q$ allora

$$X \not\cong \mathbb{P}^1 \Rightarrow [p-q] \neq 0$$

Dim Supponiamo $p - q = \operatorname{div} f$ con $f \in K(X)$
$\Rightarrow \operatorname{div}_+ f = p \Rightarrow \deg f = 1 \Rightarrow f$ è iso. $\square$

Sia X curva di genere g e fissiamo $X \overset{j}{\subseteq} \mathbb{P}^n$

$d = \deg X$ in $\mathbb{P}^n$ è dato da $\chi(\mathcal{O}_X(t)) = 1-g+dt$

Prop $d = \deg \mathcal{O}_X(1)$ (visto in $\mathrm{Pic}(X)$)

Dim Considero H sezione di $\mathcal{O}(1)$ in $\mathbb{P}^n$ tale che $X \nsubseteq H$, sia $h \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ t.c. $\operatorname{div} h = H$

$s = j^* h \neq 0 \leftarrow$ perché $X \nsubseteq H$.

Fatto (X curva) C'è una corrispondenza biunivoca tra divisori effettivi su X e sottoschemi chiusi propri di X

se $D = \sum_{P \in X^{(1)}} n_P P$ effettivo, $I_D(U) = \{ f \in K(X) \mid v_P(f) \geq n_P \ \forall P \}$

$I_D = \mathcal{O}(-D) \subseteq \mathcal{O} \leftarrow$ perché $n_P \geq 0$

Lo schema associato è $V(I_D)$

Oss $\deg D = \dim_K H^0(\mathcal{O}_D)$

$\operatorname{div} s = X \cap H$ Quindi

$$\deg \mathcal{O}_X(1) = \deg \operatorname{div} s = \dim_K H^0(\mathcal{O}_{X \cap H}) = \chi(\mathcal{O}_{X\cap H}) =$$
$$= \chi(\mathcal{O}) - \chi(\mathcal{O}_X(-1)) = 1-g-(1-g-d) = d \qquad \square$$

Oss/Ese Sia K'/K, X curva su K, L inv. su X

$\pi : X_{K'} \to X$ proiezione, allora

$$\deg \pi^* L = \deg L$$

[riduci a div. effettivi e usa Flat base change]

Oss $\mathcal{C}l(Y) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}l(X)$ si può sollevare a
$\;\;\;\;\;\;\;\;\; \| \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \|$
$\;\;\;\; Pic(Y) \;\;\;\;\;\; Pic(X)$

$$Div(Y) \xrightarrow{f^*} Div(X)$$

con $f^*(q) = f^{-1}(q)$ visto come divisore di Cartier.:
se $t_q \in \mathcal{O}_{Y,q}$ uniformizzante, $f^{-1}(q) = \sum_{P \in f^{-1}(q)} v_P(f^\# t_q) P$

Prop $\deg f^* L = \deg f \deg L$ ($f : X \to Y$ non cost.)

Dim Segue dal fatto sopra:

$$\deg f^*(q) = \sum_{P \in f^{-1}(q)} \underbrace{v_P(f^* t_q)}_{e_P(f)} [k(P):k] = [k(q):k] \underbrace{\sum_{P \in f^{-1}(q)} e_P(f) [k(P):k(q)]}_{\deg f}$$

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-q) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_q \to 0$$
$$\downarrow f^* \qquad \text{dove } D = f^* q = f^{-1} q$$
$$0 \to f^* \mathcal{O}(-q) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$$

$\rightsquigarrow f^* \mathcal{O}(-q) \cong \mathcal{O}_X(-D) \rightsquigarrow f^* \mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(f^* q)$

Ora costruisci L come $\mathcal{O}(\Delta)$ per Δ di Cartier.

$\square$

Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$. $H^0(\mathcal{O}(D)) = \{0\} \cup \{f \in K(X)^* \mid \mathrm{div} f + D \geq 0\}$

Oss $h^0(D) = 0 \iff D$ non è lin. eq. ad un divisore effettivo.

Per esempio se $\deg D < 0$, $h^0(D) = 0$.

Oss $\mathrm{div} f + D = \mathrm{div} g + D$ per $f, g \in K(X)^*$

$\iff g = af$ per $a \in K^*$

Quindi $h^0(D) = 1 \iff D$ è equivalente ad un UNICO divisore effettivo.

Oss Se $D \in \mathrm{Div}(X)$, $D_{\bar{K}}$ = pullback di D tramite $X_{\bar{K}} \to X$

$\deg D_{\bar{K}} = \deg D$ e $h^0(D_{\bar{K}}) = h^0(D)$

Supponiamo $X_{\bar{K}} \cong \mathbb{P}^1_{\bar{K}}$.

$Cl(X_{\bar{K}}) = Cl(\mathbb{P}^1_{\bar{K}}) \overset{\deg}{\cong} \mathbb{Z}$

$$h^0(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg D < 0 \\ \deg D + 1 & \text{se } \deg D \geq 0 \end{cases}$$

In generale, se $\deg D = 0$, $h^0(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } D \not\sim 0 \\ 1 & \text{se } D \sim 0 \end{cases}$

Supponiamo $\deg D = 1$, $X_{\bar{K}} \cong \mathbb{P}^1_{\bar{K}}$. So che

Se $p, q \in X(K)$, $p \neq q$ allora $p \not\sim q$

$$\Rightarrow h^0(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } D \not\sim \text{pt. raz.} \\ 1 & \text{se } D \sim \text{pt. raz.} \end{cases}$$

Supponiamo $K = \bar{K}$, esiste sempre D t.c. $\deg D = 1$

e $h^0(D) = 0$? Si ma non banale.

Oss sia $K = \bar{K}$ e $p \in X(K)$. $h^0(D-p) \xhookrightarrow{\text{relazione?}} h^0(D)$

$$0 \to \mathcal{O}(-p) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_p \to 0 \quad \otimes \mathcal{O}(D)$$

$$0 \to \mathcal{O}(D-p) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_p \to 0$$

$\rightsquigarrow h^0(D) - h^0(D-p) \in \{0, 1\}$ a seconda della surgettività dell'ultima mappa.

Cor Se $\deg D \geq 1$ e $X_{\bar{K}} \not\cong \mathbb{P}^1_{\bar{K}}$ allora $h^0(D) \leq \deg D$

Oss Se $\deg D = 2$, $h^0(D) \in \{0, 1, 2\}$.

Oss $K = \bar{K}$, $\exists D$ con $\deg D = 2$, $h^0(D) = 2 \iff \exists p, q, p', q' \in X(K)$ t.c. $D \sim p + q \sim p' + q'$ e $p + q \neq p' + q'$, cioè $\{p, q\} \cap \{p', q'\} = \emptyset$

$\iff \exists f \in K(X)^*$ t.c. $\operatorname{div} f = p + q - p' - q'$ senza cancellamenti

$\iff \exists X \to \mathbb{P}^1$ di grado 2

Def Se $k=\bar{k}$, $g(X)\geq 2$ è iperellittica se $\exists X\to\mathbb{P}^1$ di grado 2.

Fact • esistono curve iperellittiche genere arbitrario ≥ 2

• Tutte le curve di genere 2 sono iperellittiche

• Se $g\geq 3$ la "maggior parte" delle curve non è iperellittica.

RIEMANN-ROCH

Def Sia X curva. Se $K\in \mathrm{Div}(X)$ t.c. $\mathcal{O}(K)\cong \omega_X$ allora K è detto divisore canonico

Recall (Dualità Serre) Se L inv. su X curva
$$h^1(L)=h^0(L^\vee\otimes\omega)$$

Cioè, se $D\in\mathrm{Div}(X)$, $h^1(D)=h^0(K-D)$

$$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}(D))=h^0(D)-h^0(K-D)$$

Thm (Rie. Roch) $h^0(D)-h^0(K-D)=\chi(\mathcal{O}(D))=\deg D+1-g$

Dim Se $p\in X^{(1)}$, $0\to\mathcal{O}(D-p)\to\mathcal{O}(D)\to\underbrace{\mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{O}_p}_{\cong\mathcal{O}_p\cong k(p)}\to 0$

$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}(D))=\chi(\mathcal{O}(D-p))+\deg p$

ovvero $\chi(\mathcal{O}(D+p))=\chi(\mathcal{O}(D))+\deg p$.

Per $D=0$ il teorema è vero, quindi tutto il teorema vale per induzione $\square$

Cor $\underbrace{h^0(K)}_{= g} - \underbrace{h^0(K-K)}_{= 1} = \deg K + 1 - g \Rightarrow \deg K = 2g-2$

Oss $h^0(K-D) = 0$ se $\deg D > 2g-2$

Cor $g=0 \iff X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$

Dim SPG $k = \bar{k}$. Sappiamo già che $g(\mathbb{P}^1) = 0$.
Se $g=0$, $h^0(D) = \deg D + 1$ se $\deg D \geq 0$. se $P \in X(k)$
$h^0(P) = 2 \Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1$ $\square$

Cor Se $g(X) = 0$, $X(k) = \emptyset$ allora

$$\operatorname{Imm}(\deg : Cl(X) \to \mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$$

Dim $\deg K = -2 \Rightarrow 2\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{Im}(\deg)$.
Se $\deg D = 2n+1$ allora $\deg(D+nK) = 1$
e per Riemann-Roch, $h^0(D+nK) = 2 \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ $\square$

Oss Se $g(X) = 1$, $\deg K = 0$ e $h^0(K) = 1 \Rightarrow \omega_X \cong \mathcal{O}_X$

Oss Se $g(X) = 2$, $\deg K = 2$ e $h^0(K) = 2 \Rightarrow X$ iperellittica

RIEMANN-HURWITZ

Sia $f: X \to Y$ non costante. Supponiamo $K = \bar{K}$

Sia $d = \deg f = [K(X) : K(Y)]$.

Def f è separabile se $K(X)/K(Y)$ è separabile

Ex se $\operatorname{char} K \nmid \deg f$ allora f è separabile

Lemma se L/K finita separabile, $\Omega_{L/K} = 0$

Dim $L = K(\theta)$ per elemento primitivo.

$K(\theta) = \frac{K[x]}{(f(x))}$ con f e f' coprimi.

$$\frac{(f(x))}{(f(x))^2} \to \underbrace{L \otimes_K \Omega_{K[x]/K}}_{= L\,dx} \to \Omega_{L/K} \to 0$$

$$[f] \longmapsto f'(x)\,dx$$

$\rightsquigarrow \Omega_{L/K} \cong \frac{K[x]}{(f, f')} = 0$ ← f e f' coprimi

$\square$

Per $f: X \to Y$ abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} f^*\omega_Y & \longrightarrow & \omega_X & & & & \\ \| \wr & & \| \wr & & & & \\ f^*\Omega_{Y/K} & \longrightarrow & \Omega_{X/K} & \to & \Omega_{X/Y} & \to & 0 \end{array}$$

Notiamo che $f^*\omega_Y \to \omega_X$ è o iniettiva o nulla (perché entrambi line bundle) e lo possiamo controllare sul punto generico di X

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K(Y) \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \Rightarrow \Omega_{\operatorname{Spec} K(X)/\operatorname{Spec} K(Y)} \cong \pi^* \Omega_{X/Y} = (\Omega_{X/Y})_{\operatorname{Spec} K(X)}$$

$$\Rightarrow (\Omega_{X/Y})_{\operatorname{Spec} K(X)} \cong \Omega_{K(X)/K(Y)} \overset{!!}{=} 0$$

se f è separabile

$\Rightarrow f^*\omega_Y \to \omega_X$ è iniettiva.

Quindi abbiamo $0 \to f^*\omega_Y \to \omega_X \to \Omega_{X/Y} \to 0 \quad \otimes \omega_X^\vee$

$$0 \to \omega_X^\vee \otimes f^*\omega_Y \to \mathcal{O}_X \to \omega_X^\vee \otimes \Omega_{X/Y} \to 0$$

$\Rightarrow \omega_X^\vee \otimes \Omega_{X/Y} \cong \mathcal{O}_R$ dove R chiuso proprio in X

$\rightsquigarrow R$ è divisore di Cartier, detto il

divisore di ramificazione.

Oss $\mathcal{O}_X(-R) \cong \omega_X^\vee \otimes f^*\omega_Y \quad \deg$

$$-\deg R = -\deg \omega_X + \deg f^*\omega_Y = -\deg \omega_X + \deg f \deg \omega_Y$$

Oss $\boxed{2g(X) - 2 = (\deg f)(2g(Y) - 2) + \deg R}$

Se $p \in X^{(1)} = X(K)$, $e_p(f) = v_p(f^* t_q)$ e so che

$$\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} e_p(f)$$

D'altronde $R = \sum_{p \in X(K)} e'_p(f) \cdot P = \sum_{p \in X(K)} \dim_K \Omega_{X/Y, p} \cdot P$

Prop Sia $q \in Y$, $p \in f^{-1}(q)$. Siano t_p, t_q uniformizzanti di $\mathcal{O}_{X,p}$ e $\mathcal{O}_{Y,q}$. Se $f^* t_q = u\, t_p^{e_p(f)}$ con $u \in \mathcal{O}_{X,p}^\times$ allora
$$e_p'(f) = e_p(f) - 1 + v_p\left(e_p(f)\, u + t_p \frac{du}{dt_p}\right)$$

Dim Consideriamo
$$f^* : \underset{\mathcal{O}_{Y,q}\, dt_q}{\overset{\shortparallel}{\Omega_{Y,q}}} \to \underset{\mathcal{O}_{X,p}\, dt_p}{\overset{\shortparallel}{\Omega_{X,p}}}$$

se $f^*(dt_q) = \varphi\, dt_p$ con $\varphi \in \mathcal{O}_{X,p}$ allora per def. di R
$$e_p'(f) = v_p(\varphi) \qquad \left[\Omega_{X/Y,p} = \frac{\Omega_{X,p}}{f^*\Omega_{Y,p}}\right]$$

Ma $f^*(dt_q) = d(f^* t_q)$. Ponendo $e = e_p(f)$ si ha
$$d(f^* t_q) = d(t_p^e u) = e u\, t_p^{e-1} dt_p + t_p^e\, du =$$
$$= t_p^{e-1}\Big(e u + t_p \underbrace{\frac{du}{dt_p}}_{\in \mathcal{O}_{X,p}}\Big) dt_p$$

l'elemento tale che $\frac{du}{dt_p} dt_p = du$

La formula segue applicando v_p al coeff. di dt_p $\square$

Cor $e_p'(f) \geq e_p(f) - 1$ e vale $=$ sse $\operatorname{char} K \nmid e_p(f)$

Thm (Riemann-Hurwitz) Sia $f: X \to Y$ morfismo di curve non costante, allora
$$2g(X) - 2 = (\deg f)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X(K)} e_p'(f).$$

Se $\operatorname{char} K \nmid e_p(f)$ $\forall p \in X$ (per esempio se $\operatorname{char} K = 0$ oppure oppure $\operatorname{char} K > \deg f$ $(K = \bar{K})$) allora
$$2g(X) - 2 = (\deg f)(2g(Y) - 2) + \sum (e_p(f) - 1)$$

Cor $g(X) \geq g(Y)$

Cor Se $\operatorname{char} K = 0$, $g(X) = g(Y) \geq 2$ allora $X \to Y$ è un isomorfismo.

Oss Se $\operatorname{char} K \nmid e_p(f)$ $\forall p$ $\left(\begin{array}{l}\text{per esempio } \operatorname{char} K = 0 \\ \text{oppure } \operatorname{char} K > \deg f\end{array}\right)$ allora

$$2g(X) - 2 = (\deg f)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X(k)} (e_p(f) - 1) =$$

$$= (\deg f)(2g(Y) - 2) + \sum_{q \in Y(k)} (\deg f - |f^{-1}(q)|)$$

per quasi ogni fibra $\deg f = |f^{-1}(q)|$ e non succede quando ho ramificazione

Cor Se f è separabile allora $g(X) \geq g(Y)$.
Se $g(X) = g(Y) \geq 2$ allora $\deg f = 1 \to f$ isomorfismo.

Prop Se X, Y curve$/k$, $k = \bar{k}$

$$\{X \to Y \text{ dominanti}\} \longrightarrow \left\{\begin{tikzcd} K(Y) \arrow[r] & K(X) \\ & k \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}\right\} :$$

Se K/k estensione, esiste una curva X t.c. $K(X) \cong K \iff K$ è f.g. di $\operatorname{trdeg} = 1$

Dim Sia K/k f.g. con $\operatorname{trdeg}_k K = 1$

$K = k(a_1, \dots, a_n)$ considero $A = k[a_1, \dots, a_n] \subseteq K$

A è dominio e $\operatorname{Frac} A = K$

$\dim A = 1$ perché A f.g. $\rightsquigarrow$ $\dim A = \operatorname{trdeg} \operatorname{Frac} A$

$U = \operatorname{Spec} A$ è uno schema integro affine di dim 1

$U \subseteq \mathbb{A}^n$, $X = \overline{U} \subseteq \mathbb{P}^n$. X è schema proiettivo $/k$

integro di dimensione 1 con $k(X) = K$

se $\bar{X}$ è la normalizzazione di X effettivamente

$\bar{X}$ è liscio (normale dim 1 $\Rightarrow$ regolare $\xRightarrow{\text{campo perfetto}}$ liscio) $\square$

Cor Quindi abbiamo eq. di categorie ($k = \bar{k}$)

(curve, morfismi dominanti) $\longleftrightarrow$ (est. $/k$ f.g., trdeg $= 1$)^{op}

Oss Se $X \to Y$ dominante di curve, $k(Y) \subseteq k(X)$

si fattorizza $k(Y) \subseteq K \subseteq k(X)$ con K chiusura

separabile di $k(Y)$ in $k(X)$ $\rightsquigarrow$ $X \to Z \to Y$

con $Z \to Y$ separabile e $X \to Z$ puramente inseparabile.

Fact Se $X \to Y$ puramente inseparabile allora

è un omeomorfismo e $g(X) = g(Y)$.

Cor se $f: X \to Y$ dominante, $g(X) \geq g(Y)$
(neppure che è vero per separabili, uso il fatto)

Ex $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ con char $K = p$ e puramente
$t \mapsto t^p$ inseparabile

∃ CURVE IPERELL. ∀ g

Recall X/K con $K = \bar{K}$ curva è iperellittica se $g(X) \geq 2$ e $\exists f: X \to \mathbb{P}^1_K$ con $\deg f = 2$

Def se $K \neq \bar{K}$ X/K curva è iperellittica se $X_{\bar{K}}$ è iperellittica.

Thm se char $K \neq 2$, $K = \bar{K}$ allora esistono curve iperellittiche su K di genere g $\forall$ $g \geq 2$

Dim Sia $\mathcal{K}/K(t)$ con $K(t) = K(\mathbb{P}^1)$ di grado 2.
Sia $\varphi(t) = (t - a_1) \cdots (t - a_n)$ con $a_1, \dots, a_n \in K$ distinti.
Noto che $\varphi(t) \in K(t) \setminus K(t)^2$, cioè non è un quadrato.
Poniamo
$$\mathcal{K} = \frac{K(t)[x]}{(x^2 - \varphi(t))}.$$
Per l'eq. di categorie esiste $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ con $K(X) = \mathcal{K}$.

Per costruzione X è iperell. Calcoliamo $g(X)$:

Consideriamo $\mathbb{A}^1 \subseteq \mathbb{P}^1$. $\pi^{-1}(\mathbb{A}^1)$ è la chiusura intera di $K[t]$ in K, che astrattamente è isomorfa a

$$K[x,t]/(x^2-\varphi(t))$$

perché
- $\mathrm{Frac} = K$,
- contiene $K[t]$
- è normale

È normale perché liscio (criterio Jacobiano, uso che φ ha radici distinte)

Se $p \in \mathbb{A}^1(K) = \mathbb{P}^1(K) \setminus \{\infty\}$, $e_p(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \notin \{a_1, \dots, a_n\} \\ 2 & \text{se } p \in \{a_1, \dots, a_n\} \end{cases}$

Procedendo in modo simile notiamo che $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$ è iso. a $\frac{K[y,s]}{(y^2-\psi(s))}$ se n pari e $\frac{K[y,s]}{(y^2-s\psi(s))}$ se n dispari $\left[\varphi(t) = t^n \psi(t^{-1})\right]$

dunque $e_\infty(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$

Applicando Riemann-Hurwitz

$$2g(X)-2 = -4 + \sum_{p \in \mathbb{P}^1(K)} (e_p(f)-1) = -4 + n + (e_\infty(f)-1)$$

$$2g(X)+2 = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ pari} \\ n+1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi scegliendo $n = 2g+2$ abbiamo $g(X) = g$ $\square$

DIVISORI MOLTO AMPI

Problema Dato D, quando $\mathcal{O}_X(D)$ molto ampio?

Fatto D molto ampio sse $D_{\bar{k}} \in \mathrm{Div}(X_{\bar{k}})$ è molto ampio

supponiamo $k = \bar{k}$, SEMPRE!

$$0 \to \mathcal{O}_X(-P) \to \mathcal{O}_X \to \underset{\overset{\|}{k(P)}}{\mathcal{O}_P} \to 0 \quad \otimes \mathcal{O}(D)$$

$$0 \to \mathcal{O}_X(D-P) \to \mathcal{O}_X(D) \to k(P) \to 0$$

Quindi: $H^0(\mathcal{O}(D-P)) = \ker\left(\begin{array}{c} H^0(\mathcal{O}(D)) \to k \\ s \longmapsto s(P) \end{array} \right)$

$\rightsquigarrow h^0(D-P) = h^0(D)$ se P punto base, altrimenti
$h^0(D-P) = h^0(D) - 1$

Quindi: D definisce morfismo verso $\mathbb{P}^n$ sse
$h^0(D-P) = h^0(D) - 1 \quad \forall\, P \in X(k)$

Ex $D = K$. se $g(X) = 0$, $\deg D = -2 \Rightarrow h^0(K) = 0$ NO

se $g(X) = 1$, $\deg K = 0 \Rightarrow K$ definisce la mappa costante in $\mathbb{P}^0 = pt$.

se $g(X) \geq 2$, $h^0(0) - h^0(K) \overset{R.R.}{=} 1 - g \rightsquigarrow h^0(K) = g$

se $P \in X(k)$, $\underset{=1}{h^0(P)} - h^0(K-P) = 1 + 1 - g \Rightarrow h^0(K-P) = g - 1$

Quindi definisce $X \to \mathbb{P}^{g-1}$.

se $g(X)=2$, K definisce $X \to \mathbb{P}^1$ di grado 2

se $X \subseteq \mathbb{P}^2$ quartica, $g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$

$\omega_X = \mathcal{O}_X(1)$. $\quad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \to \mathcal{O}_X(1) \to 0$

$$\mathcal{O}_X(1) = \omega_X$$

$$H^0(\mathcal{O}(-3)) = H^1(\mathcal{O}(-3)) = 0$$

$\Rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1)) \to H^0(X, \omega_X)$ è iso.

Quindi la mappa $X \to \mathbb{P}^2$ definita da K è l'inclusione

Supponiamo X curva di genere g, $D \in \mathrm{Div}(X)$

$K = \bar{K}$, $h^0(D-P) = h^0(D) - 1 \quad \forall P \in X(K)$

$\Rightarrow X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n$ con $n = h^0(D) - 1$

$\mathcal{O}_X(D) = f^*\mathcal{O}(1)$, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \xrightarrow{f^*} H^0(X, \mathcal{O}(D))$ è iso

se $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$, $\mathrm{div}\, s = H \subseteq \mathbb{P}^n$ è iperpiano,

$\operatorname{div} f^* s = f^{-1}(H)$.

Se $p, q \in X(K)$, $f(p) = f(q)$ sse $\forall H$ iperpiano
$p \neq q$ $\qquad f(p) \in H \Leftrightarrow f(q) \in H$

$$\Leftrightarrow h^0(D-p-q) = h^0(D-p) = h^0(D-q)$$

Quindi f iniettiva sse $h^0(D-p-q) = h^0(D)-2$
$\forall p, q \in X(K)$ distinti.

Thm $\mathcal{O}(D)$ molto ampio sse $h^0(D-p-q) = h^0(D)-2$
$\forall p, q \in X(K)$ (anche $p=q$)

Cor Se $\deg D \geq 2g+1$ allora $\mathcal{O}(D)$ molto ampio.

Applicazioni • Se $g(X)=0$, $\deg K = -2$
$\Rightarrow -K$ è molto ampio $\quad h^0(-K)=3$
$\Rightarrow -K$ definisce $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ di grado 2,
cioè ogni curva di genere 0 è una conica.

• Se $g(X)=1$ e X ha divisore D di grado 3

(per esempio se $K=\bar{K}$) allora $h^0(D)=3$, X è cubica in $\mathbb{P}^2$
se ha divisore di grado 4 è curva di grado 4 in $\mathbb{P}^3$

• se $g(X)=2$ K non è molto ampio ma

se $\deg D = 5$, $h^0(D) = 5+1-2 = 4 \Rightarrow X$ curva di grado 5 in $\mathbb{P}^4$

Thm se $g(X)\geq 2$, K è molto ampio sse X non è iperellittica

Dim X è iperellittica sse $\exists\, p,q \in X(K)$ t.c. $h^0(p+q)=2$

$$h^0(p+q) - h^0(K-p-q) = 2+1-g$$

Quindi: $h^0(p+q)=2 \Leftrightarrow h^0(K-p-q) = g-1$
$\Leftrightarrow K$ non molto ampio $\square$

Ex $g=3$. K molto ampio $\Leftrightarrow X$ quartica in $\mathbb{P}^2$

Quindi se $g(X)$ allora X iperellittica o X quartica in $\mathbb{P}^2$

Oss Se X non è iperellittica, $g\geq 2$, K dà $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ immersione di grado $2g-2$

se X è iperell. com'è fatta $X \xrightarrow{\iota_K} \mathbb{P}^{g-1}$?

Se $p,q \in X$ allora $h^0(p) = h^0(q) = 1$.

X è iperell. sse $\exists\, p,q$ t.c. $h^0(p+q)=2$

Se $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ di grado 2, π è separabile

[automatico se char $k \neq 2$, altrimenti sarebbe inseparabile e avremmo $g(X) = g(\mathbb{P}^1) = 0$ che è falso]

$\pi^*(0) = p + q$, $h^0(p+q) = 2$

Dato che π è separabile, $\mathrm{Aut}\left(k(X)/k(\mathbb{P}^1)\right) \cong \underset{\langle \sigma \rangle}{\underset{\parallel}{C_2}} = \mathbb{Z}/(2)$

Def σ è detta involuzione iperellittica.

C_2 agisce su $X \rightsquigarrow X/C_2 = \mathbb{P}^1$

Se $p \in X(k)$, $\pi^*(\pi(p)) = p + \sigma(p)$.

Sia $f : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ la mappa canonica.

Se $p, q \in X$, $p \neq q$, $f(p) = f(q)$ sse $h^0(K - p - q) = g - 1$

Ma $h^0(K-p-q) = g-1 \iff h^0(p+q) = 2$

Quindi $f \circ \sigma = f$ come funzione $\overset{\text{schemi ridotti, tipo finito, } k = \bar{k}}{\Longrightarrow}$ come morfismo

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{P}^{g-1} \\ & \mathbb{P}^1 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Oss $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\, f \nsubseteq$ iperpiano $\Rightarrow \varphi$ non degenere

Quindi φ è definita da g sezioni
$s_0, \dots, s_{g-1} \in H^0(\mathbb{P}^1, \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1))$ lin. ind.

$\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \doteq L$ e so che $\pi^* L = \omega_X$

$\Rightarrow 2g-2 = \deg \omega_X = \deg \pi \deg L = 2 \deg L$

$\Rightarrow d = g-1 \Rightarrow s_0, \dots, s_{g-1}$ sono base $H^0(\mathcal{O}(g-1))$

$\rightsquigarrow \varphi$ è un'immersione di Veronese $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$
di grado $g-1$.

Cor Una curva iperellittica X ha un unico morfismo di grado 2 $X \to \mathbb{P}^1$ a meno di automorfismi di X.
Equivalentemente, σ è unica.

INTERSEZ. COMPLETA

Se $X \subseteq \mathbb{P}^2_k$ curva piana, $\omega_X = \mathcal{O}_X(d-3)$ dove d è il grado di X allora se $d \geq 4$ X non è iperellittica.

Def a intersezione completa

se X curva, $X \subseteq \mathbb{P}^{r+1}$, $X = \operatorname{Proj} \dfrac{k[x_0, \dots, x_{r+1}]}{(f_1, \dots, f_r)}$, $\deg f_i = d_i$

Allora • $\deg X = d_1 \cdots d_r$ (visto per $r=2$)

• Se $\mathcal{I}_X \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}$ è il fascio di ideali

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}(-d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}(-d_r) \twoheadrightarrow \mathcal{I}_X$$

Restringendo a X

loc. libero di rango $r+1-1=r$

$$\mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-d_r) \twoheadrightarrow \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 = \mathcal{C}_X\mathbb{P}^{r+1}$$

loc. libero di rango r

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-d_r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \text{ è iso.}$$

Dualizzando $\mathcal{N}_X\mathbb{P}^{r+1} \cong \mathcal{O}_X(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(d_r)$

Formula di aggiunzione:

$$\omega_X = \det(\mathcal{O}_X(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(d_r)) \otimes \omega_{\mathbb{P}^{r+1}}|_X =$$
$$= \mathcal{O}_X(d_1 + \cdots + d_r - r - 2)$$

Calcoliamo il genere:

$$2g(X) - 2 = \deg \omega_X = \underbrace{d_1 \cdots d_r}_{\deg \text{ di } X}(d_1 + \cdots + d_r - r - 2)$$

$$g(X) = \frac{2 + d_1 \cdots d_r(d_1 + \cdots + d_r - r - 2)}{2}$$

Oss Curve a intersez. completa di genere ≥ 2 non è mai iperellittica

Ex • Per $r=1$ $\frac{2+d(d-3)}{2} = \frac{d^2-3d+2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

• $r=2$ $g(X) = 1 + \frac{1}{2} d_1 d_2 (d_1+d_2-4)$

Per $d_1=d_2=2$ $g = 1+2\cdot 0 = 1$

$d_1=2, d_2=3$ $g = 1+3\cdot(5-4) = 4$

$$0 \to \mathcal{O}(-d_1-d_2) \to \mathcal{O}(-d_1)\oplus\mathcal{O}(-d_2) \to \mathcal{I}_X \to 0$$

L'immersione $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ è definita da 4 sezioni di $\mathcal{O}_X(1)$

Prop Se $X \subseteq \mathbb{P}^3$ intersezione completa di superfici di grado almeno 2 allora l'immersione è definita da una base di $H^0(\mathcal{O}_X(1))$

Dim Abbiamo una successione esatta

$$\overset{\text{perché } d_1, d_2 \geq 2}{\underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d_1+1))}_{=0} \oplus \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d_2+1))}_{=0}} \to H^0(\mathcal{I}_X(1)) \to$$

$$\to \underbrace{H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d_1-d_2+1))}_{=0} \to$$

vero per ogni fascio invertibile su $\mathbb{P}^3$

Dunque $H^0(\mathcal{I}_X(1)) = 0$. Similmente $H^1(\mathcal{I}_X(1)) = 0$ perché $-d_1+1, -d_2+1 < 0$ e $1<3$

Da $0 \to \mathcal{I}_X(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to \mathcal{O}_X(1) \to 0$ trovo

$$H^0(\mathcal{I}_X(1)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1)) \to H^1(\mathcal{I}_X(1)) = 0$$
$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$\Rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(1)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ che

ha dimensione 4 come voluto $\square$

Ex • Se $g=1$ e un divisore di grado 4 molto ampio abbiamo $X \subseteq \mathbb{P}^3$.

Una intersezione liscia di due quadriche in $\mathbb{P}^3$ è di questo tipo. (il divisore è $\mathcal{O}_X(1)$)

• se $d_1=2$, $d_2=3$ allora $\omega_X = \mathcal{O}_X(1)$ e $g(X)=4$

Questa immersione è la mappa canonica

Prop Se $g(X)=1$, D divisore di grado 4 t.c. $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, allora X è intersezione di di due quadriche

Dim Considero $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to \mathcal{O}_X(2) \to 0$

$\rightsquigarrow 0 \to H^0(\mathcal{I}_X(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_X(2))$

Se $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ quadrica, $q \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$ sua equazione

allora $\quad X \subseteq Q \Leftrightarrow q \in H^0(\mathcal{I}_X(2))$.

$\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = \binom{3+2}{2} = 10$, $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2)) = 8$

Quindi $\dim H^0(\mathcal{I}_X(2)) \geq 2$

Esistono allora due quadriche $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ t.c. $X \subseteq Q_1 \cap Q_2$.

Dato che X non è contenuto in un iperpiano

Q_1 e Q_2 sono irriducibili, quindi $\dim Q_1 \cap Q_2 = 1$

$\deg(Q_1 \cap Q_2) = 2 \cdot 2 = \deg X$.

$\chi(\mathcal{O}_X(t)) = 4t + 1 - g = 4t$

$\chi(\mathcal{O}_{Q_1 \cap Q_2}(t)) = 4t$ esercizio (ho risoluzione esplicita)

Quindi ho $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{Q_1 \cap Q_2} \to \mathcal{O}_X \to 0$
e $\chi(\mathcal{J}(t)) = 4t - 4t = 0 \Rightarrow \mathcal{J} = 0$, cioè X è tutto $Q_1 \cap Q_2$

$\square$

Sia X t.c. $g(X) = 4$, non iperellittica

$X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ imm. canonica, grado 6.

Abbiamo visto che se X intersezione liscia di quadrica e cubica allora ha genere 4 e ha grado $3 \cdot 2 = 6$ e l'immersione è quella canonica.

Prop se $g(X) = 4$, $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ imm. canonica allora $X = Q \cap C$.

Dim $0 \to \mathcal{I}_X(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \to \mathcal{O}_X(2) \to 0$

$\rightsquigarrow 0 \to H^0(\mathcal{I}_X(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_X(2))$

$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = \binom{2+3}{2} = 10$, $h^0(\mathcal{O}_X(2)) = 12+1-4 = 9$

$\rightsquigarrow$ esiste Q quadrica in $\mathbb{P}^3$ che contiene X.

come prima Q irrid. e UNICA (se ce ne fossero 2 Q_1 e Q_2 allora $X \subseteq Q_1 \cap Q_2$ ma $\deg X = 6$, $\deg Q_1 \cap Q_2 = 4$ ↯)

Analogamente

$0 \to H^0(\mathcal{I}_X(3)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \to H^0(\mathcal{O}_X(3))$

$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) = \binom{3+3}{3} = 20$, $h^0(\mathcal{O}_X(3)) = 3 \cdot 6 - 3 = 15$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{I}_X(3)) \geq 5 \to$ una cubica C c'è.

Anzi la posso scegliere t.c. $Q \nsubseteq C$

[$Q \subseteq C \Rightarrow$ l'equazione di C è multiplo di quella di Q, quindi 4 gradi di libertà per il piano mancante vanno evitati]

$\rightsquigarrow X \subseteq Q \cap C$. $\deg X = \deg Q \cap C = 6$

$\chi(\mathcal{O}_X(t)) = 6t - 3 = \chi(\mathcal{O}_{Q \cap C}(t)) \Rightarrow X = Q \cap C$ $\square$

Dunque le curve di genere 4 sono:
iperellittiche o quadrica $\cap$ cubica in $\mathbb{P}^3$

se $g(X)=5$, X non iperell. $X \subseteq \mathbb{P}^4$, $\deg X = 8$.

se $X \subseteq \mathbb{P}^4$ curva liscia, intersezione di tre quadriche $1+\frac{1}{2}8\cdot(6-5)=5$.

$X \subseteq \mathbb{P}^4$ è ancora l'imm. canonica. (dim. analoga con Koszul)

Vorremmo dim anche stavolta il viceversa...

$h^0(I_X(2)) \geq 3$ quindi 3 quadriche si trovano

ci sono due casi: • $X = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ OK

• l'intersezione delle quadriche che contengono X è una superficie

Si dimostra che il secondo caso succede se e solo se esiste un morfismo $X \to \mathbb{P}^1$ di grado 3 (X è trigonale)

Thm (Enriquez-Petri) Se $X \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ immersione canonica allora X è sempre intersezione di quadriche eccetto quando

(1) X è trigonale (2) X curva piana di grado 5 $(g=6)$

Se $g(X)=6$ e X non iperell. $X \subseteq \mathbb{P}^5$ di grado 10.

$\Rightarrow$ X non può essere intersezione completa