

# Sistemi Dinamici

Corso dei proff. Claudio Bonanno & Roberto Castorrini

Francesco Sorce

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
A.A. 2023/24

# Indice

<b>I Sistemi continui</b>	<b>6</b>
<b>1 Insiemi invarianti, Orbite e Omega-limiti</b>	<b>7</b>
1.1 Orbite, punti fissi e periodici . . . . .	7
1.2 Insiemi invarianti . . . . .	8
1.3 Passaggio a coordinate polari . . . . .	9
1.4 Alpha e Omega limiti . . . . .	9
<b>2 Stabilità e funzioni di Lyapunov</b>	<b>11</b>
2.1 Stabilità per Lyapunov . . . . .	11
2.2 Funzioni di Lyapunov . . . . .	12
2.2.1 Primo approccio per cercare funzioni di Lyapunov . . . . .	14
<b>3 Linearizzazione</b>	<b>15</b>
3.1 Idea della linearizzazione . . . . .	15
3.2 Pozzi e Sorgenti . . . . .	18
3.3 Classificazione dei punti stabili lineari sul piano . . . . .	19
<b>4 Integrali Primi e Sistemi Hamiltoniani</b>	<b>24</b>
4.1 Sistemi Hamiltoniani . . . . .	24
4.1.1 Sistemi meccanici con un grado di libertà . . . . .	26
<b>5 Primi metodi di studio globale</b>	<b>28</b>
5.1 Metodo delle isocline nel piano . . . . .	28
5.2 Ricerca di simmetrie . . . . .	29
<b>6 Varietà stabili/instabili</b>	<b>30</b>
6.1 Varietà stabili e instabili locali . . . . .	30
6.2 Varietà stabili e instabili . . . . .	34
<b>7 Orbite periodiche</b>	<b>35</b>
7.1 Criteri di non esistenza differenziali . . . . .	35
7.2 Teoria dell'indice di Poincaré nel piano . . . . .	36
7.3 Criteri di esistenza di orbite periodiche . . . . .	38
7.3.1 Teorema di Poincaré-Bendixon . . . . .	38
<b>8 Esempi di sistemi dinamici continui</b>	<b>42</b>
8.1 Alcuni sistemi meccanici . . . . .	42
8.1.1 L'oscillatore armonico . . . . .	42
8.1.2 Pendolo semplice . . . . .	42
8.2 Dinamica di Lotka-Volterra . . . . .	43

8.3 Sistema di Lorenz . . . . .	47
<b>II Sistemi discreti</b>	<b>50</b>
<b>9 Basi di Dinamica Topologica</b>	<b>51</b>
9.1 Punti periodici e coniugio topologico . . . . .	51
<b>10 Stabilità locale dei punti fissi</b>	<b>53</b>
10.1 Punti iperbolici . . . . .	53
10.2 Criteri per punti non iperbolici . . . . .	54
<b>11 Orbite periodiche</b>	<b>56</b>
11.1 Partizioni e $T$ -grafi . . . . .	56
11.2 Teorema di Sharkovsky . . . . .	58
11.2.1 Ordinamento e teorema . . . . .	58
11.2.2 Ferri di cavallo . . . . .	60
<b>12 Dinamica topologica Caotica</b>	<b>62</b>
12.1 Dinamica simbolica . . . . .	63
<b>13 Esempi di sistemi discreti</b>	<b>65</b>
13.1 Motivazione: le mappe di Poincaré . . . . .	65
13.2 Endomorfismi del cerchio e mappa di Bernoulli . . . . .	66
13.3 Mappa Logistica e Tenda . . . . .	68
13.3.1 Mappa logistica . . . . .	68
13.3.2 Mappa Tenda . . . . .	70
13.4 Sistemi caotici . . . . .	72
13.4.1 Sistemi continui caotici . . . . .	73
<b>A Riconoscimenti e risorse</b>	<b>74</b>

# Introduzione

**Definizione 0.1** (Sistema dinamico).

Un **sistema dinamico** è una terna  $(X, G, S)$ , dove  $X$  è un insieme,  $G$  un (semi)gruppo e  $S = G \curvearrowright X$  una azione.

L'insieme  $X$  è detto **spazio delle fasi**.

*Osservazione 0.2.*

In realtà vorremmo che l'azione abbia una regolarità compatibile con la struttura dell'insieme in esame.

## Sistemi continui

**Definizione 0.3** (Equazione differenziale).

Un **sistema di equazioni differenziali** (in forma esplicita) è un'equazione della forma

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^d).$$

Un **problema di Cauchy** associato all'equazione differenziale sopra è dato da un sistema del tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Per il teorema di Cauchy-Lipschitz è ben definito il **flusso**  $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  associato all'equazione differenziale definito come la funzione che rispetta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) = F(\phi_t(x_0)) \\ \phi_0(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

*Osservazione 0.4.*

Osserviamo che  $\phi_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è la mappa identità e che  $\phi_\cdot(x)$  è un omomorfismo per ogni  $x$ , cioè

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{s+t}(x).$$

**Definizione 0.5** (Sistema dinamico a tempo continuo).

Una terna  $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}, \phi_t(\cdot))$  è un **sistema dinamico (a tempo) continuo** se  $\phi_t(\cdot)$  è il flusso di un sistema di ODE della forma  $\dot{x} = F(x)$  con  $F(x)$  campo di vettori,  $F \in C^k$  con  $k \geq 1$ .

**Esempio 0.6** (Equazioni differenziali su  $\mathbb{R}$ ).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = ax.$$

Il nostro approccio standard è imporre una condizione di Cauchy  $x(0) = x_0$  e troviamo la soluzione

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Ponendo  $G = \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}$  e  $S = G \curvearrowright X$  dove  $S(t, x_0) = \phi_t(x_0)$  possiamo interpretare l'equazione sopra come un sistema dinamico.

Se consideriamo ora un'equazione del tipo

$$\dot{x} = a(x + x^9)$$

diventa difficile risolvere l'equazione. Possiamo fare studi qualitativi. Negli studi qualitativi per  $X = \mathbb{R}$  sono utili le seguenti considerazioni

- Rintracciare punti fissi
- Studiare il segno della derivata
- Soluzioni diverse non si incrociano per unicità locale
- Teorema di approssimazione lineare.

Di solito ci interesseranno equazioni in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Seguono alcuni modi per trasformare alcuni tipi di equazioni differenziali nella forma  $\dot{x} = F(x)$ <sup>1</sup>.

**Esempio 0.7** (Ordine superiore).

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} = -kx, \quad k > 0.$$

Ponendo  $y = \dot{x}$  troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

**Esempio 0.8** (Sistema non autonomo).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = f(x) + g(t)$$

Possiamo linearizzare come segue

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}.$$

## Sistemi discreti

Definiamo ora sistemi dinamici discreti

**Definizione 0.9** (Sistema dinamico a tempo discreto).

Un **sistema dinamico (a tempo) discreto** è una terna  $(X, \mathbb{N}, T)$  dove  $X \in \{\mathbb{R}, [a, b], S^1\}$  e  $T : X \rightarrow X$  continua. Il sistema dinamico è dato da  $(X, \mathbb{N}, S)$  dove  $S(n, x) = T^n(x)$ .

*Osservazione 0.10.*

Se  $T$  è invertibile possiamo estendere un sistema dinamico discreto sostituendo  $\mathbb{N}$  con  $\mathbb{Z}$  e ponendo (per  $n \in \mathbb{N}^+$ )  $S(-n, x) = (T^{-1})^n(x)$ .

---

<sup>1</sup>Non metterò mai più le barre se posso.

**Esempio 0.11** (Successione per ricorrenza).

Una successione per ricorrenza è un sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}) \\ x_0 = a \end{cases}$$

**Esempio 0.12** (Mappa di Bernoulli).

Consideriamo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad T : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

Osserviamo che l'unico punto fisso è 0, ma reiterando da un punto qualsiasi non c'è modo che la successione vi tendi. Inoltre la distanza tra punti si raddoppia ad ogni iterata (a meno del modulo). Questo è uno dei primi esempi di sistemi caotici.

# **Parte I**

## **Sistemi continui**

# Capitolo 1

## Insiemi invarianti, Orbite e Omega-limiti

### 1.1 Orbite, punti fissi e periodici

**Definizione 1.1** (Orbita).

Definiamo l'**orbita positiva** di un'equazione di flusso  $\phi$  come

$$\mathcal{O}^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(x).$$

In modo simile definiamo l'**orbita negativa** e l'**orbita**.

La **traiettoria** di  $x$  è il grafico  $t \mapsto \phi_t(x)$  contenuto in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d\textcolor{blue}{1}}$ .

**Definizione 1.2** (Punti fissi).

Un **punto fisso**  $x \in \mathbb{R}^d$  è un punto tale che  $F(x) = 0$ .

*Osservazione 1.3.*

L'orbita di un punto fisso è composta da un singoletto.

**Definizione 1.4** (Punti periodici).

Un punto  $x \in \mathbb{R}^d$  è **periodico** se esiste  $T > 0$  tale che

$$\phi_{T+s}(x) = \phi_s(x) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e  $\phi_s(x) \neq x$  per ogni  $s \in (0, T)$ .

$T$  è detto **periodo minimo** di  $x$ .

*Osservazione 1.5.*

L'orbita di un punto periodico è data da  $\mathcal{O}(x) = \{\phi_s(x) \mid s \in [0, T)\}$ .

*Osservazione 1.6* (Simulazione).

Di solito per tracciare orbite usiamo il computer. Il problema è che è difficile fargli assumere *determinate condizioni iniziali*, anche se queste rare orbite possono essere essenziali per capire bene il funzionamento del sistema (pensa a orbite limite o periodiche).

---

<sup>1</sup>questa è la terminologia italiana. In inglese "trajectory" corrisponde alla nostra orbita, non alla traiettoria.

## 1.2 Insiemi invarianti

**Definizione 1.7** (Insiemi invarianti).

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  si dice **positivamente invarianti** se per ogni  $x \in A$ ,  $\phi_t(x) \in A$  per ogni  $t \geq 0$ . In modo simile definiamo insiemi **negativamente invarianti** e **invarianti**.

*Osservazione 1.8* (Le orbite sono invarianti).

Le orbite positive sono positivamente invarianti, le orbite negative sono negativamente invarianti e le orbite sono invarianti.

*Dimostrazione.*

Segue dal fatto che  $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ . □

**Definizione 1.9** (Integrale primo).

Una funzione  $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \in C^1(\mathbb{R}^d)$  è un integrale primo per  $\dot{x} = F(x)$  se per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\dot{I}(x) \doteq \langle \nabla I(x), F(x) \rangle = \frac{d}{dt} I(\phi_t(x)) \Big|_{t=0} = 0.$$

**Proposizione 1.10** (Costruzione di insiemi invarianti da curve di livello).

Sia  $c \in \mathbb{R}$  e  $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \in C^1$  tale che  $\nabla I|_{\{I=c\}} \not\equiv 0$  e  $\dot{I}|_{\{I=c\}} = 0$ , allora  $\{I = c\}$  è invarianti.

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in I_c$ . In particolare  $\nabla I(x_0) \neq 0$ . Per continuità esiste un intorno  $U$  dove la condizione  $\nabla I(x_0) \neq 0$  è vera. A meno di cambio di variabile  $h$  derivante dal teorema delle funzioni implicite, poniamo  $h(U \cap I_c) = \{y = 0\}$  (dove le nuove coordinate sono  $(\underline{x}, y)$ ). Il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, y) \\ \dot{y} = g(\underline{x}, y) \end{cases} \quad \text{con } g(\underline{x}, 0) = 0 \quad \forall (\underline{x}, y) \in h(U),$$

dove  $(\underline{f}, g) = h \circ F$ .

Osservo che se una soluzione rispetta il sistema

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(x, y) \\ \dot{y} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

allora rispetta anche il sistema originale perché non mi sposto mai da  $\{y = 0\}$  e quindi la condizione  $\dot{y} = 0$  resta sempre vera. Per Cauchy-Lipschitz questa soluzione è l'unica che stavamo cercando e applicando  $h^{-1}$  troviamo l'unica soluzione al sistema originale e, appunto, questa rimane entro  $I_c$ . □

**Corollario 1.11** (Invarianza degli insiemi di livello di integrali primi).

Se  $I$  è un integrale primo allora per ogni  $c \in \mathbb{R}$  l'insieme

$$I_c = \{I(x) = c\}$$

è invarianti.

*Osservazione 1.12* (Intuizione geometrica).

Se  $\nabla I(x) \neq 0$ , la condizione  $\dot{I}(x) = 0$  afferma che  $\nabla I(x)$  e  $F(x)$  sono perpendicolari. Per il teorema delle funzioni implicite, se  $x \in I_c$  abbiamo che un vettore normale a  $I_c$  in  $x$  è  $\nabla I$ , dunque se  $F(x)$  vi è perpendicolare si ha che  $F(x) \in T_x I_c$ , in particolare l'orbita tende a procedere rimanendo nello spazio tangente, cioè resta contenuta in  $I_c$ .

### 1.3 Passaggio a coordinate polari

In  $\mathbb{R}^2$  cerchiamo di capire come trasformare un problema differenziale da coordinate cartesiane a polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{array} \right.$$

**Proposizione 1.13** (Invarianza cerchi in coordinate polari).

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = f(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = g(\rho, \theta) \end{cases}$$

se esiste  $\rho_0 > 0$  tale che  $f(\rho_0, \theta) = 0$  per ogni  $\theta$  allora  $\{\rho = \rho_0\}$  è invariante.

*Dimostrazione.*

Segue da (1.10) prendendo  $I(\rho, \theta) = \rho$ . □

### 1.4 Alpha e Omega limiti

**Definizione 1.14** (Alpha e Omega limiti).

Dato  $x \in \mathbb{R}^d$  chiamiamo  **$\omega$ -limite** di  $x$  l'insieme

$$\omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \exists \{t_n\} \nearrow +\infty \text{ t.c. } \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t_k}(x) = y \right\}.$$

Similmente definiamo l' **$\alpha$ -limite** considerando i limiti di successioni di tempi che vanno a  $-\infty$ .

*Osservazione 1.15.*

In realtà non è necessario chiedere successioni monotone. Per successioni generali che tendono a  $\pm\infty$  basta passare a sottosuccessioni.

**Esempio 1.16.**

Seguono esempi di  $\alpha$  e  $\omega$  limiti semplici:

- Se  $x$  è un punto fisso  $\alpha(x) = \omega(x) = \{x\}$
- Se  $x$  è periodico  $\alpha(x) = \omega(x) = \mathcal{O}(x)$

**Definizione 1.17** (Omo-/etero-clino).

Siano  $x_1$  e  $x_2$  punti fissi e supponiamo  $\{x_1\} = \alpha(y)$ ,  $\{x_2\} = \omega(y)$ .

Se  $x_1 = x_2 = x$  allora  $y$  è detto **omoclino** di  $x$ .

Se  $x_1 \neq x_2$  allora  $y$  è detto **eteroclino**.

**Proposizione 1.18** (Orbita limitata implica invarianza di  $\omega$ -limite).

Se  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $\mathcal{O}^+(x)$  è limitata allora  $\omega(x)$  è non vuoto, compatto e invariante.

*Dimostrazione.*

Sia  $\{\tau_j\} \rightarrow +\infty$  tale che  $\tau_1 > 0$  e  $\tau_{j+1} > \tau_j$ . Verifichiamo in linea preliminare la seguente uguaglianza:

$$\omega(x) = \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}.$$

$\subseteq$  Segue dal fatto che chiuso implica chiuso per successioni: per ogni  $t \geq 0$  vale

$$\begin{cases} y = \lim_k \phi_{t_k}(x) \\ \phi_{t_k}(x) \in \mathcal{O}^+(\phi_t(x)) \end{cases} \implies y \in \overline{\mathcal{O}^+(\phi_t(x))}$$

$\supseteq$  Sia  $y \in \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}$ . Per definizione di intersezione si ha che per ogni  $j \geq 1$  abbiamo  $y \in \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}$ . In particolare, per una caratterizzazione di chiusura in spazi metrici, esiste  $t_j > 0$  tale che

$$d(\phi_{t_j + \tau_j}(x), y) = d(\phi_{t_j}(\phi_{\tau_j}(x)), y) \leq \frac{1}{j}.$$

Segue che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} (\phi_{t_j + \tau_j}(x), y) = 0$ , cioè  $y \in \omega(x)$ .

Verificata l'uguaglianza sopra, segue immediatamente che  $\omega(x)$  è non vuoto e compatto (intersezione di compatti inscatolati non vuoti). Per mostrare l'invarianza mostriamo che  $y \in \omega(x) \implies \phi_t(y) \in \omega(x)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Per definizione di  $\omega$ -limite esiste una successione  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$ . La tesi segue dalla seguente catena di identità:

$$\phi_t(y) = \phi_t \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t_k}(x) \right) \stackrel{\text{continuità in } t}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_k}(x) \in \omega(x).$$

□

## Capitolo 2

# Stabilità e funzioni di Lyapunov

In questo capitolo e nel prossimo andiamo a studiare come si comportano i punti fissi<sup>1</sup>. Raccolte queste informazioni sui punti stabili speriamo di poterle poi “incollare” per raggiungere un’idea sufficientemente accurata del comportamento dell’intero sistema.

### 2.1 Stabilità per Lyapunov

**Definizione 2.1** (Punti stabili per Lyapunov).

Un punto  $x \in \mathbb{R}^d$  si dice

- **stabile** (nel senso di Lyapunov) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $y \in B_\delta(x)$  si ha che per ogni  $t \geq 0$  abbiamo  $\phi_t(y) \in B_\varepsilon(\phi_t(x))$ .
- **asintoticamente stabile** (nel senso di Lyapunov) se è stabile (nel senso di Lyapunov) ed esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $y \in U$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0.$$

- **instabile** (nel senso di Lyapunov) se non è stabile.

*Osservazione 2.2* (Stabilità per punti fissi).

Se  $x$  è un punto fisso è stabile nel senso di Lyapunov se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che  $d(y, x) < \delta \implies d(\phi_t(y), x) < \varepsilon$  per ogni  $t \geq 0$ . Similmente è asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se è stabile ed esiste un intorno  $U$  tale che  $\forall y \in U$  abbiamo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = x$ .

**Definizione 2.3** (Stabilità orbitale).

Un insieme<sup>2</sup>  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$  è **orbitalmente stabile** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $d(y, \Gamma) < \delta \implies d(\phi_t(y), \Gamma) < \varepsilon$  per ogni  $t \geq 0$ .

**Definizione 2.4** (Dominio di asintotica stabilità).

Se  $x_0$  è un punto asintoticamente stabile definiamo il **dominio di asintotica stabilità** come

$$\{y \in \mathbb{R}^d \mid \omega(y) = \{x_0\}\}.$$

<sup>1</sup>in questo studiamo la stabilità, nel prossimo cercheremo quando possibile di descrivere un comportamento più preciso

<sup>2</sup>preferibilmente positivamente invariante

*Osservazione 2.5* (Convergenza non è sufficiente per asintotica stabilità).

Esistono punti che rispettano la condizione di convergenza nella definizione di asintotica stabilità che NON sono stabili (e quindi non vengono classificati come asintoticamente stabili).

Un punto di questo tipo è  $(1, 0)$  nel sistema (espresso in coordinate polari)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\theta) \end{cases}$$



Figura 2.1: In un intorno di  $(1, 0)$  ci sono sempre punti con  $y > 0$  e questi “fanno un giro” prima di convergere.

## 2.2 Funzioni di Lyapunov

**Definizione 2.6** (Funzione di Lyapunov).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  punto fisso per  $F \in C^1$  e  $U(x_0)$  un suo intorno. Una funzione  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **funzione di Lyapunov per  $x_0$**  se  $V \in C^1(U(x_0))$  e

- $V(x) > V(x_0)$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$
- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0$  per ogni  $x \in U(x_0)$ .

Una funzione di Lyapunov è **stretta** se  $\dot{V}(x) < 0$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ .

**Teorema 2.7** (Primo teorema di Lyapunov).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un punto fisso per  $F \in C^1$  e  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapunov per  $x_0$ . Allora  $x_0$  è un punto stabile nel senso di Lyapunov.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subseteq U(x_0)$ . Definiamo

$$m = \min_{\partial B_\varepsilon(x_0)} V, \quad S_m = \left\{ y \in \overline{B_\varepsilon(x_0)} \mid V(y) < m \right\}.$$

Osserviamo che  $x_0 \in S_m$  e, poiché  $S_m = V^{-1}((-\infty, m)) \cap B_\varepsilon(x_0)$ ,  $S_m$  è aperto, dunque esiste  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(x_0) \subseteq S_m$ .

Sia ora  $y \in B_\delta(x_0)$ . Per definizione  $V(y) < m$ . Osserviamo che

$$\frac{d}{dt} V(\phi_t(y)) = \dot{V}(\phi_t(y)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ t.c. } \forall 0 \leq s \leq t \phi_s(y) \in U(x_0),$$

in particolare, per gli stessi valori di  $t$ ,  $\phi_t(y) < m$ .

Per assurdo supponiamo che esista  $\bar{t} > 0$  tale che  $\phi_{\bar{t}}(y) \notin B_\varepsilon(x_0)$ . Per continuità di  $\phi_t(y)$  possiamo supporre  $\phi_{\bar{t}}(y) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$  e tale che per ogni  $0 \leq s \leq t$  si ha  $\phi_s(y) \in U(x_0)$ . Si ha dunque  $V(\phi_{\bar{t}}(y)) \geq m > V(\phi_t(y))$  per ogni  $t \geq 0$  tale che  $0 \leq s \leq t$  abbiamo  $\phi_s(y) \in U(x_0)$ , ma  $\partial B_\varepsilon(x_0) \subset \overline{B}_\varepsilon(x_0) \subseteq U(x_0)$ , da cui un assurdo.  $\square$

Introduciamo ora un criterio che è spesso utile per mostrare l'asintotica stabilità:

**Proposizione 2.8** (Criterio di La Salle).

*Sia  $x_0$  un punto fisso per  $F \in C^1$  e  $V$  una funzione di Lyapunov per  $x_0$  su  $U(x_0)$ . Se  $y \in U(x_0)$  è tale che  $\mathcal{O}^+(y)$  è limitata e contenuta in  $U(x_0)$  allora  $\omega(y)$  è un insieme non vuoto, compatto e invariante tale che  $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\}$ .*

*Dimostrazione.*

Se per  $y$  valgono le ipotesi, per il criterio di invarianza per  $\omega$ -limiti (1.18) abbiamo che  $\omega(y)$  è non vuoto, compatto e invariante.

Osserviamo ora che  $t \mapsto V(\phi_t(y))$  è non crescente e monotona, dunque esiste  $c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi_t(y))$ . Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} z \in \omega(y) &\iff \exists t_k \nearrow +\infty \text{ t.c. } \phi_{t_k}(y) \rightarrow z \implies \\ &\implies V(z) = V\left(\lim_k \phi_{t_k}(y)\right) \stackrel{V \text{ cont.}}{=} \lim_k V(\phi_{t_k}(y)) = c. \end{aligned}$$

Si ha dunque che  $\omega(y) \subseteq \{V = c\}$ . Per l'invarianza di  $\omega(y)$  si ha che  $V \circ \phi(\cdot)|_{\omega(y)}$  è costante per ogni  $z \in \omega(y)$ . Questo significa che  $\dot{V}|_{\omega(y)} = 0$ , da cui  $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\}$ .  $\square$

*Osservazione 2.9.*

Nelle ipotesi della proposizione,  $x_0$  è stabile e quindi esiste un  $y$  che rispetta le ipotesi.

**Teorema 2.10** (Secondo teorema di Lyapunov).

*Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un punto fisso per  $F \in C^1$  e  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapunov stretta per  $x_0$ , allora  $x_0$  è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.*

Per il primo teorema (2.7) abbiamo che  $x_0$  è stabile, quindi dobbiamo solo verificare la convergenza.

Scelto  $\varepsilon > 0$  sia  $\delta > 0$  tale che  $y \in B_\delta(x_0)$  e  $\phi_t(y) \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U(x_0)$ . Allora per La Salle (2.8)  $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\} \cap U(x_0) = \{x_0\}$ .  $\square$

*Osservazione 2.11.*

Se  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di Lyapunov stretta per  $x_0$  allora

$$V_m = \{y \in U(x_0) \mid V(y) \leq m\}$$

è contenuto nel dominio di asintotica stabilità per ogni  $m$  tale che  $V_m \subseteq U(x_0)$ . In particolare vale per  $\tilde{V}_m$  dove

$$\tilde{V}_m = \max \{m \mid V_m \subseteq U(x_0)\}.$$

*Osservazione 2.12.*

Se  $x_0$  è un punto fisso

- Funzione di Lyapunov  $\implies x_0$  stabile
- Funzione di Lyapunov stretta  $\implies x_0$  asintoticamente stabile
- Funzione di Lyapunov + unico insieme invariante di  $\{\dot{V} = 0\}$  è il punto garantisco comunque asintotica stabilità (per il criterio di La Salle (2.8))
- Se  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^1(U(x_0))$  tale che  $V(x) > V(x_0)$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$  e  $\dot{V}(x) > 0$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$  allora  $x_0$  è *instabile*.

### 2.2.1 Primo approccio per cercare funzioni di Lyapunov

Nella risoluzione di esercizi spesso si vuole trovare una funzione di Lyapunov. Se non ci sono migliori metodi a disposizione per lo studio del punto, una scelta che di solito funziona quando può almeno localmente (per  $y_0 = (y_1, \dots, y_d)$  punto fisso in esame) è

$$V(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d a_i (x_i - y_i)^{2n_i},$$

cioè costruiamo un paraboloide sopra il punto fisso in esame. Gli insiemi di livello di questa funzione sono paraboloidi contenenti  $y_0$ .

# Capitolo 3

## Linearizzazione

### 3.1 Idea della linearizzazione

Per capire cosa aspettarci in un intorno di un punto fisso  $x_0$  proviamo a linearizzare:

$$\dot{x} = F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{=0} + \mathcal{D}F(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

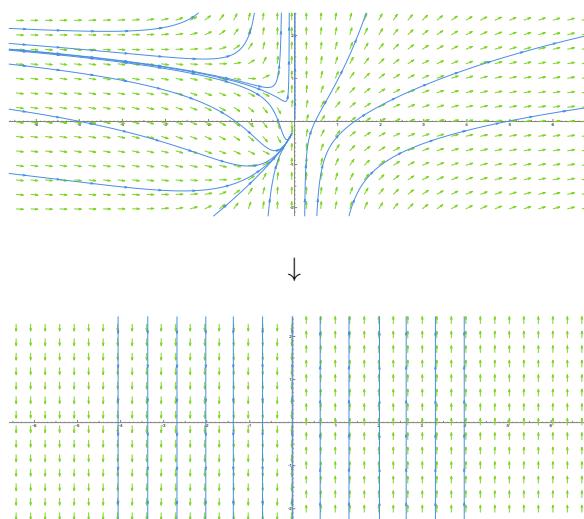
Se  $\|x - x_0\|$  è abbastanza piccolo speriamo di trovare informazioni decentemente affidabili su  $F(x)$  vicino a  $x_0$  studiando  $\mathcal{D}F(x_0)$ .

**Esempio 3.1** (Esempio dove linearizzazione fallisce).

Linearizziamo il sistema dato da  $F(x, y) = (x^2, x + y^2)$ .

$$\mathcal{D}F(0, 0) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il sistema linearizzato ha equazione  $G(x, y) = (0, x)$ . Problema: il sistema originale si comporta in modo un po' diverso nell'origine (acquisto una famiglia di punti fissi, orbite si deformano ecc...).



Possiamo caratterizzare i punti stabili “adatti allo studio tramite linearizzazione” dando la seguente definizione

**Definizione 3.2** (Punti fissi iperbolici).

Un punto fisso  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  per  $F \in C^1$  si dice **iperbolico** se  $\mathcal{D}F(x_0)$  non ha autovalori con parte reale nulla.

Questi sono i punti “buoni” perché vale il seguente teorema.

**Teorema 3.3** (Hartman-Grobman).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un punto fisso iperbolico per  $\dot{x} = F(x)$ ,  $F \in C^1$  e sia  $\phi_t$  il flusso di questo sistema.

Consideriamo ora il **sistema linearizzato in  $x_0$** , ovvero il sistema dato da

$$\dot{y} = \mathcal{D}F(x_0)y, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

e sia  $\psi_t$  il flusso di questo sistema.

Esistono allora  $U$  intorno di  $x_0$ ,  $V$  intorno di 0 e un omeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tale che per ogni  $x \in U$  si ha che per ogni  $t$  tale che  $\phi_t(x) \in U$

$$h(\phi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

*Osservazione 3.4.*

La condizione  $\Re(\lambda) = 0$  è equivalente a  $|e^\lambda| = 1$ , cioè  $e^\lambda = e^{i\theta}$ . Intuitivamente questo ci dice che l'autospazio generalizzato corrispondente a  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  non è attratto verso il punto fisso ma non vi è neanche respinto nel caso lineare, dunque nel sistema originale la sorte dei punti è determinata da espressioni non lineari.

*Osservazione 3.5.*

Anche se  $F$  ha maggiore regolarità, in generale  $h$  non acquista regolarità.

Ricordiamo il seguente

**Teorema 3.6** (Decomposizione in forma di Jordan reale).

Sia  $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ , allora esiste  $P \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$  tale che  $\det P \neq 0$  e  $\Lambda = P^{-1}AP$  è diagonale a blocchi.

Supponiamo che gli autovalori di  $A$  siano in una delle seguenti forme

- $\{\lambda_j\}_{j \in \{1, \dots, k\}}$  con  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  e  $m_{alg}(\lambda_j) \leq 3$
- $\{a_j + ib_j\}_{j \in \{1, \dots, \ell\}}$  con  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j \neq 0$  e  $m_{alg}(a_j + ib_j) = 1$ .

Allora  $\Lambda = diag(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, B_1, \dots, B_\ell)$  con

$$\begin{aligned} \Lambda_j &\in \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, (\lambda_j) \right\} \\ B_j &= \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osserviamo che se  $\dot{y} = DF(x_0)y$  ed esiste  $P$  invertibile tale che  $P^{-1}DF(x_0)P = \Lambda$  con  $\Lambda$  in forma di Jordan reale allora, ponendo  $z = P^{-1}y$  troviamo un omeomorfismo tale che

$$\dot{z} = P^{-1}\dot{y} = P^{-1}DF(x_0)y = (P^{-1}DF(x_0)P)z = \Lambda z.$$

**Notazione 3.7.**

Sia  $V_{\lambda_j}$  l'autospazio generalizzato di  $\lambda_j$ , similmente per  $a_j + ib_j$ .

**Proposizione 3.8** (Gli autospazi generalizzati sono invarianti).

Per  $\dot{y} = Ay$ ,  $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$  si ha che  $V_{\lambda_j}$  e  $V_{a_j+ib_j}$  sono insiemi invarianti.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo che  $A = \Lambda$  sia in forma di Jordan reale e a meno di permutare le coordinate mostriamo la tesi solo per  $V_{\lambda_1}$ <sup>1</sup>. Osserviamo che un generico vettore di  $V_{\lambda_1}$  è della forma  $y_0 = ((y_0)_1, \dots, (y_0)_s, 0, \dots, 0)$ , dove  $s = m_{alg}(\lambda_1)$  (dove poniamo  $s = 2$  nel caso di autovalore complesso). La tesi segue calcolando:

$$\phi_t(y_0) = e^{t\Lambda}y_0 = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_s t})y_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_s t} & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (y_0)_1 \\ \vdots \\ (y_0)_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{\lambda_1}.$$

□

**Definizione 3.9** (Sottospazi stabili).

Il **sottospazio stabile** di 0 per il sistema  $\dot{y} = Ay$  è l'insieme

$$E^s(0) = \text{Span}(v \in V_{\lambda_i} \mid \Re(\lambda_i) < 0).$$

Il **sottospazio instabile** ( $E^u(0)$ ) e il **sottospazio centrale** ( $E^c(0)$ ) sono definiti in modo analogo considerando  $\Re(\lambda_i) > 0$  e  $\Re(\lambda_i) = 0$  rispettivamente.

**Teorema 3.10** (Invarianza e caratterizzazione dei sottospazi stabili).

Dato il sistema  $\dot{y} = Ay$  si ha che:

1.  $\dim E^u(0) + \dim E^s(0) + \dim E^c(0) = d$

2.  $E^{s,c,u}(0)$  è invariante per  $\phi_t$

3.  $E^s(0) = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = 0 \right\}$

4.  $E^u(0) = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = 0 \right\}.$

*Dimostrazione.* (NON DATA DURANTE IL CORSO).

Il primo punto segue da noti risultati sugli autospazi generalizzati.

Il secondo punto è una conseguenza dell'invarianza degli autospazi (3.8).

Gli ultimi due punti seguono da come funzionano i  $e^{\Re(\lambda)t}$  (questi fattori appaiono dopo essersi portati in forma di Jordan). □

---

<sup>1</sup>dove  $\lambda_1$  in questo caso si riferisce ad autovalori potenzialmente complessi.

## 3.2 Pozzi e Sorgenti

**Definizione 3.11** (Pozzi e sorgenti).

Sia  $x_0$  un punto fisso. Esso si dice

- **pozzo** se ogni autovalore di  $\mathcal{D}F(x_0)$  ha parte reale negativa,
- **sorgente** se ogni autovalore di  $\mathcal{D}F(x_0)$  ha parte reale positiva.

*Osservazione 3.12.*

Si può pensare a sorgenti come pozzi per tempi negativi.

**Proposizione 3.13** (Stabilità dei pozzi).

*I pozzi sono asintoticamente stabili*

*Dimostrazione.*

A meno di traslare il sistema supponiamo  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$ .

Poiché cambi di base lineari non cambiano la stabilità dell'origine supponiamo che  $\mathcal{D}F(0)$  sia in forma di Jordan reale. Trattiamo prima i casi dove  $\mathcal{D}F(0)$  consiste di un solo blocco di Jordan e poi uniamo i risultati.

$\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$  Supponiamo che

$$\mathcal{D}F(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \implies \dot{x} = F(x) = \underbrace{F(0)}_{=0} + \mathcal{D}F(0)x + O(\|x\|^2).$$

Dato  $\varepsilon > 0$  consideriamo il cambio di base

$$y = (y_1, \dots, y_d), \quad y_i = \varepsilon^{-i+1} x_i,$$

da cui

$$\dot{y} = Ay + \tilde{G}(y), \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & \varepsilon \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}(y) = O(\|y\|^2).$$

Affermiamo che la funzione

$$V(y) = \frac{1}{2} \|y\|^2$$

è di Lyapunov stretta in un intorno di 0. La prima condizione è evidentemente verificata, quindi dobbiamo solo trovare un intorno dove  $\dot{V}(y) < 0$  per  $y \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \sum_{i=1}^{d-1} y_i \underbrace{(\lambda y_i + \varepsilon y_{i+1} + \tilde{G}_i(y))}_{\dot{y}_i} + y_d \underbrace{(y_d + \tilde{G}_d(y))}_{\dot{y}_d} = \\ &= \lambda \|y\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{d-1} y_i y_{i+1} + y \cdot \tilde{G}(y) \leq \\ &\leq \lambda \|y\| + \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{i=1}^{d-1} y_i^2 + \sum_{i=2}^d y_i^2 \right) + O(\|y\|^3) = \\ &= \left( \lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_1^2 + y_d^2) + (\lambda + \varepsilon) \sum_{i=2}^{d-1} y_i^2 + O(\|y\|^3) \leq \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \|y\|^2 + O(\|y\|^3). \end{aligned}$$

Cerchiamo dunque condizioni valide per  $\varepsilon$  e  $\|y\|$ :  
 Poiché  $\lambda < 0$  è lecito fissare  $\varepsilon \in (0, |\lambda|)$ . Per le proprietà degli  $O$  grandi esistono  $r, C > 0$  tali che

$$\|y\| < r \implies \dot{V}(y) \leq ((\lambda + \varepsilon) + C \|y\|) \|y\|^2.$$

Ponendo ora  $\lambda + \varepsilon + C \|y\| < 0$  si ha che se

$$r' < \min \left\{ r, \frac{|\lambda + \varepsilon|}{C} \right\}$$

allora per  $y \in B_{r'}(0) \setminus \{0\}$  vale

$$\dot{V}(y) \leq ((\lambda + \varepsilon) + C \|y\|) \|y\|^2 < 0,$$

cioè  $V$  è una funzione di Lyapunov stretta per  $x_0$  in un opportuno cambio di base, dunque  $x_0$  è asintoticamente stabile per il secondo teorema di Lyapunov (2.10).

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  Supponiamo che

$$\mathcal{D}F(0) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

A meno di un coniugio troviamo

$$\dot{y} = Ay + \tilde{G}(y), \quad A = \begin{pmatrix} a & b & \varepsilon & 0 \\ -b & a & 0 & \varepsilon \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

e concludiamo in modo simile al caso precedente.

**generale** Segue dai due casi precedenti dando un ulteriore limitazione con gli  $O$  grandi sui termini non lineari.

□

### 3.3 Classificazione dei punti stabili lineari sul piano

Consideriamo i sistemi lineari di questa forma

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Sappiamo che

$$\phi_t(x_0) = e^{At}x_0,$$

in particolare  $x_0 = 0$  è un punto fisso.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A.$$

Segue che gli autovalori di  $A$  sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr } A \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A.$$

Consideriamo i possibili casi:

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono reali distinti.

\*) Se  $\text{tr } A > 0$  allora  $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ , da cui a meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \dot{u} = \lambda_+ u \\ \dot{v} = \lambda_- v \end{cases},$$

da cui le soluzioni sono

$$(u(t), v(t)) = (e^{\lambda_+ t} u_0, e^{\lambda_- t} v_0).$$

Questa situazione è detta **nodo instabile**.

Osserviamo che  $E^u(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^s(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

\*) Se  $\text{tr } A < 0$  allora  $\lambda_- < \lambda_+ < 0$  e troviamo il **nodo stabile**.

Osserviamo che  $E^s(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^u(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono complessi coniugati.  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Segue che  $\text{tr } A = 2\alpha$ . A meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

\*) Se  $\alpha > 0$  troviamo

$$x(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **fuoco instabile**. Osserviamo che  $E^u(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^s(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

\*) Se  $\alpha < 0$  troviamo

$$x(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **fuoco stabile**. Osserviamo che  $E^s(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^u(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

\*) Se  $\alpha = 0$  troviamo

$$x(t) = R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **centro**. Osserviamo che  $E^c(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^s(0) = E^u(0) = \{0\}$ .

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Gli autovalori coincidono e sono della forma  $\lambda = \text{tr } A/2$ . A meno di coniugio abbiamo

due possibilità:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = e^{\lambda t} x_0$$

Questa situazione è detta **Stella stabile/instabile** per segno negativo o positivo della traccia rispettivamente.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = e^{\lambda t} (u_0 + tv_0, v_0).$$

Questa situazione è detta **nodo stabile/instabile improprio**.

$$\begin{cases} \det A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Gli autovalori sono reali di segno opposto  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ . A meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \implies x(t) = (u_0 e^{\lambda_+ t}, v_0 e^{\lambda_- t}).$$

Troviamo un **punto di sella**. Il segno della traccia specifica solo verso quale asse le iperboli sono schiacciate.

Osserviamo che  $E^s(0) = \{x = 0\}$ ,  $E^u(0) = \{y = 0\}$ ,  $E^c(0) = 0$ , cioè lo “spazio tangente” in 0 si decompone in una retta stabile e una instabile.

$$\det A = 0$$

Gli autovalori sono 0 e  $\text{tr } A$ . In tutti i casi a meno di coniugio una coordinata resta costante, dunque troviamo delle **rette**.

Riassumiamo i casi nella seguente tabella

$\text{sgn } \det A$	$\text{sgn } \Delta$	$\text{sgn } \text{tr } A$	Nome
+	+	+	Nodo instabile
+	+	-	Nodo stabile
+	-	+	Fuoco instabile
+	-	-	Fuoco stabile
+	-	0	Centro
+	0	+	Stella o nodo improprio instabile
+	0	-	Stella o nodo improprio stabile
-	+	•	Punto di Sella
0	•	•	Rette

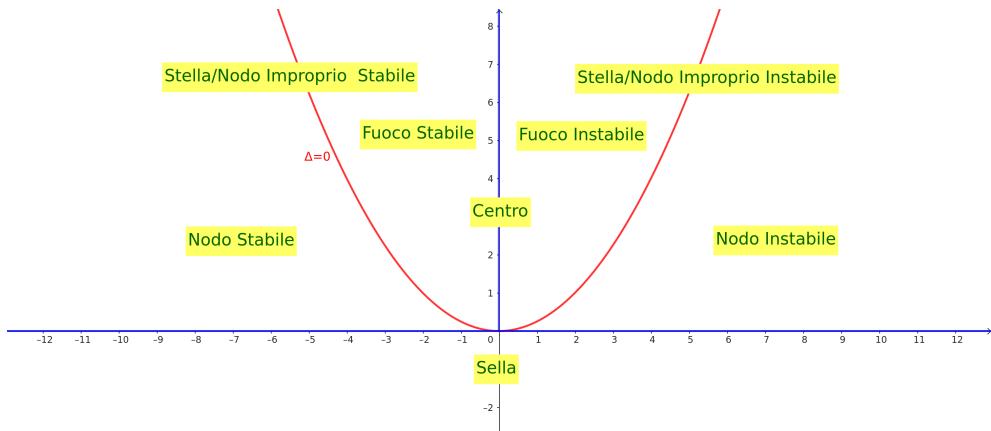


Figura 3.1: Utile diagramma che organizza i tipi di punti stabili lineari. L’asse  $x$  corrisponde ai possibili valori di  $\text{tr } A$  e l’asse  $y$  ai possibili valori di  $\det A$ . La parabola rossa indica il luogo dove  $\Delta = 0$ ; nella regione sopra la parabola troviamo  $\Delta < 0$  e sotto  $\Delta > 0$ . In blu sono indicati i valori di  $\text{tr } A$  e  $\det A$  per cui il punto stabile in considerazione NON è iperbolico.

Riportiamo dei diagrammi di fase per evidenziare la forma delle orbite.

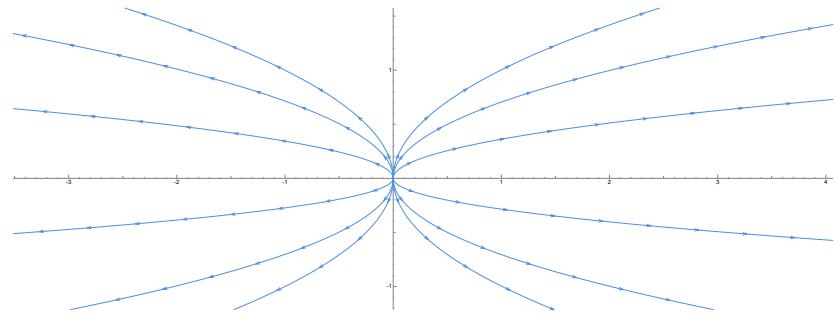


Figura 3.2: Nodo instabile

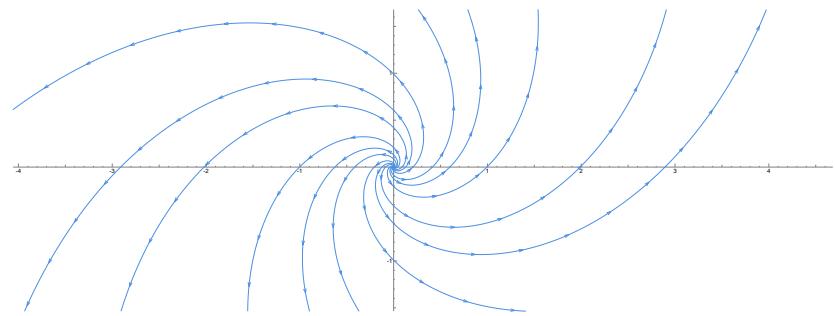


Figura 3.3: Fuoco instabile

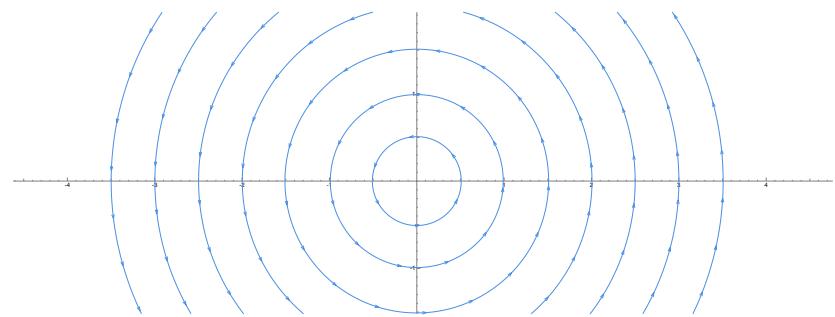


Figura 3.4: Centro

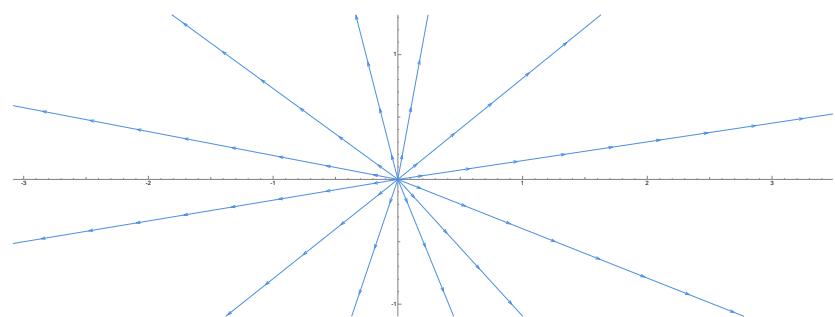


Figura 3.5: Stella instabile

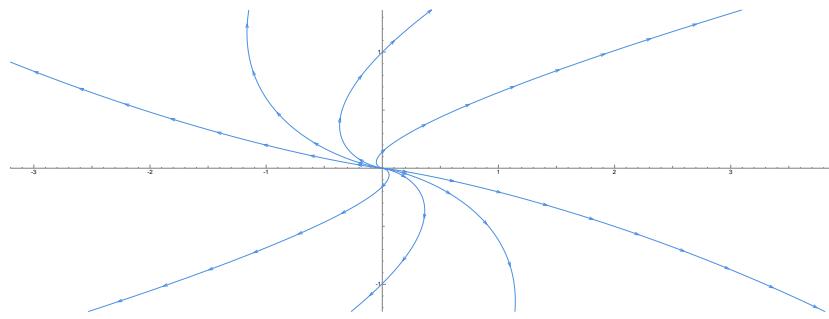


Figura 3.6: Nodo improprio instabile

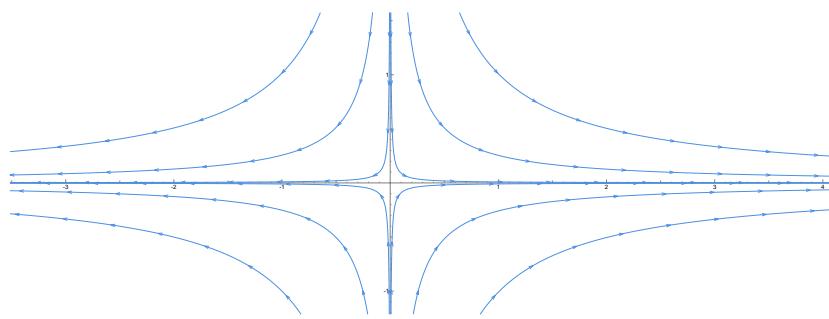


Figura 3.7: Sella

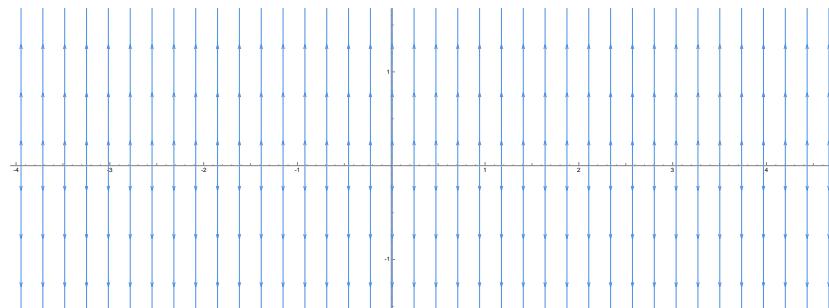


Figura 3.8: Rette per matrice diagonalizzabile

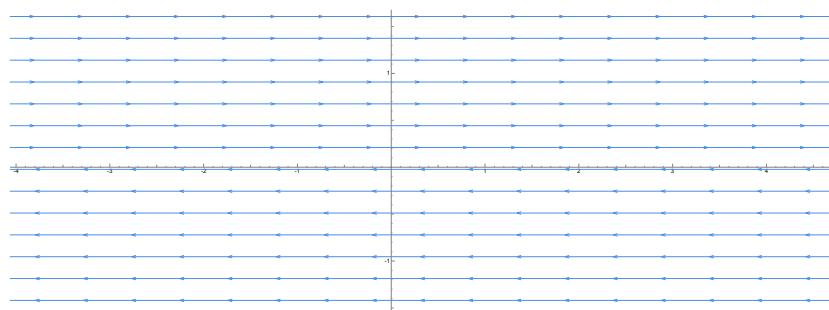


Figura 3.9: Rette per blocco di Jordan nilpotente

## Capitolo 4

# Integrali Primi e Sistemi Hamiltoniani

In questo capitolo introduciamo una classe di sistemi che ammettono integrale primo (e quindi ci permettono di fare uno studio globale guardando le curve di livello di questo). A volte, anche se un sistema non è della forma trattata in questo capitolo, è possibile studiarne il comportamento approssimandolo prima ad uno di questi e poi perturbando la soluzione trovata in modo opportuno.

### 4.1 Sistemi Hamiltoniani

#### Notazione 4.1.

Quando consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^{2d}$  in questo capitolo indichiamo le coordinate come  $(x, y) = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$  con  $x = q \in \mathbb{R}^d$  e  $y = p \in \mathbb{R}^d$ . In genere  $q$  è detto **coordinata generalizzata** e  $p$  è detto **momento generalizzato**.

Con la notazione  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$  intendiamo il vettore la cui componente  $i$ -esima è  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ . Similmente per  $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ .

#### Definizione 4.2 (Sistema Hamiltoniano).

Un sistema di ODE su  $\mathbb{R}^{2d}$  è un **sistema Hamiltoniano** se è della forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\dot{y} \end{pmatrix} = \nabla H \iff \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, d\},$$

dove  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^2(\mathbb{R}^{2d})$  detta **funzione Hamiltoniana** del sistema.

Il numero  $d$  è detto numero di **gradi di libertà**.

#### Osservazione 4.3.

Ad ogni funzione  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  è associato un sistema Hamiltoniano.

#### Proposizione 4.4 (Hamiltoniana è un integrale primo).

*Se  $H$  è una funzione Hamiltoniana allora è un integrale primo del sistema ad essa associato.*

*Dimostrazione.*

Basta calcolare  $\dot{H}$ .

$$\begin{aligned}\dot{H}(x, y) &= \nabla H(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right) = 0.\end{aligned}$$

□

#### Esempio 4.5.

Un sistema con due gradi di libertà è dato dal doppio pendolo, il quale è interamente determinato da due angoli. Lo spazio delle fasi è  $T^2 \times \mathbb{R}^2$  dove  $T^2 = S^1 \times S^1$  parametrizza i due angoli e  $\mathbb{R}^2$  le velocità angolari.

Osserviamo intuitivamente che  $\dim \{H = c\} = 3$ , che vedremo essere la minima dimensione che permette orbite caotiche.

#### Esempio 4.6 (Un grado di libertà e mezzo).

Se un sistema ha un grado di libertà ma non è autonomo possiamo reinterpretarlo come un sistema con due gradi di libertà dove abbiamo aggiunto il tempo e questi sistemi possono ancora presentare comportamenti caotici. Un esempio sono oscillatori armonici perturbati periodicamente.

#### Teorema 4.7 (Liouville).

Sia  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^3$  e sia  $\phi_t$  il flusso del sistema Hamiltoniano associato. Allora per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^{2d}$  misurabile si ha che per ogni  $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\phi_t(A)).$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, y) = F(\phi_t(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y}(\phi_t(x, y)) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(\phi_t(x, y)) \end{pmatrix}.$$

Poiché  $H$  è di classe  $C^3$ , si ha che  $\phi : (x, y, t) \mapsto \phi_t(x, y)$  è di classe  $C^2$ <sup>1</sup>, quindi

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{D}(\phi_t(x, y))) \stackrel{\text{regolarità}}{=} \underbrace{\mathcal{D}\left(\frac{d}{dt} \phi_t(x, y)\right)}_{=F(\phi_t(x, y))} = \mathcal{D}F(\phi_t(x, y)) \mathcal{D}(\phi_t(x, y)).$$

Poiché  $\mathcal{D}\phi_0(x, y) = I$ , possiamo integrare l'identità precedente<sup>2</sup> per trovare

$$\mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = \exp\left(\int_0^t \mathcal{D}F(\phi_s(x, y)) ds\right).$$

---

<sup>1</sup>Poiché  $H$  è  $C^3$  ne deriva che  $F$  è  $C^2$ . Dato che  $\phi' = F(\phi)$  si ha per il teorema del differenziale totale che  $\phi$  è almeno  $C^2$  in ogni entrata.

<sup>2</sup>è come se stessimo risolvendo insieme tutti i sistemi della forma

$$\frac{d}{dt} v(t) = \mathcal{D}F(\phi_t(x, y))v(t), \quad \text{per } v(t) = \mathcal{D}(\phi_t(x, y))e_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}.$$

Segue da una identità nota<sup>3</sup> che

$$\det \mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{tr} (\mathcal{D}F(\phi_s(x, y))) ds \right).$$

Per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i},$$

dunque  $\operatorname{tr} (\mathcal{D}F) = 0$ , da cui

$$\operatorname{tr} (\mathcal{D}F(\phi_s(x, y))) = 0.$$

Segue che

$$\det \mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = e^0 = 1.$$

Concludiamo con il seguente conto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_t(A)) &= \int_{\phi_t(A)} 1 d\mathcal{L} = \int_A |\det \mathcal{D}\phi_t(x, y)(x, y)| d\mathcal{L} = \\ &= \int_A 1 d\mathcal{L} = \mathcal{L}(A). \end{aligned}$$

□

#### 4.1.1 Sistemi meccanici con un grado di libertà

**Definizione 4.8** (Sistema meccanico).

Un **sistema meccanico** è un sistema Hamiltoniano della forma

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^\top A y + V(x)$$

con  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A \in Sym(d, \mathbb{R})$ . La funzione  $V$  è detta **potenziale**.

Studiamo un sistema meccanico con un grado di libertà:

A meno di riscalamento poniamo  $A = (1)$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'(x) \end{cases}$$

Osserviamo che i punti fissi sono  $\{(x, 0) \mid V'(x) = 0\}$ . La matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{D}F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x) & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{tr} \mathcal{D}F = 0, \det \mathcal{D}F = V''(x).$$

Se  $V''(x) = 0$  siamo in un caso degenere e il linearizzato non ci aiuta.

Se  $V''(x) < 0$  il punto  $(x, 0)$  è una sella.

Se  $V''(x) > 0$  il punto  $(x, 0)$  è un punto non iperbolico di tipo centro.

Il teorema di linearizzazione ci informa solo sul caso  $(x, 0)$  sella. Studiamo la stabilità del caso di tipo centro.

---

<sup>3</sup> $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$

**Proposizione 4.9** (Caratterizzazione dei punti fissi in sistema meccanico ad un grado di libertà).

*I punti fissi non degeneri<sup>4</sup> di un sistema meccanico ad un grado di libertà sono selle o centri<sup>5</sup>.*

*Idea di dimostrazione.*

Se  $(x_0, 0)$  fosse instabile, esisterebbe un  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  esiste  $z_0 \in B_\delta((x_0, 0))$  tale che  $\|\phi_t(z_0) - (x_0, 0)\| > \varepsilon$ . Poniamo

$$m_\varepsilon = \min_{\partial B_\varepsilon((x_0, 0))} H$$

e consideriamo un  $\varepsilon$  abbastanza piccolo in modo tale che  $m_\varepsilon \sup_{B_\varepsilon((x_0, 0))} H$ , che sappiamo esistere perché da noti criteri sulle derivate prime e seconde  $(x_0, 0)$  è un minimo locale di  $H$ . Poiché le orbite del sistema corrispondono alle curve di livello di  $H$  abbiamo trovato una contraddizione in quanto per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo le orbite non possono attraversare  $\partial B_\varepsilon((x_0, 0))$ .

Se  $(x_0, 0)$  fosse asintoticamente stabile esisterebbe un intorno di  $(x_0, 0)$  che converge a  $(x_0, 0)$ , in particolare l'area di questo intorno non si conserva, contraddicendo il teorema di Liouville (4.7).  $\square$

---

<sup>4</sup> $(x_0, 0)$  con  $V'(x_0) = 0$  e  $V''(x_0) \neq 0$   
<sup>5</sup>non solo nel linearizzato

## Capitolo 5

# Primi metodi di studio globale

### 5.1 Metodo delle isocline nel piano

Supponiamo  $F = (f, g)$  con  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ .

Introduciamo un metodo che permette di calcolare esplicitamente orbite in qualche caso.

**Proposizione 5.1** (Metodo delle isocline nel piano).

Sia  $(x_0, y_0)$  tale che  $F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , allora esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $\mathcal{O}(x_0, y_0) \cap U$  è il grafico di una funzione  $h(x)$  (se  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , altrimenti  $h(y)$ ) che risolve l'equazione differenziale

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}.$$

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , esiste dunque  $U$  intorno di  $(x_0, y_0)$  dove  $f$  non si annulla. Consideriamo la funzione

$$I(x, y) = y - h(x)$$

dove  $h(x)$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}, \quad h(x_0) = y_0$$

definita in un intorno di  $x_0$  contenuto nella proiezione sulla prima componente di  $U$ . Osserviamo che

$$\dot{I}|_{I=0}(x, y) = \dot{y} - h'(x)\dot{x}|_{I=0} = g(x, y) - \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}f(x, y)|_{y=h(x)} = 0,$$

dunque per il criterio (1.10) sappiamo che  $\{y = h(x)\}$  è un insieme invariante. Poiché è una curva e contiene  $(x_0, y_0)$  questa è l'orbita voluta ed effettivamente l'abbiamo scritta come grafico.  $\square$

## 5.2 Ricerca di simmetrie

Spesso, soprattutto negli esercizi, i sistemi in esame presentano delle simmetrie, ovvero è possibile costruire una mappa<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \\ x(t) &\longmapsto \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

tale che

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \implies \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = F(\tilde{x}(t)).$$

Spesso una simmetria si fattorizza in una mappa “geometrica” composta con una mappa “temporale”, cioè esistono  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tali che

$$\tilde{x}(t) = g(x(\tau(t))).$$

**Esempio 5.2** (Esempio di simmetrie).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

L’unico punto fisso è  $(0,0)$  e gli assi sono invarianti. Ci sono altre rette invarianti? Cioè, esistono  $a, b$  tali che una curva di livello di  $I(x, y) = ax + by$  è invariante?

$$\begin{aligned} \dot{I}|_{I=c} &= a\dot{x} + b\dot{y}|_{ax+by=c} \stackrel{\text{se } b \neq 0}{=} \\ &= ax^2 + by^2|_{ax+by=c} = ax^2 + b\left(\frac{c - ax}{b}\right)^2 = \\ &= \left(a + \frac{a^2}{b}\right)x^2 - 2\frac{ac}{b}x + \frac{c^2}{b}. \end{aligned}$$

Per annullare tutti i coefficienti  $c = 0$  e  $a \in \{0, -b\}$ . Troviamo dunque le condizioni  $c = 0$  e  $a = 0$  o  $a = -b$ . Dunque  $\{x = y\}$  è un insieme invariante.

Andiamo ora a studiare le isocline. Per  $x \neq 0$  consideriamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{x^2} \implies -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} \implies y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0}\right)}.$$

Studiamo le simmetrie del sistema. Proviamo a porre  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t))$ , da cui

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = -\dot{x}(-t)(-1) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) = (-\tilde{x}(t))^2 = (\tilde{x}(t))^2$$

e similmente per  $\tilde{y}$ . Questo mostra che ad ogni orbita possiamo associarne un’altra che geometricamente è la riflessione rispetto all’origine e che viene percorsa in verso opposto.

---

<sup>1</sup>Durante il corso non è stata data una definizione rigorosa di simmetria, solo una idea intuitiva e pratica di come impiegarla nella risoluzione di esercizi. Questa formulazione NON è stata data durante il corso e non so se è standard, serve solo come guida per capire il concetto a chi legge le dispense.

# Capitolo 6

## Varietà stabili/instabili

### 6.1 Varietà stabili e instabili locali

In un punto fisso lineare di tipo sella sappiamo che esistono due assi: uno che converge al punto ( $E^s$ ) e uno che vi diverge ( $E^u$ ).

Cerchiamo di generalizzare questo concetto.

**Definizione 6.1** (Varietà stabile/instabile locale).

Siano  $x_0$  un punto fisso iperbolico per  $\dot{x} = F(x)$  e  $U$  un intorno di  $x_0$ . La **varietà stabile locale** di  $x_0$  in  $U$  è data da

$$W_{loc}^s(x_0) = \left\{ y \in U \mid \forall t \geq 0 \phi_t(y) \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) \rightarrow x_0 \right\}.$$

Similmente definiamo la **varietà instabile locale** come

$$W_{loc}^u(x_0) = \left\{ y \in U \mid \forall t \leq 0 \phi_t(y) \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) \rightarrow x_0 \right\}.$$

**Teorema 6.2** (Varietà stabile/instabile).

Sia  $x_0$  un punto fisso iperbolico<sup>1</sup> per  $F \in C^k$  e  $k \geq 1$ . Allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

1.  $W_{loc}^{s/u}(x_0)$  in  $B_\varepsilon(x_0)$  esistono e sono uniche,
2.  $W_{loc}^s(x_0)$  è positivamente invariante e  $W_{loc}^u(x_0)$  è negativamente invariante,
3.  $W_{loc}^{s/u}(x_0)$  sono sottovarietà di  $B_\varepsilon(x_0)$  di classe  $C^k$ .  
Inoltre  $\dim W_{loc}^s(x_0) = \dim E^s(x_0)$  e  $\dim W_{loc}^u(x_0) = \dim E^u(x_0)$ .
4. I sottospazi affini  $x_0 + E^{s/u}(x_0)$  sono tangenti a  $W_{loc}^{s/u}$  in  $x_0$ .

*Dimostrazione.* (Caso  $d = 2$ ).

Poiché  $x_0$  è un punto fisso iperbolico si presentano due casi: le parti reali dei due autovalori hanno lo stesso segno o hanno segno opposto. Se hanno lo stesso segno sappiamo che  $\det DF(x_0) > 0$  e che  $\text{tr } DF(x_0) \neq 0$ . Segue dunque che  $W_{loc}^s(x_0) = B_\varepsilon(x_0)$  e  $W_{loc}^u(x_0) = \{x_0\}$  o viceversa a seconda del segno delle parti reali. Da queste caratterizzazioni è evidente che il teorema vale.

<sup>1</sup> ricordo che  $x_0$  iperbolico implica in particolare che  $\dim E^s(x_0) + \dim E^u(x_0) = d$ , dove  $\mathbb{R}^d$  è lo spazio delle fasi.

Supponiamo dunque che le parti reali dei due autovalori abbiano segno opposto. Segue immediatamente che  $x_0$  è un punto di stella e che gli autovalori sono reali. Siano  $-\lambda$  e  $\mu$  questi autovalori (dove  $\lambda, \mu > 0$ ). A meno di una traslazione e un cambio base supponiamo

$$x_0 = (0, 0), \quad \mathcal{D}F(x_0)e_1 = -\lambda e_1, \quad \mathcal{D}F(x_0)e_2 = \mu e_2.$$

Possiamo dunque riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + f(x, y) \\ \dot{y} = \mu y + g(x, y) \end{cases}$$

dove  $f, g$  sono di classe  $C^k$ ,  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ <sup>2</sup>,  $\nabla f(0, 0) = \nabla g(0, 0) = (0 \ 0)^T$ <sup>3</sup> e le seguenti funzioni sono  $o$ -piccoli di  $\sqrt{x^2 + y^2}$ :  $f$ ,  $g$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$ <sup>4</sup>.

Data questa trasformazione, la tesi è equivalente a mostrare che  $W_{loc}^s(0, 0)$  esiste, è unico, positivamente invariante, di classe  $C^k$  e tangente a

$$\{y = 0\} = (0, 0) + E^s((0, 0)) \text{ in } (0, 0).$$

Un argomento simmetrico mostra i risultati mancanti relativi a  $W_{loc}^u$ .

Definiamo i seguenti insiemi: per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $M > 1$  siano

$$D_\varepsilon = \{|x| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon\}, \quad C_M = \{|x| \geq M|y|\}, \quad C_M^+ = C_M \cap \{x > 0\} \cap D_\varepsilon.$$

Mostriamo prima dei lemmi utili alla dimostrazione. Fissiamo  $M > 1$

### Lemma 6.3.

Esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $\dot{x}|_{C_M^+} < 0$

*Dimostrazione del lemma.*

Ricordiamo che

$$\dot{x} = -\lambda x + f(x, y) \quad \text{con } |f(x, y)| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

in particolare esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$|f(x, y)| \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se  $(x, y) \in C_M$  allora

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{M^2}\right)} \stackrel{M \geq 1}{\leq} \sqrt{2}|x|.$$

Mettendo insieme questi risultati

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{C_M^+} &= -\lambda x + f(x, y)|_{C_M^+} \leq \\ &\leq -\lambda x + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}|_{C_M^+} \leq \\ &\stackrel{x > 0}{\leq} -\lambda x + \frac{\lambda}{2}x = -\frac{\lambda}{2}x < 0. \end{aligned}$$

□

---

<sup>2</sup>in quanto  $x_0 = (0, 0)$  è un punto fisso

<sup>3</sup>in quanto sappiamo che  $\mathcal{D}F((0, 0)) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

<sup>4</sup>per come funziona l'espansione di Taylor

**Lemma 6.4.**

Esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y>0\}} > 0$  e  $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y<0\}} < 0$ .

*Dimostrazione del lemma.*

Ricordiamo che

$$\dot{y} = \mu y + g(x, y) \quad \text{con } |g(x, y)| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

in particolare esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$|g(x, y)| \leq \frac{\mu}{2\sqrt{1+M^2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y>0\}} &= \mu y + g(My, y) \geq \\ &\geq \mu y - \frac{\mu}{2\sqrt{1+M^2}} \sqrt{(1+M^2)y} = \\ &= \frac{\mu}{2} y > 0. \end{aligned}$$

Gli stessi conti con le disuguaglianze nel senso opposto danno la dimostrazione per  $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y<0\}}$ .  $\square$

Definiamo gli insiemi

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^+ &= \{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \exists t_0 > 0 \text{ t.c. } \phi_{t_0}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+ \cap \{y > 0\}\} \\ I_\varepsilon^- &= \{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \exists t_0 > 0 \text{ t.c. } \phi_{t_0}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+ \cap \{y < 0\}\} \end{aligned}$$

**Lemma 6.5.**

Gli insiemi  $I_\varepsilon^+$  e  $I_\varepsilon^-$  sono intervalli aperti.

*Dimostrazione del lemma.*

Mostriamo la tesi solo per  $I_\varepsilon^+$ . Il caso  $I_\varepsilon^-$  è simmetrico.

aperto Sia  $y_0 \in I_\varepsilon^+$  e sia  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_{t_0}(\varepsilon, y_0) \in \partial C_M^+ \cap \{y > 0\}$ . Se  $\phi_t(a, b) = (x(t, a, b), y(t, a, b))$  osserviamo che  $y(t_0, \varepsilon, y_0) > 0$  e  $x(t_0, \varepsilon, y_0) - My(t_0, \varepsilon, y_0) = 0$ . Definiamo

$$G(b, t) = x(t, \varepsilon, b) - My(t, \varepsilon, b).$$

Per quanto detto  $G(y_0, t_0) = 0$  e, per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo,  $\frac{d}{dt}G(y_0, t_0) = \dot{x}(t_0, \varepsilon, y_0) - M\dot{y}(t_0, \varepsilon, y_0) < 0 \neq 0$ <sup>5</sup>.

Abbiamo verificato le ipotesi del teorema della funzione implicita, dunque esistono  $U$  intorno di  $y_0$ ,  $V$  intorno di  $t_0$  e  $\tau : U \rightarrow V$  continua  $C^k$  (regolarità di  $G$ ) tali che  $\tau(y_0) = t_0$  e per ogni  $y \in U$  abbiamo

$$G(y, \tau(y)) = 0 \iff \phi_{\tau(y)}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+.$$

La tesi segue a meno di restringere  $U$  a  $U \cap (\phi_{\tau(\cdot)}(\varepsilon, \cdot))^{-1}(\{y > 0\})$ .

connesso Segue immediatamente da esistenza e unicità unito alla monotonia di  $x$  in  $t$  e per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo (in modo che  $D_\varepsilon$  contenga come unico punto fisso  $(0, 0)$ ).  $\square$

---

<sup>5</sup> stiamo usando i due lemma precedenti.

Per ogni  $(\varepsilon, y) \in C_M$  sappiamo che  $\phi_t(\varepsilon, y)$  esce dal bordo superiore, inferiore, o tocca  $(0, 0)$ .

**Lemma 6.6.**

Si ha che

$$\#\{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \omega(\varepsilon, y) = \{(0, 0)\}\} = 1.$$

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che esistano  $y_0$  e  $y_1$  distinti nell'insieme. A meno di moltiplicare  $F$  per una funzione scalare<sup>6</sup> possiamo supporre

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \frac{\mu y + g(x, y)}{\lambda - \frac{1}{x} f(x, y)} \end{cases}$$

A meno di conti possiamo definire  $\tilde{\lambda} > 0$  e  $\tilde{g}$  con le stesse proprietà di  $g$  come  $o$ -piccolo di  $\sqrt{x^2 + y^2}$  in modo tale che il sistema diventi

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \tilde{\lambda} y + \tilde{g}(x, y) \end{cases}$$

In questo nuovo sistema  $\phi_t(\varepsilon, y) = (\varepsilon e^{-t}, y(t, \varepsilon, y))$ , cioè orbite che partono con la stessa componente  $x$  mantengono la stessa componente  $x$ . Consideriamo come cambia la distanza tra  $y_0$  e  $y_1$  seguendo le orbite:

$$\frac{d}{dt} (y_1(t) - y_0(t)) = \dot{y}_1(t) - \dot{y}_0(t) = \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) + \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_1(t)) - \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_0(t)).$$

Per il teorema di Lagrange

$$|\tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_1(t)) - \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_0(t))| = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(\varepsilon e^{-t}, \xi(t)) |y_1(t) - y_0(t)|$$

con  $\xi(t) \in (y_0(t), y_1(t))$ . Sia ora  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$\left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \right| \leq \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y_1(t) - y_0(t)) &\geq \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sqrt{\varepsilon^2 e^{-2t} + \xi(t)^2} |y_1(t) - y_0(t)| \stackrel{y_1(t), y_2(t) \in D_\varepsilon}{\geq} \\ &\geq \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \varepsilon \sqrt{2} (y_1(t) - y_0(t)) = \\ &= \underbrace{\left( \tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \varepsilon \sqrt{2} \right)}_{>0 \text{ per } \varepsilon \in (0, \sqrt{2})} (y_1(t) - y_0(t)) > 0, \end{aligned}$$

dunque  $y_1(t) - y_0(t)$  cresce, in particolare non possono entrambe convergere verso  $(0, 0)$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>è noto da analisi 2 che questa operazione non cambia le orbite del sistema

Sia  $\bar{y} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  l'unica condizione iniziale tale che  $(\varepsilon, \bar{y}) \in C_M$  e  $\omega(\varepsilon, \bar{y}) = (0, 0)$ . Si ha dunque che

$$W_{loc}^s(0, 0) \cap \{x > 0\} = \mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y}).$$

Ripetendo quanto fatto per  $\{x < 0\}$  troviamo l'esistenza e unicità di  $W_{loc}^s$ .

Sappiamo che  $W_{loc}^s(0, 0) \cap \{x > 0\} = \mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y})$  e per il metodo delle isocline (5.1) sappiamo che

$$\mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y}) \subseteq \{y = h(x)\}$$

con  $h(x)$  soluzione di

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y + g(x, y)}{-\lambda x + f(x, y)}.$$

Per la regolarità delle funzioni che definiscono  $h$  sappiamo che  $h$  è  $C^k$ , quindi effettivamente  $W_{loc}^s \cap \{x > 0\}$  è una varietà  $C^k$ .

Osserviamo inoltre che  $h'(0) = 0$ , infatti

$$|h'(x)| \sim_{x \rightarrow 0^+} \left| -\frac{\mu}{\lambda} \frac{y}{x} \right| \leq \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{M}$$

per ogni  $M > 1$ , dunque passando al limite per  $M \rightarrow +\infty$  troviamo  $h'(0) = 0$ . Questo mostra la tangenza di  $W_{loc}^s \cap \{x > 0\}$  a  $\{y = 0\}$  in  $(0, 0)$ . Ripetendo questi passaggi per l'altro semipiano troviamo finalmente la tesi.  $\square$

## 6.2 Varietà stabili e instabili

**Definizione 6.7** (Varietà stabile/instabile globale).

Definiamo le **varietà stabile/instabile globale** di  $x_0$  come

$$\begin{aligned} W^s(x_0) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_0)) \\ W^u(x_0) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_0)) \end{aligned}$$

*Osservazione 6.8.*

Studiamo velocemente come  $W^s$  e  $W^u$  possono intersecarsi in  $\mathbb{R}^2$ . Per l'unicità locale se si incontrano coincidono o si incontrano in un punto fisso, restituendo orbite omocline ed eterocline rispettivamente.

Per  $d > 2$  il comportamento di  $W^s$  e  $W^u$  è più intricato.

*Osservazione 6.9.*

In generale  $W^s$  e  $W^u$  perdono alcune proprietà della struttura differenziale che hanno  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$ .

# Capitolo 7

## Orbite periodiche

Lo studio delle orbite periodiche si riduce a capire se ci sono ed eventualmente trovarle esplicitamente.

### 7.1 Criteri di non esistenza differenziali

Intuitivamente se aumento o diminuisco l'area di una regione con il flusso, non posso avere orbite periodiche, perché altrimenti l'area dentro l'orbita si manterrebbe.

**Proposizione 7.1** (Metodo di Bendixon-Dulec).

Consideriamo il sistema  $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  con  $F \in C^1$ . Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  semplicemente connesso e aperto. Se esiste  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1$  tale che

$$\operatorname{div}(hF)(x, y) = \left( \frac{\partial h f}{\partial x} + \frac{\partial h g}{\partial y} \right) (x, y)$$

ha segno costante in  $U$  allora non esistono orbite periodiche interamente contenute in  $U$ .

*Dimostrazione.*

Sia per assurdo  $\Gamma$  un orbita periodica contenuta in  $U$  e sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  la sua parametrizzazione con  $t \in [0, T]$ . Indichiamo con  $\tilde{U} \subseteq U$  la componente connessa di  $\mathbb{R}^2$  limitata racchiusa da  $\Gamma$ . Senza perdita di generalità per il segno della divergenza

$$\begin{aligned} 0 &< \iint_{\tilde{U}} \operatorname{div}(hF)(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\tilde{U}} \left( \frac{\partial}{\partial x} (h f) + \frac{\partial}{\partial y} (h g) \right) dx dy \stackrel{(\text{G.G.})}{=} \\ &= \int_{\Gamma^+} h f dy - h g dx = \\ &= \pm \int_0^T h(x(t), y(t)) (f(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - g(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) dt \stackrel{(\dot{x}, \dot{y}) \equiv (f, g)}{=} 0, \end{aligned}$$

e questo mostra l'assurdo.  $\square$

**Proposizione 7.2** (Criterio con gradiente per inesistenza delle orbite periodiche).

Se  $\dot{x} = F(x)$  con  $F$  di classe  $C^1$  (anche in  $\mathbb{R}^d$ ) e  $F = \nabla I$  allora non esistono orbite periodiche.

*Dimostrazione.*

Supponiamo che esista  $\Gamma \subseteq U$  orbita periodica e sia  $\gamma(t)$  con  $t \in [0, T]$  una curva che la parametrizza. Troviamo un assurdo svolgendo il seguente conto

$$\begin{aligned} 0 &= I(\gamma(T)) - I(\gamma(0)) = \int_0^T \frac{d}{dt} (I(\gamma(t))) dt = \\ &= \int_0^T \nabla I(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \stackrel{\gamma \text{ è orbita}}{=} F \\ &= \int_0^T F(\gamma(t)) \cdot F(\gamma(t)) dt = \\ &= \int_0^T \underbrace{\|F(\gamma(t))\|^2}_{\neq 0} dt > 0 \end{aligned}$$

dove  $F(\gamma(t)) \neq 0$  perché l'orbita è periodica (e quindi non contiene punti fissi).  $\square$

Formalizziamo ora l'idea che se il campo non ruota (o equivalentemente, se il campo è conservativo) allora non abbiamo orbite periodiche (se torno al punto di partenza il campo non compie lavoro)

**Proposizione 7.3** (Metodo del rotore).

Consideriamo il sistema  $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  con  $F \in C^1$ . Se  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$  su  $U$  aperto semplicemente connesso allora non esistono orbite periodiche interamente contenute in  $U$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $\omega = f dx + g dy$ . Per ipotesi, su  $U$  vale

$$d\omega = \left( -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy = 0,$$

cioè  $\omega$  è chiusa su  $U$ . Poiché  $U$  è semplicemente connesso si ha che  $\omega$  è esatta, dunque esiste  $I : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che  $\omega = dI$ , cioè  $F = \nabla I$ . Questo conclude per la proposizione precedente.  $\square$

## 7.2 Teoria dell'indice di Poicaré nel piano

Consideriamo sistemi della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

**Definizione 7.4** (Indice di una curva).

Sia  $\Gamma$  una curva chiusa in  $\mathbb{R}^2$  regolare (a tratti) semplice<sup>1</sup> che non contiene punti fissi.

Chiamiamo **indice di  $\Gamma$**

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}.$$

*Osservazione 7.5.*

Quando  $f \neq 0$  osserviamo che

$$\frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2} = d \left( \arctan \left( \frac{g}{f} \right) \right),$$

---

<sup>1</sup>la condizione di semplicità serve per evitare che tutto venga contato con arbitrarie molteplicità.

quindi stiamo contando quante volte  $F$  gira seguendo  $\Gamma$  in senso diretto. Più precisamente

$$I(\Gamma) = \#\{\text{giri di } F \text{ lungo } \Gamma \text{ in senso antiorario}\} - \#\{\text{giri di } F \text{ in senso orario}\}$$

**Proposizione 7.6** (Proprietà dell'indice).

Valgono le seguenti affermazioni

- Sia  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$  una famiglia continua di curve chiuse regolari a tratti che non contengono punti fissi (le curve sono  $\text{Imm } \gamma_s = \Gamma_s$ ). Allora  $I(\Gamma_s)$  è costante in  $s$ .
- Siano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  curve chiuse regolari a tratti che non contengono punti fissi tali che  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$  ma le regioni da loro racchiuse si intersecano nel vuoto<sup>2</sup>, allora

$$I(\Gamma_1 + \Gamma_2) = I(\Gamma_1) + I(\Gamma_2),$$

dove  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  è la curva dove vengono percorse in successione le due e i tratti in comune vergono percorsi una volta in un senso e una volta nel senso opposto<sup>3</sup>.

*Dimostrazione.*

Vedi Geometria 2. □

**Definizione 7.7** (Indice di un punto fisso).

Sia  $(x_0, y_0)$  un punto fisso isolato di  $F$ . L'indice di  $(x_0, y_0)$  è dato dall'indice di una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti semplice che lo racchiude e che non racchiude altri punti fissi.

**Proposizione 7.8** (Indici di alcuni punti fissi).

Valgono le seguenti affermazioni:

- $I(\text{nodo}) = I(\text{fuoco}) = +1$
- $I(\text{sella}) = -1$
- Se  $\Gamma$  è un'orbita periodica  $I(\Gamma) = +1$
- Se  $\Gamma$  è una curva regolare a tratti semplice che racchiude solo punti fissi isolati allora

$$I(\Gamma) = \sum_{\substack{P \text{ punto fisso} \\ P \text{ racchiuso da } \Gamma}} I(P).$$

*Dimostrazione.*

Per i primi due punti la tesi segue riportandoci al caso lineare standard tramite il teorema di linearizzazione (3.3).

Il terzo punto è geometricamente evidente date le possibili forme di orbite periodiche in  $\mathbb{R}^2$ .

Il quarto punto segue dalle proprietà dell'indice (7.6)<sup>4</sup>. □

*Osservazione 7.9.*

Un'orbita periodica racchiude necessariamente punti fissi i cui indici sommano a 1. Per esempio un'orbita periodica non può racchiudere solo una sella.

<sup>2</sup>per regione racchiusa intendo la componendo connessa di  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  limitata

<sup>3</sup>Pensa alla somma di 1-cicli singolari

<sup>4</sup>Vedi teorema dei residui.

### 7.3 Criteri di esistenza di orbite periodiche

Per trovare esplicitamente orbite periodiche possiamo provare a passare alle coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases}$$

dove nel secondo sistema dobbiamo ricordarci  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ . Per semplicità scriviamo

$$\begin{cases} \dot{\rho} = h(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = \ell((\rho, \theta)) \end{cases}$$

Un'orbita periodica può essere della forma particolare  $\{\rho = \text{cost.}\}$ .

**Proposizione 7.10** (Criterio polare esistenza orbita periodica).

*Dato un sistema in coordinate polari, se esiste  $c > 0$  tale che per ogni  $\theta$  valgono  $h(c, \theta) = 0$  e  $\ell(c, \theta) \neq 0$  allora  $\{\rho = c\}$  è invariante<sup>5</sup>.*

*Dimostrazione.*

Segue dal criterio sull'invarianza di curve di livello (1.10) unito all'assenza di punti fissi.  $\square$

Un problema cruciale di questo risultato è che la minima perturbazione annichila le ipotesi.

#### 7.3.1 Teorema di Poincaré-Bendixon

**Definizione 7.11** (Sezione locale di data larghezza).

Sia  $y \in \mathbb{R}^2$  tale che  $F(y) \neq 0$ . Se  $\ell(y) = \text{Span}(v) + y$  è la retta passante per  $y$  ortogonale a  $F(y)$ , fissato un  $k \in (0, 1)$  definiamo la **sezione locale di larghezza  $k$**  per  $y$  come<sup>6</sup>

$$S_k(y) = \text{comp. conn. contenente } y \text{ di } \left\{ z \in \ell(y) \mid |\widehat{\sin(v, F(z))}| > k \right\}.$$

**Lemma 7.12** (Rettificazione locale).

*Dato  $y \in \mathbb{R}^2$  tale che  $F(y) \neq 0$  consideriamo la parametrizzazione di  $\ell(y)$  data da  $\gamma(u) = y + uv$  al variare di  $u \in \mathbb{R}$ . Affermiamo che esistono  $V$  e  $U$  intorni di  $y$  e  $0$  rispettivamente e un diffeomorfismo  $\psi : U \rightarrow V$  tale che  $\psi(s, u) = \phi_s(\gamma(u))$ .*

**Definizione 7.13** (Rettangolo di flusso).

Sia  $\psi : U \rightarrow V$  un diffeomorfismo di rettificazione locale. Fissiamo  $\sigma > 0$ ,  $\chi > 0$  tali che

$$N_{\sigma, \chi} = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| \leq \sigma, |u| \leq \chi\} \subseteq U.$$

Definiamo il **rettangolo di flusso** per questa scelta di  $\sigma$  e  $\chi$  come  $\mathcal{N}_{\sigma, \chi} = \phi(N_{\sigma, \chi})$ .

**Lemma 7.14.**

*Se  $\mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  è un rettangolo di flusso allora  $\mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  è un intorno di  $y$  tale che per ogni  $z \in \mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  esiste  $\bar{t}(z) \in (-\sigma, \sigma)$  tale che  $\phi_{\bar{t}}(z) \in S_k(y)$ .*

---

<sup>5</sup>e quindi  $\{x^2 + y^2 = c^2\}$  è periodica

<sup>6</sup>dati due vettori  $v$  e  $w$ , con  $\widehat{v, w}$  intendiamo l'angolo minore tra essi nel piano generato da  $v$  e  $w$

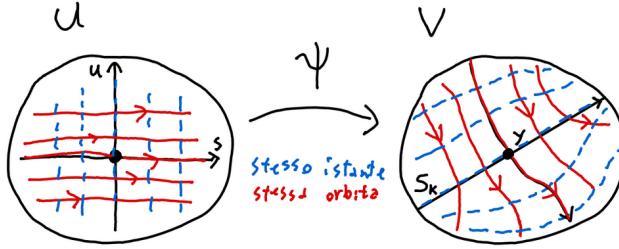


Figura 7.1: Rappresentazione di come agisce una  $\psi$  rettificazione locale come sopra.

**Teorema 7.15** (Poincaré-Bendixon).

Sia  $\dot{x} = F(x)$  con  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Supponiamo che esista  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  compatto non vuoto che non contiene punti fissi e per il quale esiste  $x_0 \in D$  tale che per qualche  $t_0 > 0$  abbiamo  $\phi_t(x_0) \in D$  per ogni  $t \geq t_0$ .

Allora  $\Gamma = \omega(x_0) \subseteq D$  è un'orbita periodica.

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  per cui esiste  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_t(x_0) \in D$  per ogni  $t \geq t_0$ . Allora  $\omega(x_0)$  è non vuoto, invariante e  $\omega(x_0) \subseteq D$  per (1.18). Scelto  $x \in \omega(x_0) \subseteq D$  allora  $\mathcal{O}^+(x) \subseteq \omega(x_0)$  e quindi  $\omega(x) \subseteq \omega(x_0)$ . Sia  $y \in \omega(x)$

Claim:  $\#(S_k(y) \cap \mathcal{O}^+(x)) = 1$ .

*Dimostrazione del claim.*

Mostriamo prima che l'intersezione è non vuota e poi mostriamo che contiene un'unico punto.

$\neq \emptyset$  Per definizione di  $\omega(x)$  esiste una successione monotona  $t_k \nearrow +\infty$  tale che  $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$ . Poiché  $\mathcal{N}_{\sigma,x}$  è un intorno di  $y$ , per definizione di convergenza esiste  $\bar{t} > \sigma$  tale che  $\phi_{\bar{t}}(x) \in \mathcal{N}_{\sigma,x}$ . Per il lemma precedente esiste allora  $\hat{t} \in (-\sigma, \sigma)$  tale che  $\phi_{\hat{t}}(\phi_{\bar{t}}(x)) \in S_k(y)$ . Ponendo  $\hat{t} + \bar{t} = \tilde{t}$  esiste  $\tilde{t} > 0$  tale che  $\phi_{\tilde{t}}(x) \in S_k(y)$ .

$\# = 1$  Supponiamo per assurdo che esistano  $x_1, x_2 \in S_k(y) \cap \mathcal{O}^+(x) \subseteq \omega(x_0)$  distinti. Per definizione di  $\omega$ -limite esistono  $\tau_j^1 \nearrow +\infty$  e  $\tau_j^2 \nearrow +\infty$  tali che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{\tau_j^1}(x_0) = x_1, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{\tau_j^2}(x_0) = x_2.$$

Esistono dunque per il lemma  $\tilde{\tau}_j^1$  e  $\tilde{\tau}_j^2$  tali che  $\phi_{\tilde{\tau}_j^i}(x_0) \in S_k(y)$ . Siano  $U_1$  e  $U_2$  intorni di  $x_1$  e  $x_2$  disgiunti. Per  $j$  abbastanza grande abbiamo che  $\phi_{\tilde{\tau}_j^i}(x_0) \in U_i$ .

Poiché sia  $\tilde{\tau}_j^1$  che  $\tilde{\tau}_j^2$  vanno a  $+\infty$ , esistono  $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$  tali che

$$\phi_{\xi_1}(x_0) \in U_1, \quad \phi_{\xi_2}(x_0) \in U_2, \quad \phi_{\xi_3}(x_0) \in U_1.$$

Sia  $\tilde{\Gamma}$  la curva chiusa data da

$$\tilde{\Gamma} = \{\alpha \phi_{\xi_1}(x_0) + (1 - \alpha) \phi_{\xi_2}(x_0) \mid \alpha \in [0, 1]\} \cup \bigcup_{s \in (\xi_1, \xi_2)} \phi_s(x_0).$$

Per definizione di  $S_k(y)$  e per unicità locale si ha che  $\mathcal{O}^+(\phi_{\xi_2}(x_0))$  è contenuto nella componente连通的 limitata definita da  $\tilde{\Gamma}$ , ma questo è assurdo perché esiste  $\Delta t = \xi_3 - \xi_2$  è tale che  $\phi_{\Delta t}(\phi_{\xi_2}(x_0)) = \phi_{\xi_3}(x_0)$  ma per definizione di  $S_k(y)$  un'orbita che parte da  $S_k(y)$  torna a  $S_k(y)$  dal lato opposto rispetto a quello di partenza.

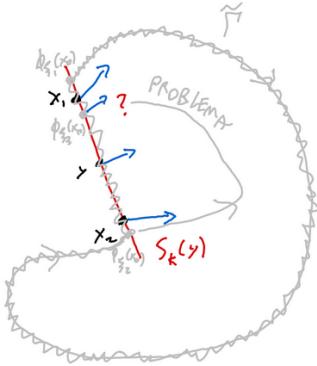


Figura 7.2: Rappresentazione grafica dell'assurdo trovato.

□

Sia  $y \in \omega(x)$  e sia  $\tilde{t} > 0$  tale che  $\phi_{\tilde{t}}(x) \in S_k(y)$  (esiste per il primo punto del claim). Sappiamo che esiste  $\tau > \tilde{t}$  tale che  $\phi_\tau(x) \in \mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  (convergenza di successioni). Esiste dunque  $\tilde{\tau} \in (-\sigma, \sigma)$  tale che  $\phi_{\tau+\tilde{\tau}}(x) \in S_k(y)$  (lemma) e per il secondo punto del claim  $\phi_{\tau+\tilde{\tau}}(x) = \phi_{\tilde{t}}(x)$ , dunque  $\Gamma = \mathcal{O}(x)$  è periodica.

Osserviamo che  $\Gamma \subseteq \omega(x_0)$  per costruzione. L'altro contenimento segue come segue: Per definizione  $x = \lim_j \phi_{t_j}(x_0)$ . Se  $z = \phi_s(x)$  allora per continuità del flusso  $z = \lim_j \phi_{t_j+s}(x_0)$ . □

*Osservazione 7.16.*

Osserviamo che  $D$  come nel teorema di Poincaré-Bendixon non può essere semplicemente connesso per la teoria dell'indice.

**Fatto 7.17** (Poincaré-Bendixon generale).

*Se per  $x_0$  esiste  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_t(x_0) \in D$  per ogni  $t \geq t_0$  con  $D$  non vuoto e compatto allora  $\omega(x_0)$  può essere*

- punto fisso
- orbita periodica
- unione di punti fissi e orbite eterocline
- punto fisso e orbita omoclinica

**Esempio 7.18.**

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon g(x, y) \end{cases}$$

Se  $f, g \in C^1$  allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che per ogni  $\varepsilon < \varepsilon_0$  esiste un'orbita periodica. Proviamo a definire

$$D = \{\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$$

Osserviamo che nel caso non perturbato, per  $\rho < 1$  allora  $\dot{\rho} > 0$  mentre per  $\rho > 1$  allora  $\dot{\rho} < 0$ .

Sia  $M = \max \left\{ \left\| f|_{\{\rho \leq 5\}} \right\|_{\infty}, \left\| g|_{\{\rho \leq 5\}} \right\|_{\infty} \right\}$  (dove 5 è un qualche valore “grosso”). Proviamo a definire  $D = \left\{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \right\}$ .  
 $\dot{\rho}|_{\rho=\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} + \varepsilon f(\frac{1}{2}, \theta) \geq \frac{3}{8} - \varepsilon M$  e questo è maggiore di 0 per  $\varepsilon < \frac{3}{8M}$ . Similmente per  $\dot{\rho}|_{\rho=2}$  chiediamo  $\varepsilon < \frac{6}{M}$ . Cerchiamo allora stime tali che  $\dot{\theta}|_{\left\{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \right\}} \neq 0$  e dopo conti simili troviamo che  $\varepsilon_0 = \frac{3}{8M}$  rispetta tutte le condizioni volute.

# Capitolo 8

## Esempi di sistemi dinamici continui

### 8.1 Alcuni sistemi meccanici

#### 8.1.1 L'oscillatore armonico

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} = -kx$$

con  $k > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Studiamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $F(x, y) = (y, -kx)$ .

- **Punti fissi:**  $(y, -kx) = (0, 0) \implies (x, y) = (0, 0)$ , quindi abbiamo un solo punto fisso.
- Questo è evidentemente un sistema meccanico con  $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ , da cui  $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2$  è l'Hamiltoniana.
- Sia  $E_c = \{\frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2 = c\}$ . Questi insiemi sono evidentemente ellissi. Descrivono veramente orbite periodiche? Sì, infatti se per assurdo non fossero orbite periodiche, poiché le orbite che cominciano in uno di questi insiemi sono costrette a rimanervi, per compattezza di  $E_c$  dovremmo avere

$$\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) \in E_c$$

per  $x_0 \in E_c$ , ma questo significa che  $\ell$  sarebbe un punto fisso, che è assurdo perché l'unico punto fisso è  $(0, 0)$ .

#### 8.1.2 Pendolo semplice

L'equazione in esame è

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta.$$

Riformuliamo in

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \psi \\ \dot{\psi} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{cases}$$

**Punti fissi:**

$\psi = 0$  e  $\sin \theta = 0$ , dunque

$$pt. fix = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Integrale primo:**

Anche questo è un sistema meccanico, che quindi ammette Hamiltoniana

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta,$$

dunque gli insiemi di livello che ci interessano sono

$$E_c = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = c \right\}.$$

Osserviamo che

$$E(k\pi, 0) = -\frac{g}{\ell} \cos(k\pi) = (-1)^{k+1} \frac{g}{\ell} \implies E(2\pi, 0) = E(-2\pi) = E(0, 0).$$

$$E_{-\frac{g}{\ell}} = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = -\frac{g}{\ell} \right\} \implies \psi^2 = -2\frac{g}{\ell}(1 - \cos \theta)$$

$$E_{\frac{g}{\ell}} = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = \frac{g}{\ell} \right\} \implies \psi^2 = 2\frac{g}{\ell}(1 + \cos \theta)$$

Se  $c \in (-\frac{g}{\ell}, \frac{g}{\ell})$  troviamo orbite periodiche contenute dentro le ordine dei primi due. Per  $c \notin [-\frac{g}{\ell}, \frac{g}{\ell}]$  abbiamo invece ordine tutte sopra o tutte sotto.

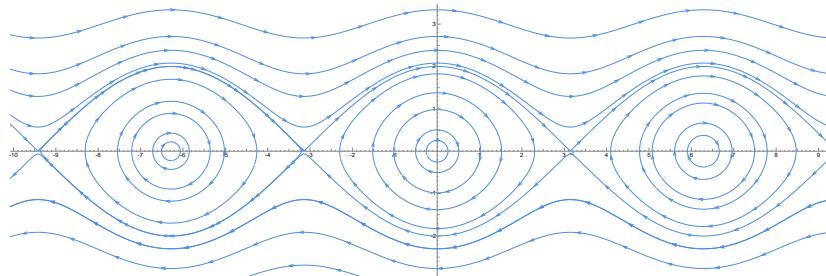


Figura 8.1: Diagramma di fase del pendolo per  $\frac{g}{\ell} = 1$

## 8.2 Dinamica di Lotka-Volterra

Possiamo modellare una singola popolazione in modo semplice con l'equazione (detta *equazione logistica*)

$$\dot{x} = x(c - ax), \quad a, c > 0.$$

Ponendo  $F(x) = xc - ax^2$  si ha che  $F(x) = 0 \implies x = 0$  oppure  $x = c/a$ .

Inserendo nel sistema una seconda popolazione che più interagire con la prima troviamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(c_1 - a_1x - b_1y) \\ \dot{y} = y(c_2 - a_2y - b_2x) \end{cases}.$$

Osserviamo che gli assi sono invarianti. A meno di riscalamento possiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - \alpha y) \\ \dot{y} = y(1 - \beta x - y) \end{cases}$$

Troviamo come punti fissi  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e

$$P = \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1} \right).$$

Osserviamo che  $P \in \{x > 0, y > 0\}$  se e solo se  $\alpha > 1$  e  $\beta > 1$  o  $0 < \alpha < 1$  e  $0 < \beta < 1$ . Calcoliamo ora  $\mathcal{D}F$

$$\mathcal{D}F = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & 1 - \beta x - 2y \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{D}F((0, 0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}F((1, 0)) &= \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}F((0, 1)) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -\beta & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}F(P) &= \frac{1}{\alpha\beta - 1} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha(1 - \alpha) \\ \beta(1 - \beta) & 1 - \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Esempio 8.1.

Consideriamo il modello Lotka-Volterra dato da  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$ , cioè

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(1 - 2x - y) \end{cases}$$

Per quanto detto sopra i punti fissi sono

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

che nominiamo rispettivamente  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

Segue che  $P_0$  è una stella instabile,  $P_1$  e  $P_2$  sono nodi impropri stabili e  $P_3$  è una sella. Gli autovettori di  $\mathcal{D}F(P_3) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  sono  $v_+ = (1 - 1)^T$  e  $v_- = (1 1)^T$ , corrispondenti agli autovalori  $1/3$  e  $-1$  rispettivamente. Graficando il sistema possiamo effettivamente notare che le varietà instabili e stabili hanno come giacitura della retta tangente in  $P_3$  proprio le rette generate da questi vettori.

### Esempio 8.2 (Lotka-Volterra per preda-predatore).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-1 + y) \\ \dot{y} = y(1 - x) \end{cases}$$

I punti fissi sono  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . Osserviamo anche che gli assi e tutto il primo quadrante sono insiemi invarianti. Consideriamo allora solo il primo quadrante che tanto è il

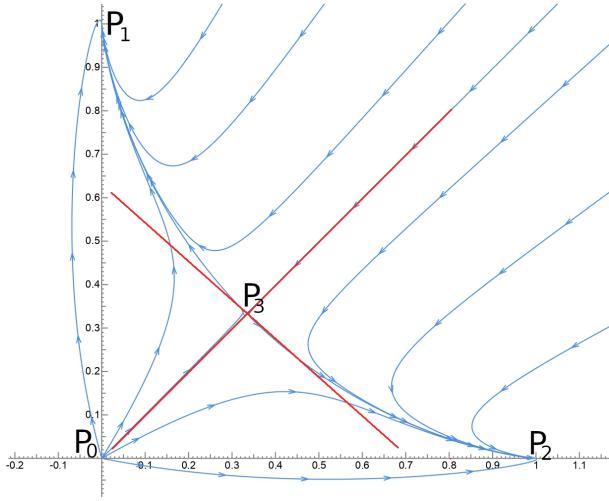


Figura 8.2: Diagramma di fase di questo sistema.  
In rosso sono indicati  $P_3 + \text{Span}(v_+)$  e  $P_3 + \text{Span}(v_-)$ .

caso interessante per questo modello.

Studiamo lo Jacobiano

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ -y & 1-x \end{pmatrix} \implies DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad DF(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0, 0) (0, 0) è una sella. Si ha che

$$E^s(0, 0) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E^u(0, 0) = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e per il teorema delle varietà stabili locali (6.2) sappiamo che  $W^s(0, 0)$  e  $W^u(0, 0)$  locali esistono e sono uniche. Per l'invarianza degli assi in realtà  $W^{u/s}(0, 0) = E^{u/s}(0, 0)$ .

(1, 1) (1, 1) è di tipo centro e quindi non è iperbolico. Una possibile funzione di Lyapunov potrebbe avere forma

$$V(x, y) = a(x - 1)^{2n} + b(y - 1)^{2m}, \quad a, b > 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Un altro metodo potrebbe essere studiare il punto passando a coordinate polari centrate in (1, 1).

Un'ulteriore possibilità potrebbe essere studiare il segno del campo di vettori, ma poiché (1, 1) è di tipo centro non è molto utile.

Trovare insiemi invarianti non è molto facile in questo caso.

Possiamo provare il metodo delle isocline

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{y(1-x)}{x(-1+y)} \\ y(x_0) = y_0 \text{ t.c. } x_0(-1 + y_0) \end{cases}$$

È chiaro che possiamo trarre qualche beneficio dal metodo delle isocline perché l'equazione differenziale in questione è separabile

$$\frac{-1+y}{y} dy = \frac{1-x}{x} dx \implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{-1+y}{y} dy = \int_{x_0}^x \frac{1-x}{x} dx$$

$$y(x) - \log(y(x)) = \log y_0 - y_0 + \log x - x - \log x_0 + x_0.$$

Non posso scrivere esplicitamente  $y(x)$  = “qualcosa”, ma comunque posso studiare l’equazione, infatti, poiché  $\{y = y(x)\}$  è invariante (5.1) sappiamo che c’è un insieme invariante. Per identificarlo definiamo

$$I(x, y) = y - \log y + x - \log x.$$

Segue che<sup>1</sup>

$$I|_{I=c} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)x(-1 + y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)y(1 - x) = 0,$$

cioè  $I$  è un integrale primo.

$$\nabla I(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x} \\ 1 - \frac{1}{y} \end{pmatrix} |_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$H_I(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} |_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{minimo locale.}$$

Troviamo dunque che localmente le traiettorie sono curve semplici chiuse tali che  $(1, 1)$  si trova nella componente连nessa limitata tra le due che hanno come bordo le traiettorie.

Per trovare il verso di percorrenza possiamo usare il segno del campo.

### Esempio 8.3.

Un esempio semplice per i parametri del modello sopra è

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - y - x) \end{cases} \implies F(x, y) = (x(3 - x - 2y), y(2 - y - x)).$$

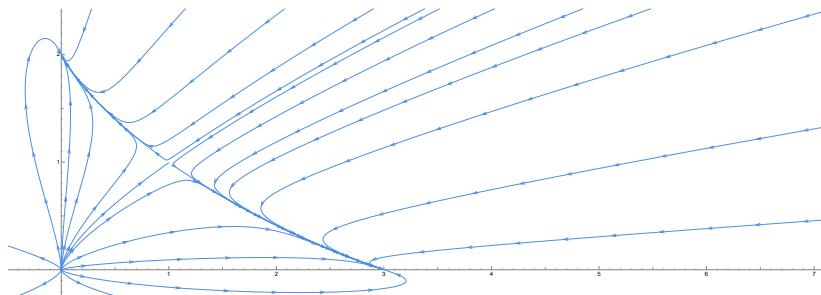


Figura 8.3: Diagramma di fase per questo esempio di Lotka-Volterra.

I punti fissi sono

$$(0, 0), (0, 2), (3, 0), (1, 1)$$

e la matrice Jacobiana di  $F$  è

$$\mathcal{D}F(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Valutando lo Jacobiano nei punti fissi troviamo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{nodo instabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{nodo stabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{nodo stabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{sella}}.$$

<sup>1</sup> pensando  $c = \log y_0 - y_0 - \log x_0 + x_0$

### 8.3 Sistema di Lorenz

Un sistema storicamente importante è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}, \quad r, b, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Osserviamo che i punti fissi del sistema corrispondono a

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix},$$

dove  $P_{\pm}$  è definito solo per  $r \geq 1$ . Osserviamo inoltre che

$$\mathcal{D}F = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Studiamo la stabilità di  $P_0$ :

Notiamo che

$$\mathcal{D}F(P_0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

dunque  $(0, 0, 1)$  è sempre un autovettore relativo all'autovalore  $-b$  per il sistema linearizzato vicino a  $P_0$ . Il segno di  $-b$  ci dice che  $\dim E^s(P_0) \geq 1$ . Studiamo la stabilità delle altre direzioni al variare di  $r$

- |                |   |
|----------------|---|
| $r \in (0, 1)$ | In questo caso gli autovalori sono entrambi con parte reale negativa, quindi per Hartman Grobman (3.3) $P_0$ è asintoticamente stabile e $\dim E^s(P_0) = 3$ .      |
| $r > 1$        | In questo caso gli autovalori sono reali di segno opposto dunque il punto fisso è instabile per Hartman Grobman (3.3) e $\dim E^s(P_0) = 2$ , $\dim E^u(P_0) = 1$ . |
| $r = 1$        | In questo caso $P_0$ non è iperbolico dunque per predicare sulla stabilità proviamo a cercare una funzione di Lyapunov. Tentiamo una di questa forma                |

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2).$$

Chiaramente  $V$  è di classe  $C^1$  e  $V(P) > V(P_0) = 0$  per ogni  $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$ . Cerchiamo delle condizioni sui  $k_i$  in modo tale che  $\dot{V}(P) \leq 0$  per ogni  $P \neq P_0$ . Dopo qualche conto si può verificare che

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2 \right)$$

è una funzione di Lyapunov (non stretta). Per il primo teorema di Lyapunov (2.7) segue che  $P_0$  è stabile.

Per il criterio di La Salle (2.8) sappiamo che  $\{\dot{V} = 0\} = \{x = y, z = 0\}$  contiene tutti gli  $\omega$ -limiti e che questi sono insiemi invarianti. Poiché

$$F|_{\{x=y, z=0\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

si ha che  $\{P_0\}$  è l'unico insieme invariante contenuto in  $\{\dot{V} = 0\}$ , dunque tutti gli  $\omega$ -limiti sono  $\{P_0\}$ . Questa condizione insieme alla stabilità di  $P_0$  mostra che  $P_0$  è asintoticamente stabile.

Attraverso conti non visti a lezione sappiamo che se  $\sigma > b + 1$  e  $r > \bar{r}$  per un qualche  $\bar{r} > 1$  si ha che  $\dim E^s(P_\pm) = 1$  e  $\dim E^u(P_\pm) = 2$ . Le traiettorie dunque approcciano  $P_+$  e  $P_-$  “lateralmente” e “trasversalmente” si allontanano lungo una spirale.

Sempre attraverso conti non visti a lezione individuiamo la funzione

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2),$$

il cui dot è dato da

$$\dot{W}(x, y, z) = -\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2).$$

Osserviamo che, fissato  $k \in \mathbb{R}^+$  possiamo trovare  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $\dot{W}|_{W \geq c} \leq -\sigma k < 0$ : basta prendere  $c$  grande abbastanza in modo tale che i punti fuori l'ellissoide  $\{W = c\}$  abbiano coordinate grandi abbastanza da forzare la disuguaglianza voluta, che possiamo fare per il segno dei termini in  $\dot{W}$ .

Osserviamo che se  $y_0 \notin \{W \geq c\}$  allora

$$W(\phi_t(y_0)) - W(y_0) = \int_0^t \underbrace{\frac{d}{ds} W(\phi_s(y_0))}_{=\dot{W}} ds \leq -k\sigma t$$

finché  $\phi_t(y_0)$  continua ad essere fuori l'ellissoide. Segue dunque che definitivamente  $\phi_t(y_0)$  cade nell'ellissoide.

Questo ragionamento mostra che tutti i punti ammettono  $\omega$ -limite, ma questo non può in generale essere un punto fisso (sono instabili) o un'orbita periodica (perché assenti dal sistema<sup>2</sup>). Si scopre che l' $\omega$ -limite generale corrisponde ad un frattale e per questo motivo viene detto *attrattore strano*.

---

<sup>2</sup>questa affermazione non è stata mostrata

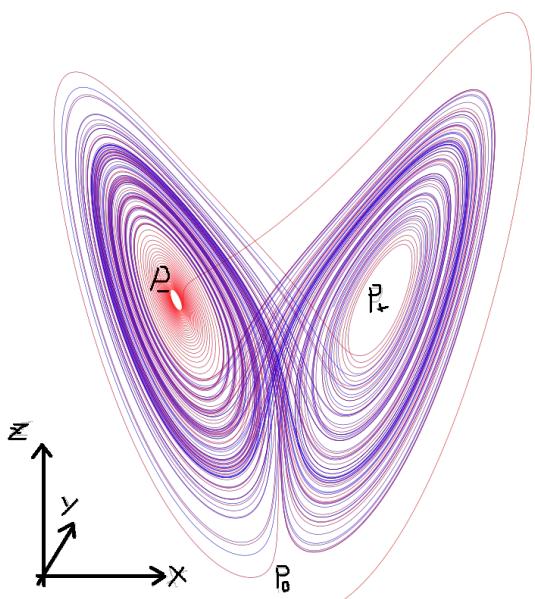


Figura 8.4: Qualche orbita del sistema di Lorenz dove sono stati contrassegnati i punti fissi. Immagine originariamente da [https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system) e modificata da me.

## **Parte II**

# **Sistemi discreti**

## Capitolo 9

# Basi di Dinamica Topologica

Consideriamo  $T : X \rightarrow X$  con  $X$  compatto e  $T$  continua. Con la notazione  $T^n$  intendiamo sempre la  $n$ -iterata di  $T$ .

Per semplicità poniamo  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

### 9.1 Punti periodici e coniugio topologico

**Definizione 9.1** (Orbita).

Sia  $x \in X$ , l'**orbita** di  $x$  è l'insieme

$$\mathcal{O}(x) = \{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Definizione 9.2** (Punto periodico).

Un punto  $x \in X$  è **periodico** se esiste  $m \in \mathbb{N}^+$  tale che  $T^m(x) = x$ .

Se  $x$  è periodico chiamiamo **periodo minimo** il numero

$$p = \min \{m \in \mathbb{N}^+ \mid T^m(x) = x\}.$$

*Osservazione 9.3.*

Un **punto fisso** è un punto periodico di periodo minimo 1 (cioè  $T(x) = x$ ).

*Osservazione 9.4.*

Se  $x$  è periodico con periodo minimo  $p$  allora  $\mathcal{O}(x) = \{x, T(x), \dots, T^{p-1}(x)\}$ .

**Definizione 9.5** (Punti definitivamente periodici).

Un punto  $x \in X$  si dice **definitivamente periodico** se esiste  $m \in \mathbb{N}^+$ , tale che  $T^m(x)$  è periodico ma  $x$  non lo è.

*Osservazione 9.6.*

Il numero di punti fissi di periodo minimo  $p$  è un multiplo di  $p$ , precisamente

$$p \cdot \# \{\text{Orbite disgiunte}\}.$$

**Definizione 9.7** (Coniugio topologico).

Due insiemi  $X_1, X_2$  tali che esistano  $T_1 : X_1 \rightarrow X_1$  e  $T_2 : X_2 \rightarrow X_2$  continue si dicono **coniugati topologicamente** se esiste  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  omeomorfismo tale che  $\varphi \circ T_1 = T_2 \circ \varphi$ , cioè commuta il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{T_1} & X_1 \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{T_2} & X_2 \end{array}$$

*Osservazione 9.8.*

Con la notazione sopra, segue che  $\varphi \circ T_1^n = T_2^n \circ \varphi$ , quindi due sistemi coniugati topologicamente hanno la stessa dinamica.

**Definizione 9.9** (Insieme invariante).

Sia  $(X, T, \mathbb{N})$  un sistema discreto.  $A \subseteq X$  è **positivamente invariante** se  $T(A) \subseteq A$  e **invariante** se  $T(A) = A$ .

*Osservazione 9.10.*

A volte (fuori da questo corso) può essere utile definire l'invarianza come

$$T^{-1}(A) = A.$$

Questa nozione NON è equivalente alla precedente.

**Definizione 9.11** ( $\omega$ -limite).

Definiamo l' **$\omega$ -limite** di  $x$  come

$$\omega(x) = \left\{ y \in X \mid \exists n_k \nearrow +\infty \text{ t.c. } \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k}(x) = y \right\}.$$

Similmente definiamo l' **$\alpha$ -limite**.

Supponiamo da ora in poi che  $X \subseteq \mathbb{R}^k$  per qualche  $k$ .

**Proposizione 9.12** (Orbita limitata restituisce  $\omega$  compatto invariante).

Se  $\mathcal{O}(x)$  è limitata allora  $\omega(x)$  è un compatto non vuoto. Se  $T$  è continua allora  $\omega(x)$  è invariante.

*Dimostrazione.*

Come nel teorema (1.18) ricaviamo che  $\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}(T^n(x))}$  da cui segue compattezza e  $\omega(x) \neq \emptyset$ .

Mostriamo l'invarianza:

\$T(\omega(x)) \subseteq \omega(x)\$ Se  $y \in \omega(x)$  allora troviamo una successione di istanti tale che  $T^{n_k}(x) \rightarrow y$ , dunque

$$T(y) = T(\lim T^{n_k}(x)) \stackrel{T \text{ cont.}}{\equiv} \lim T^{n_k+1}(x) \in \omega(x).$$

\$T(\omega(x)) \supseteq \omega(x)\$ Se  $y \in \omega(x)$  allora troviamo una successione crescente di istanti tale che  $T^{n_k}(x) \rightarrow y$ . Poiché  $\{T^{n_k-1}(x)\} \subseteq \mathcal{O}(x)$ , per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione  $k_j$  tale che  $T^{n_{k_j}-1}(x) \rightarrow z \in \overline{X}$ . Per definizione di  $\omega$ -limite  $z \in \omega(x)$  e

$$T(z) = T(\lim T^{n_{k_j}-1}(x)) = \lim T^{n_{k_j}}(x) = y$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che  $T^{n_{k_j}}(x)$  è una sottosuccessione di  $T^{n_k}(x)$ .

□

# Capitolo 10

## Stabilità locale dei punti fissi

**Definizione 10.1** (Punto attrattivo/repulsivo).

Un punto fisso  $x \in X$  si dice **attrattivo** se esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $y \in U$  si ha che  $\{T^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(y) = x$ .

L'intorno  $U$  come sopra è un **bacino di attrazione**.

Un punto fisso  $x \in X$  si dice **repulsivo** se esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $y \in U \setminus \{x\}$  esiste  $n(y) \in \mathbb{N}$  tale che  $T^{n(y)}(y) \notin U$ .

**Definizione 10.2** (Semi-attrattività).

Supponiamo che  $X = [0, 1]$ . Un punto fisso è

- **semi-attrattivo** se è attrattivo da destra e repulsivo da sinistra,
- **semi-repulsivo** se attrattivo da sinistra e repulsivo da destra.

**Definizione 10.3** (Orbita attrattiva/repulsiva).

Sia  $x$  punto periodico di periodo minimo  $p$ , allora  $\mathcal{O}(x) = \{x, \dots, T^{p-1}(x)\}$  è **attrattiva** (rispettivamente **repulsiva**) se  $x$  è attrattivo (rispettivamente repulsivo) per  $T^p$ .

### 10.1 Punti iperbolici

**Definizione 10.4** (Punto iperbolico).

Supponiamo che  $X \in \{[0, 1], S^1, \mathbb{R}, (a, b), [a, b), (a, b]\}$  e  $T \in C^1(X, X)$ . Un punto fisso  $x \in X$  si dice **iperbolico** se  $|T'(x)| \neq 1$ <sup>1</sup>.

**Proposizione 10.5** (Relazione tra punti iperbolici e attrattività).

*Sia  $T \in C^1(X, X)$  e  $x$  un punto fisso iperbolico. Allora*

$$\begin{aligned}|T'(x)| < 1 &\implies x \text{ è attrattivo} \\ |T'(x)| > 1 &\implies x \text{ è repulsivo.}\end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Studiamo i due casi

---

<sup>1</sup>L'idea è che  $T(y) - x = T(y) - T(x) = T'(x)(y - x) + o(y - x)$ , dunque se  $|T'(x)| \neq 1$  allora il termine lineare ci dice se per  $y$  abbastanza vicino a  $x$  vale  $|T(y) - x| > |y - x|$  o viceversa.

$|T'(x)| < 1$  Sia  $c \in (|T'(x)|, 1)$  e consideriamo  $\delta > 0$  tale che  $|T'(y)| \leq c$  per ogni  $y \in [x - \delta, x + \delta]$ .  
Sia ora  $y \in (x - \delta, x + \delta)$ , segue che esiste  $\xi \in (x, y)$  tale che

$$|T(y) - x| = |T'(\xi)| |y - x| \leq c |y - x|.$$

Segue in particolare che  $T(y) \in (x - \delta, x + \delta)$ . Ripetendo questo procedimento si ha che  $|T^2(y) - x| \leq c |T(y) - x| \leq c^2 |y - x|$ . Procedendo per induzione

$$|T^n(y) - x| \leq c^n |y - x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

cioè  $x$  è attrattivo con bacino di attrazione  $(x - \delta, x + \delta)$ .

$|T'(x)| < 1$  Sia  $c \in (1, |T'(x)|)$  e sia  $\delta > 0$  tale che  $|T'(y)| \geq c$  per ogni  $y \in [x - \delta, x + \delta]$ . Consideriamo ora  $y \in (x - \delta, x + \delta)$ . Supponiamo per assurdo che  $T^n(y) \in (x - \delta, x + \delta)$  per ogni  $n$ . Con un ragionamento analogo a prima ricaviamo

$$\delta > |T^n(y) - x| \geq c^n |y - x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

che è assurdo.

□

## 10.2 Criteri per punti non iperbolici

Risulterà utile per alcuni conti la seguente

*Osservazione 10.6* (Derivata delle iterate).

Osserviamo che

$$\begin{aligned} (T^p)'(x) &= \frac{d}{dx} (T^{p-1}(T(x))) = (T^{p-1})'(T(x))T'(x) = \\ &= ((T^{p-2})'(T(T(x))))T'(T(x))T'(x) = \dots \\ &\dots = \underbrace{(T^{p-p})'(T^p(x))}_{=1} \prod_{k=0}^{p-1} T'(T^k(x)) = \\ &= \prod_{k=0}^{p-1} T'(T^k(x)). \end{aligned}$$

In particolare se  $x$  è un punto di periodo  $p$  segue riordinando i fattori della formula sopra che  $(T^p)'(T^k(x)) = (T^p)'(x)$ .

Supponendo una opportuna regolarità di  $T$  possiamo estrapolare il comportamento di alcuni punti non iperbolici.

**Proposizione 10.7** (Criterio per punti fissi non iperbolici con derivata positiva).

Sia  $x_0$  un punto fisso per  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  con  $T \in C^3$  e  $T'(x_0) = 1$ . Allora

- se  $T''(x_0) \neq 0$  il punto  $x_0$  è semiattrattivo o semi-repulsivo.
- se  $T''(x_0) = 0$  allora

$$T'''(x_0) \begin{cases} > 0 & \text{se } x_0 \text{ repulsivo} \\ < 0 & \text{se } x_0 \text{ attrattivo} \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

Dimostrazioni per disegno

[DISEGNO]  
[DISEGNO]

□

**Definizione 10.8** (Derivata Schwarziana).

Sia  $T \in C^3$ , definiamo la sua **derivata Schwarziana** come

$$ST(x) = \frac{T'''(x)}{T'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{T''(x)}{T'(x)} \right)^2.$$

**Proposizione 10.9** (Criterio per punti fissi non iperbolici con derivata negativa).

Sia  $x_0$  un punto fisso e sia  $T \in C^3$  tale che  $T'(x_0) = -1$ . Allora

$$x_0 \text{ è } \begin{cases} \text{attrattivo} & \text{se } ST(x_0) < 0 \\ \text{repulsivo} & \text{se } ST(x_0) > 0 \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

Sia  $f = T^2$ . Poiché  $x_0$  è un punto fisso di  $T$   $f(x_0) = T(T(x_0)) = T(x_0) = x_0$ . Calcolando

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= T'(T(x_0))T'(x_0) = (T'(x_0))^2 = (-1)^2 = 1 \\ f''(x_0) &= T''(T(x_0))(T'(x_0))^2 + T'(T(x_0))T''(x_0) = T''(x_0) - T''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) &= T'''(x_0)(T'(x_0))^3 + 2T'(x_0)T''(x_0)T''(T(x_0)) + \\ &\quad + T''(T(x_0))T'(x_0)T''(x_0) + T'(T(x_0))T'''(x_0) = \\ &= -T'''(x_0) - 2(T''(x_0))^2 - (T''(x_0))^2 - T'''(x_0) = \\ &= 2 \left( \frac{T'''(x_0)}{-1} - \frac{3}{2} \left( \frac{T''(x_0)}{-1} \right)^2 \right) = 2ST(x_0) \end{aligned}$$

e quindi il segno di  $f'''(x_0)$  è lo stesso di  $ST(x_0)$ , che conclude la dimostrazione per il secondo punto del criterio precedente (10.7). □

# Capitolo 11

## Orbite periodiche

In questa sezione supponiamo che  $X$  sia uno spazio metrico compatto di dimensione 1 (cioè  $X = [0, 1]$  o  $X = S^1$  a meno di omeomorfismo).

*Osservazione 11.1.*

Le orbite con periodo  $p$  corrispondono a punti fissi di  $T^p$ .

### 11.1 Partizioni e $T$ -grafo

**Definizione 11.2** (Partizione finita).

Sia  $\{a_1, \dots, a_N\}$  un insieme finito di punti di  $X$  e per ogni  $h$  definiamo  $J_h = [a_h, a_{h+1}]$ . L'insieme  $\mathcal{J} = \{J_h\}$  è una **partizione finita** di  $X$  in intervalli se  $X = \bigcup_{h=0}^{N-1} J_h$  e

$$J_h \cap J_k = \begin{cases} J_h & \text{se } h = k \\ a_h & \text{se } k = h - 1 \\ a_k & \text{se } k = h + 1 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

**Definizione 11.3** (Coprire un intervallo  $m$  volte).

Sia  $m$  un intero positivo e  $T : X \rightarrow X$  continua. Un intervallo  $J_h$  **ricopre** un intervallo  $J_k$  (**almeno**)  $m$  **volte** se esistono  $K_1, \dots, K_m$  intervalli aperti disgiunti in  $J_h$  tali che  $T(\overline{K_i}) = J_k$  per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

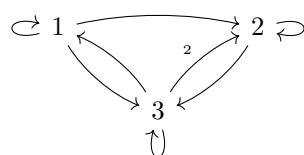
**Definizione 11.4** ( $T$ -grafo associato a partizione).

Data una partizione  $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$  finita in intervalli chiusi, definiamo il  **$T$ -grafo associato a  $\mathcal{J}$**  come il grafo orientato che ha come vertici gli indici  $\{1, \dots, N\}$  e colleghiamo due vertici con una freccia orientata  $m : h \rightarrow k$  se  $J_h$  ricopre  $J_k$  almeno una volta.

*Osservazione 11.5.*

È possibile definire una variante graduata del  $T$ -grafo dove il grado di  $h \rightarrow k$  registra quante volte  $J_h$  ricopre  $J_k$ .

[DISEGNO]



**Definizione 11.6** (Cammino ammissibile su  $T$ -grafo).

Un **cammino ammissibile** sul  $T$ -grafo associato ad una partizione  $\mathcal{J}$  è una successione di intervalli di  $\mathcal{J}$  tale che la sequenza di indici ha la proprietà che due indici successivi  $hk$  possono presentarsi solo se esiste una freccia orientata  $h \rightarrow k$  nel  $T$ -grafo associato (cioè solo se  $J_h$  ricopre  $J_k$  almeno una volta).

**Esempio 11.7.**

Nel  $T$ -grafo illustrato prima un cammino ammissibile è  $J_1 J_2 J_3 J_3 J_1 J_1$ , mentre  $J_1 J_2 J_1$  non è ammissibile perché  $J_2$  non ricopre  $J_1$ .

**Proposizione 11.8** (Criterio con grafo per esistenza di orbite periodiche).

Sia  $T : X \rightarrow X$  continua,  $X$  compatto di dimensione 1 e  $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_N\}$  partizione finita di  $X$ . Considerando il  $T$ -grafo associato a  $\mathcal{J}$ , se esiste un cammino ammissibile

$$J_{p(1)} J_{p(2)} \cdots J_{p(s+1)}$$

di lunghezza  $s + 1$  chiuso (cioè  $p(1) = p(s + 1)$ ) allora esiste  $x \in J_{p(1)}$  tale che  $T^s(x) = x$  e  $T^i(x) \in J_{p(i+1)}$  per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.*

Poniamo  $\bar{K}_{s+1} = J_{p(s+1)}$ . Poiché il cammino è ammissibile,  $J_{p(s)}$  copre  $J_{p(s+1)}$  almeno una volta, quindi esiste  $K_s \subseteq J_{p(s)}$  tale che  $T(\bar{K}_s) = J_{p(s+1)} = \bar{K}_{s+1}$ .

Similmente esiste  $\tilde{K}_{s-1} \subseteq J_{p(s-1)}$  tale che  $T(\tilde{K}_{s-1}) = J_{p(s)}$ , quindi restringendo opportunamente troviamo un intervallo  $K_{s-1} \subseteq J_{p(s-1)}$  tale che

$$T(\bar{K}_{s-1}) = \bar{K}_s \subseteq J_{p(s)}.$$

Reiterando costruiamo  $K_1, \dots, K_s$  aperti in  $X$  tali che  $K_i \subseteq J_{p(i)}$  e  $T(\bar{K}_i) = \bar{K}_{i+1}$  (in particolare  $T^{s-i+1}(\bar{K}_i) = \bar{K}_{s+1}$ ). Questo mostra che  $T^s(\bar{K}_1) = \bar{K}_{s+1} = J_{p(s+1)} = J_{p(1)}$ , quindi per il teorema del valore intermedio  $T^s|_{\bar{K}_1}$  ha un punto fisso, cioè esiste  $x \in \bar{K}_1 \subseteq J_{p(1)}$  tale che  $T^s(x) = x$ .

Per concludere basta osservare che per costruzione  $T^i(x) \in \bar{K}_{i+1} \subseteq J_{p(i+1)}$ .  $\square$

*Osservazione 11.9.*

È possibile che il punto fisso di periodo  $s$  trovato abbia periodo minimo che divide strettamente  $s$ .

*Osservazione 11.10* (Criterio di esistenza per periodi minimi).

Se il cammino NON è della forma

$$\underbrace{(J_{p(1)} J_{p(2)} \cdots J_{p(k)}) \cdots (J_{p(1)} J_{p(2)} \cdots J_{p(k)})}_{s/k \text{ volte}} J_{p(1)}$$

allora il punto  $x$  trovato nel teorema ha periodo *minimo s*.

In particolare se il cammino attraversa sempre indici diversi prima di tornare a  $J_{p(1)}$  allora  $x$  ha periodo minimo  $s$ .

*Osservazione 11.11.*

Se  $T$  è continua eccetto in un numero finito di punti possiamo provare a infittire la partizione e stando attenti al comportamento sul bordo la proposizione (11.8) continua in genere a valere.

## 11.2 Teorema di Sharkovsky

### 11.2.1 Ordinamento e teorema

**Definizione 11.12** (Ordinamento di Sharokovsky).

Definiamo l'**ordinamento di Sharokovsky** su  $\mathbb{N}^+$  (che indichiamo  $(\mathbb{N}^+, \prec)$ ) come segue:

Siano  $a, b$  dispari e  $p, q \in \mathbb{N}$ . Poniamo

$$2^p a \prec 2^q b \iff \begin{cases} a \neq 1 \neq b, p > q \text{ oppure} \\ a \neq 1 \neq b, p = q, a > b \text{ oppure} \\ a = 1, b \neq 1 \text{ oppure} \\ a = b = 1, p < q. \end{cases}$$

Più graficamente:

$$\begin{aligned} 1 &\prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \\ &\vdots \\ \dots &\prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \\ \dots &\prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \\ &\dots \prec 7 \prec 5 \prec 3 \end{aligned}$$

*Osservazione 11.13.*

L'ordine di Sharkovsky è un ordine totale su  $\mathbb{N}^+$ .

**Teorema 11.14** (Sharkovsky).

Se  $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$  è continua ed esiste un'orbita periodica di periodo minimo  $m$  allora esiste un'orbita periodica di periodo minimo  $n$  per ogni  $n \prec m$ .

*Dimostrazione (in programma solo il caso  $m$  dispari).*

Se  $m = 1$  la tesi è evidente. Consideriamo il caso di  $m$  dispari maggiore di 1. In tal caso  $n \prec m$  equivale a dire  $n = 1$ ,  $n > m$  oppure  $n < m$  e  $n$  pari.

Supponiamo senza perdita di generalità che non esista orbita periodica di periodo minimo  $\tilde{m}$  per ogni  $\tilde{m}$  tale che  $\tilde{m} \succ m$ , infatti, poiché  $m$  è dispari, esistono solo un numero finito di  $\tilde{m}$  tali che  $\tilde{m} \succ m$ , basta considerare il massimo (rispetto a  $\prec$ , quindi il minimo per  $<$ ).

Sia  $P_1$  un punto periodico con periodo minimo  $m$  e sia

$$\mathcal{O}(P_1) = \{P_1, P_2, \dots, P_m\},$$

dove ordiniamo  $a \leq P_1 < P_2 < \dots < P_m \leq b$ . Poniamo

$$\mathcal{J} = \{J_h\}_{h \in \{1, \dots, m-1\}} \cup \{[a, P_1], [P_m, b]\},$$

dove  $J_h = [P_h, P_{h+1}]$ . Seguiamo alcuni passi:

- Notiamo che necessariamente  $T(P_1) > P_1$  e  $T(P_m) < P_m$ . Sia allora  $\bar{h}$  l'indice tale che  $T(P_r) < P_r$  per ogni  $r > \bar{h}$  e  $T(P_{\bar{h}}) > P_{\bar{h}}$ <sup>1</sup>.

[DISEGNO]

Osserviamo che  $T(P_{\bar{h}}) \geq P_{\bar{h}+1}$  e  $T(P_{\bar{h}+1}) \leq P_{\bar{h}-1}$ , quindi  $J_{\bar{h}}$  ricopre se stesso. Segue dunque che  $J_{\bar{h}} J_{\bar{h}}$  è un cammino ammissibile e quindi per la proposizione (11.8) esiste un punto fisso in  $J_{\bar{h}}$ , quindi abbiamo verificato l'esistenza di un'orbita di periodo minimo 1.

---

<sup>1</sup> esiste per il principio del minimo

2. Claim: per ogni  $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$  esiste un cammino ammissibile da  $J_{\bar{h}}$  a  $J_\ell$ :

Poniamo  $V_1 = \{\bar{h}\}$  e per ogni  $k \geq 1$  poniamo

$$V_{k+1} = \{v \in \{1, \dots, m-1\} \mid \exists w \in V_k \text{ t.c. } J_w \text{ ricopre } J_v\}.$$

Poiché  $J_{\bar{h}}$  ricopre  $J_{\bar{h}}$  si ha che  $V_k \subseteq V_{k+1}$  per ogni  $k \geq 1$ , quindi esiste  $\bar{k}$  tale che  $V_{\bar{k}} = V_{\bar{k}+1} = V_r$  per ogni  $r \geq \bar{k} + 1$ . Si presentano due possibilità:

- $V_{\bar{k}} = \{1, \dots, m-1\}$  e abbiamo completato il passo,
- $V_{\bar{k}}$  è un sottoinsieme stretto di  $\{1, \dots, m-1\}$ .

Mostriamo che la seconda non può verificarsi:

Per assurdo supponiamo  $V_{\bar{k}} \subsetneq \{1, \dots, m-1\}$ , allora partendo da  $\bar{h}$  esiste un intervallo che non viene ricoperto (per esempio  $J_a$ ). Notiamo che  $T^k(J_{\bar{h}})$  è un intervallo, infatti l'immagine tramite una mappa continua di uno spazio connesso è connessa. Poiché  $J_{\bar{h}} \subseteq T^k(J_{\bar{h}})$  per ogni  $k$  si ha che se  $J_a$  non viene ricoperto allora  $P_a$  o  $P_{a+1}$  non può mai essere immagine di  $P_{\bar{h}}$ , ma questo è assurdo perché  $P_a, P_{a+1} \in \mathcal{O}(P_1) = \mathcal{O}(P_{\bar{h}})$ .

3. Claim: Esiste  $J_{\bar{\ell}}$  con  $\bar{\ell} \neq \bar{h}$  che ricopre  $J_{\bar{h}}$ .

Per assurdo supponiamo che non esista un tale  $\bar{\ell}$ . Notiamo che per ogni  $P_j$  con  $P_j > P_{\bar{h}}$  si deve avere che  $T(P_j) < P_{\bar{h}}$ <sup>2</sup>. Similmente per  $P_j < P_{\bar{h}}$  ricaviamo iterativamente che  $T(P_j) > P_{\bar{h}}$ . Abbiamo quindi diviso i punti esattamente a metà, ma questo è assurdo perché  $m$  dispari.

4. Unendo i due punti precedenti sappiamo che esiste un cammino ammissibile della forma

$$J_{\bar{h}} J_{p(2)} \cdots J_{p(s)} J_{\bar{h}}$$

che contiene  $J_k$  per ogni  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ .

Mostriamo che il cammino ammissibile più breve di questa forma è tale che  $s = m-1$ :

s ≥ m - 1 Per assurdo supponiamo  $s < m-1$ . Se  $s$  è dispari allora per la proposizione (11.8) esiste  $x \in J_{\bar{h}}$  tale che  $T^s(x) = x$ , ma questo è assurdo perché  $s < m$  e dispari, quindi  $s \leq m-2$  ma il cammino deve attraversare ogni intervallo di  $\mathcal{J}$ . Se  $s$  è pari allora il cammino

$$J_{\bar{h}} J_{p(2)} \cdots J_{p(s)} J_{\bar{h}} J_{\bar{h}}$$

è ammissibile e quindi sempre per la proposizione troviamo  $x \in J_{\bar{h}}$  tale che  $T^{s+1}(x) = x$ , ma questo è assurdo perché  $s < m-1$  e  $m-1$  pari implica che  $s \leq m-3$  e quindi  $s+1 \leq m-2$  e abbiamo lo stesso assurdo di prima.

s = m - 1 Visto il punto precedente basta mostrare che il cammino contiene ogni  $J_\ell$  per  $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$  esattamente una volta. Se  $\ell$  apparisse più volte potremmo eliminare il tratto tra le due manifestazioni di  $\ell$  e trovare un cammino ammissibile più breve, ma questo è assurdo perché, reiterando questo procedimento per ogni  $J_\ell$ , si avrebbe  $s < m-1$ , assurdo per il punto precedente.

5. Claim: Esiste un unico  $\ell \in \{1, \dots, m-1\} \setminus \{\bar{h}\}$  tale che  $J_\ell$  ricopre  $J_{\bar{h}}$ .

Abbiamo già mostrato l'esistenza quindi supponiamo per assurdo che esistano  $k_1 \neq k_2$  diversi da  $\bar{h}$  tali che  $J_{k_1}$  e  $J_{k_2}$  ricoprono  $J_{\bar{h}}$ . In tal caso, preso un cammino ammissibile che contiene ogni intervallo (e quindi di lunghezza esattamente  $m$ ) si avrebbe che se due indici distinti coprono  $J_{\bar{h}}$  allora esisterebbe un cammino ammissibile più breve, contraddicendo il punto precedente.

---

<sup>2</sup>se  $T(P_{\bar{h}+1}) > P_{\bar{h}}$  allora esiste un minimo  $j_0 > \bar{h} + 1$  tale che  $T(P_{j_0}) \leq P_{\bar{h}}$  e in tal caso  $J_{j_0-1}$  ricopre  $J_{\bar{h}}$ , assurdo. Reiteriamo proseguendo verso  $b$ .

6. Combinando i due punti precedenti ricaviamo che  $V_1 = \{\bar{h}\}$  e che ad ogni applicazione successiva di  $T$  viene aggiunto esattamente un indice fino a raggiungere  $\{1, \dots, m-1\}$ .

Imponiamo allora come notazione  $I_1 = J_{\bar{h}}$ ,  $I_2 = J_{p(2)}$  dove  $\{p(2)\} = V_2 \setminus V_1$  e procedendo iterativamente. In questa notazione si ha che il cammino più breve ammissibile che contiene ogni elemento di  $\mathcal{J}$  e che torna a  $J_{\bar{h}}$  è dato da

$$I_1 I_2 \cdots I_{m-1} I_1.$$

7. Mostriamo che esiste un'orbita periodica di *periodo minimo n per ogni n > m*:

Notiamo che il cammino

$$\underbrace{I_1 \cdots I_{m-1}}_{m-1} \underbrace{I_1 \cdots I_1}_{n-m+2}$$

è ammissibile per il punto precedente e quindi per (11.10) esiste  $x$  tale che  $T^n(x) = x$  dove  $n$  è il periodo minimo.

8. Mostriamo che esiste un'orbita periodica di *periodo minimo n per ogni n < m pari*.

È sufficiente mostrare che  $I_{m-1}$  ricopre  $I_k$  per ogni  $k$  dispari, infatti in tal caso basterà applicare (11.10) ai cammini ammissibili della forma

$$I_{m-1} I_k I_{k+1} \cdots I_{m-2} I_{m-1}$$

per ogni  $k$  dispari.

Osserviamo che, affinché  $I_1 \cdots I_{m-1} I_1$  abbia la proprietà di lunghezza minima mostrata,  $I_1$  copre solo  $I_1$  e  $I_2$ . Similmente  $I_2$  può coprire al massimo  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  eccetera. Osserviamo dunque che  $I_1 = J_{\bar{h}+1}$  oppure  $J_{\bar{h}-1}$ , senza perdita di generalità supponiamo  $I_1 = J_{\bar{h}-1}$ <sup>3</sup>. Si deve dunque avere che  $T(P_{\bar{h}+1}) = P_{\bar{h}-1}$  e  $T(P_{\bar{h}}) = P_{\bar{h}+1}$ . Imponendo iterativamente le condizioni sopra ricaviamo che  $I_2$  copre solo  $I_3$ ,  $I_3$  copre solo  $I_4$  e così procedendo fino a raggiungere  $I_{m-1} = J_1$ , la cui immagine forzata ad essere  $[P_{\bar{h}}, P_m]$  cioè, sempre per la corrispondenza esplicita trovata,  $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{m-2}$ .

[DISEGNO A]

Consideriamo ora il caso  $m$  pari<sup>4</sup>. Senza perdita di generalità supponiamo che  $T$  abbia un'orbita di periodo minimo  $m$  e non di periodo  $k$  per ogni  $k \succ m$ . Scriviamo  $m = 2^p \tilde{m}$ .

Seguendo quanto fatto per il caso dispari mostriamo anche in questo caso che  $J_{\bar{h}}$  ricopre se stesso e che iterando  $T$  ricopre ogni intervallo. Applicando il caso dispari a  $T^{2^p}$  e  $\tilde{m}$  troviamo per ogni  $k \prec \tilde{m}$  un valore  $x$  tale che  $x$  abbia periodo minimo  $k$  per  $T^{2^p}$ , e quindi ha periodo  $2^p k$  per  $T$ . Per mostrare che questo periodo è minimo è necessario studiare più approfonditamente l'equivalente dei punti 3, 4 e 5.  $\square$

### 11.2.2 Ferri di cavallo

**Definizione 11.15** (Ferro di cavallo).

Una funzione continua  $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ha un **ferro di cavallo** se esiste  $J \subseteq [a, b]$  intervallo chiuso che ricopre se stesso almeno due volte.

**Proposizione 11.16** (Relazione tra ferro di cavallo e periodi minimi).

Sia  $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua.

<sup>3</sup>il ragionamento procede in modo simile per l'altro caso

<sup>4</sup>Da qui in poi è una curiosità che non fa parte del programma.

1. Se  $T$  ha un ferro di cavallo allora ha orbite periodiche di periodo minimo  $n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$ .
2. Se  $T$  ha un'orbita periodica di periodo minimo  $m$  dispari allora  $T^2$  ha un ferro di cavallo.

*Dimostrazione.*

Mostriamo i due punti

1. Per il teorema di Sharkovsky (11.14) basta mostrare che esiste  $x \in [a, b]$  tale che  $T^3(x) = x$  e  $T(x) \neq x$ .

Siano  $K_1$  e  $K_2$  disgiunti intervalli aperti tali che  $T(\bar{K}_i) = J$  per un opportuno intervallo di  $[a, b]$ .

Se  $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 = \{z\}$  con  $z$  punto fisso allora osserviamo graficamente che esiste  $\bar{K}_3 \subseteq \bar{K}_1$  tale che  $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_2 = \emptyset$  e  $K_2$  e  $K_3$  coprono  $J$ . Quindi sostituiamo  $K_1$  con  $K_3$ .

[DISEGNO]

Definiamo una partizione di  $[a, b]$  che contenga  $\bar{K}_1$  e  $\bar{K}_2$ . Così facendo avremo un  $T$ -grafo dove  $\bar{K}_1 \bar{K}_2 \bar{K}_2 \bar{K}_1$  è ammissibile. Per il teorema (11.8) esiste  $x \in K_1$  tale che  $T^3(x) = x$  e  $T(x) \in \bar{K}_2$ .

Se  $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 = \emptyset$  allora  $T(x) \neq x$  e abbiamo concluso.

Se  $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 = \{z\}$  allora per costruzione  $z$  non è un punto fisso e quindi anche se  $x = z$  comunque  $T(x) \neq x$  come voluto.

2. Supponiamo senza perdita di generalità che  $m$  sia il più piccolo dispari per cui vale l'ipotesi. Ricordando la configurazione trovata dimostrando (11.14)

[DISEGNO A]

e applicando un po' di volte il teorema del valore intermedio

[DISEGNO]

osserviamo che esiste  $\bar{x}$  fisso in  $[P_1, P_2]$  e  $\bar{y} \in [P_m, P_{m-2}]$  tale che  $T(\bar{y}) = \bar{x}$ . Segue che  $J = [P_m, \bar{x}]$  copre se stesso almeno due volte per  $T^2$ .

□

## Capitolo 12

# Dinamica topologica Caotica

Supponiamo che  $X$  sia uno spazio metrico compatto e che  $T : X \rightarrow X$  sia continua.

**Definizione 12.1** (Mappa topologicamente transitiva).

Sia  $N$  spazio topologico e siano  $T : N \rightarrow N$  si dice **topologicamente transitiva** se per ogni coppia  $U, V$  si aperti non vuoti esiste  $n$  tale che  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definizione 12.2** (Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali).

Sia  $N$  uno spazio metrico e  $T : N \rightarrow N$  continua.  $T$  ha **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali** su  $N$  se esiste  $c > 0$  tale che per ogni  $x \in N$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $y \in B_\varepsilon(x)$  per cui esiste  $n$  tale che  $d(T^n(x), T^n(y)) > c$ .

**Definizione 12.3** (Caos di Devaney).

Affermiamo che  $T$  è **caotica (nel senso di Devaney)** se esiste un sottoinsieme  $\Lambda \subseteq X$  compatto e positivamente invariante tale che

1. l'insieme dei punti periodici è denso in  $\Lambda$ ,
2.  $T$  è topologicamente transitiva su  $\Lambda$
3.  $T$  ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali su  $\Lambda$ .

**Definizione 12.4** (Spazio  $(n, \varepsilon)$ -separato).

Sia  $T : X \rightarrow X$  continua con  $X$  metrico compatto. Dati  $n \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , un insieme  $S \subseteq X$  è  **$(n, \varepsilon)$ -separato** se per ogni  $x, y \in S$  distinti esiste  $k \in \mathbb{N}$  con  $k < n$  tale che  $d(T^k(x), T^k(y)) > \varepsilon$ .

**Definizione 12.5** (Entropia topologica).

Sia  $T : X \rightarrow X$  continua con  $X$  metrico compatto. Definiamo l'**entropia topologica** di  $T$  come

$$h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (\max \{\#S \mid S \text{ è } (n, \varepsilon)\text{-separato}\}).$$

**Definizione 12.6** (Caos per entropia topologica).

Affermiamo che  $T$  è **caotica (nel senso dell'entropia topologica)** se  $h_{top}(T) > 0$ .

**Proposizione 12.7** (L'entropia topologica è invariante).

*L'entropia topologica è invariante per coniugio topologico.*

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO

□

**Teorema 12.8** (Caratterizzazione del Caos).

Sia  $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Allora le seguenti sono affermazioni sono equivalenti:

1.  $T$  è caotica nel senso di Devaney
2.  $h_{top}(T) > 0$
3. Esiste  $n \in \mathbb{N}$  per cui  $T^n$  ha un ferro di cavallo
4. esiste orbita periodica per  $T$  di periodo minimo  $m$  non potenza di 2.

*Dimostrazione.*

L'equivalenza tra le ultime due è la proposizione (11.16). Per il resto la dimostrazione non è stata data durante il corso.  $\square$

## 12.1 Dinamica simbolica

Sia  $\mathcal{A}$  un alfabeto finito e sia  $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Imponiamo la topologia discreta su  $\mathcal{A}$  e la topologia prodotto su  $\Omega$ . Per il teorema di Tychonoff segue dalla compattezza di  $\mathcal{A}$  che  $\Omega$  è compatto.

Lo spazio  $\Omega$  è anche uno spazio metrico con distanza definita come segue:

$$d(\omega, \tilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} \delta(\omega_i, \tilde{\omega}_i),$$

$$\text{dove } \delta(a, b) = \begin{cases} 1 & a \neq b \\ 0 & a = b \end{cases}.$$

**Definizione 12.9** (Shift).

Definiamo la mappa di shift come

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (\omega_{i+1})_{i \in \mathbb{N}} \end{array}.$$

*Osservazione 12.10.*

La mappa di shift è continua perché uniformemente continua.

**Esempio 12.11.**

Consideriamo  $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$ ,  $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  con la metrica definita prima e  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  lo shift.

Affermiamo che  $\sigma$  è caotica (Devaney) su  $\Omega$ :

1. Vogliamo mostrare che per ogni  $\tilde{\omega}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\omega$  parola periodica<sup>1</sup> tale che  $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$ . Fissati  $\tilde{\omega}$  e  $\varepsilon$  basta prendere  $s$  un opportuno troncamento di  $\tilde{\omega}$  (tanto la distanza è pesata molto sui simboli iniziali).
2. Gli aperti di  $\Omega$  hanno come prebase i cilindri della forma

$$C(\omega, h, n) = \{\tilde{\omega} \in \Omega \mid \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \omega_{h+i} = \tilde{\omega}_{h+i}\}.$$

Vogliamo dunque mostrare che ogni  $\omega^1, \omega^2 \in \Omega$  e per ogni  $h^1, h^2, n^1, n^2 \geq 0$  esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che

$$\sigma^m(C(\omega^1, h^1, n^1)) \cap C(\omega^2, h^2, n^2) \neq \emptyset.$$

---

<sup>1</sup> $\omega = sssss \dots$  con  $s \in \mathcal{A}^*$ , cioè  $s$  è una parola finita formata dai simboli in  $\mathcal{A}$ .

Vogliamo dunque mostrare che esiste  $\tilde{\omega} \in C(\omega^1, h^1, n^1)$  tale che  $\sigma^m(\tilde{\omega}) \in C(\omega^2, h^2, n^2)$ .  
Basta porre che  $\tilde{\omega}|_{h^1+n^1-1}^{h^1} = \omega^1|_{h^1+n^1-1}^{h^1}$  e  $\tilde{\omega}|_{m+h^2+n^2-1}^{m+h^2} = \omega^2|_{h^2+n^2-1}^{h^2}$  per un  $m \gg h^1$ .

3. Fissiamo  $c \in (0, 1)$ . Fissati  $\omega \in \Omega$  e  $\varepsilon > 0$  cerchiamo  $\tilde{\omega} \in B_\varepsilon(\omega)$  tale che esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $d(\sigma^m(\omega), \sigma^m(\tilde{\omega})) > c$ . Osserviamo che esiste  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che se  $\omega_i = \tilde{\omega}_i$  per ogni  $i \leq k_\varepsilon$  allora  $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$ . Costruiamo allora  $\tilde{\omega}$  facendo sì che almeno i primi  $k_\varepsilon$  simboli coincidano con quelli di  $\omega$  e tale che tutti i successivi a un certo indice  $m$  siano diversi tra le due successioni. Osserviamo allora che  $d(\sigma^m(\omega), \sigma^m(\tilde{\omega})) = \sum_{i \geq 0} 2^{-i-1} \cdot 1 = 1 > c$ .

**Esempio 12.12.**

Consideriamo  $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$ ,  $\Omega = \mathcal{A}^\mathbb{N}$  con la metrica definita prima e  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  lo shift.

Affermiamo che  $\sigma$  è caotica (entropia topologica) su  $\Omega$ :

Fissati  $n, \varepsilon$  osserviamo che per ogni  $\omega \neq \tilde{\omega}$  esiste  $k < n$  tale che  $d(\sigma^k(\omega), \sigma^k(\tilde{\omega}))$  se e solo se esiste  $i \in \{0, \dots, k_\varepsilon\}$  tale che  $\omega_{k+i} \neq \tilde{\omega}_{k+i}$ . Consideriamo allora

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, N\}^{n+k_\varepsilon+1} & \longrightarrow & S \\ s & \longmapsto & s\dots \end{array}$$

dove  $s\dots$  indica una qualche stringa fissata che coincide con  $s$  all'inizio. Si ha dunque che

$$\max \{\#S \mid S \text{ è } (n, \varepsilon)\text{-separato}\} \sim \#\{1, \dots, N\}^{n+k_\varepsilon+1} \sim N^{n+k_\varepsilon},$$

da cui

$$h_{top}(\sigma) = \lim \frac{1}{n+k_\varepsilon} \log N = \log N.$$

**Proposizione 12.13** (Entropia topologica e partizioni).

Sia  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tale che esiste  $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_k\}$  partizione finita in intervalli tale che per ogni  $i$  abbiamo  $T(J_i) = [0, 1]$  e  $T|_{J_i}$  è invertibile e continua. Allora

$$h_{top}(T) = \log k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (\#\{Fix T^n\}).$$

**Proposizione 12.14.**

Sia  $T_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  dato da  $T_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Allora  $h_{top}(T_\alpha) = 0$

*Dimostrazione.*

ESERCIZIO □

**Proposizione 12.15.**

Sia  $T : S^1 \rightarrow S^1$  un omeomorfismo, allora se esiste un punto di periodo minimo  $p$  ogni punto periodico è di periodo minimo  $p$ .

# Capitolo 13

## Esempi di sistemi discreti

### 13.1 Motivazione: le mappe di Poincaré

Proviamo a capire quando un sistema di equazioni differenziali porta un'orbita a tornare vicino a se stessa.

**Definizione 13.1** (Mappa di Poincaré).

Sia  $M$  una varietà e sia  $\Sigma$  una sua sottovarietà di codimensione 1 tale che esiste  $U \subseteq \Sigma$  con la seguente proprietà:

se  $P \in U$  allora esiste  $\bar{t} > 0$  tale che  $t \in (0, \bar{t}) \implies \phi_t(P) \notin U$  e  $\phi_{\bar{t}}(P) \in U$ .

Definiamo la **mappa di Poincaré** come

$$P_U : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ (x, y) & \longmapsto & \phi_{\bar{t}}(x, y) \end{array} .$$

*Osservazione 13.2.*

Ponendo  $P_\Sigma^0 = id$  e

$$P_\Sigma^n = \underbrace{P_\Sigma \circ \cdots \circ P_\Sigma}_{n \text{ volte}}$$

stiamo definendo un sistema discreto  $(\Sigma, P_\Sigma, \mathbb{Z})$ .

**Esempio 13.3** (Moto sul toro piatto).

Sia  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . Un moto geodetico sul toro (piatto) si può pensare come

$$t \mapsto \phi_t(x, y) = (x, y) + t(v_x, v_y) \mod \mathbb{Z}^2.$$

Sia  $\Sigma = U = S^1 = [0, 1] \times \{0\} \setminus (0, 0) \sim (1, 0)$ . Per la geometria del toro questa sottovarietà di  $T^2$  ha le proprietà richieste per definire la mappa di Poincaré (addirittura sappiamo che  $\bar{t} = 1/v_y$ ).

Esplícitamente troviamo che

$$P_\Sigma : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & t + \alpha \mod 1 \end{array}$$

dove  $\alpha = v_x/v_y$ . Osserviamo che a meno di traslare modulo 1, tutte le orbite sono determinate dall'orbita di 0.

---

<sup>1</sup> $\bar{t}$  è l'istante del “primo ritorno”

<sup>2</sup> $P_\Sigma^{-1}$  è definita perché sono partito da un flusso e posso prendere tempi negativi in un flusso

$\alpha \in \mathbb{Q}$  Se  $\alpha = \frac{p}{q}$  ridotta ai minimi termini allora  $P_\Sigma^q(0) = 0 + p = 0 \pmod{1}$  e le orbite sono periodiche.

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  Evidentemente non troviamo un'orbita periodica. È possibile mostrare che in realtà l'orbita è densa.

**Definizione 13.4** (Semipiano di Poincaré).

Consideriamo la regione  $[-1, 1] \times [0, +\infty] \setminus D^1$  e identifichiamo i lati come in figura

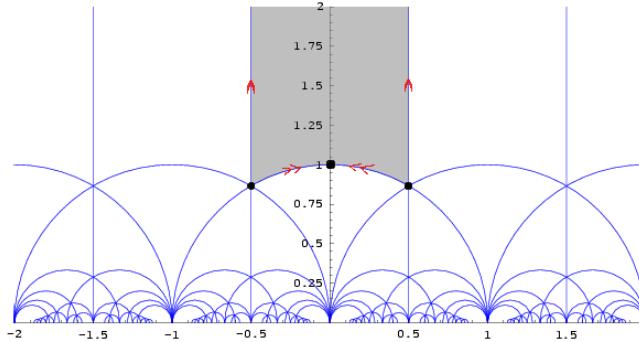


Figura 13.1: Dominio fondamentale e qualche geodetica.

Le geodetiche sono le intersezioni dell'oggetto con rette verticali o semicirconferenze perpendicolari all'asse  $x$ . Chiamiamo  $\mathcal{M}$  questo spazio.

**Esempio 13.5** (Geodetiche sul piano di Poincaré).

A parte le geodetiche corrispondenti a rette verticali, ogni geodetica che incontra la regione lo fa passando per l'asse  $y$  (e quindi lo fa ad un certo angolo). Possiamo associare ad ogni coppia punto di  $\mathcal{M}$  e angolo una geodetica di  $\mathcal{M}$  (quella passante per il punto che incontra la verticale a quell'angolo)

$$\mathcal{M} \times S^1 \ni ((x, y), \theta) \mapsto g_t((x, y), \theta).$$

Sia  $\Sigma = \{x = 0, y > 1\} \times S^1$ . È possibile definire  $P_\Sigma$  e si da il caso che questa mappa di Poincaré è più facile da studiare rispetto al sistema originale.

## 13.2 Endomorfismi del cerchio e mappa di Bernoulli

**Definizione 13.6** (Endomorfismi lineari del cerchio).

Sia  $m \in \mathbb{R}$ , gli endomorfismi lineari del cerchio sono quelli della forma<sup>3</sup>

$$T_m : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & mx \pmod{1} \end{array}.$$

**Esempio 13.7** (Punti fissi della mappa di Bernoulli).

Cerchiamo graficamente punti fissi e periodici di  $T_2 = T$

Evidentemente l'unico punto fisso è 0 (dal disegno sarebbero 0 e 1, ma  $0 \equiv 1 \pmod{1}$ ). Cerchiamo ora punti con periodo minimo 2, cioè

$$T^2(x) = x, \quad T(x) \neq x.$$

---

<sup>3</sup>Il caso  $m = 2$  restituisce la **mappa di Bernoulli**.

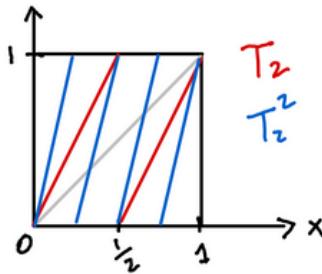


Figura 13.2: Un tipo di grafico utile la mappa di Bernoulli. In grigio troviamo l'identità, in rosso  $T_2$  e in blu  $T_2^2$ .

Ricordiamo che

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \implies T^2 = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2(2x) - 1 = 4x - 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(2x - 1) = 4x - 2 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

Graficamente vediamo che ci sono due punti di periodo 2, e questi sono  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ . Osserviamo che i numeri della forma  $3^{-1} \cdot 2^{-k}$  sono definitivamente periodici.

Cerchiamo i punti di periodo minimo 3. Graficamente notiamo che sono 6

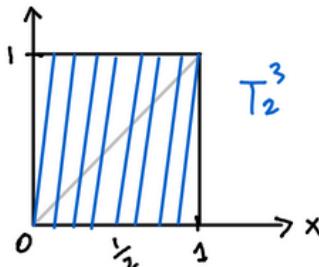


Figura 13.3: Rappresentazione grafica di  $T_2^3$ .

In generale per come funzionano le iterate di  $T_2$  si ha che il numero di punti di periodo (eventualmente non minimo)  $n$  è  $2^n - 1$ .

**Esempio 13.8** (Perdo il controllo).

Consideriamo la mappa

$$T : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ x & \mapsto & 10x \bmod 1 \end{array}.$$

Poniamo  $\mathcal{A} = \{0, \dots, 9\}$  e  $\mathcal{A}_n = (\frac{n}{10}, \frac{n+1}{10})$  per  $n \in \mathcal{A}$ .  
Sia  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e diamo la seguente mappa

$$\varphi : x \mapsto (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

dove  $\omega_n = k \iff T^n(x) \in \mathcal{A}_k \iff \lfloor 10T^n(x) \rfloor = k$  e per ricorsione vediamo che  $\omega_n$  è la  $n$ -esima cifra decimale di  $x$ , cioè

$$x = 0.\omega_0\omega_1\omega_2\dots$$

Per rispondere ad una domanda del tipo “ $T^{1000}(x) \in \mathcal{A}_i$ ?” devo sapere la 1000-esima cifra di  $x$ . Se ora considero  $x + \varepsilon$  al posto di  $x$ , le informazioni che avevamo su  $x$  non dicono più nulla sul comportamento di  $x + \varepsilon$  oltre un certo passo<sup>4</sup>.

*Osservazione 13.9* (Piccola parentesi statistica).

Sia  $x = 0.x_1x_2\cdots$  potremmo chiederci, fissata una cifra  $k$  se

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{i \in \{0, \dots, N-1\} \mid x_i = k\}}{N} = \frac{1}{10} \right\} = 1$$

ed effettivamente è vero. Segue dunque che

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{i \in \{0, \dots, N-1\} \mid x_i = k\}}{N} = \frac{1}{9} \right\} = 0$$

anche se non è un insieme vuoto<sup>5</sup>.

**Esempio 13.10** (Espansione binaria tramite la mappa di Bernoulli).

Sia  $T_2 : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $T_2(x) = 2x \bmod 1$ .

Sia  $I_0 = [0, \frac{1}{2})$ ,  $I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$  e  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Consideriamo la mappa  $\varphi : S^1 \rightarrow \Omega$  data da:

$$x \mapsto (\omega_0(x), \omega_1(x), \dots), \quad \omega_i(x) = \begin{cases} 0 & T^i(x) \leq \frac{1}{2} \\ 1 & T^i(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Osserviamo che  $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ T_2$  ma  $\varphi$  non è un omeomorfismo (o ben definita), infatti

$$\varphi^{-1}(1, 0, 0, 0, \dots) = \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \varphi^{-1}(0, 1, 1, 1, \dots).$$

Quello che sta succedendo che abbiamo trovato due serie della seguente forma che convergono allo stesso valore

$$x = \sum_{i \geq 0} \frac{\omega_i(x)}{2^{i+1}}.$$

### 13.3 Mappa Logistica e Tenda

#### 13.3.1 Mappa logistica

**Definizione 13.11** (Mappa logistica).

Una funzione continua  $T_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  si dice **logistica** se è della forma<sup>6</sup>

$$T_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \quad 0 \leq \lambda \leq 4.$$

#### Derivata

La derivata di  $T_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$  è

$$T'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x.$$

Segue che  $T_\lambda$  ha massimo in  $1/2$ .

---

<sup>4</sup> se  $i > -\log_{10} \varepsilon$  la risposta a “ $T^{1000}(x) \in \mathcal{A}_i$ ?” e quella a “ $T^{1000}(x+\varepsilon) \in \mathcal{A}_i$ ?” sono indipendenti.

<sup>5</sup> per esempio posso fissare ogni nona cifra a  $k$  e completare le altre con cifre a caso diverse da  $k$ .

<sup>6</sup> Le restrizioni  $0 \leq \lambda \leq 4$  servono per garantire che effettivamente  $[0, 1]$  sia il codominio.

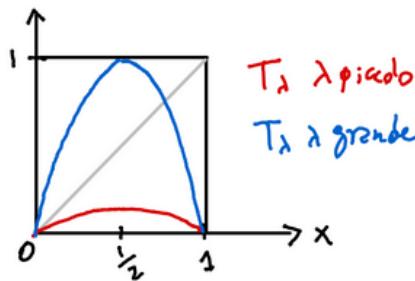


Figura 13.4: Rappresentazione di due mappe logistiche.

### Punti fissi

I punti fissi di  $T_\lambda$  sono le soluzioni di

$$\lambda x(1-x) = x \iff x((\lambda - 1) - \lambda x) = 0,$$

cioè 0 e  $1 - \lambda^{-1}$ . Notiamo però che il secondo punto fisso è rilevante solo se  $1 - \lambda^{-1} \in [0, 1]$ , cioè solo se  $\lambda \geq 1$ .

Calcoliamo quando questi punti fissi sono iperbolici:

$$T'_\lambda(0) = \lambda.$$

Per  $\lambda < 1$  si ha che 0 è iperbolico attrattivo e che per  $\lambda > 1$  è iperbolico repulsivo.  
Se  $\lambda = 1$  allora i due punti fissi coincidono e sono non iperbolici.

$$T'_\lambda(1 - \lambda^{-1}) = 2 - \lambda.$$

Segue che  $1 - \lambda^{-1}$  è iperbolico attrattivo se  $\lambda \in (1, 3)$ , iperbolico repulsivo se  $\lambda \in (3, 4]$  e non iperbolico per  $\lambda \in \{1, 3\}$ . Studiamo ora i casi di  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 3$ :

$\boxed{\lambda = 1}$  Calcoliamo che  $T''_\lambda(x) = -2\lambda < 1$ , quindi, poiché  $T'_\lambda(0) = \lambda = 1$  per il criterio per punti non iperbolici (10.7) si ha che 0 è attrattivo.

$\boxed{\lambda = 3}$  Il questo caso  $1 - \lambda^{-1} = 2/3$ , inoltre  $T'(x) = 3 - 6x$ ,  $T''(x) = -6$  e  $T'''(x) = 0$ . Segue che  $ST(x) = 0 - \frac{3}{2}(6/(3 - 6x))^2 < 0$ , in particolare  $ST(2/3) < 0$  e quindi è un punto fisso attrattivo per il criterio per punti non iperbolici con derivata  $-1$  (10.9).

### Diagramma di biforcazione

Osserviamo che

$$T_\lambda^2(x) = \lambda(\lambda x(1-x))(1 - \lambda x(1-x)) = \lambda^2 x(1-x)(1 - \lambda x(1-x)).$$

[DISEGNO]

Osserviamo che in corrispondenza di  $\lambda = 3$  passiamo da una soluzione a due:

$$\begin{aligned} \lambda^2 x(1-x)(1 - \lambda x(1-x)) - x &= 0 \\ x(\lambda^2(1-x)(1 - \lambda x(1-x)) - 1) &= 0 \\ -x(x - (1 - \lambda^{-1}))(\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda + 1)x + \lambda + 1) &= 0 \\ x \left( x - \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \left( x - \underbrace{\frac{(\lambda + 1) + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}}_{x_+(\lambda)} \right) \left( x - \underbrace{\frac{(\lambda + 1) - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}}_{x_-(\lambda)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

dove  $x_{\pm}(\lambda)$  esiste se  $\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}$  è ben definita, cioè se  $\lambda \geq 3$ . Poiché le prime due soluzioni sono soluzioni le soluzioni di  $T_\lambda(x) = x$ , si ha che  $x_{\pm}(\lambda)$  sono l'unica orbita periodica di periodo minimo 2 (quando le soluzioni sono distinte, cioè per  $\lambda > 3$ ). Cerchiamo di capire se  $\mathcal{O} = \{x_{\pm}(\lambda)\}$  è un'orbita attrattiva:

$$(T_\lambda^2(x))' = T'_\lambda(T_\lambda(x))T'_\lambda(x),$$

da cui dopo dei conti

$$|(T_\lambda^2)'(x_{\pm}(\lambda))| = |4 + 2\lambda - \lambda^2|,$$

quindi  $\mathcal{O}$  è attrattiva se  $\lambda \in [3, 1 + \sqrt{6}]$  e repulsiva se  $\lambda \in (1 + \sqrt{6}, 4)$ .

Possiamo graficare al variare di  $\lambda \in [0, 4]$  le orbite stabili (fattibile al computer in quanto stabili). Osserviamo dai risultati ottenuti che per  $\lambda < 1$  ci aspettiamo solo l'unico punto fisso 0, poi per  $\lambda \in (1, 3)$  l'unico punto fisso attrattivo è  $1 - \lambda^{-1}$ , poi tra in  $(3, 1 + \sqrt{6})$  troviamo una orbita periodica attrattiva di periodo 2 e possiamo immaginarci di trovare ulteriori suddivisioni dell'intervallo rimanente dove l'orbita graficata ha periodo minimo variabile:

[DISEGNO]

Per ogni  $\lambda$  possiamo trovare  $\Omega^\lambda$  invariante dato un'orbita periodica ma per  $\lambda \uparrow$  convergiamo verso un  $\Omega^\infty$  invariante che non è un'orbita periodica.  $\Omega^\infty$  è uno **strange attractor**<sup>7</sup>.

### 13.3.2 Mappa Tenda

**Definizione 13.12** (Mappa tenda).

Una funzione continua  $T_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  si dice **tenda** se è della forma

$$T_a(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ a(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad 0 \leq a \leq 2.$$

**Esempio 13.13** (Insiemi invarianti per mappa tenda e mappa lineare).

Sia  $T_a$  la mappa tenda come sopra e  $T_b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la mappa lineare  $T_b(x) = bx$  (poniamo  $b \in [0, 1]$ ). Graficamente osserviamo che  $T_a([0, 1]) = [0, \frac{a}{2}]$ , quindi  $[0, \frac{a}{2}]$  è

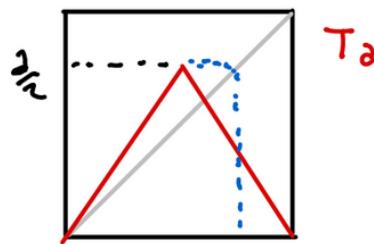


Figura 13.5: Grafico di una mappa tenda

positivamente invariante, ma è invariante solo se  $a \geq 1$ . Osserviamo che  $T_b([0, 1]) = [0, b]$ , quindi  $[0, b]$  è positivamente invariante, ma è invariante solo per  $b = 1$ .

**Esempio 13.14** (Dinamica della mappa tenda).

Sia  $T = T_a$  la mappa tenda di parametro  $a$ .

---

<sup>7</sup>Questo tipo di fenomeni dimostra che in genere lo studio delle orbite non è sufficiente. Per capire meglio sistemi dinamici è spesso utile definire misure.

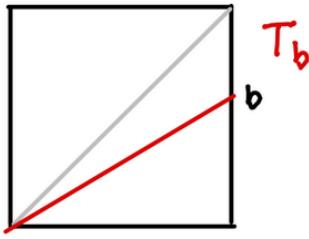


Figura 13.6: Grafico di una mappa lineare

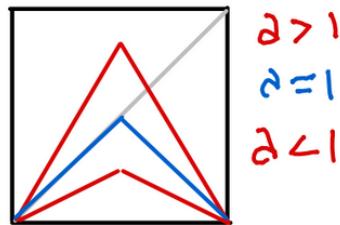


Figura 13.7: Grafico della mappa tenda per tre valori di  $a$ .

Osserviamo graficamente che

$$\text{Punti fissi} = \begin{cases} \{0\} & a \in (0, 1) \\ \left[0, \frac{1}{2}\right] & a = 1 \\ \left\{0, \frac{a}{1+a}\right\} & a > 1 \end{cases}$$

Studiamo il comportamento di 0 e  $\frac{a}{1+a}$  (il secondo solo nel caso di  $a \geq 1$ )

0 Osserviamo che

$$|T'(0)| = a,$$

quindi 0 è iperbolico per  $a \neq 1$ . L'attrattività dipende dal segno di  $a - 1$ .

$\frac{a}{1+a}$ ,  $a \geq 1$  Anche in questo caso

$$\left|T'\left(\frac{a}{1+a}\right)\right| = a,$$

quindi questo punto è repulsivo per  $a > 1$  mentre per  $a = 1$  il punto non è iperbolico.

Studiamo la dinamica al variare di  $a$

$a = 1$  Per  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  si ha che  $x$  è un punto fisso. Se  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$  allora  $T(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ , quindi i punti sono “definitivamente fissi”.

$a < 1$  L'unico punto fisso è 0 e  $\omega(x) = \{0\}$  per ogni  $x$ .

$a > 1$  Abbiamo due punti fissi, ma sono entrambi repulsivi. Proviamo a studiare l'iterata seconda

Notiamo che se  $x_1$  è uno dei punti fissi di  $T$  allora  $|T^2'(x_1)| = a^2 > 1$ , quindi continuano ad essere repulsivi anche per  $T^2$  (non esistono dunque orbite attrattive di periodo 2).

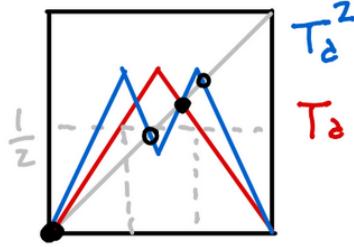


Figura 13.8: Grafico della mappa tenda e della sua seconda iterata per  $a > 1$ . In nero sono evidenziati i punti fissi di  $T$  mentre con un cerchio sono evidenziati i punti di periodo minimo 2 (visti come punti fissi di  $T^2$ ).

*Osservazione 13.15* (Esempio di coniugio topologico).

La mappa logistica  $T_4$  è coniugata topologicamente alla mappa tenda  $T_2$ .

*Dimostrazione.*

Basta considerare  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  data da

$$\varphi(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

e notare che  $\varphi \circ T_2 = T_4 \circ \varphi^8$ .  $\square$

## 13.4 Sistemi caotici

**Esempio 13.16** (Oscillatore armonico perturbato).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione 1-periodica. Immaginiamo una palla che rimbalza su un piatto la cui altezza varia come  $f$ . Per semplificarcici la vita possiamo immaginare che l'urto avvenga sempre in  $x = 0$ , tanto l'unica cosa che conta è  $\dot{f}$  (l'impulso). Siano  $t_0, t_1, \dots, t_n$  i tempi di urto ( $t_0 = 0$ ) e siano  $v_0, \dots, v_n$  le velocità dopo l'urto. Conoscendo questi dati possiamo ricostruire tutta la dinamica.

$$T : \begin{aligned} [0, +\infty) \times (0, +\infty) &\longrightarrow [0, +\infty) \times (0, +\infty) \\ (t_n, v_n) &\longmapsto (t_{n+1}, v_{n+1}) \end{aligned} .$$

Calcoliamo

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h(v_n) \\ v_{n+1} = v_n + 2\dot{f}(t_{n+1}) \end{cases} , \quad h(v_n) = \frac{2}{g}v_n$$

Osserviamo inoltre che

$$T(t_n + 1, v_n) = (t_n + 1 + h(v_n), v_n + 2\dot{f}(t_n + 1 + h(v_n))) = T(t_n, v_n) + (1, 0),$$

quindi in realtà possiamo considerare  $S^1$  al posto di  $[0, +\infty)$  per i tempi.  
Questo sistema è difficile da trattare e presenta molti problemi aperti.

**Esempio 13.17.**

La mappa  $T(x) = 2x \bmod 1$  è caotica nel senso di Devaney.

1.

---

<sup>8</sup>entrambe le composizioni assumono il valore  $\sin^2(\pi x)$ . Ricordiamo che  $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$ .

### 13.4.1 Sistemi continui caotici

Vorremmo

**Teorema 13.18.**

*Esiste  $\Sigma$  di codimensione 1 in  $X$  che ammette  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  mappa di Poincaré.*

*Esiste  $\Lambda \subseteq \Sigma$  positivamente invariante per  $P$  su cui  $P$  è topologicamente coniugata a  $(\Omega, \sigma)$  dove  $\sigma$  è lo shift.*

**Definizione 13.19** (Ferro di cavallo di Smale).

Sia  $\lambda > 2$ : [DISEGNO]

## Appendice A

# Riconoscimenti e risorse

Per realizzare le immagini di sistemi bidimensionali ho usato il sito <https://paolini.github.io/funplot/>.

Crediti per le immagini non realizzate da me:

- Figura 13.1: Fropuff, CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons con alcune modifiche del sottoscritto. La pagina di Wikipedia Commons rilevante è <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ModularGroup-FundamentalDomain-01.png>.