

# Sistemi Dinamici

Corso dei proff. Claudio Bonanno & Roberto Castorrini

Francesco Sorce

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
A.A. 2023/24

# Indice

<b>I Sistemi continui</b>	<b>6</b>
<b>1 Insiemi invarianti, Orbite e Omega-limiti</b>	<b>7</b>
1.1 Orbite, punti fissi e periodici . . . . .	7
1.2 Insiemi invarianti . . . . .	8
1.3 Passaggio a coordinate polari . . . . .	9
1.4 Alpha e Omega limiti . . . . .	9
<b>2 Stabilità e funzioni di Lyapunov</b>	<b>11</b>
2.1 Stabilità per Lyapunov . . . . .	11
2.2 Funzioni di Lyapunov . . . . .	12
2.2.1 Primo approccio per cercare funzioni di Lyapunov . . . . .	14
<b>3 Linearizzazione</b>	<b>15</b>
3.1 Idea della linearizzazione . . . . .	15
3.2 Pozzi e Sorgenti . . . . .	18
3.3 Classificazione dei punti stabili lineari sul piano . . . . .	19
<b>4 Integrali Primi e Sistemi Hamiltoniani</b>	<b>24</b>
4.1 Sistemi Hamiltoniani . . . . .	24
4.1.1 Sistemi meccanici con un grado di libertà . . . . .	26
<b>5 Primi metodi di studio globale</b>	<b>28</b>
5.1 Metodo delle isocline nel piano . . . . .	28
5.2 Ricerca di simmetrie . . . . .	29
<b>6 Varietà stabili/instabili</b>	<b>30</b>
6.1 Varietà stabili e instabili locali . . . . .	30
6.2 Varietà stabili e instabili . . . . .	34
<b>7 Orbite periodiche</b>	<b>35</b>
7.1 Criteri di non esistenza differenziali . . . . .	35
7.2 Teoria dell'indice di Poincaré nel piano . . . . .	36
7.3 Criteri di esistenza di orbite periodiche . . . . .	38
7.3.1 Teorema di Poincaré-Bendixon . . . . .	38
<b>8 Esempi di sistemi dinamici continui</b>	<b>41</b>
8.1 Alcuni sistemi meccanici . . . . .	41
8.1.1 L'oscillatore armonico . . . . .	41
8.1.2 Pendolo semplice . . . . .	41
8.2 Dinamica di Lotka-Volterra . . . . .	42

8.3	Sistema di Lorenz . . . . .	46
<b>II</b>	<b>Sistemi discreti</b>	<b>49</b>
<b>9</b>	<b>Motivazione e basi</b>	<b>50</b>
9.1	Mappa di Poincaré . . . . .	50
9.2	Esempi di sistemi discreti caotici . . . . .	51
<b>A</b>	<b>Riconoscimenti e risorse</b>	<b>53</b>

# Introduzione

**Definizione 0.1** (Sistema dinamico).

Un **sistema dinamico** è una terna  $(X, G, S)$ , dove  $X$  è un insieme,  $G$  un (semi)gruppo e  $S = G \curvearrowright X$  una azione.

L'insieme  $X$  è detto **spazio delle fasi**.

*Osservazione 0.2.*

In realtà vorremmo che l'azione abbia una regolarità compatibile con la struttura dell'insieme in esame.

## Sistemi continui

**Definizione 0.3** (Equazione differenziale).

Un **sistema di equazioni differenziali** (in forma esplicita) è un'equazione della forma

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^d).$$

Un **problema di Cauchy** associato all'equazione differenziale sopra è dato da un sistema del tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Per il teorema di Cauchy-Lipschitz è ben definito il **flusso**  $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  associato all'equazione differenziale definito come la funzione che rispetta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) = F(\phi_t(x_0)) \\ \phi_0(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

*Osservazione 0.4.*

Osserviamo che  $\phi_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è la mappa identità e che  $\phi_\cdot(x)$  è un omomorfismo per ogni  $x$ , cioè

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{s+t}(x).$$

**Definizione 0.5** (Sistema dinamico a tempo continuo).

Una terna  $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}, \phi_t(\cdot))$  è un **sistema dinamico (a tempo) continuo** se  $\phi_t(\cdot)$  è il flusso di un sistema di ODE della forma  $\dot{x} = F(x)$  con  $F(x)$  campo di vettori,  $F \in C^k$  con  $k \geq 1$ .

**Esempio 0.6** (Equazioni differenziali su  $\mathbb{R}$ ).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = ax.$$

Il nostro approccio standard è imporre una condizione di Cauchy  $x(0) = x_0$  e troviamo la soluzione

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Ponendo  $G = \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}$  e  $S = G \curvearrowright X$  dove  $S(t, x_0) = \phi_t(x_0)$  possiamo interpretare l'equazione sopra come un sistema dinamico.

Se consideriamo ora un'equazione del tipo

$$\dot{x} = a(x + x^9)$$

diventa difficile risolvere l'equazione. Possiamo fare studi qualitativi.

Negli studi qualitativi per  $X = \mathbb{R}$  sono utili le seguenti considerazioni

- Rintracciare punti fissi
- Studiare il segno della derivata
- Soluzioni diverse non si incrociano per unicità locale
- Teorema di approssimazione lineare.

Di solito ci interesseranno equazioni in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Seguono alcuni modi per trasformare alcuni tipi di equazioni differenziali nella forma  $\dot{x} = F(x)$ <sup>1</sup>.

**Esempio 0.7** (Ordine superiore).

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} = -kx, \quad k > 0.$$

Ponendo  $y = \dot{x}$  troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -kx \end{pmatrix}.$$

**Esempio 0.8** (Sistema non autonomo).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = f(x) + g(t)$$

Possiamo linearizzare come segue

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}.$$

## Sistemi discreti

Definiamo ora sistemi dinamici discreti

**Definizione 0.9** (Sistema dinamico a tempo discreto).

Un **sistema dinamico (a tempo) discreto** è una terna  $(X, \mathbb{N}, T)$  dove  $X \in \{\mathbb{R}, [a, b], S^1\}$  e  $T : X \rightarrow X$  continua. Il sistema dinamico è dato da  $(X, \mathbb{N}, S)$  dove  $S(n, x) = T^n(x)$ .

*Osservazione 0.10.*

Se  $T$  è invertibile possiamo estendere un sistema dinamico discreto sostituendo  $\mathbb{N}$  con  $\mathbb{Z}$  e ponendo (per  $n \in \mathbb{N}^+$ )  $S(-n, x) = (T^{-1})^n(x)$ .

---

<sup>1</sup>Non metterò mai più le barre se posso.

**Esempio 0.11** (Successione per ricorrenza).

Una successione per ricorrenza è un sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}) \\ x_0 = a \end{cases}$$

**Esempio 0.12** (Mappa di Bernoulli).

Consideriamo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad T : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

Osserviamo che l'unico punto fisso è 0, ma reiterando da un punto qualsiasi non c'è modo che la successione vi tendi. Inoltre la distanza tra punti si raddoppia ad ogni iterata (a meno del modulo). Questo è uno dei primi esempi di sistemi caotici.

# **Parte I**

## **Sistemi continui**

# Capitolo 1

## Insiemi invarianti, Orbite e Omega-limiti

### 1.1 Orbite, punti fissi e periodici

**Definizione 1.1** (Orbita).

Definiamo l'**orbita positiva** di un'equazione di flusso  $\phi$  come

$$\mathcal{O}^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(x).$$

In modo simile definiamo l'**orbita negativa** e l'**orbita**.

La **traiettoria** di  $x$  è il grafico  $t \mapsto \phi_t(x)$  contenuto in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d\textcolor{blue}{1}}$ .

**Definizione 1.2** (Punti fissi).

Un **punto fisso**  $x \in \mathbb{R}^d$  è un punto tale che  $F(x) = 0$ .

*Osservazione 1.3.*

L'orbita di un punto fisso è composta da un singoletto.

**Definizione 1.4** (Punti periodici).

Un punto  $x \in \mathbb{R}^d$  è **periodico** se esiste  $T > 0$  tale che

$$\phi_{T+s}(x) = \phi_s(x) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e  $\phi_s(x) \neq x$  per ogni  $s \in (0, T)$ .

$T$  è detto **periodo minimo** di  $x$ .

*Osservazione 1.5.*

L'orbita di un punto periodico è data da  $\mathcal{O}(x) = \{\phi_s(x) \mid s \in [0, T)\}$ .

*Osservazione 1.6* (Simulazione).

Di solito per tracciare orbite usiamo il computer. Il problema è che è difficile fargli assumere *determinate condizioni iniziali*, anche se queste rare orbite possono essere essenziali per capire bene il funzionamento del sistema (pensa a orbite limite o periodiche).

---

<sup>1</sup>questa è la terminologia italiana. In inglese "trajectory" corrisponde alla nostra orbita, non alla traiettoria.

## 1.2 Insiemi invarianti

**Definizione 1.7** (Insiemi invarianti).

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  si dice **positivamente invarianti** se per ogni  $x \in A$ ,  $\phi_t(x) \in A$  per ogni  $t \geq 0$ . In modo simile definiamo insiemi **negativamente invarianti** e **invarianti**.

*Osservazione 1.8* (Le orbite sono invarianti).

Le orbite positive sono positivamente invarianti, le orbite negative sono negativamente invarianti e le orbite sono invarianti.

*Dimostrazione.*

Segue dal fatto che  $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ . □

**Definizione 1.9** (Integrale primo).

Una funzione  $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \in C^1(\mathbb{R}^d)$  è un integrale primo per  $\dot{x} = F(x)$  se per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\dot{I}(x) \doteq \langle \nabla I(x), F(x) \rangle = \frac{d}{dt} I(\phi_t(x)) \Big|_{t=0} = 0.$$

**Proposizione 1.10** (Costruzione di insiemi invarianti da curve di livello).

Sia  $c \in \mathbb{R}$  e  $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \in C^1$  tale che  $\nabla I|_{\{I=c\}} \not\equiv 0$  e  $\dot{I}|_{\{I=c\}} = 0$ , allora  $\{I = c\}$  è invarianti.

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in I_c$ . In particolare  $\nabla I(x_0) \neq 0$ . Per continuità esiste un intorno  $U$  dove la condizione  $\nabla I(x_0) \neq 0$  è vera. A meno di cambio di variabile  $h$  derivante dal teorema delle funzioni implicite, poniamo  $h(U \cap I_c) = \{y = 0\}$  (dove le nuove coordinate sono  $(\underline{x}, y)$ ). Il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, y) \\ \dot{y} = g(\underline{x}, y) \end{cases} \quad \text{con } g(\underline{x}, 0) = 0 \quad \forall (\underline{x}, y) \in h(U),$$

dove  $(\underline{f}, g) = h \circ F$ .

Osservo che se una soluzione rispetta il sistema

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(x, y) \\ \dot{y} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

allora rispetta anche il sistema originale perché non mi sposto mai da  $\{y = 0\}$  e quindi la condizione  $\dot{y} = 0$  resta sempre vera. Per Cauchy-Lipschitz questa soluzione è l'unica che stavamo cercando e applicando  $h^{-1}$  troviamo l'unica soluzione al sistema originale e, appunto, questa rimane entro  $I_c$ . □

**Corollario 1.11** (Invarianza degli insiemi di livello di integrali primi).

Se  $I$  è un integrale primo allora per ogni  $c \in \mathbb{R}$  l'insieme

$$I_c = \{I(x) = c\}$$

è invarianti.

*Osservazione 1.12* (Intuizione geometrica).

Se  $\nabla I(x) \neq 0$ , la condizione  $\dot{I}(x) = 0$  afferma che  $\nabla I(x)$  e  $F(x)$  sono perpendicolari. Per il teorema delle funzioni implicite, se  $x \in I_c$  abbiamo che un vettore normale a  $I_c$  in  $x$  è  $\nabla I$ , dunque se  $F(x)$  vi è perpendicolare si ha che  $F(x) \in T_x I_c$ , in particolare l'orbita tende a procedere rimanendo nello spazio tangente, cioè resta contenuta in  $I_c$ .

### 1.3 Passaggio a coordinate polari

In  $\mathbb{R}^2$  cerchiamo di capire come trasformare un problema differenziale da coordinate cartesiane a polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{array} \right.$$

**Proposizione 1.13** (Invarianza cerchi in coordinate polari).

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = f(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = g(\rho, \theta) \end{cases}$$

se esiste  $\rho_0 > 0$  tale che  $f(\rho_0, \theta) = 0$  per ogni  $\theta$  allora  $\{\rho = \rho_0\}$  è invariante.

*Dimostrazione.*

Segue da (1.10) prendendo  $I(\rho, \theta) = \rho$ . □

### 1.4 Alpha e Omega limiti

**Definizione 1.14** (Alpha e Omega limiti).

Dato  $x \in \mathbb{R}^d$  chiamiamo  **$\omega$ -limite** di  $x$  l'insieme

$$\omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \exists \{t_n\} \nearrow +\infty \text{ t.c. } \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t_k}(x) = y \right\}.$$

Similmente definiamo l' **$\alpha$ -limite** considerando i limiti di successioni di tempi che vanno a  $-\infty$ .

*Osservazione 1.15.*

In realtà non è necessario chiedere successioni monotone. Per successioni generali che tendono a  $\pm\infty$  basta passare a sottosuccessioni.

**Esempio 1.16.**

Seguono esempi di  $\alpha$  e  $\omega$  limiti semplici:

- Se  $x$  è un punto fisso  $\alpha(x) = \omega(x) = \{x\}$
- Se  $x$  è periodico  $\alpha(x) = \omega(x) = \mathcal{O}(x)$

**Definizione 1.17** (Omo-/etero-clino).

Siano  $x_1$  e  $x_2$  punti fissi e supponiamo  $\{x_1\} = \alpha(y)$ ,  $\{x_2\} = \omega(y)$ .

Se  $x_1 = x_2 = x$  allora  $y$  è detto **omoclino** di  $x$ .

Se  $x_1 \neq x_2$  allora  $y$  è detto **eteroclino**.

**Proposizione 1.18** (Orbita limitata implica invarianza di  $\omega$ -limite).

Se  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $\mathcal{O}^+(x)$  è limitata allora  $\omega(x)$  è non vuoto, compatto e invariante.

*Dimostrazione.*

Sia  $\{\tau_j\} \rightarrow +\infty$  tale che  $\tau_1 > 0$  e  $\tau_{j+1} > \tau_j$ . Verifichiamo in linea preliminare la seguente uguaglianza:

$$\omega(x) = \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}.$$

$\subseteq$  Segue dal fatto che chiuso implica chiuso per successioni: per ogni  $t \geq 0$  vale

$$\begin{cases} y = \lim_k \phi_{t_k}(x) \\ \phi_{t_k}(x) \in \mathcal{O}^+(\phi_t(x)) \end{cases} \implies y \in \overline{\mathcal{O}^+(\phi_t(x))}$$

$\supseteq$  Sia  $y \in \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}$ . Per definizione di intersezione si ha che per ogni  $j \geq 1$  abbiamo  $y \in \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}$ . In particolare, per una caratterizzazione di chiusura in spazi metrici, esiste  $t_j > 0$  tale che

$$d(\phi_{t_j + \tau_j}(x), y) = d(\phi_{t_j}(\phi_{\tau_j}(x)), y) \leq \frac{1}{j}.$$

Segue che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} (\phi_{t_j + \tau_j}(x), y) = 0$ , cioè  $y \in \omega(x)$ .

Verificata l'uguaglianza sopra, segue immediatamente che  $\omega(x)$  è non vuoto e compatto (intersezione di compatti inscatolati non vuoti). Per mostare l'invarianza mostriamo che  $y \in \omega(x) \implies \phi_t(y) \in \omega(x)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Per definizione di  $\omega$ -limite esiste una successione  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$ . La tesi segue dalla seguente catena di identità:

$$\phi_t(y) = \phi_t \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t_k}(x) \right) \stackrel{\text{continuità in } t}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_k}(x) \in \omega(x).$$

□

## Capitolo 2

# Stabilità e funzioni di Lyapunov

In questo capitolo e nel prossimo andiamo a studiare come si comportano i punti fissi<sup>1</sup>. Raccolte queste informazioni sui punti stabili speriamo di poterle poi “incollare” per raggiungere un’idea sufficientemente accurata del comportamento dell’intero sistema.

### 2.1 Stabilità per Lyapunov

**Definizione 2.1** (Punti stabili per Lyapunov).

Un punto  $x \in \mathbb{R}^d$  si dice

- **stabile** (nel senso di Lyapunov) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $y \in B_\delta(x)$  si ha che per ogni  $t \geq 0$  abbiamo  $\phi_t(y) \in B_\varepsilon(\phi_t(x))$ .
- **asintoticamente stabile** (nel senso di Lyapunov) se è stabile (nel senso di Lyapunov) ed esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $y \in U$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0.$$

- **instabile** (nel senso di Lyapunov) se non è stabile.

*Osservazione 2.2* (Stabilità per punti fissi).

Se  $x$  è un punto fisso è stabile nel senso di Lyapunov se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che  $d(y, x) < \delta \implies d(\phi_t(y), x) < \varepsilon$  per ogni  $t \geq 0$ . Similmente è asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se è stabile ed esiste un intorno  $U$  tale che  $\forall y \in U$  abbiamo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = x$ .

**Definizione 2.3** (Stabilità orbitale).

Un insieme<sup>2</sup>  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$  è **orbitalmente stabile** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $d(y, \Gamma) < \delta \implies d(\phi_t(y), \Gamma) < \varepsilon$  per ogni  $t \geq 0$ .

**Definizione 2.4** (Dominio di asintotica stabilità).

Se  $x_0$  è un punto asintoticamente stabile definiamo il **dominio di asintotica stabilità** come

$$\{y \in \mathbb{R}^d \mid \omega(y) = \{x_0\}\}.$$

<sup>1</sup>in questo studiamo la stabilità, nel prossimo cercheremo quando possibile di descrivere un comportamento più preciso

<sup>2</sup>preferibilmente positivamente invariante

*Osservazione 2.5* (Convergenza non è sufficiente per asintotica stabilità).

Esistono punti che rispettano la condizione di convergenza nella definizione di asintotica stabilità che NON sono stabili (e quindi non vengono classificati come asintoticamente stabili).

Un punto di questo tipo è  $(1, 0)$  nel sistema (espresso in coordinate polari)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\theta) \end{cases}$$



Figura 2.1: In un intorno di  $(1, 0)$  ci sono sempre punti con  $y > 0$  e questi “fanno un giro” prima di convergere.

## 2.2 Funzioni di Lyapunov

**Definizione 2.6** (Funzione di Lyapunov).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  punto fisso per  $F \in C^1$  e  $U(x_0)$  un suo intorno. Una funzione  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **funzione di Lyapunov per  $x_0$**  se  $V \in C^1(U(x_0))$  e

- $V(x) > V(x_0)$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$
- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0$  per ogni  $x \in U(x_0)$ .

Una funzione di Lyapunov è **stretta** se  $\dot{V}(x) < 0$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ .

**Teorema 2.7** (Primo teorema di Lyapunov).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un punto fisso per  $F \in C^1$  e  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapunov per  $x_0$ . Allora  $x_0$  è un punto stabile nel senso di Lyapunov.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subseteq U(x_0)$ . Definiamo

$$m = \min_{\partial B_\varepsilon(x_0)} V, \quad S_m = \left\{ y \in \overline{B_\varepsilon(x_0)} \mid V(y) < m \right\}.$$

Osserviamo che  $x_0 \in S_m$  e, poiché  $S_m = V^{-1}((-\infty, m)) \cap B_\varepsilon(x_0)$ ,  $S_m$  è aperto, dunque esiste  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(x_0) \subseteq S_m$ .

Sia ora  $y \in B_\delta(x_0)$ . Per definizione  $V(y) < m$ . Osserviamo che

$$\frac{d}{dt} V(\phi_t(y)) = \dot{V}(\phi_t(y)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ t.c. } \forall 0 \leq s \leq t \phi_s(y) \in U(x_0),$$

in particolare, per gli stessi valori di  $t$ ,  $\phi_t(y) < m$ .

Per assurdo supponiamo che esista  $\bar{t} > 0$  tale che  $\phi_{\bar{t}}(y) \notin B_\varepsilon(x_0)$ . Per continuità di  $\phi_t(y)$  possiamo supporre  $\phi_{\bar{t}}(y) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$  e tale che per ogni  $0 \leq s \leq t$  si ha  $\phi_s(y) \in U(x_0)$ . Si ha dunque  $V(\phi_{\bar{t}}(y)) \geq m > V(\phi_t(y))$  per ogni  $t \geq 0$  tale che  $0 \leq s \leq t$  abbiamo  $\phi_s(y) \in U(x_0)$ , ma  $\partial B_\varepsilon(x_0) \subset \overline{B}_\varepsilon(x_0) \subseteq U(x_0)$ , da cui un assurdo.  $\square$

Introduciamo ora un criterio che è spesso utile per mostrare l'asintotica stabilità:

**Proposizione 2.8** (Criterio di La Salle).

Sia  $x_0$  un punto fisso per  $F \in C^1$  e  $V$  una funzione di Lyapunov per  $x_0$  su  $U(x_0)$ . Se  $y \in U(x_0)$  è tale che  $\mathcal{O}^+(y)$  è limitata e contenuta in  $U(x_0)$  allora  $\omega(y)$  è un insieme non vuoto, compatto e invariante tale che  $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\}$ .

*Dimostrazione.*

Se per  $y$  valgono le ipotesi, per il criterio di invarianza per  $\omega$ -limiti (1.18) abbiamo che  $\omega(y)$  è non vuoto, compatto e invariante.

Osserviamo ora che  $t \mapsto V(\phi_t(y))$  è non crescente e monotona, dunque esiste  $c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi_t(y))$ . Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} z \in \omega(y) &\iff \exists t_k \nearrow +\infty \text{ t.c. } \phi_{t_k}(y) \rightarrow z \implies \\ &\implies V(z) = V\left(\lim_k \phi_{t_k}(y)\right) \stackrel{V \text{ cont.}}{=} \lim_k V(\phi_{t_k}(y)) = c. \end{aligned}$$

Si ha dunque che  $\omega(y) \subseteq \{V = c\}$ . Per l'invarianza di  $\omega(y)$  si ha che  $V \circ \phi(\cdot)|_{\omega(y)}$  è costante per ogni  $z \in \omega(y)$ . Questo significa che  $\dot{V}|_{\omega(y)} = 0$ , da cui  $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\}$ .  $\square$

*Osservazione 2.9.*

Nelle ipotesi della proposizione,  $x_0$  è stabile e quindi esiste un  $y$  che rispetta le ipotesi.

**Teorema 2.10** (Secondo teorema di Lyapunov).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un punto fisso per  $F \in C^1$  e  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapunov stretta per  $x_0$ , allora  $x_0$  è asintoticamente stabile.

*Dimostrazione.*

Per il primo teorema (2.7) abbiamo che  $x_0$  è stabile, quindi dobbiamo solo verificare la convergenza.

Scelto  $\varepsilon > 0$  sia  $\delta > 0$  tale che  $y \in B_\delta(x_0)$  e  $\phi_t(y) \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U(x_0)$ . Allora per La Salle (2.8)  $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\} \cap U(x_0) = \{x_0\}$ .  $\square$

*Osservazione 2.11.*

Se  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di Lyapunov stretta per  $x_0$  allora

$$V_m = \{y \in U(x_0) \mid V(y) \leq m\}$$

è contenuto nel dominio di asintotica stabilità per ogni  $m$  tale che  $V_m \subseteq U(x_0)$ . In particolare vale per  $\tilde{V}_m$  dove

$$\tilde{V}_m = \max \{m \mid V_m \subseteq U(x_0)\}.$$

*Osservazione 2.12.*

Se  $x_0$  è un punto fisso

- Funzione di Lyapunov  $\implies x_0$  stabile
- Funzione di Lyapunov stretta  $\implies x_0$  asintoticamente stabile
- Funzione di Lyapunov + unico insieme invariante di  $\{\dot{V} = 0\}$  è il punto garantisco comunque asintotica stabilità (per il criterio di La Salle (2.8))
- Se  $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^1(U(x_0))$  tale che  $V(x) > V(x_0)$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$  e  $\dot{V}(x) > 0$  per ogni  $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$  allora  $x_0$  è *instabile*.

### 2.2.1 Primo approccio per cercare funzioni di Lyapunov

Nella risoluzione di esercizi spesso si vuole trovare una funzione di Lyapunov. Se non ci sono migliori metodi a disposizione per lo studio del punto, una scelta che di solito funziona quando può almeno localmente (per  $y_0 = (y_1, \dots, y_d)$  punto fisso in esame) è

$$V(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d a_i (x_i - y_i)^{2n_i},$$

cioè costruiamo un paraboloide sopra il punto fisso in esame. Gli insiemi di livello di questa funzione sono paraboloidi contenenti  $y_0$ .

# Capitolo 3

## Linearizzazione

### 3.1 Idea della linearizzazione

Per capire cosa aspettarci in un intorno di un punto fisso  $x_0$  proviamo a linearizzare:

$$\dot{x} = F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{=0} + \mathcal{D}F(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

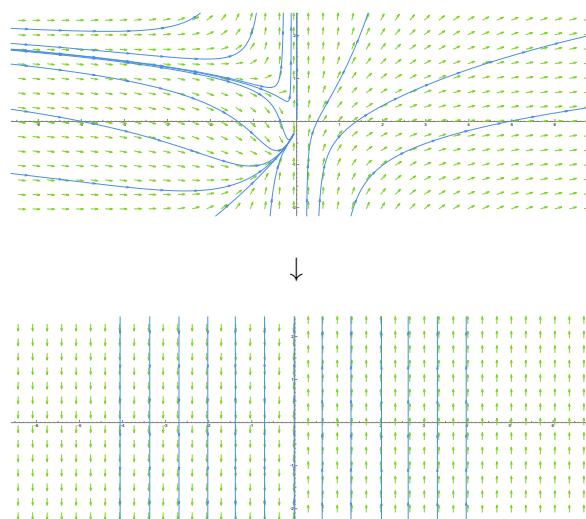
Se  $\|x - x_0\|$  è abbastanza piccolo speriamo di trovare informazioni decentemente affidabili su  $F(x)$  vicino a  $x_0$  studiando  $\mathcal{D}F(x_0)$ .

**Esempio 3.1** (Esempio dove linearizzazione fallisce).

Linearizziamo il sistema dato da  $F(x, y) = (x^2, x + y^2)$ .

$$\mathcal{D}F(0, 0) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il sistema linearizzato ha equazione  $G(x, y) = (0, x)$ . Problema: il sistema originale si comporta in modo un po' diverso nell'origine (acquisto una famiglia di punti fissi, orbite si deformano ecc...).



Possiamo caratterizzare i punti stabili “adatti allo studio tramite linearizzazione” dando la seguente definizione

**Definizione 3.2** (Punti fissi iperbolici).

Un punto fisso  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  per  $F \in C^1$  si dice **iperbolico** se  $\mathcal{D}F(x_0)$  non ha autovalori con parte reale nulla.

Questi sono i punti “buoni” perché vale il seguente teorema.

**Teorema 3.3** (Hartman-Grobman).

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un punto fisso iperbolico per  $\dot{x} = F(x)$ ,  $F \in C^1$  e sia  $\phi_t$  il flusso di questo sistema.

Consideriamo ora il **sistema linearizzato in  $x_0$** , ovvero il sistema dato da

$$\dot{y} = \mathcal{D}F(x_0)y, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

e sia  $\psi_t$  il flusso di questo sistema.

Esistono allora  $U$  intorno di  $x_0$ ,  $V$  intorno di 0 e un omeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tale che per ogni  $x \in U$  si ha che per ogni  $t$  tale che  $\phi_t(x) \in U$

$$h(\phi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

*Osservazione 3.4.*

La condizione  $\Re(\lambda) = 0$  è equivalente a  $|e^\lambda| = 1$ , cioè  $e^\lambda = e^{i\theta}$ . Intuitivamente questo ci dice che l'autospazio generalizzato corrispondente a  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  non è attratto verso il punto fisso ma non vi è neanche respinto nel caso lineare, dunque nel sistema originale la sorte dei punti è determinata da espressioni non lineari.

*Osservazione 3.5.*

Anche se  $F$  ha maggiore regolarità, in generale  $h$  non acquista regolarità.

Ricordiamo il seguente

**Teorema 3.6** (Decomposizione in forma di Jordan reale).

Sia  $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ , allora esiste  $P \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$  tale che  $\det P \neq 0$  e  $\Lambda = P^{-1}AP$  è diagonale a blocchi.

Supponiamo che gli autovalori di  $A$  siano in una delle seguenti forme

- $\{\lambda_j\}_{j \in \{1, \dots, k\}}$  con  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  e  $m_{alg}(\lambda_j) \leq 3$
- $\{a_j + ib_j\}_{j \in \{1, \dots, \ell\}}$  con  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j \neq 0$  e  $m_{alg}(a_j + ib_j) = 1$ .

Allora  $\Lambda = diag(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, B_1, \dots, B_\ell)$  con

$$\begin{aligned} \Lambda_j &\in \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, (\lambda_j) \right\} \end{aligned}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che se  $\dot{y} = DF(x_0)y$  ed esiste  $P$  invertibile tale che  $P^{-1}DF(x_0)P = \Lambda$  con  $\Lambda$  in forma di Jordan reale allora, ponendo  $z = P^{-1}y$  troviamo un omeomorfismo tale che

$$\dot{z} = P^{-1}\dot{y} = P^{-1}DF(x_0)y = (P^{-1}DF(x_0)P)z = \Lambda z.$$

**Notazione 3.7.**

Sia  $V_{\lambda_j}$  l'autospazio generalizzato di  $\lambda_j$ , similmente per  $a_j + ib_j$ .

**Proposizione 3.8** (Gli autospazi generalizzati sono invarianti).

Per  $\dot{y} = Ay$ ,  $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$  si ha che  $V_{\lambda_j}$  e  $V_{a_j+ib_j}$  sono insiemi invarianti.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo che  $A = \Lambda$  sia in forma di Jordan reale e a meno di permutare le coordinate mostriamo la tesi solo per  $V_{\lambda_1}$ <sup>1</sup>. Osserviamo che un generico vettore di  $V_{\lambda_1}$  è della forma  $y_0 = ((y_0)_1, \dots, (y_0)_s, 0, \dots, 0)$ , dove  $s = m_{alg}(\lambda_1)$  (dove poniamo  $s = 2$  nel caso di autovalore complesso). La tesi segue calcolando:

$$\phi_t(y_0) = e^{t\Lambda}y_0 = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_s t})y_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_s t} & \\ & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (y_0)_1 \\ \vdots \\ (y_0)_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{\lambda_1}.$$

□

**Definizione 3.9** (Sottospazi stabili).

Il **sottospazio stabile** di 0 per il sistema  $\dot{y} = Ay$  è l'insieme

$$E^s(0) = \text{Span}(v \in V_{\lambda_i} \mid \Re(\lambda_i) < 0).$$

Il **sottospazio instabile** ( $E^u(0)$ ) e il **sottospazio centrale** ( $E^c(0)$ ) sono definiti in modo analogo considerando  $\Re(\lambda_i) > 0$  e  $\Re(\lambda_i) = 0$  rispettivamente.

**Teorema 3.10** (Invarianza e caratterizzazione dei sottospazi stabili).

Dato il sistema  $\dot{y} = Ay$  si ha che:

1.  $\dim E^u(0) + \dim E^s(0) + \dim E^c(0) = d$

2.  $E^{s,c,u}(0)$  è invariante per  $\phi_t$

3.  $E^s(0) = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = 0 \right\}$

4.  $E^u(0) = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = 0 \right\}.$

*Dimostrazione.* (NON DATA DURANTE IL CORSO).

Il primo punto segue da noti risultati sugli autospazi generalizzati.

Il secondo punto è una conseguenza dell'invarianza degli autospazi (3.8).

Gli ultimi due punti seguono da come funzionano i  $e^{\Re(\lambda)t}$  (questi fattori appaiono dopo essersi portati in forma di Jordan). □

---

<sup>1</sup>dove  $\lambda_1$  in questo caso si riferisce ad autovalori potenzialmente complessi.

## 3.2 Pozzi e Sorgenti

**Definizione 3.11** (Pozzi e sorgenti).

Sia  $x_0$  un punto fisso. Esso si dice

- **pozzo** se ogni autovalore di  $\mathcal{D}F(x_0)$  ha parte reale negativa,
- **sorgente** se ogni autovalore di  $\mathcal{D}F(x_0)$  ha parte reale positiva.

*Osservazione 3.12.*

Si può pensare a sorgenti come pozzi per tempi negativi.

**Proposizione 3.13** (Stabilità dei pozzi).

*I pozzi sono asintoticamente stabili*

*Dimostrazione.*

A meno di traslare il sistema supponiamo  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$ .

Poiché cambi di base lineari non cambiano la stabilità dell'origine supponiamo che  $\mathcal{D}F(0)$  sia in forma di Jordan reale. Trattiamo prima i casi dove  $\mathcal{D}F(0)$  consiste di un solo blocco di Jordan e poi uniamo i risultati.

$\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$  Supponiamo che

$$\mathcal{D}F(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \implies \dot{x} = F(x) = \underbrace{F(0)}_{=0} + \mathcal{D}F(0)x + O(\|x\|^2).$$

Dato  $\varepsilon > 0$  consideriamo il cambio di base

$$y = (y_1, \dots, y_d), \quad y_i = \varepsilon^{-i+1} x_i,$$

da cui

$$\dot{y} = Ay + \tilde{G}(y), \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & \varepsilon \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}(y) = O(\|y\|^2).$$

Affermiamo che la funzione

$$V(y) = \frac{1}{2} \|y\|^2$$

è di Lyapunov stretta in un intorno di 0. La prima condizione è evidentemente verificata, quindi dobbiamo solo trovare un intorno dove  $\dot{V}(y) < 0$  per  $y \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \sum_{i=1}^{d-1} y_i \underbrace{(\lambda y_i + \varepsilon y_{i+1} + \tilde{G}_i(y))}_{\dot{y}_i} + y_d \underbrace{(y_d + \tilde{G}_d(y))}_{\dot{y}_d} = \\ &= \lambda \|y\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{d-1} y_i y_{i+1} + y \cdot \tilde{G}(y) \leq \\ &\leq \lambda \|y\| + \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{i=1}^{d-1} y_i^2 + \sum_{i=2}^d y_i^2 \right) + O(\|y\|^3) = \\ &= \left( \lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_1^2 + y_d^2) + (\lambda + \varepsilon) \sum_{i=2}^{d-1} y_i^2 + O(\|y\|^3) \leq \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \|y\|^2 + O(\|y\|^3). \end{aligned}$$

Cerchiamo dunque condizioni valide per  $\varepsilon$  e  $\|y\|$ :  
 Poiché  $\lambda < 0$  è lecito fissare  $\varepsilon \in (0, |\lambda|)$ . Per le proprietà degli  $O$  grandi esistono  $r, C > 0$  tali che

$$\|y\| < r \implies \dot{V}(y) \leq ((\lambda + \varepsilon) + C \|y\|) \|y\|^2.$$

Ponendo ora  $\lambda + \varepsilon + C \|y\| < 0$  si ha che se

$$r' < \min \left\{ r, \frac{|\lambda + \varepsilon|}{C} \right\}$$

allora per  $y \in B_{r'}(0) \setminus \{0\}$  vale

$$\dot{V}(y) \leq ((\lambda + \varepsilon) + C \|y\|) \|y\|^2 < 0,$$

cioè  $V$  è una funzione di Lyapunov stretta per  $x_0$  in un opportuno cambio di base, dunque  $x_0$  è asintoticamente stabile per il secondo teorema di Lyapunov (2.10).

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  Supponiamo che

$$\mathcal{D}F(0) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

A meno di un coniugio troviamo

$$\dot{y} = Ay + \tilde{G}(y), \quad A = \begin{pmatrix} a & b & \varepsilon & 0 \\ -b & a & 0 & \varepsilon \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

e concludiamo in modo simile al caso precedente.

**generale** Segue dai due casi precedenti dando un ulteriore limitazione con gli  $O$  grandi sui termini non lineari.

□

### 3.3 Classificazione dei punti stabili lineari sul piano

Consideriamo i sistemi lineari di questa forma

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Sappiamo che

$$\phi_t(x_0) = e^{At}x_0,$$

in particolare  $x_0 = 0$  è un punto fisso.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A.$$

Segue che gli autovalori di  $A$  sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr } A \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A.$$

Consideriamo i possibili casi:

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono reali distinti.

\*) Se  $\text{tr } A > 0$  allora  $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ , da cui a meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \dot{u} = \lambda_+ u \\ \dot{v} = \lambda_- v \end{cases},$$

da cui le soluzioni sono

$$(u(t), v(t)) = (e^{\lambda_+ t} u_0, e^{\lambda_- t} v_0).$$

Questa situazione è detta **nodo instabile**.

Osserviamo che  $E^u(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^s(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

\*) Se  $\text{tr } A < 0$  allora  $\lambda_- < \lambda_+ < 0$  e troviamo il **nodo stabile**.

Osserviamo che  $E^s(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^u(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono complessi coniugati.  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Segue che  $\text{tr } A = 2\alpha$ . A meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

\*) Se  $\alpha > 0$  troviamo

$$x(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **fuoco instabile**. Osserviamo che  $E^u(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^s(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

\*) Se  $\alpha < 0$  troviamo

$$x(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **fuoco stabile**. Osserviamo che  $E^s(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^u(0) = E^c(0) = \{0\}$ .

\*) Se  $\alpha = 0$  troviamo

$$x(t) = R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **centro**. Osserviamo che  $E^c(0) = \mathbb{R}^2$  e  $E^s(0) = E^u(0) = \{0\}$ .

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Gli autovalori coincidono e sono della forma  $\lambda = \text{tr } A/2$ . A meno di coniugio abbiamo

due possibilità:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = e^{\lambda t} x_0$$

Questa situazione è detta **Stella stabile/instabile** per segno negativo o positivo della traccia rispettivamente.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = e^{\lambda t} (u_0 + tv_0, v_0).$$

Questa situazione è detta **nodo stabile/instabile improprio**.

$$\begin{cases} \det A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Gli autovalori sono reali di segno opposto  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ . A meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \implies x(t) = (u_0 e^{\lambda_+ t}, v_0 e^{\lambda_- t}).$$

Troviamo un **punto di sella**. Il segno della traccia specifica solo verso quale asse le iperboli sono schiacciate.

Osserviamo che  $E^s(0) = \{x = 0\}$ ,  $E^u(0) = \{y = 0\}$ ,  $E^c(0) = 0$ , cioè lo “spazio tangente” in 0 si decompone in una retta stabile e una instabile.

$$\det A = 0$$

Gli autovalori sono 0 e  $\text{tr } A$ . In tutti i casi a meno di coniugio una coordinata resta costante, dunque troviamo delle **rette**.

Riassumiamo i casi nella seguente tabella

$\text{sgn } \det A$	$\text{sgn } \Delta$	$\text{sgn } \text{tr } A$	Nome
+	+	+	Nodo instabile
+	+	-	Nodo stabile
+	-	+	Fuoco instabile
+	-	-	Fuoco stabile
+	-	0	Centro
+	0	+	Stella o nodo improprio instabile
+	0	-	Stella o nodo improprio stabile
-	+	•	Punto di Sella
0	•	•	Rette

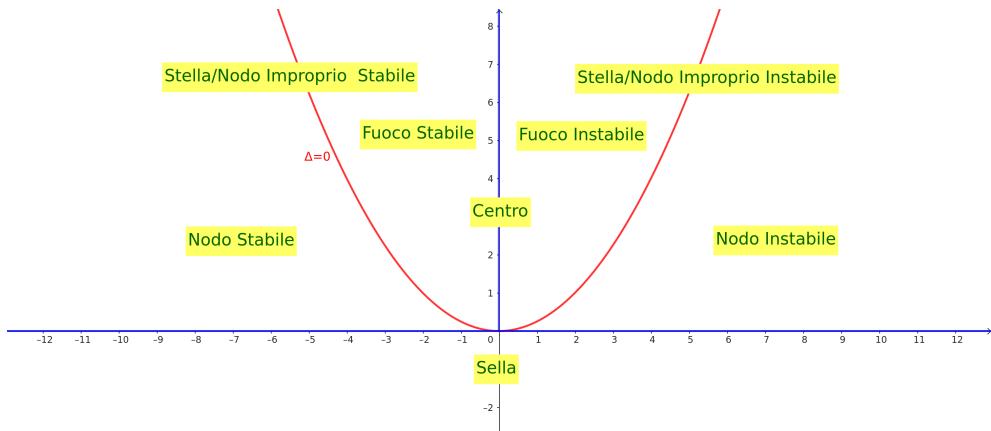


Figura 3.1: Utile diagramma che organizza i tipi di punti stabili lineari. L’asse  $x$  corrisponde ai possibili valori di  $\text{tr } A$  e l’asse  $y$  ai possibili valori di  $\det A$ . La parabola rossa indica il luogo dove  $\Delta = 0$ ; nella regione sopra la parabola troviamo  $\Delta < 0$  e sotto  $\Delta > 0$ . In blu sono indicati i valori di  $\text{tr } A$  e  $\det A$  per cui il punto stabile in considerazione NON è iperbolico.

Riportiamo dei diagrammi di fase per evidenziare la forma delle orbite.

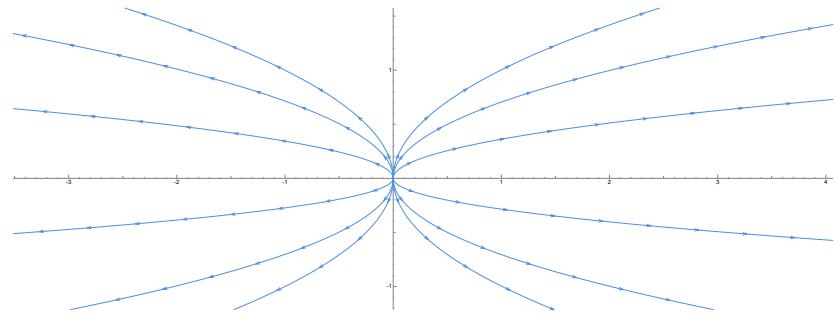


Figura 3.2: Nodo instabile

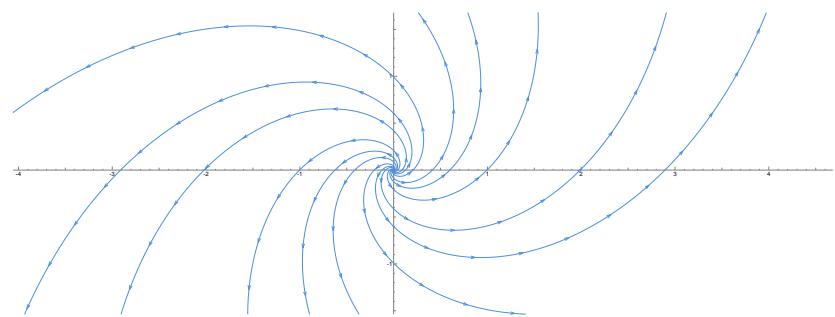


Figura 3.3: Fuoco instabile

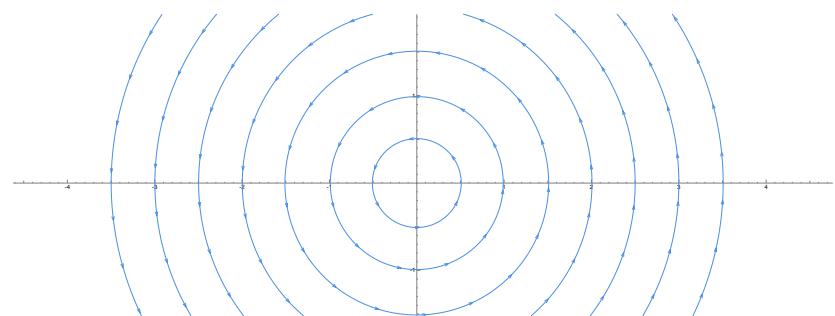


Figura 3.4: Centro

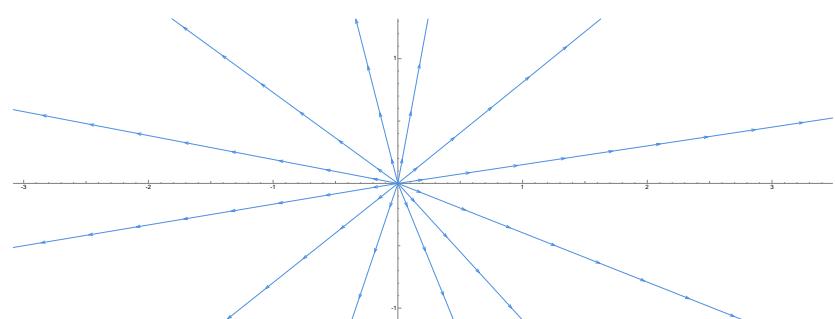


Figura 3.5: Stella instabile

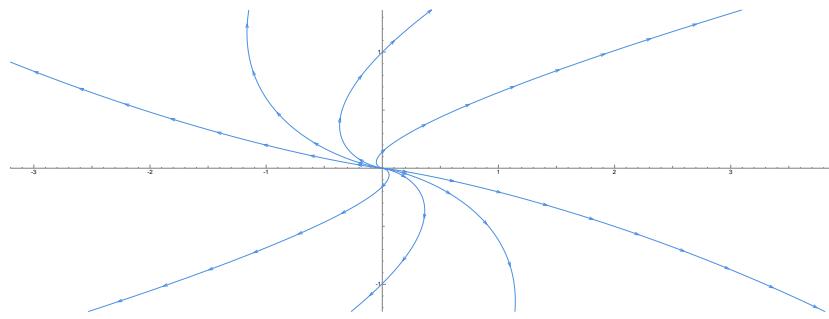


Figura 3.6: Nodo improprio instabile

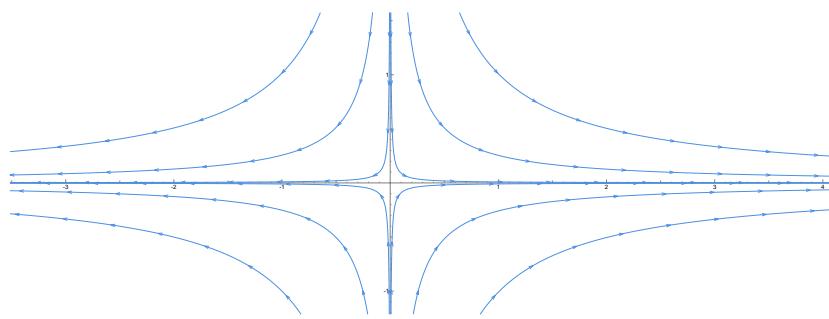


Figura 3.7: Sella

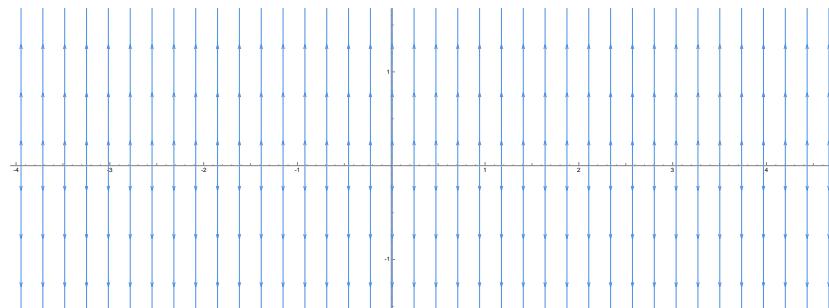


Figura 3.8: Rette per matrice diagonalizzabile

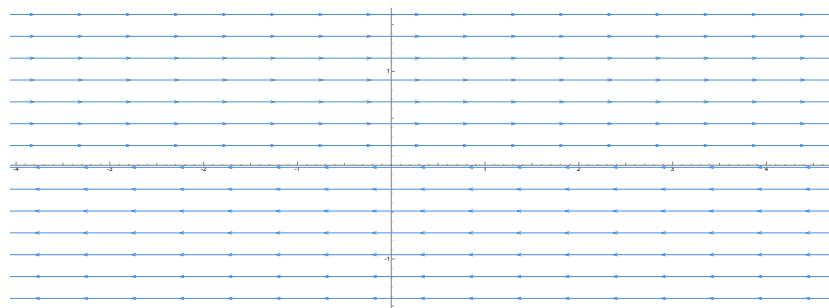


Figura 3.9: Rette per blocco di Jordan nilpotente

## Capitolo 4

# Integrali Primi e Sistemi Hamiltoniani

In questo capitolo introduciamo una classe di sistemi che ammettono integrale primo (e quindi ci permettono di fare uno studio globale guardando le curve di livello di questo). A volte, anche se un sistema non è della forma trattata in questo capitolo, è possibile studiarne il comportamento approssimandolo prima ad uno di questi e poi perturbando la soluzione trovata in modo opportuno.

### 4.1 Sistemi Hamiltoniani

#### Notazione 4.1.

Quando consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^{2d}$  in questo capitolo indichiamo le coordinate come  $(x, y) = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$  con  $x = q \in \mathbb{R}^d$  e  $y = p \in \mathbb{R}^d$ . In genere  $q$  è detto **coordinata generalizzata** e  $p$  è detto **momento generalizzato**.

Con la notazione  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$  intendiamo il vettore la cui componente  $i$ -esima è  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ . Similmente per  $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ .

#### Definizione 4.2 (Sistema Hamiltoniano).

Un sistema di ODE su  $\mathbb{R}^{2d}$  è un **sistema Hamiltoniano** se è della forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\dot{y} \end{pmatrix} = \nabla H \iff \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, d\},$$

dove  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^2(\mathbb{R}^{2d})$  detta **funzione Hamiltoniana** del sistema.

Il numero  $d$  è detto numero di **gradi di libertà**.

#### Osservazione 4.3.

Ad ogni funzione  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  è associato un sistema Hamiltoniano.

#### Proposizione 4.4 (Hamiltoniana è un integrale primo).

*Se  $H$  è una funzione Hamiltoniana allora è un integrale primo del sistema ad essa associato.*

*Dimostrazione.*

Basta calcolare  $\dot{H}$ .

$$\begin{aligned}\dot{H}(x, y) &= \nabla H(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right) = 0.\end{aligned}$$

□

#### Esempio 4.5.

Un sistema con due gradi di libertà è dato dal doppio pendolo, il quale è interamente determinato da due angoli. Lo spazio delle fasi è  $T^2 \times \mathbb{R}^2$  dove  $T^2 = S^1 \times S^1$  parametrizza i due angoli e  $\mathbb{R}^2$  le velocità angolari.

Osserviamo intuitivamente che  $\dim \{H = c\} = 3$ , che vedremo essere la minima dimensione che permette orbite caotiche.

#### Esempio 4.6 (Un grado di libertà e mezzo).

Se un sistema ha un grado di libertà ma non è autonomo possiamo reinterpretarlo come un sistema con due gradi di libertà dove abbiamo aggiunto il tempo e questi sistemi possono ancora presentare comportamenti caotici. Un esempio sono oscillatori armonici perturbati periodicamente.

#### Teorema 4.7 (Liouville).

Sia  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^3$  e sia  $\phi_t$  il flusso del sistema Hamiltoniano associato. Allora per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^{2d}$  misurabile si ha che per ogni  $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\phi_t(A)).$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, y) = F(\phi_t(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y}(\phi_t(x, y)) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(\phi_t(x, y)) \end{pmatrix}.$$

Poiché  $H$  è di classe  $C^3$ , si ha che  $\phi : (x, y, t) \mapsto \phi_t(x, y)$  è di classe  $C^2$ <sup>1</sup>, quindi

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{D}(\phi_t(x, y))) \stackrel{\text{regolarità}}{=} \underbrace{\mathcal{D}\left(\frac{d}{dt} \phi_t(x, y)\right)}_{=F(\phi_t(x, y))} = \mathcal{D}F(\phi_t(x, y)) \mathcal{D}(\phi_t(x, y)).$$

Poiché  $\mathcal{D}\phi_0(x, y) = I$ , possiamo integrare l'identità precedente<sup>2</sup> per trovare

$$\mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = \exp\left(\int_0^t \mathcal{D}F(\phi_s(x, y)) ds\right).$$

---

<sup>1</sup>Poiché  $H$  è  $C^3$  ne deriva che  $F$  è  $C^2$ . Dato che  $\phi' = F(\phi)$  si ha per il teorema del differenziale totale che  $\phi$  è almeno  $C^2$  in ogni entrata.

<sup>2</sup>è come se stessimo risolvendo insieme tutti i sistemi della forma

$$\frac{d}{dt} v(t) = \mathcal{D}F(\phi_t(x, y))v(t), \quad \text{per } v(t) = \mathcal{D}(\phi_t(x, y))e_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}.$$

Segue da una identità nota<sup>3</sup> che

$$\det \mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{tr} (\mathcal{D}F(\phi_s(x, y))) ds \right).$$

Per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i},$$

dunque  $\operatorname{tr} (\mathcal{D}F) = 0$ , da cui

$$\operatorname{tr} (\mathcal{D}F(\phi_s(x, y))) = 0.$$

Segue che

$$\det \mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = e^0 = 1.$$

Concludiamo con il seguente conto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_t(A)) &= \int_{\phi_t(A)} 1 d\mathcal{L} = \int_A |\det \mathcal{D}\phi_t(x, y)(x, y)| d\mathcal{L} = \\ &= \int_A 1 d\mathcal{L} = \mathcal{L}(A). \end{aligned}$$

□

#### 4.1.1 Sistemi meccanici con un grado di libertà

**Definizione 4.8** (Sistema meccanico).

Un **sistema meccanico** è un sistema Hamiltoniano della forma

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^\top A y + V(x)$$

con  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A \in Sym(d, \mathbb{R})$ . La funzione  $V$  è detta **potenziale**.

Studiamo un sistema meccanico con un grado di libertà:

A meno di riscalamento poniamo  $A = (1)$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'(x) \end{cases}$$

Osserviamo che i punti fissi sono  $\{(x, 0) \mid V'(x) = 0\}$ . La matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{D}F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x) & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{tr} \mathcal{D}F = 0, \det \mathcal{D}F = V''(x).$$

Se  $V''(x) = 0$  siamo in un caso degenere e il linearizzato non ci aiuta.

Se  $V''(x) < 0$  il punto  $(x, 0)$  è una sella.

Se  $V''(x) > 0$  il punto  $(x, 0)$  è un punto non iperbolico di tipo centro.

Il teorema di linearizzazione ci informa solo sul caso  $(x, 0)$  sella. Studiamo la stabilità del caso di tipo centro.

---

<sup>3</sup> $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$

**Proposizione 4.9** (Caratterizzazione dei punti fissi in sistema meccanico ad un grado di libertà).

*I punti fissi non degeneri<sup>4</sup> di un sistema meccanico ad un grado di libertà sono selle o centri<sup>5</sup>.*

*Idea di dimostrazione.*

Se  $(x_0, 0)$  fosse instabile, esisterebbe un  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  esiste  $z_0 \in B_\delta((x_0, 0))$  tale che  $\|\phi_t(z_0) - (x_0, 0)\| > \varepsilon$ . Poniamo

$$m_\varepsilon = \min_{\partial B_\varepsilon((x_0, 0))} H$$

e consideriamo un  $\varepsilon$  abbastanza piccolo in modo tale che  $m_\varepsilon \sup_{B_\varepsilon((x_0, 0))} H$ , che sappiamo esistere perché da noti criteri sulle derivate prime e seconde  $(x_0, 0)$  è un minimo locale di  $H$ . Poiché le orbite del sistema corrispondono alle curve di livello di  $H$  abbiamo trovato una contraddizione in quanto per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo le orbite non possono attraversare  $\partial B_\varepsilon((x_0, 0))$ .

Se  $(x_0, 0)$  fosse asintoticamente stabile esisterebbe un intorno di  $(x_0, 0)$  che converge a  $(x_0, 0)$ , in particolare l'area di questo intorno non si conserva, contraddicendo il teorema di liouville (4.7).  $\square$

---

<sup>4</sup> $(x_0, 0)$  con  $V'(x_0) = 0$  e  $V''(x_0) \neq 0$   
<sup>5</sup>non solo nel linearizzato

## Capitolo 5

# Primi metodi di studio globale

### 5.1 Metodo delle isocline nel piano

Supponiamo  $F = (f, g)$  con  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ .

Introduciamo un metodo che permette di calcolare esplicitamente orbite in qualche caso.

**Proposizione 5.1** (Metodo delle isocline nel piano).

Sia  $(x_0, y_0)$  tale che  $F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , allora esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $\mathcal{O}(x_0, y_0) \cap U$  è il grafico di una funzione  $h(x)$  (se  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , altrimenti  $h(y)$ ) che risolve l'equazione differenziale

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}.$$

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , esiste dunque  $U$  intorno di  $(x_0, y_0)$  dove  $f$  non si annulla. Consideriamo la funzione

$$I(x, y) = y - h(x)$$

dove  $h(x)$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}, \quad h(x_0) = y_0$$

definita in un intorno di  $x_0$  contenuto nella proiezione sulla prima componente di  $U$ . Osserviamo che

$$\dot{I}|_{I=0}(x, y) = \dot{y} - h'(x)\dot{x}|_{I=0} = g(x, y) - \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}f(x, y)|_{y=h(x)} = 0,$$

dunque per il criterio (1.10) sappiamo che  $\{y = h(x)\}$  è un insieme invariante. Poiché è una curva e contiene  $(x_0, y_0)$  questa è l'orbita voluta ed effettivamente l'abbiamo scritta come grafico.  $\square$

## 5.2 Ricerca di simmetrie

Spesso, soprattutto negli esercizi, i sistemi in esame presentano delle simmetrie, ovvero è possibile costruire una mappa<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \\ x(t) &\longmapsto \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

tale che

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \implies \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = F(\tilde{x}(t)).$$

Spesso una simmetria si fattorizza in una mappa “geometrica” composta con una mappa “temporale”, cioè esistono  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tali che

$$\tilde{x}(t) = g(x(\tau(t))).$$

**Esempio 5.2** (Esempio di simmetrie).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

L’unico punto fisso è  $(0,0)$  e gli assi sono invarianti. Ci sono altre rette invarianti? Cioè, esistono  $a, b$  tali che una curva di livello di  $I(x, y) = ax + by$  è invariante?

$$\begin{aligned} \dot{I}|_{I=c} &= a\dot{x} + b\dot{y}|_{ax+by=c} \stackrel{\text{se } b \neq 0}{=} \\ &= ax^2 + by^2|_{ax+by=c} = ax^2 + b\left(\frac{c - ax}{b}\right)^2 = \\ &= \left(a + \frac{a^2}{b}\right)x^2 - 2\frac{ac}{b}x + \frac{c^2}{b}. \end{aligned}$$

Per annullare tutti i coefficienti  $c = 0$  e  $a \in \{0, -b\}$ . Troviamo dunque le condizioni  $c = 0$  e  $a = 0$  o  $a = -b$ . Dunque  $\{x = y\}$  è un insieme invariante.

Andiamo ora a studiare le isocline. Per  $x \neq 0$  consideriamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{x^2} \implies -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} \implies y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0}\right)}.$$

Studiamo le simmetrie del sistema. Proviamo a porre  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t))$ , da cui

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = -\dot{x}(-t)(-1) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) = (-\tilde{x}(t))^2 = (\tilde{x}(t))^2$$

e similmente per  $\tilde{y}$ . Questo mostra che ad ogni orbita possiamo associarne un’altra che geometricamente è la riflessione rispetto all’origine e che viene percorsa in verso opposto.

---

<sup>1</sup>Durante il corso non è stata data una definizione rigorosa di simmetria, solo una idea intuitiva e pratica di come impiegarla nella risoluzione di esercizi. Questa formulazione NON è stata data durante il corso e non so se è standard, serve solo come guida per capire il concetto a chi legge le dispense.

# Capitolo 6

## Varietà stabili/instabili

### 6.1 Varietà stabili e instabili locali

In un punto fisso lineare di tipo sella sappiamo che esistono due assi: uno che converge al punto ( $E^s$ ) e uno che vi diverge ( $E^u$ ).

Cerchiamo di generalizzare questo concetto.

**Definizione 6.1** (Varietà stabile/instabile locale).

Siano  $x_0$  un punto fisso iperbolico per  $\dot{x} = F(x)$  e  $U$  un intorno di  $x_0$ . La **varietà stabile locale** di  $x_0$  in  $U$  è data da

$$W_{loc}^s(x_0) = \left\{ y \in U \mid \forall t \geq 0 \phi_t(y) \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) \rightarrow x_0 \right\}.$$

Similmente definiamo la **varietà instabile locale** come

$$W_{loc}^u(x_0) = \left\{ y \in U \mid \forall t \leq 0 \phi_t(y) \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) \rightarrow x_0 \right\}.$$

**Teorema 6.2** (Varietà stabile/instabile).

Sia  $x_0$  un punto fisso iperbolico<sup>1</sup> per  $F \in C^k$  e  $k \geq 1$ . Allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

1.  $W_{loc}^{s/u}(x_0)$  in  $B_\varepsilon(x_0)$  esistono e sono uniche,
2.  $W_{loc}^s(x_0)$  è positivamente invariante e  $W_{loc}^u(x_0)$  è negativamente invariante,
3.  $W_{loc}^{s/u}(x_0)$  sono sottovarietà di  $B_\varepsilon(x_0)$  di classe  $C^k$ .  
Inoltre  $\dim W_{loc}^s(x_0) = \dim E^s(x_0)$  e  $\dim W_{loc}^u(x_0) = \dim E^u(x_0)$ .
4. I sottospazi affini  $x_0 + E^{s/u}(x_0)$  sono tangenti a  $W_{loc}^{s/u}$  in  $x_0$ .

*Dimostrazione.* (Caso  $d = 2$ ).

Poiché  $x_0$  è un punto fisso iperbolico si presentano due casi: le parti reali dei due autovalori hanno lo stesso segno o hanno segno opposto. Se hanno lo stesso segno sappiamo che  $\det DF(x_0) > 0$  e che  $\text{tr } DF(x_0) \neq 0$ . Segue dunque che  $W_{loc}^s(x_0) = B_\varepsilon(x_0)$  e  $W_{loc}^u(x_0) = \{x_0\}$  o viceversa a seconda del segno delle parti reali. Da queste caratterizzazioni è evidente che il teorema vale.

<sup>1</sup> ricordo che  $x_0$  iperbolico implica in particolare che  $\dim E^s(x_0) + \dim E^u(x_0) = d$ , dove  $\mathbb{R}^d$  è lo spazio delle fasi.

Supponiamo dunque che le parti reali dei due autovalori abbiano segno opposto. Segue immediatamente che  $x_0$  è un punto di stella e che gli autovalori sono reali. Siano  $-\lambda$  e  $\mu$  questi autovalori (dove  $\lambda, \mu > 0$ ). A meno di una traslazione e un cambio base supponiamo

$$x_0 = (0, 0), \quad \mathcal{D}F(x_0)e_1 = -\lambda e_1, \quad \mathcal{D}F(x_0)e_2 = \mu e_2.$$

Possiamo dunque riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + f(x, y) \\ \dot{y} = \mu y + g(x, y) \end{cases}$$

dove  $f, g$  sono di classe  $C^k$ ,  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ <sup>2</sup>,  $\nabla f(0, 0) = \nabla g(0, 0) = (0 \ 0)^T$ <sup>3</sup> e le seguenti funzioni sono  $o$ -piccoli di  $\sqrt{x^2 + y^2}$ :  $f$ ,  $g$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$ <sup>4</sup>.

Data questa trasformazione, la tesi è equivalente a mostrare che  $W_{loc}^s(0, 0)$  esiste, è unico, positivamente invariante, di classe  $C^k$  e tangente a

$$\{y = 0\} = (0, 0) + E^s((0, 0)) \text{ in } (0, 0).$$

Un argomento simmetrico mostra i risultati mancanti relativi a  $W_{loc}^u$ .

Definiamo i seguenti insiemi: per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $M > 1$  siano

$$D_\varepsilon = \{|x| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon\}, \quad C_M = \{|x| \geq M|y|\}, \quad C_M^+ = C_M \cap \{x > 0\} \cap D_\varepsilon.$$

Mostriamo prima dei lemmi utili alla dimostrazione. Fissiamo  $M > 1$

### Lemma 6.3.

Esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $\dot{x}|_{C_M^+} < 0$

*Dimostrazione del lemma.*

Ricordiamo che

$$\dot{x} = -\lambda x + f(x, y) \quad \text{con } |f(x, y)| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

in particolare esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$|f(x, y)| \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se  $(x, y) \in C_M$  allora

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{M^2}\right)} \stackrel{M \geq 1}{\leq} \sqrt{2}|x|.$$

Mettendo insieme questi risultati

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{C_M^+} &= -\lambda x + f(x, y)|_{C_M^+} \leq \\ &\leq -\lambda x + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}|_{C_M^+} \leq \\ &\stackrel{x > 0}{\leq} -\lambda x + \frac{\lambda}{2}x = -\frac{\lambda}{2}x < 0. \end{aligned}$$

□

---

<sup>2</sup>in quanto  $x_0 = (0, 0)$  è un punto fisso

<sup>3</sup>in quanto sappiamo che  $\mathcal{D}F((0, 0)) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

<sup>4</sup>per come funziona l'espansione di Taylor

**Lemma 6.4.**

Esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y>0\}} > 0$  e  $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y<0\}} < 0$ .

*Dimostrazione del lemma.*

Ricordiamo che

$$\dot{y} = \mu y + g(x, y) \quad \text{con } |g(x, y)| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

in particolare esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$|g(x, y)| \leq \frac{\mu}{2\sqrt{1+M^2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y>0\}} &= \mu y + g(My, y) \geq \\ &\geq \mu y - \frac{\mu}{2\sqrt{1+M^2}} \sqrt{(1+M^2)y} = \\ &= \frac{\mu}{2} y > 0. \end{aligned}$$

Gli stessi conti con le disuguaglianze nel senso opposto danno la dimostrazione per  $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y<0\}}$ .  $\square$

Definiamo gli insiemi

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^+ &= \{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \exists t_0 > 0 \text{ t.c. } \phi_{t_0}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+ \cap \{y > 0\}\} \\ I_\varepsilon^- &= \{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \exists t_0 > 0 \text{ t.c. } \phi_{t_0}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+ \cap \{y < 0\}\} \end{aligned}$$

**Lemma 6.5.**

Gli insiemi  $I_\varepsilon^+$  e  $I_\varepsilon^-$  sono intervalli aperti.

*Dimostrazione del lemma.*

Mostriamo la tesi solo per  $I_\varepsilon^+$ . Il caso  $I_\varepsilon^-$  è simmetrico.

aperto Sia  $y_0 \in I_\varepsilon^+$  e sia  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_{t_0}(\varepsilon, y_0) \in \partial C_M^+ \cap \{y > 0\}$ . Se  $\phi_t(a, b) = (x(t, a, b), y(t, a, b))$  osserviamo che  $y(t_0, \varepsilon, y_0) > 0$  e  $x(t_0, \varepsilon, y_0) - My(t_0, \varepsilon, y_0) = 0$ . Definiamo

$$G(b, t) = x(t, \varepsilon, b) - My(t, \varepsilon, b).$$

Per quanto detto  $G(y_0, t_0) = 0$  e, per  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo,  $\frac{d}{dt}G(y_0, t_0) = \dot{x}(t_0, \varepsilon, y_0) - M\dot{y}(t_0, \varepsilon, y_0) < 0 \neq 0$ <sup>5</sup>.

Abbiamo verificato le ipotesi del teorema della funzione implicita, dunque esistono  $U$  intorno di  $y_0$ ,  $V$  intorno di  $t_0$  e  $\tau : U \rightarrow V$  continua  $C^k$  (regolarità di  $G$ ) tali che  $\tau(y_0) = t_0$  e per ogni  $y \in U$  abbiamo

$$G(y, \tau(y)) = 0 \iff \phi_{\tau(y)}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+.$$

La tesi segue a meno di restringere  $U$  a  $U \cap (\phi_{\tau(\cdot)}(\varepsilon, \cdot))^{-1}(\{y > 0\})$ .

connesso Segue immediatamente da esistenza e unicità unito alla monotonia di  $x$  in  $t$  e per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo (in modo che  $D_\varepsilon$  contenga come unico punto fisso  $(0, 0)$ ).  $\square$

---

<sup>5</sup> stiamo usando i due lemma precedenti.

Per ogni  $(\varepsilon, y) \in C_M$  sappiamo che  $\phi_t(\varepsilon, y)$  esce dal bordo superiore, inferiore, o tocca  $(0, 0)$ .

**Lemma 6.6.**

Si ha che

$$\#\{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \omega(\varepsilon, y) = \{(0, 0)\}\} = 1.$$

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che esistano  $y_0$  e  $y_1$  distinti nell'insieme. A meno di moltiplicare  $F$  per una funzione scalare<sup>6</sup> possiamo supporre

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \frac{\mu y + g(x, y)}{\lambda - \frac{1}{x} f(x, y)} \end{cases}$$

A meno di conti possiamo definire  $\tilde{\lambda} > 0$  e  $\tilde{g}$  con le stesse proprietà di  $g$  come  $o$ -piccolo di  $\sqrt{x^2 + y^2}$  in modo tale che il sistema diventi

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \tilde{\lambda} y + \tilde{g}(x, y) \end{cases}$$

In questo nuovo sistema  $\phi_t(\varepsilon, y) = (\varepsilon e^{-t}, y(t, \varepsilon, y))$ , cioè orbite che partono con la stessa componente  $x$  mantengono la stessa componente  $x$ . Consideriamo come cambia la distanza tra  $y_0$  e  $y_1$  seguendo le orbite:

$$\frac{d}{dt} (y_1(t) - y_0(t)) = \dot{y}_1(t) - \dot{y}_0(t) = \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) + \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_1(t)) - \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_0(t)).$$

Per il teorema di Lagrange

$$|\tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_1(t)) - \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_0(t))| = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(\varepsilon e^{-t}, \xi(t)) |y_1(t) - y_0(t)|$$

con  $\xi(t) \in (y_0(t), y_1(t))$ . Sia ora  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$\left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \right| \leq \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y_1(t) - y_0(t)) &\geq \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sqrt{\varepsilon^2 e^{-2t} + \xi(t)^2} |y_1(t) - y_0(t)| \stackrel{y_1(t), y_2(t) \in D_\varepsilon}{\geq} \\ &\geq \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \varepsilon \sqrt{2} (y_1(t) - y_0(t)) = \\ &= \underbrace{\left( \tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \varepsilon \sqrt{2} \right)}_{>0 \text{ per } \varepsilon \in (0, \sqrt{2})} (y_1(t) - y_0(t)) > 0, \end{aligned}$$

dunque  $y_1(t) - y_0(t)$  cresce, in particolare non possono entrambe convergere verso  $(0, 0)$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>è noto da analisi 2 che questa operazione non cambia le orbite del sistema

Sia  $\bar{y} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  l'unica condizione iniziale tale che  $(\varepsilon, \bar{y}) \in C_M$  e  $\omega(\varepsilon, \bar{y}) = (0, 0)$ . Si ha dunque che

$$W_{loc}^s(0, 0) \cap \{x > 0\} = \mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y}).$$

Ripetendo quanto fatto per  $\{x < 0\}$  troviamo l'esistenza e unicità di  $W_{loc}^s$ .

Sappiamo che  $W_{loc}^s(0, 0) \cap \{x > 0\} = \mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y})$  e per il metodo delle isocline (5.1) sappiamo che

$$\mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y}) \subseteq \{y = h(x)\}$$

con  $h(x)$  soluzione di

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y + g(x, y)}{-\lambda x + f(x, y)}.$$

Per la regolarità delle funzioni che definiscono  $h$  sappiamo che  $h$  è  $C^k$ , quindi effettivamente  $W_{loc}^s \cap \{x > 0\}$  è una varietà  $C^k$ .

Osserviamo inoltre che  $h'(0) = 0$ , infatti

$$|h'(x)| \sim_{x \rightarrow 0^+} \left| -\frac{\mu}{\lambda} \frac{y}{x} \right| \leq \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{M}$$

per ogni  $M > 1$ , dunque passando al limite per  $M \rightarrow +\infty$  troviamo  $h'(0) = 0$ . Questo mostra la tangenza di  $W_{loc}^s \cap \{x > 0\}$  a  $\{y = 0\}$  in  $(0, 0)$ . Ripetendo questi passaggi per l'altro semipiano troviamo finalmente la tesi.  $\square$

## 6.2 Varietà stabili e instabili

**Definizione 6.7** (Varietà stabile/instabile globale).

Definiamo le **varietà stabile/instabile globale** di  $x_0$  come

$$\begin{aligned} W^s(x_0) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_0)) \\ W^u(x_0) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_0)) \end{aligned}$$

*Osservazione 6.8.*

Studiamo velocemente come  $W^s$  e  $W^u$  possono intersecarsi in  $\mathbb{R}^2$ . Per l'unicità locale se si incontrano coincidono o si incontrano in un punto fisso, restituendo orbite omocline ed eterocline rispettivamente.

Per  $d > 2$  il comportamento di  $W^s$  e  $W^u$  è più intricato.

*Osservazione 6.9.*

In generale  $W^s$  e  $W^u$  perdono alcune proprietà della struttura differenziale che hanno  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$ .

# Capitolo 7

## Orbite periodiche

Lo studio delle orbite periodiche si riduce a capire se ci sono ed eventualmente trovarle esplicitamente.

### 7.1 Criteri di non esistenza differenziali

Intuitivamente se aumento o diminuisco l'area di una regione con il flusso, non posso avere orbite periodiche, perché altrimenti l'area dentro l'orbita si manterrebbe.

**Proposizione 7.1** (Metodo di Bendixon-Dulec).

*Consideriamo il sistema  $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  con  $F \in C^1$ . Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  semplicemente connesso e aperto. Se esiste  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1$  tale che*

$$\operatorname{div}(hF)(x, y) = \left( \frac{\partial h f}{\partial x} + \frac{\partial h g}{\partial y} \right) (x, y)$$

*ha segno costante in  $U$  allora non esistono orbite periodiche interamente contenute in  $U$ .*

*Dimostrazione.*

Sia per assurdo  $\Gamma$  un orbita periodica contenuta in  $U$  e sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  la sua parametrizzazione con  $t \in [0, T]$ . Indichiamo con  $\tilde{U} \subseteq U$  la componente connessa di  $\mathbb{R}^2$  limitata racchiusa da  $\Gamma$ . Senza perdita di generalità per il segno della divergenza

$$\begin{aligned} 0 &< \iint_{\tilde{U}} \operatorname{div}(hF)(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\tilde{U}} \left( \frac{\partial}{\partial x} (h f) + \frac{\partial}{\partial y} (h g) \right) dx dy \stackrel{(\text{G.G.})}{=} \\ &= \int_{\Gamma^+} h f dy - h g dx = \\ &= \pm \int_0^T h(x(t), y(t)) (f(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - g(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) dt \stackrel{(\dot{x}, \dot{y}) \equiv (f, g)}{=} 0, \end{aligned}$$

e questo mostra l'assurdo.  $\square$

**Proposizione 7.2** (Criterio con gradiente per inesistenza delle orbite periodiche).

*Se  $\dot{x} = F(x)$  con  $F$  di classe  $C^1$  (anche in  $\mathbb{R}^d$ ) e  $F = \nabla I$  allora non esistono orbite periodiche.*

*Dimostrazione.*

Supponiamo che esista  $\Gamma \subseteq U$  orbita periodica e sia  $\gamma(t)$  con  $t \in [0, T]$  una curva che la parametrizza. Troviamo un assurdo svolgendo il seguente conto

$$\begin{aligned} 0 &= I(\gamma(T)) - I(\gamma(0)) = \int_0^T \frac{d}{dt} (I(\gamma(t))) dt = \\ &= \int_0^T \nabla I(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \stackrel{\gamma \text{ è orbita}}{=} F \\ &= \int_0^T F(\gamma(t)) \cdot F(\gamma(t)) dt = \\ &= \int_0^T \underbrace{\|F(\gamma(t))\|^2}_{\neq 0} dt > 0 \end{aligned}$$

dove  $F(\gamma(t)) \neq 0$  perché l'orbita è periodica (e quindi non contiene punti fissi).  $\square$

Formalizziamo ora l'idea che se il campo non ruota (o equivalentemente, se il campo è conservativo) allora non abbiamo orbite periodiche (se torno al punto di partenza il campo non compie lavoro)

**Proposizione 7.3** (Metodo del rotore).

Consideriamo il sistema  $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  con  $F \in C^1$ . Se  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$  su  $U$  aperto semplicemente connesso allora non esistono orbite periodiche interamente contenute in  $U$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $\omega = f dx + g dy$ . Per ipotesi, su  $U$  vale

$$d\omega = \left( -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy = 0,$$

cioè  $\omega$  è chiusa su  $U$ . Poiché  $U$  è semplicemente connesso si ha che  $\omega$  è esatta, dunque esiste  $I : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che  $\omega = dI$ , cioè  $F = \nabla I$ . Questo conclude per la proposizione precedente.  $\square$

## 7.2 Teoria dell'indice di Poicaré nel piano

Consideriamo sistemi della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

**Definizione 7.4** (Indice di una curva).

Sia  $\Gamma$  una curva chiusa in  $\mathbb{R}^2$  regolare (a tratti) semplice<sup>1</sup> che non contiene punti fissi.

Chiamiamo **indice di  $\Gamma$**

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}.$$

*Osservazione 7.5.*

Quando  $f \neq 0$  osserviamo che

$$\frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2} = d \left( \arctan \left( \frac{g}{f} \right) \right),$$

---

<sup>1</sup>la condizione di semplicità serve per evitare che tutto venga contato con arbitrarie molteplicità.

quindi stiamo contando quante volte  $F$  gira seguendo  $\Gamma$  in senso diretto. Più precisamente

$$I(\Gamma) = \#\{\text{giri di } F \text{ lungo } \Gamma \text{ in senso antiorario}\} - \#\{\text{giri di } F \text{ in senso orario}\}$$

**Proposizione 7.6** (Proprietà dell'indice).

Valgono le seguenti affermazioni

- Sia  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$  una famiglia continua di curve chiuse regolari a tratti che non contengono punti fissi (le curve sono  $\text{Imm } \gamma_s = \Gamma_s$ ). Allora  $I(\Gamma_s)$  è costante in  $s$ .
- Siano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  curve chiuse regolari a tratti che non contengono punti fissi tali che  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$  ma le regioni da loro racchiuse si intersecano nel vuoto<sup>2</sup>, allora

$$I(\Gamma_1 + \Gamma_2) = I(\Gamma_1) + I(\Gamma_2),$$

dove  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  è la curva dove vengono percorse in successione le due e i tratti in comune vergono percorsi una volta in un senso e una volta nel senso opposto<sup>3</sup>.

*Dimostrazione.*

Vedi Geometria 2. □

**Definizione 7.7** (Indice di un punto fisso).

Sia  $(x_0, y_0)$  un punto fisso isolato di  $F$ . L'indice di  $(x_0, y_0)$  è dato dall'indice di una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti semplice che lo racchiude e che non racchiude altri punti fissi.

**Proposizione 7.8** (Indici di alcuni punti fissi).

Valgono le seguenti affermazioni:

- $I(\text{nodo}) = I(\text{fuoco}) = +1$
- $I(\text{sella}) = -1$
- Se  $\Gamma$  è un'orbita periodica  $I(\Gamma) = +1$
- Se  $\Gamma$  è una curva regolare a tratti semplice che racchiude solo punti fissi isolati allora

$$I(\Gamma) = \sum_{\substack{P \text{ punto fisso} \\ P \text{ racchiuso da } \Gamma}} I(P).$$

*Dimostrazione.*

Per i primi due punti la tesi segue riportandoci al caso lineare standard tramite il teorema di linearizzazione (3.3).

Il terzo punto è geometricamente evidente date le possibili forme di orbite periodiche in  $\mathbb{R}^2$ .

Il quarto punto segue dalle proprietà dell'indice (7.6)<sup>4</sup>. □

*Osservazione 7.9.*

Un'orbita periodica racchiude necessariamente punti fissi i cui indici sommano a 1. Per esempio un'orbita periodica non può racchiudere solo una sella.

<sup>2</sup>per regione racchiusa intendo la componendo connessa di  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  limitata

<sup>3</sup>Pensa alla somma di 1-cicli singolari

<sup>4</sup>Vedi teorema dei residui.

### 7.3 Criteri di esistenza di orbite periodiche

Per trovare esplicitamente orbite periodiche possiamo provare a passare alle coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases}$$

dove nel secondo sistema dobbiamo ricordarci  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ . Per semplicità scriviamo

$$\begin{cases} \dot{\rho} = h(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = \ell((\rho, \theta)) \end{cases}$$

Un'orbita periodica può essere della forma particolare  $\{\rho = \text{cost.}\}$ .

**Proposizione 7.10** (Criterio polare esistenza orbita periodica).

*Dato un sistema in coordinate polari, se esiste  $c > 0$  tale che per ogni  $\theta$  valgono  $h(c, \theta) = 0$  e  $\ell(c, \theta) \neq 0$  allora  $\{\rho = c\}$  è invariante<sup>5</sup>.*

*Dimostrazione.*

Segue dal criterio sull'invarianza di curve di livello (1.10) unito all'assenza di punti fissi.  $\square$

Un problema cruciale di questo risultato è che la minima perturbazione annichila le ipotesi.

#### 7.3.1 Teorema di Poincaré-Bendixon

**Definizione 7.11** (Sezione locale di data larghezza).

Sia  $y \in \mathbb{R}^2$  tale che  $F(y) \neq 0$ . Se  $\ell(y) = \text{Span}(v) + y$  è la retta passante per  $y$  ortogonale a  $F(y)$ , fissato un  $k \in (0, 1)$  definiamo la **sezione locale di larghezza  $k$**  per  $y$  come<sup>6</sup>

$$S_k(y) = \text{comp. conn. contenente } y \text{ di } \left\{ z \in \ell(y) \mid |\widehat{\sin(v, F(z))}| > k \right\}.$$

**Lemma 7.12** (Rettificazione locale).

*Dato  $y \in \mathbb{R}^2$  tale che  $F(y) \neq 0$  consideriamo la parametrizzazione di  $\ell(y)$  data da  $\gamma(u) = y + uv$  al variare di  $u \in \mathbb{R}$ . Affermiamo che esistono  $V$  e  $U$  intorni di  $y$  e  $0$  rispettivamente e un diffeomorfismo  $\psi : U \rightarrow V$  tale che  $\psi(s, u) = \phi_s(\gamma(u))$ .*

**Definizione 7.13** (Rettangolo di flusso).

Sia  $\psi : U \rightarrow V$  un diffeomorfismo di rettificazione locale. Fissiamo  $\sigma > 0$ ,  $\chi > 0$  tali che

$$N_{\sigma, \chi} = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| \leq \sigma, |u| \leq \chi\} \subseteq U.$$

Definiamo il **rettangolo di flusso** per questa scelta di  $\sigma$  e  $\chi$  come  $\mathcal{N}_{\sigma, \chi} = \phi(N_{\sigma, \chi})$ .

**Lemma 7.14.**

*Se  $\mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  è un rettangolo di flusso allora  $\mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  è un intorno di  $y$  tale che per ogni  $z \in \mathcal{N}_{\sigma, \chi}$  esiste  $\bar{t}(z) \in (-\sigma, \sigma)$  tale che  $\phi_{\bar{t}}(z) \in S_k(y)$ .*

<sup>5</sup>e quindi  $\{x^2 + y^2 = c^2\}$  è periodica

<sup>6</sup>dati due vettori  $v$  e  $w$ , con  $\widehat{v, w}$  intendiamo l'angolo minore tra essi nel piano generato da  $v$  e  $w$

**Teorema 7.15** (Poincaré-Bendixon).

Sia  $\dot{x} = F(x)$  con  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Supponiamo che esista  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  compatto non vuoto che non contiene punti fissi e per il quale esiste  $x_0 \in D$  tale che per qualche  $t_0 > 0$  abbiamo  $\phi_t(x_0) \in D$  per ogni  $t \geq t_0$ .

Allora  $\Gamma = \omega(x_0) \subseteq D$  è un'orbita periodica.

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  per cui esiste  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_t(x_0) \in D$  per ogni  $t \geq t_0$ . Allora  $\omega(x_0)$  è non vuoto, invariante e  $\omega(x_0) \subseteq D$  per (1.18). Scelto  $x \in \omega(x_0) \subseteq D$  allora  $\mathcal{O}^+(x) \subseteq \omega(x_0)$  e quindi  $\omega(x) \subseteq \omega(x_0)$ . Sia  $y \in \omega(x)$

Claim:  $\#(S_k(y) \cap \mathcal{O}^+(x)) = 1$ .

*Dimostrazione del claim.*

Mostriamo prima che l'intersezione è non vuota e poi mostriamo che contiene un'unico punto.

$\neq \emptyset$

Per definizione di  $\omega(x)$  esiste una successione monotona  $t_k \nearrow +\infty$  tale che  $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$ .

Poiché  $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}$  è un intorno di  $y$ , per definizione di convergenza esiste  $\bar{t} > \sigma$  tale che  $\phi_{\bar{t}}(x) \in \mathcal{N}_{\sigma,\chi}$ . Per il lemma precedente esiste allora  $\hat{t} \in (-\sigma, \sigma)$  tale che  $\phi_{\hat{t}}(\phi_{\bar{t}}(x)) \in S_k(y)$ . Ponendo  $\hat{t} + \bar{t} = \tilde{t}$  esiste  $\tilde{t} > 0$  tale che  $\phi_{\tilde{t}}(x) \in S_k(y)$ .

$\# = 1$

Supponiamo per assurdo che esistano  $x_1, x_2 \in S_k(y) \cap \mathcal{O}^+(x) \subseteq \omega(x_0)$  distinti. Per definizione di  $\omega$ -limite esistono  $\tau_j^1 \nearrow +\infty$  e  $\tau_j^2 \nearrow +\infty$  tali che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{\tau_j^1}(x_0) = x_1, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{\tau_j^2}(x_0) = x_2.$$

Esistono dunque per il lemma  $\tilde{\tau}_j^1$  e  $\tilde{\tau}_j^2$  tali che  $\phi_{\tilde{\tau}_j^i}(x_0) \in S_k(y)$ . Siano  $U_1$  e  $U_2$  intorni di  $x_1$  e  $x_2$  disgiunti. Per  $j$  abbastanza grandeabbiamo che  $\phi_{\tilde{\tau}_j^i}(x_0) \in U_i$ .

Poiché sia  $\tilde{\tau}_j^1$  che  $\tilde{\tau}_j^2$  vanno a  $+\infty$ , esistono  $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$  tali che

$$\phi_{\xi_1}(x_0) \in U_1, \quad \phi_{\xi_2}(x_0) \in U_2, \quad \phi_{\xi_3}(x_0) \in U_1.$$

Sia  $\tilde{\Gamma}$  la curva chiusa data da

$$\tilde{\Gamma} = \{\alpha \phi_{\xi_1}(x_0) + (1 - \alpha) \phi_{\xi_2}(x_0) \mid \alpha \in [0, 1]\} \cup \bigcup_{s \in (\xi_1, \xi_2)} \phi_s(x_0).$$

Per definizione di  $S_k(y)$  e per unicità locale si ha che  $\mathcal{O}^+(\phi_{\xi_2}(x_0))$  è contenuto nella componente连通的 limitata definita da  $\tilde{\Gamma}$ , ma questo è assurdo perché esiste  $\Delta t = \xi_3 - \xi_2$  tale che  $\phi_{\Delta t}(\phi_{\xi_2}(x_0)) = \phi_{\xi_3}(x_0)$  ma per definizione di  $S_k(y)$  un'orbita che parte da  $S_k(y)$  torna a  $S_k(y)$  dal lato opposto rispetto a quello di partenza.

[INSERISCI IL DISEGNO]

□

Sia  $y \in \omega(x)$  e sia  $\tilde{t} > 0$  tale che  $\phi_{\tilde{t}}(x) \in S_k(y)$  (esiste per il primo punto del claim). Sappiamo che esiste  $\tau > \tilde{t}$  tale che  $\phi_\tau(x) \in \mathcal{N}_{\sigma,\chi}$  (convergenza di successioni). Esiste dunque  $\tilde{\tau} \in (-\sigma, \sigma)$  tale che  $\phi_{\tau+\tilde{\tau}}(x) \in S_k(y)$  (lemma) e per il secondo punto del claim  $\phi_{\tau+\tilde{\tau}}(x) = \phi_{\tilde{t}}(x)$ , dunque  $\Gamma = \mathcal{O}(x)$  è periodica.

Osserviamo che  $\Gamma \subseteq \omega(x_0)$  per costruzione. L'altro contenimento segue come segue: Per definizione  $x = \lim_j \phi_{t_j}(x_0)$ . Se  $z = \phi_s(x)$  allora per continuità del flusso  $z = \lim_j \phi_{t_j+s}(x_0)$ . □

*Osservazione 7.16.*

Osserviamo che  $D$  come nel teorema di Poincaré-Bendixon non può essere semplicemente connesso per la teoria dell'indice.

**Fatto 7.17** (Poincaré-Bendixon generale).

*Se per  $x_0$  esiste  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_t(x_0) \in D$  per ogni  $t \geq t_0$  con  $D$  non vuoto e compatto allora  $\omega(x_0)$  può essere*

- punto fisso
- orbita periodica
- unione di punti fissi e orbite eterocline
- punto fisso e orbita omoclinica

**Esempio 7.18.**

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon g(x, y) \end{cases}$$

Se  $f, g \in C^1$  allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che per ogni  $\varepsilon < \varepsilon_0$  esiste un'orbita periodica.

Proviamo a definire

$$D = \{\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$$

Osserviamo che nel caso non perturbato, per  $\rho < 1$  allora  $\dot{\rho} > 0$  mentre per  $\rho > 1$  allora  $\dot{\rho} < 0$ .

Sia  $M = \max \left\{ \left\| f \right\|_{\{\rho \leq 5\}}, \left\| g \right\|_{\{\rho \leq 5\}} \right\}$  (dove 5 è un qualche valore “grosso”).

Proviamo a definire  $D = \left\{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \right\}$ .

$\dot{\rho}|_{\rho=\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} + \varepsilon f(\frac{1}{2}, \theta) \geq \frac{3}{8} - \varepsilon M$  e questo è maggiore di 0 per  $\varepsilon < \frac{3}{8M}$ . Similmente

per  $\dot{\rho}|_{\rho=2}$  chiediamo  $\varepsilon < \frac{6}{M}$ . Cerchiamo allora stime tali che  $\dot{\theta}|_{\left\{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \right\}} \neq 0$  e dopo conti simili troviamo che  $\varepsilon_0 = \frac{3}{8M}$  rispetta tutte le condizioni volute.

## Capitolo 8

# Esempi di sistemi dinamici continui

### 8.1 Alcuni sistemi meccanici

#### 8.1.1 L'oscillatore armonico

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} = -kx$$

con  $k > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Studiamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $F(x, y) = (y, -kx)$ .

- **Punti fissi:**  $(y, -kx) = (0, 0) \implies (x, y) = (0, 0)$ , quindi abbiamo un solo punto fisso.
- Questo è evidentemente un sistema meccanico con  $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ , da cui  $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2$  è l'Hamiltoniana.
- Sia  $E_c = \{\frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2 = c\}$ . Questi insiemi sono evidentemente ellissi. Descrivono veramente orbite periodiche? Sì, infatti se per assurdo non fossero orbite periodiche, poiché le orbite che cominciano in uno di questi insiemi sono costrette a rimanervi, per compattezza di  $E_c$  dovremmo avere

$$\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) \in E_c$$

per  $x_0 \in E_c$ , ma questo significa che  $\ell$  sarebbe un punto fisso, che è assurdo perché l'unico punto fisso è  $(0, 0)$ .

#### 8.1.2 Pendolo semplice

L'equazione in esame è

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta.$$

Riformuliamo in

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \psi \\ \dot{\psi} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{cases}$$

**Punti fissi:**

$\psi = 0$  e  $\sin \theta = 0$ , dunque

$$pt. fix = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Integrale primo:**

Anche questo è un sistema meccanico, che quindi ammette Hamiltoniana

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta,$$

dunque gli insiemi di livello che ci interessano sono

$$E_c = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = c \right\}.$$

Osserviamo che

$$E(k\pi, 0) = -\frac{g}{\ell} \cos(k\pi) = (-1)^{k+1} \frac{g}{\ell} \implies E(2\pi, 0) = E(-2\pi) = E(0, 0).$$

$$E_{-\frac{g}{\ell}} = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = -\frac{g}{\ell} \right\} \implies \psi^2 = -2\frac{g}{\ell}(1 - \cos \theta)$$

$$E_{\frac{g}{\ell}} = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = \frac{g}{\ell} \right\} \implies \psi^2 = 2\frac{g}{\ell}(1 + \cos \theta)$$

Se  $c \in (-\frac{g}{\ell}, \frac{g}{\ell})$  troviamo orbite periodiche contenute dentro le ordine dei primi due. Per  $c \notin [-\frac{g}{\ell}, \frac{g}{\ell}]$  abbiamo invece ordine tutte sopra o tutte sotto.

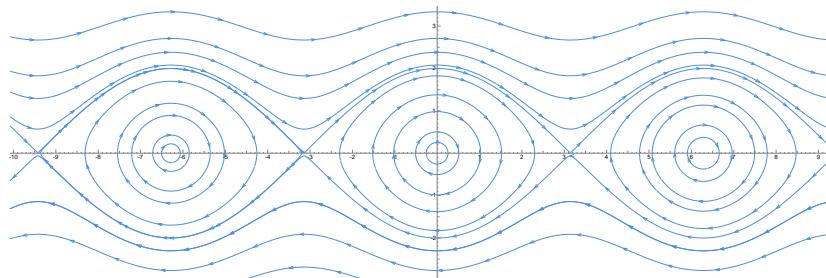


Figura 8.1: Diagramma di fase del pendolo per  $\frac{g}{\ell} = 1$

## 8.2 Dinamica di Lotka-Volterra

Possiamo modellare una singola popolazione in modo semplice con l'equazione (detta *equazione logistica*)

$$\dot{x} = x(c - ax), \quad a, c > 0.$$

Ponendo  $F(x) = xc - ax^2$  si ha che  $F(x) = 0 \implies x = 0$  oppure  $x = c/a$ .

Inserendo nel sistema una seconda popolazione che più interagire con la prima troviamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(c_1 - a_1x - b_1y) \\ \dot{y} = y(c_2 - a_2y - b_2x) \end{cases}.$$

Osserviamo che gli assi sono invarianti. A meno di riscalamento possiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - \alpha y) \\ \dot{y} = y(1 - \beta x - y) \end{cases}$$

Troviamo come punti fissi  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e

$$P = \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1} \right).$$

Osserviamo che  $P \in \{x > 0, y > 0\}$  se e solo se  $\alpha > 1$  e  $\beta > 1$  o  $0 < \alpha < 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

Calcoliamo ora  $\mathcal{D}F$

$$\mathcal{D}F = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & 1 - \beta x - 2y \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{D}F((0, 0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}F((1, 0)) &= \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}F((0, 1)) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -\beta & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}F(P) &= \frac{1}{\alpha\beta - 1} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha(1 - \alpha) \\ \beta(1 - \beta) & 1 - \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Esempio 8.1.

Consideriamo il modello Lotka-Volterra dato da  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$ , cioè

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(1 - 2x - y) \end{cases}$$

Per quanto detto sopra i punti fissi sono

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

che nominiamo rispettivamente  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

Segue che  $P_0$  è una stella instabile,  $P_1$  e  $P_2$  sono nodi impropri stabili e  $P_3$  è una sella. Gli autovettori di  $\mathcal{D}F(P_3) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  sono  $v_+ = (1 - 1)^T$  e  $v_- = (1 1)^T$ , corrispondenti agli autovalori  $1/3$  e  $-1$  rispettivamente. Graficando il sistema possiamo effettivamente notare che le varietà instabili e stabili hanno come giacitura della retta tangente in  $P_3$  proprio le rette generate da questi vettori.

### Esempio 8.2 (Lotka-Volterra per preda-predatore).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-1 + y) \\ \dot{y} = y(1 - x) \end{cases}$$

I punti fissi sono  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . Osserviamo anche che gli assi e tutto il primo quadrante sono insiemi invarianti. Consideriamo allora solo il primo quadrante che tanto è il

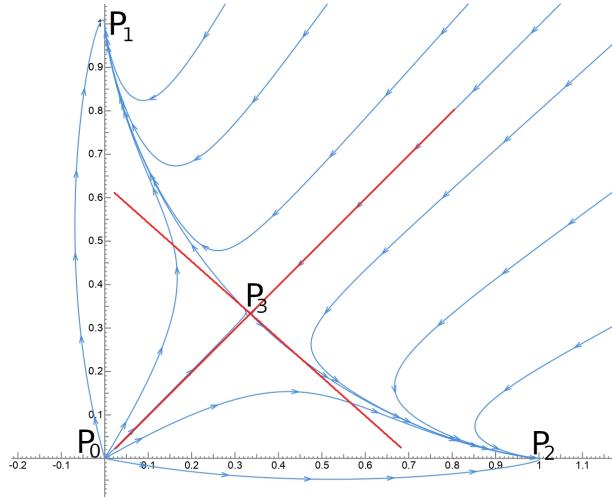


Figura 8.2: Diagramma di fase di questo sistema.  
In rosso sono indicati  $P_3 + \text{Span}(v_+)$  e  $P_3 + \text{Span}(v_-)$ .

caso interessante per questo modello.

Studiamo lo Jacobiano

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ -y & 1-x \end{pmatrix} \implies DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad DF(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0, 0) (0, 0) è una sella. Si ha che

$$E^s(0, 0) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E^u(0, 0) = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e per il teorema delle varietà stabili locali (6.2) sappiamo che  $W^s(0, 0)$  e  $W^u(0, 0)$  locali esistono e sono uniche. Per l'invarianza degli assi in realtà  $W^{u/s}(0, 0) = E^{u/s}(0, 0)$ .

(1, 1) (1, 1) è di tipo centro e quindi non è iperbolico. Una possibile funzione di Lyapunov potrebbe avere forma

$$V(x, y) = a(x - 1)^{2n} + b(y - 1)^{2m}, \quad a, b > 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Un altro metodo potrebbe essere studiare il punto passando a coordinate polari centrate in (1, 1).

Un'ulteriore possibilità potrebbe essere studiare il segno del campo di vettori, ma poiché (1, 1) è di tipo centro non è molto utile.

Trovare insiemi invarianti non è molto facile in questo caso.

Possiamo provare il metodo delle isocline

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{y(1-x)}{x(-1+y)} \\ y(x_0) = y_0 \text{ t.c. } x_0(-1 + y_0) \end{cases}$$

È chiaro che possiamo trarre qualche beneficio dal metodo delle isocline perché l'equazione differenziale in questione è separabile

$$\frac{-1+y}{y} dy = \frac{1-x}{x} dx \implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{-1+y}{y} dy = \int_{x_0}^x \frac{1-x}{x} dx$$

$$y(x) - \log(y(x)) = \log y_0 - y_0 + \log x - x - \log x_0 + x_0.$$

Non posso scrivere esplicitamente  $y(x)$  = “qualcosa”, ma comunque posso studiare l’equazione, infatti, poiché  $\{y = y(x)\}$  è invariante (5.1) sappiamo che c’è un insieme invariante. Per identificarlo definiamo

$$I(x, y) = y - \log y + x - \log x.$$

Segue che<sup>1</sup>

$$I|_{I=c} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)x(-1 + y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)y(1 - x) = 0,$$

cioè  $I$  è un integrale primo.

$$\nabla I(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x} \\ 1 - \frac{1}{y} \end{pmatrix} |_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$H_I(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} |_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{minimo locale.}$$

Troviamo dunque che localmente le traiettorie sono curve semplici chiuse tali che  $(1, 1)$  si trova nella componente连nessa limitata tra le due che hanno come bordo le traiettorie.

Per trovare il verso di percorrenza possiamo usare il segno del campo.

### Esempio 8.3.

Un esempio semplice per i parametri del modello sopra è

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - y - x) \end{cases} \implies F(x, y) = (x(3 - x - 2y), y(2 - y - x)).$$

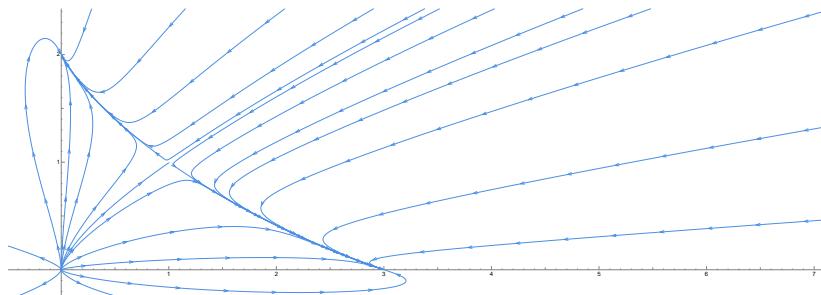


Figura 8.3: Diagramma di fase per questo esempio di Lotka-Volterra.

I punti fissi sono

$$(0, 0), (0, 2), (3, 0), (1, 1)$$

e la matrice Jacobiana di  $F$  è

$$\mathcal{D}F(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Valutando lo Jacobiano nei punti fissi troviamo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{nodo instabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{nodo stabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{nodo stabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{sella}}.$$

<sup>1</sup> pensando  $c = \log y_0 - y_0 - \log x_0 + x_0$

### 8.3 Sistema di Lorenz

Un sistema storicamente importante è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}, \quad r, b, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Osserviamo che i punti fissi del sistema corrispondono a

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix},$$

dove  $P_{\pm}$  è definito solo per  $r \geq 1$ . Osserviamo inoltre che

$$\mathcal{D}F = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Studiamo la stabilità di  $P_0$ :

Notiamo che

$$\mathcal{D}F(P_0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

dunque  $(0, 0, 1)$  è sempre un autovettore relativo all'autovalore  $-b$  per il sistema linearizzato vicino a  $P_0$ . Il segno di  $-b$  ci dice che  $\dim E^s(P_0) \geq 1$ . Studiamo la stabilità delle altre direzioni al variare di  $r$

- |                |   |
|----------------|---|
| $r \in (0, 1)$ | In questo caso gli autovaori sono entrambi con parte reale negativa, quindi per Hartman Grobman (3.3) $P_0$ è asintoticamente stabile e $\dim E^s(P_0) = 3$ .       |
| $r > 1$        | In questo caso gli autovalori sono reali di segno opposto dunque il punto fisso è instabile per Hartman Grobman (3.3) e $\dim E^s(P_0) = 2$ , $\dim E^u(P_0) = 1$ . |
| $r = 1$        | In questo caso $P_0$ non è iperbolico dunque per predicare sulla stabilità proviamo a cercare una funzione di Lyapunov. Tentiamo una di questa forma                |

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2).$$

Chiaramente  $V$  è di classe  $C^1$  e  $V(P) > V(P_0) = 0$  per ogni  $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$ . Cerchiamo delle condizioni sui  $k_i$  in modo tale che  $\dot{V}(P) \leq 0$  per ogni  $P \neq P_0$ . Dopo qualche conto si può verificare che

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2 \right)$$

è una funzione di Lyapunov (non stretta). Per il primo teorema di Lyapunov (2.7) segue che  $P_0$  è stabile.

Per il criterio di La Salle (2.8) sappiamo che  $\{\dot{V} = 0\} = \{x = y, z = 0\}$  contiene tutti gli  $\omega$ -limiti e che questi sono insiemi invarianti. Poiché

$$F|_{\{x=y, z=0\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

si ha che  $\{P_0\}$  è l'unico insieme invariante contenuto in  $\{\dot{V} = 0\}$ , dunque tutti gli  $\omega$ -limiti sono  $\{P_0\}$ . Questa condizione insieme alla stabilità di  $P_0$  mostra che  $P_0$  è asintoticamente stabile.

Attraverso conti non visti a lezione sappiamo che se  $\sigma > b + 1$  e  $r > \bar{r}$  per un qualche  $\bar{r} > 1$  si ha che  $\dim E^s(P_\pm) = 1$  e  $\dim E^u(P_\pm) = 2$ . Le traiettorie dunque approcciano  $P_+$  e  $P_-$  “lateralmente” e “trasversalmente” si allontanano lungo una spirale.

Sempre attraverso conti non visti a lezione individuiamo la funzione

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2),$$

il cui dot è dato da

$$\dot{W}(x, y, z) = -\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2).$$

Osserviamo che, fissato  $k \in \mathbb{R}^+$  possiamo trovare  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $\dot{W}|_{W \geq c} \leq -\sigma k < 0$ : basta prendere  $c$  grande abbastanza in modo tale che i punti fuori l'ellissoide  $\{W = c\}$  abbiano coordinate grandi abbastanza da forzare la disuguaglianza voluta, che possiamo fare per il segno dei termini in  $\dot{W}$ .

Osserviamo che se  $y_0 \notin \{W \geq c\}$  allora

$$W(\phi_t(y_0)) - W(y_0) = \int_0^t \underbrace{\frac{d}{ds}W(\phi_s(y_0))}_{=\dot{W}} ds \leq -k\sigma t$$

finché  $\phi_t(y_0)$  continua ad essere fuori l'ellissoide. Segue dunque che definitivamente  $\phi_t(y_0)$  cade nell'ellissoide.

Questo ragionamento mostra che tutti i punti ammettono  $\omega$ -limite, ma questo non può in generale essere un punto fisso (sono instabili) o un'orbita periodica (perché assenti dal sistema<sup>2</sup>). Si scopre che l' $\omega$ -limite generale corrisponde ad un frattale e per questo motivo viene detto *attrattore strano*.

---

<sup>2</sup>questa affermazione non è stata mostrata

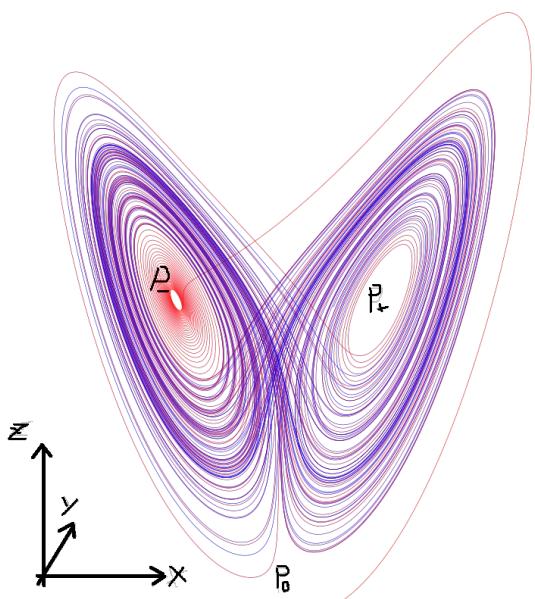


Figura 8.4: Qualche orbita del sistema di Lorenz dove sono stati contrassegnati i punti fissi. Immagine originariamente da [https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system) e modificata da me.

## **Parte II**

# **Sistemi discreti**

# Capitolo 9

## Motivazione e basi

### 9.1 Mappa di Poincaré

Proviamo a capire quando un sistema di equazioni differenziali porta un'orbita a tornare vicino a se stessa.

**Definizione 9.1** (Mappa di Poincaré).

Sia  $M$  una varietà e sia  $\Sigma$  una sua sottovarietà di codimensione 1 tale che esiste  $U \subseteq \Sigma$  con la seguente proprietà:

se  $P \in U$  allora esiste  $\bar{t} > 0$  tale che  $t \in (0, \bar{t}) \implies \phi_t(P) \notin U$  e  $\phi_{\bar{t}}(P) \in U^{\text{1}}$ .

Definiamo la **mappa di Poincaré** come

$$P_U : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ (x, y) & \longmapsto & \phi_{\bar{t}}(x, y) \end{array} .$$

*Osservazione 9.2.*

Se  $P_{\Sigma}^n = \underbrace{P_{\Sigma} \circ \dots \circ P_{\Sigma}}_{n \text{ volte}}$ , ponendo  $P_{\Sigma}^0 = id$  stiamo definendo un sistema discreto  $(\Sigma, P_{\Sigma}, \mathbb{Z})^{\text{2}}$ .

**Esempio 9.3** (Moto sul toro piatto).

Sia  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . Un moto geodetico sul toro (piatto) si può pensare come

$$t \mapsto \phi_t(x, y) = (x, y) + t(v_x, v_y) \mod \mathbb{Z}^2.$$

Sia  $\Sigma = U = S^1 = [0, 1] \times \{0\} / (0, 0) \sim (1, 0)$ . Per la geometria del toro questa sottovarietà di  $T^2$  ha le proprietà richieste per definire la mappa di Poincaré (addirittura sappiamo che  $\bar{t} = 1/v_y$ ).

Splicitamente troviamo che

$$P_{\Sigma} : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & t + \alpha \mod 1 \end{array}$$

dove  $\alpha = v_x/v_y$ . Osserviamo che a meno di traslare modulo 1, tutte le orbite sono determinate dall'orbita di 0.

\$\alpha \in \mathbb{Q}\$ Se  $\alpha = \frac{p}{q}$  ridotta ai minimi termini allora  $P_{\Sigma}^q(0) = 0 + p = 0 \mod 1$  e le orbite sono periodiche.

---

<sup>1</sup> $\bar{t}$  è l'istante del “primo ritorno”

<sup>2</sup> $P_{\Sigma}^{-1}$  è definita perché sono partito da un flusso e posso prendere tempi negativi in un flusso

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  Evidentemente non troviamo un'orbita periodica. È possibile mostrare che in realtà l'orbita è densa.

#### Definizione 9.4 (Semipiano di Poincaré).

Consideriamo la regione  $[-1, 1] \times [0, +\infty] \setminus D^1$  e identifichiamo i lati come in figura

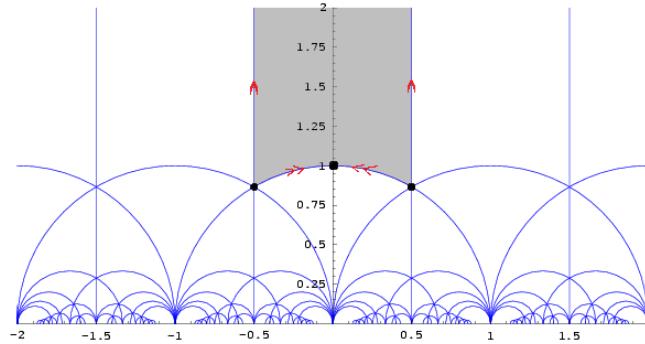


Figura 9.1: Dominio fondamentale e qualche geodetica.

Le geodetiche sono le intersezioni dell'oggetto con rette verticali o semicirconferenze perpendicolari all'asse  $x$ . Chiamiamo  $\mathcal{M}$  questo spazio.

#### Esempio 9.5 (Geodetiche sul piano di Poincaré).

A parte le geodetiche corrispondenti a rette verticali, ogni geodetica che incontra la regione lo fa passando per l'asse  $y$  (e quindi lo fa ad un certo angolo). Possiamo associare ad ogni coppia punto di  $\mathcal{M}$  e angolo una geodetica di  $\mathcal{M}$  (quella passante per il punto che incontra la verticale a quell'angolo)

$$\mathcal{M} \times S^1 \ni ((x, y), \theta) \mapsto g_t((x, y), \theta).$$

Sia  $\Sigma = \{x = 0, y > 1\} \times S^1$ . È possibile definire  $P_\Sigma$  e si da il caso che questa mappa di Poincaré è più facile da studiare rispetto al sistema originale.

## 9.2 Esempi di sistemi discreti caotici

#### Esempio 9.6 (Perdo il controllo).

Consideriamo la mappa

$$T : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & 10x \mod 1 \end{array}.$$

Poniamo  $\mathcal{A} = \{0, \dots, 9\}$  e  $\mathcal{A}_n = (\frac{n}{10}, \frac{n+1}{10})$  per  $n \in \mathcal{A}$ .  
Sia  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e diamo la seguente mappa

$$\varphi : x \mapsto (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$$

dove  $\omega_n = k \iff T^n(x) \in \mathcal{A}_k \iff \lfloor 10T^n(x) \rfloor = k$  e per ricorsione vediamo che  $\omega_n$  è la  $n$ -esima cifra decimale di  $x$ , cioè

$$x = 0.\omega_0\omega_1\omega_2\dots.$$

Per rispondere ad una domanda del tipo “ $T^{1000}(x) \in \mathcal{A}_i$ ?” devo sapere la 1000-esima cifra di  $x$ . Se ora considero  $x + \varepsilon$  al posto di  $x$ , le informazioni che avevamo su  $x$  non dicono più nulla sul comportamento di  $x + \varepsilon$  oltre un certo passo<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> se  $i > -\log_{10} \varepsilon$  la risposta a “ $T^{1000}(x) \in \mathcal{A}_i$ ?” e quella a “ $T^{1000}(x+\varepsilon) \in \mathcal{A}_i$ ?” sono indipendenti.

*Osservazione 9.7* (Piccola parentesi statistica).

Sia  $x = 0.x_1x_2 \dots$  potremmo chiederci, fissata una cifra  $k$  se

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{i \in \{0, \dots, N-1\} \mid x_i = k\}}{N} = \frac{1}{10} \right\} = 1$$

ed effettivamente è vero. Segue dunque che

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{i \in \{0, \dots, N-1\} \mid x_i = k\}}{N} = \frac{1}{9} \right\} = 0$$

anche se non è un insieme vuoto<sup>4</sup>.

**Esempio 9.8** (Oscillatore armonico perturbato).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione 1-periodica. Immaginiamo una palla che rimbalza su un piatto la cui altezza varia come  $f$ . Per semplificarci la vita possiamo immaginare che l'urto avvenga sempre in  $x = 0$ , tanto l'unica cosa che conta è  $\dot{f}$  (l'impulso). Siano  $t_0, t_1, \dots, t_n$  i tempi di urto ( $t_0 = 0$ ) e siano  $v_0, \dots, v_n$  le velocità dopo l'urto. Conoscendo questi dati possiamo ricostruire tutta la dinamica.

$$T : \begin{array}{ccc} [0, +\infty) \times (0, +\infty) & \longrightarrow & [0, +\infty) \times (0, +\infty) \\ (t_n, v_n) & \mapsto & (t_{n+1}, v_{n+1}) \end{array} .$$

Calcoliamo

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h(v_n) \\ v_{n+1} = v_n + 2\dot{f}(t_{n+1}) \end{cases} , \quad h(v_n) = \frac{2}{g}v_n$$

Osserviamo inoltre che

$$T(t_n + 1, v_n) = (t_n + 1 + h(v_n), v_n + 2\dot{f}(t_n + 1)) = T(t_n, v_n) + (1, 0),$$

quindi in realtà possiamo considerare  $S^1$  al posto di  $[0, +\infty)$  per i tempi.  
Questo sistema è difficile da trattare e presenta molti problemi aperti.

---

<sup>4</sup>per esempio posso fissare ogni nona cifra a  $k$  e completare le altre con cifre a caso diverse da  $k$ .

## Appendice A

# Riconoscimenti e risorse

Per realizzare le immagini di sistemi bidimensionali ho usato il sito <https://paolini.github.io/funplot/>.

Crediti per le immagini:

- Figura 9.1: Fropuff, CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons con alcune modifiche del sottoscritto. La pagina di Wikipedia Commons rilevante è <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ModularGroup-FundamentalDomain-01.png>.