

Sistemi Dinamici

Corso dei proff. Claudio Bonanno & Roberto Castorrini

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24

Indice

I Sistemi continui	6
1 Insiemi invarianti, Orbite e Omega-limiti	7
1.1 Orbite, punti fissi e periodici	7
1.2 Insiemi invarianti	8
1.3 Passaggio a coordinate polari	9
1.4 Alpha e Omega limiti	9
2 Stabilità e funzioni di Lyapunov	11
2.1 Stabilità per Lyapunov	11
2.2 Funzioni di Lyapunov	12
2.2.1 Primo approccio per cercare funzioni di Lyapunov	14
3 Linearizzazione	15
3.1 Idea della linearizzazione	15
3.2 Pozzi e Sorgenti	18
3.3 Classificazione dei punti stabili lineari sul piano	19
4 Integrali Primi e Sistemi Hamiltoniani	24
4.1 Sistemi Hamiltoniani	24
4.1.1 Sistemi meccanici con un grado di libertà	26
5 Primi metodi di studio globale	28
5.1 Metodo delle isocline nel piano	28
5.2 Ricerca di simmetrie	29
6 Varietà stabili/instabili	30
6.1 Varietà stabili e instabili locali	30
6.2 Varietà stabili e instabili	34
7 Orbite periodiche	35
7.1 Criteri di non esistenza differenziali	35
7.2 Teoria dell'indice di Poincaré nel piano	36
7.3 Criteri di esistenza di orbite periodiche	38
8 Esempi di sistemi dinamici continui	41
8.1 Alcuni sistemi meccanici	41
8.1.1 L'oscillatore armonico	41
8.1.2 Pendolo semplice	41
8.2 Dinamica di Lotka-Volterra	42
8.3 Sistema di Lorenz	46

II	Sistemi discreti	49
A	Riconoscimenti e risorse	50

Introduzione

Definizione 0.1 (Sistema dinamico).

Un **sistema dinamico** è una terna (X, G, S) , dove X è un insieme, G un (semi)gruppo e $S = G \curvearrowright X$ una azione.

L'insieme X è detto **spazio delle fasi**.

Osservazione 0.2.

In realtà vorremmo che l'azione abbia una regolarità compatibile con la struttura dell'insieme in esame.

Sistemi continui

Definizione 0.3 (Equazione differenziale).

Un **sistema di equazioni differenziali** (in forma esplicita) è un'equazione della forma

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^d).$$

Un **problema di Cauchy** associato all'equazione differenziale sopra è dato da un sistema del tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Per il teorema di Cauchy-Lipschitz è ben definito il **flusso** $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ associato all'equazione differenziale definito come la funzione che rispetta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) = F(\phi_t(x_0)) \\ \phi_0(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

Osservazione 0.4.

Osserviamo che $\phi_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ è la mappa identità e che $\phi_\cdot(x)$ è un omomorfismo per ogni x , cioè

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{s+t}(x).$$

Definizione 0.5 (Sistema dinamico a tempo continuo).

Una terna $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}, \phi_t(\cdot))$ è un **sistema dinamico (a tempo) continuo** se $\phi_t(\cdot)$ è il flusso di un sistema di ODE della forma $\dot{x} = F(x)$ con $F(x)$ campo di vettori, $F \in C^k$ con $k \geq 1$.

Esempio 0.6 (Equazioni differenziali su \mathbb{R}).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = ax.$$

Il nostro approccio standard è imporre una condizione di Cauchy $x(0) = x_0$ e troviamo la soluzione

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Ponendo $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$ e $S = G \curvearrowright X$ dove $S(t, x_0) = \phi_t(x_0)$ possiamo interpretare l'equazione sopra come un sistema dinamico.

Se consideriamo ora un'equazione del tipo

$$\dot{x} = a(x + x^9)$$

diventa difficile risolvere l'equazione. Possiamo fare studi qualitativi.

Negli studi qualitativi per $X = \mathbb{R}$ sono utili le seguenti considerazioni

- Rintracciare punti fissi
- Studiare il segno della derivata
- Soluzioni diverse non si incrociano per unicità locale
- Teorema di approssimazione lineare.

Di solito ci interesseranno equazioni in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . Seguono alcuni modi per trasformare alcuni tipi di equazioni differenziali nella forma $\dot{x} = F(x)$ ¹.

Esempio 0.7 (Ordine superiore).

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} = -kx, \quad k > 0.$$

Ponendo $y = \dot{x}$ troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -kx \end{pmatrix}.$$

Esempio 0.8 (Sistema non autonomo).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = f(x) + g(t)$$

Possiamo linearizzare come segue

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}.$$

Sistemi discreti

Definiamo ora sistemi dinamici discreti

Definizione 0.9 (Sistema dinamico a tempo discreto).

Un **sistema dinamico (a tempo) discreto** è una terna (X, \mathbb{N}, T) dove $X \in \{\mathbb{R}, [a, b], S^1\}$ e $T : X \rightarrow X$ continua. Il sistema dinamico è dato da (X, \mathbb{N}, S) dove $S(n, x) = T^n(x)$.

Osservazione 0.10.

Se T è invertibile possiamo estendere un sistema dinamico discreto sostituendo \mathbb{N} con \mathbb{Z} e ponendo (per $n \in \mathbb{N}^+$) $S(-n, x) = (T^{-1})^n(x)$.

¹Non metterò mai più le barre se posso.

Esempio 0.11 (Successione per ricorrenza).

Una successione per ricorrenza è un sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}) \\ x_0 = a \end{cases}$$

Esempio 0.12 (Mappa di Bernoulli).

Consideriamo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad T : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

Osserviamo che l'unico punto fisso è 0, ma reiterando da un punto qualsiasi non c'è modo che la successione vi tendi. Inoltre la distanza tra punti si raddoppia ad ogni iterata (a meno del modulo). Questo è uno dei primi esempi di sistemi caotici.

Parte I

Sistemi continui

Capitolo 1

Insiemi invarianti, Orbite e Omega-limiti

1.1 Orbite, punti fissi e periodici

Definizione 1.1 (Orbita).

Definiamo l'**orbita positiva** di un'equazione di flusso ϕ come

$$\mathcal{O}^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(x).$$

In modo simile definiamo l'**orbita negativa** e l'**orbita**.

La **traiettoria** di x è il grafico $t \mapsto \phi_t(x)$ contenuto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d\textcolor{blue}{1}}$.

Definizione 1.2 (Punti fissi).

Un **punto fisso** $x \in \mathbb{R}^d$ è un punto tale che $F(x) = 0$.

Osservazione 1.3.

L'orbita di un punto fisso è composta da un singoletto.

Definizione 1.4 (Punti periodici).

Un punto $x \in \mathbb{R}^d$ è **periodico** se esiste $T > 0$ tale che

$$\phi_{T+s}(x) = \phi_s(x) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e $\phi_s(x) \neq x$ per ogni $s \in (0, T)$.

T è detto **periodo minimo** di x .

Osservazione 1.5.

L'orbita di un punto periodico è data da $\mathcal{O}(x) = \{\phi_s(x) \mid s \in [0, T)\}$.

Osservazione 1.6 (Simulazione).

Di solito per tracciare orbite usiamo il computer. Il problema è che è difficile fargli assumere *determinate condizioni iniziali*, anche se queste rare orbite possono essere essenziali per capire bene il funzionamento del sistema (pensa a orbite limite o periodiche).

¹questa è la terminologia italiana. In inglese "trajectory" corrisponde alla nostra orbita, non alla traiettoria.

1.2 Insiemi invarianti

Definizione 1.7 (Insiemi invarianti).

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice **positivamente invarianti** se per ogni $x \in A$, $\phi_t(x) \in A$ per ogni $t \geq 0$. In modo simile definiamo insiemi **negativamente invarianti** e **invarianti**.

Osservazione 1.8 (Le orbite sono invarianti).

Le orbite positive sono positivamente invarianti, le orbite negative sono negativamente invarianti e le orbite sono invarianti.

Dimostrazione.

Segue dal fatto che $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$. □

Definizione 1.9 (Integrale primo).

Una funzione $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $I \in C^1(\mathbb{R}^d)$ è un integrale primo per $\dot{x} = F(x)$ se per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

$$\dot{I}(x) \doteq \langle \nabla I(x), F(x) \rangle = \frac{d}{dt} I(\phi_t(x)) \Big|_{t=0} = 0.$$

Proposizione 1.10 (Costruzione di insiemi invarianti da curve di livello).

Sia $c \in \mathbb{R}$ e $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $I \in C^1$ tale che $\nabla I|_{\{I=c\}} \neq 0$ e $\dot{I}|_{\{I=c\}} = 0$, allora $\{I = c\}$ è invarianti.

Dimostrazione.

Sia $x_0 \in I_c$. In particolare $\nabla I(x_0) \neq 0$. Per continuità esiste un intorno U dove la condizione $\nabla I(x_0) \neq 0$ è vera. A meno di cambio di variabile h derivante dal teorema delle funzioni implicite, poniamo $h(U \cap I_c) = \{y = 0\}$ (dove le nuove coordinate sono (\underline{x}, y)). Il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, y) \\ \dot{y} = g(\underline{x}, y) \end{cases} \quad \text{con } g(\underline{x}, 0) = 0 \quad \forall (\underline{x}, y) \in h(U),$$

dove $(\underline{f}, g) = h \circ F$.

Osservo che se una soluzione rispetta il sistema

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(x, y) \\ \dot{y} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

allora rispetta anche il sistema originale perché non mi sposto mai da $\{y = 0\}$ e quindi la condizione $\dot{y} = 0$ resta sempre vera. Per Cauchy-Lipschitz questa soluzione è l'unica che stavamo cercando e applicando h^{-1} troviamo l'unica soluzione al sistema originale e, appunto, questa rimane entro I_c . □

Corollario 1.11 (Invarianza degli insiemi di livello di integrali primi).

Se I è un integrale primo allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$I_c = \{I(x) = c\}$$

è invarianti.

Osservazione 1.12 (Intuizione geometrica).

Se $\nabla I(x) \neq 0$, la condizione $\dot{I}(x) = 0$ afferma che $\nabla I(x)$ e $F(x)$ sono perpendicolari. Per il teorema delle funzioni implicite, se $x \in I_c$ abbiamo che un vettore normale a I_c in x è ∇I , dunque se $F(x)$ vi è perpendicolare si ha che $F(x) \in T_x I_c$, in particolare l'orbita tende a procedere rimanendo nello spazio tangente, cioè resta contenuta in I_c .

1.3 Passaggio a coordinate polari

In \mathbb{R}^2 cerchiamo di capire come trasformare un problema differenziale da coordinate cartesiane a polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta \end{array} \right.$$

Proposizione 1.13 (Invarianza cerchi in coordinate polari).

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = f(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = g(\rho, \theta) \end{cases}$$

se esiste $\rho_0 > 0$ tale che $f(\rho_0, \theta) = 0$ per ogni θ allora $\{\rho = \rho_0\}$ è invariante.

Dimostrazione.

Segue da (1.10) prendendo $I(\rho, \theta) = \rho$. □

1.4 Alpha e Omega limiti

Definizione 1.14 (Alpha e Omega limiti).

Dato $x \in \mathbb{R}^d$ chiamiamo **ω -limite** di x l'insieme

$$\omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \exists \{t_n\} \nearrow +\infty \text{ t.c. } \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t_k}(x) = y \right\}.$$

Similmente definiamo l' **α -limite** considerando i limiti di successioni di tempi che vanno a $-\infty$.

Osservazione 1.15.

In realtà non è necessario chiedere successioni monotone. Per successioni generali che tendono a $\pm\infty$ basta passare a sottosuccessioni.

Esempio 1.16.

Seguono esempi di α e ω limiti semplici:

- Se x è un punto fisso $\alpha(x) = \omega(x) = \{x\}$
- Se x è periodico $\alpha(x) = \omega(x) = \mathcal{O}(x)$

Definizione 1.17 (Omo-/etero-clino).

Siano x_1 e x_2 punti fissi e supponiamo $\{x_1\} = \alpha(y)$, $\{x_2\} = \omega(y)$.

Se $x_1 = x_2 = x$ allora y è detto **omoclino** di x .

Se $x_1 \neq x_2$ allora y è detto **eteroclino**.

Proposizione 1.18 (Orbita limitata implica invarianza di ω -limite).

Se $x \in \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{O}^+(x)$ è limitata allora $\omega(x)$ è non vuoto, compatto e invariante.

Dimostrazione.

Sia $\{\tau_j\} \rightarrow +\infty$ tale che $\tau_1 > 0$ e $\tau_{j+1} > \tau_j$. Verifichiamo in linea preliminare la seguente uguaglianza:

$$\omega(x) = \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}.$$

\subseteq Segue dal fatto che chiuso implica chiuso per successioni: per ogni $t \geq 0$ vale

$$\begin{cases} y = \lim_k \phi_{t_k}(x) \\ \phi_{t_k}(x) \in \mathcal{O}^+(\phi_t(x)) \end{cases} \implies y \in \overline{\mathcal{O}^+(\phi_t(x))}$$

\supseteq Sia $y \in \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}$. Per definizione di intersezione si ha che per ogni $j \geq 1$ abbiamo $y \in \overline{\mathcal{O}^+(\phi_{\tau_j}(x))}$. In particolare, per una caratterizzazione di chiusura in spazi metrici, esiste $t_j > 0$ tale che

$$d(\phi_{t_j + \tau_j}(x), y) = d(\phi_{t_j}(\phi_{\tau_j}(x)), y) \leq \frac{1}{j}.$$

Segue che $\lim_{j \rightarrow +\infty} (\phi_{t_j + \tau_j}(x), y) = 0$, cioè $y \in \omega(x)$.

Verificata l'uguaglianza sopra, segue immediatamente che $\omega(x)$ è non vuoto e compatto (intersezione di compatti inscatolati non vuoti). Per mostare l'invarianza mostriamo che $y \in \omega(x) \implies \phi_t(y) \in \omega(x)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per definizione di ω -limite esiste una successione $t_k \rightarrow +\infty$ tale che $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$. La tesi segue dalla seguente catena di identità:

$$\phi_t(y) = \phi_t \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t_k}(x) \right) \stackrel{\text{continuità in } t}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_k}(x) \in \omega(x).$$

□

Capitolo 2

Stabilità e funzioni di Lyapunov

In questo capitolo e nel prossimo andiamo a studiare come si comportano i punti fissi¹. Raccolte queste informazioni sui punti stabili speriamo di poterle poi “incollare” per raggiungere un’idea sufficientemente accurata del comportamento dell’intero sistema.

2.1 Stabilità per Lyapunov

Definizione 2.1 (Punti stabili per Lyapunov).

Un punto $x \in \mathbb{R}^d$ si dice

- **stabile** (nel senso di Lyapunov) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in B_\delta(x)$ si ha che per ogni $t \geq 0$ abbiamo $\phi_t(y) \in B_\varepsilon(\phi_t(x))$.
- **asintoticamente stabile** (nel senso di Lyapunov) se è stabile (nel senso di Lyapunov) ed esiste un intorno U di x tale che per ogni $y \in U$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0.$$

- **instabile** (nel senso di Lyapunov) se non è stabile.

Osservazione 2.2 (Stabilità per punti fissi).

Se x è un punto fisso è stabile nel senso di Lyapunov se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $d(y, x) < \delta \implies d(\phi_t(y), x) < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$. Similmente è asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se è stabile ed esiste un intorno U tale che $\forall y \in U$ abbiamo $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = x$.

Definizione 2.3 (Stabilità orbitale).

Un insieme² $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ è **orbitalmente stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(y, \Gamma) < \delta \implies d(\phi_t(y), \Gamma) < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

Definizione 2.4 (Dominio di asintotica stabilità).

Se x_0 è un punto asintoticamente stabile definiamo il **dominio di asintotica stabilità** come

$$\{y \in \mathbb{R}^d \mid \omega(y) = \{x_0\}\}.$$

¹in questo studiamo la stabilità, nel prossimo cercheremo quando possibile di descrivere un comportamento più preciso

²preferibilmente positivamente invariante

Osservazione 2.5 (Convergenza non è sufficiente per asintotica stabilità).

Esistono punti che rispettano la condizione di convergenza nella definizione di asintotica stabilità che NON sono stabili (e quindi non vengono classificati come asintoticamente stabili).

Un punto di questo tipo è $(1, 0)$ nel sistema (espresso in coordinate polari)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\theta) \end{cases}$$



Figura 2.1: In un intorno di $(1, 0)$ ci sono sempre punti con $y > 0$ e questi “fanno un giro” prima di convergere.

2.2 Funzioni di Lyapunov

Definizione 2.6 (Funzione di Lyapunov).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ punto fisso per $F \in C^1$ e $U(x_0)$ un suo intorno. Una funzione $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **funzione di Lyapunov per x_0** se $V \in C^1(U(x_0))$ e

- $V(x) > V(x_0)$ per ogni $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$
- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0$ per ogni $x \in U(x_0)$.

Una funzione di Lyapunov è **stretta** se $\dot{V}(x) < 0$ per ogni $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Teorema 2.7 (Primo teorema di Lyapunov).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto fisso per $F \in C^1$ e $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Lyapunov per x_0 . Allora x_0 è un punto stabile nel senso di Lyapunov.

Dimostrazione.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subseteq U(x_0)$. Definiamo

$$m = \min_{\partial B_\varepsilon(x_0)} V, \quad S_m = \left\{ y \in \overline{B_\varepsilon(x_0)} \mid V(y) < m \right\}.$$

Osserviamo che $x_0 \in S_m$ e, poiché $S_m = V^{-1}((-\infty, m)) \cap B_\varepsilon(x_0)$, S_m è aperto, dunque esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq S_m$.

Sia ora $y \in B_\delta(x_0)$. Per definizione $V(y) < m$. Osserviamo che

$$\frac{d}{dt} V(\phi_t(y)) = \dot{V}(\phi_t(y)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ t.c. } \forall 0 \leq s \leq t \phi_s(y) \in U(x_0),$$

in particolare, per gli stessi valori di t , $\phi_t(y) < m$.

Per assurdo supponiamo che esista $\bar{t} > 0$ tale che $\phi_{\bar{t}}(y) \notin B_\varepsilon(x_0)$. Per continuità di $\phi_t(y)$ possiamo supporre $\phi_{\bar{t}}(y) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ e tale che per ogni $0 \leq s \leq t$ si ha $\phi_s(y) \in U(x_0)$. Si ha dunque $V(\phi_{\bar{t}}(y)) \geq m > V(\phi_t(y))$ per ogni $t \geq 0$ tale che $0 \leq s \leq t$ abbiamo $\phi_s(y) \in U(x_0)$, ma $\partial B_\varepsilon(x_0) \subset \overline{B}_\varepsilon(x_0) \subseteq U(x_0)$, da cui un assurdo. \square

Introduciamo ora un criterio che è spesso utile per mostrare l'asintotica stabilità:

Proposizione 2.8 (Criterio di La Salle).

Sia x_0 un punto fisso per $F \in C^1$ e V una funzione di Lyapunov per x_0 su $U(x_0)$. Se $y \in U(x_0)$ è tale che $\mathcal{O}^+(y)$ è limitata e contenuta in $U(x_0)$ allora $\omega(y)$ è un insieme non vuoto, compatto e invariante tale che $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\}$.

Dimostrazione.

Se per y valgono le ipotesi, per il criterio di invarianza per ω -limiti (1.18) abbiamo che $\omega(y)$ è non vuoto, compatto e invariante.

Osserviamo ora che $t \mapsto V(\phi_t(y))$ è non crescente e monotona, dunque esiste $c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi_t(y))$. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} z \in \omega(y) &\iff \exists t_k \nearrow +\infty \text{ t.c. } \phi_{t_k}(y) \rightarrow z \implies \\ &\implies V(z) = V\left(\lim_k \phi_{t_k}(y)\right) \stackrel{V \text{ cont.}}{=} \lim_k V(\phi_{t_k}(y)) = c. \end{aligned}$$

Si ha dunque che $\omega(y) \subseteq \{V = c\}$. Per l'invarianza di $\omega(y)$ si ha che $V \circ \phi(\cdot)|_{\omega(y)}$ è costante per ogni $z \in \omega(y)$. Questo significa che $\dot{V}|_{\omega(y)} = 0$, da cui $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\}$. \square

Osservazione 2.9.

Nelle ipotesi della proposizione, x_0 è stabile e quindi esiste un y che rispetta le ipotesi.

Teorema 2.10 (Secondo teorema di Lyapunov).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto fisso per $F \in C^1$ e $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Lyapunov stretta per x_0 , allora x_0 è asintoticamente stabile.

Dimostrazione.

Per il primo teorema (2.7) abbiamo che x_0 è stabile, quindi dobbiamo solo verificare la convergenza.

Scelto $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $y \in B_\delta(x_0)$ e $\phi_t(y) \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U(x_0)$. Allora per La Salle (2.8) $\omega(y) \subseteq \{\dot{V} = 0\} \cap U(x_0) = \{x_0\}$. \square

Osservazione 2.11.

Se $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Lyapunov stretta per x_0 allora

$$V_m = \{y \in U(x_0) \mid V(y) \leq m\}$$

è contenuto nel dominio di asintotica stabilità per ogni m tale che $V_m \subseteq U(x_0)$. In particolare vale per \tilde{V}_m dove

$$\tilde{V}_m = \max \{m \mid V_m \subseteq U(x_0)\}.$$

Osservazione 2.12.

Se x_0 è un punto fisso

- Funzione di Lyapunov $\implies x_0$ stabile
- Funzione di Lyapunov stretta $\implies x_0$ asintoticamente stabile
- Funzione di Lyapunov + unico insieme invariante di $\{\dot{V} = 0\}$ è il punto garantiscono comunque asintotica stabilità (per il criterio di La Salle (2.8))
- Se $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^1(U(x_0))$ tale che $V(x) > V(x_0)$ per ogni $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ e $\dot{V}(x) > 0$ per ogni $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora x_0 è *instabile*.

2.2.1 Primo approccio per cercare funzioni di Lyapunov

Nella risoluzione di esercizi spesso si vuole trovare una funzione di Lyapunov. Se non ci sono migliori metodi a disposizione per lo studio del punto, una scelta che di solito funziona quando può almeno localmente (per $y_0 = (y_1, \dots, y_d)$ punto fisso in esame) è

$$V(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d a_i (x_i - y_i)^{2n_i},$$

cioè costruiamo un paraboloide sopra il punto fisso in esame. Gli insiemi di livello di questa funzione sono paraboloidi contenenti y_0 .

Capitolo 3

Linearizzazione

3.1 Idea della linearizzazione

Per capire cosa aspettarci in un intorno di un punto fisso x_0 proviamo a linearizzare:

$$\dot{x} = F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{=0} + \mathcal{D}F(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

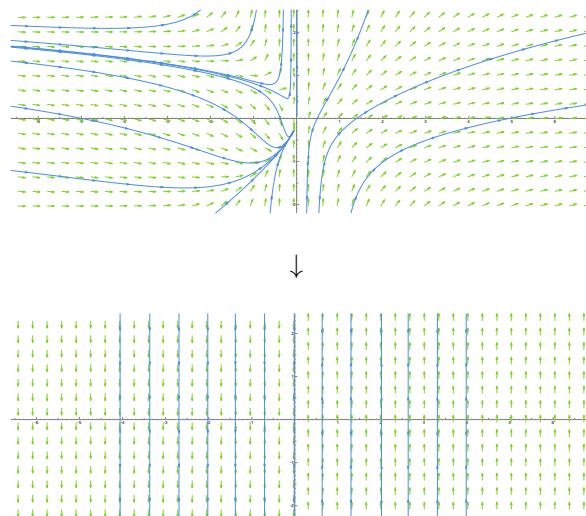
Se $\|x - x_0\|$ è abbastanza piccolo speriamo di trovare informazioni decentemente affidabili su $F(x)$ vicino a x_0 studiando $\mathcal{D}F(x_0)$.

Esempio 3.1 (Esempio dove linearizzazione fallisce).

Linearizziamo il sistema dato da $F(x, y) = (x^2, x + y^2)$.

$$\mathcal{D}F(0, 0) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il sistema linearizzato ha equazione $G(x, y) = (0, x)$. Problema: il sistema originale si comporta in modo un po' diverso nell'origine (acquisto una famiglia di punti fissi, orbite si deformano ecc...).



Possiamo caratterizzare i punti stabili “adatti allo studio tramite linearizzazione” dando la seguente definizione

Definizione 3.2 (Punti fissi iperbolici).

Un punto fisso $x_0 \in \mathbb{R}^d$ per $F \in C^1$ si dice **iperbolico** se $\mathcal{D}F(x_0)$ non ha autovalori con parte reale nulla.

Questi sono i punti “buoni” perché vale il seguente teorema.

Teorema 3.3 (Hartman-Grobman).

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto fisso iperbolico per $\dot{x} = F(x)$, $F \in C^1$ e sia ϕ_t il flusso di questo sistema.

Consideriamo ora il **sistema linearizzato in x_0** , ovvero il sistema dato da

$$\dot{y} = \mathcal{D}F(x_0)y, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

e sia ψ_t il flusso di questo sistema.

Esistono allora U intorno di x_0 , V intorno di 0 e un omeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tale che per ogni $x \in U$ si ha che per ogni t tale che $\phi_t(x) \in U$

$$h(\phi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

Dimostrazione.

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

Osservazione 3.4.

La condizione $\Re(\lambda) = 0$ è equivalente a $|e^\lambda| = 1$, cioè $e^\lambda = e^{i\theta}$. Intuitivamente questo ci dice che l'autospazio generalizzato corrispondente a λ e $\bar{\lambda}$ non è attratto verso il punto fisso ma non vi è neanche respinto nel caso lineare, dunque nel sistema originale la sorte dei punti è determinata da espressioni non lineari.

Osservazione 3.5.

Anche se F ha maggiore regolarità, in generale h non acquista regolarità.

Ricordiamo il seguente

Teorema 3.6 (Decomposizione in forma di Jordan reale).

Sia $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$, allora esiste $P \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ tale che $\det P \neq 0$ e $\Lambda = P^{-1}AP$ è diagonale a blocchi.

Supponiamo che gli autovalori di A siano in una delle seguenti forme

- $\{\lambda_j\}_{j \in \{1, \dots, k\}}$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ e $m_{alg}(\lambda_j) \leq 3$
- $\{a_j + ib_j\}_{j \in \{1, \dots, \ell\}}$ con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$ e $m_{alg}(a_j + ib_j) = 1$.

Allora $\Lambda = diag(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, B_1, \dots, B_\ell)$ con

$$\begin{aligned} \Lambda_j &\in \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, (\lambda_j) \right\} \\ B_j &= \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osserviamo che se $\dot{y} = DF(x_0)y$ ed esiste P invertibile tale che $P^{-1}DF(x_0)P = \Lambda$ con Λ in forma di Jordan reale allora, ponendo $z = P^{-1}y$ troviamo un omeomorfismo tale che

$$\dot{z} = P^{-1}\dot{y} = P^{-1}DF(x_0)y = (P^{-1}DF(x_0)P)z = \Lambda z.$$

Notazione 3.7.

Sia V_{λ_j} l'autospazio generalizzato di λ_j , similmente per $a_j + ib_j$.

Proposizione 3.8 (Gli autospazi generalizzati sono invarianti).

Per $\dot{y} = Ay$, $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ si ha che V_{λ_j} e $V_{a_j+ib_j}$ sono insiemi invarianti.

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità supponiamo che $A = \Lambda$ sia in forma di Jordan reale e a meno di permutare le coordinate mostriamo la tesi solo per V_{λ_1} ¹. Osserviamo che un generico vettore di V_{λ_1} è della forma $y_0 = ((y_0)_1, \dots, (y_0)_s, 0, \dots, 0)$, dove $s = m_{alg}(\lambda_1)$ (dove poniamo $s = 2$ nel caso di autovalore complesso). La tesi segue calcolando:

$$\phi_t(y_0) = e^{t\Lambda}y_0 = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_s t})y_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_s t} & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (y_0)_1 \\ \vdots \\ (y_0)_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{\lambda_1}.$$

□

Definizione 3.9 (Sottospazi stabili).

Il **sottospazio stabile** di 0 per il sistema $\dot{y} = Ay$ è l'insieme

$$E^s(0) = \text{Span}(v \in V_{\lambda_i} \mid \Re(\lambda_i) < 0).$$

Il **sottospazio instabile** ($E^u(0)$) e il **sottospazio centrale** ($E^c(0)$) sono definiti in modo analogo considerando $\Re(\lambda_i) > 0$ e $\Re(\lambda_i) = 0$ rispettivamente.

Teorema 3.10 (Invarianza e caratterizzazione dei sottospazi stabili).

Dato il sistema $\dot{y} = Ay$ si ha che:

1. $\dim E^u(0) + \dim E^s(0) + \dim E^c(0) = d$

2. $E^{s,c,u}(0)$ è invariante per ϕ_t

3. $E^s(0) = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = 0 \right\}$

4. $E^u(0) = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = 0 \right\}.$

Dimostrazione. (NON DATA DURANTE IL CORSO).

Il primo punto segue da noti risultati sugli autospazi generalizzati.

Il secondo punto è una conseguenza dell'invarianza degli autospazi (3.8).

Gli ultimi due punti seguono da come funzionano i $e^{\Re(\lambda)t}$ (questi fattori appaiono dopo essersi portati in forma di Jordan). □

¹dove λ_1 in questo caso si riferisce ad autovalori potenzialmente complessi.

3.2 Pozzi e Sorgenti

Definizione 3.11 (Pozzi e sorgenti).

Sia x_0 un punto fisso. Esso si dice

- **pozzo** se ogni autovalore di $\mathcal{D}F(x_0)$ ha parte reale negativa,
- **sorgente** se ogni autovalore di $\mathcal{D}F(x_0)$ ha parte reale positiva.

Osservazione 3.12.

Si può pensare a sorgenti come pozzi per tempi negativi.

Proposizione 3.13 (Stabilità dei pozzi).

I pozzi sono asintoticamente stabili

Dimostrazione.

A meno di traslare il sistema supponiamo $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^d$.

Poiché cambi di base lineari non cambiano la stabilità dell'origine supponiamo che $\mathcal{D}F(0)$ sia in forma di Jordan reale. Trattiamo prima i casi dove $\mathcal{D}F(0)$ consiste di un solo blocco di Jordan e poi uniamo i risultati.

$\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$ Supponiamo che

$$\mathcal{D}F(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \implies \dot{x} = F(x) = \underbrace{F(0)}_{=0} + \mathcal{D}F(0)x + O(\|x\|^2).$$

Dato $\varepsilon > 0$ consideriamo il cambio di base

$$y = (y_1, \dots, y_d), \quad y_i = \varepsilon^{-i+1} x_i,$$

da cui

$$\dot{y} = Ay + \tilde{G}(y), \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & \varepsilon \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}(y) = O(\|y\|^2).$$

Affermiamo che la funzione

$$V(y) = \frac{1}{2} \|y\|^2$$

è di Lyapunov stretta in un intorno di 0. La prima condizione è evidentemente verificata, quindi dobbiamo solo trovare un intorno dove $\dot{V}(y) < 0$ per $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \sum_{i=1}^{d-1} y_i \underbrace{(\lambda y_i + \varepsilon y_{i+1} + \tilde{G}_i(y))}_{\dot{y}_i} + y_d \underbrace{(y_d + \tilde{G}_d(y))}_{\dot{y}_d} = \\ &= \lambda \|y\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{d-1} y_i y_{i+1} + y \cdot \tilde{G}(y) \leq \\ &\leq \lambda \|y\| + \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{i=1}^{d-1} y_i^2 + \sum_{i=2}^d y_i^2 \right) + O(\|y\|^3) = \\ &= \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_1^2 + y_d^2) + (\lambda + \varepsilon) \sum_{i=2}^{d-1} y_i^2 + O(\|y\|^3) \leq \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \|y\|^2 + O(\|y\|^3). \end{aligned}$$

Cerchiamo dunque condizioni valide per ε e $\|y\|$:
 Poiché $\lambda < 0$ è lecito fissare $\varepsilon \in (0, |\lambda|)$. Per le proprietà degli O grandi esistono $r, C > 0$ tali che

$$\|y\| < r \implies \dot{V}(y) \leq ((\lambda + \varepsilon) + C \|y\|) \|y\|^2.$$

Ponendo ora $\lambda + \varepsilon + C \|y\| < 0$ si ha che se

$$r' < \min \left\{ r, \frac{|\lambda + \varepsilon|}{C} \right\}$$

allora per $y \in B_{r'}(0) \setminus \{0\}$ vale

$$\dot{V}(y) \leq ((\lambda + \varepsilon) + C \|y\|) \|y\|^2 < 0,$$

cioè V è una funzione di Lyapunov stretta per x_0 in un opportuno cambio di base, dunque x_0 è asintoticamente stabile per il secondo teorema di Lyapunov (2.10).

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Supponiamo che

$$\mathcal{D}F(0) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

A meno di un coniugio troviamo

$$\dot{y} = Ay + \tilde{G}(y), \quad A = \begin{pmatrix} a & b & \varepsilon & 0 \\ -b & a & 0 & \varepsilon \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

e concludiamo in modo simile al caso precedente.

generale Segue dai due casi precedenti dando un ulteriore limitazione con gli O grandi sui termini non lineari.

□

3.3 Classificazione dei punti stabili lineari sul piano

Consideriamo i sistemi lineari di questa forma

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Sappiamo che

$$\phi_t(x_0) = e^{At}x_0,$$

in particolare $x_0 = 0$ è un punto fisso.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A.$$

Segue che gli autovalori di A sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr } A \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A.$$

Consideriamo i possibili casi:

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Gli autovalori λ_{\pm} sono reali distinti.

*) Se $\text{tr } A > 0$ allora $\lambda_+ > \lambda_- > 0$, da cui a meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \dot{u} = \lambda_+ u \\ \dot{v} = \lambda_- v \end{cases},$$

da cui le soluzioni sono

$$(u(t), v(t)) = (e^{\lambda_+ t} u_0, e^{\lambda_- t} v_0).$$

Questa situazione è detta **nodo instabile**.

Osserviamo che $E^u(0) = \mathbb{R}^2$ e $E^s(0) = E^c(0) = \{0\}$.

*) Se $\text{tr } A < 0$ allora $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ e troviamo il **nodo stabile**.

Osserviamo che $E^s(0) = \mathbb{R}^2$ e $E^u(0) = E^c(0) = \{0\}$.

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Gli autovalori λ_{\pm} sono complessi coniugati. $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Segue che $\text{tr } A = 2\alpha$. A meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

*) Se $\alpha > 0$ troviamo

$$x(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **fuoco instabile**. Osserviamo che $E^u(0) = \mathbb{R}^2$ e $E^s(0) = E^c(0) = \{0\}$.

*) Se $\alpha < 0$ troviamo

$$x(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **fuoco stabile**. Osserviamo che $E^s(0) = \mathbb{R}^2$ e $E^u(0) = E^c(0) = \{0\}$.

*) Se $\alpha = 0$ troviamo

$$x(t) = R_{\beta t}(x_0)$$

cioè un **centro**. Osserviamo che $E^c(0) = \mathbb{R}^2$ e $E^s(0) = E^u(0) = \{0\}$.

$$\begin{cases} \det A > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Gli autovalori coincidono e sono della forma $\lambda = \text{tr } A/2$. A meno di coniugio abbiamo

due possibilità:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = e^{\lambda t} x_0$$

Questa situazione è detta **Stella stabile/instabile** per segno negativo o positivo della traccia rispettivamente.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \implies x(t) = e^{\lambda t} (u_0 + tv_0, v_0).$$

Questa situazione è detta **nodo stabile/instabile improprio**.

$$\begin{cases} \det A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Gli autovalori sono reali di segno opposto $\lambda_- < 0 < \lambda_+$. A meno di coniugio

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \implies x(t) = (u_0 e^{\lambda_+ t}, v_0 e^{\lambda_- t}).$$

Troviamo un **punto di sella**. Il segno della traccia specifica solo verso quale asse le iperboli sono schiacciate.

Osserviamo che $E^s(0) = \{x = 0\}$, $E^u(0) = \{y = 0\}$, $E^c(0) = 0$, cioè lo “spazio tangente” in 0 si decompone in una retta stabile e una instabile.

$$\det A = 0$$

Gli autovalori sono 0 e $\text{tr } A$. In tutti i casi a meno di coniugio una coordinata resta costante, dunque troviamo delle **rette**.

Riassumiamo i casi nella seguente tabella

$\text{sgn } \det A$	$\text{sgn } \Delta$	$\text{sgn } \text{tr } A$	Nome
+	+	+	Nodo instabile
+	+	-	Nodo stabile
+	-	+	Fuoco instabile
+	-	-	Fuoco stabile
+	-	0	Centro
+	0	+	Stella o nodo improprio instabile
+	0	-	Stella o nodo improprio stabile
-	+	•	Punto di Sella
0	•	•	Rette

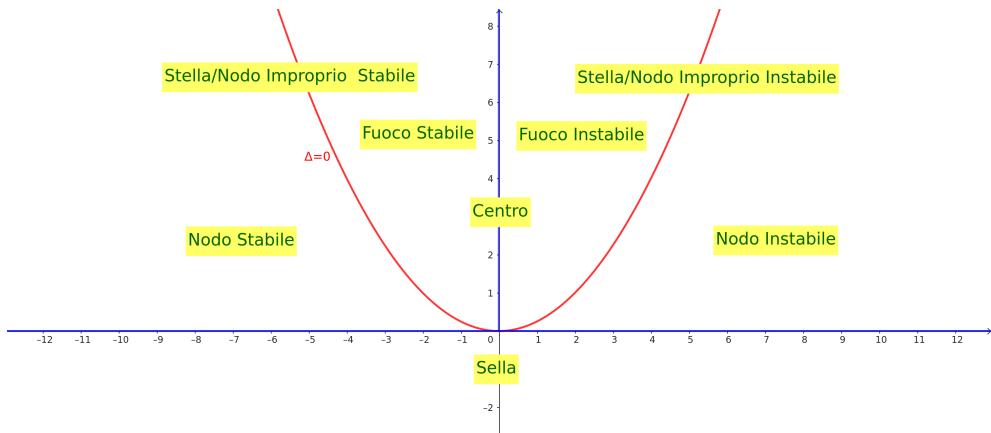


Figura 3.1: Utile diagramma che organizza i tipi di punti stabili lineari. L’asse x corrisponde ai possibili valori di $\text{tr } A$ e l’asse y ai possibili valori di $\det A$. La parabola rossa indica il luogo dove $\Delta = 0$; nella regione sopra la parabola troviamo $\Delta < 0$ e sotto $\Delta > 0$. In blu sono indicati i valori di $\text{tr } A$ e $\det A$ per cui il punto stabile in considerazione NON è iperbolico.

Riportiamo dei diagrammi di fase per evidenziare la forma delle orbite.

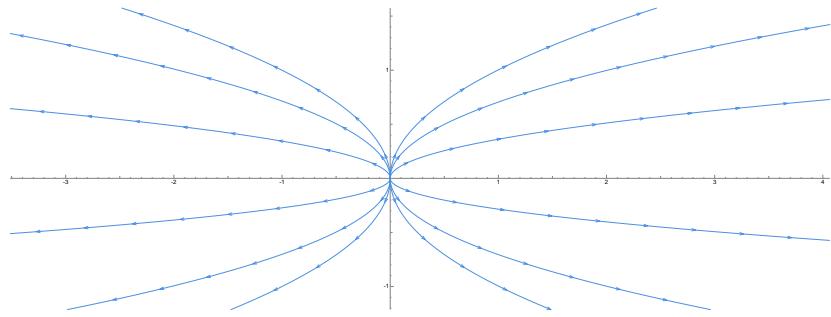


Figura 3.2: Nodo instabile

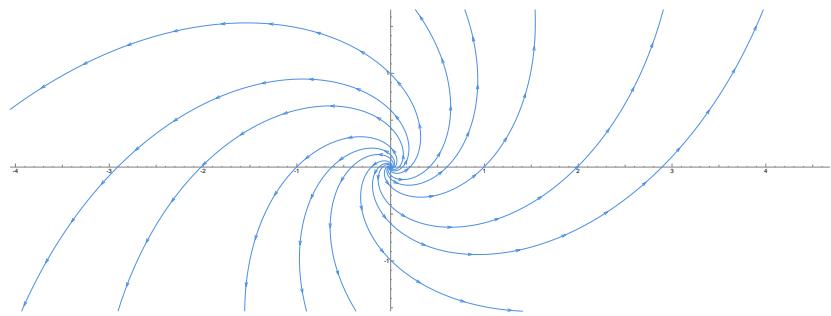


Figura 3.3: Fuoco instabile

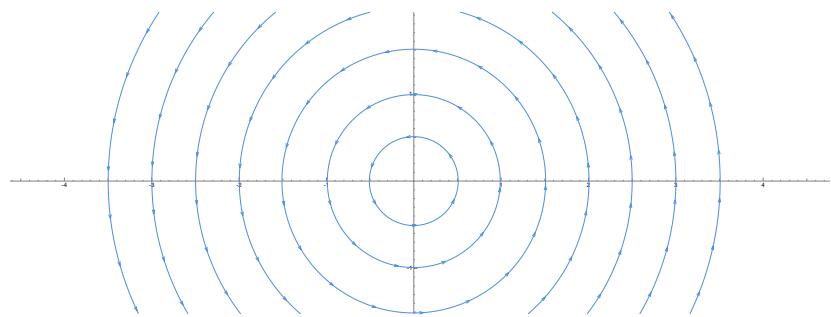


Figura 3.4: Centro

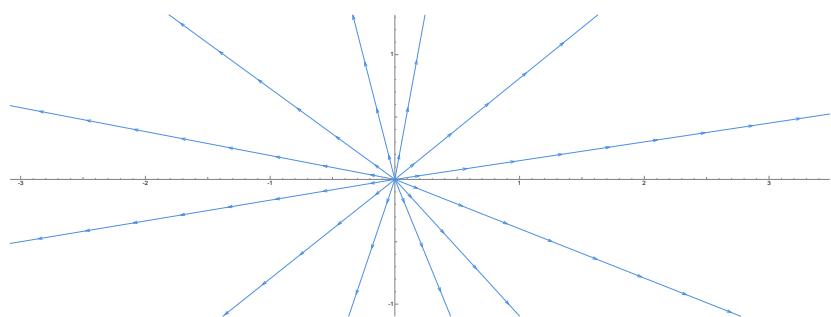


Figura 3.5: Stella instabile

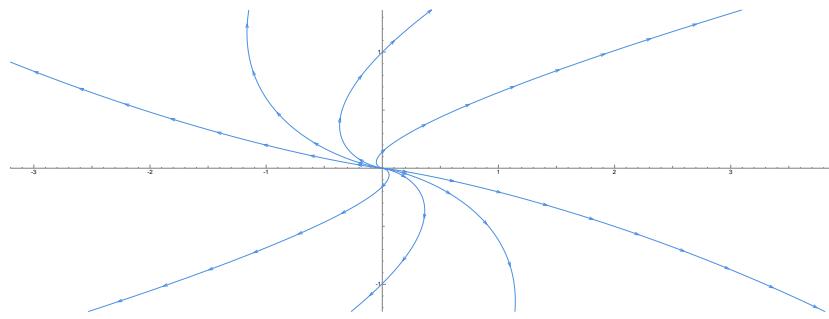


Figura 3.6: Nodo improprio instabile

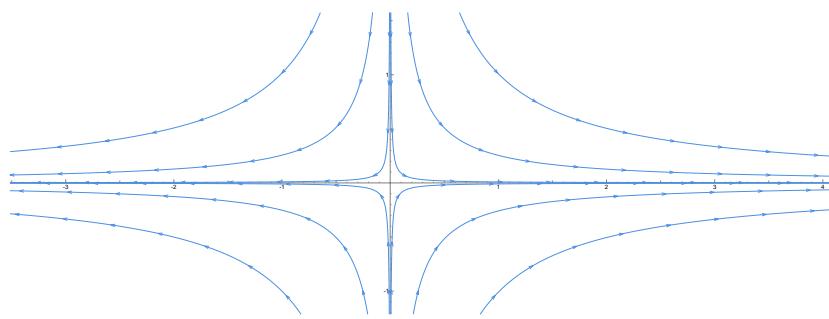


Figura 3.7: Sella

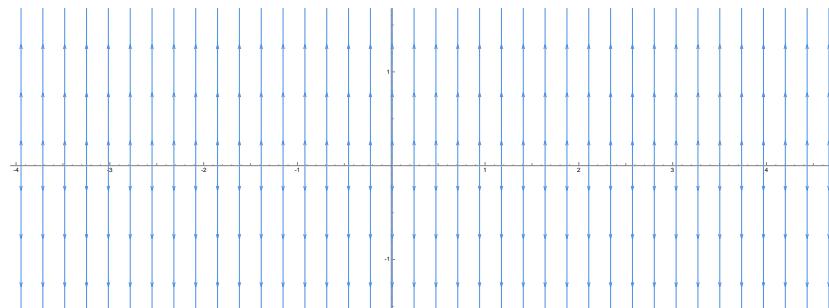


Figura 3.8: Rette per matrice diagonalizzabile

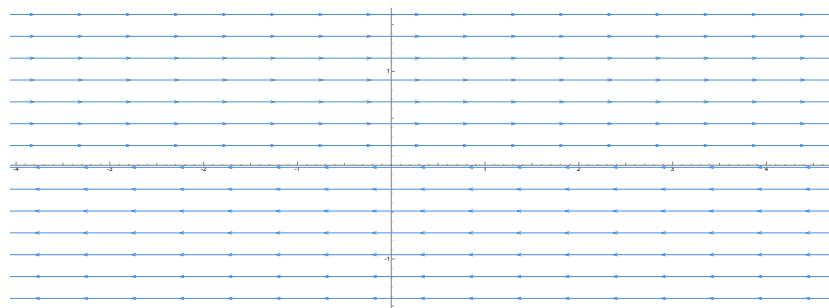


Figura 3.9: Rette per blocco di Jordan nilpotente

Capitolo 4

Integrali Primi e Sistemi Hamiltoniani

In questo capitolo introduciamo una classe di sistemi che ammettono integrale primo (e quindi ci permettono di fare uno studio globale guardando le curve di livello di questo). A volte, anche se un sistema non è della forma trattata in questo capitolo, è possibile studiarne il comportamento approssimandolo prima ad uno di questi e poi perturbando la soluzione trovata in modo opportuno.

4.1 Sistemi Hamiltoniani

Notazione 4.1.

Quando consideriamo lo spazio \mathbb{R}^{2d} in questo capitolo indichiamo le coordinate come $(x, y) = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$ con $x = q \in \mathbb{R}^d$ e $y = p \in \mathbb{R}^d$. In genere q è detto **coordinata generalizzata** e p è detto **momento generalizzato**.

Con la notazione $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ intendiamo il vettore la cui componente i -esima è $\frac{\partial H}{\partial x_i}$. Similmente per $\frac{\partial H}{\partial y_i}$.

Definizione 4.2 (Sistema Hamiltoniano).

Un sistema di ODE su \mathbb{R}^{2d} è un **sistema Hamiltoniano** se è della forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\dot{y} \end{pmatrix} = \nabla H \iff \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, d\},$$

dove $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^{2d})$ detta **funzione Hamiltoniana** del sistema.

Il numero d è detto numero di **gradi di libertà**.

Osservazione 4.3.

Ad ogni funzione $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 è associato un sistema Hamiltoniano.

Proposizione 4.4 (Hamiltoniana è un integrale primo).

Se H è una funzione Hamiltoniana allora è un integrale primo del sistema ad essa associato.

Dimostrazione.

Basta calcolare \dot{H} .

$$\begin{aligned}\dot{H}(x, y) &= \nabla H(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right) = 0.\end{aligned}$$

□

Esempio 4.5.

Un sistema con due gradi di libertà è dato dal doppio pendolo, il quale è interamente determinato da due angoli. Lo spazio delle fasi è $T^2 \times \mathbb{R}^2$ dove $T^2 = S^1 \times S^1$ parametrizza i due angoli e \mathbb{R}^2 le velocità angolari.

Osserviamo intuitivamente che $\dim \{H = c\} = 3$, che vedremo essere la minima dimensione che permette orbite caotiche.

Esempio 4.6 (Un grado di libertà e mezzo).

Se un sistema ha un grado di libertà ma non è autonomo possiamo reinterpretarlo come un sistema con due gradi di libertà dove abbiamo aggiunto il tempo e questi sistemi possono ancora presentare comportamenti caotici. Un esempio sono oscillatori armonici perturbati periodicamente.

Teorema 4.7 (Liouville).

Sia $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^3 e sia ϕ_t il flusso del sistema Hamiltoniano associato. Allora per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ misurabile si ha che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\phi_t(A)).$$

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x, y) = F(\phi_t(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y}(\phi_t(x, y)) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(\phi_t(x, y)) \end{pmatrix}.$$

Poiché H è di classe C^3 , si ha che $\phi : (x, y, t) \mapsto \phi_t(x, y)$ è di classe C^2 ¹, quindi

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{D}(\phi_t(x, y))) \stackrel{\text{regolarità}}{=} \underbrace{\mathcal{D}\left(\frac{d}{dt} \phi_t(x, y)\right)}_{=F(\phi_t(x, y))} = \mathcal{D}F(\phi_t(x, y)) \mathcal{D}(\phi_t(x, y)).$$

Poiché $\mathcal{D}\phi_0(x, y) = I$, possiamo integrare l'identità precedente² per trovare

$$\mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = \exp\left(\int_0^t \mathcal{D}F(\phi_s(x, y)) ds\right).$$

¹Poiché H è C^3 ne deriva che F è C^2 . Dato che $\phi' = F(\phi)$ si ha per il teorema del differenziale totale che ϕ è almeno C^2 in ogni entrata.

²è come se stessimo risolvendo insieme tutti i sistemi della forma

$$\frac{d}{dt} v(t) = \mathcal{D}F(\phi_t(x, y))v(t), \quad \text{per } v(t) = \mathcal{D}(\phi_t(x, y))e_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}.$$

Segue da una identità nota³ che

$$\det \mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{tr} (\mathcal{D}F(\phi_s(x, y))) ds \right).$$

Per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i},$$

dunque $\operatorname{tr} (\mathcal{D}F) = 0$, da cui

$$\operatorname{tr} (\mathcal{D}F(\phi_s(x, y))) = 0.$$

Segue che

$$\det \mathcal{D}(\phi_t(x, y)) = e^0 = 1.$$

Concludiamo con il seguente conto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_t(A)) &= \int_{\phi_t(A)} 1 d\mathcal{L} = \int_A |\det \mathcal{D}\phi_t(x, y)(x, y)| d\mathcal{L} = \\ &= \int_A 1 d\mathcal{L} = \mathcal{L}(A). \end{aligned}$$

□

4.1.1 Sistemi meccanici con un grado di libertà

Definizione 4.8 (Sistema meccanico).

Un **sistema meccanico** è un sistema Hamiltoniano della forma

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^\top A y + V(x)$$

con $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \in Sym(d, \mathbb{R})$. La funzione V è detta **potenziale**.

Studiamo un sistema meccanico con un grado di libertà:

A meno di riscalamento poniamo $A = (1)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'(x) \end{cases}$$

Osserviamo che i punti fissi sono $\{(x, 0) \mid V'(x) = 0\}$. La matrice Jacobiana è data da

$$\mathcal{D}F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x) & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{tr} \mathcal{D}F = 0, \det \mathcal{D}F = V''(x).$$

Se $V''(x) = 0$ siamo in un caso degenere e il linearizzato non ci aiuta.

Se $V''(x) < 0$ il punto $(x, 0)$ è una sella.

Se $V''(x) > 0$ il punto $(x, 0)$ è un punto non iperbolico di tipo centro.

Il teorema di linearizzazione ci informa solo sul caso $(x, 0)$ sella. Studiamo la stabilità del caso di tipo centro.

³ $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$

Proposizione 4.9 (Caratterizzazione dei punti fissi in sistema meccanico ad un grado di libertà).

I punti fissi non degeneri⁴ di un sistema meccanico ad un grado di libertà sono selle o centri⁵.

Idea di dimostrazione.

Se $(x_0, 0)$ fosse instabile, esisterebbe un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste $z_0 \in B_\delta((x_0, 0))$ tale che $\|\phi_t(z_0) - (x_0, 0)\| > \varepsilon$. Poniamo

$$m_\varepsilon = \min_{\partial B_\varepsilon((x_0, 0))} H$$

e consideriamo un ε abbastanza piccolo in modo tale che $m_\varepsilon \sup_{B_\varepsilon((x_0, 0))} H$, che sappiamo esistere perché da noti criteri sulle derivate prime e seconde $(x_0, 0)$ è un minimo locale di H . Poiché le orbite del sistema corrispondono alle curve di livello di H abbiamo trovato una contraddizione in quanto per ε abbastanza piccolo le orbite non possono attraversare $\partial B_\varepsilon((x_0, 0))$.

Se $(x_0, 0)$ fosse asintoticamente stabile esisterebbe un intorno di $(x_0, 0)$ che converge a $(x_0, 0)$, in particolare l'area di questo intorno non si conserva, contraddicendo il teorema di liouville (4.7). \square

⁴ $(x_0, 0)$ con $V'(x_0) = 0$ e $V''(x_0) \neq 0$
⁵non solo nel linearizzato

Capitolo 5

Primi metodi di studio globale

5.1 Metodo delle isocline nel piano

Supponiamo $F = (f, g)$ con $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Introduciamo un metodo che permette di calcolare esplicitamente orbite in qualche caso.

Proposizione 5.1 (Metodo delle isocline nel piano).

Sia (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora esiste un intorno U di (x_0, y_0) tale che $\mathcal{O}(x_0, y_0) \cap U$ è il grafico di una funzione $h(x)$ (se $f(x_0, y_0) \neq 0$, altrimenti $h(y)$) che risolve l'equazione differenziale

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}.$$

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità supponiamo $f(x_0, y_0) \neq 0$, esiste dunque U intorno di (x_0, y_0) dove f non si annulla. Consideriamo la funzione

$$I(x, y) = y - h(x)$$

dove $h(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}, \quad h(x_0) = y_0$$

definita in un intorno di x_0 contenuto nella proiezione sulla prima componente di U . Osserviamo che

$$\dot{I}|_{I=0}(x, y) = \dot{y} - h'(x)\dot{x}|_{I=0} = g(x, y) - \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))}f(x, y)|_{y=h(x)} = 0,$$

dunque per il criterio (1.10) sappiamo che $\{y = h(x)\}$ è un insieme invariante. Poiché è una curva e contiene (x_0, y_0) questa è l'orbita voluta ed effettivamente l'abbiamo scritta come grafico. \square

5.2 Ricerca di simmetrie

Spesso, soprattutto negli esercizi, i sistemi in esame presentano delle simmetrie, ovvero è possibile costruire una mappa¹

$$\begin{aligned} C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \\ x(t) &\longmapsto \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

tale che

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)) \implies \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = F(\tilde{x}(t)).$$

Spesso una simmetria si fattorizza in una mappa “geometrica” composta con una mappa “temporale”, cioè esistono $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tali che

$$\tilde{x}(t) = g(x(\tau(t))).$$

Esempio 5.2 (Esempio di simmetrie).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

L’unico punto fisso è $(0,0)$ e gli assi sono invarianti. Ci sono altre rette invarianti? Cioè, esistono a, b tali che una curva di livello di $I(x, y) = ax + by$ è invariante?

$$\begin{aligned} \dot{I}|_{I=c} &= a\dot{x} + b\dot{y}|_{ax+by=c} \stackrel{\text{se } b \neq 0}{=} \\ &= ax^2 + by^2|_{ax+by=c} = ax^2 + b\left(\frac{c - ax}{b}\right)^2 = \\ &= \left(a + \frac{a^2}{b}\right)x^2 - 2\frac{ac}{b}x + \frac{c^2}{b}. \end{aligned}$$

Per annullare tutti i coefficienti $c = 0$ e $a \in \{0, -b\}$. Troviamo dunque le condizioni $c = 0$ e $a = 0$ o $a = -b$. Dunque $\{x = y\}$ è un insieme invariante.

Andiamo ora a studiare le isocline. Per $x \neq 0$ consideriamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{x^2} \implies -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} \implies y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0}\right)}.$$

Studiamo le simmetrie del sistema. Proviamo a porre $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), -y(-t))$, da cui

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = -\dot{x}(-t)(-1) = \dot{x}(-t) = x^2(-t) = (-\tilde{x}(t))^2 = (\tilde{x}(t))^2$$

e similmente per \tilde{y} . Questo mostra che ad ogni orbita possiamo associarne un’altra che geometricamente è la riflessione rispetto all’origine e che viene percorsa in verso opposto.

¹Durante il corso non è stata data una definizione rigorosa di simmetria, solo una idea intuitiva e pratica di come impiegarla nella risoluzione di esercizi. Questa formulazione NON è stata data durante il corso e non so se è standard, serve solo come guida per capire il concetto a chi legge le dispense.

Capitolo 6

Varietà stabili/instabili

6.1 Varietà stabili e instabili locali

In un punto fisso lineare di tipo sella sappiamo che esistono due assi: uno che converge al punto (E^s) e uno che vi diverge (E^u). Cerchiamo di generalizzare questo concetto.

Definizione 6.1 (Varietà stabile/instabile locale).

Siano x_0 un punto fisso iperbolico per $\dot{x} = F(x)$ e U un intorno di x_0 . La **varietà stabile locale** di x_0 in U è data da

$$W_{loc}^s(x_0) = \left\{ y \in U \mid \forall t \geq 0 \phi_t(y) \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) \rightarrow x_0 \right\}.$$

Similmente definiamo la **varietà instabile locale** come

$$W_{loc}^u(x_0) = \left\{ y \in U \mid \forall t \leq 0 \phi_t(y) \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) \rightarrow x_0 \right\}.$$

Teorema 6.2 (Varietà stabile/instabile).

Sia x_0 un punto fisso iperbolico¹ per $F \in C^k$ e $k \geq 1$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

1. $W_{loc}^{s/u}(x_0)$ in $B_\varepsilon(x_0)$ esistono e sono uniche,
2. $W_{loc}^s(x_0)$ è positivamente invariante e $W_{loc}^u(x_0)$ è negativamente invariante,
3. $W_{loc}^{s/u}(x_0)$ sono sottovarietà di $B_\varepsilon(x_0)$ di classe C^k .
Inoltre $\dim W_{loc}^s(x_0) = \dim E^s(x_0)$ e $\dim W_{loc}^u(x_0) = \dim E^u(x_0)$.
4. I sottospazi affini $x_0 + E^{s/u}(x_0)$ sono tangenti a $W_{loc}^{s/u}$ in x_0 .

Dimostrazione. (Caso $d = 2$).

Poiché x_0 è un punto fisso iperbolico si presentano due casi: le parti reali dei due autovalori hanno lo stesso segno o hanno segno opposto. Se hanno lo stesso segno sappiamo che $\det DF(x_0) > 0$ e che $\text{tr } DF(x_0) \neq 0$. Segue dunque che $W_{loc}^s(x_0) = B_\varepsilon(x_0)$ e $W_{loc}^u(x_0) = \{x_0\}$ o viceversa a seconda del segno delle parti reali. Da queste caratterizzazioni è evidente che il teorema vale.

¹ ricordo che x_0 iperbolico implica in particolare che $\dim E^s(x_0) + \dim E^u(x_0) = d$, dove \mathbb{R}^d è lo spazio delle fasi.

Supponiamo dunque che le parti reali dei due autovalori abbiano segno opposto. Segue immediatamente che x_0 è un punto di stella e che gli autovalori sono reali. Siano $-\lambda$ e μ questi autovalori (dove $\lambda, \mu > 0$). A meno di una traslazione e un cambio base supponiamo

$$x_0 = (0, 0), \quad \mathcal{D}F(x_0)e_1 = -\lambda e_1, \quad \mathcal{D}F(x_0)e_2 = \mu e_2.$$

Possiamo dunque riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + f(x, y) \\ \dot{y} = \mu y + g(x, y) \end{cases}$$

dove f, g sono di classe C^k , $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ ², $\nabla f(0, 0) = \nabla g(0, 0) = (0 \ 0)^T$ ³ e le seguenti funzioni sono o -piccoli di $\sqrt{x^2 + y^2}$: f , g , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ ⁴.

Data questa trasformazione, la tesi è equivalente a mostrare che $W_{loc}^s(0, 0)$ esiste, è unico, positivamente invariante, di classe C^k e tangente a

$$\{y = 0\} = (0, 0) + E^s((0, 0)) \text{ in } (0, 0).$$

Un argomento simmetrico mostra i risultati mancanti relativi a W_{loc}^u .

Definiamo i seguenti insiemi: per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $M > 1$ siano

$$D_\varepsilon = \{|x| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon\}, \quad C_M = \{|x| \geq M|y|\}, \quad C_M^+ = C_M \cap \{x > 0\} \cap D_\varepsilon.$$

Mostriamo prima dei lemmi utili alla dimostrazione. Fissiamo $M > 1$

Lemma 6.3.

Esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\dot{x}|_{C_M^+} < 0$

Dimostrazione del lemma.

Ricordiamo che

$$\dot{x} = -\lambda x + f(x, y) \quad \text{con } |f(x, y)| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

in particolare esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$|f(x, y)| \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se $(x, y) \in C_M$ allora

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{M^2}\right)} \stackrel{M \geq 1}{\leq} \sqrt{2}|x|.$$

Mettendo insieme questi risultati

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{C_M^+} &= -\lambda x + f(x, y)|_{C_M^+} \leq \\ &\leq -\lambda x + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}|_{C_M^+} \leq \\ &\stackrel{x > 0}{\leq} -\lambda x + \frac{\lambda}{2}x = -\frac{\lambda}{2}x < 0. \end{aligned}$$

□

²in quanto $x_0 = (0, 0)$ è un punto fisso

³in quanto sappiamo che $\mathcal{D}F((0, 0)) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

⁴per come funziona l'espansione di Taylor

Lemma 6.4.

Esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y>0\}} > 0$ e $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y<0\}} < 0$.

Dimostrazione del lemma.

Ricordiamo che

$$\dot{y} = \mu y + g(x, y) \quad \text{con } |g(x, y)| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

in particolare esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$|g(x, y)| \leq \frac{\mu}{2\sqrt{1+M^2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y>0\}} &= \mu y + g(My, y) \geq \\ &\geq \mu y - \frac{\mu}{2\sqrt{1+M^2}} \sqrt{(1+M^2)y} = \\ &= \frac{\mu}{2} y > 0. \end{aligned}$$

Gli stessi conti con le disuguaglianze nel senso opposto danno la dimostrazione per $\dot{y}|_{\partial C_M^+ \cap \{y<0\}}$. \square

Definiamo gli insiemi

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^+ &= \{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \exists t_0 > 0 \text{ t.c. } \phi_{t_0}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+ \cap \{y > 0\}\} \\ I_\varepsilon^- &= \{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \exists t_0 > 0 \text{ t.c. } \phi_{t_0}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+ \cap \{y < 0\}\} \end{aligned}$$

Lemma 6.5.

Gli insiemi I_ε^+ e I_ε^- sono intervalli aperti.

Dimostrazione del lemma.

Mostriamo la tesi solo per I_ε^+ . Il caso I_ε^- è simmetrico.

aperto Sia $y_0 \in I_\varepsilon^+$ e sia $t_0 > 0$ tale che $\phi_{t_0}(\varepsilon, y_0) \in \partial C_M^+ \cap \{y > 0\}$. Se $\phi_t(a, b) = (x(t, a, b), y(t, a, b))$ osserviamo che $y(t_0, \varepsilon, y_0) > 0$ e $x(t_0, \varepsilon, y_0) - My(t_0, \varepsilon, y_0) = 0$. Definiamo

$$G(b, t) = x(t, \varepsilon, b) - My(t, \varepsilon, b).$$

Per quanto detto $G(y_0, t_0) = 0$ e, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, $\frac{d}{dt}G(y_0, t_0) = \dot{x}(t_0, \varepsilon, y_0) - M\dot{y}(t_0, \varepsilon, y_0) < 0 \neq 0$ ⁵.

Abbiamo verificato le ipotesi del teorema della funzione implicita, dunque esistono U intorno di y_0 , V intorno di t_0 e $\tau : U \rightarrow V$ continua C^k (regolarità di G) tali che $\tau(y_0) = t_0$ e per ogni $y \in U$ abbiamo

$$G(y, \tau(y)) = 0 \iff \phi_{\tau(y)}(\varepsilon, y) \in \partial C_M^+.$$

La tesi segue a meno di restringere U a $U \cap (\phi_{\tau(\cdot)}(\varepsilon, \cdot))^{-1}(\{y > 0\})$.

connesso Segue immediatamente da esistenza e unicità unito alla monotonia di x in t e per ε abbastanza piccolo (in modo che D_ε contenga come unico punto fisso $(0, 0)$). \square

⁵stiamo usando i due lemma precedenti.

Per ogni $(\varepsilon, y) \in C_M$ sappiamo che $\phi_t(\varepsilon, y)$ esce dal bordo superiore, inferiore, o tocca $(0, 0)$.

Lemma 6.6.

Si ha che

$$\#\{y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid (\varepsilon, y) \in C_M, \omega(\varepsilon, y) = \{(0, 0)\}\} = 1.$$

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che esistano y_0 e y_1 distinti nell'insieme. A meno di moltiplicare F per una funzione scalare⁶ possiamo supporre

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \frac{\mu y + g(x, y)}{\lambda - \frac{1}{x} f(x, y)} \end{cases}$$

A meno di conti possiamo definire $\tilde{\lambda} > 0$ e \tilde{g} con le stesse proprietà di g come o -piccolo di $\sqrt{x^2 + y^2}$ in modo tale che il sistema diventi

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \tilde{\lambda} y + \tilde{g}(x, y) \end{cases}$$

In questo nuovo sistema $\phi_t(\varepsilon, y) = (\varepsilon e^{-t}, y(t, \varepsilon, y))$, cioè orbite che partono con la stessa componente x mantengono la stessa componente x . Consideriamo come cambia la distanza tra y_0 e y_1 seguendo le orbite:

$$\frac{d}{dt} (y_1(t) - y_0(t)) = \dot{y}_1(t) - \dot{y}_0(t) = \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) + \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_1(t)) - \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_0(t)).$$

Per il teorema di Lagrange

$$|\tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_1(t)) - \tilde{g}(\varepsilon e^{-t}, y_0(t))| = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(\varepsilon e^{-t}, \xi(t)) |y_1(t) - y_0(t)|$$

con $\xi(t) \in (y_0(t), y_1(t))$. Sia ora $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $(x, y) \in D_\varepsilon$

$$\left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \right| \leq \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y_1(t) - y_0(t)) &\geq \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sqrt{\varepsilon^2 e^{-2t} + \xi(t)^2} |y_1(t) - y_0(t)| \stackrel{y_1(t), y_2(t) \in D_\varepsilon}{\geq} \\ &\geq \tilde{\lambda}(y_1(t) - y_0(t)) - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \varepsilon \sqrt{2} (y_1(t) - y_0(t)) = \\ &= \underbrace{\left(\tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \varepsilon \sqrt{2} \right)}_{>0 \text{ per } \varepsilon \in (0, \sqrt{2})} (y_1(t) - y_0(t)) > 0, \end{aligned}$$

dunque $y_1(t) - y_0(t)$ cresce, in particolare non possono entrambe convergere verso $(0, 0)$. \square

⁶è noto da analisi 2 che questa operazione non cambia le orbite del sistema

Sia $\bar{y} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ l'unica condizione iniziale tale che $(\varepsilon, \bar{y}) \in C_M$ e $\omega(\varepsilon, \bar{y}) = (0, 0)$. Si ha dunque che

$$W_{loc}^s(0, 0) \cap \{x > 0\} = \mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y}).$$

Ripetendo quanto fatto per $\{x < 0\}$ troviamo l'esistenza e unicità di W_{loc}^s .

Sappiamo che $W_{loc}^s(0, 0) \cap \{x > 0\} = \mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y})$ e per il metodo delle isocline (5.1) sappiamo che

$$\mathcal{O}^+(\varepsilon, \bar{y}) \subseteq \{y = h(x)\}$$

con $h(x)$ soluzione di

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y + g(x, y)}{-\lambda x + f(x, y)}.$$

Per la regolarità delle funzioni che definiscono h sappiamo che h è C^k , quindi effettivamente $W_{loc}^s \cap \{x > 0\}$ è una varietà C^k .

Osserviamo inoltre che $h'(0) = 0$, infatti

$$|h'(x)| \sim_{x \rightarrow 0^+} \left| -\frac{\mu}{\lambda} \frac{y}{x} \right| \leq \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{M}$$

per ogni $M > 1$, dunque passando al limite per $M \rightarrow +\infty$ troviamo $h'(0) = 0$. Questo mostra la tangenza di $W_{loc}^s \cap \{x > 0\}$ a $\{y = 0\}$ in $(0, 0)$. Ripetendo questi passaggi per l'altro semipiano troviamo finalmente la tesi. \square

6.2 Varietà stabili e instabili

Definizione 6.7 (Varietà stabile/instabile globale).

Definiamo le **varietà stabile/instabile globale** di x_0 come

$$\begin{aligned} W^s(x_0) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_0)) \\ W^u(x_0) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_0)) \end{aligned}$$

Osservazione 6.8.

Studiamo velocemente come W^s e W^u possono intersecarsi in \mathbb{R}^2 . Per l'unicità locale se si incontrano coincidono o si incontrano in un punto fisso, restituendo orbite omocline ed eterocline rispettivamente.

Per $d > 2$ il comportamento di W^s e W^u è più intricato.

Osservazione 6.9.

In generale W^s e W^u perdono alcune proprietà della struttura differenziale che hanno W_{loc}^s e W_{loc}^u .

Capitolo 7

Orbite periodiche

Lo studio delle orbite periodiche si riduce a capire se ci sono ed eventualmente trovarle esplicitamente.

7.1 Criteri di non esistenza differenziali

Intuitivamente se aumento o diminuisco l'area di una regione con il flusso, non posso avere orbite periodiche, perché altrimenti l'area dentro l'orbita si manterrebbe.

Proposizione 7.1 (Metodo di Bendixon-Dulec).

Consideriamo il sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ con $F \in C^1$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso e aperto. Se esiste $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 tale che

$$\operatorname{div}(hF)(x, y) = \left(\frac{\partial h f}{\partial x} + \frac{\partial h g}{\partial y} \right) (x, y)$$

ha segno costante in U allora non esistono orbite periodiche interamente contenute in U .

Dimostrazione.

Sia per assurdo Γ un orbita periodica contenuta in U e sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la sua parametrizzazione con $t \in [0, T]$. Indichiamo con $\tilde{U} \subseteq U$ la componente connessa di \mathbb{R}^2 limitata racchiusa da Γ . Senza perdita di generalità per il segno della divergenza

$$\begin{aligned} 0 &< \iint_{\tilde{U}} \operatorname{div}(hF)(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\tilde{U}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h f) + \frac{\partial}{\partial y} (h g) dx dy \right) \stackrel{\text{(G.G.)}}{=} \\ &= \int_{\Gamma^+} h f dy - h g dx = \\ &= \pm \int_0^T h(x(t), y(t)) (f(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - g(x(t), y(t)) \dot{x}(t)) dt \stackrel{(\dot{x}, \dot{y}) \equiv (f, g)}{=} 0, \end{aligned}$$

e questo mostra l'assurdo. \square

Proposizione 7.2 (Criterio con gradiente per inesistenza delle orbite periodiche).

Se $\dot{x} = F(x)$ con F di classe C^1 (anche in \mathbb{R}^d) e $F = \nabla I$ allora non esistono orbite periodiche.

Dimostrazione.

Supponiamo che esista $\Gamma \subseteq U$ orbita periodica e sia $\gamma(t)$ con $t \in [0, T]$ una curva che la parametrizza. Troviamo un assurdo svolgendo il seguente conto

$$\begin{aligned} 0 &= I(\gamma(T)) - I(\gamma(0)) = \int_0^T \frac{d}{dt} (I(\gamma(t))) dt = \\ &= \int_0^T \nabla I(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \stackrel{\gamma \text{ è orbita}}{=} F \\ &= \int_0^T F(\gamma(t)) \cdot F(\gamma(t)) dt = \\ &= \int_0^T \underbrace{\|F(\gamma(t))\|^2}_{\neq 0} dt > 0 \end{aligned}$$

dove $F(\gamma(t)) \neq 0$ perché l'orbita è periodica (e quindi non contiene punti fissi). \square

Formalizziamo ora l'idea che se il campo non ruota (o equivalentemente, se il campo è conservativo) allora non abbiamo orbite periodiche (se torno al punto di partenza il campo non compie lavoro)

Proposizione 7.3 (Metodo del rotore).

Consideriamo il sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ con $F \in C^1$. Se $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ su U aperto semplicemente connesso allora non esistono orbite periodiche interamente contenute in U .

Dimostrazione.

Consideriamo $\omega = f dx + g dy$. Per ipotesi, su U vale

$$d\omega = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy = 0,$$

cioè ω è chiusa su U . Poiché U è semplicemente connesso si ha che ω è esatta, dunque esiste $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $\omega = dI$, cioè $F = \nabla I$. Questo conclude per la proposizione precedente. \square

7.2 Teoria dell'indice di Poicaré nel piano

Consideriamo sistemi della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Definizione 7.4 (Indice di una curva).

Sia Γ una curva chiusa in \mathbb{R}^2 regolare (a tratti) semplice¹ che non contiene punti fissi.

Chiamiamo **indice di Γ**

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}.$$

Osservazione 7.5.

Quando $f \neq 0$ osserviamo che

$$\frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2} = d \left(\arctan \left(\frac{g}{f} \right) \right),$$

¹la condizione di semplicità serve per evitare che tutto venga contato con arbitrarie molteplicità.

quindi stiamo contando quante volte F gira seguendo Γ in senso diretto. Più precisamente

$$I(\Gamma) = \#\{\text{giri di } F \text{ lungo } \Gamma \text{ in senso antiorario}\} - \#\{\text{giri di } F \text{ in senso orario}\}$$

Proposizione 7.6 (Proprietà dell'indice).

Valgono le seguenti affermazioni

- Sia $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ una famiglia continua di curve chiuse regolari a tratti che non contengono punti fissi (le curve sono $\text{Imm } \gamma_s = \Gamma_s$). Allora $I(\Gamma_s)$ è costante in s .
- Siano Γ_1 e Γ_2 curve chiuse regolari a tratti che non contengono punti fissi tali che $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ ma le regioni da loro racchiuse si intersecano nel vuoto², allora

$$I(\Gamma_1 + \Gamma_2) = I(\Gamma_1) + I(\Gamma_2),$$

dove $\Gamma_1 + \Gamma_2$ è la curva dove vengono percorse in successione le due e i tratti in comune vergono percorsi una volta in un senso e una volta nel senso opposto³.

Dimostrazione.

Vedi Geometria 2. □

Definizione 7.7 (Indice di un punto fisso).

Sia (x_0, y_0) un punto fisso isolato di F . L'indice di (x_0, y_0) è dato dall'indice di una qualsiasi curva chiusa regolare a tratti semplice che lo racchiude e che non racchiude altri punti fissi.

Proposizione 7.8 (Indici di alcuni punti fissi).

Valgono le seguenti affermazioni:

- $I(\text{nodo}) = I(\text{fuoco}) = +1$
- $I(\text{sella}) = -1$
- Se Γ è un'orbita periodica $I(\Gamma) = +1$
- Se Γ è una curva regolare a tratti semplice che racchiude solo punti fissi isolati allora

$$I(\Gamma) = \sum_{\substack{P \text{ punto fisso} \\ P \text{ racchiuso da } \Gamma}} I(P).$$

Dimostrazione.

Per i primi due punti la tesi segue riportandoci al caso lineare standard tramite il teorema di linearizzazione (3.3).

Il terzo punto è geometricamente evidente date le possibili forme di orbite periodiche in \mathbb{R}^2 .

Il quarto punto segue dalle proprietà dell'indice (7.6)⁴. □

Osservazione 7.9.

Un'orbita periodica racchiude necessariamente punti fissi i cui indici sommano a 1. Per esempio un'orbita periodica non può racchiudere solo una sella.

²per regione racchiusa intendo la componendo connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ limitata

³Pensa alla somma di 1-cicli singolari

⁴Vedi teorema dei residui.

7.3 Criteri di esistenza di orbite periodiche

Per trovare esplicitamente orbite periodiche possiamo provare a passare alle coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases}$$

dove nel secondo sistema dobbiamo ricordarci $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Per semplicità scriviamo

$$\begin{cases} \dot{\rho} = h(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = \ell((\rho, \theta)) \end{cases}$$

Un'orbita periodica può essere della forma particolare $\{\rho = \text{cost.}\}$.

Proposizione 7.10 (Criterio polare esistenza orbita periodica).

Dato un sistema in coordinate polari, se esiste $c > 0$ tale che per ogni θ valgono $h(c, \theta) = 0$ e $\ell(c, \theta) \neq 0$ allora $\{\rho = c\}$ è invariante⁵.

Dimostrazione.

Segue dal criterio sull'invarianza di curve di livello (1.10) unito all'assenza di punti fissi. \square

Un problema cruciale di questo risultato è che la minima perturbazione annichila le ipotesi.

Definizione 7.11 (Sezione locale di data larghezza).

Sia $y \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(y) \neq 0$. Se $\ell(y) = \text{Span}(v) + y$ è la retta passante per y ortogonale a $F(y)$, fissato un $k \in (0, 1)$ definiamo la **sezione locale di larghezza k** per y come⁶

$$S_k(y) = \text{comp. conn. contenente } y \text{ di } \left\{ z \in \ell(y) \mid \left| \widehat{\sin(v, F(z))} \right| > k \right\}.$$

Lemma 7.12 (Rettificazione locale).

Dato $y \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(y) \neq 0$ consideriamo la parametrizzazione di $\ell(y)$ data da $\gamma(u) = y + uv$ al variare di $u \in \mathbb{R}$. Affermiamo che esistono V e U intorni di y e 0 rispettivamente e un diffeomorfismo $\psi : U \rightarrow V$ tale che $\psi(s, u) = \phi_s(\gamma(u))$.

Definizione 7.13 (Rettangolo di flusso).

Sia $\psi : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo di rettificazione locale. Fissiamo $\sigma > 0$, $\chi > 0$ tali che

$$N_{\sigma, \chi} = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| \leq \sigma, |u| \leq \chi\} \subseteq U.$$

Definiamo il **rettangolo di flusso** per questa scelta di σ e χ come $\mathcal{N}_{\sigma, \chi} = \phi(N_{\sigma, \chi})$.

Lemma 7.14.

Se $\mathcal{N}_{\sigma, \chi}$ è un rettangolo di flusso allora $\mathcal{N}_{\sigma, \chi}$ è un intorno di y tale che per ogni $z \in \mathcal{N}_{\sigma, \chi}$ esiste $\bar{t}(z) \in (-\sigma, \sigma)$ tale che $\phi_{\bar{t}}(z) \in S_k(y)$.

Teorema 7.15 (Poincaré-Bendixon).

Sia $\dot{x} = F(x)$ con $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che esista $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto non vuoto che non contiene punti fissi e per il quale esiste $x_0 \in D$ tale che per qualche $t_0 > 0$ abbiamo $\phi_t(x_0) \in D$ per ogni $t \geq t_0$.

Allora $\Gamma = \omega(x_0) \subseteq D$ è un'orbita periodica.

⁵e quindi $\{x^2 + y^2 = c^2\}$ è periodica

⁶dati due vettori v e w , con $\widehat{v, w}$ intendiamo l'angolo minore tra essi nel piano generato da v e w

Dimostrazione.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ per cui esiste $t_0 > 0$ tale che $\phi_t(x_0) \in D$ per ogni $t \geq t_0$. Allora $\omega(x_0)$ è non vuoto, invariante e $\omega(x_0) \subseteq D$ per (1.18). Scelto $x \in \omega(x_0) \subseteq D$ allora $\mathcal{O}^+(x) \subseteq \omega(x_0)$ e quindi $\omega(x) \subseteq \omega(x_0)$. Sia $y \in \omega(x)$

Claim: $\#(S_k(y) \cap \mathcal{O}^+(x)) = 1$.

Dimostrazione del claim.

Mostriamo prima che l'intersezione è non vuota e poi mostriamo che contiene un'unico punto.

$\neq \emptyset$ Per definizione di $\omega(x)$ esiste una successione monotona $t_k \nearrow +\infty$ tale che $\phi_{t_k}(x) \rightarrow y$. Poiché $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}$ è un intorno di y , per definizione di convergenza esiste $\bar{t} > \sigma$ tale che $\phi_{\bar{t}}(x) \in \mathcal{N}_{\sigma,\chi}$. Per il lemma precedente esiste allora $\hat{t} \in (-\sigma, \sigma)$ tale che $\phi_{\hat{t}}(\phi_{\bar{t}}(x)) \in S_k(y)$. Ponendo $\hat{t} + \bar{t} = \tilde{t}$ esiste $\tilde{t} > 0$ tale che $\phi_{\tilde{t}}(x) \in S_k(y)$.

$\# = 1$ Supponiamo per assurdo che esistano $x_1, x_2 \in S_k(y) \cap \mathcal{O}^+(x) \subseteq \omega(x_0)$ distinti. Per definizione di ω -limite esistono $\tau_j^1 \nearrow +\infty$ e $\tau_j^2 \nearrow +\infty$ tali che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{\tau_j^1}(x_0) = x_1, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{\tau_j^2}(x_0) = x_2.$$

Esistono dunque per il lemma $\tilde{\tau}_j^1$ e $\tilde{\tau}_j^2$ tali che $\phi_{\tilde{\tau}_j^i}(x_0) \in S_k(y)$. Siano U_1 e U_2 intorni di x_1 e x_2 disgiunti. Per j abbastanza grande abbiamo che $\phi_{\tilde{\tau}_j^i}(x_0) \in U_i$.

Poiché sia $\tilde{\tau}_j^1$ che $\tilde{\tau}_j^2$ vanno a $+\infty$, esistono $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ tali che

$$\phi_{\xi_1}(x_0) \in U_1, \quad \phi_{\xi_2}(x_0) \in U_2, \quad \phi_{\xi_3}(x_0) \in U_1.$$

Sia $\tilde{\Gamma}$ la curva chiusa data da

$$\tilde{\Gamma} = \{\alpha \phi_{\xi_1}(x_0) + (1 - \alpha) \phi_{\xi_2}(x_0) \mid \alpha \in [0, 1]\} \cup \bigcup_{s \in (\xi_1, \xi_2)} \phi_s(x_0).$$

Per definizione di $S_k(y)$ e per unicità locale si ha che $\mathcal{O}^+(\phi_{\xi_2}(x_0))$ è contenuto nella componente连通的 limitata definita da $\tilde{\Gamma}$, ma questo è assurdo perché esiste $\Delta t = \xi_3 - \xi_2$ tale che $\phi_{\Delta t}(\phi_{\xi_2}(x_0)) = \phi_{\xi_3}(x_0)$ ma per definizione di $S_k(y)$ un'orbita che parte da $S_k(y)$ torna a $S_k(y)$ dal lato opposto rispetto a quello di partenza.

[INSERISCI IL DISEGNO]

□

Sia $y \in \omega(x)$ e sia $\tilde{t} > 0$ tale che $\phi_{\tilde{t}}(x) \in S_k(y)$ (esiste per il primo punto del claim). Sappiamo che esiste $\tau > \tilde{t}$ tale che $\phi_\tau(x) \in \mathcal{N}_{\sigma,\chi}$ (convergenza di successioni). Esiste dunque $\tilde{\tau} \in (-\sigma, \sigma)$ tale che $\phi_{\tau+\tilde{\tau}}(x) \in S_k(y)$ (lemma) e per il secondo punto del claim $\phi_{\tau+\tilde{\tau}}(x) = \phi_{\tilde{t}}(x)$, dunque $\Gamma = \mathcal{O}(x)$ è periodica.

Osserviamo che $\Gamma \subseteq \omega(x_0)$ per costruzione. L'altro contenimento segue come segue: Per definizione $x = \lim_j \phi_{t_j}(x_0)$. Se $z = \phi_s(x)$ allora per continuità del flusso $z = \lim_j \phi_{t_j+s}(x_0)$. □

Osservazione 7.16.

Osserviamo che D come nel teorema di Poicaré-Bendixon non può essere semplicemente connesso per la teoria dell'indice.

Fatto 7.17 (Poincaré-Bendixon generale).

Se per x_0 esiste $t_0 > 0$ tale che $\phi_t(x_0) \in D$ per ogni $t \geq t_0$ con D non vuoto e compatto allora $\omega(x_0)$ può essere

- punto fisso
- orbita periodica
- unione di punti fissi e orbite eterocline
- punto fisso e orbita omoclinica

Esempio 7.18.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon g(x, y) \end{cases}$$

Se $f, g \in C^1$ allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un orbita periodica.

Proviamo a definire

$$D = \{\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$$

Osserviamo che nel caso non perturbato, per $\rho < 1$ allora $\dot{\rho} > 0$ mentre per $\rho > 1$ allora $\dot{\rho} < 0$.

Sia $M = \max \left\{ \left\| f|_{\{\rho \leq 5\}} \right\|_\infty, \left\| g|_{\{\rho \leq 5\}} \right\|_\infty \right\}$ (dove 5 è un qualche valore “grosso”).

Proviamo a definire $D = \left\{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \right\}$.

$\dot{\rho}|_{\rho=\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} + \varepsilon f(\frac{1}{2}, \theta) \geq \frac{3}{8} - \varepsilon M$ e questo è maggiore di 0 per $\varepsilon < \frac{3}{8M}$. Similmente per $\dot{\rho}|_{\rho=2}$ chiediamo $\varepsilon < \frac{6}{M}$. Cerchiamo allora stime tali che $\dot{\theta}|_{\left\{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2 \right\}} \neq 0$ e dopo conti simili troviamo che $\varepsilon_0 = \frac{3}{8M}$ rispetta tutte le condizioni volute.

Capitolo 8

Esempi di sistemi dinamici continui

8.1 Alcuni sistemi meccanici

8.1.1 L'oscillatore armonico

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} = -kx$$

con $k > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Studiamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $F(x, y) = (y, -kx)$.

- **Punti fissi:** $(y, -kx) = (0, 0) \implies (x, y) = (0, 0)$, quindi abbiamo un solo punto fisso.
- Questo è evidentemente un sistema meccanico con $V(x) = \frac{k}{2}x^2$, da cui $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2$ è l'Hamiltoniana.
- Sia $E_c = \{\frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2 = c\}$. Questi insiemi sono evidentemente ellissi. Descrivono veramente orbite periodiche? Sì, infatti se per assurdo non fossero orbite periodiche, poiché le orbite che cominciano in uno di questi insiemi sono costrette a rimanervi, per compattezza di E_c dovremmo avere

$$\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) \in E_c$$

per $x_0 \in E_c$, ma questo significa che ℓ sarebbe un punto fisso, che è assurdo perché l'unico punto fisso è $(0, 0)$.

8.1.2 Pendolo semplice

L'equazione in esame è

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta.$$

Riformuliamo in

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \psi \\ \dot{\psi} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{cases}$$

Punti fissi:

$\psi = 0$ e $\sin \theta = 0$, dunque

$$pt. fix = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Integrale primo:

Anche questo è un sistema meccanico, che quindi ammette Hamiltoniana

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta,$$

dunque gli insiemi di livello che ci interessano sono

$$E_c = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = c \right\}.$$

Osserviamo che

$$E(k\pi, 0) = -\frac{g}{\ell} \cos(k\pi) = (-1)^{k+1} \frac{g}{\ell} \implies E(2\pi, 0) = E(-2\pi) = E(0, 0).$$

$$E_{-\frac{g}{\ell}} = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = -\frac{g}{\ell} \right\} \implies \psi^2 = -2\frac{g}{\ell}(1 - \cos \theta)$$

$$E_{\frac{g}{\ell}} = \left\{ \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = \frac{g}{\ell} \right\} \implies \psi^2 = 2\frac{g}{\ell}(1 + \cos \theta)$$

Se $c \in (-\frac{g}{\ell}, \frac{g}{\ell})$ troviamo orbite periodiche contenute dentro le ordine dei primi due. Per $c \notin [-\frac{g}{\ell}, \frac{g}{\ell}]$ abbiamo invece ordine tutte sopra o tutte sotto.

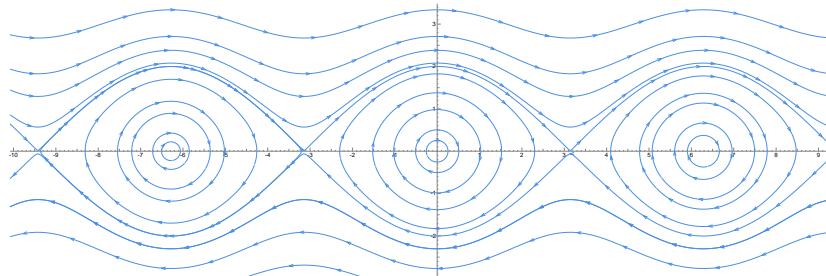


Figura 8.1: Diagramma di fase del pendolo per $\frac{g}{\ell} = 1$

8.2 Dinamica di Lotka-Volterra

Possiamo modellare una singola popolazione in modo semplice con l'equazione (detta *equazione logistica*)

$$\dot{x} = x(c - ax), \quad a, c > 0.$$

Ponendo $F(x) = xc - ax^2$ si ha che $F(x) = 0 \implies x = 0$ oppure $x = c/a$.

Inserendo nel sistema una seconda popolazione che più interagire con la prima troviamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(c_1 - a_1x - b_1y) \\ \dot{y} = y(c_2 - a_2y - b_2x) \end{cases}.$$

Osserviamo che gli assi sono invarianti. A meno di riscalamento possiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - \alpha y) \\ \dot{y} = y(1 - \beta x - y) \end{cases}$$

Troviamo come punti fissi $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e

$$P = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1} \right).$$

Osserviamo che $P \in \{x > 0, y > 0\}$ se e solo se $\alpha > 1$ e $\beta > 1$ o $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

Calcoliamo ora $\mathcal{D}F$

$$\mathcal{D}F = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & 1 - \beta x - 2y \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{D}F((0, 0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}F((1, 0)) &= \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}F((0, 1)) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -\beta & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}F(P) &= \frac{1}{\alpha\beta - 1} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha(1 - \alpha) \\ \beta(1 - \beta) & 1 - \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 8.1.

Consideriamo il modello Lotka-Volterra dato da $\alpha = 2$ e $\beta = 2$, cioè

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(1 - 2x - y) \end{cases}$$

Per quanto detto sopra i punti fissi sono

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

che nominiamo rispettivamente P_0 , P_1 , P_2 e P_3 .

Segue che P_0 è una stella instabile, P_1 e P_2 sono nodi impropri stabili e P_3 è una sella. Gli autovettori di $\mathcal{D}F(P_3) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sono $v_+ = (1 - 1)^T$ e $v_- = (1 1)^T$, corrispondenti agli autovalori $1/3$ e -1 rispettivamente. Graficando il sistema possiamo effettivamente notare che le varietà instabili e stabili hanno come giacitura della retta tangente in P_3 proprio le rette generate da questi vettori.

Esempio 8.2 (Lotka-Volterra per preda-predatore).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-1 + y) \\ \dot{y} = y(1 - x) \end{cases}$$

I punti fissi sono $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Osserviamo anche che gli assi e tutto il primo quadrante sono insiemi invarianti. Consideriamo allora solo il primo quadrante che tanto è il

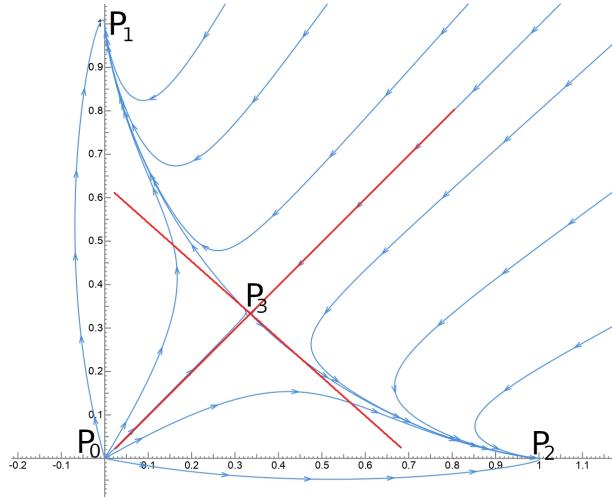


Figura 8.2: Diagramma di fase di questo sistema.
In rosso sono indicati $P_3 + \text{Span}(v_+)$ e $P_3 + \text{Span}(v_-)$.

caso interessante per questo modello.

Studiamo lo Jacobiano

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ -y & 1-x \end{pmatrix} \implies DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad DF(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0, 0) (0, 0) è una sella. Si ha che

$$E^s(0, 0) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E^u(0, 0) = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e per il teorema delle varietà stabili locali (6.2) sappiamo che $W^s(0, 0)$ e $W^u(0, 0)$ locali esistono e sono uniche. Per l'invarianza degli assi in realtà $W^{u/s}(0, 0) = E^{u/s}(0, 0)$.

(1, 1) (1, 1) è di tipo centro e quindi non è iperbolico. Una possibile funzione di Lyapunov potrebbe avere forma

$$V(x, y) = a(x - 1)^{2n} + b(y - 1)^{2m}, \quad a, b > 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Un altro metodo potrebbe essere studiare il punto passando a coordinate polari centrate in (1, 1).

Un'ulteriore possibilità potrebbe essere studiare il segno del campo di vettori, ma poiché (1, 1) è di tipo centro non è molto utile.

Trovare insiemi invarianti non è molto facile in questo caso.

Possiamo provare il metodo delle isocline

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{y(1-x)}{x(-1+y)} \\ y(x_0) = y_0 \text{ t.c. } x_0(-1 + y_0) \end{cases}$$

È chiaro che possiamo trarre qualche beneficio dal metodo delle isocline perché l'equazione differenziale in questione è separabile

$$\frac{-1+y}{y} dy = \frac{1-x}{x} dx \implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{-1+y}{y} dy = \int_{x_0}^x \frac{1-x}{x} dx$$

$$y(x) - \log(y(x)) = \log y_0 - y_0 + \log x - x - \log x_0 + x_0.$$

Non posso scrivere esplicitamente $y(x)$ = “qualcosa”, ma comunque posso studiare l’equazione, infatti, poiché $\{y = y(x)\}$ è invariante (5.1) sappiamo che c’è un insieme invariante. Per identificarlo definiamo

$$I(x, y) = y - \log y + x - \log x.$$

Segue che¹

$$I|_{I=c} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)x(-1 + y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)y(1 - x) = 0,$$

cioè I è un integrale primo.

$$\nabla I(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x} \\ 1 - \frac{1}{y} \end{pmatrix} |_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$H_I(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} |_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{minimo locale.}$$

Troviamo dunque che localmente le traiettorie sono curve semplici chiuse tali che $(1, 1)$ si trova nella componente连nessa limitata tra le due che hanno come bordo le traiettorie.

Per trovare il verso di percorrenza possiamo usare il segno del campo.

Esempio 8.3.

Un esempio semplice per i parametri del modello sopra è

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - y - x) \end{cases} \implies F(x, y) = (x(3 - x - 2y), y(2 - y - x)).$$

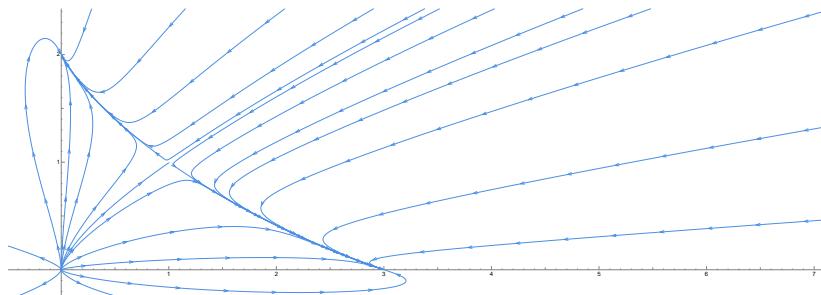


Figura 8.3: Diagramma di fase per questo esempio di Lotka-Volterra.

I punti fissi sono

$$(0, 0), (0, 2), (3, 0), (1, 1)$$

e la matrice Jacobiana di F è

$$\mathcal{D}F(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Valutando lo Jacobiano nei punti fissi troviamo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{nodo instabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{nodo stabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{nodo stabile}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{sella}}.$$

¹ pensando $c = \log y_0 - y_0 - \log x_0 + x_0$

8.3 Sistema di Lorenz

Un sistema storicamente importante è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}, \quad r, b, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Osserviamo che i punti fissi del sistema corrispondono a

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix},$$

dove P_{\pm} è definito solo per $r \geq 1$. Osserviamo inoltre che

$$\mathcal{D}F = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Studiamo la stabilità di P_0 :

Notiamo che

$$\mathcal{D}F(P_0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

dunque $(0, 0, 1)$ è sempre un autovettore relativo all'autovalore $-b$ per il sistema linearizzato vicino a P_0 . Il segno di $-b$ ci dice che $\dim E^s(P_0) \geq 1$. Studiamo la stabilità delle altre direzioni al variare di r

- | | |
|----------------|---|
| $r \in (0, 1)$ | In questo caso gli autovaori sono entrambi con parte reale negativa, quindi per Hartman Grobman (3.3) P_0 è asintoticamente stabile e $\dim E^s(P_0) = 3$. |
| $r > 1$ | In questo caso gli autovalori sono reali di segno opposto dunque il punto fisso è instabile per Hartman Grobman (3.3) e $\dim E^s(P_0) = 2$, $\dim E^u(P_0) = 1$. |
| $r = 1$ | In questo caso P_0 non è iperbolico dunque per predicare sulla stabilità proviamo a cercare una funzione di Lyapunov. Tentiamo una di questa forma |

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2).$$

Chiaramente V è di classe C^1 e $V(P) > V(P_0) = 0$ per ogni $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$. Cerchiamo delle condizioni sui k_i in modo tale che $\dot{V}(P) \leq 0$ per ogni $P \neq P_0$. Dopo qualche conto si può verificare che

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2 \right)$$

è una funzione di Lyapunov (non stretta). Per il primo teorema di Lyapunov (2.7) segue che P_0 è stabile.

Per il criterio di La Salle (2.8) sappiamo che $\{\dot{V} = 0\} = \{x = y, z = 0\}$ contiene tutti gli ω -limiti e che questi sono insiemi invarianti. Poiché

$$F|_{\{x=y, z=0\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

si ha che $\{P_0\}$ è l'unico insieme invariante contenuto in $\{\dot{V} = 0\}$, dunque tutti gli ω -limiti sono $\{P_0\}$. Questa condizione insieme alla stabilità di P_0 mostra che P_0 è asintoticamente stabile.

Attraverso conti non visti a lezione sappiamo che se $\sigma > b + 1$ e $r > \bar{r}$ per un qualche $\bar{r} > 1$ si ha che $\dim E^s(P_\pm) = 1$ e $\dim E^u(P_\pm) = 2$. Le traiettorie dunque approcciano P_+ e P_- “lateralmente” e “trasversalmente” si allontanano lungo una spirale.

Sempre attraverso conti non visti a lezione individuiamo la funzione

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2),$$

il cui dot è dato da

$$\dot{W}(x, y, z) = -\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2).$$

Osserviamo che, fissato $k \in \mathbb{R}^+$ possiamo trovare $c \in \mathbb{R}$ tale che $\dot{W}|_{W \geq c} \leq -\sigma k < 0$: basta prendere c grande abbastanza in modo tale che i punti fuori l'ellissoide $\{W = c\}$ abbiano coordinate grandi abbastanza da forzare la disuguaglianza voluta, che possiamo fare per il segno dei termini in \dot{W} .

Osserviamo che se $y_0 \notin \{W \geq c\}$ allora

$$W(\phi_t(y_0)) - W(y_0) = \int_0^t \underbrace{\frac{d}{ds}W(\phi_s(y_0))}_{=\dot{W}} ds \leq -k\sigma t$$

finché $\phi_t(y_0)$ continua ad essere fuori l'ellissoide. Segue dunque che definitivamente $\phi_t(y_0)$ cade nell'ellissoide.

Questo ragionamento mostra che tutti i punti ammettono ω -limite, ma questo non può in generale essere un punto fisso (sono instabili) o un'orbita periodica (perché assenti dal sistema²). Si scopre che l' ω -limite generale corrisponde ad un frattale e per questo motivo viene detto *attrattore strano*.

²questa affermazione non è stata mostrata

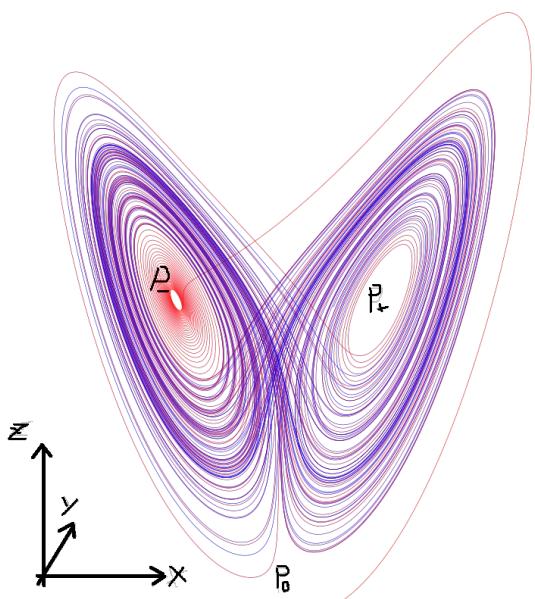


Figura 8.4: Qualche orbita del sistema di Lorenz dove sono stati contrassegnati i punti fissi. Immagine originariamente da https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system e modificata da me.

Parte II

Sistemi discreti

Appendice A

Riconoscimenti e risorse

Per realizzare le immagini di sistemi bidimensionali ho usato il sito <https://paolini.github.io/funplot/>.