Moduli spaces and Grassmannians

Candidato:
Sorce Francesco

Relatore:
Talpo Mattia

Università di Pisa

Anno accademico 2023/24

12 Luglio 2024

Grassmanniane

Università di Pisa

Grassmanniane

Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}.$$

Grassmanniane

Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}\,.$$

Esempi:

- Spazi proiettivi $\mathrm{Gr}'(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$

Grassmanniane

Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}.$$

Esempi:

- Spazi proiettivi $\mathrm{Gr}'(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$
- $\mathrm{Gr}'(2, 4)$ parametrizza rette in $\mathbb{P}^3$

Scrittura con quozienti

Nota: $\mathrm{Gr}'(n-k,n) = \{\ker A \mid A \in \mathcal{M}(k,n),\ \mathrm{rnk}\, A = k\}$.

Grassmanniane con quozienti

$$\mathrm{Gr}(k,n,\mathbb{K}) = {\{A \in \mathcal{M}(k,n,\mathbb{K}) \mid \mathrm{rnk}\, A = k\}}\big/{\sim}$$

con $A \sim B \iff \ker A = \ker B \iff \exists P \in \mathrm{GL}_k$ t.c. $A = PB$.

$$\mathrm{Gr}'(k,n,\mathbb{K}) \cong \mathrm{Gr}(n-k,n,\mathbb{K})$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Questo insieme è uno spazio?

Scrittura in carte

Scegliendo un multiindice $I = (i_1, \cdots, i_k),\ 1 \leq i_r \leq n$

$$\mathrm{Gr}_I(k,n) = \{[A] \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid \det A_I \neq 0\}\,.$$

cioè, i sottospazi supplementari a $\mathrm{Span}\left(\{e_{i_r} \mid 1 \leq r \leq k\}\right)$.

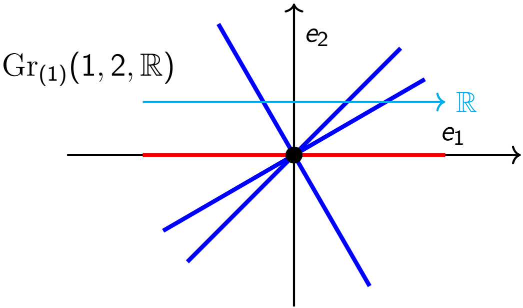
Università di Pisa

Scrittura in carte

Scegliendo un multiindice $I = (i_1, \cdots, i_k),\ 1 \leq i_r \leq n$

$$\mathrm{Gr}_I(k,n) = \{[A] \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid \det A_I \neq 0\}\,.$$

cioè, i sottospazi supplementari a $\mathrm{Span}\left(\{e_{i_r} \mid 1 \leq r \leq k\}\right)$.



Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \cdots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array}\right)$$

Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \cdots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array}\right)$$

Si può mostrare che $\mathrm{Gr}_I(k, n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{k(n-k)}$.

Università di Pisa

Scritta in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \cdots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array}\right)$$

Si può mostrare che $\mathrm{Gr}_I(k, n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{k(n-k)}$.

Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ abbiamo varietà liscia.
Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ abbiamo varietà analitica complessa.

UNIVERSITÀ DI PISA

Ma stiamo facendo geometria algebrica!

Ma stiamo facendo geometria algebrica!

Vogliamo delle equazioni

Mappa di Plücker

Siano $\omega(k,n)$ i multiindici ordinati, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ per $I = (i_1, \cdots, i_k)$.

Mappa di Plücker

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(k,n) & \longrightarrow & \bigwedge^k \mathbb{K}^n \\ A & \longmapsto & \sum_{I \in \omega(k,n)} \det A_I e_I \end{array}$$

Mappa di Plücker

Siano $\omega(k,n)$ i multiindici ordinati, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ per $I = (i_1, \cdots, i_k)$.

Mappa di Plücker

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(k,n) & \longrightarrow & \bigwedge^k \mathbb{K}^n \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{I \in \omega(k,n)} \det A_I e_I \end{array}$$

Iniettività a meno di scalare

$\operatorname{rnk} A < k$ se e solo se $\phi(A) = 0$.
Se $\operatorname{rnk} A = k$ allora $\ker A = \ker B$ se e solo se $\phi(A) = \lambda\phi(B)$ per $\lambda \neq 0$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Embedding di Plücker

Embedding di Plücker

$$\mathrm{Pl}: \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] & \longmapsto & [\det A_I \mid I \in \omega(k,n)] \end{array}$$

Embedding di Plücker

Embedding di Plücker

$$\mathrm{Pl} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] & \longmapsto & [\det A_I \mid I \in \omega(k,n)] \end{array}$$

Grassmanniane sono una varietà

L'immagine di ϕ è un cono algebrico e un chiuso di Zariski di $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$.

Università di Pisa

Embedding di Plücker

Embedding di Plücker

$$\mathrm{Pl}: \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] & \longmapsto & [\det A_I \mid I \in \omega(k,n)] \end{array}$$

Grassmanniane sono una varietà

L'immagine di ϕ è un cono algebrico e un chiuso di Zariski di $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$.

In particolare $\mathrm{Gr}(k,n)$ è anche uno schema proiettivo.

Spazi di moduli

Problema di moduli

Problema di classificazione geometrico

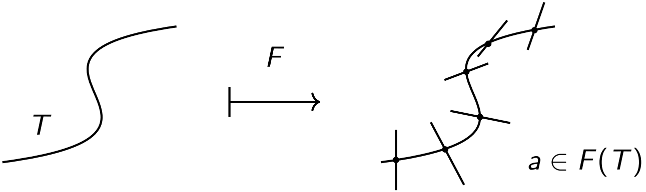
Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi "ragionevolmente".

Problema di moduli

Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi "ragionevolmente".

Sia $F(T)$ l'insieme delle **famiglie** di oggetti parametrizzate da T a meno di isomorfismo



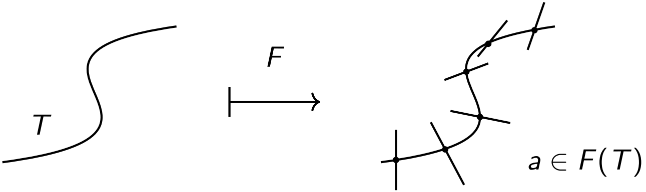
Università di Pisa

Problema di moduli

Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi "ragionevolmente".

Sia $F(T)$ l'insieme delle **famiglie** di oggetti parametrizzate da T a meno di isomorfismo



Un **problema di moduli** è un funtore $F : \mathrm{Sch}/S^{op} \to \mathrm{Set}$

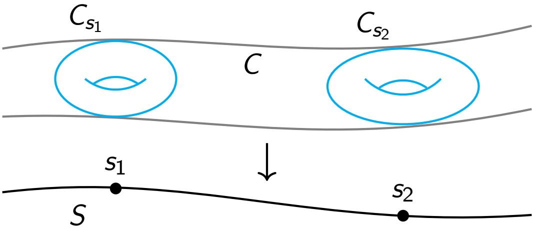
Università di Pisa

Esempio di problema di moduli

Una **famiglia di curve lisce di genere** g su uno schema S è un morfismo liscio, proprio e finitamente presentato $C \to S$ tale che ogni fibra C_s è una curva liscia connessa e propria di genere g.

$$F_{M_g} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Sch}/\mathbb{C}^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ S & \longmapsto & \{\text{famiglia di curve lisce di genere } g \text{ su } S\}/\sim \\ T \to S & \longmapsto & (C \to S) \mapsto (C_T \doteqdot C \times_S T \to T) \end{array}$$

dove due famiglie $C \to S$ e $C' \to S$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo tra C e C' compatibile con le mappe verso S.



Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.

Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.
- **grezzo** se
  - ogni famiglia induce un morfismo verso M (fissiamo $F \to h_M$ naturale)
  - $M(\mathbb{K}) \leftrightarrow F(\operatorname{Spec}\mathbb{K})$ per ogni campo algebricamente chiuso
  - M è universale ($F \to h_N$ si fattorizza in $F \to h_M \to h_N$).

Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.
- **grezzo** se
  - ogni famiglia induce un morfismo verso M (fissiamo $F \to h_M$ naturale)
  - $M(\mathbb{K}) \leftrightarrow F(\operatorname{Spec}\mathbb{K})$ per ogni campo algebricamente chiuso
  - M è universale ($F \to h_N$ si fattorizza in $F \to h_M \to h_N$).

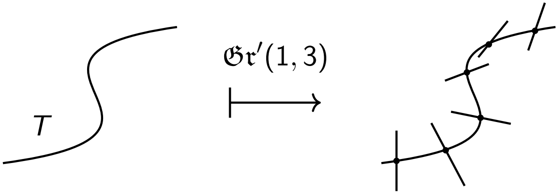
Esempio: F_{M_g} ammette spazio di moduli grezzo ma non fine.

UNIVERSITÀ DI PISA

Problema di moduli delle Grassmanniane

È naturale aspettarsi che $\mathrm{Gr}'(k,n)$ sia uno spazio di moduli per

$$\mathfrak{Gr}'(k,n): \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{F} \text{ sottofibrato vettoriale di } \mathcal{O}_T^n \text{ di} \\ \text{rango } k \text{ t.c. } \mathcal{O}_T^n/\mathcal{F} \text{ loc. libero} \end{array} \right\} \\ f: S \to T & \longmapsto & \mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F} \end{array}$$



UNIVERSITÀ DI PISA

Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}'(n-k,n) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Gr}(k,n) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathfrak{Gr}'(n-k,n) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathfrak{Gr}(k,n)
\end{tikzcd}
$$

Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}'(n-k,n) & \cong & \mathrm{Gr}(k,n) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathfrak{Gr}'(n-k,n) & \cong & \mathfrak{Gr}(k,n) \end{array}$$

$$\mathfrak{Gr}(k,n) : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \{\alpha : \mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow Q\}_{/\sim} \\ f : S \to T & \longmapsto & (\alpha : \mathcal{O}_T^n \to Q) \mapsto (f^*\alpha : \mathcal{O}_S^n \to f^*Q) \end{array}$$

dove Q fibrato vettoriale su T di rango k e $\alpha \sim \beta \iff \ker \alpha = \ker \beta$.

Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}'(n-k,n) & \cong & \mathrm{Gr}(k,n) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\mathfrak{Gr}'(n-k,n) & \cong & \mathfrak{Gr}(k,n)
\end{array}
$$

$$
\mathfrak{Gr}(k,n) : \begin{array}{ccc}
(\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\
T & \longmapsto & \{\alpha : \mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow Q\}/_{\sim} \\
f : S \to T & \longmapsto & (\alpha : \mathcal{O}_T^n \to Q) \mapsto (f^*\alpha : \mathcal{O}_S^n \to f^*Q)
\end{array}
$$

dove Q fibrato vettoriale su T di rango k e $\alpha \sim \beta \iff \ker \alpha = \ker \beta$.

$$\mathfrak{Gr}(k,n)(\mathrm{Spec}\,\mathbb{K}) \cong \left\{\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^k\right\}/_{\sim} = \mathrm{Gr}(k,n)(\mathbb{K}).$$

Università di Pisa

Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h_\bullet"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] & h_U \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & G \arrow[d] \\
T \arrow[r, "h_\bullet"] & h_T \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

$\{G_i \to F\}$ ricoprimento quando gli U_i coprono T.

Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h_\bullet"] \arrow[d, phantom, "\cap" description, "|"] & h_U \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & G \arrow[d] \\ T \arrow[r, "h_\bullet"] & h_T \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

$\{G_i \to F\}$ ricoprimento quando gli U_i coprono T.

Sottofuntori aperti principali di $\mathfrak{Gr}(k,n)$

$$\mathfrak{Gr}_I(k,n) : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ \mathcal{O}_T^n \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q \mid \mathcal{O}_T^k \xrightarrow{\alpha_I} Q \text{ surgettiva} \right\}\big/\sim \end{array}$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h_\bullet"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & h_U \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & G \arrow[d] \\
T \arrow[r, "h_\bullet"] & h_T \arrow[r] & F
\end{tikzcd}
$$

$\{G_i \to F\}$ ricoprimento quando gli U_i coprono T.

Sottofuntori aperti principali di $\mathfrak{Gr}(k, n)$

$$
\mathfrak{Gr}_I(k,n) : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ \mathcal{O}_T^n \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q \mid \mathcal{O}_T^k \xrightarrow{\alpha_I} Q \text{ surgettiva} \right\} \Big/ \sim \end{array}
$$

Dato T e $h_T \to \mathfrak{Gr}(k,n) \leftrightarrow [\alpha] \in \mathfrak{Gr}(k,n)(T)$, abbiamo

$$U_I = T \setminus (\mathrm{Supp}\,(\mathrm{coker}\,(\alpha_I))).$$

Sono anche un ricoprimento.

Fasci di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $$F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

Università di Pisa

Fasci di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $\qquad F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$

Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se F e G fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i\in J}$ e $\{G_i\}_{i\in J}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \to G_i, \qquad f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j},$$

esiste $f : F \to G$. Se f_i isomorfismo per ogni i allora f isomorfismo.

Fasci di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $$F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se F e G fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i \in J}$ e $\{G_i\}_{i \in J}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \to G_i, \qquad f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

esiste $f : F \to G$. Se f_i isomorfismo per ogni i allora f isomorfismo.

- h_X è un fascio di Zariski.

Fasci di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $$F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se F e G fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i \in J}$ e $\{G_i\}_{i \in J}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \to G_i, \qquad f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

esiste $f : F \to G$. Se f_i isomorfismo per ogni i allora f isomorfismo.

- h_X è un fascio di Zariski.
- $\mathfrak{Gr}(k, n)$ è un fascio di Zariski:

Università di Pisa

Rappresentabilità del funtore delle Grassmanniane

Grassmanniana è uno spazio di moduli fine

$$h_{\mathrm{Gr}(k,n)} \cong \mathfrak{Gr}(k,n).$$

Dimostrazione.

Applichiamo il risultato di prima verificando che $h_{\mathrm{Gr}_I(k,n)} \cong \mathfrak{Gr}_I(k,n)$ con trasformazioni compatibili con l'intersezione. $\square$

Università di Pisa

Generalizziamo il funtore

Funtore dei quozienti

$$\text{Fibrati vettoriali su } (\operatorname{Spec}\mathbb{K})_T$$
$$\downarrow$$

fasci LFP su X_T, piatti e con supporto proprio su T tali che il polinomio di Hilbert sulle fibre di $X_T \to T$ calcolato con $\mathcal{L}$ sia costante.

Funtore dei quozienti

$$\text{Fibrati vettoriali su } (\operatorname{Spec}\mathbb{K})_T$$
$$\downarrow$$
fasci LFP su X_T, piatti e con supporto proprio su T tali che il polinomio di Hilbert sulle fibre di $X_T \to T$ calcolato con $\mathcal{L}$ sia costante.

Se $X \in \mathrm{Sch}/S$, $\mathcal{E}$ LFP su X e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$, definiamo $\mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ come

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sch}/S^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\
T & \longmapsto & \left\{ q : \mathcal{E}_T \twoheadrightarrow Q \;\middle|\; \begin{array}{c} Q \text{ come sopra dove } \forall t \in T, \\ \chi(Q|_{X_t}(r)) = \Phi(r) \end{array} \right\} /\sim \\
f : T' \to T & \longmapsto & [q : \mathcal{E}_T \to Q] \mapsto [f^*q : \mathcal{E}_{T'} \to f^*Q]
\end{array}$$

dove $q \sim q'$ se $\ker q = \ker q'$.

Casi particolari: Grassmanniane e funtore di Hilbert

Generalizza Grassmanniane: $\mathfrak{Gr}(k,n) = \mathfrak{Quot}^{k,\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}_{\mathcal{O}^n_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}/\mathbb{K}}$.

Università di Pisa

Casi particolari: Grassmanniane e funtore di Hilbert

Generalizza Grassmanniane: $\mathfrak{Gr}(k,n) = \mathfrak{Quot}^{k,\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}_{\mathcal{O}^n_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}/\mathbb{K}}$.

Se $\mathfrak{Hilb}^{\Phi,\mathcal{L}}_X$ problema dei moduli di sottoschemi chiusi di X loc. noeth. con polinomio di Hilbert Φ allora, poiché

$$\begin{gathered}\text{sottoschemi chiusi di } X\\ \updownarrow\\ \text{fasci quasi-coerenti di ideali di } \mathcal{O}_X\\ \updownarrow\\ \text{classi di quozienti di } \mathcal{O}_X\end{gathered}$$

si ha

$$\mathfrak{Hilb}^{\Phi,\mathcal{L}}_X = \mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_X/X/\mathbb{K}}$$

Esistenza di Quot

Esistenza degli schemi Quot

Sia X un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(1)\big|_X$, $\mathcal{E}$ un quoziente coerente di $\mathcal{O}_X(\nu)^p$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$. Allora il funtore $\mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/\mathbb{K}}$ è rappresentabile.

Esistenza di Quot

Esistenza degli schemi Quot

Sia X un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(1)|_X$, $\mathcal{E}$ un quoziente coerente di $\mathcal{O}_X(\nu)^p$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$. Allora il funtore $\mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/\mathbb{K}}$ è rappresentabile.

Dimostrazione.

Ci riconduciamo a $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}$ e poi mostriamo che il seguente morfismo è una immersione localmente chiusa per $r \gg 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}/\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{Gr}(\Phi(r), \dim_{\mathbb{K}} \pi_* \mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(r))(T) \\ [\mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_T} \twoheadrightarrow Q] & \longmapsto & [\pi_{T*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_T}(r)^p \to \pi_{T*}Q(r)] \end{array}$$

$\square$

UNIVERSITÀ DI PISA

Grazie per l'attenzione!