# Moduli spaces and Grassmannians

Candidato:
Sorce Francesco

Relatore:
Talpo Mattia

Università di Pisa

Anno accademico 2023/24

12 Luglio 2024

Università di Pisa

# Grassmanniane

# Grassmanniane

## Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}\,.$$

UNIVERSITÀ DI PISA

# Grassmanniane

**Grassmanniane, definizione standard**

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}\,.$$

Esempi:

- Spazi proiettivi $\mathrm{Gr}'(1, n) = \mathbb{P}^n$

# Grassmanniane

### Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}\,.$$

Esempi:

- Spazi proiettivi $\mathrm{Gr}'(1, n) = \mathbb{P}^n$
- $\mathrm{Gr}'(2, 4)$ parametrizza rette in $\mathbb{P}^3$

Università di Pisa

# Questo insieme è uno spazio?

# Scrittura con quozienti

Nota: $\mathrm{Gr}'(n-k,n) = \{\ker A \mid A \in \mathcal{M}(k,n),\ \operatorname{rnk} A = k\}$.

## Grassmanniane con quozienti

$$\mathrm{Gr}(k,n,\mathbb{K}) = {\{A \in \mathcal{M}(k,n,\mathbb{K}) \mid \operatorname{rnk} A = k\}}\big/{\sim}$$

con $A \sim B \iff \ker A = \ker B \iff \exists P \in \mathrm{GL}_k$ t.c. $A = PB$.

$$\mathrm{Gr}'(k,n,\mathbb{K}) \cong \mathrm{Gr}(n-k,n,\mathbb{K})$$

# Scrittura in carte

Scegliendo un multiindice $I$ di $k$ entrate

$$\mathrm{Gr}_I(k,n) = \{[A] \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid \det A_I \neq 0\}\,.$$

cioè, i sottospazi supplementari a $\mathrm{Span}\left(\{e_i \mid i \in I\}\right)$.

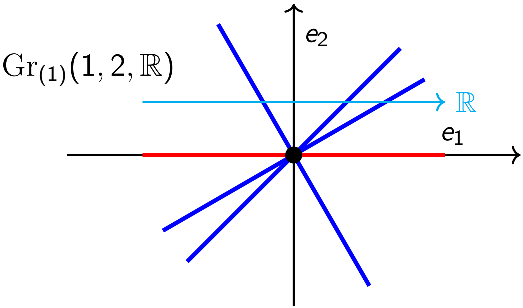
UNIVERSITÀ DI PISA

# Scrittura in carte

Scegliendo un multiindice $I$ di $k$ entrate

$$\mathrm{Gr}_I(k,n) = \{[A] \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid \det A_I \neq 0\}\,.$$

cioè, i sottospazi supplementari a $\mathrm{Span}\left(\{e_i \mid i \in I\}\right)$.




UNIVERSITÀ DI PISA

# Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \cdots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array}\right)$$

UNIVERSITÀ DI PISA

# Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \cdots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array}\right)$$

Si può mostrare che $\mathrm{Gr}_I(k, n, \mathbb{K}) = \mathrm{Gr}(k, n)_{z_I} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{k(n-k)}$.

Università di Pisa

# Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \cdots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array}\right)$$

Si può mostrare che $\mathrm{Gr}_I(k, n, \mathbb{K}) = \mathrm{Gr}(k, n)_{z_I} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{k(n-k)}$.

Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ abbiamo varietà liscia.
Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ abbiamo varietà analitica complessa.

Università di Pisa

Ma stiamo facendo geometria algebrica!

UNIVERSITÀ DI PISA

# Ma stiamo facendo geometria algebrica!

Vogliamo delle equazioni

# Mappa di Plücker

Siano $\omega(k,n)$ i multiindici ordinati, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ per $I = (i_1, \cdots, i_k)$.

## Mappa di Plücker

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(k,n) & \longrightarrow & \bigwedge^k \mathbb{K}^n \\ A & \longmapsto & \sum_{I \in \omega(k,n)} \det A_I e_I \end{array}$$

# Mappa di Plücker

Siano $\omega(k,n)$ i multiindici ordinati, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ per $I = (i_1, \cdots, i_k)$.

## Mappa di Plücker

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(k,n) & \longrightarrow & \bigwedge^k \mathbb{K}^n \\ A & \longmapsto & \sum_{I \in \omega(k,n)} \det A_I e_I \end{array}$$

## Iniettività a meno di scalare

$\mathrm{rnk}\, A < k$ se e solo se $\phi(A) = 0$.
Se $\mathrm{rnk}\, A = k$ allora $\ker A = \ker B$ se e solo se $\phi(A) = \lambda\phi(B)$ per $\lambda \neq 0$.

Università di Pisa

# Embedding di Plücker

**Embedding di Plücker**

$$\mathrm{Pl}: \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] & \longmapsto & [\det A_I \mid I \in \omega(k,n)] \end{array}$$

Università di Pisa

# Embedding di Plücker

## Embedding di Plücker

$$\mathrm{Pl}: \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] & \longmapsto & [\det A_I \mid I \in \omega(k,n)] \end{array}$$

## Grassmanniane sono una varietà

L'immagine di $\phi$ è un cono algebrico e un chiuso di Zariski di $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$.

# Embedding di Plücker

## Embedding di Plücker

$$\mathrm{Pl}: \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] & \longmapsto & [\det A_I \mid I \in \omega(k,n)] \end{array}$$

## Grassmanniane sono una varietà

L'immagine di $\phi$ è un cono algebrico e un chiuso di Zariski di $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$.

In particolare $\mathrm{Gr}(k,n)$ è anche uno schema proiettivo.

Università di Pisa

# Spazi di moduli

# Problema di moduli

## Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi “ragionevolmente”.

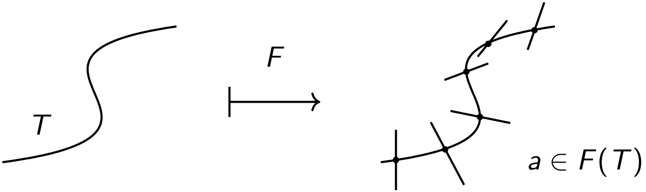
Università di Pisa

# Problema di moduli

## Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi “ragionevolmente”.

Sia $F(T)$ l'insieme delle **famiglie** di oggetti parametrizzate da $T$ a meno di isomorfismo

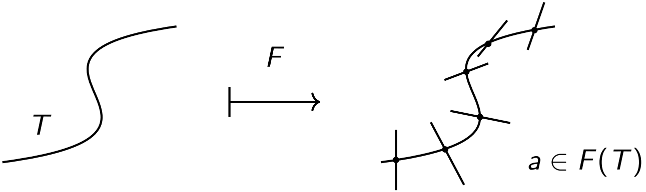


# Problema di moduli

## Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi "ragionevolmente".

Sia $F(T)$ l'insieme delle **famiglie** di oggetti parametrizzate da $T$ a meno di isomorfismo




Un **problema di moduli** è un funtore $F : \mathrm{Sch}/S^{op} \to \mathrm{Set}$

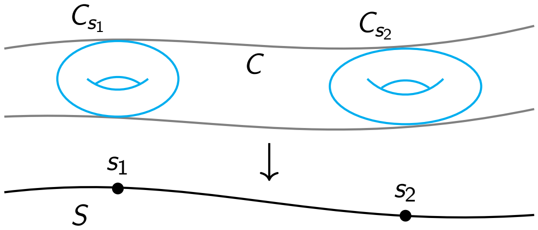
UNIVERSITÀ DI PISA

# Esempio di problema di moduli

Una **famiglia di curve lisce di genere** $g$ su uno schema $S$ è un morfismo liscio, proprio e finitamente presentato $C \to S$ tale che ogni fibra $C_s$ è una curva liscia connessa e propria di genere $g$.

$$F_{M_g} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Sch}/\mathbb{C}^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ S & \longmapsto & \{\text{famiglia di curve lisce di genere } g \text{ su } S\}/\sim \\ T \to S & \longmapsto & (C \to S) \mapsto (C \times_S T \to T) \end{array}$$

dove due famiglie $C \to S$ e $C' \to S$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo tra $C$ e $C'$ compatibile con le mappe verso $S$.



# Spazi di moduli

$M$ è uno spazio di moduli

# Spazi di moduli

$M$ è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.

# Spazi di moduli

$M$ è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.
- **grezzo** se
  - ogni famiglia induce un morfismo verso $M$ (fissiamo $F \to h_M$ naturale)
  - $M(\mathbb{K}) \leftrightarrow F(\operatorname{Spec} \mathbb{K})$ per ogni campo algebricamente chiuso
  - $M$ è universale ($F \to h_N$ si fattorizza in $F \to h_M \to h_N$).

UNIVERSITÀ DI PISA

# Spazi di moduli

$M$ è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.
- **grezzo** se
  - ogni famiglia induce un morfismo verso $M$ (fissiamo $F \to h_M$ naturale)
  - $M(\mathbb{K}) \leftrightarrow F(\operatorname{Spec} \mathbb{K})$ per ogni campo algebricamente chiuso
  - $M$ è universale ($F \to h_N$ si fattorizza in $F \to h_M \to h_N$).

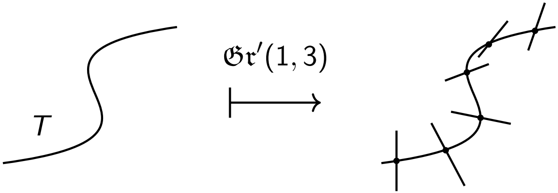
Esempio: $F_{M_g}$ ammette spazio di moduli grezzo ma non fine.

UNIVERSITÀ DI PISA

# Problema di moduli delle Grassmanniane

È naturale aspettarsi che $\mathrm{Gr}'(k,n)$ sia uno spazio di moduli per

$$
\mathfrak{Gr}'(k,n): \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{F} \text{ sottofibrato vettoriale di } \mathcal{O}_T^n \text{ di} \\ \text{rango } k \text{ t.c. } \mathcal{O}_T^n/\mathcal{F} \text{ loc. libero} \end{array} \right\} \\ f: S \to T & \longmapsto & \mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F} \end{array}
$$



# Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}'(n-k, n) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Gr}(k, n) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathfrak{Gr}'(n-k, n) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathfrak{Gr}(k, n)
\end{tikzcd}$$

Università di Pisa

# Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gr}'(n-k,n) & \cong & \mathrm{Gr}(k,n) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\mathfrak{Gr}'(n-k,n) & \cong & \mathfrak{Gr}(k,n)
\end{array}
$$

$$
\mathfrak{Gr}(k,n) : \begin{array}{ccc}
(\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\
T & \longmapsto & \{\alpha : \mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow Q\}/_{\sim} \\
f : S \to T & \longmapsto & (\alpha : \mathcal{O}_T^n \to Q) \mapsto (f^*\alpha : \mathcal{O}_S^n \to f^*Q)
\end{array}
$$

dove $Q$ fibrato vettoriale su $T$ di rango $k$ e $\alpha \sim \beta \iff \ker \alpha = \ker \beta$.

# Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}'(n-k,n) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Gr}(k,n) \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mathfrak{Gr}'(n-k,n) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathfrak{Gr}(k,n) \end{tikzcd}$$

$$\mathfrak{Gr}(k,n) : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \{\alpha : \mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow Q\}/_{\sim} \\ f : S \to T & \longmapsto & (\alpha : \mathcal{O}_T^n \to Q) \mapsto (f^*\alpha : \mathcal{O}_S^n \to f^*Q) \end{array}$$

dove $Q$ fibrato vettoriale su $T$ di rango $k$ e $\alpha \sim \beta \iff \ker \alpha = \ker \beta$.

$$\mathfrak{Gr}(k,n)(\mathrm{Spec}\,\mathbb{K}) \cong \left\{\varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^k\right\}/_{\sim} = \mathrm{Gr}(k,n).$$

Università di Pisa

# Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h_\bullet"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] & h_U \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & G \arrow[d] \\
T \arrow[r, "h_\bullet"] & h_T \arrow[r] & F
\end{tikzcd}
$$

$\{G_i \to F\}$ ricoprimento quando gli $U_i$ coprono $T$.

# Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h_\bullet"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & h_U \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & G \arrow[d] \\ T \arrow[r, "h_\bullet"] & h_T \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

$\{G_i \to F\}$ ricoprimento quando gli $U_i$ coprono $T$.

## Sottofuntori aperti principali di $\mathfrak{Gr}(k,n)$

$$\mathfrak{Gr}_I(k,n) : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ \mathcal{O}_T^n \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q \mid \alpha \circ s_I \text{ surgettiva} \right\} \big/ \sim \end{array}$$

Dato $T$ e $h_T \to \mathfrak{Gr}(k,n) \leftrightarrow [\alpha] \in \mathfrak{Gr}(k,n)(T)$, abbiamo

$$U_I = T \setminus (\mathrm{Supp}\,(\mathrm{coker}\,(\alpha \circ s_I))).$$

Sono anche un ricoprimento.

UNIVERSITÀ DI PISA

# Fasci di Zariski

## Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $$F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

# Fasci di Zariski

## Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $$F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

## Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se $F$ e $G$ fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i\in I}$ e $\{G_i\}_{i\in I}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \to G_i, \qquad f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j},$$

esiste $f : F \to G$. Se $f_i$ isomorfismo per ogni $i$ allora $f$ isomorfismo.

# Fasci di Zariski

**Fascio di Zariski**

Dato $\{U_i \to X\}$, $$F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

**Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski**

Se $F$ e $G$ fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i\in I}$ e $\{G_i\}_{i\in I}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \to G_i, \qquad f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j},$$

esiste $f : F \to G$. Se $f_i$ isomorfismo per ogni $i$ allora $f$ isomorfismo.

- $h_X$ è un fascio di Zariski.

# Fasci di Zariski

## Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \to X\}$, $\quad F(X) \to \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$

## Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se $F$ e $G$ fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i\in I}$ e $\{G_i\}_{i\in I}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \to G_i, \qquad f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j},$$

esiste $f : F \to G$. Se $f_i$ isomorfismo per ogni $i$ allora $f$ isomorfismo.

- $h_X$ è un fascio di Zariski.
- $\mathfrak{Gr}(k,n)$ è un fascio di Zariski:

Università di Pisa

# Rappresentabilità del funtore delle Grassmanniane

**Grassmanniana è uno spazio di moduli fine**

$$h_{\mathrm{Gr}(k,n)} \cong \mathfrak{Gr}(k,n).$$

**Dimostrazione.**

Applichiamo il risultato di prima verificando che $h_{\mathrm{Gr}_I(k,n)} \cong \mathfrak{Gr}_I(k,n)$ con trasformazioni compatibili con l'intersezione. $\square$

# Generalizziamo il funtore

UNIVERSITÀ DI PISA

# Funtore dei quozienti

Fibrati vettoriali su $(\mathrm{Spec}\,\mathbb{K})_T$

$$\downarrow$$

fasci q.coerenti loc.fin.pres. su $X_T$, piatti e con supporto proprio su $T$

# Funtore dei quozienti

$$\text{Fibrati vettoriali su } (\operatorname{Spec}\mathbb{K})_T$$
$$\downarrow$$
$$\text{fasci q.coerenti loc.fin.pres. su } X_T\text{, piatti e con supporto proprio su } T$$

Se $X \in \mathrm{Sch}/S$, $\mathcal{E}$ coerente su $X$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$, definiamo $\mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ come

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sch}/S^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ q : \mathcal{E}_T \twoheadrightarrow Q \,\middle|\, \begin{array}{c} Q \text{ come sopra e tale che} \\ \forall t \in T,\ \chi(Q|_{X_t}(r)) = \Phi(r) \end{array} \right\} /\sim \\ f : T' \to T & \longmapsto & [q : \mathcal{E}_T \to Q] \mapsto [f^*q : \mathcal{E}_{T'} \to f^*Q] \end{array}$$

dove $q \sim q'$ se $\ker q = \ker q'$.

# Casi particolari: Grassmanniane e funtore di Hilbert

Generalizza Grassmanniane: $\mathfrak{Gr}(k,n) = \mathfrak{Quot}^{k,\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}_{\mathcal{O}^n_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}/\mathbb{K}}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

# Casi particolari: Grassmanniane e funtore di Hilbert

Generalizza Grassmanniane: $\mathfrak{Gr}(k,n) = \mathfrak{Quot}^{k,\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}_{\mathcal{O}^n_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}/\mathbb{K}}$.

Se $\mathfrak{Hilb}^{\Phi,\mathcal{L}}_X$ problema dei moduli di sottoschemi chiusi di $X$ con polinomio di Hilbert $\Phi$ allora, poiché

$$\begin{gathered}\text{sottoschemi chiusi di } X\\ \updownarrow\\ \text{fasci quasi-coerenti di ideali di } \mathcal{O}_X\\ \updownarrow\\ \text{classi di quozienti di } \mathcal{O}_X\end{gathered}$$

si ha

$$\mathfrak{Hilb}^{\Phi,\mathcal{L}}_X = \mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_X/X/\mathbb{K}}$$

Università di Pisa

# Esistenza di Quot

**Esistenza degli schemi $\mathrm{Quot}$**

Sia $X$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(1)|_X$, $\mathcal{E}$ un quoziente coerente di $\mathcal{O}_X(\nu)^p$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$. Allora il funtore $\mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/\mathbb{K}}$ è rappresentabile.

Università di Pisa

# Esistenza di Quot

## Esistenza degli schemi Quot

Sia $X$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(1)|_X$, $\mathcal{E}$ un quoziente coerente di $\mathcal{O}_X(\nu)^p$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$. Allora il funtore $\mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/\mathbb{K}}$ è rappresentabile.

## Dimostrazione.

Ci riconduciamo a $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}$ e poi mostriamo che il seguente morfismo è una immersione localmente chiusa per $r \gg 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Quot}^{\Phi,\mathcal{L}}_{\mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}/\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{Gr}(\Phi(r), \dim_{\mathbb{K}} \pi_* \mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}(r))(T) \\ [\mathcal{O}^p_{\mathbb{P}^n_T} \twoheadrightarrow Q] & \longmapsto & [\pi_{T*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_T}(r)^p \to \pi_{T*}Q(r)] \end{array}$$

$\square$

# Grazie per l'attenzione!

UNIVERSITÀ DI PISA