

Moduli spaces and Grassmannians

Candidato:

Sorce Francesco

Relatore:

Talpo Mattia

Università di Pisa

Anno accademico 2023/24

12 Luglio 2024



UNIVERSITÀ DI PISA

Grassmanniane



Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}.$$



Grassmanniane

Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{ \text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k \}.$$

Esempi:

- Spazi proiettivi $\mathrm{Gr}'(1, n) = \mathbb{P}^n$



Grassmanniane

Grassmanniane, definizione standard

$$\mathrm{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) = \{\text{sottospazi di } \mathbb{K}^n \text{ di dimensione } k\}.$$

Esempi:

- Spazi proiettivi $\mathrm{Gr}'(1, n) = \mathbb{P}^n$
- $\mathrm{Gr}'(2, 4)$ parametrizza rette in \mathbb{P}^3



Questo insieme è uno spazio?



Scrittura con quozienti

Nota: $\text{Gr}'(n - k, n) = \{\ker A \mid A \in \mathcal{M}(k, n), \text{rk } A = k\}$.

Grassmanniane con quozienti

$$\text{Gr}(k, n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(k, n, \mathbb{K}) \mid \text{rk } A = k\} / \sim$$

con $A \sim B \iff \ker A = \ker B \iff \exists P \in \text{GL}_k \text{ t.c. } A = PB$.

$$\text{Gr}'(k, n, \mathbb{K}) \cong \text{Gr}(n - k, n, \mathbb{K})$$



Scrittura in carte

Scegliendo un multiindice I di k entrate

$$\mathrm{Gr}_I(k, n) = \{[A] \in \mathrm{Gr}(k, n) \mid \det A_I \neq 0\}.$$

cioè, i sottospazi supplementari a $\mathrm{Span}(\{e_i \mid i \in I\})$.

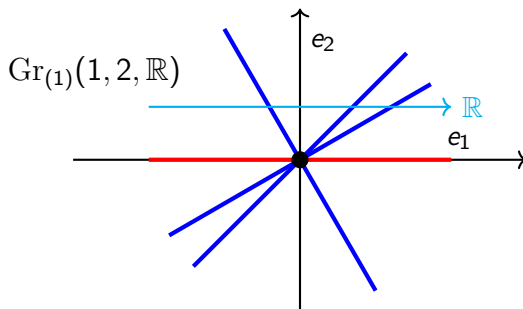


Scrittura in carte

Scegliendo un multiindice I di k entrate

$$\mathrm{Gr}_I(k, n) = \{[A] \in \mathrm{Gr}(k, n) \mid \det A_I \neq 0\}.$$

cioè, i sottospazi supplementari a $\mathrm{Span}(\{e_i \mid i \in I\})$.



Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \quad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \dots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array} \right)$$



Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \quad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \dots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array} \right)$$

Si può mostrare che $\mathrm{Gr}_I(k, n, \mathbb{K}) = \mathrm{Gr}(k, n)_{z_I} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{k(n-k)}$.



Scrittura in carte

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} w_{I_1^1} & \cdots & w_{I_n^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I_1^k} & \cdots & w_{I_n^k} \end{pmatrix}, \quad \text{dove } w_J = \frac{\det A_J}{\det A_I}$$

Per esempio, con $I = (1, \dots, k)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} \end{array} \right)$$

Si può mostrare che $\mathrm{Gr}_I(k, n, \mathbb{K}) = \mathrm{Gr}(k, n)_{z_I} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{k(n-k)}$.

Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ abbiamo varietà liscia.

Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ abbiamo varietà analitica complessa.



Ma stiamo facendo geometria algebrica!



Ma stiamo facendo geometria algebrica!

Vogliamo delle equazioni



Mappa di Plücker

Siano $\omega(k, n)$ i multiindici ordinati, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ per $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Mappa di Plücker

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(k, n) & \longrightarrow & \bigwedge^k \mathbb{K}^n \\ \phi : A & \longmapsto & \sum_{I \in \omega(k, n)} \det A_I e_I \end{array}$$



Mappa di Plücker

Siano $\omega(k, n)$ i multiindici ordinati, $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ per $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Mappa di Plücker

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}(k, n) &\longrightarrow \bigwedge^k \mathbb{K}^n \\ A &\longmapsto \sum_{I \in \omega(k, n)} \det A_I e_I \end{aligned}$$

Iniettività a meno di scalare

$\text{rnk } A < k$ se e solo se $\phi(A) = 0$.

Se $\text{rnk } A = k$ allora $\ker A = \ker B$ se e solo se $\phi(A) = \lambda \phi(B)$ per $\lambda \neq 0$.



Embedding di Plücker

Embedding di Plücker

$$\begin{aligned} \text{Pl} : \text{Gr}(k, n) &\longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] &\longmapsto [\det A_I \mid I \in \omega(k, n)] \end{aligned}$$



Embedding di Plücker

Embedding di Plücker

$$\begin{aligned} \text{Pl} : \text{Gr}(k, n) &\longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] &\longmapsto [\det A_I \mid I \in \omega(k, n)] \end{aligned}$$

Grassmanniane sono una varietà

L'immagine di ϕ è un cono algebrico e un chiuso di Zariski di $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$.



Embedding di Plücker

Embedding di Plücker

$$\begin{aligned} \text{Pl} : \text{Gr}(k, n) &\longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [A] &\longmapsto [\det A_I \mid I \in \omega(k, n)] \end{aligned}$$

Grassmanniane sono una varietà

L'immagine di ϕ è un cono algebrico e un chiuso di Zariski di $\bigwedge^k \mathbb{K}^n$.

In particolare $\text{Gr}(k, n)$ è anche uno schema proiettivo.



Spazi di moduli



Problema di moduli

Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi “ragionevolmente”.

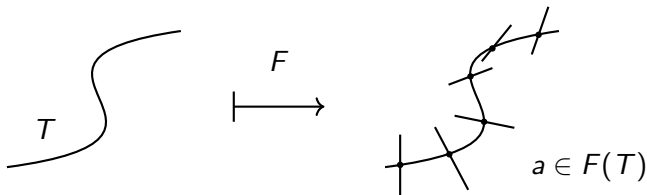


Problema di moduli

Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi “ragionevolmente”.

Sia $F(T)$ l'insieme delle **famiglie** di oggetti parametrizzate da T a meno di isomorfismo

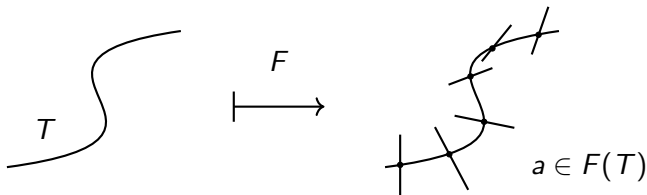


Problema di moduli

Problema di classificazione geometrico

Dati degli **oggetti** e una **equivalenza** tra questi cerchiamo uno **spazio** che parametrizza le classi “ragionevolmente”.

Sia $F(T)$ l'insieme delle **famiglie** di oggetti parametrizzate da T a meno di isomorfismo



Un **problema di moduli** è un funtore $F : \text{Sch}/S^{op} \rightarrow \text{Set}$

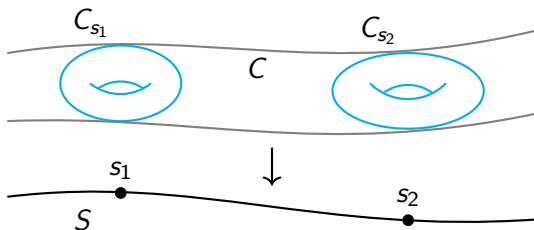


Esempio di problema di moduli

Una **famiglia di curve lisce di genere g** su uno schema S è un morfismo liscio, proprio e finitamente presentato $C \rightarrow S$ tale che ogni fibra C_s è una curva liscia connessa e propria di genere g .

$$F_{M_g} : \begin{array}{ccc} \text{Sch}/\mathbb{C}^{op} & \longrightarrow & \text{Set} \\ S & \longmapsto & \{\text{famiglia di curve lisce di genere } g \text{ su } S\} / \sim \\ T \rightarrow S & \longmapsto & (C \rightarrow S) \mapsto (C \times_S T \rightarrow T) \end{array}$$

dove due famiglie $C \rightarrow S$ e $C' \rightarrow S$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo tra C e C' compatibile con le mappe verso S .



Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli



Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.



Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.
- **grezzo** se
 - ▶ ogni famiglia induce un morfismo verso M (fissiamo $F \rightarrow h_M$ naturale)
 - ▶ $M(\mathbb{K}) \leftrightarrow F(\text{Spec } \mathbb{K})$ per ogni campo algebricamente chiuso
 - ▶ M è universale ($F \rightarrow h_N$ si fattorizza in $F \rightarrow h_M \rightarrow h_N$).



Spazi di moduli

M è uno spazio di moduli

- **fine** se $h_M \cong F$. La famiglia $u \in F(M)$ che corrisponde all'isomorfismo è detta **famiglia universale**.
- **grezzo** se
 - ▶ ogni famiglia induce un morfismo verso M (fissiamo $F \rightarrow h_M$ naturale)
 - ▶ $M(\mathbb{K}) \leftrightarrow F(\text{Spec } \mathbb{K})$ per ogni campo algebricamente chiuso
 - ▶ M è universale ($F \rightarrow h_N$ si fattorizza in $F \rightarrow h_M \rightarrow h_N$).

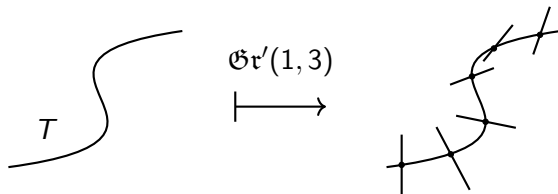
Esempio: F_{M_g} ammette spazio di moduli grezzo ma non fine.



Problema di moduli delle Grassmanniane

È naturale aspettarsi che $\mathrm{Gr}'(k, n)$ sia uno spazio di moduli per

$$\begin{array}{lll}
 (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\
 \mathrm{Gr}'(k, n) : \quad T & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ sottofibrato vettoriale di } \mathcal{O}_T^n \text{ di} \\ \text{rango } k \text{ t.c. } \mathcal{O}_T^n / \mathcal{F} \text{ loc. libero} \end{array} \right\} \\
 f : S \rightarrow T & \longmapsto & \mathcal{F} \mapsto f^* \mathcal{F}
 \end{array}$$



Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}'(n-k, n) & \cong & \mathrm{Gr}(k, n) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathfrak{Gr}'(n-k, n) & \cong & \mathfrak{Gr}(k, n) \end{array}$$



Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$\mathrm{Gr}'(n-k, n) \cong \mathrm{Gr}(k, n)$$



$$\mathfrak{Gr}'(n-k, n) \cong \mathfrak{Gr}(k, n)$$



$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ \mathfrak{Gr}(k, n) : \quad T & \longmapsto & \{\alpha : \mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow Q\} / \sim \\ f : S \rightarrow T & \longmapsto & (\alpha : \mathcal{O}_T^n \rightarrow Q) \mapsto (f^* \alpha : \mathcal{O}_S^n \rightarrow f^* Q) \end{array}$$

dove Q fibrato vettoriale su T di rango k e $\alpha \sim \beta \iff \ker \alpha = \ker \beta$.



Problema di moduli delle Grassmanniane con quozienti

$$\mathrm{Gr}'(n-k, n) \cong \mathrm{Gr}(k, n)$$



$$\mathfrak{Gr}'(n-k, n) \cong \mathfrak{Gr}(k, n)$$



$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sch}/\mathbb{K})^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ \mathfrak{Gr}(k, n) : \quad T & \longmapsto & \{\alpha : \mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow Q\} / \sim \\ f : S \rightarrow T & \longmapsto & (\alpha : \mathcal{O}_T^n \rightarrow Q) \mapsto (f^* \alpha : \mathcal{O}_S^n \rightarrow f^* Q) \end{array}$$

dove Q fibrato vettoriale su T di rango k e $\alpha \sim \beta \iff \ker \alpha = \ker \beta$.

$$\mathfrak{Gr}(k, n)(\mathrm{Spec} \mathbb{K}) \cong \left\{ \varphi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^k \right\} / \sim = \mathrm{Gr}(k, n).$$



Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{h_\bullet} & h_U & \dashrightarrow & G \\ \cap & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ T & \xrightarrow{h_\bullet} & h_T & \longrightarrow & F \end{array}$$

$\{G_i \rightarrow F\}$ ricoprimento quando gli U_i coprono T .



Sottofuntori e ricoprimenti aperti di funtori

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{h_\bullet} & h_U & \dashrightarrow & G \\
 \cap & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{h_\bullet} & h_T & \longrightarrow & F
 \end{array}$$

$\{G_i \rightarrow F\}$ ricoprimento quando gli U_i coprono T .

Sottofuntori aperti principali di $\mathfrak{Gr}(k, n)$

$$\mathfrak{Gr}_l(k, n) : \begin{array}{ccc} (\text{Sch}/\mathbb{K})^{op} & \longrightarrow & \text{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ \mathcal{O}_T^n \xrightarrow{\alpha} Q \mid \alpha \circ s_l \text{ surgettiva} \right\} / \sim \end{array}$$

Dato T e $h_T \rightarrow \mathfrak{Gr}(k, n) \leftrightarrow [\alpha] \in \mathfrak{Gr}(k, n)(T)$, abbiamo

$$U_l = T \setminus (\text{Supp}(\text{coker}(\alpha \circ s_l))).$$

Sono anche un ricoprimento.



Faschi di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \rightarrow X\}$,
$$F(X) \rightarrow \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$



Fasce di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \rightarrow X\}$,
$$F(X) \rightarrow \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se F e G fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i \in I}$ e $\{G_i\}_{i \in I}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \rightarrow G_i, \quad f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

esiste $f : F \rightarrow G$. Se f_i isomorfismo per ogni i allora f isomorfismo.



Fasce di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \rightarrow X\}$,
$$F(X) \rightarrow \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se F e G fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i \in I}$ e $\{G_i\}_{i \in I}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \rightarrow G_i, \quad f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

esiste $f : F \rightarrow G$. Se f_i isomorfismo per ogni i allora f isomorfismo.

- h_X è un fascio di Zariski.



Fasce di Zariski

Fascio di Zariski

Dato $\{U_i \rightarrow X\}$,
$$F(X) \rightarrow \prod_k F(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

Incollamento di morfismi su ricoprimenti di fasci di Zariski

Se F e G fasci di Zariski, $\{F_i\}_{i \in I}$ e $\{G_i\}_{i \in I}$ ricoprimenti aperti e

$$f_i : F_i \rightarrow G_i, \quad f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j},$$

esiste $f : F \rightarrow G$. Se f_i isomorfismo per ogni i allora f isomorfismo.

- h_X è un fascio di Zariski.
- $\mathcal{G}r(k, n)$ è un fascio di Zariski:



Rappresentabilità del funtore delle Grassmanniane

Grassmanniana è uno spazio di moduli fine

$$h_{\mathrm{Gr}(k,n)} \cong \mathfrak{Gr}(k,n).$$

Dimostrazione.

Applichiamo il risultato di prima verificando che $h_{\mathrm{Gr}_I(k,n)} \cong \mathfrak{Gr}_I(k,n)$ con trasformazioni compatibili con l'intersezione. □



Generalizziamo il funtore



Funtore dei quozienti

Fibrati vettoriali su $(\operatorname{Spec} \mathbb{K})_T$



fasce q.coerenti loc.fin.pres. su X_T , piatti e con supporto proprio su T



UNIVERSITÀ DI PISA

Funtore dei quozienti

Fibrati vettoriali su $(\mathrm{Spec} \mathbb{K})_T$

fasci q.coerenti loc.fin.pres. su X_T , piatti e con supporto proprio su T

Se $X \in \text{Sch}/S$, \mathcal{E} coerente su X e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$, definiamo $\text{Quot}_{\mathcal{E}/X/S}^{\Phi, \mathcal{L}}$ come

$$\begin{array}{ccc} \text{Sch}/S^{op} & \longrightarrow & \text{Set} \\ T & \longmapsto & \left\{ q : \mathcal{E}_T \twoheadrightarrow Q \left| \begin{array}{l} Q \text{ come sopra e tale che} \\ \forall t \in T, \chi(Q|_{\mathbf{X}_t}(r)) = \Phi(r) \end{array} \right. \right\} / \sim \\ f : T' \rightarrow T & \longmapsto & [q : \mathcal{E}_T \rightarrow Q] \mapsto [f^*q : \mathcal{E}_{T'} \rightarrow f^*Q] \end{array}$$

dove $q \sim q'$ se $\ker q = \ker q'$.



Casi particolari: Grassmanniane e funtore di Hilbert

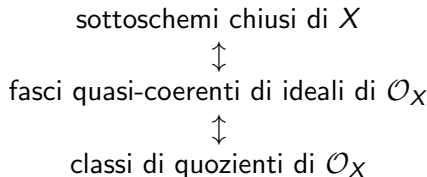
Generalizza Grassmanniane: $\mathfrak{Gr}(k, n) = \mathcal{Q}uot_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n/\mathbb{K}/\mathbb{K}}^{k, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$.



Casi particolari: Grassmanniane e funtore di Hilbert

Generalizza Grassmanniane: $\mathfrak{Gr}(k, n) = \mathcal{Q}uot_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n/\mathbb{K}/\mathbb{K}}^{k, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$.

Se $\mathfrak{Hilb}_X^{\Phi, \mathcal{L}}$ problema dei moduli di sottoschemi chiusi di X con polinomio di Hilbert Φ allora, poiché



si ha

$$\mathfrak{Hilb}_X^{\Phi, \mathcal{L}} = \mathcal{Q}uot_{\mathcal{O}_X/X/\mathbb{K}}^{\Phi, \mathcal{L}}$$



Esistenza di Quot

Esistenza degli schemi Quot

Sia X un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n}(1)|_X$, \mathcal{E} un quoziente coerente di $\mathcal{O}_X(\nu)^p$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$. Allora il funtore $\text{Quot}_{\mathcal{E}/X/\mathbb{K}}^{\Phi, \mathcal{L}}$ è rappresentabile.



Esistenza di Quot

Esistenza degli schemi Quot

Sia X un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n}(1)|_X$, \mathcal{E} un quoziente coerente di $\mathcal{O}_X(\nu)^p$ e $\Phi \in \mathbb{Q}[\lambda]$. Allora il funtore $\text{Quot}_{\mathcal{E}/X/\mathbb{K}}^{\Phi, \mathcal{L}}$ è rappresentabile.

Dimostrazione.

Ci riconduciamo a $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n}^p$ e poi mostriamo che il seguente morfismo è una immersione localmente chiusa per $r \gg 0$

$$\begin{aligned} \text{Quot}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n}^p/\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n/\mathbb{K}}^{\Phi, \mathcal{L}}(T) &\longrightarrow \mathfrak{Gr}(\Phi(r), \dim_{\mathbb{K}} \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n}^p(r))(T) \\ [\mathcal{O}_{\mathbb{P}_T^n}^p \twoheadrightarrow Q] &\longmapsto [\pi_{T*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_T^n}(r)^p \rightarrow \pi_{T*} Q(r)] \end{aligned}$$



Grazie per l'attenzione!

