

Versuchsprotokoll W1

Stirling-Motor

2014-05-13

Alexandra Everwand, Simon May

Gruppe 14

`a.everwand@uni-muenster.de`

`simon.may@uni-muenster.de`

Inhaltsverzeichnis

1. Theoretische Grundlagen	1
1.1. Einführung	1
1.2. Thermodynamische Größen	1
1.3. Zustandsgrößen und ideales Gas	2
1.4. Verrichtete Arbeit	3
1.5. Stirling-Kreisprozess	3
2. Durchführung	5
2.1. Reibungsverluste	5
2.2. Kühlleistung der Kältemaschine	6
2.3. Heizleistung der Wärmepumpe	6
2.4. Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine	6
3. Auswertung	8
3.1. Kältemaschine	8
3.2. Wärmepumpe	9
3.3. Wirkungsgrad aus dem (p, V) -Diagramm	10
3.3.1. Betrieb mit 8 V	10
3.3.2. Betrieb mit 10 V	13
3.3.3. Betrieb mit 12 V	15
3.3.4. Betrieb mit 14 V	17
3.3.5. Betrieb mit 16 V	19
3.4. Wirkungsgrad mit Abbremsen	21
4. Diskussion	22
A. Anhang	24
A.1. Fehlerrechnung	24

1. Theoretische Grundlagen¹

1.1. Einführung

Im Versuch W1 wurde der Stirlingmotor als thermodynamische Maschine betrachtet. Mit Bezug auf den idealisierten thermodynamischen Stirling-Kreisprozess wurde versucht, das Verhalten des Motors zu erklären. Er wurde sowohl als Kältemaschine und Wärmepumpe (also mit Antrieb) als auch als Wärmekraftmaschine betrieben. Im ersten Fall wurden die Reibungsverluste beim Betrieb, die Kühlleistung (als Kältemaschine) und die Heizleistung (als Wärmepumpe), im zweiten Fall der Wirkungsgrad des Motors als Wärmekraftmaschine ohne Last (aus dem (p, V) -Diagramm) und unter Last (mithilfe des Pronyschen Zaums) bestimmt.

1.2. Thermodynamische Größen

In der Thermodynamik werden die Größen Temperatur T , innere Energie U und Wärme ΔQ eingeführt. Die innere Energie ist die gesamte Energie eines Systems, insbesondere auch die durch die ungeordnete, mikroskopische Bewegung von Teilchen (Atome und Moleküle) beigetragene Energie. Die innere Energie kann sich nicht nur durch das Verrichten von Arbeit, sondern auch durch die Übertragung einer Energiemenge als Wärme ändern. Die Temperatur eines Körpers bestimmt dessen Fähigkeit, innere Energie in Form von Wärme abzugeben. Dabei gibt ein Körper höherer Temperatur immer Energie an einen Körper niedrigerer Temperatur ab, wenn beide in thermischem Kontakt stehen, bis schließlich beide dieselbe Temperatur haben.

Führt man einem Körper Wärme zu, erhöht sich dessen innere Energie und damit in der Regel auch die Temperatur:

$$\Delta Q = C_W \Delta T = cm \Delta T \quad (1.1)$$

C_W heißt Wärmekapazität, c spezifische Wärme(kapazität). C_W ist von der Masse m des Körpers abhängig, während die spezifische Wärmekapazität c massenunabhängig ist.

¹Theoretische Grundlagen basierend auf: Donath, Markus und Schmidt, Anke. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Optik, Wärmelehre und Atomphysik*. Auflage Sommersemester 2014. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Apr. 2014.

1.3. Zustandsgrößen und ideales Gas

Ein thermodynamisches System kann vollständig durch Zustandsgrößen, deren Wert nicht von der „Vorgeschichte“ des Systems abhängt, beschrieben werden. Hier sind hauptsächlich die Zustandsgrößen Druck p , Volumen V und Temperatur T wichtig. Für ein ideales Gas (ein idealisiertes Modell, bei dem die Teilchen nur durch Stöße wechselwirken) gilt die folgende Zustandsgleichung:

$$pV = Nk_B T = nRT \quad (1.2)$$

Dabei ist N die Teilchenzahl bzw. n die Teilchenzahl in mol, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ die Boltzmann-Konstante und $R = 8,315 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ die universelle Gaskonstante.

Für eine feste Teilchenzahl enthält die Zustandsgleichung (1.2) drei Variablen, wobei jeweils zwei den Wert der dritten festlegen. Die Zustandsgleichung kann grafisch visualisiert werden, was in Abb. 1 gezeigt ist. „F“, „Fl“ und „G“ kennzeichnen Bereiche, in denen die feste, flüssige bzw. gasförmige Phase vorliegt. a , b und c sind die Zweiphasengebiete F/Fl, Fl/G bzw. F/G. Die durchgezogenen Linien zeigen Isothermen (Kurven konstanter Temperatur), die gestrichelte eine Isobare (Kurve konstanten Drucks).

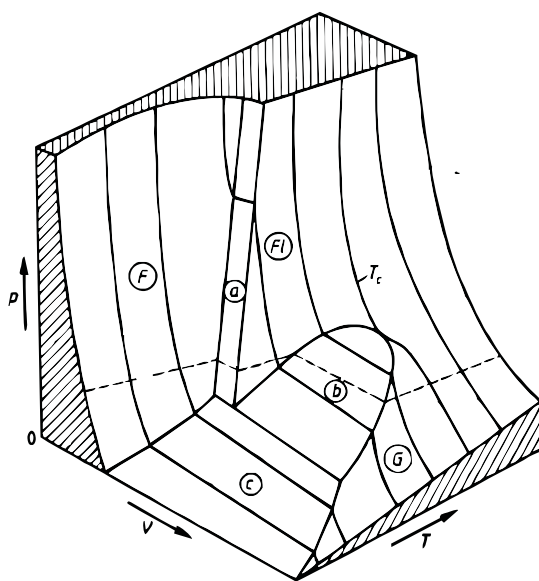


Abbildung 1: Zustandsfläche eines einfachen Stoffs.¹

Wie schon in Abb. 1 zu sehen, haben Phasenübergänge für einen Stoff eine besondere Bedeutung. Um einen Stoff vom festen in den flüssigen oder vom flüssigen in den gasförmigen Zustand zu bringen, ist eine gewisse Wärmemenge, die Schmelz- bzw. Verdampfungswärme (Q_S bzw. Q_V), auch latente Wärme genannt, nötig. Bei der umgekehrten Richtung wird diese Wärme wieder frei. Die tatsächlich benötigte Menge hängt von der Masse des Stoffs ab.

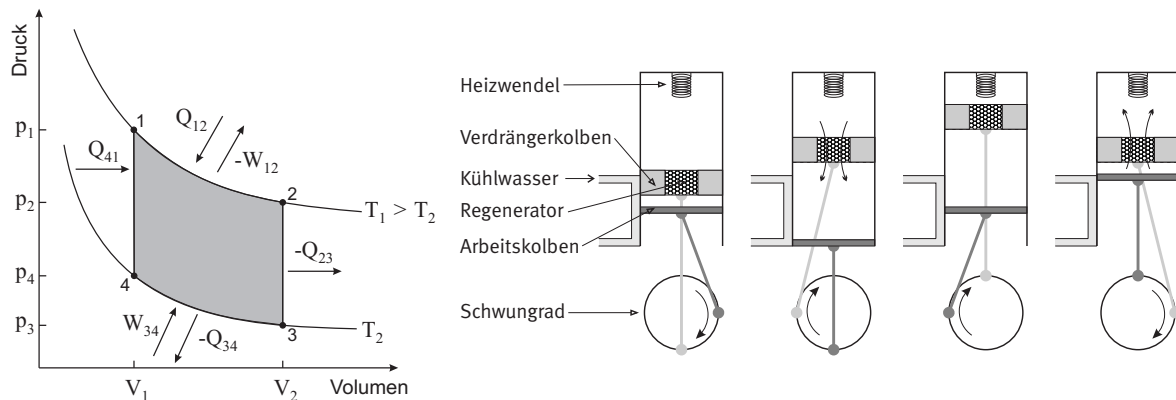


Abbildung 2: Der idealisierte Stirling-Kreisprozess im (p, V) -Diagramm (links) und die Realisierung des Motors (rechts) mit den einzelnen Zustandsänderungen 1 bis 4 von links nach rechts.¹

1.4. Verrichtete Arbeit

Bei einem thermodynamischen System bedeuten nach Konvention positive Größen, dass dem System Energie zugeführt wird, und negative, dass ihm Energie entzogen wird.

Um die verrichtete Arbeit explizit zu berechnen, wird folgende Überlegung angestellt: Expandiert ein Stoff um das Volumen $\Delta V = V_2 - V_1$ und bewegt dadurch (mit der Kraft F) einen Kolben der Fläche A um den Weg $\Delta x = x_2 - x_1$, so wird die folgende Arbeit verrichtet:

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} F \, dx = - \int_{x_1}^{x_2} pA \, dx = - \int_{V_1}^{V_2} p(V, T) \, dV \quad (1.3)$$

Dieser Zusammenhang ist für allgemeine Volumenänderungen gültig.

1.5. Stirling-Kreisprozess

Eine Wärmekraftmaschine wird durch Zufuhr von Wärme betrieben und wandelt diese in nutzbare Arbeit um. Man definiert ihren Wirkungsgrad η als Verhältnis von geleisteter Arbeit zur zugeführten Wärme. Kältemaschinen und Wärmepumpen sind „rückwärts“ betriebene Wärmekraftmaschinen. Unter Aufwendung von Arbeit wird Wärme von einem kälteren Reservoir in ein wärmeres übertragen. Die Leistungszahl ε einer Kältemaschine

ist das Verhältnis von übertragener Wärme zu aufgewandter Arbeit.

$$\eta = \frac{|W_{\text{ab}}|}{|Q_{\text{zu}}|} < 1, \quad \varepsilon = \frac{|Q_{\text{ab}}|}{|W_{\text{zu}}|} \quad (1.4)$$

Die Leistungszahl kann größer als 1 sein.

In Abb. 2 ist der Stirling-Kreisprozess abgebildet, der aus zwei isochoren und zwei isothermen Zustandsänderungen besteht. In der Durchlaufrichtung von 1 bis 4 handelt es sich um eine Wärmekraftmaschine: Dem System wird Wärme zugeführt und es leistet an den entsprechenden Stellen im Kreisprozess Arbeit. Im (p, V) -Diagramm entspricht die pro Zyklus verrichtete Arbeit wegen (1.3) der von der Kurve eingeschlossene Fläche. Soll der Kreisprozess in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, muss das System angetrieben werden. Dann wird Wärme vom kälteren ins wärmere Reservoir befördert und der Stirling-Motor wird (je nachdem, welches der beiden Reservoirs betrachtet wird) als Kältemaschine bzw. Wärmepumpe betrieben.

In Abb. 2 (rechts) ist der Stirling-Motor als Kolbenmaschine und Heißluftmotor umgesetzt. Das Arbeitsgas ist Luft; der Bereich um die Heizwendel ist das Reservoir höherer Temperatur (T_1), während der untere Bereich mit Kühlwasser gekühlt wird (T_2). Zwei Kolben, der Arbeitskolben und der Verdrängerkolben, sind zwischen den Reservoirs angebracht und über Pleuelstangen um 90° versetzt an einem Schwungrad befestigt. Der Arbeitskolben komprimiert die Luft bzw. lässt sie expandieren, d.h. an ihm wird Arbeit verrichtet. Der Verdrängerkolben dient dazu, die Luft jeweils im richtigen Moment mit dem wärmeren oder kälteren Reservoir in Kontakt zu bringen. An ihm wird keine Arbeit verrichtet, da er das Volumen nicht ändert. Im Verdrängerkolben befindet sich zusätzlich Kupferwolle (der „Regenerator“), die durch Speicherung und Abgabe von Wärme beim Durchströmen der Luft den Wirkungsgrad erhöht.

Der Kreisprozess verläuft im Detail wie folgt:

Isotherme Expansion (1 → 2): Die Luft nimmt die Wärme Q_{12} von der Heizwendel auf, dehnt sich (isotherm bei T_1) aus und drückt den Arbeitskolben unter Verrichtung der Arbeit $-W_{12}$ nach unten.

Isochore Abkühlung (2 → 3): Bei der Bewegung um den unteren Tiefpunkt bewegt sich der Arbeitskolben fast nicht, d.h. $\Delta W \approx 0$. Der Verdrängerkolben bewegt die Luft, die dabei die Wärme $-Q_{23}$ an den Regenerator abgibt, nach unten.

Isotherme Kompression (3 → 4): Das Schwungrad bewegt den Arbeitskolben nach oben, sodass dieser die Luft (bei T_2) komprimiert. Die Wärme $-Q_{34}$ wird an das Kühlwasser abgegeben.

Isochore Erwärmung (4 → 1): Wie bei $2 \rightarrow 3$ wird (fast) keine Arbeit verrichtet. Der Verdrängerkolben bewegt die kalte Luft nach oben, die dabei die Wärme Q_{41} vom Regenerator aufnimmt.

2. Durchführung

2.1. Reibungsverluste

Beim Betrieb als Kältemaschine entzieht der Motor der Luft pro Zyklus eine bestimmte Wärmemenge Q_2 und führt dem Kühlwasser die Wärme $-Q_1$ zu. Dazu muss er mit der Arbeit $-W$ angetrieben werden. Außerdem gibt es Reibungsverluste W_R . Die Energiebilanz für einen Umlauf lautet also

$$W = Q_1 - Q_2 + W_R \quad (2.1)$$

Die Reibungsverluste wurden im ersten Versuchsteil bestimmt. Der Zylinderkopf des Stirling-Motors wurde dabei geöffnet und mit einem Elektromotor mit einer Frequenz f von ca. 3 Hz angetrieben, sodass jener sich im Leerlauf befand. Die genaue Betriebsfrequenz wurde mithilfe eines Drehwinkelmessers bestimmt. Dazu wurde ca. eine Minute lang der Verlauf der Winkelposition mit einer Abtastrate von 20 Hz gemessen und dann die Frequenz mittels FFT („Fast Fourier Transform“) im Programm DataStudio ermittelt.

Da sich der Stirling-Motor im Leerlauf befand, wurde an das Kühlwasser nur die durch Reibung dissipierte Wärme abgegeben. Der Temperaturanstieg des Kühlwassers wurde mit einem Thermometer gemessen. Um die Reibungswärme eines Umlaufs des Motors aus dem Temperaturanstieg mit (1.1) zu bestimmen, wurde neben der spezifischen Wärmekapazität c von Wasser auch die Masse m der Wassermenge, die während eines Umlaufs durch den Motor geflossen ist, benötigt. Zur Bestimmung dieser wurde der Volumendurchsatz $V' = V/t$ des Kühlwassers gemessen, denn $m = \rho V = \rho \frac{V'}{f}$. So ergab sich für die Reibungsarbeit W_R pro Umlauf:

$$W_R = \Delta Q = c_{\text{Wasser}} m \Delta T = c_{\text{Wasser}} \rho_{\text{Wasser}} \frac{V'}{f} \Delta T \quad (2.2)$$

2.2. Kühlleistung der Kältemaschine

Der Stirlingmotor wurde als nächstes als Kältemaschine betrieben, indem ein Reagenzglas mit destilliertem Wasser (ca. 1 ml) in den Zylinder eingesetzt wurde, sodass dieser verschlossen war. Der Elektromotor betrieb den Stirling-Motor mit der gleichen Frequenz wie bei der Messung der Reibungsverluste (also ca. 3 Hz) und der Temperaturverlauf des Wassers mit der Zeit wurde gemessen, bis die Temperatur etwa -25°C erreichte. (die Abtastrate wurde auf 5 Hz gesetzt). Aus dem Verlauf der Kurve konnten die Kühlleistung (übertragene Wärme pro Umlauf) und die Schmelzwärme des Wassers bestimmt werden. Die Kühlleistung wurde etwa bei Raumtemperatur bestimmt, da so der Einfluss der zusätzlichen Heizleistung durch die Raumluft minimiert wurde.

Außerdem wurden die Temperatur des abfließenden Kühlwassers und die des Kühlwassers im Reservoir gemessen, da aus dieser Temperaturdifferenz wieder die dem Kühlwasser zugeführte Wärme berechnet werden konnte. Aus den beiden Werten für die übertragenen Wärmebeträge pro Umlauf konnte schließlich die Leistungszahl ε mit (1.4) bestimmt werden.

2.3. Heizleistung der Wärmepumpe

Zum Betrieb als Wärmepumpe wurde der Elektromotor im zum vorherigen Versuch umgekehrten Drehsinn eingeschaltet. Die Drehzahl wurde weiterhin beibehalten. Wie bei der Kältemaschine wurden Temperaturverlauf des Wassers (Beginn bei -25°C) und Temperaturanstieg des Kühlwassers gemessen. So konnten analog zur Kältemaschine Heizleistung und Leistungszahl der Wärmepumpe bestimmt werden. Die spezifische Wärme von Eis konnte ebenfalls aus dem Temperaturverlauf gefolgert werden.

2.4. Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine

Der Stirling-Motor wurde nun als Wärmekraftmaschine betrieben, d.h. der Elektromotor wurde entfernt und stattdessen eine Heizwendel in den Zylinder eingesetzt. Der Stirling-Motor trieb nun selbst das Rad an.

Im ersten Versuchsteil wurde die Heizleistung und der Wirkungsgrad (unbelastet) mithilfe des (p, V) -Diagramms ermittelt. Dazu wurde der Motor bei Heizspannungen von ca. 8 V, 10 V, 12 V, 14 V und 16 V betrieben. Der Druck im Stirlingmotor und ein an den Kolben angeschlossenes Drehwinkel-Messgerät wurden dafür jeweils mit einer Abtastrate

von 1 kHz gemessen. Die Winkelposition war proportional zum Volumen der Luft im Motor. Dem minimalen und dem maximalen Drehwinkel aus den Messwerten (φ_{\min} bzw. φ_{\max}) entsprachen die Werte für das maximale Volumen $V_{\max} = 335,000 \text{ cm}^3$ und minimale Volumen $V_{\min} = 195 \text{ cm}^3$. Da der Zusammenhang linear ist, konnten mit einer Geradengleichung durch Einsetzen des Wertepaars V_{\max}, φ_{\min} und V_{\min}, φ_{\max} Steigung und Achsenabschnitt bestimmt werden. Deshalb wurde die Winkelposition wie folgt in das Volumen umgerechnet:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= m\varphi + b = \frac{\Delta V}{\Delta \varphi} + b = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{\varphi_{\min} - \varphi_{\max}} + b \\ b &= V_{\max} - \frac{\Delta V}{\Delta \varphi} \varphi_{\min} = V_{\min} - \frac{\Delta V}{\Delta \varphi} \varphi_{\max} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es wurde für jede Messung die jeweilige Heizspannung eingestellt und der Motor konnte für einige Minuten warmlaufen. Die erzeugte Frequenz wurde durch Messung der Winkelposition (ca. 1 min lang) und FFT bestimmt. Für die zugeführte Heizleistung wurden die gemessenen Werte von Stromstärke und Spannung bei der Heizwendel verwendet. Die Stromstärke wurde dabei mit einem Induktionsdraht bestimmt. Dieser wurde dreimal um das Kabel gewickelt; so entsprachen 3 mV gemessene Spannung einer Stromstärke von 1 A.

Im zweiten Teil wurde der belastete Stirling-Motor mit dem Pronyschen Zaum untersucht. Die Heizspannung war konstant bei ca. 16 V. Der Zaum wurde am Schwungrad befestigt, sodass dieses abgebremst wurde. Die Leistung des Motors ließ sich bestimmen, indem mit einer Federwaage die vom Zaum ausgeübte Kraft F gemessen wurde:

$$P = 2\pi f M = 2\pi f F r \quad (2.4)$$

Dabei ist r die Länge von der Mitte des Zaums bis zum Angreifpunkt der Federwaage. Die Messung wurde für 12 Werte von f durchgeführt. Es wurde der Wirkungsgrad gegen die Frequenz dargestellt und so das Wirkungsgradmaximum ermittelt.

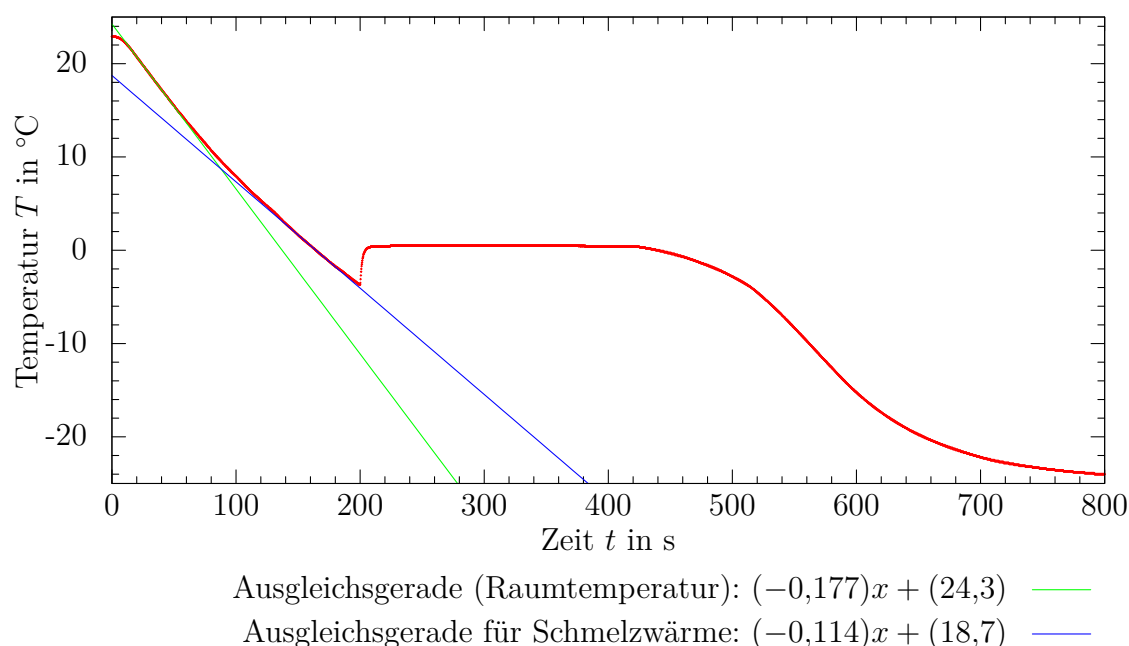


Abbildung 3: Kühltemperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t (Abkühlen).

3. Auswertung²

3.1. Kältemaschine

Zunächst wurde der Volumendurchsatz des Kühlwassers gemessen. Dieser betrug $(4,161 \pm 0,026)$ ml/s. Die Temperatur des Kühlwassers stieg von $20,3^\circ\text{C}$ um $0,5^\circ\text{C}$ auf $20,8^\circ\text{C}$. Das entspricht nach (2.2) einer Reibungsarbeit pro Umlauf von $(2,90 \pm 0,58)$ J.

In Abb. 3 sind deutlich die verschiedenen Phasen des Abkühlungsprozesses zu erkennen. Zu Beginn gibt es einen nahezu linearen Abfall auf ca. -4°C . Da es sich um destilliertes Wasser handelt und somit Kristallisationskeime fehlen, fällt die Temperatur sogar unter 0°C . Es folgt ein Sprung auf 0°C , bei dem die Temperatur für einige Zeit $((220 \pm 10)$ s) stagniert. In dieser Phase wird dem Wasser weiter Energie entzogen, bis es in den festen Zustand überführt werden kann. Anschließend sinkt die Temperatur weiter ab bis auf

²Die ermittelten Messwerte sind im Laborbuch zu finden. Die in der Auswertung angegebenen Unsicherheiten auf den Ergebnissen wurden bei direkter Messung aus dem abgeschätzten systematischen Fehler und (bei mehreren Messungen) dem statistischen Fehler und bei berechneten Größen mit der Fehlerfortpflanzung bestimmt (s. Anhang A.1). Bei der grafischen Auswertung wurden die Abbildungen, berechneten Parameter und zugehörige Unsicherheiten durch gnuplot (Williams, Thomas, Kelley, Colin u. a. *gnuplot* 4.6. 12. Apr. 2013. URL: <http://www.gnuplot.info>) bestimmt.

-24°C .

Die Kühlleistung P_K der Kältemaschine wurde mithilfe einer Ausgleichsgerade und (1.1) bestimmt. Sie liegt bei $P_K = (-0,67 \pm 0,15) \text{ W}$.

Die Schmelzwärme des Wassers konnte mit der Kühlleistung um den Gefrierpunkt (bestimmt aus einer weiteren Ausgleichsgerade) und der Dauer des Gefrierprozesses (s.o.) bestimmt werden. Für destilliertes Wasser liegt die gemessene Schmelzwärme ΔQ bei $(213,56 \pm 49,41) \text{ J}$.

Aus der pro Umlauf an das Kühlwasser abgegebenen Wärme $Q_1 = (0,627 \pm 0,144) \text{ J}$, der dem destillierten Wasser pro Umlauf entzogenen Wärme $Q_2 = (-0,222 \pm 0,049) \text{ J}$ und der Reibungsarbeit $W_R = (2,90 \pm 0,58) \text{ J}$ ergibt die Leistungszahl der Kältemaschine $\varepsilon_K = 0,067 \pm 0,020 = (6,7 \pm 2,0) \%$

3.2. Wärmepumpe

Die Heizleistung P_K der Wärmepumpe wurde wie die Kühlleistung zuvor mithilfe einer Ausgleichsgerade bestimmt. Sie liegt bei $P_K = (1,35 \pm 0,15) \text{ W}$ und ist somit deutlich höher als die Kühlleistung des gleichen Stirling-Motors.

In Abb. 4 sind wie bei der Kältemaschine die unterschiedlichen Phasen des Erwärmungsprozesses zu erkennen. Die Temperatur steigt annähernd linear bis ca 0°C an und verbleibt für einige Zeit bei dieser Temperatur. Es wird Energie aufgenommen, die das Eis für den Schmelzprozess benötigt. Da die Heizleistung der Wärmepumpe höher ist als die Kühlleistung der Kältemaschine, ist diese Phase bei der Wärmepumpe schon nach ca. $(150 \pm 10) \text{ s}$, und somit 70 s schneller als bei der Kältemaschine, vorbei. Anschließend folgt ein abflachender Anstieg auf eine Temperatur von 70°C . Dieser wird durch die Raumtemperatur beeinflusst; bis 20°C steigt die Temperatur schneller als im restlichen Verlauf, da die Raumtemperatur bis dahin eine zusätzliche Heizleistung auf das Wasser ausübt.

Aus der dem Kühlwasser zugeführten Wärme $Q_1 = (0,40 \pm 0,10) \text{ J}$ und der dem destillierten Wasser zugeführten Wärme $Q_2 = (0,45 \pm 0,05) \text{ J}$ sowie der Reibungsarbeit ergibt die Leistungszahl der Wärmepumpe $\varepsilon_W = 0,16 \pm 0,04 = (15,8 \pm 3,8) \%$. Die Leistungszahl der Wärmepumpe ist ca. doppelt so hoch wie die der Kältemaschine.

Für die spezifische Wärme von Eis wurde der vom Motor erzeugte Temperaturanstieg pro Sekunde in der festen Phase mit dem in der flüssigen verglichen. Da der Motor dem Wasser die gleiche Leistung zuführt, ist der Unterschied auf die Wärmekapazitäten

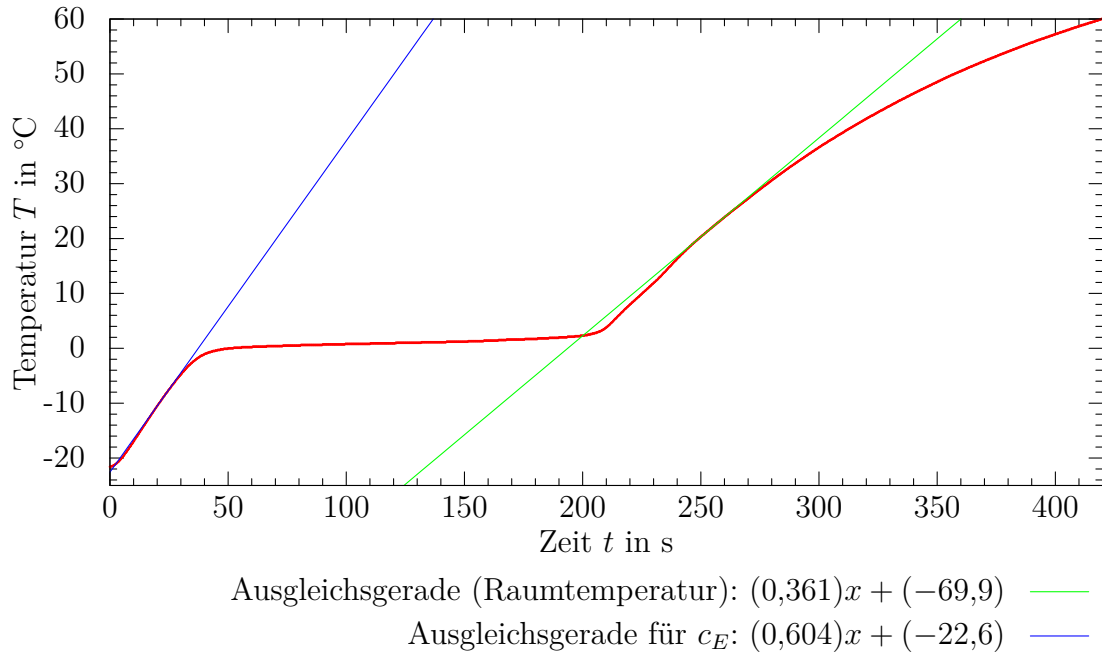


Abbildung 4: Erhitzungstemperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t (Erhitzen).

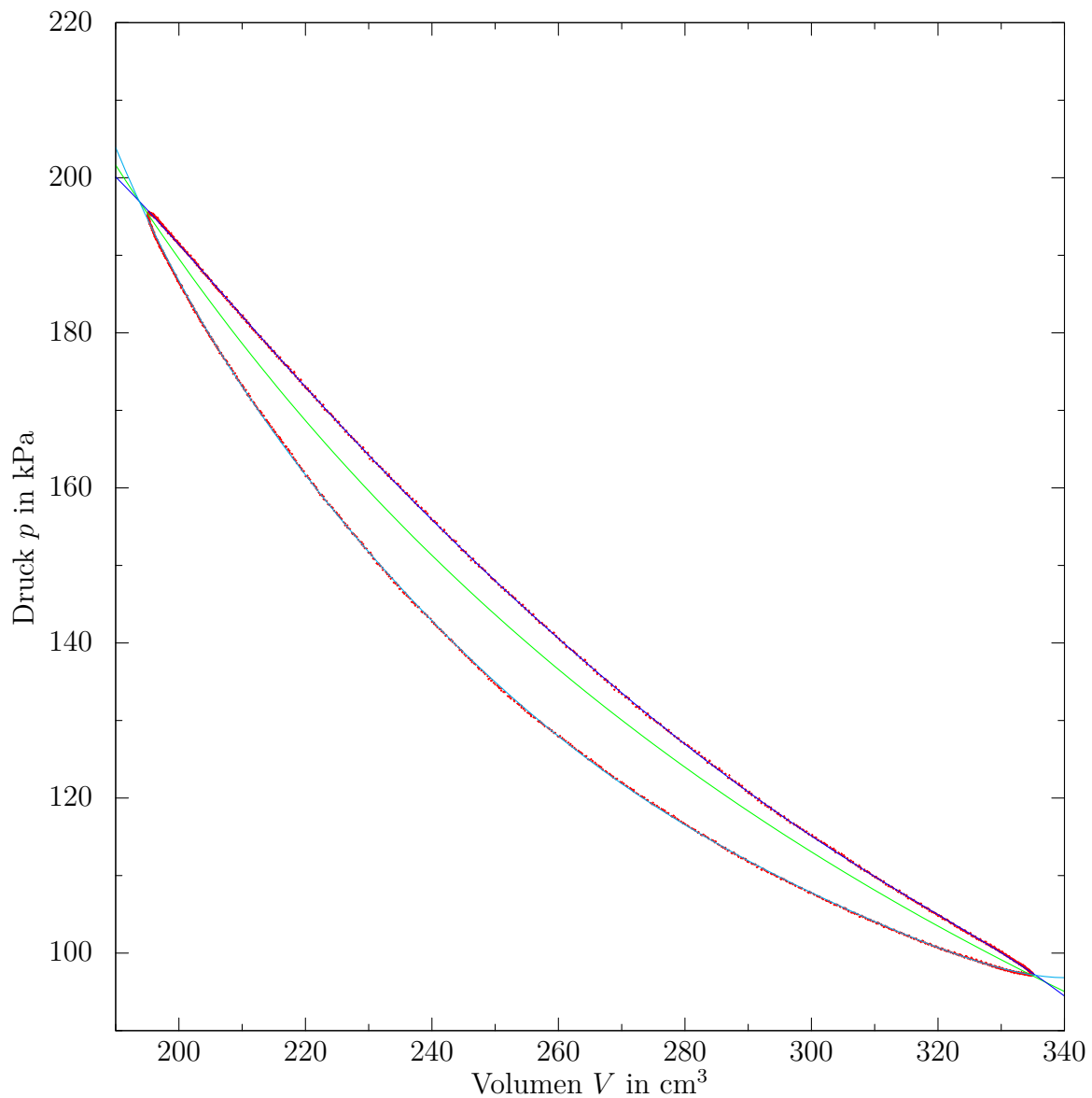
zurückzuführen: $c_W m \Delta T_W = c_E m \Delta T_E$. Die spezifische Wärme von Eis wurde so auf $c_E = (2,49 \pm 0,04) \text{ J/(gK)}$ bestimmt.

3.3. Wirkungsgrad aus dem (p, V) -Diagramm

Wie in der Durchführung beschrieben wurde der Stirling-Motor mit einer Heizwendel als Wärmekraftmaschine betrieben. Für verschiedene Heizspannungen U_H wurde die Heizleistung bestimmt, das (p, V) -Diagramm gezeichnet und so der Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine berechnet. Da das Vorgehen für jeden Wert der Heizspannung gleich ist, wird es einmal (für $U_H = 8 \text{ V}$) ausführlich erläutert und für die weiteren Werte nur verkürzt dargestellt.

3.3.1. Betrieb mit 8 V

In Abb. 5 ist die Auswertung der Messwerte für das (p, V) -Diagramm bei einer Heizspannung von ca. 8 V zu sehen. Zunächst musste für die Skalierung der V -Achse die



Messwerte ·

Trennkurve —

Approximation obere Hälfte: $f(x) = (-9,07 \cdot 10^3) + (220)x + (-2,13)x^2$
 $+ (0,0109)x^3 + (-3,13 \cdot 10^{-5})x^4 + (4,77 \cdot 10^{-8})x^5 + (-3,01 \cdot 10^{-11})x^6$
 Approximation untere Hälfte: $g(x) = (2 \cdot 10^4) + (-445)x + (4,18)x^2$
 $+ (-0,021)x^3 + (5,93 \cdot 10^{-5})x^4 + (-8,88 \cdot 10^{-8})x^5 + (5,52 \cdot 10^{-11})x^6$

Abbildung 5: (p, V) -Diagramm für $U_H = 8 \text{ V}$.

gemessene Winkelposition mit (2.3) in das entsprechende Volumen umgerechnet werden:

$$\begin{aligned}\varphi_{\min} &= -0,335 \text{ rad} \\ \varphi_{\max} &= 1,684 \text{ rad} \\ \Rightarrow V(\varphi) &= -69,341 \text{ cm}^3 \text{ rad}^{-1} \cdot \varphi + 311,771 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Um die pro Umlauf geleistete Arbeit zu berechnen, musste die von der Kurve in Abb. 5 eingeschlossene Fläche bestimmt werden. Dazu wurde wie folgt vorgegangen: Die obere und die untere „Hälfte“ der Kurve wurden voneinander getrennt, mittels eines Fit je eine Funktion für beide Kurvenhälften ermittelt und beide Funktionen von V_{\min} bis V_{\max} integriert. Der Wert des jeweiligen Integrals ist die Fläche unter der jeweiligen Kurvenhälfte. Die Differenz des oberen und des unteren Integrals ist damit die gesuchte eingeschlossene Fläche, d.h. die pro Umlauf vom Motor verrichtete Arbeit.

Um die Kurvenhälften zu trennen, wurde mit gnuplot eine „Trennkurve“ ermittelt. Ein Fit der Form $a/v + b$ und geringfügige manuelle Modifikationen des Ergebnisses lieferten in allen Fällen eine geeignete Trennkurve, die zwischen oberer und unterer Hälfte verlief. Alle Punkte oberhalb der Trennkurve wurden zur oberen, alle unterhalb zur unteren Hälfte gezählt.

Da beim Stirling-Kreisprozess (Abb. 2) ein ideales Gas angenommen wurde, würde man nach (1.2) für die Isothermen einen Verlauf der Kurvenhälften $\sim 1/v$ erwarten. Wie aber bereits in Abb. 5 zu sehen ist, folgt der reale Stirling-Motor nicht diesem idealisierten Verlauf. Die Kurvenhälften wurden deshalb jeweils mit einem Polynom 6. Grades approximiert (die ermittelten Parameter sind in den Abbildungen zu finden).

Die Integration ergab die folgenden Ergebnisse für die obere (I_o) und untere (I_u) Kurve:

$$\begin{aligned}I_o &= 19666,93 \text{ mJ} \\ I_u &= 18406,36 \text{ mJ} \\ \Rightarrow |W| &= I_o - I_u = (1,26 \pm 0,05) \text{ J}\end{aligned}$$

Der Fehler des Flächeninhalts wurde dabei nach Betrachtung der Abbildung mit 50 Flächeneinheiten (= 50 mJ) abgeschätzt.

Zur Bestimmung des Wirkungsgrads wurden noch die elektrische Leistung P_H der Heizwendel und die Frequenz f des Motors bestimmt. Mit den gemessenen Werten für

die Stromstärke und Spannung ergab sich für die Heizleistung:

$$P_H = U_H I_H = (7,40 \pm 0,10) \text{ V} \cdot (9,33 \pm 0,33) \text{ A} = (69,1 \pm 2,6) \text{ W}$$

Die Frequenz wurde aus dem Frequenzspektrum (FFT) auf $f = (3,48 \pm 0,02) \text{ Hz}$ bestimmt. Als Fehler wurde die Halbwertsbreite im Frequenzspektrum der FFT gewählt. Die entsprechenden Abbildungen (die ansonsten keinen Zweck erfüllen) wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in das Protokoll aufgenommen. Die pro Umlauf zugeführte Wärme Q errechnete sich so zu

$$Q = \frac{P_H}{f} = (19,86 \pm 0,77) \text{ J}$$

Mit (1.4) ergab sich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{|Q|} = 0,063 \pm 0,004 = (6,3 \pm 0,4) \%$$

3.3.2. Betrieb mit 10 V

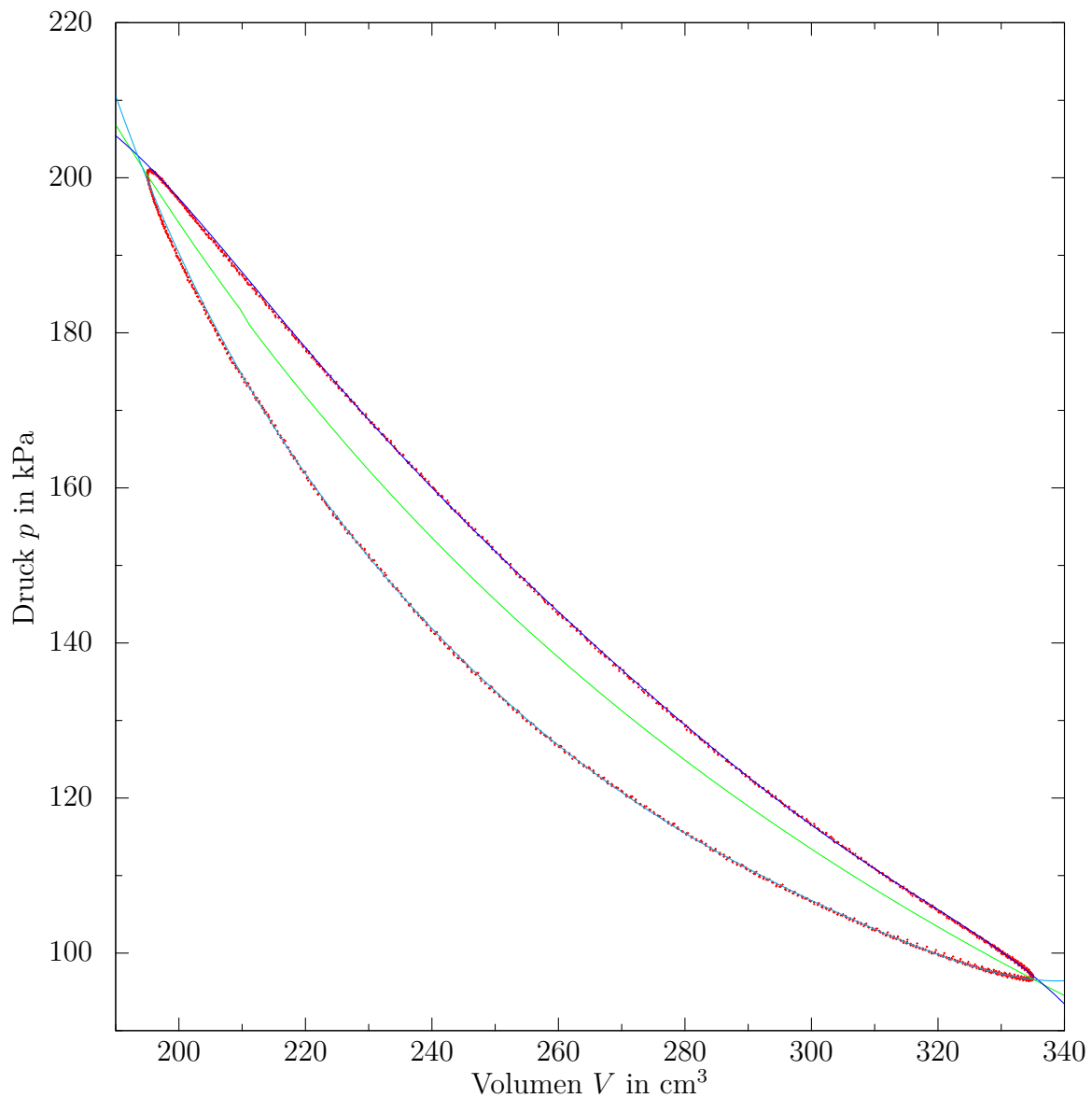
In Abb. 6 ist die Auswertung der Messwerte für das (p, V) -Diagramm bei einer Heizspannung von ca. 10 V zu sehen. Zunächst musste für die Skalierung der V -Achse die gemessene Winkelposition mit (2.3) in das entsprechende Volumen umgerechnet werden:

$$\begin{aligned} \varphi_{\min} &= -2,015 \text{ rad} \\ \varphi_{\max} &= 0,006 \text{ rad} \\ \Rightarrow V(\varphi) &= -69,273 \text{ cm}^3 \text{ rad}^{-1} \cdot \varphi + 195,416 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Die Integration ergab die folgenden Ergebnisse für die obere (I_o) und untere (I_u) Kurve:

$$\begin{aligned} I_o &= 20099,44 \text{ mJ} \\ I_u &= 18350,85 \text{ mJ} \\ \Rightarrow |W| &= I_o - I_u = (1,75 \pm 0,05) \text{ J} \end{aligned}$$

Mit den gemessenen Werten für die Stromstärke und Spannung ergab sich für die



Messwerte ·

Trennkurve —

Approximation obere Hälfte: $f(x) = (-2,08 \cdot 10^4) + (494)x + (-4,78)x^2$
 $+ (0,0244)x^3 + (-6,98 \cdot 10^{-5})x^4 + (1,06 \cdot 10^{-7})x^5 + (-6,64 \cdot 10^{-11})x^6$
 Approximation untere Hälfte: $g(x) = (2,06 \cdot 10^4) + (-451)x + (4,19)x^2$
 $+ (-0,0209)x^3 + (5,84 \cdot 10^{-5})x^4 + (-8,72 \cdot 10^{-8})x^5 + (5,4 \cdot 10^{-11})x^6$

Abbildung 6: (p, V) -Diagramm für $U_H = 10 \text{ V}$.

Heizleistung:

$$P_H = U_H I_H = (9,10 \pm 0,10) \text{ V} \cdot (11,00 \pm 0,33) \text{ A} = (100,1 \pm 3,2) \text{ W}$$

Die Frequenz wurde auf $f = (5,00 \pm 0,03) \text{ Hz}$ bestimmt. Die pro Umlauf zugeführte Wärme Q errechnete sich so zu

$$Q = \frac{P_H}{f} = (20,02 \pm 0,66) \text{ J}$$

Mit (1.4) ergab sich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{|Q|} = 0,087 \pm 0,004 = (8,7 \pm 0,4) \%$$

3.3.3. Betrieb mit 12 V

In Abb. 7 ist die Auswertung der Messwerte für das (p, V) -Diagramm bei einer Heizspannung von ca. 12 V zu sehen. Zunächst musste für die Skalierung der V -Achse die gemessene Winkelposition mit (2.3) in das entsprechende Volumen umgerechnet werden:

$$\begin{aligned} \varphi_{\min} &= -1,704 \text{ rad} \\ \varphi_{\max} &= 0,327 \text{ rad} \\ \Rightarrow V(\varphi) &= -68,932 \text{ cm}^3 \text{ rad}^{-1} \cdot \varphi + 217,541 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

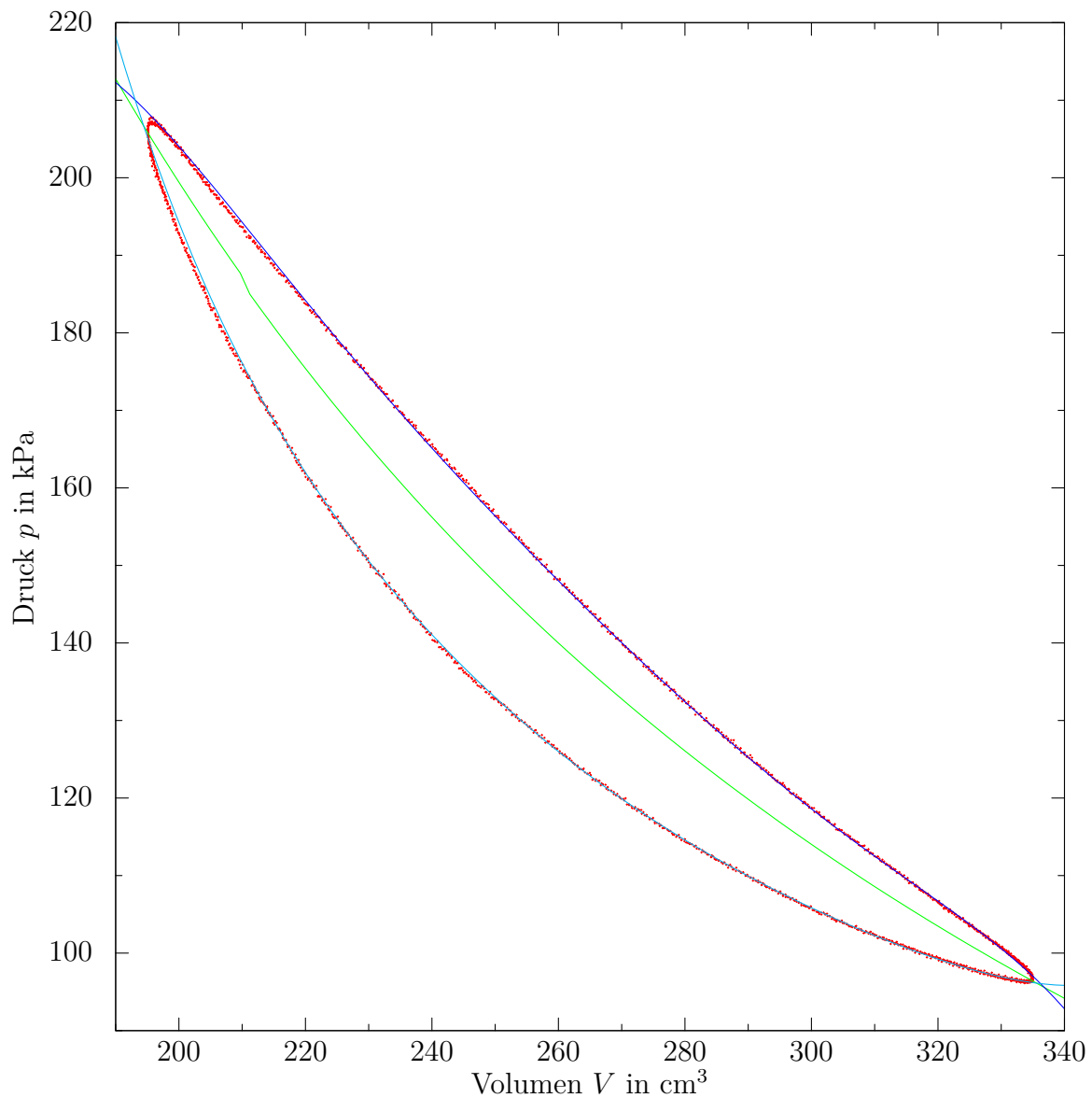
Die Integration ergab die folgenden Ergebnisse für die obere (I_o) und untere (I_u) Kurve:

$$\begin{aligned} I_o &= 20625,00 \text{ mJ} \\ I_u &= 18325,81 \text{ mJ} \\ \Rightarrow |W| &= I_o - I_u = (2,30 \pm 0,05) \text{ J} \end{aligned}$$

Mit den gemessenen Werten für die Stromstärke und Spannung ergab sich für die Heizleistung:

$$P_H = U_H I_H = (11,00 \pm 0,10) \text{ V} \cdot (12,67 \pm 0,33) \text{ A} = (139,3 \pm 3,9) \text{ W}$$

Die Frequenz wurde auf $f = (6,29 \pm 0,04) \text{ Hz}$ bestimmt. Die pro Umlauf zugeführte



Messwerte ·

Trennkurve —

Approximation obere Hälfte: $f(x) = (-2,08 \cdot 10^4) + (494)x + (-4,78)x^2$
 $+ (0,0244)x^3 + (-7 \cdot 10^{-5})x^4 + (1,06 \cdot 10^{-7})x^5 + (-6,7 \cdot 10^{-11})x^6$

Approximation untere Hälfte: $g(x) = (1,77 \cdot 10^4) + (-368)x + (3,27)x^2$
 $+ (-0,0156)x^3 + (4,2 \cdot 10^{-5})x^4 + (-6,06 \cdot 10^{-8})x^5 + (3,65 \cdot 10^{-11})x^6$

Abbildung 7: (p, V) -Diagramm für $U_H = 12 \text{ V}$.

Wärme Q errechnete sich so zu

$$Q = \frac{P_H}{f} = (22,16 \pm 0,63) \text{ J}$$

Mit (1.4) ergab sich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{|Q|} = 0,104 \pm 0,004 = (10,4 \pm 0,4) \%$$

3.3.4. Betrieb mit 14 V

In Abb. 8 ist die Auswertung der Messwerte für das (p, V) -Diagramm bei einer Heizspannung von ca. 14 V zu sehen. Zunächst musste für die Skalierung der V -Achse die gemessene Winkelposition mit (2.3) in das entsprechende Volumen umgerechnet werden:

$$\begin{aligned}\varphi_{\min} &= -0,066 \text{ rad} \\ \varphi_{\max} &= 1,967 \text{ rad} \\ \Rightarrow V(\varphi) &= -68,864 \text{ cm}^3 \text{ rad}^{-1} \cdot \varphi + 330,455 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Die Integration ergab die folgenden Ergebnisse für die obere (I_o) und untere (I_u) Kurve:

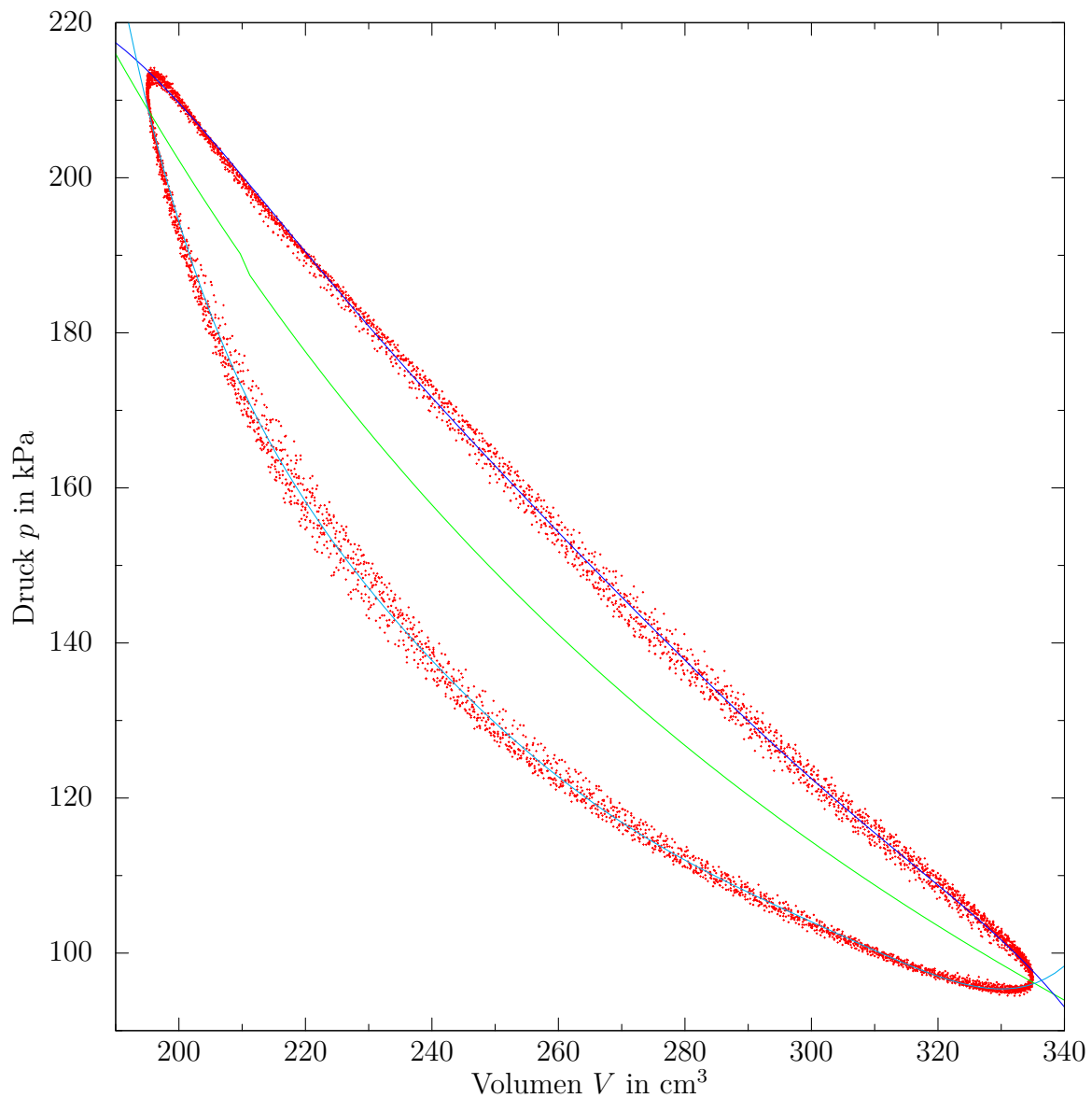
$$\begin{aligned}I_o &= 21320,45 \text{ mJ} \\ I_u &= 17976,60 \text{ mJ} \\ \Rightarrow |W| &= I_o - I_u = (3,34 \pm 0,05) \text{ J}\end{aligned}$$

Mit den gemessenen Werten für die Stromstärke und Spannung ergab sich für die Heizleistung:

$$P_H = U_H I_H = (13,30 \pm 0,10) \text{ V} \cdot (14,67 \pm 0,33) \text{ A} = (195,1 \pm 4,7) \text{ W}$$

Die Frequenz wurde auf $f = (7,50 \pm 0,04) \text{ Hz}$ bestimmt. Die pro Umlauf zugeführte Wärme Q errechnete sich so zu

$$Q = \frac{P_H}{f} = (26,01 \pm 0,63) \text{ J}$$



Messwerte ·

Trennkurve —

Approximation obere Hälfte: $f(x) = (-2,08 \cdot 10^4) + (494)x + (-4,78)x^2$
 $+ (0,0244)x^3 + (-6,99 \cdot 10^{-5})x^4 + (1,06 \cdot 10^{-7})x^5 + (-6,68 \cdot 10^{-11})x^6$ —
 Approximation untere Hälfte: $g(x) = (7,59 \cdot 10^4) + (-1,7 \cdot 10^3)x + (15,9)x^2$
 $+ (-0,0794)x^3 + (0,000222)x^4 + (-3,31 \cdot 10^{-7})x^5 + (2,04 \cdot 10^{-10})x^6$ —

Abbildung 8: (p, V) -Diagramm für $U_H = 14 \text{ V}$.

Mit (1.4) ergab sich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{|Q|} = 0,129 \pm 0,004 = (12,9 \pm 0,4) \%$$

3.3.5. Betrieb mit 16 V

In Abb. 9 ist die Auswertung der Messwerte für das (p, V) -Diagramm bei einer Heizspannung von ca. 16 V zu sehen. Zunächst musste für die Skalierung der V -Achse die gemessene Winkelposition mit (2.3) in das entsprechende Volumen umgerechnet werden:

$$\begin{aligned}\varphi_{\min} &= -0,759 \text{ rad} \\ \varphi_{\max} &= 1,280 \text{ rad} \\ \Rightarrow V(\varphi) &= -68,661 \text{ cm}^3 \text{ rad}^{-1} \cdot \varphi + 282,886 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Die Integration ergab die folgenden Ergebnisse für die obere (I_o) und untere (I_u) Kurve:

$$\begin{aligned}I_o &= 21205,01 \text{ mJ} \\ I_u &= 17819,97 \text{ mJ} \\ \Rightarrow |W| &= I_o - I_u = (3,39 \pm 0,05) \text{ J}\end{aligned}$$

Mit den gemessenen Werten für die Stromstärke und Spannung ergab sich für die Heizleistung:

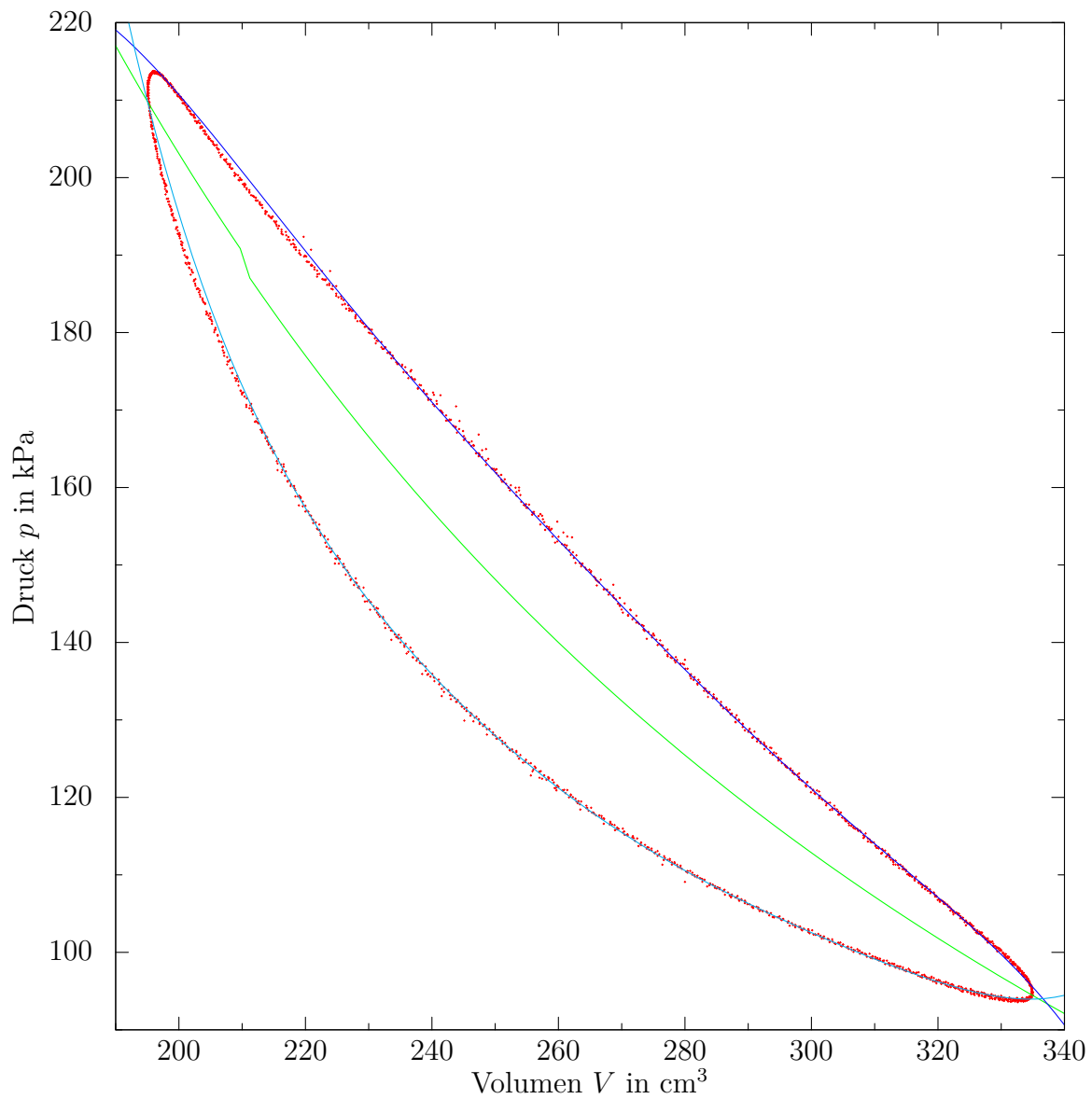
$$P_H = U_H I_H = (14,60 \pm 0,10) \text{ V} \cdot (16,00 \pm 0,33) \text{ A} = (233,6 \pm 5,1) \text{ W}$$

Die Frequenz wurde auf $f = (8,36 \pm 0,02) \text{ Hz}$ bestimmt. Die pro Umlauf zugeführte Wärme Q errechnete sich so zu

$$Q = \frac{P_H}{f} = (27,95 \pm 0,62) \text{ J}$$

Mit (1.4) ergab sich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{|Q|} = 0,121 \pm 0,003 = (12,1 \pm 0,3) \%$$



Messwerte

Trennkurve

Approximation obere Hälfte: $f(x) = (-2,08 \cdot 10^4) + (494)x + (-4,78)x^2$
 $+ (0,0244)x^3 + (-6,98 \cdot 10^{-5})x^4 + (1,06 \cdot 10^{-7})x^5 + (-6,67 \cdot 10^{-11})x^6$

Approximation untere Hälfte: $g(x) = (4,18 \cdot 10^4) + (-903)x + (8,21)x^2$
 $+ (-0,0399)x^3 + (0,000109)x^4 + (-1,59 \cdot 10^{-7})x^5 + (9,67 \cdot 10^{-11})x^6$

Abbildung 9: (p, V) -Diagramm für $U_H = 16 \text{ V}$.

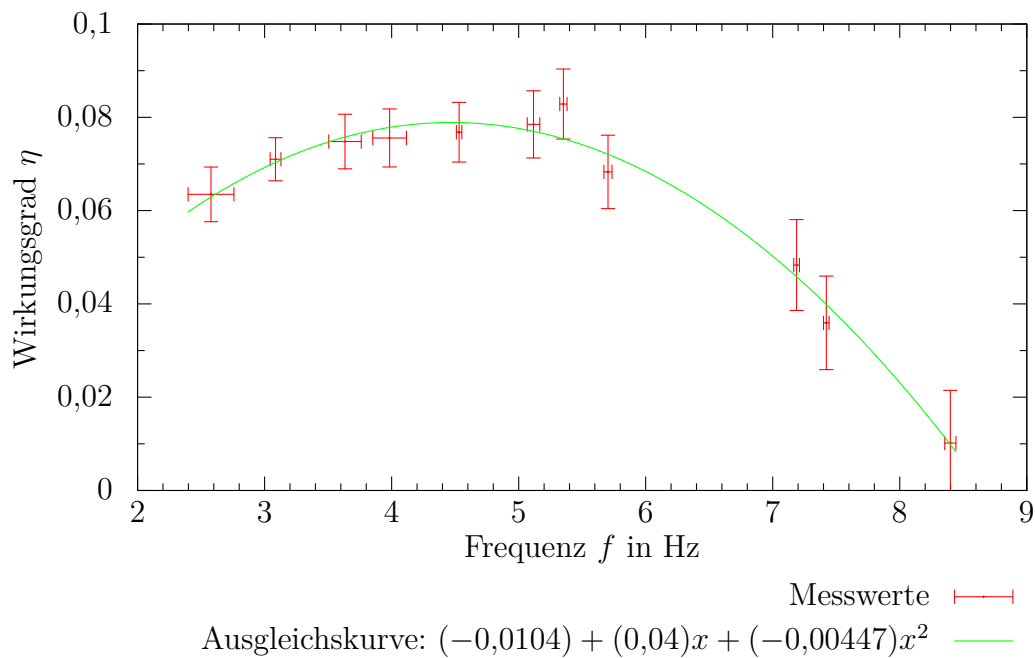


Abbildung 10: Gemessene Wirkungsgrade und Motorfrequenzen beim Betrieb unter Last mit dem Pronyschen Zaum.

3.4. Wirkungsgrad mit Abbremsen

Die Messungen mit dem Pronyschen Zaum wurden wie in der Durchführung beschrieben durchgeführt. Es wurde sowohl die Leistung des Motors mit (2.4) als auch die elektrische Heizleistung gemessen. Bei der letzteren waren für alle Messungen $U = (14,6 \pm 0,2) \text{ V}$ und $I = (16,0 \pm 0,3) \text{ A}$, d.h. $P_{\text{el}} = (233,6 \pm 5,8) \text{ W}$. Die Ergebnisse sind in Abb. 10 zu sehen. Der Wirkungsgrad wurde analog zu (1.4) berechnet: $\eta = |W|/|Q| = P/P_{\text{el}}$.

Ebenfalls abgebildet ist eine quadratische Ausgleichskurve, da die Messwerte einem parabelförmigen Verlauf zu folgen scheinen. Identifiziert man das Maximum der Ausgleichskurve mit dem Wirkungsgradmaximum, so liegt dieses bei

$$\eta_{\max} = 0,0791 = 7,91 \%$$

$$f_{\max} = 4,47 \text{ Hz}$$

4. Diskussion

Bei der Bestimmung der Kühlleistung für die Kältemaschine war es wichtig, das Verhältnis $\Delta T/\Delta t$ bei Raumtemperatur zu messen, da sonst die von der Raumluft übertragene Wärme ebenfalls einen Einfluss haben würde.

Bei der Bestimmung der Schmelzwärme von destilliertem Wasser liegt der Literaturwert bei 334 J)³. Der gemessene Wert weicht vom Literaturwert ab, was dadurch bedingt ist, dass der Stirling-Motor nicht komplett von der Umgebung abgeschlossen ist und somit noch Wärme von außen hinzu kommt. Eine weitere Fehlerquelle könnte die geringe Menge des Wassers sein: Zum einen ist die so mögliche Ungenauigkeit relativ hoch, zum anderen kühlt der Motor neben dem Wasser z.B. auch die Luft im Reagenzglas und das Glas selbst. Aufgrund der geringen Wassermenge könnten diese Einflüsse eine starke Auswirkung haben.

Bei der Bestimmung der spezifischen Wärme von Eis wurde eine Temperatur von $T = -9^\circ\text{C}$ vorausgesetzt, da im Bereich von ca. -3°C bis 2°C die Kurve stark abfällt und somit die Werte dadurch verfälscht werden können. Der berechnete Wert stimmt innerhalb des Messfehlers mit dem Literaturwert von $(2,1 \text{ J}/(\text{gK}))$ ⁴ überein. Auch hier sind Abweichungen durch den von der Umgebung schlecht isolierten Stirling-Motor und Nebeneffekte des Versuchsaufbaus zu erklären.

Bei der Bestimmung des Wirkungsgrades des Stirling-Motors als Wärmekraftmaschine mithilfe der (p, V) -Diagramme entsprachen die Ergebnisse den Erwartungen. Die entstandenen Diagramme haben alle eine dem idealen Stirling-Prozess angenäherte, „bananenförmige“ Gestalt. Das Druckminimum liegt bei allen Heizspannungen bei einem ähnlichen Wert, während das Maximum aufgrund der schnelleren Bewegung des Kolbens bei höheren Spannungen etwas ansteigt. Mit zunehmender Heizleistung nimmt auch die Fläche im (p, V) -Diagramm, also die Leistung des Motors, zu. Da dem Motor mehr Energie zugeführt wird, kann er auch mehr Arbeit verrichten. Die einzige auffällige Abbildung ist Abb. 8, bei der eine relativ hohe Streuung der Messpunkte auftritt. Da der Tisch, auf dem der Motor stand, während des Versuchs stark wackelte, liegt die Vermutung nahe, dass bei dieser Frequenz des Motors der Tisch zu besonders starken Schwingungen angeregt wurde und so dessen Verhalten beeinflusst hat.

Die Wirkungsgrade nahmen mit zunehmender Heizspannung von 6,3% bei 8 V bis

³Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. 20. Aufl. 2011, S. 636.

⁴Ebd., S. 630.

mehr als 12 % bei 14 V und 16 V zu. Am höchsten war der Wirkungsgrad bei 14 V, sodass dort ein Wirkungsgradmaximum für den unbelasteten Motor vorliegen könnte. Allerdings liegt der Wert bei 16 V im Bereich der Messunsicherheit, sodass es sich auch um eine messbedingte Abweichung handeln könnte.

Bei der Bestimmung des Wirkungsgrads mit dem Pronyschen Zaum schienen die Werte einem parabelförmigen Verlauf zu folgen. So konnte aus einer Ausgleichskurve das Wirkungsgradmaximum des belasteten Motors auf 7,91 % ($f = 4,47 \text{ Hz}$) bestimmt werden. Ein einzelner Punkt bei ca. 5,5 Hz lag relativ weit über der Kurve (dort lag das Maximum der tatsächlich gemessenen Werte). Allerdings lässt sich aufgrund der starken Abweichung vom Verlauf der restlichen Punkte sagen, dass es sich vermutlich um einen Messfehler handelt. Der Zaum musste z.B. immer parallel zum Boden liegen, damit das Drehmomentgleichgewicht nach (2.4) gilt. Mit bloßem Augenmaß lässt die Genauigkeit dort zu wünschen übrig, sodass Abweichungen entstehen können.

A. Anhang

A.1. Fehlerrechnung

Die aufgrund der Unsicherheit in der Zeitmessung entstandenen Messunsicherheiten waren so gering, dass sie bei der Auswertung vernachlässigt wurden. Insbesondere waren sie in der grafischen Darstellung zu klein, um sichtbar zu sein.

Bei der mehreren Messungen derselben Größe (hier: Volumendurchsatz des Kühlwassers) bestimmt sich die Unsicherheit des Mittelwerts aus einem möglichen systematischen Fehler u und dem statistischen Fehler mit der Standardabweichung s , der Anzahl der Messungen n und dem Korrekturfaktor τ :

$$\Delta a = u + \frac{\tau s}{\sqrt{n}}$$

Dabei wurde τ für ein Vertrauensniveau von 95,45 % bzw. 2σ gewählt.

Bei aus Messwerten berechneten Größen muss zur Bestimmung der Unsicherheit der Größe die Fehlerfortpflanzung angewandt werden. Bei den folgenden Größen wurde dies durchgeführt. Es ergibt sich:

Für die an das Wasser abgegebene Wärme bzw. die Reibungsarbeit:

$$\Delta Q = \Delta W_R = \sqrt{\frac{\Delta \rho^2 T^2 V'^2 c_W^2}{f^2} + \frac{\Delta f^2 T^2 V'^2 c_W^2 \rho^2}{f^4} + \frac{\Delta c_W^2 T^2 V'^2 \rho^2}{f^2} + \frac{\Delta V'^2 T^2 c_W^2 \rho^2}{f^2} + \frac{\Delta T^2 V'^2 c_W^2 \rho^2}{f^2}}$$

Für die Heiz- und Kühlleistung:

$$\Delta P = \sqrt{\Delta m_W^2 c_W^2 m^2 + \Delta m^2 c_W^2 m_W^2 + \Delta c_W^2 m^2 m_W^2}$$

Für die abgegebene Wärme pro Umlauf:

$$\Delta Q_U = \sqrt{\frac{\Delta f^2 P^2}{f^4} + \frac{\Delta P^2}{f^2}}$$

Für die Leistungszahl von Kältemaschine und Wärmepumpe:

$$\Delta\varepsilon = \left(\Delta Q_2^2 \left(\frac{Q_2}{|Q_1 - Q_2 + W_R| |Q_2|} + \frac{(Q_1 - Q_2 + W_R) |Q_2|}{|Q_1 - Q_2 + W_R|^3} \right)^2 + \frac{\Delta Q_1^2 (Q_1 - Q_2 + W_R)^2 |Q_2|^2}{|Q_1 - Q_2 + W_R|^6} + \frac{\Delta W_R^2 (Q_1 - Q_2 + W_R)^2 |Q_2|^2}{|Q_1 - Q_2 + W_R|^6} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für die spezifische Wärmekapazität von Eis:

$$\Delta c_E = \sqrt{\frac{\Delta m_W^2 c_W^2}{m_E^2} + \frac{\Delta m_E^2 c_W^2 m_W^2}{m_E^4} + \frac{\Delta c_W^2 m_W^2}{m_E^2}}$$

Für die elektrische Heizleistung:

$$\Delta P_{\text{el}} = \sqrt{\Delta U^2 I^2 + \Delta I^2 U^2}$$

Für den Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine:

$$\Delta\eta = \sqrt{\frac{\Delta W^2 W^2}{|Q|^2 |W|^2} + \frac{\Delta Q^2 Q^2 |W|^2}{|Q|^6}}$$

Für die Leistung beim Pronyschen Zaum:

$$\Delta P_Z = \sqrt{4 \pi^2 \Delta r^2 F^2 f^2 + 4 \pi^2 \Delta f^2 F^2 r^2 + 4 \pi^2 \Delta F^2 f^2 r^2}$$

Die jeweiligen berechneten Unsicherheiten sind in der Auswertung zu finden.

Literatur

- Donath, Markus und Schmidt, Anke. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Optik, Wärmelehre und Atomphysik*. Auflage Sommersemester 2014. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Apr. 2014.
- Kuchling, Horst. *Taschenbuch der Physik*. 20. Aufl. 2011.
- Stein, W.A. u. a. *Sage Mathematics Software (Version 6.2)*. <http://www.sagemath.org>. The Sage Development Team. 6. Mai 2014.
- Williams, Thomas, Kelley, Colin u. a. *gnuplot 4.6*. 12. Apr. 2013. URL: <http://www.gnuplot.info>.