

Analiza Timošenkovog modela elastičnog štapa

Fran Špigel

Veljača 2020

1 Teorija

Euler-Bernoullijev model elastičnog štapa pretpostavlja da poprečni presjek štapa u svakom trenutku ostaje okomit na njegovu centralnu liniju. Stepan Timošenko, ruski inženjer i profesor na Politehničkom fakultetu u Zagrebu, primjetio je da to nije sasvim točno, i predložio vlastitu promjenu.

Osim vertikalnog odstupanja ω , mjerit ćemo i kut ϕ ravnine poprečnog presjeka u točki x . Timošenko pretpostavlja de će, zbog unutarjneg smicanja štapa, taj kut biti manji nego okomica na centralnu liniju, $d\omega$. Pri tome diferencijalna jednađba uključuje nekolicinu koeficijenata opće poznatih u teoriji elastičnosti:

- ρ : gustoća materijala izražena u kg/m^3
- A : površina poprečnog presjeka (m^2)
- G : modul smicanja (Pa)
- E : Youngov modul elastičnosti (Pa)
- I : drugi moment inercije

Tada dobivamo sustav dvije PDJ drugog reda:

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - q(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa A G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \phi \right) \right] \\ \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \kappa A G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \phi \right)\end{aligned}\tag{1}$$

Pri tome pretpostavljamo da su varijable ω i ϕ separabilne, ali dijele isti period, tj. njihova vremenska komponenta je jednaka:

$$\begin{aligned}\omega(x, t) &= X_\omega(x)T(t) \\ \phi(x, t) &= X_\phi(x)T(t)\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (1) možemo separirati djelove koji ovise o t i o x , te zaključujemo da je svaki od ovih izraza ne samo konstantan, nego da su oboje jednaki nekoj konstanti $-\lambda$:

$$\begin{aligned}\rho \frac{T''}{T} &= \kappa G \frac{X_\omega'' - X_\phi'}{X_\omega} = -\lambda \\ \rho \frac{T''}{T} &= E \frac{X_\phi''}{X_\phi} + \frac{\kappa A G}{I} \left(\frac{X_\omega' - X_\phi}{X_\phi} \right) = -\lambda\end{aligned}\tag{2}$$

Promatramo dio sustava koji ovisi o x i sređujemo tako da kasnije dobijemo simetričnu formu:

$$\begin{aligned}\kappa AG(X''_\omega - X'_\phi) &= -\lambda AX_\omega \\ EI X''_\phi + \frac{\kappa AG}{I}(X'_\omega - X_\phi) &= -\lambda I X_\phi\end{aligned}$$

Množimo sa Y_ω i Y_ϕ , integriramo, parcijalno integriramo i zbrajamo:

$$\begin{aligned}\kappa AG \int X'_\omega Y'_\omega + EI \int X'_\phi Y'_\phi + \kappa AG \int X_\phi Y_\phi \\ - \kappa AG \int (X_\phi Y'_\omega + X'_\omega Y_\phi) = \lambda (A \int X_\omega Y_\omega + I \int X_\phi Y_\phi)\end{aligned}\tag{3}$$

Sada na problem primjenjujemo metodu konačnih elemenata: na prostornoj domeni konstruiramo ekvidistantnu subdiviziju sa $n+2$ elementa, prostor neprekidnih funkcija između 0 i L aproksimiramo linearnom ljuskom konačne baze vektora v_i , koji su oblika

$$\begin{aligned}h &:= \frac{L}{n+1} \\ v_0 &:= \begin{cases} \frac{h-x}{h}, & x \in [0, h] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ v_k &:= \begin{cases} \frac{x-(k-1)h}{h}, & x \in [(k-1)h, kh] \\ \frac{(k+1)h-x}{h}, & \text{if } x \in [kh, (k+1)h] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ v_{n+1} &:= \begin{cases} \frac{x-nh}{h}, & x \in [nh, L] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}\end{aligned}$$

Pri čemu proizvoljnu funkciju f aproksimiramo kao

$$\tilde{f} = \sum_{i=0}^{n+1} f(x_i) v_i$$

Pa za tražene funkcije X_ω i X_ϕ vrijedi:

$$\begin{aligned}X_\omega &= \sum \omega_i v_i \\ X_\phi &= \sum \phi_i v_i,\end{aligned}$$

za neke koeficijente ω_i i ϕ_i .

Budući da (3) mora vrijediti za svaki par (Y_ω, Y_ϕ) , taj sustav posebno vrijedi za parove oblika $(v_i, 0)$ i $(0, v_i)$, za svaki $i = 0, 1, \dots, n+1$. Stoga uvrštavanjem takvih parova u jednažbu dobivamo sustav $2n+4$ jednažbe. Nadalje, modelirat ćemo šipku uklještenu na oba kraja, pa odmah pretpostavljamo da je

$\omega_0 = \omega_{n+1} = \phi_0 = \phi_{n+1} = 0$. Da bismo konstruirali taj sustav, napišimo prvo nekoliko pomoćnih rezultata:

za $i \neq 0, n+1$

$$\int v_i v_j = \begin{cases} \frac{2}{3}h, & i = j \\ \frac{1}{6}h, & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\int v'_i v'_j = \begin{cases} \frac{2}{h}, & i = j \\ \frac{1}{h}, & |i - j| = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\int v_i v'_j = \begin{cases} \frac{-1}{2}, & j = i - 1 \\ \frac{1}{2}, & j = i + 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada u (3) uvrštavamo bazne funkcije umjesto Y , te aproksimacije umjesto X :

$(v_j, 0) :$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa AG}{h}(-\omega_{j-1} + 2\omega_j - \omega_{j+1}) - \frac{\kappa AG}{2}(\phi_{j-1} - \phi_{j+1}) \\ & = \lambda \frac{Ah}{6}(\omega_{j-1} + 4\omega_j + \omega_{j+1}) \end{aligned}$$

$(0, v_j) :$

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{h}(-\phi_{j-1} + 2\phi_j - \phi_{j+1}) + \frac{\kappa AG}{6}(\phi_{j-1} + 4\phi_j + \phi_{j+1}) + \frac{\kappa AG}{2}(\omega_{j-1} - \omega_{j+1}) \\ & = \lambda \frac{Ih}{6}(\phi_{j-1} + 4\phi_j + \phi_{j+1}), \end{aligned}$$

iz čega slijedi sljedeći sustav matrica:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\kappa AG}{h} M_1 & \frac{\kappa AG}{2} M_2 \\ \hline \frac{\kappa AG}{2} M_2^T & \frac{EI}{h} M_1 + \frac{\kappa AG h}{6} M_3 \end{array} \right], L = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{6} M_3 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{6} M_3 \end{array} \right]$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}$$

Time se rješenje prostorne komponente originalnog problema svodi na sljedeći svojstveni problem:

$$MX = \lambda LX \quad (4)$$

Riješavanjem dobivamo sv. vrijednosti $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ i pripadne svojstvene vektore. Pri tome zanemarujemo sve osim prvih m vrijednosti. Jednom kada smo riješili prostornu komponentu (to jest poznate su nam aproksimacije X_ω i X_ϕ , promotrimo vremensku komponentu, koja glasi:

$$T'' = -\frac{\lambda}{\rho} T,$$

, to jest, zbog postojanja više svojstvenih vrijednosti λ_k ,

$$T_k'' = -\frac{\lambda_k}{\rho} T_k$$

$$T = \sum_{k=1}^m T_k$$

za svaki k imamo ODJ 1. reda:

$$T_k(t) = A_k \cos\left(t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\rho}}\right) + B_k \sin\left(t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\rho}}\right)$$

Ako pretpostavimo da u trenutku $t = 0$ štap miruje, odmah imamo $T'(0) = 0$, pa je $B_k = 0$, za svaki k . Da bismo izračunali koeficijente A_k , dovoljno je uvrstiti proizvoljnih m vrijednosti za x , kako bismo iz početnog uvjeta imali:

$$\begin{aligned}\omega(x_i, 0) &= \omega_0(x_i) = \sum_{k=1}^m X_{\omega}^k(x_i) T_k(0) \\ &= \sum_{k=1}^m X_{\omega}^k(x_i) A_k,\end{aligned}$$

što nam daje novi sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \begin{bmatrix} X_{\omega}^1(x_1) & X_{\omega}^2(x_1) & \dots & X_{\omega}^m(x_1) \\ X_{\omega}^1(x_2) & X_{\omega}^2(x_2) & \dots & X_{\omega}^m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\omega}^1(x_m) & X_{\omega}^2(x_m) & \dots & X_{\omega}^m(x_m) \end{bmatrix}, & \tilde{\omega}_0 &= \begin{bmatrix} \omega_0(x_1) \\ \omega_0(x_2) \\ \vdots \\ \omega_0(x_m) \end{bmatrix}, \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, & \tilde{X}\tilde{A} &= \tilde{\omega}_0\end{aligned}$$

Dakle dobili smo sustav sa m jednadžbi i m nepoznanica, kojeg lako možemo riješiti. Krajnje rješenje stoga glasi:

$$\begin{aligned}\omega(x, t) &= X_{\omega}(x)T(t) = \sum_{k=1}^m X_{\omega}^k(x)T_k(t) \\ \phi(x, t) &= X_{\phi}(x)T(t) = \sum_{k=1}^m X_{\phi}^k(x)T_k(t)\end{aligned}$$

2 Primjeri

Sada možemo teoriju iz prvog poglavlja primjeniti na neke primjere. Ponavljamo, ova teorija pretpostavlja homogene rubne uvjete i Dirichletov početni uvjet, dakle rješavamo sljedeći sustav jednažbi:

$$\begin{aligned}\rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - q(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa A G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \phi \right) \right] \\ \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \kappa A G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \phi \right) \\ \omega(0, t) &= \omega(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0; \\ \omega(x, 0) &= \omega_0(x), \\ \omega'(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

Za početak, pogledajmo slučaj gumene šipke duljine $L = 2m$, četvrtastog presjeka stranice duljine $5cm$. Šipku puštamo iz deformiranog položaja mirovanja, pri čemu je $\omega_0(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-(x-1)^2}\right)$, to jest standardni izgladiivač:

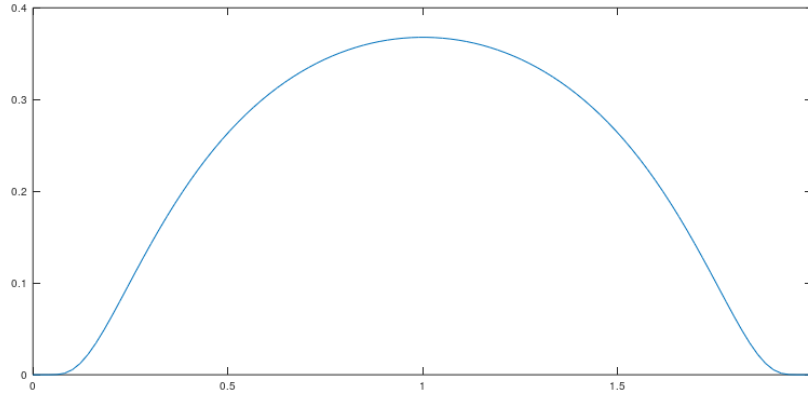


Figure 1: standardni izgladiivač

U priloženoj datoteci *rubber_symmetric.gif* može se vidjeti kretanje opisanog štapa u vremenu (lijevi graf), kao i usporedba pravog kuta poprečnog presjeka i kuta kojeg pretpostavlja Euler-Bernoullijev model ($d\omega$, dobiven aproksimativno metodom konačnih diferencija). Na slici (2) možemo vidjeti jedan izvadak iz te animacije (trenutak $t=0.112$). Crveni odsječci predstavljaju kut poprečnog presjeka u nekim od točaka.

Vidimo da je, očekivano, ϕ većinom manji od $d\omega$. Nadalje, oba modela su na sredini jednaka nuli, jer je ovaj primjer u potpunosti simetričan s obzirom na prostornu komponentu (simetrični početni uvjet i jednaki rubni uvjeti), te oba modela daju neparne (anti-simetrične grafove), s obzirom na os $x = 1$.

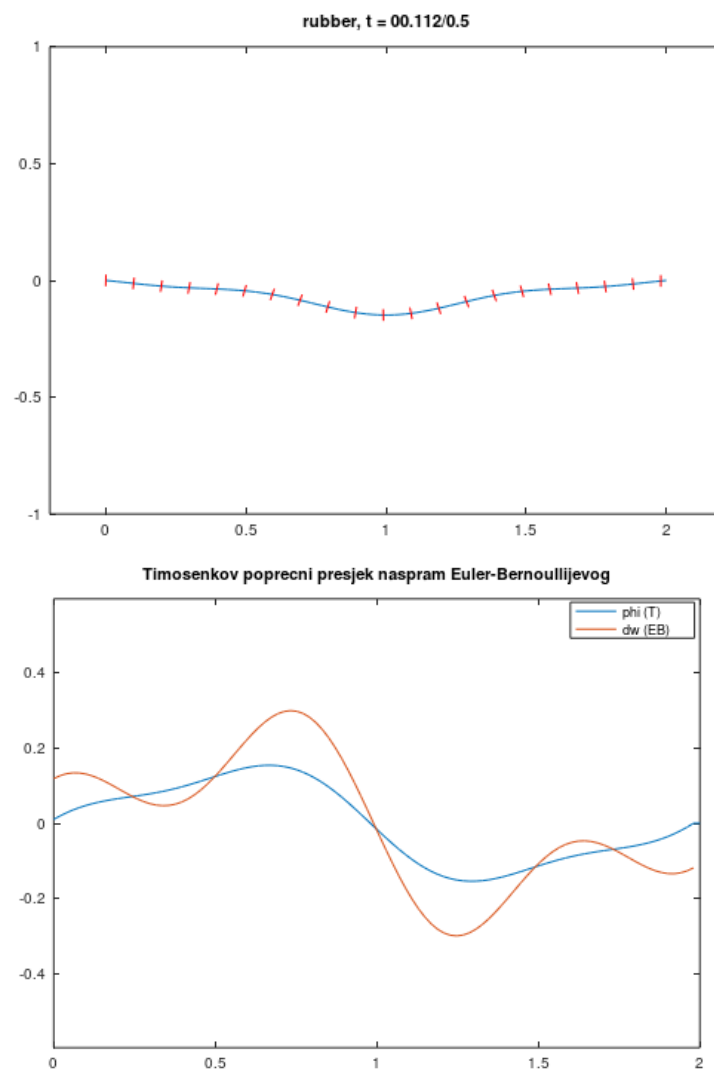


Figure 2: gumeni štap

Datoteka *rubber_asymmetric.gif* prikazuje isti slučaj, ali je šipka puštena iz drugačijeg početnog položaja - ona opisuje izgladivač, ali samo na segmentu $[0, 1]$, a na segmentu $[1, 2]$ je početni uvjet homogen (slika (3)). Stoga možemo vidjeti kako se u prvim trenucima da deformacije kreće poput vala od točke 1 do 2. Slika (4) prikazuje izvadak iz dotične animacije. Vidimo da kut presjeka više nije neparna funkcija.

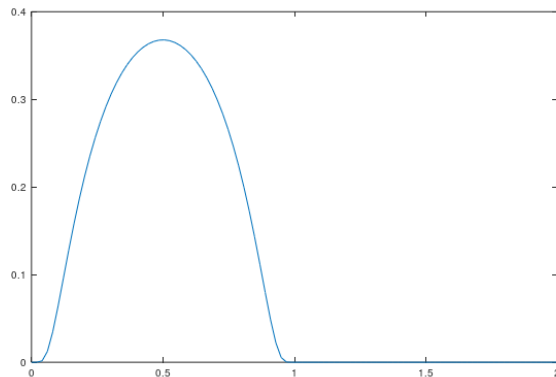


Figure 3: početni uvjet u drugom slučaju

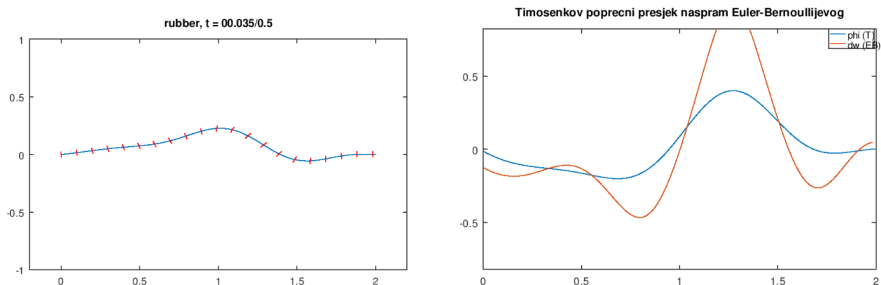


Figure 4: deformacija i kut presjeka gumenog štapa puštenog iz asimetričnog početnog položaja

Nadalje, možemo se zapitati koliko je važan broj modova kojima aproksimiramo rješenje, to jest 'rezoluciju' naše aproksimacije. Na slici (5) vidimo izvadak iz animacije *rubber_mode_comparison.gif*, gdje upravo tu razliku promatramo na primjeru gumenog štapa puštenog iz asimetričnog početnog položaja. Maksimalna apsolutna razlika je 12.8cm u odstupanju, to jest 0.27rad u kutu presjeka. Da bismo to stavili u kontekst, maksimalno odstupanje je 1m, pa ta razlika predstavlja relativnu razliku od 12.8%, dok je maksimalan kut presjeka 0.74rad, pa je druga relativna razlika čak 36%. Stoga zaključujemo da je broj modova doista relevantan faktor za neke primjene, to jest preciznost aproksimacije se značajno mijenja sa povećanjem broja modova sa 6 na 20.

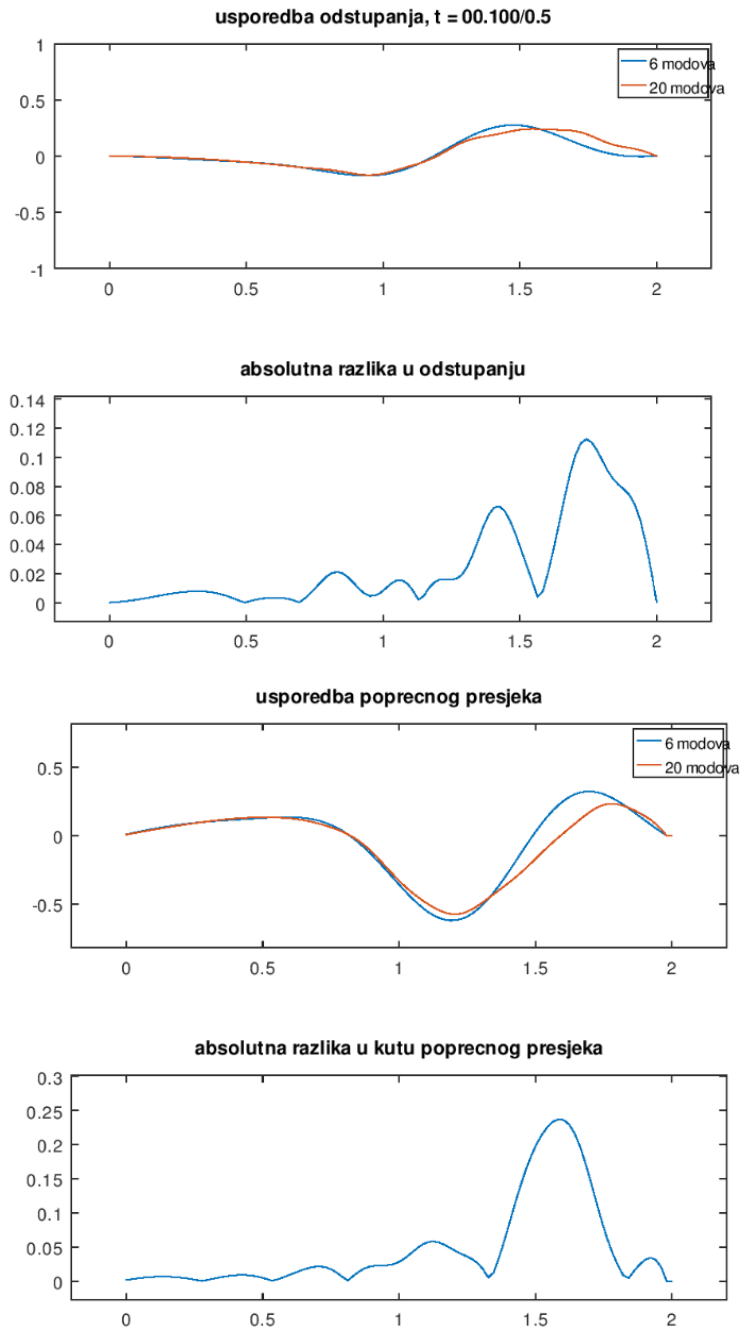


Figure 5: razlika u odstupanju i kutu poprečnog presjeka pri aproksimaciji sa 6 i 20 modova