



Félix St-Laurent

Implémentation de l'approche Carr-Wu sur les marchés FX

Présenté

À

Gabriel J. Power

Marie-Hélène Gagnon

GSF-6500

Essai

NRC : 85712

Faculté des sciences de l'administration

Université Laval

28 février 2019

Table des matières

1	Introduction	2
2	Revue de littérature	6
3	Méthodologie	14
4	Données	30
5	Régressions	38
6	Conclusion	47
7	Bibliographie	48

1 Introduction

Le marché du Forex est le plus gros marché financier en terme de volume. Selon le "Triennial Central Bank Survey" de la "Bank for international settlements", les transactions dans le marché du "Forex" ont un volume moyen de 5,1 milliards par jour en date d'avril 2016. Les "FX Swaps" occupent la plus grande part de ce montant avec 47%, suivi du marché "spot" avec 33% et du marché des "outright forwards" avec 14%. USD/EUR occupe la plus grande part de marché avec 23,0%, suivi de USD/JPY avec 17,7% et de USD/GBP avec 9,2%.

Meese et Rogoff (1983) montrent que le marché des FX est pratiquement imprévisible. Depuis, quelques facteurs qui ont été relevés dans la littérature génèrent du rendement excédentaire sur le marché du FX. La stratégie de type "carry" consiste à être long dans les devises dont les taux d'intérêt sont élevés et être court dans celles dont les taux d'intérêt sont faibles. Jurek (2013) montre qu'une stratégie de type "carry" génère des rendements excédentaires même si on inclut les frais reliés à la couverture contre les risques de crash de cette stratégie. Sans couverture, les rendements de cette stratégie ont un "skewness" fortement négatif. La stratégie de type "momentum" consiste à être long dans les devises qui sont en tendance haussière et être court dans celles qui sont en tendance baissière. Menkhoff, Sarno, Schmeling et Schrimp (2012) montrent qu'une stratégie basée sur un facteur de "momentum" peut générer un rendement excédentaire de 10% annualisés. Ils montrent aussi que cette stratégie amène à transiger sur des devises avec des "spread" plus élevés, mais que ces coûts de transactions ne suffisent pas à éliminer ces rendements excédentaires. La stratégie de type "value" consiste à être long dans les devises qui sont inférieures à leur taux de change réel et être court dans celles qui sont supérieures à leur taux de change réel. Menkhoff, Sarno, Schmeling et Schrimp (2016) montrent qu'une stratégie de ce type appliquée au FX peut générer un ratio de Sharpe de 0,5. Asness, Moskowitz et Pedersen (2013) montrent qu'une stratégie de "value" et de "momentum" combinés génère du rendement excédentaire positif et est mieux diversifiée que chacune des stratégies séparément puisque leurs corrélations sont négatives. Della Corte, Ramadorai et Sarno (2016) montrent qu'une stratégie basée sur la prime de risque de la volatilité (VRP) génère des rendements excédentaires positifs sur le marché des FX. De plus, cette

stratégie offre un potentiel de diversification intéressant lorsque combinée avec des stratégies de type "carry", "momentum", "value" et "risk reversal".

Pour la gestion de portefeuille, les deux variables les plus importantes sont le rendement et le risque. Puisque le risque est majoritairement mesuré par la volatilité, il est pertinent de la prédire. La façon la plus simple est d'utiliser la volatilité historique. Le modèle "ARCH" introduit par Engle (1982) décrit un processus stochastique de moyenne 0 avec variance conditionnelle non constante et une variance inconditionnelle constante. Ce modèle est utile pour prédire la variance lorsque celle-ci suit un processus autorégressif. Bollerslev (1986) a extensionné le modèle "ARCH" vers le modèle "GARCH". Ce modèle ressemble beaucoup à un modèle ARMA, donc il est utile pour prédire la variance lorsque celle-ci suit ce processus. La volatilité implicite est la volatilité qui est utilisée comme "input" pour déterminer le prix d'une option avec la formule de Black & Scholes. Celle-ci peut être interprétée comme étant la prévision de la volatilité des investisseurs (Latané et Rendleman, 1975). Poon et Granger (2005) montrent que la volatilité implicite des options est supérieure aux séries chronologiques pour prédire la volatilité.

Puisque la volatilité des rendements d'actifs financiers est stochastique, les investisseurs sont prêts à payer une prime pour se couvrir contre des variations de celle-ci (prime de risque de la volatilité). Bakshi et Kapadia (2003) montrent qu'un portefeuille d'options dont le delta est couvert sur le S&P 500 donne des rendements négatifs, ce qui supporte l'hypothèse de la prime de risque de la volatilité. Carr et Wu (2009) montrent que la prime de risque de la volatilité est négative pour le S&P 500 et 100 autres indices boursiers. Ils montrent aussi que les résultats varient beaucoup à travers les actions individuelles. Les actions dont les rendements sont les plus sensibles aux variations de la volatilité du S&P 500 sont ceux qui ont la plus grosse prime de risque de la volatilité. Kozhan, Neuberger et Schneider (2013) montrent qu'il existe aussi une prime de risque du "skewness" et que celle-ci est directement reliée à la prime de risque de la variance. Bollerslev, Tauchen et Zhou (2009) montrent que la prime de risque de la volatilité peut expliquer une partie significative des rendements des indices boursiers après 1990. Le degré de prédictibilité atteint un sommet autour d'un horizon de 4 mois. Bollerslev, Marrone, Xu et Zhou (2014) montrent qu'un indice global de la prime de risque de la volatilité montre un plus grand degré de prédictibilité. Ils montrent aussi

à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo que ces résultats ne sont pas expliqués par un biais statistique de persistance. Mueller, Sabtchevsky, Vedolin et Whelan (2017) montrent la VRP des obligations prédit les rendements des obligations court et long termes. De plus, la VRP de l'équité prédit les rendements sur les obligations et la VRP des obligations prédit les rendements sur l'équité. Zhou (2010) montre que la prime de risque de la volatilité prédit significativement les rendements sur l'équité, les obligations et les "spread" de crédit. Ornelas et Mauad (2017) montrent qu'il y a des relations entre les VRP des commodités et le rendement de celles-ci, mais seulement pour la période post 2008. Ces relations sont robustes aux variables de contrôles comme la VRP de l'équité. Amman et Buesser (2013) trouvent que la prime de risque de la variance est négative sur le Forex lorsque la volatilité est réalisée sur des basses fréquences. Par contre, lorsque la volatilité réalisée est mesurée sur des fréquences plus petites que 30 minutes, la VRP n'est plus négative. Della Corte, Ramadorai et Sarno (2016) trouvent qu'une stratégie de VRP offre des rendements excédentaires positifs et offre bon potentiel de diversification dans le Forex. Londono et Zhou (2017) trouvent que l'augmentation d'un indice des devises global de la VRP prédit une hausse des rendements de la devise américaine tandis qu'une augmentation de la VRP de l'équité américaine prédit l'inverse.

La VRP sera présenté dans ce papier par cette formule :

$$VRP = RV - IV$$

En moyenne, la VRP est négative, c'est-à-dire que la volatilité implicite pour le prochain mois est plus grande que la volatilité observée historiquement dans le dernier mois. La VRP peut être interprétée comme étant le coût d'assurance pour se protéger contre les fluctuations de la volatilité. Plus la VRP est grande, plus le coût d'assurance est faible et vice-versa (Della Corte, 2016). Similairement, le signe négatif de la VRP indique que les acheteurs de volatilité sont prêts à assumer un rendement excédentaire négatif pour se couvrir contre des mouvements haussiers de la volatilité dans les marchés. (Carr et Wu, 2009)

La volatilité implicite utilisée dans le modèle peut être obtenue de différentes façons. Par exemple, pour analyser un indice boursier américain, nous pouvons utiliser le VIX (Bollerslev,

2014). Nous pouvons aussi utiliser la volatilité implicite provenant d'options "at the money" , quoique cette variable ne reflète pas entièrement l'information fournie dans les options. Il est aussi possible d'utiliser un taux de swap de la volatilité (Carr et Wu, 2009). Ce type de swap échange des flux monétaires lorsque la volatilité observée est différente de la volatilité convenue dans le contrat. Ce dernier est intéressant car il prend en compte la totalité du "smile" et c'est sur celui-ci que ma recherche portera. Les données disponibles sur le Forex pour les options ne sont pas continues, c'est-à-dire que j'ai de l'information sur 5 prix d'exercices différents. Avec ceux-ci, je dois compléter le "smile". Pour compléter ce "smile", j'utiliserai la méthode du spline cubique et la méthode de Vanna-Volga. La méthode du spline cubique est une méthode d'interpolation à l'aide de polynômes. La méthode de Vanna-Volga, développée par Castagna et Mercurio (2007), est une méthode d'interpolation et d'extrapolation qui se sert des dérivées et dérivées secondes des prix d'options. Une fois que j'ai le "smile" complet, je peux appliquer la méthode de Carr et Wu (2009) pour obtenir la volatilité implicite.

Pour mon essai, je vais répondre à la question suivante : "est-ce que le pouvoir de prévision de la prime de risque de la volatilité sur le Forex dépend de la méthode de construction du "smile" ?" Je vais analyser en détail la méthode d'implémentation du taux de swap synthétique de Carr et Wu (2009) ainsi que les différents estimés que nous devons faire pour y arriver. Je vais comparer les résultats des VRP obtenues à partir de la méthode du spline cubique et de celle de Vanna-Volga. Je vais finalement créer un indice global de la VRP et effectuerai des régressions linéaires simples sur les taux de change suivants : AUD/USD, EUR/USD, GBP/USD, USD/CAD, USD/CHF et USD/JPY. Au final, seul le taux de change EUR/USD a obtenu des résultats significatifs. Par contre, ces résultats ne permettent pas de déterminer la meilleure méthode d'extrapolation du "smile" de volatilité puisque les résultats sont très similaires pour les deux méthodes.

La suite de mon essai sera composé des sections suivantes : Revue de littérature, méthodologie, données, régressions et conclusion.

2 Revue de littérature

Le premier problème auquel les chercheurs qui étudient le marché des options sont confrontés est que les données sont souvent incomplètes dues à un manque de liquidité. Par exemple, le "smile" de volatilité est rarement complet, ce qui pose problème lorsque vient le temps de faire des études sur celui-ci. Plusieurs chercheurs ont élaboré des techniques pour compléter ce "smile" de volatilité, notamment Malz (1997), Hagan, Kumar, Lesniewski, Woodward (2002), et Castagna et Mercurio (2006).

Malz (1997) montre une méthode pour extraire la distribution de probabilité neutre au risque du taux de change spot futur. Cette méthode exploite la dérivée seconde d'une option call par rapport à son prix d'exercice. Cette méthode requiert une série d'options continue sur tous les prix d'exercices, ce qui n'est pas le cas dans le Forex. Le modèle de Black and Scholes implique que la volatilité implicite sur un sous-jacent est la même indépendamment de l'échéance et du "moneyness", ce qui n'est pas le cas en pratique. Cela reflète la croyance des investisseurs à ce que les rendements du sous-jacent ne soient pas distribués lognormalement. C'est pourquoi il est important de bien estimer le "smile" de volatilité. Malz utilise un modèle qui prend en compte une relation linéaire avec la volatilité "at the money", une relation linéaire avec le "risk reversal" et une relation quadratique avec le strangle. Avec son modèle, il est capable d'estimer son "smile" au complet. Je n'utiliserai pas cette méthode pour mon essai. Malz (2000) montre une façon d'incorporer le risque de vega dans un modèle de VAR. Il discute des effets du "smile" de volatilité et de la structure à termes sur le risque de vega.

Castagna et Mercurio (2007) ont dérivé la méthode de Vanna-Volga pour interpoler et extrapoler un "smile" de volatilité à partir de 3 points. Dans le marché du Forex, les cotes sont souvent sous forme de volatilité pour des stratégies d'options, soit le straddle "at the money", le "risk reversal" constitué d'un "call" et d'un put 0.25 delta et un "butterfly" 0.25 delta. Avec ces 3 cotes, il est facile de calculer la volatilité implicite et le prix d'exercice correspondant aux trois points "0.25 delta call", "at the money" et "0.25 delta put". Ces trois points ne représentent toutefois pas la totalité

du "smile" de volatilité. C'est pourquoi Castagna et Mercurio ont dérivé une méthode pour obtenir un "smile" complet utilisant les lettres grecques Vanna et Volga. Le Vanna est la sensibilité du Vega par rapport à un changement dans le prix spot du sous-jacent tandis que le Volga est la sensibilité du Vega par rapport à un changement dans la volatilité implicite. La méthode utilise un portefeuille de réplication auquel les coûts associés pour la couverture des risques de Vanna et de Volga sont ajoutés au prix B & S de l'option. Pour ce faire, il faut créer un portefeuille de couverture sur le Vega, le Vanna et le Volga. De cette façon, avec 3 points, il est possible de reproduire le "smile" de volatilité au complet. La méthode de Vanna-Volga de Castagna et Mercurio est l'une des méthodes que je vais utiliser pour dériver la volatilité implicite dans mon modèle de VRP.

Les données disponibles sur les options dans le marché FX ne sont pas toujours triviales et sont différentes des autres marchés. Par exemple, les informations sur les options dans le FX sont la plupart du temps disponibles seulement en matière de volatilités implicites pour certaines stratégies d'options. Ces stratégies d'options sont vendues "over-the-counter" et puisque c'est dans ces produits financiers qu'il y a le plus de liquidité, ce sont ces données qui sont disponibles. De plus, les prix d'exercices sont exprimés en terme de deltas et non en terme de prix. Nous devons donc convertir ce delta en prix. Il y a aussi certaines devises dont les données sont ajustées pour refléter le point de vue de l'investisseur étranger. Par exemple, les taux de change dont la devise étrangère est le USD sont ajustés de cette façon. Les taux de change dont la devise étrangère est l'Euro et qui ne contiennent pas le USD sont aussi ajustés de cette façon. Le problème avec cet ajustement est que le prix d'exercice de l'option n'est pas calculable directement. En fait, il n'existe pas de solution analytique pour trouver le prix d'exercice associé à un certain delta et il doit être trouvé de façon numérique. De plus, il existe deux prix d'exercices qui peuvent satisfaire l'équation du delta, donc il faut choisir le bon. Une autre particularité avec les données sur le forex est que les deltas sont parfois "spot" et parfois "forward". Les couvertures de type "forward" sont populaires pour neutraliser le risque de taux d'intérêt. Le delta de type "forward" est donc couramment utilisé dans le cas d'options avec une échéance long terme et lorsqu'il y a un fort différentiel de taux d'intérêt. De façon générale, le "spot delta" est utilisé pour les options dont la maturité est de 1 an et moins et le "forward delta" est utilisé pour les options dont l'échéance est supérieure à un an. Reiswich et Wystup (2010) ont écrit un guide pour se démêler à travers tout ça. Cet article me sert de référence

pour obtenir les bons prix d'exercices associés aux volatilités de mes données.

Britten-Jones et Neuberger (2000) ont développé une méthode pour prédire la volatilité observée dans le marché dans le futur. C'est en fait une volatilité implicite "model free" provenant d'une série d'options "out of the money" qui vient à échéance en même temps que l'horizon de prévision. Cette méthode prend en compte les options de tous les prix d'exercices disponibles donc elle prend en compte la totalité du "smile" de volatilité. Contrairement à ce qui a été fait avant, cette méthode n'est pas dépendante d'un modèle d'évaluation en particulier et par le fait même, ne contient pas l'inconsistance reliée à l'hypothèse de volatilité constante. Dans leur modèle, les auteurs utilisent l'hypothèse de continuité des prix et d'absence d'arbitrage. Selon leur définition, le prix du sous-jacent peut rester au même niveau, monter d'un niveau ou descendre d'un niveau à chaque période. Ils définissent aussi la continuité comme un processus de diffusion en temps discret. Dans un processus de diffusion, il n'y a pas de saut dans les prix. Par exemple, un ordre limite serait toujours entièrement exécuté au prix établi. Cette volatilité implicite calculée par Britten-Jones et Neuberger est la première version de ce que j'utiliserai comme input dans mon modèle de prime de risque de la volatilité. Les auteurs prétendent que la volatilité implicite obtenue à partir de ce modèle est un estimateur biaisé de la volatilité réalisée future puisqu'elle est un estimateur de la volatilité au carré et non pas de la volatilité elle-même. Finalement, les auteurs présentent une procédure pour utiliser ce modèle afin d'évaluer des options exotiques.

Jiang et Tian (2005) ont repris la volatilité implicite "model-free" de Britten-Jones et Neuberger (2000) et l'ont dérivé d'une façon plus simple et l'ont généralisé de façon à inclure les sauts de prix. Cette dernière étape n'était pas incorporée dans la dérivation de Britten-Jones et Neuberger (2000) et est assez importante puisque ces sauts de prix sont une réalité assez importante dans les actifs sous-jacents tels que les actions. Des erreurs de troncature peuvent survenir lorsqu'on utilise ce modèle mais qu'on ne va pas chercher des prix d'exercices assez loin sur les extrêmes. Jiang et Tian démontrent qu'en utilisant des limites de 2 écarts-types et gauche et à droite du prix spot, les erreurs de troncature sont réduites à pratiquement zéro. Il existe aussi les erreurs de discrétisation reliées à l'évaluation de l'intégrale avec la méthode des trapèzes. Cette erreur peut être pratiquement éliminée en utilisant une multitude de points pour calculer cette intégrale. Pour interpoler le "smile"

de volatilité, Jiang et Tian utilisent un spline cubique et pour extrapoler le "smile" au-delà des prix d'exercice disponibles, ils utilisent la volatilité implicite du dernier point observé. Cette méthode d'extrapolation crée une erreur d'approximation mais les auteurs démontrent qu'elle est faible. À l'aide de régressions, Jiang et Tian montrent que la volatilité obtenue avec leur méthode "model-free" est un estimateur plus efficient que la volatilité historique observée et la volatilité implicite provenant d'options "at the money" selon le modèle de Black and Scholes.

Carr et Wu (2009) proposent une méthode pour quantifier la prime de risque de la volatilité. La prime de risque de la volatilité (VRP) est la différence entre la volatilité historique observée dans le marché et la volatilité implicite obtenue sur une série d'options du sous-jacent. Cette volatilité implicite est en fait un taux de swap de variance synthétique. Le swap de variance est un produit financier qui paye la différence entre la volatilité réalisée et le taux du swap. Puisque les swaps de variance ne coutent rien à la signature du contrat, ce taux de swap représente la valeur espérée de la variance dans un état neutre au risque. La VRP est en moyenne négative, ce qui indique que les acheteurs de variance sont prêts à accepter un rendement excédentaire négatif pour se couvrir contre des hausses de volatilités sur les marchés. Le taux de swap de variance est dérivé en utilisant une série d'options du sous-jacent comme Britten-Jones et Neuberger (2002) et Jiang et Tian (2005), mais sa dérivation n'utilise pas l'hypothèse de continuité. De plus, Carr et Wu (2009) quantifient l'erreur d'approximation induite par les sauts dans le prix du sous-jacent. Ils montrent aussi que la VRP diffère grandement d'une action à l'autre. Ils font la régression de la variance du S&P 500 pour expliquer la variance des titres individuels et trouvent que les actions dont les bêtas de la volatilité sont élevés ont des prime de risque de la volatilité plus négatives. Le taux de swap de variance dérivé par Carr et Wu (2009) est la version finale de ce que je vais utiliser comme volatilité implicite dans mon modèle de VRP.

Kozhan, Neuberger et Schneider (2013) développent une méthode pour mesurer la prime de risque des différents moments. Ils trouvent qu'il existe à la fois une prime de risque de la variance et une prime de risque du "skewness" dans les indices boursiers. Ils montrent qu'il est profitable d'exploiter chacune des deux stratégies. Ils montrent que 42% du "skewness" dans le "smile" avec échéance d'un mois est expliqué par la prime de risque, avec le reste du 58% étant expliqué par la

corrélation négative entre les rendements et la volatilité. Ils montrent que 22% de la variance dans le "smile" avec échéance 1 mois est expliqué par la prime de risque. Il y a aussi corrélation négative entre le "skewness" et la variance, donc quand la variance monte, le "skewness" devient plus négatif. La variance réalisée est positivement corrélée avec la variance implicite et le "skewness" réalisé est positivement corrélé avec le "skewness" implicite. Ils montrent qu'il est profitable d'entrer dans des contrats swap de "skewness" et de variance en recevant la partie fixe et en payant la partie variable. Par contre, lorsqu'un swap de variance est couvert contre le risque de "skewness", ces profits sont largement réduits et lorsqu'un swap de "skewness" est couvert contre le risque de variance, ces profits ne sont pas significatifs. Les deux primes de risques diminuent en valeur absolue lorsque les marchés diminuent, lorsque le "skewness" de la distribution implicite est moins négatif et lorsque le "TED spread" est élevé. Ils montrent que les deux primes de risque sont dépendantes d'un même facteur.

Jurek (2013) a étudié la stratégie "carry" sur le marché du Forex. Cette stratégie exploite la violation de la parité des taux d'intérêt non couverts. Cette stratégie consiste à emprunter dans une devise où les taux d'intérêt sont faibles pour investir dans une devise où les taux d'intérêt sont élevés. Entre 1990 et 2012, cette stratégie a offert un ratio de Sharpe de 0.40-0.55. Cette stratégie montre aussi du "skewness" négatif et une exposition au risque baissier des actions. L'auteur se demande d'abord si les grands rendements excédentaires de cette stratégie reflètent un "peso problem" et il se demande quelle proportion du rendement excédentaire est attribuable à une prime de risque de crash. L'auteur trouve qu'un portefeuille couvert contre les risques de crash génère des rendements positifs et significatifs, ce qui exclut l'hypothèse du "peso problem". Une comparaison des résultats obtenus sur des portefeuilles couverts et non couverts montre qu'il y a une prime de risque de crash de moins de 1/3 des rendements excédentaires des "currency carry trades". L'auteur a utilisé des options "out of the money" (10 delta) pour couvrir son portefeuille et obtient des résultats statistiquement positifs. Le rendement est séparé en 2 parties, soit une partie diffusive et l'autre partie est la prime de crash. La partie de la prime de crash est la différence entre le portefeuille couvert et le portefeuille non couvert. L'auteur attribue finalement entre 20 et 30% du rendement du portefeuille attribuable au risque de crash. La volatilité implicite des options devrait être 40% plus élevée pour expliquer complètement le rendement obtenu avec le risque de crash. L'auteur

montre que la volatilité implicite des options sur taux de change excède la volatilité observée pour la plupart des paires, ce qui est consistant avec la présence d'une prime de risque de la volatilité. L'auteur trouve aussi une prime de risque de "Skewness".

Bollerslez, Marrone, Xu, et Zhou (2014) se sont intéressés à la prime de risque de la volatilité pour tenter de prédire les rendements de plusieurs indices boursiers à travers le monde. Pour se mettre en contexte, le modèle utilisé par les auteurs comprend les rendements des 21 derniers jours ouvrables pour calculer la variance historique et le VIX (ou autre indice semblable dépendamment du pays) était utilisé pour la volatilité implicite. Cependant, lorsqu'on calcule la prime de risque de la volatilité à tous les jours de cette façon, il y a un phénomène de persistance dans les données. C'est-à-dire qu'à chaque nouvelle donnée journalière de la variance, on enlève une journée pour en ajouter une autre, ce qui fait qu'il y a 20 jours qui sont les mêmes qu'à la période précédente. Boudoukh, Richardson et Whitelaw (2008) ont démontré qu'en absence d'augmentation de la vraie prédictibilité, les valeurs des R^2 des régressions qui contiennent de la persistance et des rendements qui s'entrecroisent sont faussement augmentés. Une des façons qu'on pourrait procéder pour atténuer ce problème serait en utilisant des données de fin de mois seulement, mais cela réduirait significativement la taille de l'échantillon. Les auteurs ont fait une simulation de Monte-Carlo pour montrer que ce biais statistique ne peut pas expliquer la prédictibilité des rendements par la VRP. Les auteurs ont démontré qu'il est possible de prédire les rendements d'indices boursiers avec leur VRP respective même s'il existe un effet de persistance dans les données. Ils ont aussi démontré qu'un indice global de la VRP est encore meilleur pour expliquer les rendements des indices boursiers. Les périodes auxquelles la prédictibilité est la plus significative sont entre 3 et 5 mois.

Ammann et Buesser (2013) testent si la prime de risque de la variance sur les taux de change est différente si on les calcule à partir de la volatilité réalisée sur des données de fins de journée versus si on les calcule à partir de données intra-journalières aux 5 minutes. Ils utilisent aussi 2 différentes façons de compléter le "smile" de volatilité, soit la méthode de Malz et la méthode de Vanna-Volga. Ils utilisent ensuite le "smile" complet pour synthétiser un taux de swap de volatilité à la façon de Carr et Wu (2009). D'abord, on voit que le taux de swap de volatilité avec la méthode de Vanna-Volga donne systématiquement des résultats supérieurs que celui avec la méthode de Malz.

La méthode de Vanna-Volga donne des estimés supérieurs à la méthode de Malz dans les extrémités du "smile". Ensuite, la prime de risque de la volatilité calculée avec des volatilités réalisées sur des données de fin de période donne des résultats négatifs sur tous les taux de change. Par contre, si on utilise des données intra-journalières aux 5 minutes, on remarque que la prime de risque de la variance n'est plus systématiquement négative, mais elle varie plutôt dépendamment du taux de change. En effet, plus la période de temps est courte entre les données, plus la volatilité observée est élevée. De façon générale, si on utilise une période de temps de 30 minutes ou plus, la prime de risque de la volatilité reste négative. Si on utilise des fréquences trop courtes, des effets de microstructure tels que "bid-ask bounce", "price discreteness", "spread positioning" et "strategic order flow" viennent biaiser la variance. Finalement, Amman et Buesser montrent que la prime de risque de la volatilité est variante dans le temps.

Della Corte, Ramadorai et Sarno (2016) ont utilisé la VRP de plusieurs taux de change pour vérifier si une stratégie de ce type pouvait être profitable. Ils voient la VRP comme étant un coût d'assurances. Plus la volatilité implicite est élevée par rapport à la volatilité observée, plus le coût d'assurance est élevé et moins la devise va performer. Inversement, plus la volatilité implicite est faible par rapport à la volatilité observée, plus le coût d'assurances est faible et plus la devise va performer. Ils ont calculé la VRP sur plusieurs devises et ont formé des portefeuilles en étant long dans les devises dont la VRP était grande (faible coût d'assurance), et en étant court dans ceux dont la VRP était faible (haut coût d'assurance). Ils ont trouvé que cette stratégie générait des rendements excédentaires significatifs. Ils ont aussi trouvé que cette stratégie offrait un très bon potentiel de diversification. En effet, les auteurs ont aussi formé des portefeuilles avec 4 autres stratégies bien documentées pour générer des rendements excédentaires positifs. Ces stratégies sont "carry", "risk reversal", "momentum" et "value". En analysant la frontière efficiente, les auteurs ont découvert que la stratégie de "VRP" était présente à 33% dans le portefeuille à variance minimale. Les auteurs tentent d'expliquer le raisonnement derrière la stratégie à l'aide de la théorie des limites de l'arbitrage d'Acharya, Lochstoer et Ramadorai (2013). Selon cette théorie, les rendements de la VRP viendraient d'une interaction entre les gens qui font de la couverture de devise et les spéculateurs sur le forex. Par exemple, lorsque les spéculateurs modifient leurs positions sur les options d'une devise, cela vient modifier le coût de couverture de cette devise et les corporations vont

ensuite décider de détenir ou non cette devise selon le coût de couverture. Della Corte, Ramadorai et Sarno (2016) testent à l'aide de régressions la plausibilité de cette théorie selon que la VRP est belle et bien influencée par les mouvements dans les produits dérivés et ils trouvent que cette théorie est effectivement plausible.

Londono et Zhou (2017) ont utilisé un indice global de la VRP (XVP) sur plusieurs devises par rapport au dollar américain pour tenter de prédire les rendements de ces devises. Cet indice global est en fait la moyenne des VRP de 17 paires de devises contenant tous le dollar américain. Les auteurs ont ajouté un 2e facteur à leur modèle qui est la VRP sur les marchés américains (VP) et/ou global. Les auteurs montrent que l'indice global de la VRP prédit une dépréciation des devises étrangères par rapport au dollar tandis que la VRP des marchés boursiers américains prédit l'inverse, soit une appréciation des devises étrangères par rapport au dollar américain. Il est intéressant de constater que les 2 VRP contiennent de l'information différente et ne sont pas hautement corrélés. Les auteurs montrent que la VP donne de l'information sur l'incertitude domestique tandis que la XVP donne de l'information sur l'incertitude de l'inflation globale. Ils montrent que les pays dont l'inflation est élevée vont plus se déprécier par rapport au dollar US que ceux dont l'inflation est faible lorsque la XVP augmente.

3 Méthodologie

Les données sur les options sur devises que je vais utiliser pour mon essai proviennent de Bloomberg qui a recueilli des données provenant de transactions "over-the-counter" d'une dizaine de banques et a réussi à créer des séries temporelles avec ceux-ci. Il existe des données qui vont plus loin que 2005, mais puisque celles-ci sont souvent trouées, je vais utiliser des données du 1er janvier 2005 au 31 décembre 2017. Les taux de changes utilisés sont : EUR/USD, GBP/USD, USD/CAD, USD/CHF, USD/JPY et AUD/USD. Les données sont des volatilités implicites provenant de différentes stratégies d'options. Ces stratégies sont "50 delta straddle", "10 delta risk reversal", "25 delta risk reversal", "10 delta butterfly" et "25 delta butterfly".

$$\sigma_{RR} = \sigma_{10/25C} - \sigma_{10/25P} \quad (1)$$

$$\sigma_{BF} = \frac{\sigma_{10/25C} + \sigma_{10/25P}}{2} - \sigma_{STR} \quad (2)$$

À partir de ces équations, il est facile d'isoler les séries temporelles pour 5 prix d'exercice différents. Ces prix d'exercice sont en réalité des deltas. De gauche à droite, on a le "10 delta put", le "25 delta put", le "at-the-money", le "25 delta call" et le "10 delta call". Si on prend par exemple le "10 delta put", cela représente la volatilité implicite associée à l'achat d'une option de vente dont le delta est de -0,10. Cette option est donc très "out of the money". Quant au "10 delta call", il est associé à la volatilité d'une option d'achat dont le delta est de 0,10, ce qui est aussi très "out of the money".

$$\sigma_{10P} = \sigma_{STR} + \sigma_{10BF} - \frac{1}{2}\sigma_{10RR} \quad (3)$$

$$\sigma_{25P} = \sigma_{STR} + \sigma_{25BF} - \frac{1}{2}\sigma_{25RR} \quad (4)$$

$$\sigma_{ATM} = \sigma_{ATM} + 1 \quad (5)$$

$$\sigma_{25C} = \sigma_{STR} + \sigma_{25BF} + \frac{1}{2}\sigma_{25RR} \quad (6)$$

$$\sigma_{10C} = \sigma_{STR} + \sigma_{10BF} + \frac{1}{2}\sigma_{10RR} \quad (7)$$

Par exemple, pour le 3 janvier 2005, on obtient cette série pour le taux de change AUD/USD.

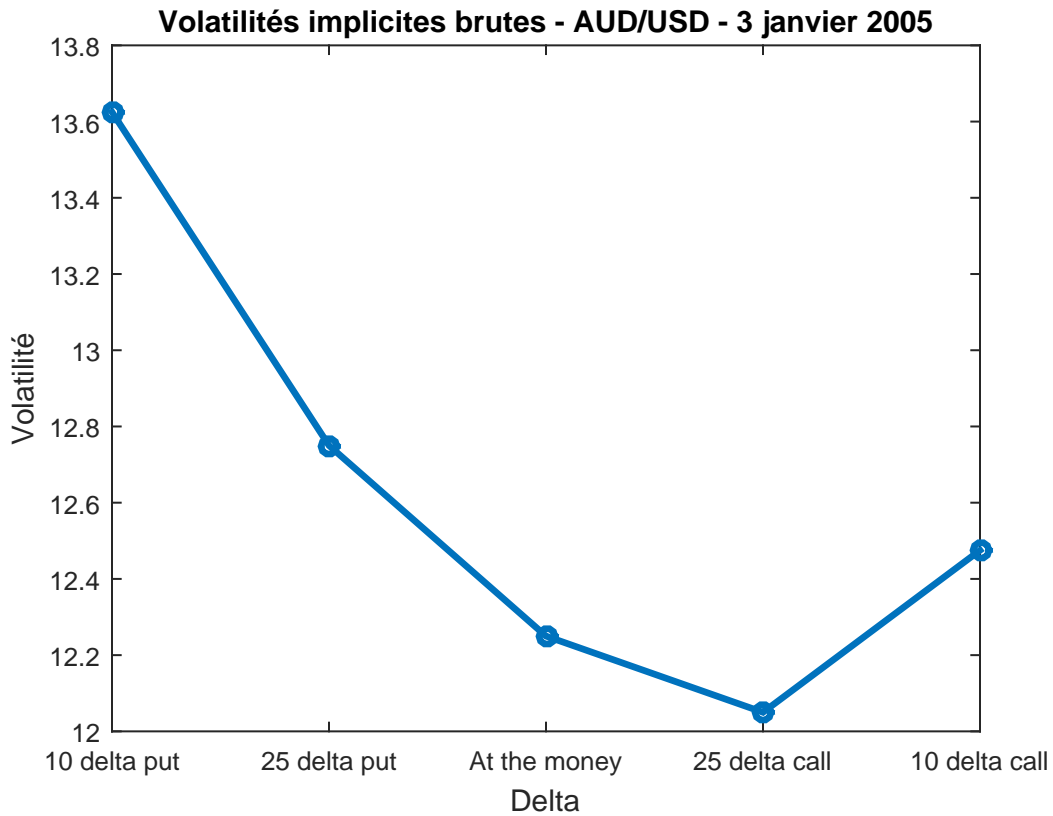


FIGURE 1: Sur l'axe des Y se trouve l'écart-type utilisé comme "input" dans la formule de Black & Scholes tandis que sur l'axe des X se trouve le delta de l'option en question.

Il est vrai que dans les autres marchés, il est courant de voir un "smile" pour les options d'achat et un autre "smile" pour les options de vente. Ces deux "smile" peuvent diverger légèrement mais

avec la théorie de la parité "put-call", ces divergences ne devraient pas exister. Ce sont donc des anomalies du marché. Avec ces données pour le forex, nous devons assumer que le "smile" est le même pour les options d'achat et de vente. Dans cette série de données, on peut noter 2 manques à combler. Le premier est que, si nous relient les points de façon linéaire, les données de volatilités à l'intérieur de l'étendue des données brutes seraient surestimées puisque le "smile" de volatilité est une courbe convexe. Nous allons donc devoir interpoler pour obtenir des données plus précises à l'intérieur de nos 2 extrêmes. Le 2e manque à combler est que les données aux extrémités se terminent à 10 delta, c'est-à-dire qu'il reste de la place au-delà du "10 delta put" et du "10 delta call". Nous allons donc devoir extrapoler pour agrandir l'étendue du "smile". J'ai retenu deux méthodes pour régler ce problème. La première est la méthode de Vanna-Volga dont j'ai parlé plus haut. La 2e est la méthode du spline cubique qui utilise des polynômes pour interpoler. Un spline cubique est une fonction définie par morceaux avec l'aide de polynômes de degré 3.

Les conventions pour les volatilités implicites des options FX sont particulières. Je vais utiliser les conventions dans l'article de Reiswich et Wystup (2010) pour trouver les prix d'exercice associés aux deltas mentionnés plus hauts. D'abord, il y a des deltas "spot" et des deltas "forward". De façon générale, lorsque l'échéance des options est de 1 an et moins, nous avons un delta "spot" et lorsque l'échéance est de plus de 1 an, nous avons un delta "forward". Les données sur lesquelles je travaille sont pour des échéances de 3 mois et 1 an donc je vais m'en tenir à l'annotation pour les deltas spot. Lorsque le Dollar américain est la devise domestique, comme dans notre exemple AUD/USD, le delta est "premium unadjusted", c'est-à-dire qu'il n'y a pas ajustement fait sur celui-ci.

$$\Delta = \frac{\partial \nu}{\partial S}, \quad (8)$$

ν étant le prix "Black & Scholes" et S étant le prix spot. À partir de là il est possible de trouver analytiquement les formules pour dériver les prix d'exercices.

Pour les options de vente "out of the money" (2 premiers points) :

$$K_p = F e^{N^{-1}(-e^{(r_f T)} \delta_S) \sigma \sqrt{T} + 0.5 \sigma^2 T} \quad (9)$$

Pour les options "at-the-money" (3e point) :

$$K_{ATM} = F e^{0.5\sigma^2 T} \quad (10)$$

Pour les options d'achat "out of the money" (2 derniers points) :

$$K_C = F e^{-N^{-1}(e^{(r_f T)} \delta_S) \sigma \sqrt{T} + 0.5\sigma^2 T}, \quad (11)$$

Avec F = prix "forward" théorique à l'échéance de l'option et N^{-1} = fonction normale inverse.

Par ailleurs, lorsque la devise américaine est la devise étrangère, comme par exemple USD/CAD, le delta a été ajusté pour refléter le point de vue d'un investisseur américain. On dit donc que le delta est "premium adjusted". (équation 14 de Reiswich)

$$\Delta_{S,pa} = \phi \frac{K}{f} N\phi\left(\frac{\ln(\frac{f}{K}) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}\right), \quad (12)$$

avec $\phi = 1$ si l'option est une option d'achat et $\phi = -1$ si l'option est une option de vente.

Il n'existe pas de solution analytique à cette équation pour trouver K . Nous devons donc la résoudre de façon numérique. Pour y arriver, j'utilise une fonction de minimisation pour trouver la racine de l'équation 12. Sur le graphique 2 (a), nous voyons la relation du delta d'une option de vente "premium adjusted" avec le prix d'exercice de celle-ci. On voit que, contrairement à une option "unadjusted", son delta ne tend pas vers -1 lorsque celle-ci est "deep in the money". Sur le graphique 2 (b), nous voyons la même relation mais avec une option d'achat. Contrairement à une option d'achat "unadjusted", son delta ne tend pas vers 1 lorsque celle-ci est "deep" in the money". De plus, il y a toujours deux prix d'exercices associés à un même delta. Pour gérer ce problème, lorsque j'utilise ma fonction de minimisation pour trouver mes racines, je lui demande de trouver les racines sur un intervalle qui commence au prix "forward" du sous-jacent. De cette façon, j'évite de tomber dans un piège et de tomber sur la première racine qui n'est pas celle souhaitée.

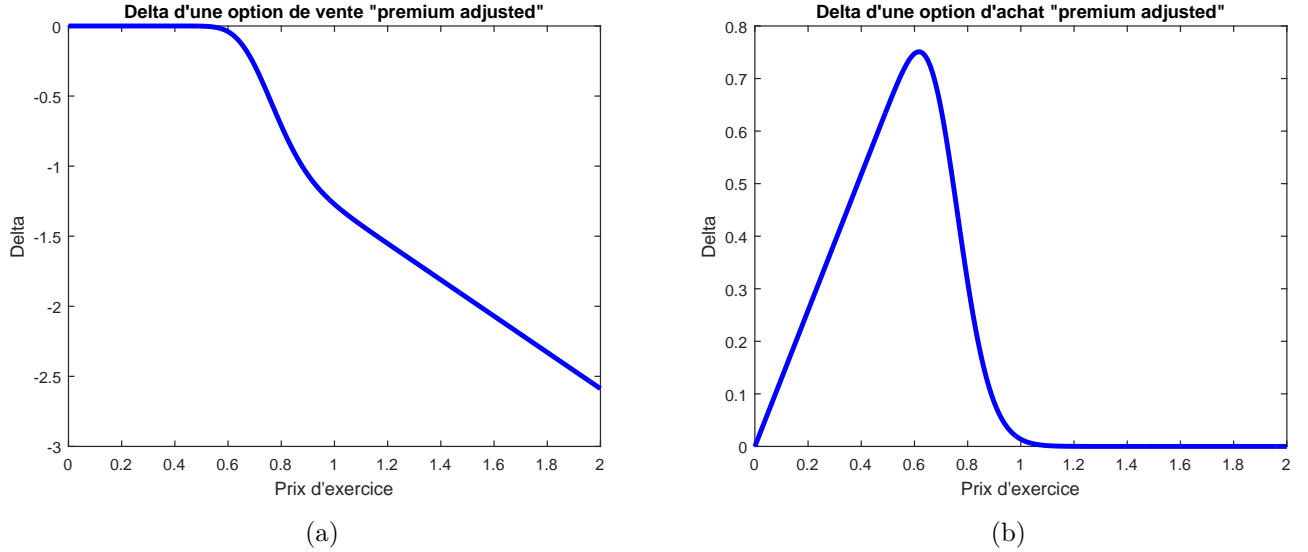


FIGURE 2: Sur l'axe des Y se trouve le delta de l'option et sur l'axe des X se trouve le prix d'exercice de l'option. (a) : Graphique des delta d'une option de vente "premium adjusted" selon son prix d'exercice. (b) : Graphique des delta d'une option d'achat "premium adjusted" selon son prix d'exercice.

Comme nous pouvons le voir sur le graphique 3, nous avons maintenant les prix associés aux 5 différents delta pour les options "premium unadjusted" et les options "premium adjusted".

Je dois maintenant compléter ce "smile" de volatilité. Jiang et Tian (2005) montrent qu'il existe deux types d'erreurs lorsqu'on veut calculer un taux de swap de volatilité synthétique. La première est l'erreur de troncature qui est l'erreur engendrée lorsqu'on n'extrapole pas le "smile" de volatilité assez loin au delà des points "10 delta put" et "10 delta call". Ils montrent qu'en extrapolant 2 écarts-types à gauche et à droite, les erreurs de troncatures tendent vers 0. Je vais utiliser la volatilité implicite "at-the-money" comme écart-type et je vais extrapoler jusqu'à 3 écarts-types pour être certain qu'il n'y a aucune erreur de troncature. La deuxième est l'erreur de discrétisation liée à l'évaluation de l'intégrale avec la méthode des trapèzes. Pour contrer celle-ci, je vais utiliser 119 options différentes pour être certain que ma courbe à intégrer est lisse.

La méthode de Vanna-Volga utilise les lettres grecques Vega, Vanna et Volga pour interpoler le prix des options. Avec la méthode de Vanna-Volga, je dois utiliser la formule de Black & Scholes pour calculer le prix de mes options. Ensuite, j'utilise le prix de 3 options pour interpoler et extrapoler le

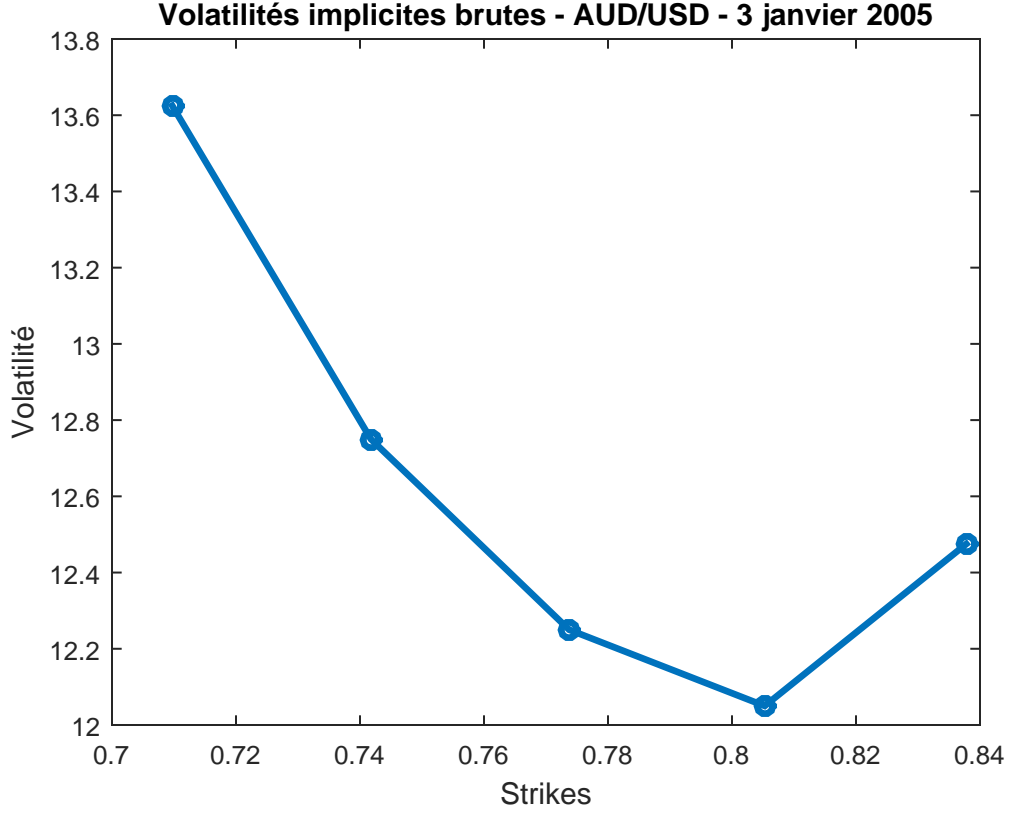


FIGURE 3: Sur l'axe des Y se trouve l'écart-type utilisé comme "input" dans la formule de Black and Scholes tandis que sur l'axe des X se trouve le prix d'exercice de l'option en question.

reste des prix des options. J'utilise ensuite la formule de Black & Scholes pour calculer les volatilités implicites et compléter le "smile" de volatilité. Le problème avec cette méthode est qu'elle doit être utilisée en fonction de 3 points, dont 1 point central et 2 points en périphérie. Je ne tiens pas compte des 2 points extrêmes, ce qui fait que le "smile" ne passera pas nécessairement directement sur ces points. La formule pour interpoler et extrapoler le prix des options est la suivante :

$$C(K) = C^{BS}(K) + x_1(K)[C^{MKT}(K_1) - C^{BS}(K_1)] + x_3(K)[C^{MKT}(K_3) - C^{BS}(K_3)], \quad (13)$$

Avec

$C(K)$ = Le prix de l'option que je cherche à calculer

$C^{BS}(K_x)$ = Le prix de l'option Black & Scholes en utilisant la volatilité du point central et le prix d'exercice respectif.

$C^{MKT}(K_x)$ = Le prix de l'option Black & Scholes en utilisant la volatilité du point respectif et le prix d'exercice central.

$$x_1(K) = \frac{Vega(K) \ln(\frac{K_2}{K}) \ln(\frac{K_3}{K})}{Vega(K_1) \ln(\frac{K_2}{K_1}) \ln(\frac{K_3}{K_1})}$$

$$x_3(K) = \frac{Vega(K) \ln(\frac{K}{K_1}) \ln(\frac{K}{K_2})}{Vega(K_3) \ln(\frac{K_3}{K_1}) \ln(\frac{K_3}{K_2})}$$

Avec la méthode du spline cubique, j'utilise la formule déjà programmée dans Matlab. Je n'ai qu'à lui fournir mes x et mes y. Le problème avec la méthode du spline cubique, c'est qu'elle est effective seulement pour interpoler à l'intérieur des points du "smile". Contrairement à la méthode de Vanna-Volga, pour extrapoler à l'extérieur des points, il n'y a pas de fondement raisonnable pour soutenir cette méthode. Comme mentionné par Jiang et Tian (2005), nous devons donc utiliser les volatilités implicites des points 10 delta sur tous les points à l'extérieur de cet intervalle. Ils montrent aussi dans leur recherche que l'erreur d'approximation causée par cette méthode d'extrapolation est plus faible que l'erreur de troncature qui serait engendrée si nous utilisions seulement le "smile" entre les points 10 delta put et 10 delta call pour calculer le taux de swap de volatilité synthétique. Sur le graphique 4, j'ai sorti deux exemples où la méthode du spline cubique extrapolerait de façon non fondée le "smile" de volatilité. Sur le graphique 4 (a), la méthode du spline cubique fait en sorte que la volatilité sur les extrémités baisse très abruptement. Sur le côté gauche, cela est dû au fait que la pente entre le point 1 et 2 est moins abrupte que la pente entre les points 2 et 3. Il n'est pas réaliste de penser que ce scénario soit réel puisque sur les extrémités, le "smile" remonte généralement vers le haut de façon à ce que les options "out of the money" ne valent pas 0\$. Sur le graphique 4 (b), le scénario suggéré par le "skewness" des points est qu'il y a une forte demande pour les "protective put" et les "covered call". Cela suggère que les gens ont peur d'un marché

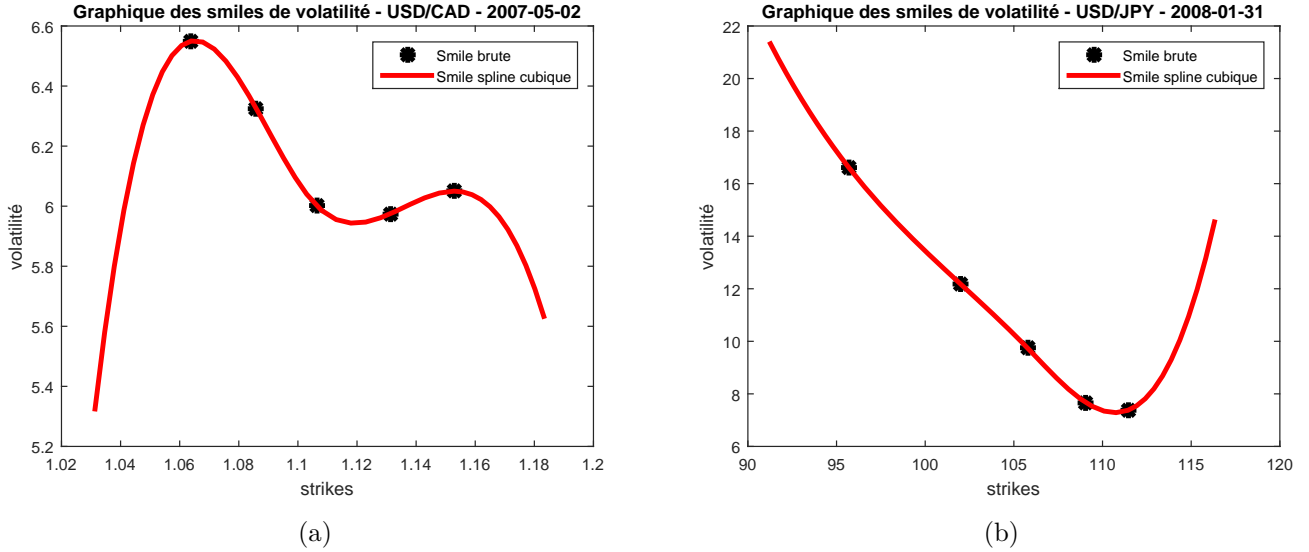


FIGURE 4: Sur l'axe des Y se trouve l'écart-type et sur l'axe des X se trouve les prix d'exercice. (a) : Graphique d'un "smile" de volatilité avec un échéance d'un an sur le taux de change USD/CAD extraite à partir de la méthode du spline cubique. (b) : Graphique d'un "smile" de volatilité avec un échéance d'un an sur le taux de change USD/JPY extraite à partir de la méthode du spline cubique.

baissier. À la droite du "smile", le graphique remonte très abruptement malgré le scénario suggéré que la demande pour les "covered call" est forte, ce qui ne me semble pas très réaliste.

Sur le graphique 5, on voit que les deux méthodes donnent sensiblement le même "smile" de volatilité à l'intérieur des 5 points. Par contre, puisque la méthode du spline cubique n'a pas de fondement raisonnable pour l'utiliser pour l'extrapolation en dehors des points, nous devons utiliser la dernière volatilité disponible pour l'extérieur. Cette méthode d'extrapolation sous-estime le taux de swap de volatilité pour le spline cubique qui donne un résultat de 0.0971. Le taux de swap de volatilité obtenu plus réalistement avec la méthode de Vanna-Volga donne un résultat de 0.0981.

Sur le graphique 6, si nous avons utilisé le spline cubique pour extrapoler à l'extérieur des points, celui-ci pointerait vers le bas, ce qui serait irréaliste. On peut donc dire que la méthode d'extrapolation constante donne un résultat plus réaliste que celui qu'on obtiendrait en extrapolant avec le spline cubique. Quant au "smile" du Vanna-Volga, Le problème est que la méthode de Vanna-Volga est dérivée d'une façon à prendre en compte seulement 3 points. J'ai utilisé les trois points centraux, ce qui fait qu'en ne tenant pas compte des deux points extrêmes, la méthode n'a pas

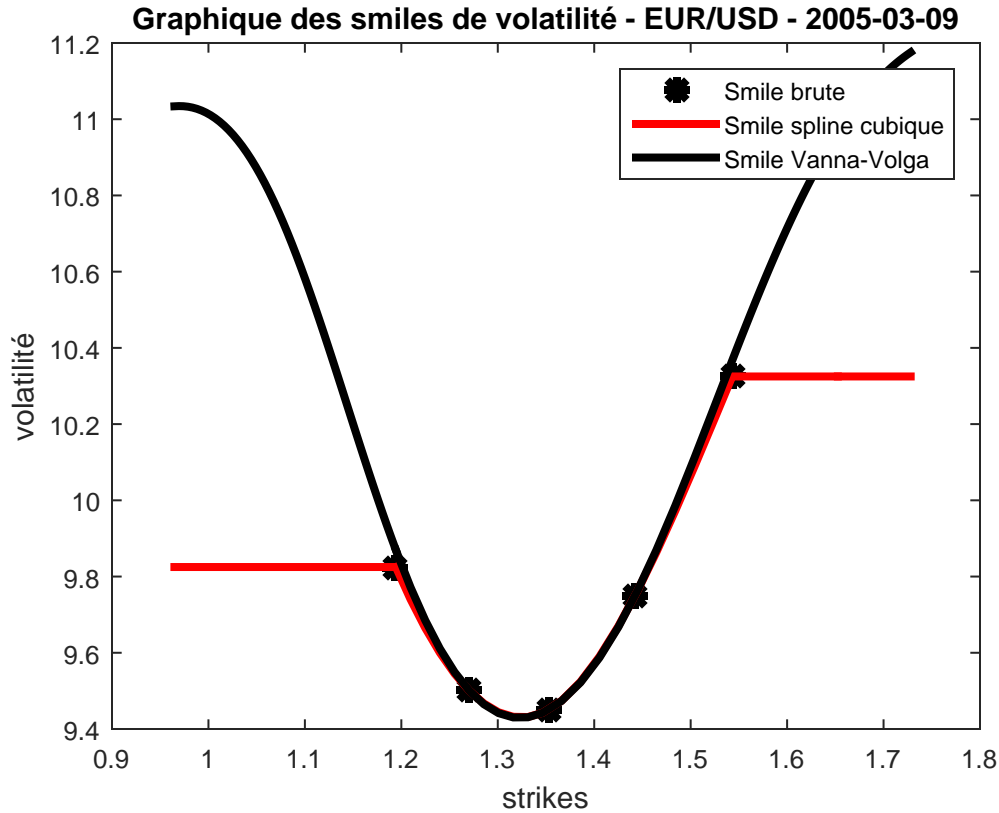


FIGURE 5: Sur l'axe des Y se trouve l'écart-type utilisé comme "input" dans la formule de Black and Scholes tandis que sur l'axe des X se trouve le prix d'exercice de l'option en question.

l'information nécessaire pour comprendre que les extrémités ne devraient pas être autant relevées. Comme nous le verrons plus loin, la disparité entre les deux courbes est beaucoup plus significative lorsqu'elle survient dans vers le milieu puisque plus de poids est accordé sur cette région dans le calcul du swap de volatilité. Dans ce cas-ci, il y a une grosse disparité entre le résultat des taux de swap entre les deux méthodes qui sont respectivement 0.0625 et 0.0731 pour le spline cubique et le Vanna-Volga.

Sur le graphique 7, on voit à gauche que la méthode du spline cubique monte plus haut que la méthode de Vanna-Volga puisque cette dernière ne prend pas en compte l'information contenue dans le point à l'extrémité gauche. On voit aussi qu'il y a un problème sur l'extrémité droite. La méthode de Vanna-Volga donne des volatilités qui frôlent le 0. À première vue, cette situation

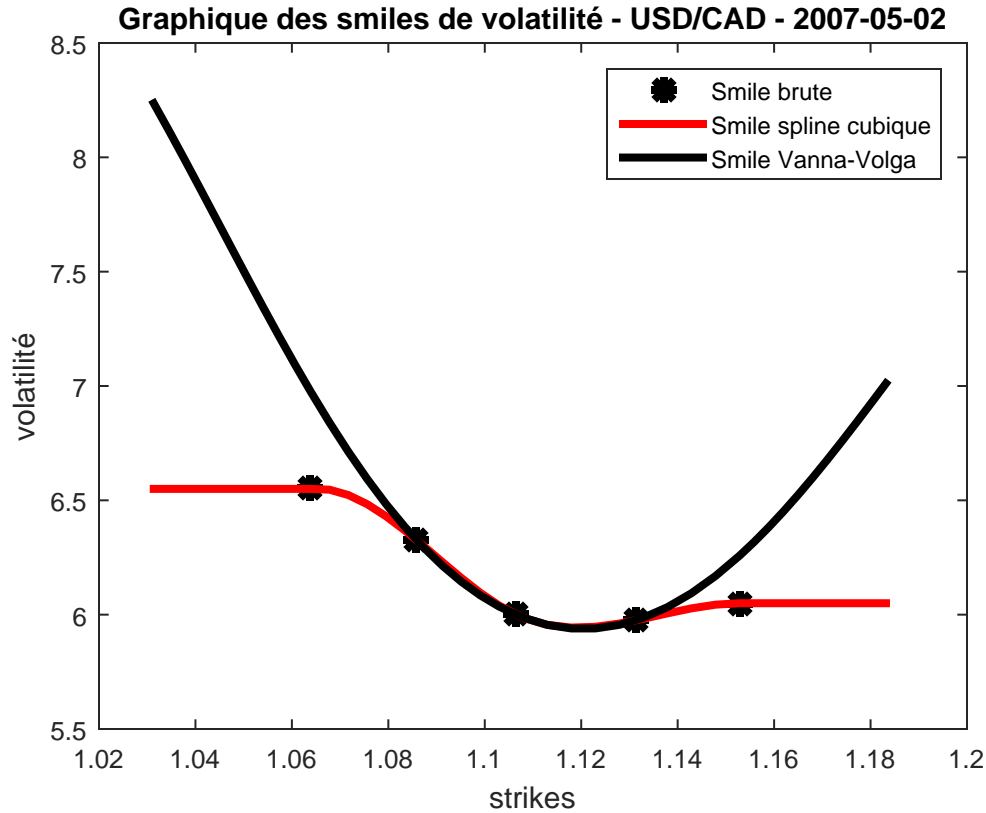


FIGURE 6: Sur l'axe des Y se trouve l'écart-type utilisé comme "input" dans la formule de Black and Scholes tandis que sur l'axe des X se trouve le prix d'exercice de l'option en question.

semble très problématique, mais en réalité, elle ne l'est pas autant qu'elle ne le paraît. S'il y a des volatilités de 0, c'est parce que l'option utilisée pour calculer la volatilité implicite a un Vega qui est de 0, c'est-à-dire que le prix de celle-ci ne varie plus en fonction de la volatilité. En effet, si on utilise une option d'achat "out of the money", elle aurait un prix de 0, un Delta très près de 0 et un Vega nul. Puisque cette option aurait un prix de 0, lorsque nous allons calculer le taux de swap de volatilité, cette partie du graphique n'aura aucun impact sur le résultat. Néanmoins, la différence entre les taux de swap de variance des deux méthodes sur ce graphique est assez grande. La méthode de Vanna-Volga donne un taux de swap de 0.1172 tandis que la méthode du spline cubique donne un taux de swap de 0.1233.

Une fois que j'ai obtenu mon "smile" complet, je vais utiliser la méthode de Carr et Wu (2010), qui est une amélioration de la méthode de Britten-Jones (2000) et de Jiang et Tian (2005) pour

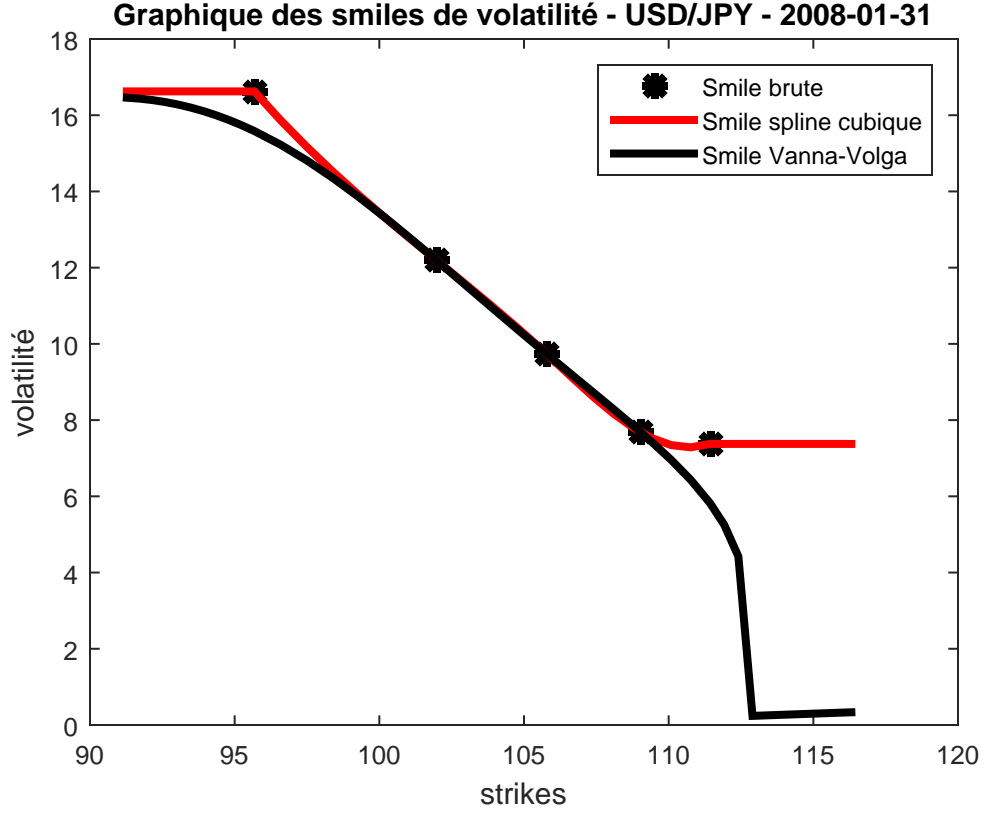


FIGURE 7: Sur l'axe des Y se trouve l'écart-type utilisé comme "input" dans la formule de Black and Scholes tandis que sur l'axe des X se trouve le prix d'exercice de l'option en question.

calculer le taux de swap de variance. Cette méthode se résume par la formule suivante :

$$IV_{t,t+\tau} = \omega \left(\int_0^{F_{t,t+\tau}} \frac{P_{t,t+\tau}(K) dK}{K^2} + \int_{F_{t,t+\tau}}^{\infty} \frac{C_{t,t+\tau}(K) dK}{K^2} \right), \quad (14)$$

Avec

$$\omega = 2 * \exp(r_d * \tau)$$

Sur le graphique 8, la partie de gauche de l'intégrale représente une série d'options de vente "out of the money" divisée par son prix d'exercice respectif au carré tandis que la portion de droite représente une série d'options d'achat "out of the money" divisée par son prix d'exercice respectif au carré. Par exemple, si nous avions fait cette intégrale avec nos données brutes seulement, nous

aurions surestimé le résultat dans la partie à l'intérieur de notre étendue de données puisque les 2 courbes sont convexes et qu'il n'y a pas beaucoup de points. Cela représente l'erreur de discrétisation expliquée plus haut. Nous aurions aussi sous-estimé notre résultat à l'extérieur de notre étendue puisqu'il reste encore de la place avant que le prix des options soit égal à 0. Cela représente l'erreur de troncature mentionnée précédemment.

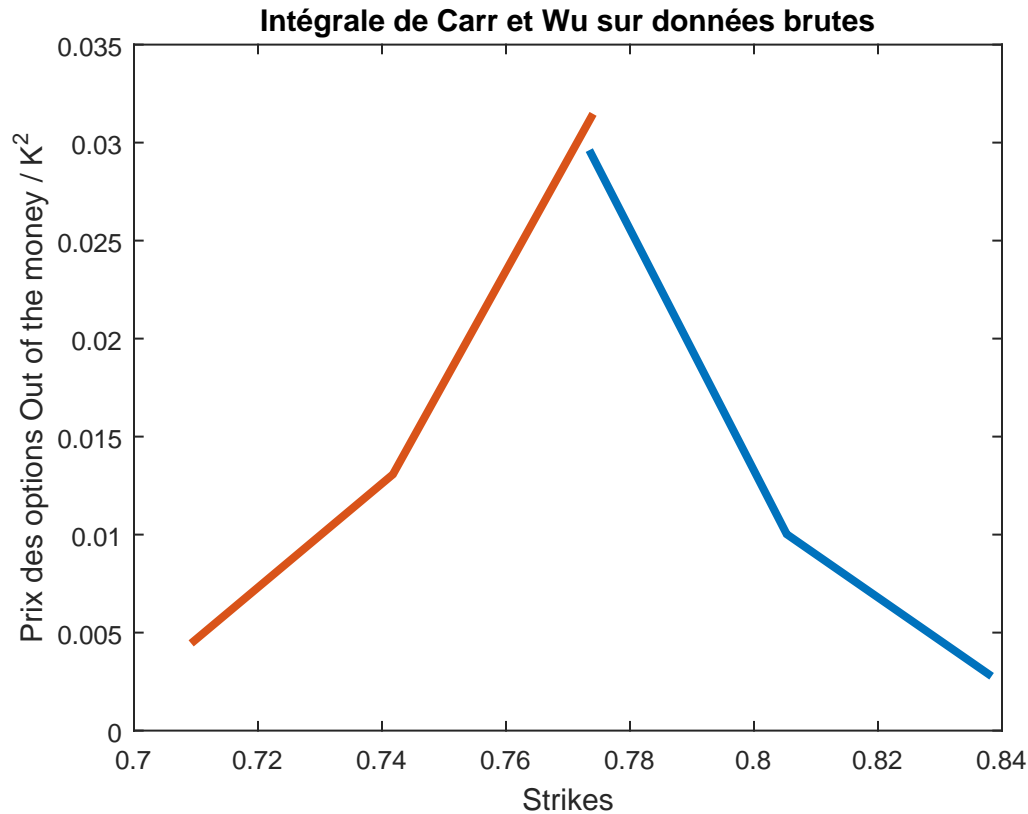


FIGURE 8: Sur l'axe des Y se trouve le prix des options "out of the money" utilisées divisées par le prix d'exercice au carré. C'est en fait les termes utilisés dans l'intégrale de Carr et Wu. Sur l'axe des X se trouve les prix d'exercices des options.

Nous pouvons constater dans le graphique 8 que le prix des options d'achat et de vente "at the money" ne sont pas égaux. C'est normal puisque je considère le point "at the money" comme étant le prix spot. Dans la formule de Carr et Wu (2009), le prix "at the money" utilisé est le prix "forward" mais je ne pouvais pas l'utiliser dans le graphique 6 puisque je n'avais pas encore obtenu mon "smile" complet. Sur le graphique 9, je vais considérer le point "at the money" comme étant

le prix "forward" à l'échéance de l'option et les prix de l'option d'achat et de vente au point "at the money" seront égaux. On voit sur le graphique 9 que les résultats de l'estimation de l'intégrale de Carr et Wu (2009) seront beaucoup plus précis avec le "smile" complet. Il est important d'extrapoler le "smile" assez loin dans les extrémités pour que les courbes tendent vers 0. Comme on peut voir dans ce cas-ci, trois écarts-types sont amplement suffisants pour l'extrapolation. Pour estimer cette intégrale, j'utilise la méthode des trapèzes, c'est-à-dire que je calcule l'aire d'un trapèze entre chacun de mes points. Le résultat de la formule donne une variance et je calcule la racine carrée de celle-ci pour obtenir l'écart-type sur une base annualisée. Cet exemple presque parfait montre une option de 3 mois sur le taux de change AUD/USD. Ce n'est pas toujours aussi beau.

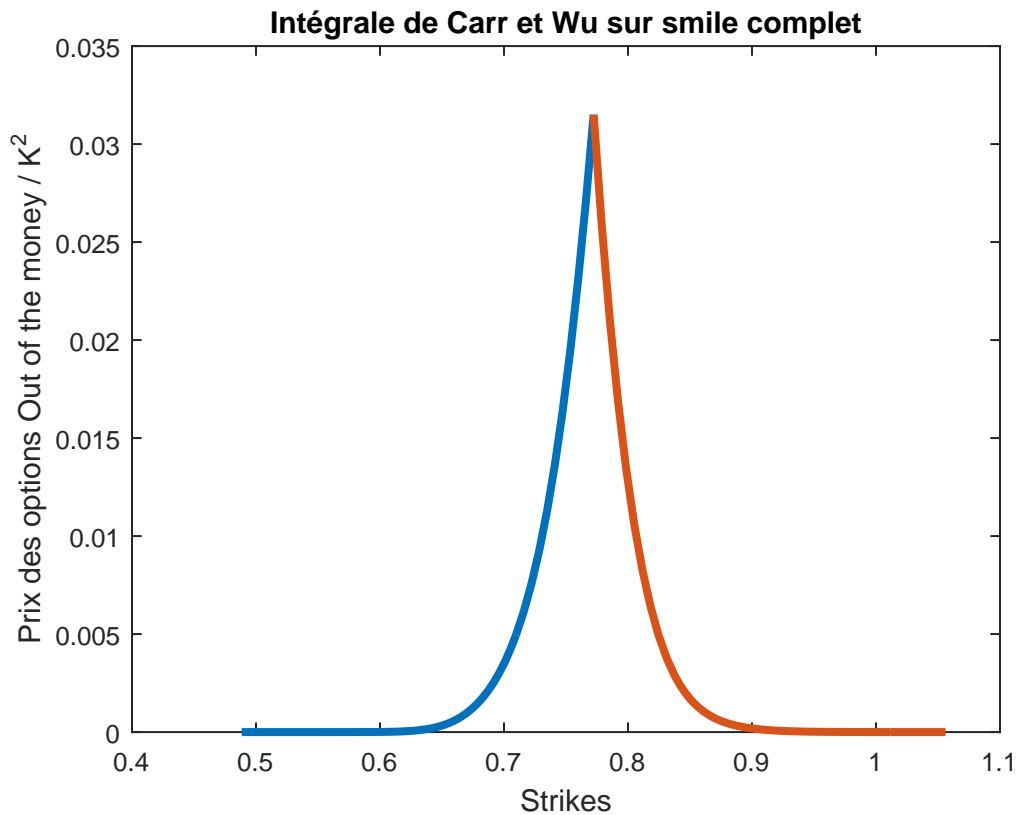


FIGURE 9: Sur l'axe des Y se trouve le prix des options "out of the money" utilisées divisées par le prix d'exercice au carré. C'est en fait les termes utilisés dans l'intégrale de Carr et Wu. Sur l'axe des X se trouve les prix d'exercices des options.

Sur le graphique 10 (a), nous voyons un "smile" avec beaucoup de "skewness". Sur le graphique

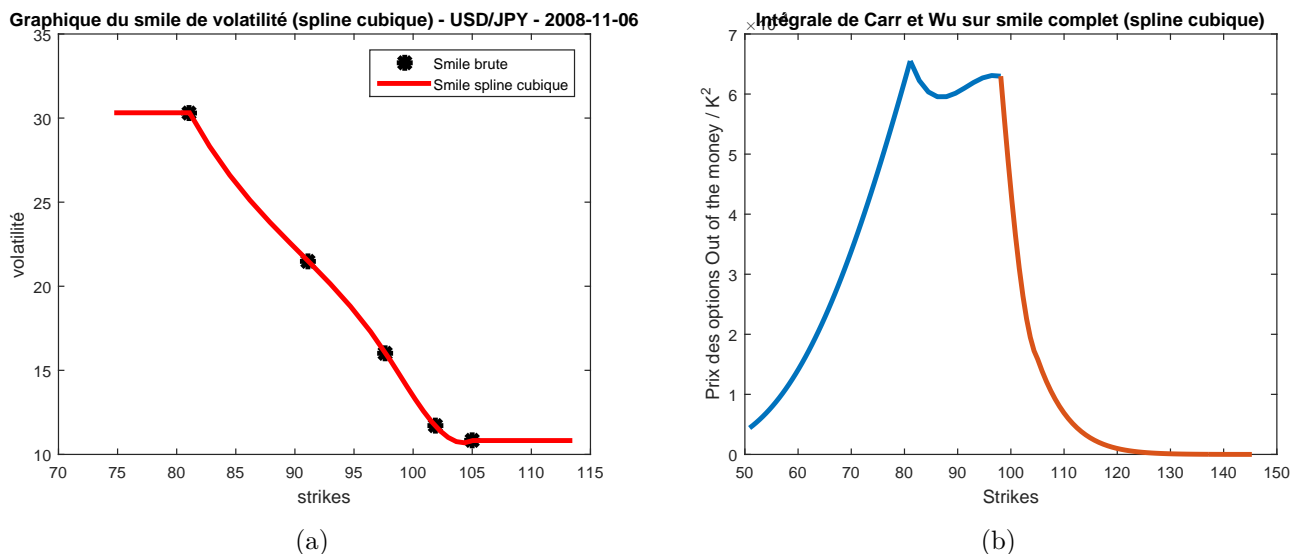


FIGURE 10: (a) : Graphique d'un "smile" de volatilité avec un échéance d'un an sur le taux de change USD/JPY extraite à partir de la méthode du spline cubique et d'échéance 1 an. (b) : Graphique de l'intégrale de Carr et Wu sur le taux de change USD/JPY provenant du spline cubique et d'échéance 1 an.

10 (b), la ligne bleue, qui représente les options de vente "out of the money", est dotée d'une grosse encoche. Celle-ci est simplement causée par la méthode d'extrapolation du spline cubique à l'extrémité gauche du premier point. Le Vega des options augmente grandement avec l'échéance de l'option. Ici, nous avons des options d'échéance 1 an, ce qui fait que le Vega est très grand. De plus, les queues du Vega deviennent très épaisses lorsque la volatilité augmente. Puisque l'encoche se situe au niveau du point "10 delta call" et qu'il y a beaucoup de skewness, les prix des options sont très sensibles aux variations dans la volatilité autour de ce point.

Le graphique 11 montre des séries temporelles pour les taux de swap de volatilité synthétiques. Le taux de swap provenant de la méthode du spline cubique est en noir tandis que celui provenant de la méthode de Vanna-Volga est en rouge. J'ai ajouté la volatilité implicite "at the money" en bleu pour comparaison. Dans cet exemple qui se situe entre 2006 et 2010, nous pouvons voir que le taux de swap de volatilité avec la méthode de Vanna-Volga est supérieur au taux de swap avec la méthode du spline cubique. Les deux taux de swap sont supérieurs à la volatilité "at the money", ce qui est normal puisque les extrémités du "smile" sont de façon générale plus élevées que le centre.

Maintenant que nous avons estimé la volatilité implicite du modèle, nous avons besoin de la

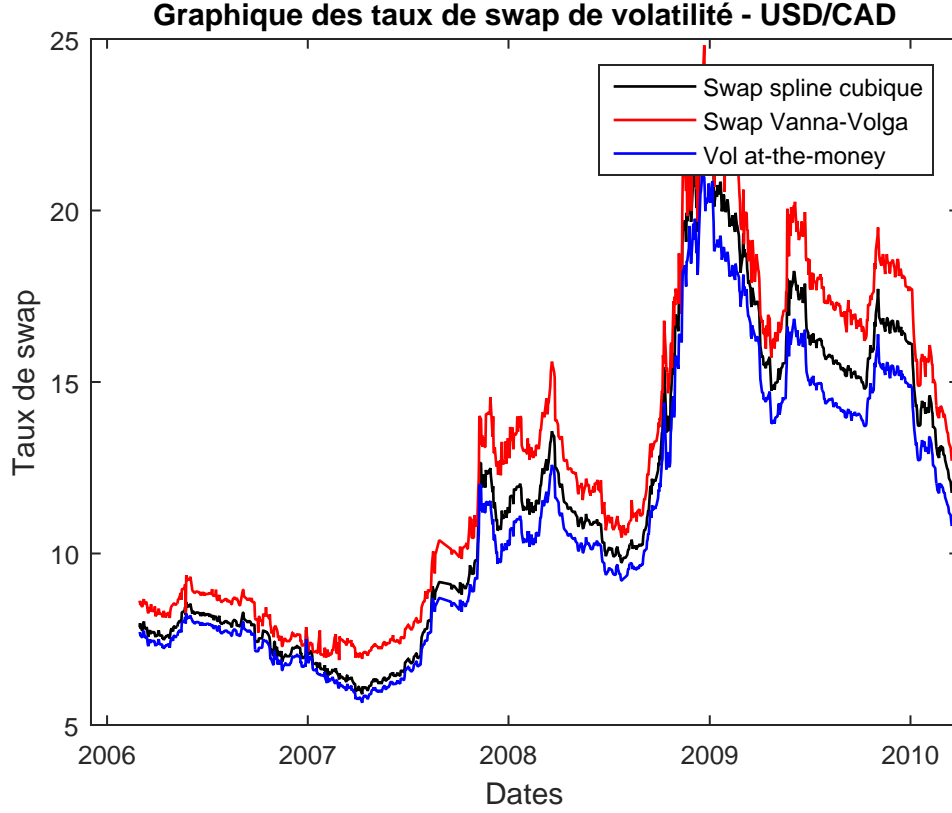


FIGURE 11: Sur l'axe des Y se trouve le taux de swap de volatilité (écart-type en pourcentage). Sur l'axe des X se trouvent les dates auxquelles ces taux de swap ont été calculés.

volatilité réalisée dans la dernière période, soit dans les 63 derniers jours ouvrables pour les options d'échéance 3 mois et des 252 derniers jours ouvrables pour les options d'échéance 1 an.

$$RV_{t,t+\tau} = \sqrt{\frac{252}{\tau} \sum_{i=0}^{\tau} r_{t-i}^2} \quad (15)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer la prime de risque de la variance.

$$VRP_{t,t+\tau} = RV_{t,t+\tau} - IV_{t,t+\tau} \quad (16)$$

Le graphique 12 montre en (a) la prime de risque de la volatilité avec une échéance 1 an sur le

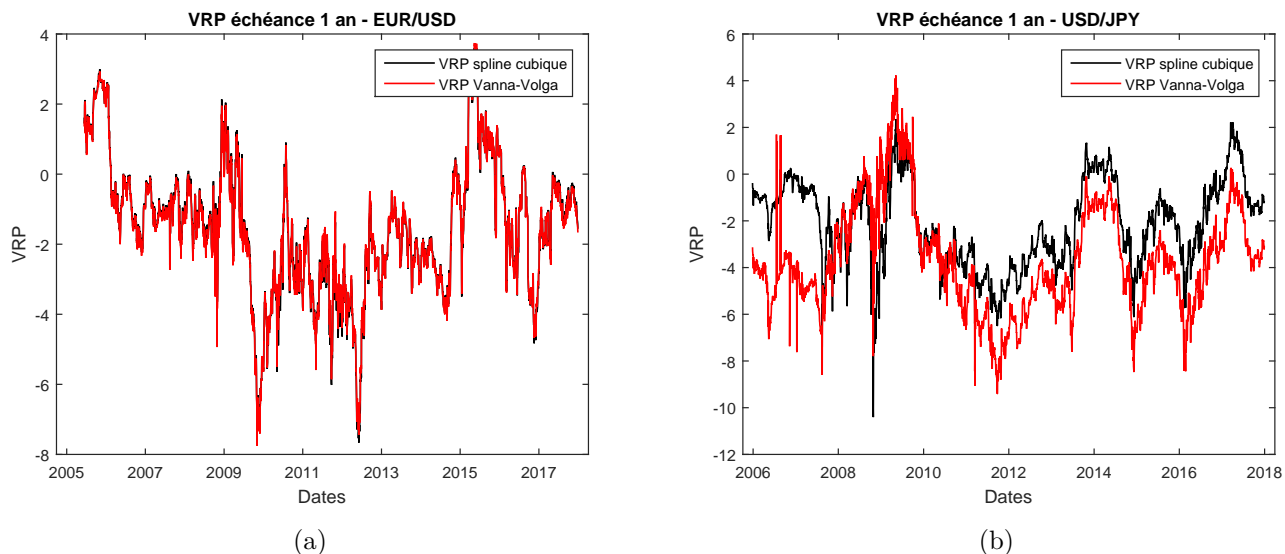


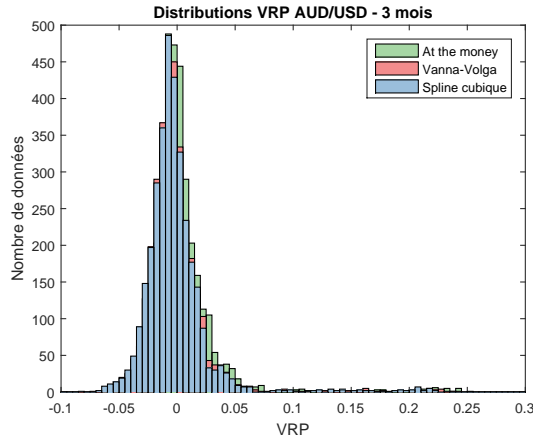
FIGURE 12: Sur l'axe des Y se trouve la prime de risque de la volatilité et sur l'axe des X se trouve la date. (a) : Graphique de VRP avec un échéance d'un an sur le taux de change EUR/USD. (b) : Graphique de VRP avec un échéance d'un an sur le taux de change USD/JPY.

taux de change EUR/USD. On voit que la VRP ne varie pas beaucoup en fonction de la méthode utilisée pour compléter le "smile". En (b) se trouve la VRP avec une échéance d'un an sur le taux de change USD/JPY. Nous pouvons voir qu'il y a de forts écarts sur la totalité du graphique. Ces forts écarts sont majoritairement causés par les "smile" de volatilité très atypiques sur cette série et l'échéance de 1 an amplifie ces anomalies. À première vue, l'hypothèse logique est que la méthode utilisée n'influencera pas le pouvoir prévisionnel des régressions pour EUR/USD mais qu'elle influencera le pouvoir prévisionnel des régressions pour USD/JPY.

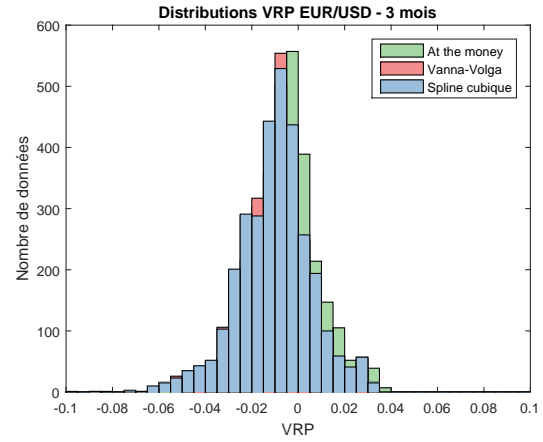
4 Données

Nous allons maintenant voir les statistiques descriptives des VRP obtenues avec les deux méthodes sur les 6 taux de change et sur les différentes échéances, soit 3 mois et 1 an. Puisque les résultats sur les séries "bid" et "ask" sont très similaires, je vais seulement montrer les distributions des "bid". Pour alléger le texte, j'utiliserai les abréviations "vv" pour la méthode de Vanna-Volga, "sc" pour la méthode du spline cubique et "atm" pour la volatilité "at the money".

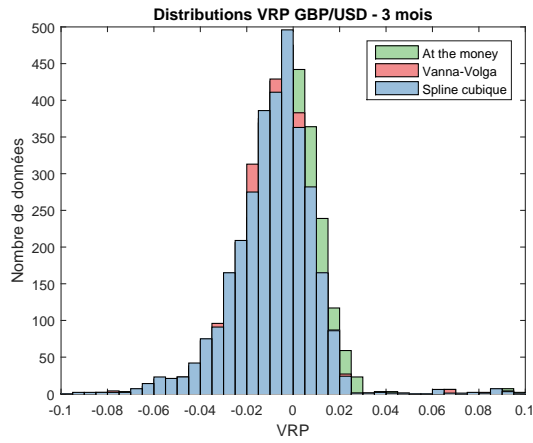
Les distributions d'échéances 3 mois se trouvent dans le graphique 13 et les statistiques descriptives se trouvent dans la table 1 à la fin de la section. La distribution des VRP vv et sc du taux de change AUD/USD d'échéance 3 mois sont presque identiques. Ils ont des moyennes très légèrement négatives, des écarts-types près de 3, des "skewness" positifs de 4 et des "kurtosis" qui se rapprochent de 30. La distribution 3 mois de la VRP atm est aussi très similaire mais sa moyenne est positive, donc la distribution est décalée vers la droite. La distribution des VRP vv et sc du taux de change EUR/USD d'échéance 3 mois sont aussi presque identiques. Ils ont des moyennes autour de -1, des écarts-types près de 1,6, des "skewness" négatifs de -0,3 et des "kurtosis" autour de 4,3. La distribution 3 mois de la VRP atm est aussi très similaire mais sa moyenne légèrement plus grande, donc la distribution est décalée vers la droite. La distribution des VRP vv et sc du taux de change GBP/USD d'échéance 3 mois sont aussi presque identiques. Ils ont des moyennes autour de -0,7, des écarts-types près de 2,25, des "skewness" autour de 2,2 et des "kurtosis" autour de 15. La distribution 3 mois de la VRP atm est aussi très similaire mais sa moyenne légèrement plus grande, donc la distribution est décalée vers la droite. La distribution des VRP vv et sc du taux de change USD/CAD d'échéance 3 mois sont aussi presque identiques. Ils ont des moyennes autour de -0,25, des écarts-types de 1,4, des "skewness" autour de 0,5 et des "kurtosis" autour de 3,7. La distribution 3 mois de la VRP atm est aussi très similaire mais sa moyenne est de 0, donc la distribution est décalée vers la droite. La distribution des VRP vv et sc du taux de change USD/CHF d'échéance 3 mois sont aussi presque identiques. Ils ont des moyennes autour de 0, des écarts-types de 4,4, des "skewness" autour de 4,7 et des "kurtosis" autour de 28. La distribution 3 mois de la VRP atm est aussi très similaire mais sa moyenne est de 0,38, donc la distribution est



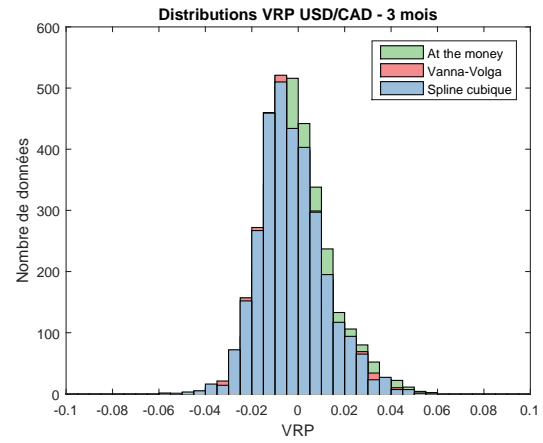
(a)



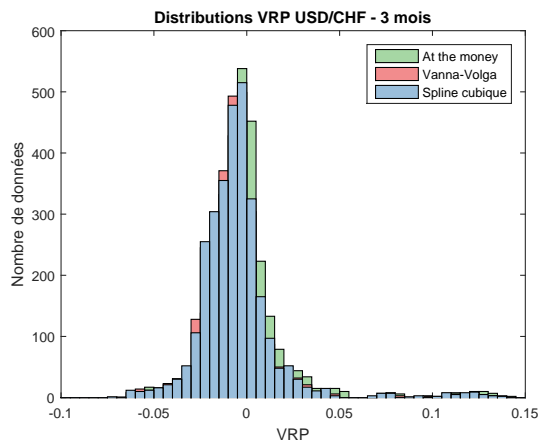
(b)



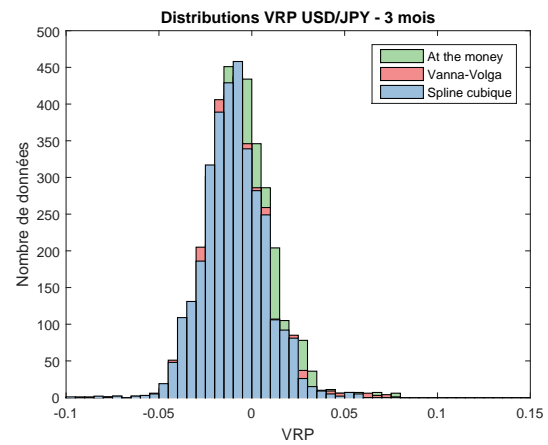
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 13: Sur l'axe des Y se trouve le nombre d'occurrences de la VRP tandis que sur l'axe des X se trouve la prime de risque de la volatilité.

(a) : Distribution de la VRP sur le taux de change AUD/USD d'échéance 3 mois.

(b) : Distribution de la VRP sur le taux de change EUR/USD d'échéance 3 mois.

(c) : Distribution de la VRP sur le taux de change GBP/USD d'échéance 3 mois

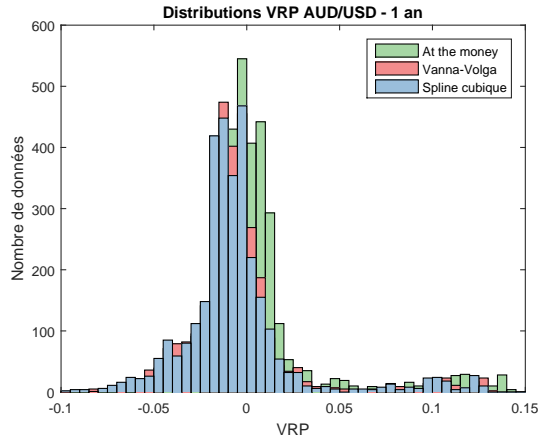
(d) : Distribution de la VRP sur le taux de change USD/CAD d'échéance 3 mois.

(e) : Distribution de la VRP sur le taux de change USD/CHF d'échéance 3 mois

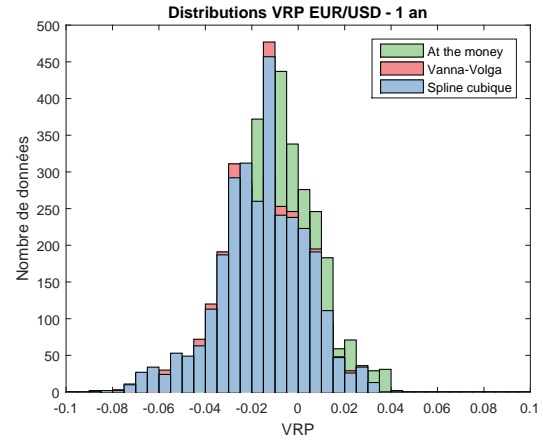
(f) : Distribution de la VRP sur le taux de change USD/JPY d'échéance 3 mois.

décalée vers la droite. La distribution des VRP vv et sc du taux de change USD/JPY d'échéance 3 mois sont aussi très similaires. Ils ont des moyennes autour de -0,90, des écarts-types autour de 1,7. Le "skewness" de vv est de 0,52 tandis que celui de sc est de 0,13. Le "kurtosis" de vv est de 5,08 tandis que celui de sc est de 4,52. La distribution 3 mois de la VRP atm est aussi très similaire mais sa moyenne est de -0,45, donc la distribution est décalée vers la droite. Pour résumer, toutes les distributions des VRP d'échéance 3 mois sont très similaires, mais les distributions des VRP atm sont légèrement décalées vers la droite.

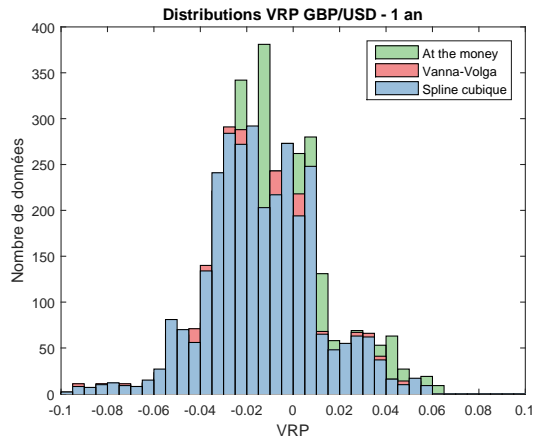
Les distributions d'échéance 1 an se trouvent dans le graphique 14 et les statistiques descriptives se trouvent dans la table 2 à la fin de la section. Les distributions des VRP vv et sc du taux de change AUD/USD d'échéance 1 an sont très similaires. Leurs moyennes tournent autour de -0,5, leurs écarts-types sont autour de 3,1, leurs "skewness" sont autour de 2 et leurs "kurtosis" moins gros autour de 9. La distribution atm a une moyenne plus grande de 0,06, un "skewness" et un "kurtosis" légèrement plus grands. Les distributions des VRP vv et sc du taux de change EUR/USD d'échéance 1 an sont aussi très similaires. Leurs moyennes tournent autour de -1,50 leurs écarts-types sont autour de 1,90, leurs "skewness" sont autour de -0,35 et leurs "kurtosis" moins gros autour de 3,4. La distribution atm a une moyenne plus grande de -0,81 mais les autres moments se ressemblent, donc elle est décalée vers la droite. Les distributions des VRP vv et sc du taux de change GBP/USD d'échéance 1 an sont aussi similaires. Leurs moyennes tournent autour de -1,30, leurs écarts-types sont autour de 2,4, leurs "skewness" sont près de 0 et leurs "kurtosis" autour de 3,7. La distribution atm a une moyenne plus grande de -0,62 mais les autres moments se ressemblent aussi, donc elle est décalée vers la droite. Pour le taux de change USD/CAD, la distribution vv est plus négative que la sc avec des moyennes respectives de -1,90 et -0,89. Leurs moments 2, 3 et 4 sont plutôt similaires avec des écarts-types autour de 1,5, des "skewness" autour de -0,4 et des "kurtosis" autour de 3,5. La distribution atm a une moyenne plus grande de -0,11, un écart-type similaire, un "skewness" et un "kurtosis" plus grand que les deux autres distributions. Pour le taux de change USD/CHF, la distribution vv est plus négative que la sc avec des moyennes respectives de -1,69 et -0,21. Leurs moments 2 et 4 sont plutôt similaires avec des écarts-types autour de 3,5 et des "skewness" autour de 1,6 et des "kurtosis" autour de 5,6. La distribution atm a une moyenne plus grande de 0,80 et les moments 2 à 4 sont similaires aux deux autres distributions.



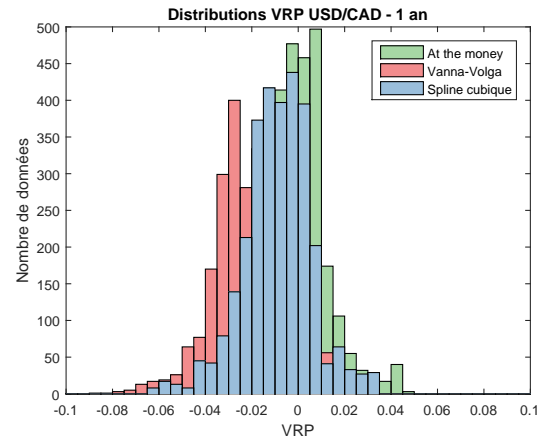
(a)



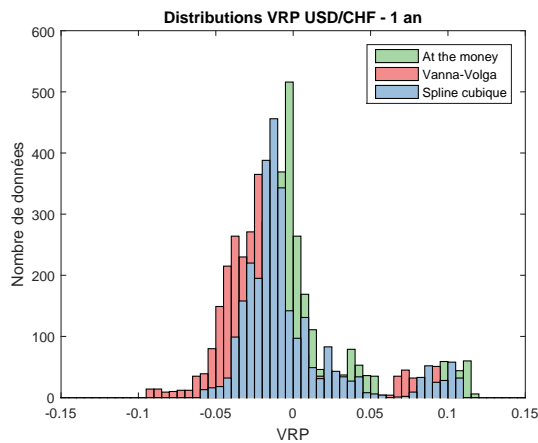
(b)



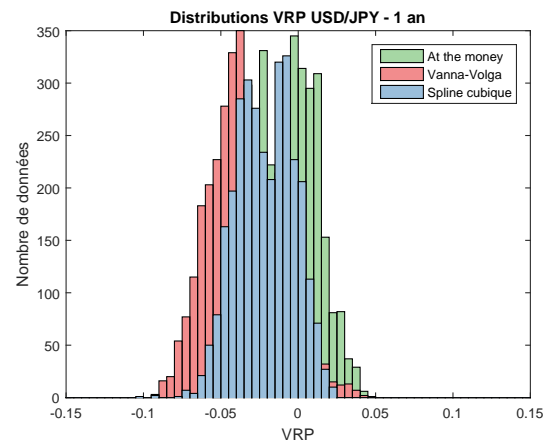
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 14: Sur l'axe des Y se trouve le nombre d'occurrences de la VRP tandis que sur l'axe des X se trouve la prime de risque de la volatilité.

- (a) : Distribution de la VRP sur le taux de change AUD/USD d'échéance 1 an.
- (b) : Distribution de la VRP sur le taux de change EUR/USD d'échéance 1 an.
- (c) : Distribution de la VRP sur le taux de change GBP/USD d'échéance 1 an.
- (d) : Distribution de la VRP sur le taux de change USD/CAD d'échéance 1 an.
- (e) : Distribution de la VRP sur le taux de change USD/CHF d'échéance 1 an.
- (f) : Distribution de la VRP sur le taux de change USD/JPY d'échéance 1 an.

Pour le taux de change USD/JPY, la distribution vv est plus négative que la sc avec des moyennes respectives de -3,68 et -2,13. La méthode vv donne des moments 2 à 4 légèrement plus grands que ceux de sc. La distribution atm a une moyenne moins négative de -0,52, un écart-type de 1,8, un "skewness" près de 0 et un "kurtosis" de 2,25. Pour résumer, les distributions des VRP des taux de change AUD/USD, EUR/USD et GBP/USD se ressemblent beaucoup mais celle avec la VRP atm est décalée vers la droite. Pour les taux de change USD/CAD, USD/CHF et USD/JPY, les distributions Vanna-Volga sont plus négatives que les distributions spline cubique, qui sont plus négatives que les distributions atm.

Della Corte, Ramadorai et Sarno (2016) avaient utilisé la méthode du spline cubique et des options d'échéance 1 an. Les moments 1 à 4 de mes distributions avec le spline cubique d'échéance 1 an ressemblent beaucoup aux leurs. Londono et Zhou (2017) ont utilisé des options d'échéance 6 mois pour la volatilité implicite et une volatilité réalisée sur le dernier mois. Mes distributions ne peuvent donc pas être comparées avec les leurs.

Les corrélations se trouvent dans la table 3 à la fin de cette section. Elles ne varient pas beaucoup d'une méthode à l'autre pour les VRP construites avec des options d'échéance 3 mois. Pour les VRP construites avec des options d'échéance 1 an, les coefficients de corrélations varient de façon plus significative d'une méthode à l'autre. De manière générale, les séries de VRP sont modérément corrélées entre eux, mis à part USD/CHF qui est très faiblement corrélée (et même parfois négativement corrélée) avec AUD/USD et GBP/USD. Notons aussi que AUD/USD est fortement corrélé avec USD/CAD et USD/JPY avec des coefficients de corrélations de plus de 0,7 pour la méthode de Vanna-Volga d'échéance 1 an.

TABLE 1: Statistiques descriptives sur les options avec échéance 3 mois

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	11.94	11.98	12.10	11.48	-0.05	-0.17	0.45
écart-type	6.21	4.22	4.37	4.03	3.03	2.96	3.09
Skewness	3.38	1.77	1.81	1.82	4.05	3.83	4.31
Kurtosis	17.92	7.41	7.62	7.71	27.33	26.03	29.00
Q5	6.54	7.23	7.24	6.93	-3.04	-3.26	-2.29
Q95	21.02	19.70	20.00	18.97	3.60	3.50	4.18

(a) Panel A : AUD/USD - 3 mois

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	9.28	10.27	10.27	9.83	-1.02	-1.01	-0.57
écart-type	3.17	3.32	3.35	3.13	1.57	1.60	1.49
Skewness	1.06	1.34	1.29	1.27	-0.32	-0.34	-0.16
Kurtosis	4.83	5.75	5.49	5.51	4.35	4.21	4.10
Q5	5.06	6.12	6.06	5.85	-3.63	-3.74	-2.98
Q95	14.65	16.14	16.37	15.37	1.55	1.58	1.97

(b) Panel B : EUR/USD - 3 mois

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	8.95	9.59	9.63	9.22	-0.66	-0.70	-0.29
écart-type	3.51	3.36	3.42	3.19	2.22	2.25	2.15
Skewness	2.09	1.81	1.76	1.74	2.23	2.02	2.40
Kurtosis	8.14	7.20	6.93	6.86	15.71	14.88	16.44
Q5	4.93	5.81	5.76	5.55	-3.69	-3.83	-3.11
Q95	18.39	15.84	16.03	15.23	1.58	1.56	1.94

(c) Panel C : GBP/USD - 3 mois

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	9.23	9.46	9.47	9.18	-0.25	-0.26	0.04
écart-type	3.77	3.23	3.27	3.17	1.40	1.40	1.40
Skewness	1.70	1.56	1.57	1.58	0.56	0.48	0.65
Kurtosis	7.03	6.02	6.07	6.13	3.68	3.66	3.81
Q5	5.10	5.97	5.95	5.70	-2.28	-2.30	-1.93
Q95	15.81	15.38	15.50	15.00	2.38	2.31	2.70

(d) Panel D : USD/CAD - 3 mois

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	10.36	10.32	10.30	9.92	0.02	0.04	0.42
écart-type	5.65	2.95	2.96	2.79	4.42	4.39	4.41
Skewness	3.04	1.12	1.09	1.02	4.68	4.70	4.71
Kurtosis	14.03	4.98	4.83	4.60	27.88	28.07	27.99
Q5	5.84	6.54	6.50	6.27	-3.02	-3.02	-2.46
Q95	20.19	16.16	16.25	15.50	3.67	3.60	4.39

(e) Panel E : USD/CHF - 3 mois

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	9.81	10.67	10.73	10.20	-0.88	-0.94	-0.41
écart-type	3.31	2.76	2.95	2.70	1.72	1.66	1.70
Skewness	1.53	1.22	1.45	1.26	0.52	0.13	0.69
Kurtosis	7.41	5.92	6.81	5.85	5.08	4.52	5.38
Q5	5.72	7.00	7.00	6.70	-3.56	-3.62	-2.96
Q95	15.32	15.05	15.52	14.71	2.10	1.91	2.56

(f) Panel F : USD/JPY - 3 mois

TABLE 2: Statistiques descriptives sur les options avec échéance 1 an

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	12.63	12.85	13.00	11.87	-0.41	-0.58	0.62
écart-type	5.33	3.74	3.93	3.34	3.09	3.12	3.01
Skewness	1.98	0.98	1.03	1.05	2.09	1.90	2.48
Kurtosis	6.48	3.62	3.81	3.90	9.41	9.08	10.41
Q5	8.06	7.93	7.84	7.55	-4.28	-4.64	-2.81
Q95	28.09	19.56	20.09	18.26	7.03	6.44	8.24

(a) Panel A : AUD/USD - 1 an

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	9.48	10.90	10.89	10.20	-1.54	-1.53	-0.81
écart-type	2.65	3.07	3.09	2.77	1.86	1.89	1.66
Skewness	0.58	0.86	0.82	0.79	-0.36	-0.35	-0.04
Kurtosis	2.85	3.28	3.16	3.22	3.48	3.38	3.44
Q5	5.77	6.87	6.81	6.46	-4.86	-5.04	-3.61
Q95	14.97	16.52	16.72	15.30	1.19	1.25	1.96

(b) Panel B : EUR/USD - 1 an

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	9.19	10.36	10.38	9.70	-1.31	-1.34	-0.62
écart-type	2.99	3.07	3.10	2.76	2.37	2.39	2.19
Skewness	1.15	1.28	1.24	1.25	0.06	0.04	0.41
Kurtosis	3.46	4.73	4.57	4.63	3.73	3.62	3.74
Q5	5.82	6.81	6.74	6.49	-5.03	-5.16	-3.89
Q95	15.91	15.67	15.89	14.51	3.08	2.99	3.71

(c) Panel C : GBP/USD - 1 an

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	9.53	11.24	10.25	9.51	-1.90	-0.89	-0.11
écart-type	3.22	3.34	3.13	2.87	1.54	1.48	1.41
Skewness	1.08	1.28	1.30	1.37	-0.40	-0.29	0.17
Kurtosis	3.67	4.34	4.50	4.81	3.42	4.10	4.37
Q5	5.85	7.53	6.72	6.35	-4.51	-3.40	-2.42
Q95	17.07	18.12	16.55	15.33	0.35	1.58	2.33

(d) Panel D : USD/CAD - 1 an

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	11.15	12.71	11.21	10.25	-1.69	-0.21	0.80
écart-type	4.38	2.98	2.69	2.35	3.59	3.44	3.39
Skewness	0.93	0.92	0.66	0.56	1.57	1.78	1.84
Kurtosis	2.68	3.95	3.22	2.97	5.55	5.76	5.69
Q5	6.59	8.70	7.24	6.85	-5.52	-3.64	-2.42
Q95	20.76	18.46	16.53	14.85	7.58	8.99	9.99

(e) Panel E : USD/CHF - 1 an

	Vol. Réal.	SWAP _{vv}	SWAP _{sc}	SWAP _{atm}	VRP _{vv}	VRP _{sc}	VRP _{atm}
moyenne	10.17	13.72	12.10	10.53	-3.68	-2.13	-0.52
écart-type	2.54	1.82	2.64	2.22	2.29	1.85	1.80
Skewness	1.20	0.24	0.89	0.49	0.53	-0.11	0.08
Kurtosis	4.05	2.77	4.04	2.58	3.22	2.48	2.27
Q5	7.30	11.34	8.60	7.25	-7.09	-5.04	-3.28
Q95	16.64	16.66	16.72	14.57	0.62	0.76	2.48

(f) Panel F : USD/JPY - 1 an

TABLE 3: Corrélations des VRP

	AUDUSD	EURUSD	GBPUSD	USDCAD	USDCHF	USDJPY
AUDUSD	1	0.172528	0.157599	0.6673	-0.05264	0.46496
EURUSD	0.172528	1	0.541908	0.356846	0.270309	0.349324
GBPUSD	0.157599	0.541908	1	0.211558	-0.00193	0.432993
USDCAD	0.6673	0.356846	0.211558	1	0.209548	0.449709
USDCHF	-0.05264	0.270309	-0.00193	0.209548	1	0.135463
USDJPY	0.46496	0.349324	0.432993	0.449709	0.135463	1

(a) Panel A : Corrélations spline cubique - 3 mois

	AUDUSD	EURUSD	GBPUSD	USDCAD	USDCHF	USDJPY
AUDUSD	1	0.500821	0.473295	0.668706	0.073503	0.584939
EURUSD	0.500821	1	0.706141	0.66014	0.423699	0.56919
GBPUSD	0.473295	0.706141	1	0.672248	0.132181	0.78204
USDCAD	0.668706	0.66014	0.672248	1	0.229508	0.579176
USDCHF	0.073503	0.423699	0.132181	0.229508	1	0.126464
USDJPY	0.584939	0.56919	0.78204	0.579176	0.126464	1

(b) Panel B : Corrélations spline cubique - 1 an

	AUDUSD	EURUSD	GBPUSD	USDCAD	USDCHF	USDJPY
AUDUSD	1	0.127869	0.13509	0.670236	-0.05334	0.546262
EURUSD	0.127869	1	0.535116	0.331121	0.282457	0.301525
GBPUSD	0.13509	0.535116	1	0.197702	0.004649	0.392741
USDCAD	0.670236	0.331121	0.197702	1	0.213757	0.491995
USDCHF	-0.05334	0.282457	0.004649	0.213757	1	0.114141
USDJPY	0.546262	0.301525	0.392741	0.491995	0.114141	1

(c) Panel C : Corrélations Vanna-Volga - 3 mois

	AUDUSD	EURUSD	GBPUSD	USDCAD	USDCHF	USDJPY
AUDUSD	1	0.43852	0.426613	0.537021	0.029577	0.750436
EURUSD	0.43852	1	0.709729	0.640651	0.454707	0.225389
GBPUSD	0.426613	0.709729	1	0.699144	0.144222	0.434213
USDCAD	0.537021	0.640651	0.699144	1	0.270851	0.395414
USDCHF	0.029577	0.454707	0.144222	0.270851	1	-0.06126
USDJPY	0.750436	0.225389	0.434213	0.395414	-0.06126	1

(d) Panel D : Corrélations Vanna-Volga - 1 an

5 Régressions

Je vais tenter de déterminer s’il existe un ”input” qui donne de meilleurs résultats en terme de pouvoir prévisionnel dans le modèle de prime de risque de la volatilité. Je vais donc effectuer des régressions ”in sample” en utilisant le taux de swap de volatilité obtenu à partir de la méthode du spline cubique, celui obtenu à partir de la méthode de Vanna-Volga et celui obtenu à partir de la volatilité ”at the money” pour vérifier s’il y a des divergences dans les R^2 des régressions. Je vais seulement montrer les résultats obtenus sur les séries ”bid” puisque les résultats sur les séries ”ask” sont très similaires.

Pour les régressions, je vais utiliser une partie du modèle de Londono et Zhou (2017). Un des deux régresseurs de leur modèle était un indice global de la prime de risque de la volatilité (XVRP). Cet indice était une moyenne équipondérée des primes de risque de la volatilité par rapport au dollar US. Pour ma part, je possède des données pour 3 taux de change dont le USD est la devise étrangère et 3 autres taux de change dont le USD est la devise domestique. Je vais donc créer un indice global de la VRP avec les taux de change dont le USD est la devise étrangère ($XVRP_{for}$) et un autre indice global de la VRP avec les taux de change dont le USD est la devise domestique ($XVRP_{dom}$). Comme je possède 13 ans de données journalières, je vais utiliser des données de fins de mois afin de diminuer l’effet de persistance décrit dans l’article de Boudoukh, Richardson et Whitelaw (2008). Cet effet de persistance survient lorsque des rendements s’entrecroisent dans des régressions. En utilisant des données mensuelles, nous enlevons une partie de ce biais mais à mesure que le nombre de mois augmentera dans les régressions, cet effet devrait apparaître. Bollerslez, Marrone, Xu et Zhou (2014) avaient fait une simulation de Monte-Carlo pour montrer que la VRP avait quand même un pouvoir prévisionnel sur les rendements malgré cet effet de persistance. Mon modèle de régression sera donc celui-ci :

$$R_{t,t+h}^i = \alpha_{t,t+h}^i + \beta^i XVRP_t^i + \epsilon_{t,t+h}^i \quad (17)$$

Avec

R = rendement du taux de change sur une période de h mois

XVRP = $XVRP_{dom}$ lorsque i = AUD/USD, EUR/USD et GBP/USD et

XVRP = $XVRP_{for}$ lorsque i = USD/CAD, USD/CHF et USD/JPY.

XVRP sera utilisé sur deux horizon temporelles. Avec les options d'échéance 3 mois, elle sera la moyenne équipondérée de :

$$VRP_{3mois}^i = RV_{t-3,t}^i - IV_{t,t+3}^i \quad (18)$$

et

$$VRP_{12mois}^i = RV_{t-12,t}^i - IV_{t,t+12}^i \quad (19)$$

Suite aux résultats des régressions, seuls AUD/USD, EUR/USD et GBP/USD avec la VRP 3 mois donnent des résultats intéressants. Avec la VRP 1 an, seul USD/CHF montre des résultats intéressants.

La correction de l'erreur type de Hansen et Hodrick (1980) corrige pour les régressions qui contiennent des données qui s'entrecroisent. Je vais utiliser cette correction pour vérifier l'erreur type de mes coefficients de régression.

D'abord, le graphique 15 montre les résultats des régressions de AUD/USD avec les VRP d'échéance 3 mois. Le graphique 15(a) montre les R^2 des régressions selon l'horizon de prévision (mois). Les régressions qui utilisent la VRP "at the money" atteignent un sommet de 0.0599 au 7e mois. Celles qui utilisent la VRP Vanna-Volga atteignent un sommet de 0.0375 au mois au 6e mois tandis que celles avec la VRP spline cubique atteignent un sommet de 0.0311 au 6e mois. Le graphique 15(b) montre la p-value du F-test par rapport à l'horizon de prévision. Les régressions avec la VRP "at the money" sont significatives à un seuil de 5% à partir du 5e mois. Celles avec la VRP Vanna-Volga sont significatives aux mois 6, 7 et 8 tandis que celles avec la VRP spline cubique sont seulement significatives au mois 6 et 7. Les graphiques 15(c) et 15(d) montrent les coefficients alpha et beta des régressions selon l'horizon de prévision. Le coefficient bêta est cohérent avec les

résultats de Londono et Zhou (2017). Le graphique 15(e) montre les statistiques T du coefficient alpha. La barre horizontale est placée à 1.984, ce qui représente le point critique d'un t-test bilatéral avec un seuil de significativité de 5%. Les lignes complètes sont les t-test avec les erreurs types non ajustées tandis que les lignes pointillées sont les t-test avec les erreurs types corrigées selon la méthode de Hansen et Hodrick (1980). Dans les trois séries de régressions, la constante n'est pas significative à un seuil de 5%. Le graphique 15(f) montre la même relation mais avec le coefficient bêta. Les 3 séries de régressions montrent des sommets aux points 6 et 7, mais lorsque corrigés avec la méthode de Hansen et Hodrick, ils perdent tous leur significativité à un seuil de 5%. De façon générale, la VRP "at the money" semble être la méthode avec le meilleur potentiel de prévision, suivi de la VRP Vanna-Volga et de la VRP spline cubique. Puisqu'aucune des séries de régressions ne montre de significativité à un seuil de 5% après la correction, je ne peux pas conclure qu'une méthode est meilleure qu'une autre sur le taux de change AUD/USD avec des options d'échéance 3 mois.

Le graphique 16 montre les résultats des régressions de EUR/USD avec les VRP d'échéance 3 mois. Sur le graphique 16(a), on voit que les R^2 de la série "at the money" atteignent un sommet de 0.0683 au 10e mois. Les R^2 de la série Vanna-Volga atteignent un sommet de 0.0657 au 10e mois tandis que la série spline cubique atteint un sommet de 0.0616 au 10e mois. Le graphique 16(b) montre que les trois séries de régressions ont des p-value sur leur F-test inférieures à 5% à partir du 2è mois. Le graphique 16(c) et 16(d) montre que les coefficients alpha et bêta sont positifs, ce qui est cohérent avec l'article de Londono et Zhou (2017). Le graphique 16(e) montre que les coefficients alpha ne sont pas significatifs à un seuil de 5%. Le graphique 16(f) montre que les coefficients bêta non corrigés sont tous significatifs à partir du 2e mois. Toujours sur le graphique 16(f), on voit que la version corrigé des erreurs types de Hansen et Hodrick (1980) donne des coefficients beta significatifs à un seuil de 5% pour la série "at the money" à partir du 6e mois, des bêtas significatifs pour la série Vanna-Volga et spline cubique à partir du 8e mois. De façon générale, la VRP "at the money" semble être la méthode avec un meilleur potentiel de prévision. Puisque les méthodes Vanna-Volga et spline cubique donnent des résultats très similaires, je ne peux pas conclure qu'une des deux méthodes est meilleure que l'autre sur le taux de change EUR/USD avec des options d'échéance 3 mois.

Le graphique 17 montre les résultats des régressions de GBP/USD avec les VRP d'échéance 3 mois. Sur le graphique 17(a), on voit que les trois séries de régressions atteignent un sommet au 6e mois avec des R^2 de 0.0383, 0.0318 et 0.0273 respectivement pour la série "at the money", Vanna-Volga et spline cubique. Le graphique 17(b) montre que les p-value du F-test sont inférieures à 5% pour la série "at the money" et Vanna-Volga aux mois 6 et 7 tandis que la p-value du F-test pour la série spline cubique est seulement inférieure à 5% au 6e mois. Le graphique 17(c) montre que la constante est négative. Le graphique 17(d) montre que les coefficients bêta sont positifs, ce qui est cohérent avec l'article de Londono et Zhou (2017). Le graphique 17(e) montre que la constante n'est pas significative à un seuil de 5%. Le graphique 17(f) montre que les coefficients bêta sont significatifs à un seuil de 5% aux mois 6 et 7 pour l'erreur type non corrigée mais qu'ils sont tous non significatifs avec l'erreur type corrigée. Puisqu'après correction des erreurs types, les coefficients sont tous non significatifs, je ne peux me baser sur le taux de change GBP/USD avec des options d'échéance 3 mois pour déterminer une méthode meilleure qu'une autre.

Le graphique 18 montre les résultats des régressions de USD/CHF avec les VRP d'échéance 1 an. Sur le graphique 18(a), on voit que les séries de régressions Vanna-Volga et spline cubique atteignent des sommets au 7e mois respectivement de 0.0461 et de 0.0378 tandis que la série de régressions "at the money" atteint un sommet aux mois 8 et 9 de 0.0300. Le graphique 18(b) montre que les p-values du F-test des régressions "at the money" ne sont jamais inférieures à 5% tandis que ceux des régressions Vanna-Volga et spline cubique sont inférieures à 5% aux mois 7, 8 et 9. Le graphique 18(c) montre que les constantes sont très près de 0. Le graphique 18(d) montre que les coefficients bêta sont positifs, ce qui n'est pas cohérent avec l'article de Londono et Zhou (2017). Le graphique 18(e) montre que les coefficients alpha sont non significatifs à un seuil de 5%. Le graphique 18(f) montre qu'après avoir corrigé les erreurs types avec la méthode de Hansen et Hodrick (1980), les coefficients bêta sont non significatifs à un seuil de 5%. Puisqu'après correction, les coefficients sont non significatifs, je ne peux me baser sur le taux de change USD/CHF avec des options d'échéance 1 an pour déterminer une méthode meilleure qu'une autre.

Londono et Zhou (2017) ont trouvé que lorsque la moyenne équipondérée des VRP (IV - RV) de 17 paires de devises (XVRP) augmentait, les investisseurs allaient se réfugier dans le dollar

US, donc la valeur de cette dernière augmentait. La seule série de régressions dont les coefficients étaient encore significatifs à un seuil de 5% après la correction de Hansen et Hodrick (1980) est EUR/USD avec des options d'échéance 3 mois. Les signes des coefficients bêta que j'ai trouvés dans les régressions de ce taux de change sont cohérents avec eux. Par contre, puisque la méthode de Vanna-Volga et la méthode du spline cubique donnent des résultats très similaires, je ne peux pas déterminer une méthode meilleure qu'une autre. Par soucis de simplicité, je recommanderais d'utiliser la méthode du spline cubique puisque qu'elle est moins longue à implémenter.

La raison pour laquelle certains taux de change sont plus prévisibles avec une VRP construite à partir de la volatilité implicite "at the money" est un maillon faible de ma recherche. Lorsque je régresse les rendements de ces taux de change par rapport au "skewness" du "smile" de volatilité ($\sigma_{25P}(\sigma_{10P}) - \sigma_{25C}(\sigma_{10C})$), j'obtiens des résultats significatifs avec des coefficients bêta positifs, ce qui est anormal. Un "smile" qui contient du "skewness" suggère que les investisseurs achètent beaucoup d'options de vente "out of the money" pour se couvrir contre une chute du taux de change, ce qui est très "bearish" pour un actif financier. Kozhan, Neuberger et Schneider (2005) montrent que la prime de risque de la volatilité est fortement reliée à la prime de risque du "skewness". Lorsque je calcule le taux de swap de volatilité selon la méthode de Carr et Wu (2009), je prends en compte le "skewness" du "smile" tandis que la volatilité "at the money" n'en prend pas compte. Puisque le "Skewness" et la VRP vont dans des directions anormalement différentes dans ce cas-ci, je crois que ça peut expliquer pourquoi la volatilité implicite "at the money" performe mieux pour prédire les rendements de ces taux de change. Ceci pourrait être une piste de départ pour une recherche ultérieure.

Statistiques de régression de AUD/USD sur échéance 3 mois

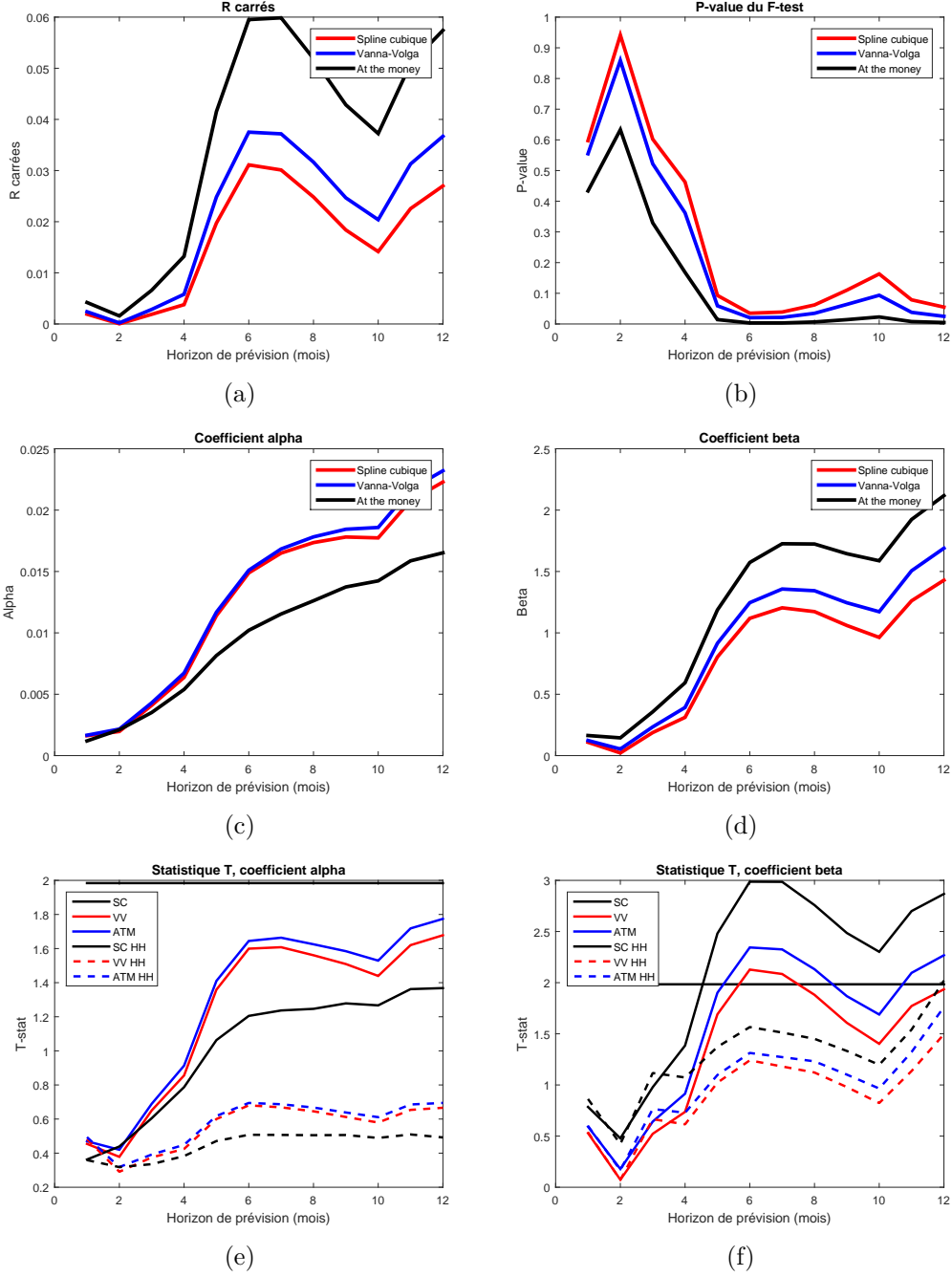


FIGURE 15: Dans ces graphiques se trouvent les statistiques des régressions avec comme variable expliquée les rendements du taux de change AUD/USD et comme variable explicative la $XVRP_{for}$ sur une échéance de 3 mois.

(a) : En Y se trouvent les R^2 des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(b) : En Y se trouvent les "p-value" des "F-test" des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(c) : En Y se trouvent les coefficients alpha des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(d) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(e) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(f) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

Statistiques de régression de EUR/USD sur échéance 3 mois

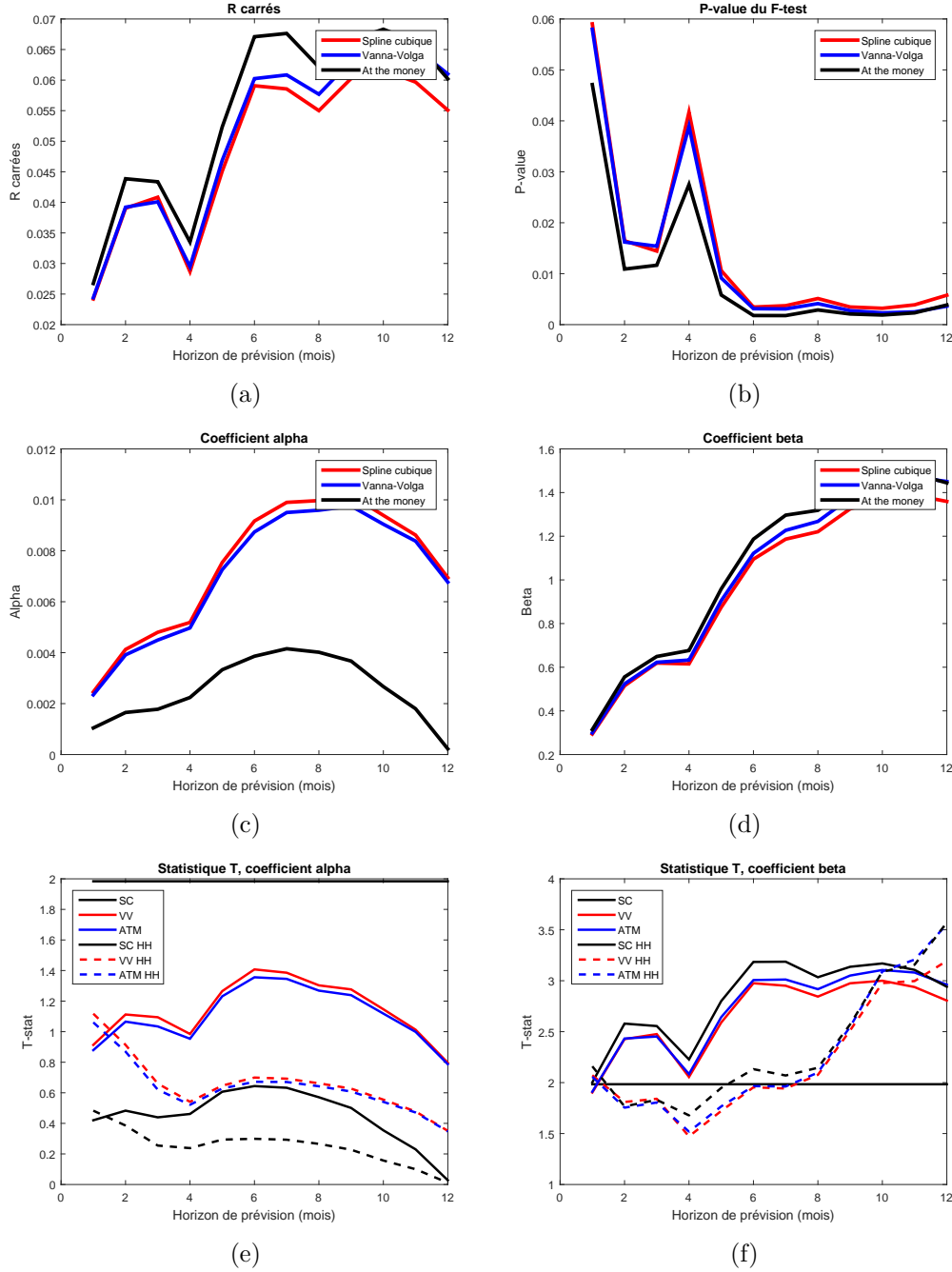


FIGURE 16: Dans ces graphiques se trouvent les statistiques des régressions avec comme variable expliquée les rendements du taux de change EUR/USD et comme variable explicative la $XVRP_{for}$ sur une échéance de 3 mois.

(a) : En Y se trouvent les R^2 des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(b) : En Y se trouvent les "p-value" des "F-test" des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(c) : En Y se trouvent les coefficients alpha des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(d) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(e) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(f) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

Statistiques de régression de GBP/USD sur échéance 3 mois

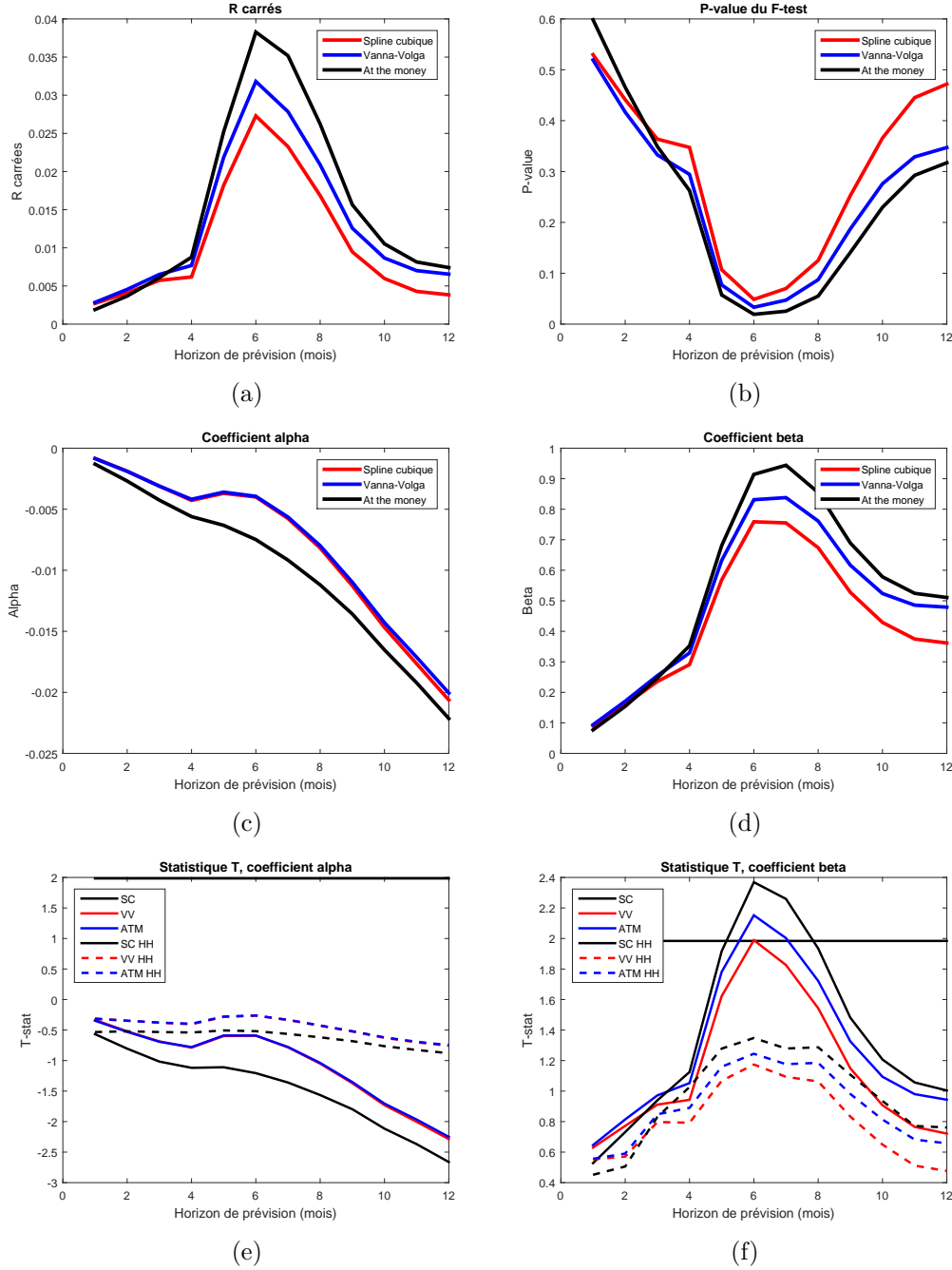


FIGURE 17: Dans ces graphiques se trouvent les statistiques des régressions avec comme variable expliquée les rendements du taux de change GBP/USD et comme variable explicative la $XVRP_{for}$ sur une échéance de 3 mois.

(a) : En Y se trouvent les R^2 des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(b) : En Y se trouvent les "p-value" des "F-test" des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(c) : En Y se trouvent les coefficients alpha des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(d) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(e) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(f) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

Statistiques de régression de USD/CHF sur échéance 1 an

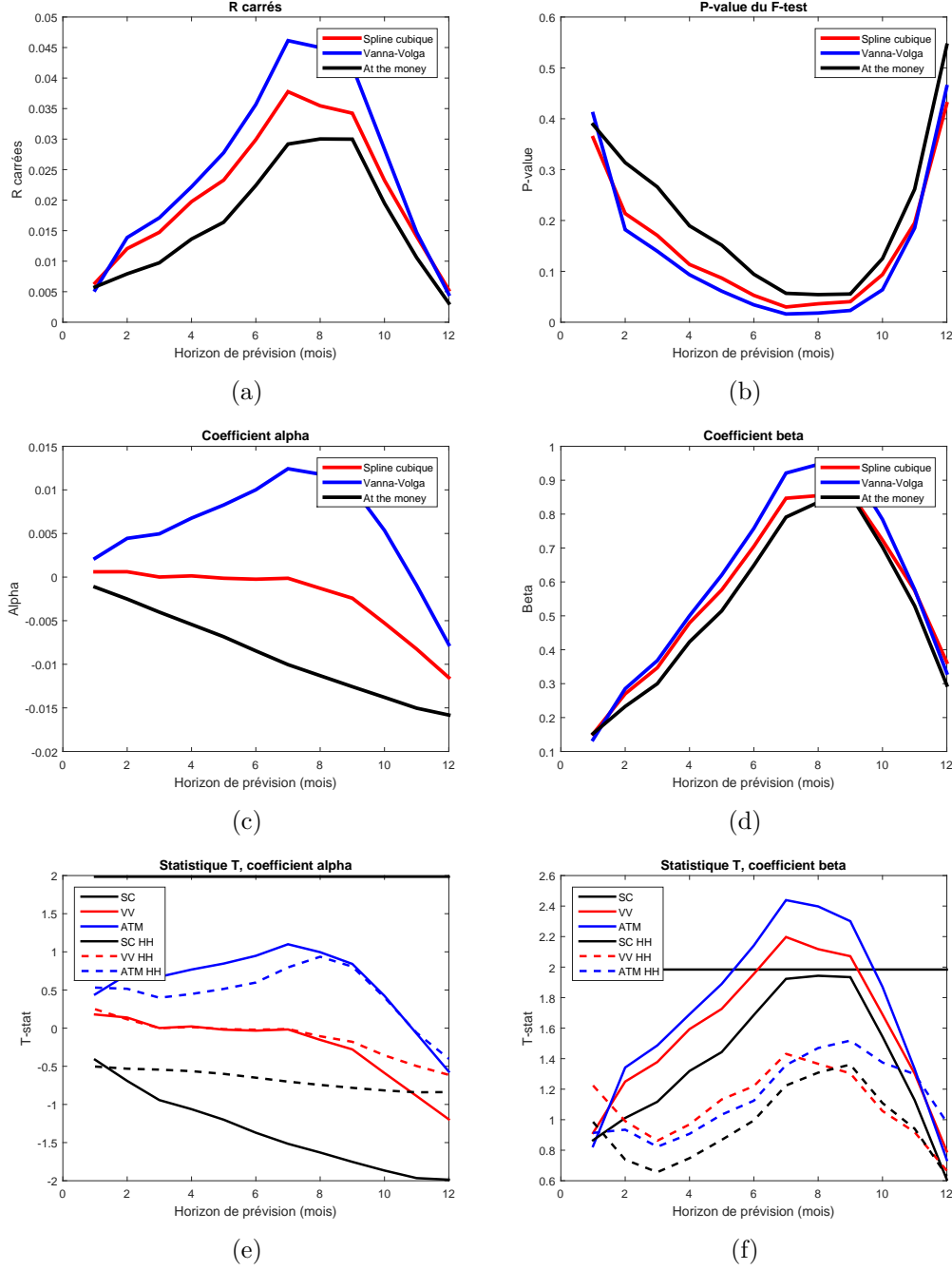


FIGURE 18: Dans ces graphiques se trouvent les statistiques des régressions avec comme variable expliquée les rendements du taux de change USD/CHF et comme variable explicative la $XVRP_{for}$ sur une échéance de 1 an.

(a) : En Y se trouvent les R^2 des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(b) : En Y se trouvent les "p-value" des "F-test" des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(c) : En Y se trouvent les coefficients alpha des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(d) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(e) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

(f) : En Y se trouvent les coefficients bêta des régressions et en X se trouvent les horizons de prévision (mois) pour les rendements.

6 Conclusion

Le but de mon essai était de démontrer un processus pour obtenir une VRP sur le Forex en utilisant un taux de swap de volatilité synthétique à partir de la méthode de Carr et Wu (2009). Pour cela, je devais rebâtir le "smile" de volatilité à partir des données sur les options disponibles, c'est-à-dire des volatilités implicites provenant de stratégies d'options dont on peut isoler 5 points sur le "smile". Ces 5 points qui se quantifiaient en terme de delta devaient être convertis en terme de prix d'exercices et la méthode différait selon le point de vue d'un investisseur domestique ou étranger. À partir de là j'ai utilisé deux méthodes pour dériver un "smile" continu, soit la méthode de Vanna-Volga et la méthode du spline cubique. Les deux méthodes présentent des qualités et des défauts. Avec ces deux méthodes j'ai pu obtenir des séries de VRP et j'en ai ajouté une troisième pour fins de comparaisons bâtie seulement à partir de la volatilité implicite "at the money".

Pour essayer de déterminer quelle méthode était la plus efficace, j'ai reproduit une partie du modèle de Londono et Zhou (2017) afin de faire des régressions prédictives "in sample" sur les rendements des 6 taux de change auxquels j'avais accès. J'ai séparé ces taux de change en deux selon que le dollar américain était la devise étrangère ou domestique pour créer deux indices équipondérés globaux de la prime de risque de la volatilité. À partir de là, j'ai fait des régressions sur les 6 taux de change par rapport à leur indice respectif. Les R^2 des régressions ne permettent pas de déterminer la méthode qui donne un meilleur potentiel de prévision puisque le seul taux qui donne des résultats significatifs est EUR/USD avec VRP 3 mois et les résultats des VRP Vanna-Volga et spline cubique donnent des résultats similaires. Je recommanderais donc d'utiliser la méthode la plus facile à implanter, soit la méthode du spline cubique.

Malgré que je suis incapable de déterminer la meilleure des méthodes, mon essai contribue à la littérature en montrant de façon claire et précise la démarche à suivre pour obtenir un "input" fiable dans des modèles de VRP sur le marché du Forex. J'ai aussi montré les subtilités des différentes méthodes. On peut aussi retenir que plus l'échéance des options est loin, plus la méthode utilisée donnera des résultats de VRP différents. Par exemple, pour des options d'échéance 3 mois, les deux méthodes donnent des résultats assez similaires, contrairement aux options d'échéance 1 an.

7 Bibliographie

Références

- [1] Manuel Ammann, Ralf Buesser. *Variance risk premiums in foreign exchange markets*. Journal of Empirical Finance 23 (2013) 16-32.
- [2] Clifford S. Asness, Tobias J. Moskowitz, Lasse Heje Pedersen. *Value and Momentum everywhere*. The journal of finance, LXVIII (2013)
- [3] Gurdip Bakshi, Nikunj Kapadia. *Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium*. The review of financial studies 16 (2003) 527-566
- [4] Tim Bollerslez. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of econometrics 31 (1986) 307-327.
- [5] Tim Bollerslez, George Tauchen, Hao Zhou. *Expected stock returns and variance risk premia*. The review of financial studies 22 (2009).
- [6] Tim Bollerslez, James Marrone, Lai Xu, Hao Zhou. *Stock return predictability and variance risk premia : Statistical inference and international evidence*. Journal of financial and quantitative analysis 49 (2014) 633-661.
- [7] Jacob Boudoukh, Matthew Richardson, Robert F. Whitelaw. *The Myth of long-horizon predictability*. The review of financial studies 21-4 (2008) 1577-1605.
- [8] Mark Britten-Jones, Anthony Neugerger. *Option prices, implied prices processes and stochastic volatility*. The journal of finance 2 (2000)
- [9] Peter Carr, Liuren Wu. *Variance risk premiums*. The review of financial studies 22 (2009)
- [10] Antonio Castagna, Fabio Mercurio. *The Vanna-Volga method for implied volatilities : tractability and robustness*. (2007)
- [11] Pasquale Della Corte, Tarun Rmadorai, Lucio Sarno. *Volatility risk premia and exchange rate predictability*. Journal of financial economics 120 (2016) 21-40
- [12] Robert F. Engle. *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation*. Econometrica, 50 (1982) 987-1007

- [13] Lars Peter Hansen, Robert J. Hodrick. *Forward exchange rates as optimal predictors of future spot rates : An econometric analysis*. Journal of Political Economy 88 (1980) 829-853
- [14] George J. Jiang, Yisong S. Tian. *The model-free implied volatility and its information content*. The review of financial studies 18-4 (2005)
- [15] Jakub W. Jurek. *Crash-neutral currency carry trades*. (2013)
- [16] Roman Kozhan, Anthony Neuberger, Paul Schneider. *The skew risk premium in the equity index market*. The review of financial studies 26-9 (2013)
- [17] Henry A. Latane, Richard J. Rendleman and Jr. *Standard deviations of stock price ratios implied in option prices*. The journal of finance 31 (1976) 369-381
- [18] Juan M. Londono, Hao Zhou. *Variance risk premiums and the forward premium puzzle*. Journal of financial economics 124 (2017) 415-440
- [19] Allan M. Malz. *Option-implied probability distribution and currency excess returns*. Reserve bank of New York, Staff Reports 32 (1993)
- [20] Allan M. Malz. *Vega risk and the smile*. The RiskMetrics Group, Working paper number 99-06 (2000)
- [21] Richard A. Meese, Kenneth Rogoff. *Empirical exchange rate models of the seventies*. Journal of international economics, 14 (1983) 3-24
- [22] Lukas Menkhoff, Lucio Sarno, Maik Schmeling, Andreas Schrimpf. *Currency momentum strategies*. Journal of financial economics, 106 (2012) 660-684
- [23] Lukas Menkhoff, Lucio Sarno, Maik Schmeling, Andreas Schrimpf. *Currency value*. Working paper, (2016)
- [24] Philippe Mueller, Petar Sabtchevsky, Andrea Vedolin, Paul Whelan. *Variance risk premia on stocks and bonds*. Working paper (2017)
- [25] José Renato Haas Ornelas, Roberto Baltieri Mauad. *Volatility risk premia and future commodities returns*. Bank for international settlements (2017)
- [26] Ser-Huang Poon, Clive Granger. *Practical issues in forecasting volatility*. Financial analysts journal 61 (2005) 45-56

- [27] Dimitri Reiswich, Uwe Wystup. *A guide to FX options quoting conventions*. Journal of derivatives (2010)
- [28] Bank for international settlements. *Foreign exchange turnover in April 2016*. (2016)
- [29] Hao Zhou. *Variance risk premia, asset predictability puzzles, and macroeconomic uncertainty*. Finance and Economics Discussion Series (2010)