Variations d'une fonction

Chapitre **2**

Ouverture

L'observation d'un phénomène naturel est souvent difficile ; on doit d'abord élucider les facteurs dont dépend son évolution, effectuer des études expérimentales et essayer de dégager une loi quantitative permettant d'exprimer les variations d'une certaine grandeur en fonction des facteurs dont dépend le phénomène. Évidemment cette modélisation est souvent dépendante de l'état des connaissances en mathématiques, elle peut aussi les susciter.

Une corde vibrante est un corps flexible dont les dimensions transversales sont très petites comparées à sa longueur ; ces cordes sont réalisées en acier, en soie, en chanvre, en boyau, etc. Si la corde est tendue suffisamment entre deux points, une déformation locale imprimée par un moyen quelconque (pincement, choc d'un léger marteau, frottement d'un archet, etc.) entraîne des oscillations transversales et l'émission d'un son.

Les sons émis par une corde vibrante sont connus depuis la plus lointaine antiquité et les instruments de musique à cordes ont été utilisés dans toutes les civilisations. L'étude des sons émis par une corde est donc très ancienne et le fait que le son émis ait une fréquence inversement proportionnelle à la longueur de la corde est une des lois dont on attribue la découverte aux disciples de Pythagore.

Il a fallu cependant attendre longtemps pour que les notions précises se dégagent : au XVII^e^ siècle avec des travaux de Galilée, des études expérimentales de Mersenne, etc. Mais ce n'est qu'au XVIII^e^ que la résolution de l'équation régissant les oscillations de faible amplitude (et donc des travaux purement mathématiques !), effectuée en particulier par d'Alembert, conduisit à la formule donnant la fréquence du son émis, donnée dans cette ouverture. On retrouve dans cette formule la découverte des disciples de Pythagore !

Si l'on remplace une corde métallique (donc de diamètre très faible, de l'ordre de 0,3 mm) par une corde en boyau, il faut tresser les boyaux pour pouvoir utiliser des tensions équivalentes et utiliser des diamètres beaucoup plus importants, ce qui augmente considérablement la masse linéique de la corde.

Dans le cas de l'exemple, la fréquence du son va diminuer de moitié et passer à 220 hertz, un son plus grave : le la_2.

L'objectif de ce chapitre est double :

– d'une part introduire les fonctions racine carrée et valeur absolue ;

– d'autre part étudier les liens entre opérations sur les fonctions (somme d'une fonction et d'une constante, produit d'une fonction par une constante, racine carrée d'une fonction positive, inverse d'une fonction ne s'annulant pas) et les variations de ces fonctions.

Concernant la fonction racine carrée, l'objectif est d'étudier ses variations et de tracer sa courbe représentative. Cela fournit en outre un exemple d'une fonction qui n'est définie que sur un intervalle et dont le domaine de définition sera différent du domaine de dérivabilité (dans le chapitre 3). Une dernière capacité attendue des étudiants est de savoir situer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

Concernant la fonction valeur absolue, l'objectif est également d'étudier ses variations et de tracer sa courbe représentative. L'introduction de cette fonction possède deux autres intérêts majeurs : disposer d'une nouvelle fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et fournir une fonction non dérivable en 0 (dans le chapitre 3).

Enfin, le paragraphe concerné aux variations des fonctions a plusieurs objectifs. Le premier est de se familiariser avec les opérations simples sur les fonctions, et éventuellement d'observer comment ces opérations modifient les courbes représentatives. Le second est de montrer qu'on dispose d'outils puissants permettant de trouver les variations d'une fonction composée, et que les calculs de dérivées du chapitre suivant ne sont pas toujours indispensables.

Vérifier ses acquis

1 a., b., e.

2 **a.** Vrai. **b.** Fausse. **c.** Fausse. **d.** Fausse. **e.** Fausse.

3 **1.** b., d. **2.** a., b., c.

4 b., d., e.

5 *f* : courbe bleue. *g* : courbe rouge. *h* : courbe verte. *i* : courbe violette. *j* : courbe jaune.

6 a., b., c.

Activités d'introduction

Activité 1

Objectif : L'activité 1 a pour objectif de rappeler la définition de la racine carrée d'un nombre réel, puis d'introduire la fonction racine carrée. Elle propose notamment de prouver que cette fonction n'est pas linéaire, et de construire sa courbe représentative de deux manières différentes.

1 **a.** $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{-4}$ n'existe pas, $\sqrt{-100}$ n'existe pas, $\sqrt{144} = 12$.

b. La quantité $\sqrt{x}$ existe uniquement lorsque x est un réel positif. Elle est alors définie comme étant l'unique réel positif dont le carré vaut x.

2 **a.**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

b. On a par exemple $\sqrt{2+2} = 4$ alors que $\sqrt{2} + \sqrt{2} \approx 2{,}8$. La fonction racine carrée n'est donc pas linéaire.

3 **a.**

a	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	3	$\sqrt{10}$
a^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

b. Les tableaux de valeurs des questions **2.a.** et **3.a.** ont leurs lignes inversées.

c. Les points M(x ; y) et M'(y ; x) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

d. On peut déduire des questions **3.b.** et **3.c.** que les courbes représentatives de la fonction carré et de la fonction f sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

e. Pour construire la courbe représentative de la fonction racine carrée, on peut donc commencer la construire la courbe représentative de la fonction carré, puis tracer le symétrique de « sa partie de droite » par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Activité 2

Objectif : L'activité 2 a pour objectif d'introduire la notion de valeur absolue d'un nombre réel en s'appuyant sur la notion concrète d'altitude. Une fois la fonction valeur absolue définie, l'activité propose de prouver que cette dernière fonction n'est pas linéaire.

1 **a.** Si x est positif, alors, $f(x) = x$; si x est négatif, alors, $f(x) = -x$.

b. Il s'agit de la courbe de la fonction valeur absolue.

c. La courbe étudiée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

d. On a par exemple $f(-1 + 2) = f(1) = 1$ alors que $f(-1) + f(2) = 1 + 2 = 3$.

On peut également écrire que $\dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 1$ alors que $\dfrac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \dfrac{1}{2}$.

2 Le score de l'équipe A est donné par :

$f(6{,}5) + f(-10) + f(9{,}2) + f(3,\ 4) + f(-14{,}1) + f(10{,}8) + f(-9) + f(-12{,}7) + f(6{,}5) + f(-19{,}8) = 102.$

Le score de l'équipe B est donné par :
$f(-16,9) + f(-9,4) + f(-3,5) + f(7,8) + f(10,3)$
$+ f(6,1) + f(5,2) + f(-8) + f(11,1)$
$+ f(-14,7) = 93.$
C'est donc l'équipe A qui a été la meilleure.

Activité 3

Objectif : L'activité 3 a pour but d'étudier le lien entre les variations d'une fonction f et celles d'une fonction de la forme f + k, λf, $\sqrt{f}$ ou $\frac{1}{f}$. On étudie pour cela l'exemple de trois fonctions f (une fonction affine, une fonction polynôme du second degré, et la fonction inverse). Après avoir conjecturé ces liens par observation graphique, l'activité propose une démonstration dans certains cas abordables à l'aide du programme de seconde.

1 Nous noterons C pour « croissante » et D pour « décroissante ».

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$x \mapsto f_i(x)$	D	C	C
$x \mapsto f_i(x) + 4$	D	C	C
$x \mapsto f_i(x) - 2$	D	C	C
$x \mapsto 5f_i(x)$	D	C	C
$x \mapsto -7f_i(x)$	C	D	D
$x \mapsto \sqrt{f_i(x)}$	D	C	C
$x \mapsto \dfrac{1}{f_i(x)}$	C	D	D

2 **a.** Les variations d'une fonction $x \mapsto f(x) + k$ semblent être les mêmes que celles de f.

b. Les variations d'une fonction $x \mapsto \lambda \times f(x)$ semblent être les mêmes que celles de f si $\lambda > 0$, et opposées à celles de f si $\lambda < 0$.

c. Les variations d'une fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ semblent être les mêmes que celles de f.
d. Les variations d'une fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ semblent être opposées à celles de f.

3 Lorsque $i = 2$, on peut dire d'après le cours de seconde que :
– la fonction $x \mapsto f_2(x) + 4 = x^2 + 4$ est croissante sur [1 ; 2]
– la fonction $x \mapsto f_2(x) - 2 = x^2 - 2$ est croissante sur [1 ; 2] ;
– la fonction $x \mapsto 5f_2(x) = 5x^2$ est croissante sur [1 ; 2] ;
– la fonction $x \mapsto -7f_2(x) = -7x^2$ est décroissante sur [1 ; 2] ;
Lorsque $i = 3$, on peut dire d'après le cours de seconde que :
– la fonction $x \mapsto f_3(x) + 4 = x + 5$ est croissante sur [1 ; 2] ;
– la fonction $x \mapsto f_3(x) - 2 = x - 1$ est croissante sur [1 ; 2] ;
– la fonction $x \mapsto 5f_3(x) = 5x + 5$ est croissante sur [1 ; 2] ;
– la fonction $x \mapsto -7f_3(x) = -7x - 7$ est décroissante sur [1 ; 2].

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1 Méthode de la potence

1 a.

Le chiffre 29 comporte 2 chiffres	$\overset{\frown}{2\;9}$	
Le plus grand entier dont le carré est inférieur à 29 est 5. On soustrait alors 5^2 à 29, ce qui donne 4.	$\begin{array}{r} 29 \\ -\,5^2 \\ \hline 4 \end{array}$	$\boxed{5}$
On abaisse ensuite 00 dans la colonne de gauche, et on écrit dans la colonne de droite, en bas, le double du chiffre 5 précédemment trouvé (en l'occurrence 10). On cherche alors le plus grand entier à trois chiffres de la forme « 10y » (par exemple 106) tel que $10y \times y < 400$. On trouve $y = 3$, qui devient le premier chiffre après la virgule de la racine cherchée.	4 00	$5 \times 2 = 10$ $\boxed{5}$ $103 \times 3 = 309$
À ce stade, on peut déjà dire que la racine carrée de 29 sera de la forme 5,3… Cherchons le deuxième chiffre après la virgule. On soustrait alors 309 au nombre 400 pour obtenir 91.	$\begin{array}{r} 4\;0\;0 \\ -\,3\;0\;9 \\ \hline 9\;1 \end{array}$	$\boxed{5{,}3}$
On abaisse 00 pour obtenir 9 100 dans la colonne de gauche, et on écrit dans la colonne de droite, en bas, le double du début de la racine 53 précédemment trouvé (on a occulté la virgule). On cherche alors le plus grand entier à quatre chiffres « 106z » tel que $106z \times z < 9\,100$. On trouve $z = 8$ qui devient donc le deuxième chiffre après la virgule du résultat cherché : 5,38. On soustrait alors 8 544 au nombre 9 100 pour obtenir 556.	91 00 91 00 85 44 5 56	$\boxed{5{,}3}$ $2 \times 53 = 106$ $\boxed{5{,}38}$ 129 $1\,068 \times 8 = 8\,544$
On abaisse 00 pour obtenir 55 600 dans la colonne de gauche, et on écrit dans la colonne de droite, en bas, le double du début de la racine 538 précédemment trouvé (on a occulté la virgule). On cherche alors le plus grand entier à cinq chiffres « 1 076t » tel que $1\,076t \times t < 55\,600$. On trouve $t = 5$ qui devient donc le troisième chiffre après la virgule du résultat cherché : 5,385.	55 600	$\boxed{5{,}38}$ $2 \times 538 = 1\,076$ $\boxed{5{,}385}$

On commence par couper le nombre 1 037 en tranches de 2 chiffres	$\overset{\frown}{1\;0}\;\overset{\frown}{3\;7}$	
Le plus grand entier dont le carré est inférieur à 10 est 3. On soustrait alors 3^2 à 10, ce qui donne 1.	$\begin{array}{r} 10 \\ -\,3^2 \\ \hline 1 \end{array}$	$\boxed{3}$
On abaisse ensuite la tranche 37 dans la colonne de gauche, et on écrit dans la colonne de droite, en bas, le double du chiffre 3 précédemment trouvé (en l'occurrence 6). On cherche alors le plus grand entier à deux chiffres de la forme « 6y » (par exemple 68) tel que $6y \times y < 137$. On trouve $y = 2$, qui devient le deuxième chiffre de la racine cherchée.	1 37	$3 \times 2 = 6$ $\boxed{3}$ $62 \times 2 = 124$
À ce stade, on peut déjà dire que la racine carrée de 1 037 sera de la forme 32,… Cherchons le premier chiffre après la virgule. On soustrait alors 124 au nombre 137 pour obtenir 13.	$\begin{array}{r} 1\;3\;7 \\ -\,1\;2\;4 \\ \hline 1\;3 \end{array}$	$\boxed{32}$
On abaisse 00 pour obtenir 1 300 dans la colonne de gauche, et on écrit dans la colonne de droite, en bas, le double du début de la racine 32 précédemment trouvé. On cherche alors le plus grand entier à trois chiffres « 64z » tel que $64z \times z < 1\,300$. On trouve $z = 2$ qui devient donc le premier chiffre après la virgule du résultat cherché : 32,2. On soustrait alors 8 544 au nombre 9 100 pour obtenir 556.	13 00 13 00 12 84 16	$\boxed{32}$ $2 \times 32 = 64$ $\boxed{32{,}2}$ $642 \times 2 = 1\,284$
On abaisse 00 pour obtenir 1 600 dans la colonne de gauche, et on écrit dans la colonne de droite, en bas, le double du début de la racine 322 précédemment trouvé (on a occulté la virgule). On cherche alors le plus grand entier à cinq chiffres « 644t » tel que $644t \times t < 1\,600$. On trouve $t = 0$ qui devient donc le deuxième chiffre après la virgule du résultat cherché : 32,20.	16 00	$\boxed{32{,}2}$ $2 \times 322 = 644$ $\boxed{32{,}20}$

b. De même qu'un goutte à goutte laisse tomber une seule goutte à chaque fois, l'algorithme précédent fait apparaître la racine carrée du nombre cherché chiffre par chiffre.

2 Voici l'algorithme écrit à l'aide d'Algobox :

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  Produit EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  LIRE n
  a PREND_LA_VALEUR 1
  Produit PREND_LA_VALEUR 10*n+1
  TANT_QUE (Produit<p) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR a+1
    Produit PREND_LA_VALEUR a*(10*n+a)
    FIN_TANT_QUE
  a PREND_LA_VALEUR a-1
  AFFICHER a
FIN_ALGORITHME
```

TP Algorithmique 2 Distance entre deux réels

1 La distance qui sépare 0,9 et 4 est 3,1. La distance qui sépare 2 et –3,1 est 5,1.

2 **b.** On trouve $d(a\ ;\ b) = |a - b|$.
c. $d(a\ ;\ b)$ est définie comme une distance, donc elle est positive.
D'autre part, la propriété $|x| = |-x|$ permet d'écrire que :
$d(a\ ;\ b) = |a - b| = |b - a| = d(b\ ;\ a)$.

3 **1. a.** Les variables utilisées sont ComptePlusGrand, ComptePlusPetit, CompteEgal, a, b, c.
b. On trouve dans ce programme des affectations, des boucles et des tests.
c. Il n'y a pas d'instruction d'entrées, mais trois affectations de sorties (on affiche les contenus des variables ComptePlusGrand, ComptePlusPetit et CompteEgal).
d. Chacune des trois variables a, b et c varient de –10 à 10. Elles prennent donc chacune 21 valeurs différentes.
e. Pour chaque valeur de a, chaque valeur de b et chaque valeur de c, il y a 3 tests. Il y a donc au total $21 \times 21 \times 21 \times 3 = 27\,783$ tests.
f. L'objectif de cet algorithme est de comparer, lorsque a, b et c prennent toutes les valeurs possibles entre –10 et 10, les réels $d(a\ ;\ b)$ et $d(a\ ;\ c) + d(c\ ;\ b)$.

2. Il semblerait qu'on ait toujours $d(a\ ;\ b) \leqslant d(a\ ;\ c) + d(c\ ;\ b)$, avec des cas d'inégalité stricte, et des cas d'égalité.

4 **a.** Si x est positif, alors $|x| = x$ donc $x \leqslant |x|$. En revanche, si x est négatif, on a $|x| = -x$ et puisque $-x$ est alors supérieur à x, on a bien $x \leqslant |x|$. D'après ce qui précède, cette inégalité est une égalité lorsque x est positif.
b. D'après **a.**, on peut écrire $a - c \leqslant |a - c|$ et $c - b \leqslant |c - b|$, donc
$a - c + c - b \leqslant |a - c| + |c - b|$, c'est-à-dire $a - b \leqslant |a - c| + |c - b|$. En écrivant de la même manière $b - a = b - a + a - c$, on démontre que $b - a \leqslant |a - c| + |c - b|$. Puisque $|a - b|$ est égale à $a - b$ ou à $b - a$, on peut donc conclure que $|a - b| \leqslant |a - c| + |c - b|$, ce qui est exactement le résultat conjecturé dans la question **3.2.**
L'égalité aura lieu si on a $a - b = |a - c| + |c - b|$ ou $b - a = |a - c| + |c - b|$. Cela revient à dire qu'on a $a - c = |a - c|$ et $c - b = |c - b|$ ou alors $c - a = |c - a|$ et $b - c = |b - c|$ donc, d'après la question **4.a.**, cela revient à écrire que $a - c \geqslant 0$ et $c - b \geqslant 0$, ou alors $c - a \geqslant 0$ et $b - c \geqslant 0$, soit encore $a \geqslant c \geqslant b$ ou alors $b \geqslant c \geqslant a$.
Finalement, l'égalité a lieu lorsque le réel c est compris entre les réels a et b.

5 Si a, b et c sont trois points situés sur un même axe, il est toujours plus court d'aller directement de a vers b, que d'aller de a vers b en passant par c.

TP TICE 1 Construction géométrique de la courbe de la fonction racine carrée

2 **b.** Si $x = 0$, alors $M_1 = M$ et si $x = 1$, alors M_1 est le point de coordonnées (1 ; 1).
c. Il semblerait que M_1 décrive la courbe représentative de la fonction racine carrée.

3 **a.** Par hypothèse, le segment [AM] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$. Ainsi, puisque le point M' appartient à $\mathscr{C}$, le triangle AMM' est rectangle en M'.
b. En travaillant dans le triangle AOM' rectangle en O, on peut écrire que :
$\tan\widehat{OAM'} = \dfrac{OM'}{OA} = OM'$.

D'autre part, en travaillant dans le triangle $\widehat{OMM'}$ rectangle en O, on trouve

$\tan\widehat{OM'M} = \frac{OM}{OM'} = \frac{x}{OM'}$.

c. En se plaçant dans le triangle OAM' rectangle en O, on peut écrire

$\widehat{OAM'} + 90° + \widehat{OM'A} = 180°$,

d'où $\widehat{OAM'} + \widehat{OM'A} = 90°$.

Or, puisque l'angle AM'M est un angle droit, on a également $\widehat{OM'A} + \widehat{OM'M} = 90°$. Par différence des deux dernières égalités, on obtient donc $\widehat{OAM'} = \widehat{OM'M}$. La question **b.** permet alors d'obtenir $OM' = \frac{x}{OM'}$, d'où $x = OM'^2$.

d. Par définition, l'abscisse de M_1 vaut x, et l'ordonnée de M_1 est l'ordonnée de M', soit $\sqrt{x}$.

e. Tous les points M_1 appartiennent donc à la courbe représentative de la fonction racine carrée.

TP TICE 2 Variations d'une somme et d'un produit de deux fonctions

1 **1. a.** Les fonctions u, v et w semblent être respectivement croissante, décroissante et décroissante sur [0 ; 10].

b.

x	$u(x)$	$v(x)$	$w(x)$	$u(x)+v(x)$	$u(x)+w(x)$
0	0	0	–1	0	–1
1	3	–2	–5	1	–2
2	8	–4	–11	4	–3
3	15	–6	–19	9	–4
4	24	–8	–29	16	–5
5	35	–10	–41	25	–6
6	48	–12	–55	36	–7
7	63	–14	–71	49	–8
8	80	–16	–89	64	–9
9	99	–18	–109	81	–10
10	120	–20	–131	100	–11

c. La fonction $u + v$ semble être croissante sur [0 ; 10], tandis que la fonction $u + w$ semble être décroissante sur [0 ; 10].

d. La somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être croissante ou décroissante.

2. a. La fonction f est une fonction affine croissante sur I.

La fonction g est une fonction affine décroissante sur I.

La fonction h est une fonction polynôme du second degré croissante sur I.

La fonction $f + g$ est une fonction affine décroissante sur I.

La fonction $g + h$ est une fonction polynôme du second degré croissante sur I.

b. Cet exemple confirme qu'il ne semble pas exister de règle sur les variations de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

3. a. Considérons deux réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$. Puisque α est croissante sur I, on a $\alpha(x) \leqslant \alpha(y)$, et puisque β est croissante sur I, on a $\beta(x) \leqslant \beta(y)$. En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient $(\alpha + \beta)(x) \leqslant (\alpha + \beta)(y)$, donc la fonction $\alpha + \beta$ est croissante sur I.

b. Considérons deux réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$. Puisque α est décroissante sur I, on a $\alpha(x) \geqslant \alpha(y)$, et puisque β est décroissante sur I, on a $\beta(x) \geqslant \beta(y)$. En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient $(\alpha + \beta)(x) \geqslant (\alpha + \beta)(y)$, donc la fonction $\alpha + \beta$ est décroissante sur I.

2 **1. a.** Les fonctions u, v et w semblent être respectivement croissante, décroissante et décroissante sur [0 ; 10].

b.

x	$u(x)$	$v(x)$	$w(x)$	$u(x)+v(x)$	$u(x)+w(x)$
1	2,00	1,00	0,50	2	1
2	2,59	0,50	0,41	1,294	1,072
3	3,08	0,33	0,37	1,027	1,127
4	3,52	0,25	0,33	0,88	1,173
5	3,92	0,20	0,31	0,785	1,213
6	4,30	0,17	0,29	0,717	1,247
7	4,66	0,14	0,27	0,666	1,278
8	5,00	0,13	0,26	0,625	1,306
9	5,33	0,11	0,25	0,592	1,332
10	5,64	0,10	0,24	0,564	1,355

c. La fonction $u \times v$ semble être décroissante sur [0 ; 10], tandis que la fonction $u \times w$ semble être croissante sur [0 ; 10].

d. La produit d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être croissante ou décroissante.

2. a. La fonction f est une fonction affine croissante sur I.

Si $0 < x < y$, alors par croissance de la fonction carrée sur I, on trouve $x^2 < y^2$, puis par décroissance de la fonction inverse sur I, on obtient $g(x) > g(y)$. La fonction g est donc décroissante sur I.
Si $0 < x < y$, alors par croissance de la fonction racine carrée sur I, on trouve $\sqrt{x} < \sqrt{y}$, puis par décroissance de la fonction inverse sur I, on obtient $h(x) > h(y)$. La fonction h est donc décroissante sur I.
La fonction $f \times g$ n'est autre que la fonction inverse qui est décroissante sur I.
La fonction $f \times h$ n'est autre que la fonction racine carrée qui est croissante sur I.
b. Cet exemple confirme qu'il ne semble pas exister de règle sur les variations du produit d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
3. a. Considérons deux réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$. Puisque α est croissante sur I, on a $\alpha(x) \leqslant \alpha(y)$, et puisque β est croissante sur I, on a $\beta(x) \leqslant \beta(y)$. En multipliant membre à membre ces deux dernières inégalités, on obtient, du fait de la positivité de tous les termes en présence : $(\alpha \times \beta)(x) \leqslant (\alpha \times \beta)(y)$, donc la fonction $\alpha \times \beta$ est croissante sur I.
b. Considérons deux réels x et y appartenant à I et tels que $x < y$. Puisque α est décroissante sur I, on a $\alpha(x) \geqslant \alpha(y)$, et puisque β est décroissante sur I, on a $\beta(x) \geqslant \beta(y)$. En multipliant ces deux dernières inégalités, on obtient, du fait de la positivité de tous les termes en présence : $(\alpha \times \beta)(x) \geqslant (\alpha \times \beta)(y)$, donc la fonction $\alpha \times \beta$ est décroissante sur I.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux. **e.** Faux. **f.** Vrai.

2 d., e.

3 **a.** Oui. **b.** Non. **c.** Non. **d.** Oui. **e.** Non. **f.** Oui.

4 Seule la courbe **c.** est la courbe représentative de la fonction racine carrée.

5 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Faux. **e.** Vrai. **f.** Vrai.

6 a., c., h., j.

7 **a.** Oui. **b.** Non. **c.** Non. **d.** Non. **e.** Oui. **f.** Oui.

8 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Faux. **e.** Vrai.

9 a., b., f.

10 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Vrai. **e.** Faux. **f.** Vrai. **g.** Faux. **h.** Faux. **i.** Vrai.

11 La fonction f_1 est associée à la courbe **d.** : elle est croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction f_2 est associée à la courbe **b.** : elle est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
La fonction f_3 est associée à la courbe **c.** : elle est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
La fonction f_4 est associée à la courbe **a.** : elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

12 a., b., d., e., f.

13 **a.** Affine.
b. Polynôme de degré 2.
c. Affine (et même constante).
d. Homographique.
e. Polynôme de degré 2.
f. Affine.

14 **a.** La fonction proposée est définie sur $\mathbb{R}^*$, décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
b. La fonction proposée est définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
c. La fonction proposée est définie sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}$.
d. La fonction proposée est définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty ; 4]$ et croissante sur $[4 ; +\infty[$.
e. La fonction proposée est définie sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $\mathbb{R}$.
f. La fonction proposée $x \mapsto (x + 1)^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

15 **a.** La fonction f est une fonction homographique, définie sur $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
On peut conjecturer, grâce à la calculatrice, que f est croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[$ et croissante sur $\left]-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.
La fonction g n'est pas une fonction homographique car pour $x \neq -\frac{1}{2}$, on a $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$.
La fonction h est une fonction homographique, définie sur $]-\infty\,;4[\cup]4\,;+\infty[$. On peut conjecturer, grâce à la calculatrice, que f est décroissante sur $]-\infty\,;4[$ et décroissante sur $]4\,;+\infty[$.
La fonction i est une fonction homographique, définie sur $]-\infty\,;-\sqrt{2}[\ \cup\ ]-\sqrt{2}\,;+\infty[$. On peut conjecturer, grâce à la calculatrice, que f est croissante sur $]-\infty\,;-\sqrt{2}[$ et croissante sur $]-\sqrt{2}\,;+\infty[$.

16 **a.** La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}^+$. Considérons deux réels x et y tels que $0 \leqslant x < y$.
On trouve :

$$f_1(x) - f_1(y) = 3\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 3\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < 0,$$

d'où f_1 est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
b. La fonction f_2 est définie sur $]-\infty\,;1]$. Considérons deux réels x et y tels que $x < y \leqslant 1$.
On trouve :

$$f_2(x) - f_2(y) = -\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = \frac{(1-y)-(1-x)}{\sqrt{1-y}+\sqrt{1-x}} = \frac{x-y}{\sqrt{1-y}+\sqrt{1-x}} < 0,$$

d'où f_2 est croissante sur $]-\infty\,;1]$.
c. La fonction f_3 est définie sur $[1\,;+\infty[$. Considérons deux réels x et y tels que $1 \leqslant x < y$.
On trouve :

$$f_3(x) - f_3(y) = \sqrt{2x-2} - \sqrt{2y-2} = \frac{(2x-2)-(2y-2)}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{2y-2}} = \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{2y-2}} < 0,$$

d'où f_3 est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
d. La fonction f_4 est définie sur $]0\,;+\infty[$. Considérons deux réels x et y tels que $0 < x < y$.
On trouve :

$$f_4(x) - f_4(y) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{y-x}{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{y}+\sqrt{x})} > 0,$$

d'où f_4 est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

17 **a.** La fonction f_1 est définie sur $]-\infty\,;2]$. Considérons deux réels x et y tels que $x < y \leqslant 2$.
On trouve :

$$f_1(x) - f_1(y) = -2\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2-y} = 2\frac{(2-y)-(2-x)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}} = 2\frac{x-y}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}} < 0,$$

d'où f_1 est croissante sur $]-\infty\,;2]$.
b. La fonction f_2 est définie sur $]0\,;+\infty[$. Considérons deux réels x et y tels que $0 < x < y$.
On trouve :

$$f_1(x) - f_1(y) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 2\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} < 0,$$

d'où f_2 est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
c. La fonction f_3 est définie sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right]$.
Considérons deux réels x et y tels que $x < y \leqslant \frac{1}{4}$.
On trouve :

$$f_3(x) - f_3(y) = \sqrt{1-4x} - \sqrt{1-4y} = \frac{(1-4x)-(1-4y)}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1-4y}} = \frac{4(y-x)}{\sqrt{1-4x}+\sqrt{1-4y}} > 0,$$

d'où f_3 est décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right]$.

18 **a.** $\dfrac{3}{\sqrt{11}} = \dfrac{3\sqrt{11}}{11}$.
b. $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})\sqrt{3}}{2\times 3} = \dfrac{3-2\sqrt{15}}{6}$.
c. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.

d. $\dfrac{-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

e. $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{4\sqrt{7}-4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{7}-\sqrt{3}.$

f. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{-8+2\sqrt{15}}{2} = -4+\sqrt{15}.$

19 **a.** Cela résulte de l'égalité
$16 - x = (4-\sqrt{x})\underbrace{(4+\sqrt{x})}_{>0}.$

b. Cela résulte de l'égalité
$7 - x = (\sqrt{7}-\sqrt{x})\underbrace{(\sqrt{7}+\sqrt{x})}_{>0}.$

c. Cela résulte de l'égalité
$1 - x = (1-\sqrt{x})\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{>0}.$

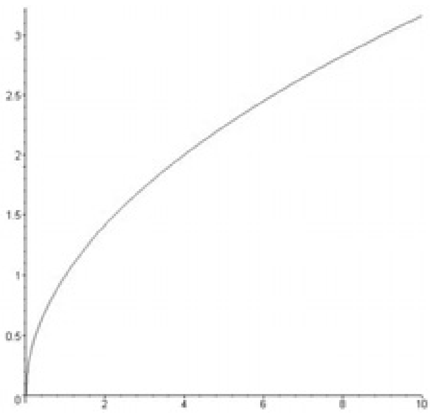
d. Cela résulte de l'égalité
$x - 9 = (\sqrt{x}-3)\underbrace{(\sqrt{x}+3)}_{>0}.$

20 **1.**

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
***f*(*x*)**	0	0,44	0,63	0,77	0,89	1	1,09	1,18
x	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
***f*(*x*)**	1,26	1,34	1,41	1,48	1,54	1,61	1,67	1,73

3. a. $x < y$. **b.** $x < y$. **c.** $x < y$.

21



22 **a.** $\sqrt{x} > 1$. **b.** $\sqrt{2} < \sqrt{x} < \sqrt{10}$.
c. $\sqrt{x} > \sqrt{5,4}$. **d.** $\sqrt{x} \leqslant 4$.
e. $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{0,01}$. **f.** $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{x} < \sqrt{11,8}$.

23 **a.** $1 < \sqrt{x} < \sqrt{7}$. **b.** $\sqrt{1,5} \leqslant \sqrt{x} < 2$.
c. $\sqrt{5} < \sqrt{x} \leqslant 5$. **d.** $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{12}$.
e. $0 < \sqrt{x} < \sqrt{5}$. **f.** $\sqrt{2} < \sqrt{x} < 11$.

24 **a.** $\sqrt{5,6} \leqslant \sqrt{6,12}$. **b.** $\sqrt{2} \geqslant \sqrt{1,99}$.
c. $\sqrt{10^2} \leqslant \sqrt{10^3}$. **d.** $\sqrt{0,1^2} \leqslant \sqrt{0,3^2}$.

25 **a.** $\sqrt{3,15} \leqslant \sqrt{3,151}$.
b. $\sqrt{10} \leqslant \sqrt{11}$.
c. $\sqrt{\pi-1} \geqslant \sqrt{\pi-1,2}$. **d.** $\sqrt{10^{-2}} \geqslant \sqrt{10^{-3}}$.
e. $\sqrt{0,35} \leqslant \sqrt{0,38}$. **f.** $\sqrt{5^2} \leqslant \sqrt{5^3}$.

26 **2. a.** $x < y$. **b.** $x > y$. **c.** $x < y$.

27 **2.** La courbe représentative de f peut être obtenue comme l'union de la courbe représentative de g (tracée sur $\mathbb{R}^+$) et de celle de h (tracée sur $\mathbb{R}^-$).

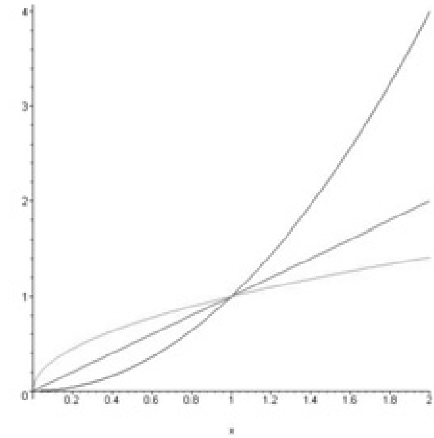
28 **a.** $x > y$. **b.** $x < y$. **c.** $x > y$.

29 **a.** $|1,4| < |1,5|$. **b.** $|-5| > |-4|$.
c. $|8| < |10|$. **d.** $|-6,5| < |-7,8|$.

30 **a.** $|x| > 2$. **b.** $|x| > 5$.
c. $|x| > 10$. **d.** $|x| \geqslant 8$.
e. $|x| \geqslant 0$ (ce qui est d'ailleurs toujours vrai !).
f. $|x| \geqslant 0$.

31 **a.** $0 \leqslant |x| < 5$. **b.** $3 \leqslant |x| < 8$.
c. $2,33 < |x| \leqslant 10$. **d.** $0 \leqslant |x| \leqslant 8$.
e. $4,72 < |x| < 7,6$. **f.** $1 < |x| < 2$.

32



Il semblerait que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ sur $[0\ ;\ 1]$ et que $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

33 Supposons pour commencer que $0 \leqslant x \leqslant 1$. On trouve $g(x) - f(x) = x(x - 1) \leqslant 0$, donc $g(x) \leqslant f(x)$.
Supposons maintenant que $x > 1$. On trouve $g(x) - f(x) = x(x - 1) > 0$, donc $g(x) > f(x)$.

34 Supposons pour commencer que $-1 \leqslant x \leqslant 0$. On a alors $0 \leqslant |x| \leqslant 1$. Il vient donc $f(x) - h(x) = \sqrt{|x|}(\sqrt{|x|} - 1) \leqslant 0$, d'où $f(x) \leqslant h(x)$.
Supposons maintenant que $x < -1$. On a alors $|x| > 1$. Il vient donc $f(x) - h(x) = \sqrt{|x|}(\sqrt{|x|} - 1) > 0$, d'où $f(x) > h(x)$.

35 **a.** D'après le cours, u est croissante sur I, et v est décroissante sur I.
b. f a les mêmes variations sur I que u, donc f est croissante sur I.
g a les mêmes variations sur I que v, donc v est décroissante sur I.
c. h a les mêmes variations sur I que u, donc h est croissante sur I.
i a des variations opposées à celles de v sur I, donc i est croissante sur I.

36 **a.** La fonction u est décroissante sur I. La fonction v est croissante sur I.
b. f a les mêmes variations sur I que u, donc f est décroissante sur I.
g a les mêmes variations sur I que v, donc v est croissante sur I.
c. h a les mêmes variations sur I que u, donc h est décroissante sur I.
i a des variations opposées à celles de v sur I, donc i est décroissante sur I.

37 **a.** f est croissante sur I.
b. Toutes les fonctions proposées ont les mêmes variations sur I sur f, donc elles sont croissantes sur I.
c. La courbe représentative de la fonction $f + k$ peut se déduire de celle de f par une translation de vecteur $k\vec{j}$.

38 **a.** La fonction f est décroissante sur $[-3 ; 0]$ et croissante sur $[0 ; 3]$.
b. Les fonctions $f - 5$, $f + 1$ et $7f$ ont les mêmes variations que f sur $[-3 ; 0]$, donc elles sont décroissantes sur $[-3 ; 0]$. La fonction $-2f$ a des variations opposées à celles de f sur $[-3 ; 0]$, donc est croissante sur $[-3 ; 0]$.
c. Les fonctions $f + 2{,}4$, $f - 100$ et $9f$ ont les mêmes variations que f sur $[0 ; 3]$, donc elles sont croissantes sur $[0 ; 3]$. La fonction $-\sqrt{5}f$ a des variations opposées à celles de f sur $[0 ; 3]$, donc est décroissante sur $[0 ; 3]$.

39 **a.** La fonction f est croissante sur $[-5 ; -2]$ et décroissante sur $[-2 ; 2]$.
b. Les fonctions $f - 3$ et $f + 2$ ont les mêmes variations que f sur I. La courbe représentative de $f + 2$ est au dessus de celle de f, et la courbe représentative de $f - 3$ est en dessous de celle de f.
La courbe représentative de f est la courbe orange, celle de $f - 3$ est la bleue, celle de $f + 2$ est la rouge.
La fonction $-2f$ a des variations opposées à celles de f, donc sa courbe représentative est la verte.

40 **a.** La fonction u est croissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur I.
b. La fonction u est décroissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et décroissante sur I.
c. La fonction u est négative sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas définie sur I.
d. La fonction u est croissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur I.
e. La fonction u est négative sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas définie sur I.
f. La fonction u est décroissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et décroissante sur I.

41 **a.** La fonction u est décroissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et décroissante sur I.
b. La fonction u est décroissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et décroissante sur I.
c. La fonction u est négative sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas définie sur I.
d. La fonction u est croissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur I.
e. La fonction u est croissante et positive sur I, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur I.

f. La fonction u est positive sur I, décroissante sur [–1 ; 0] et croissante sur [0 ; 1], donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie sur I, décroissante sur [–1 ; 0] et croissante sur [0 ; 1].

42 **a.** La fonction u n'est positive que sur [–2 ; 5] et elle est croissante sur [–2 ; 5], donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur [–2 ; 5].
b. La fonction u n'est positive que sur [2 ; 10] et elle est croissante sur [2 ; 10], donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur [2 ; 10].
c. La fonction u n'est positive que sur $\left[\frac{8}{3} ; 5\right]$ et elle est croissante sur $\left[\frac{8}{3} ; 5\right]$, donc la fonction $\sqrt{u}$ est définie et croissante sur $\left[\frac{8}{3} ; 5\right]$.

43 **a.** f est croissante sur I et g est décroissante sur I.
b. Les fonctions f et g sont positives sur I, donc les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont définies sur I.
La fonction $\sqrt{f}$ a les mêmes variations sur I que la fonction f, donc elle est croissante sur I.
La fonction $\sqrt{g}$ a les mêmes variations sur I que la fonction g, donc elle est décroissante sur I.
c. f est une fonction affine associée à la courbe rouge.
La fonction $\sqrt{f}$ est associée à la courbe orange.
Puisque $x \geqslant 1$, on a $\frac{1}{x} \leqslant 1$, donc $\frac{1}{x} \leqslant \sqrt{\frac{1}{x}}$.
Cela permet d'en déduire que la courbe représentative de la fonction g est la courbe verte, tandis que la courbe représentative de la fonction $\sqrt{g}$ est la courbe bleue.

44 **a.** La fonction u ne s'annule pas sur I et est décroissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur I.
b. La fonction u ne s'annule pas sur I et est croissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et décroissante sur I.
c. La fonction u ne s'annule pas sur I et est décroissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur I.
d. La fonction u s'annule sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ n'est pas définie sur I.
e. La fonction u ne s'annule pas sur I et est croissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et décroissante sur I.
f. La fonction u s'annule sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ n'est pas définie sur I.

45 **a.** La fonction u ne s'annule pas sur I et est décroissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur I.
b. La fonction u s'annule sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ n'est pas définie sur I.
c. La fonction u ne s'annule pas sur I et est décroissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur I.
d. La fonction u ne s'annule pas sur I et est décroissante sur [–3 ; –1] et croissante sur [–1 ; 0], donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur I, croissante sur [–3 ; –1] et décroissante sur [–1 ; 0].
e. La fonction u ne s'annule pas sur I et est décroissante sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur I.
f. La fonction u s'annule sur I, donc la fonction $\frac{1}{u}$ n'est pas définie sur I.

46 **a.** La fonction u s'annule en 0. On peut donc proposer les deux réponses suivantes :
– la fonction u ne s'annule pas sur [–3 ; 0[et est décroissante sur [–3 ; 0[, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur [–3 ; 0[;
– la fonction u ne s'annule pas sur]0 ; 1] et est croissante sur]0 ; 1], donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et décroissante sur]0 ; 1].
b. La fonction u s'annule en $\frac{1}{4}$. On peut donc proposer les deux réponses suivantes :

– la fonction u ne s'annule pas sur $\left[-2\,;\frac{1}{4}\right[$ et est décroissante sur $\left[-2\,;\frac{1}{4}\right[$, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur $\left[-2\,;\frac{1}{4}\right[$;

– la fonction u ne s'annule pas sur $\left]\frac{1}{4}\,;2\right]$ et est décroissante sur $\left]\frac{1}{4}\,;2\right]$, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur $\left]\frac{1}{4}\,;2\right]$;

c. La fonction u s'annule en –1. On peut donc proposer les deux réponses suivantes :

– la fonction u ne s'annule pas sur [–2 ; –1[et est décroissante sur [–2 ; –1[, donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et croissante sur [–2 ; –1[;

– la fonction u ne s'annule pas sur]–1 ; 2] et est croissante sur]–1 ; 2], donc la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et décroissante sur]–1 ; 2].

S'entraîner

47 **a.** La quantité $\sqrt{a}$ est définie pour a $\geqslant$ 0.
b. La quantité $\sqrt{a-1}$ est définie pour a $\geqslant$ 1.
c. La quantité $\sqrt{a+5}$ est définie pour a $\geqslant$ –5.
d. La quantité $\sqrt{a^2+1}$ est définie pour tout réel a car le polynôme $a^2 + 1$ est positif sur $\mathbb{R}$.

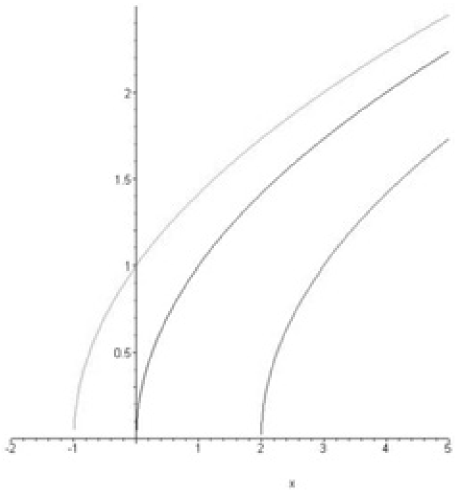
48 **1. a.** Si $a > 0$ et $b \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc, f est définie sur $\mathbb{R}$.
b. Si $a > 0$ et $b < 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ est positive sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{\frac{-b}{a}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{-b}{a}}\,;+\infty\right[$, donc, f est définie sur cette union d'intervalles.
c. Si $a < 0$ et $b \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ est positive sur $\left[-\sqrt{\frac{-b}{a}}\,;\sqrt{\frac{-b}{a}}\right]$, donc f est définie sur ce même intervalle.
d. Si $a < 0$ et $b < 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, donc f n'est définie en aucun point.

2.

```
Saisir(a) ;
Si a>0 alors :
   Si b≥0 alors
      Afficher(« La fonction f est définie
      sur R »)
      Sinon Afficher(« La fonction f est
      définie sur ]-∞;-√(-b/a)] ∪ [√(-b/a);+∞[ »)
   FinSi
Sinon
      Si b≥0 alors
      Afficher(« La fonction f est définie
      sur [-√(-b/a);√(-b/a)] »)
      Sinon Afficher(« La fonction f n'est
      définie en aucun point. »)
      FinSi
FinSi
```

49 **1.** On trouve : $i = \sqrt{P}$.
3. a. On trouve P $\leqslant$ 4.
b. On trouve P $\geqslant$ 9.

50 **a.** Les fonctions f, g et h sont respectivement définies sur $\mathbb{R}^+$, [2 ; +∞[et [–1 ; +∞[.
b. La courbe représentative de f est en bleu, celle de g en rouge et celle de h en vert.



c. La courbe représentative de g se déduit de celle de f par une translation de vecteur $2\vec{i}$.
La courbe représentative de h se déduit de celle de f par une translation de vecteur $-\vec{i}$.
d. Si $x < y$, alors, $x - 2 < y - 2$, puis par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on déduit $g(x) < g(y)$.

e. Si $x < y$, alors, $x + 1 < y + 1$, puis par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on déduit $h(x) < h(y)$.

51 **1.** On a $1 < 3 < 4$, donc $1 < \sqrt{3} < 2$. On peut donc choisir $a = 1$ et $b = 2$.

2. On a $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3}{2}$. On constate que

$(\sqrt{3})^2 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, donc, $\sqrt{3} \in \left[\dfrac{a+b}{3}\,;b\right]$.

3. Cet algorithme permet d'estimer la valeur de $\sqrt{3}$.

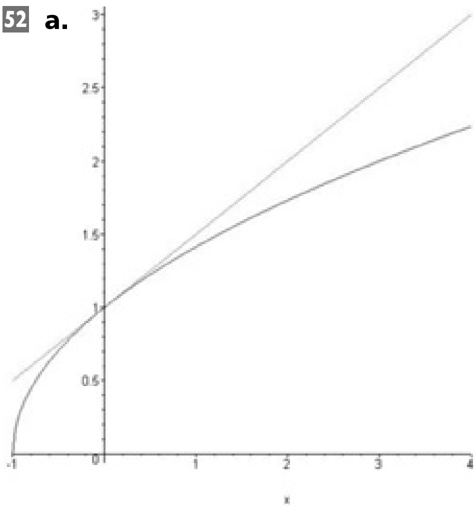
4. a. Si P = 0,3, l'algorithme renvoie $a = 1{,}5$ et $b = 1{,}75$.

Si P = 0,1, l'algorithme renvoie $a = 1{,}6875$ et $b = 1{,}75$.

b. Si P = 0,00001, l'algorithme renvoie $a = 1{,}732048035$ et $b = 1{,}732055664$.

5. Il suffit de remplacer la 2e ligne du programme par `b = n`, et la 5e ligne du programme par `Si m^2 < n`.

52 **a.**



On peut donc conjecturer que la courbe représentative de f est en dessous de celle de g.

b. On trouve

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = (1+x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4} \leqslant 0,$$

donc $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$.

Puisque $f(x)$ et $g(x)$ sont des quantités positives, on en déduit que $f(x) \leqslant g(x)$, ce qui confirme la conjecture faite en **a.**

53 **1. a.** S = {25}. **b.** S = {2}. **c.** S = {0}.

d. Cette équation n'a pas de solution.

2. a. Une racine carrée étant un nombre positif, l'équation proposée n'a pas de solution.

b. S = {0}.

c. Si x est solution de l'équation $\sqrt{x} = a$, on peut élever chaque membre au carré pour obtenir $x = a^2$. Réciproquement, le nombre positif $\sqrt{a^2}$ est par définition l'unique nombre positif dont le carré vaut a^2. Puisque a est positif, on a donc forcément $\sqrt{a^2} = a$, d'où a^2 est solution de l'équation $\sqrt{x}$.

3. a. S = {4}. **b.** S = {49}. **c.** S = $\{8{,}12^2\}$.

54 **1.** Pierrick doit rajouter la ligne `i = 0` juste après « `Lire n` ».

2. L'ordinateur renvoie 5. Elle est fausse car le plus petit entier supérieur ou égal à la racine carrée de 16 vaut 4. La boucle `Tant_Que` de Pierrick devrait commencer par `Tant_Que i*i < n` pour être correcte.

3. a. L'ordinateur renvoie 4.

b. L'ordinateur renvoie 13.

c. L'ordinateur renvoie 54.

4. À moins d'utiliser la fonction « Partie entière », on ne sait pas à l'avance jusqu'à quel valeur va devoir grandir l'entier i.

55 **c.** La tondeuse n° 2 tond plus vite que la tondeuse n° 1 des terrains dont la surface est inférieure à 1ha, et moins vite des terrains dont la surface est supérieure à 1ha.

d. La tondeuse n° 3 tond plus vite que la tondeuse n° 2 des terrains dont la surface est inférieure à 1ha, et moins vite des terrains dont la surface est supérieure à 1ha.

e. La tondeuse n° 3 tond plus vite que la tondeuse n° 1 des terrains dont la surface est inférieure à 1ha, et moins vite des terrains dont la surface est supérieure à 1ha.

56 Il s'agit de la courbe **d.**

57 **a.** On a $ab < 0$, donc $|ab| = -ab$.

b. On a $a > 0$, donc $a + 2 > 0$, donc $|a+2| = a + 2$.

c. On a $b < 0$, donc, $-b > 0$, donc $5 - b > 0$, donc, $|5 - b| = 5 - b$.

d. On a $b < 0$ et $-a < 0$, donc $b - a < 0$, donc $|b - a| = a - b$.

e. On a $a > 0$ et $b < 0$, donc $\dfrac{a}{b} < 0$, donc $\left|\dfrac{a}{b}\right| = -\dfrac{a}{b}$.

f. On a $|a| = a$ (car $a > 0$) et $|b| = -b$ (car $b < 0$), donc $|a| \times |b| = -ab$.

58 Écriture en langage AlgoBox :

```
▼ VARIABLES
  ├─ x EST_DU_TYPE NOMBRE
  └─ VA EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├─ LIRE x
  ▼ SI (x>0) ALORS
    ├─ DEBUT_SI
    ├─ VA PREND_LA_VALEUR x
    ├─ FIN_SI
    ▼ SINON
      ├─ DEBUT_SINON
      ├─ VA PREND_LA_VALEUR -x
      └─ FIN_SINON
  └─ AFFICHER VA
└─ FIN_ALGORITHME
```

59 Si x est un entier positif, alors l'inéquation $|x| \leqslant 4$ équivaut à $x \leqslant 4$, donc les entiers positifs qui conviennent sont 0, 1, 2, 3 et 4.
Si x est un entier négatif, alors $|x| \leqslant 4$ équivaut à $-x \leqslant 4$, soit encore à $x \geqslant -4$, donc les entiers négatifs qui conviennent sont -1, -2, -3 et -4.
Finalement, l'ensemble solution est $\{-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

60 b., d., e., f.

61 **a.**

x	y	$\|x\| \times \|y\|$	xy	$\|xy\|$
1	2	2	2	2
–4	2	8	–8	8
3	–6	18	–18	18
–5	–2	10	10	10
–10	0,2	2	–2	2
3	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$

b. Il semblerait que la valeur absolue d'un produit de deux réels soit égale au produit des valeurs absolues de ces deux réels.
c. Si x et y sont positifs, alors xy est positif, on a alors $|xy| = xy = |x| \times |y|$.
d. Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$, alors $xy \leqslant 0$. On a alors $|xy| = -xy = x \times -(y) = |x| \times |y|$.
Si $x < 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$. On a alors $|xy| = -xy = (-x) \times y = |x| \times |y|$.
Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$. On a alors $|xy| = xy = (-x) \times -(y) = |x| \times |y|$.
Tous les cas de figure ont été envisagés, donc l'égalité conjecturée est valable.

e. On pourrait conjecturer de même que la valeur absolue d'un quotient de deux réels soit égale au quotient des valeurs absolues de ces deux réels. Montrons le :

- Si $x \geqslant 0$ et $y > 0$, alors $\dfrac{x}{y}$ est positif et on a alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$, alors $\dfrac{x}{y}$ est négatif et on a alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{-y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- Si $x < 0$ et $y > 0$, alors $\dfrac{x}{y}$ est négatif et on a alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\dfrac{x}{y}$ est positif et on a alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{-y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Tous les cas de figure ont été envisagés, donc l'égalité conjecturée est valable.

62 **a.** On a par exemple $\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$ et $\sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$.
En revanche, $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.
b. On trouve $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{11^2} = \sqrt{121} = 11$.
On peut conjecturer que $\sqrt{x^2} = x$ si x est positif. Démontrons-le :
Si x est positif, le nombre positif $\sqrt{x^2}$ est par définition l'unique nombre positif dont le carré vaut x^2. Or, x est aussi un nombre positif dont le carré x^2. On a donc nécessairement $\sqrt{x^2} = x$.
c. On trouve $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$ et $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$.
Si x est négatif, le nombre positif $\sqrt{x^2}$ est par définition l'unique nombre positif dont le carré vaut x^2. Or, $-x$ est aussi un nombre positif dont le carré x^2. On a donc nécessairement $\sqrt{x^2} = -x$.
d. On trouve donc, pour tout réel x : $\sqrt{x^2} = |x|$.
e. $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ (car $2-\sqrt{3} > 0$).

$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$
(car $\sqrt{5}-2 > 0$).

63 **1. a.** On trouve S = {–7 ; 7}.
b. On trouve S = $\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\}$.
c. On trouve S = {0}.
d. La dernière équation n'a pas de solution.
2. a. Si $k < 0$, l'équation $|x| = k$ n'a pas de solution vu qu'une valeur absolue est toujours positive.
b. L'unique solution de l'équation $|x| = 0$ est 0.
c. Si x est positif, alors $|x| = x$, donc l'équation proposée est équivalente à $x = k$. L'unique solution positive de l'équation $|x| = k$ est donc k.
Si x est négatif, alors $|x| = -x$, donc l'équation proposée est équivalente à $-x = k$. L'unique solution négative de l'équation $|x| = k$ est donc $-k$.
Finalement, si $k > 0$, l'ensemble des solutions de l'équation $|x| = k$ est S = $\{-k\ ;\ k\}$.
3. a. S = {–2,1 ; 2,1}.
b. L'équation $|x| = -6$ n'a pas de solution
c. S = $\{-1-\sqrt{5}\ ;\ 1+\sqrt{5}\}$.
d. S = {–100 ; 100}.

64 **1.** D'après le cours, on a $|x| = x$ si x est positif, et $|x| = -x$ sinon.
2. D'après la définition qui précède, on a $|x| = \pm x$ où on garde le signe + si x est positif, et le signe – si x est négatif.
La distance entre x et 0 est égale à $|x|$.
3. Si x est positif, alors $\max(-x, x) = x$, d'où $\max(-x, x) = |x|$.
Si x est négatif, alors $\max(-x, x) = -x$, d'où $\max(-x, x) = |x|$.

65

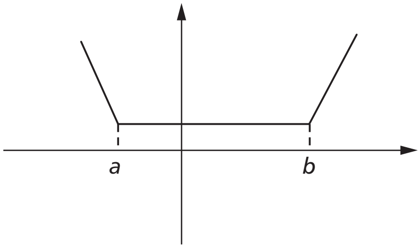
```
Saisir(k)
Si k>0 Alors
   Afficher(« Les solutions de l'équation
   |x| = k sont k et -k »)
Sinon Si k = 0 Alors
      Afficher(« La solution de l'équation
      |x| = k est 0 »)
   Sinon Alors
      Afficher(« L'équation |x| = k n'a pas
      de solution »)
   FinSi
FinSi
```

66 **1.** On trouve S = [–5 ; 5] pour la première inéquation et S = [–2,8 ; 2,8] pour la seconde.
2. Il semblerait que l'inéquation $|x| \leqslant a$ soit équivalente à $-a \leqslant x \leqslant a$.
3. a. Si x est positif, alors $|x| = x$, donc l'inéquation $|x| \leqslant a$ est équivalente à $x \leqslant a$, et puisque x est positif, on a aussi $-a \leqslant x$, d'où $-a \leqslant x \leqslant a$.
b. Si x est négatif, alors $|x| = -x$, donc l'inéquation $|x| \leqslant a$ est équivalente à $-x \leqslant a$, c'est-à-dire à $x \geqslant -a$, et puisque x est négatif, on a aussi $x \leqslant a$, d'où $-a \leqslant x \leqslant a$.
c. On vient donc de démontrer que si $|x| \leqslant a$, alors $-a \leqslant x \leqslant a$.
4. Supposons réciproquement que $-a \leqslant x \leqslant a$.
Si x est positif, alors $|x| = x$, d'où $|x| \leqslant a$.
Si x est négatif, alors $|x| = -x$. Or, $-a \leqslant -x \leqslant a$, d'où $|x| \leqslant a$.
Dans tous les cas, on a bien $|x| \leqslant a$.
5. On a donc bien montré l'équivalence entre $|x| \leqslant a$ et $-a \leqslant x \leqslant a$.

67 **1. b.** On a $|x-2| = x-2$ si $x \geqslant 2$ et $|x-2| = 2-x$ si $x < 2$.
c. On a $|x+3| = x+3$ si $x \geqslant -3$ et $|x+3| = -3-x$ si $x < -3$.
d. Si $x < -3$, alors
$f(x) = -3-x+2-x = -1-2x$.
Si $-3 \leqslant x \leqslant 2$, alors, $f(x) = x+3+2-x = 5$.
Si $x > 2$, alors, $f(x) = x-2+x+3 = 2x+1$.
2. a. Si $x \leqslant -3$, alors l'équation $f(x) = 7$ est équivalente à $-1-2x = 7$, qui équivaut encore à $x = -4$ (qui appartient bien à l'intervalle $]-\infty\ ;\ -3]$).
Si $-3 < x \leqslant 2$, l'équation proposée est équivalente à $5 = 7$ qui n'admet pas de solution.
Si $x > 2$, l'équation proposée est équivalente à $2x+1 = 7$, qui équivaut encore à $x = 3$ (qui appartient bien à l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$.)
b. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 7$ est donc S = {–4 ; 3}.

68 **a.** Envisageons trois cas :
• Si $x < a$, alors $|x-a| = -(x-a)$ et $|x-b| = -(x-b)$, d'où $f(x) = -2x+a+b$.
• Si $a \leqslant x < b$, alors $|x-a| = x-a$ et $|x-b| = b-x$, d'où $f(x) = b-a$.
• Si $x \geqslant b$, alors $|x-a| = x-a$ et $|x-b| = x-b$, d'où $f(x) = 2x-a-b$.

b. La fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ a]$, constante sur $[a\ ;\ b]$ et croissante sur $[b\ ;\ +\infty[$.



c. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $b - a$.

d. On a donc, pour tout réel x, $f(x) \geqslant b - a$, c'est-à-dire : $|x - a| + |x - b| \geqslant b - a$.

69 **a.** Si $a \leqslant b$, alors, $|a - b| = b - a$, d'où :

$$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (b - a)}{2}$$

$= a = \min(a\ ;\ b)$.

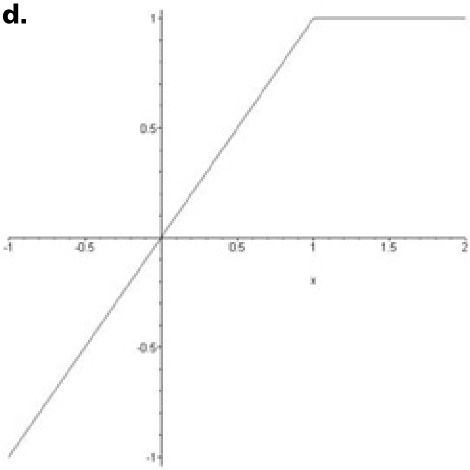
b. Si $a > b$, alors $|a - b| = a - b$, d'où :

$$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (b - a)}{2}$$

$= b = \min(a\ ;\ b)$.

c. Tous les cas de figure ont été envisagés, donc, quels que soient les réels a et b, on a l'égalité $\dfrac{a + b - |a - b|}{2} = \min(a\ ;\ b)$.

d.



Lorsque $x < 1$, le minimum entre 1 et x vaut x ; lorsque $x \geqslant 1$, le minimum vaut 1 et la fonction est alors constante.

e. Si $a \leqslant b$, alors $|a - b| = b - a$, d'où :

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + (b - a)}{2}$$

$= b = \max(a\ ;\ b)$.

Si $a > b$, alors $|a - b| = a - b$, d'où :

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + (a - b)}{2} = a = \max(a\ ;\ b).$$

Tous les cas de figure ont été envisagés, donc, quels que soient les réels a et b, on a l'égalité

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \min(a\ ;\ b).$$

f. Envisageons deux cas :

- Si $a \leqslant b$, alors $\min(a\ ;\ b) + \max(a\ ;\ b) = a + b$.
- Si $a > b$, alors

$\min(a\ ;\ b) + \max(a\ ;\ b) = b + a = a + b$.

L'égalité est donc toujours vraie. On en déduit, à l'aide de la question **c.** :

$\max(a\ ;\ b) = a + b - \min(a\ ;\ b)$

$$= a + b - \frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

70 **a.** La fonction u est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ \sqrt{2}]$, donc puisque -5 est un réel strictement négatif, la fonction v est croissante sur $[-1\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ \sqrt{2}]$.

b. La fonction u est croissante et positive sur I, donc la fonction v est bien définie sur I et est croissante sur I.

c. La fonction u est décroissante sur I, donc la fonction v est décroissante sur I.

d. La fonction u est décroissante sur I et ne s'annule pas sur I, donc la fonction v est bien définie sur I et est croissante sur I.

71 **a.** La fonction u est décroissante et positive sur I, donc la fonction v est bien définie sur I, et est décroissante sur I.

b. La fonction u est croissante sur I, donc puisque -2 est un réel strictement négatif, la fonction v est décroissante sur I.

c. La fonction u est décroissante sur $[1\ ;\ 2]$ croissante sur $[2\ ;\ 3]$ et positive sur I, donc la fonction v est bien définie sur I, est décroissante sur $[1\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;\ 3]$.

d. La fonction u est décroissante sur I, donc puisque 8 est un réel strictement positif, la fonction v est décroissante sur I.

72 **a.** La fonction u est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$, croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et ne s'annule pas sur I.

La fonction v est donc définie sur I, croissante sur $[-1\ ;\ 0]$, décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Elle est de plus positive sur I.

La fonction w est donc bien définie sur I, croissante sur $[-1\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
b. La fonction u est croissante sur I et positive sur I.
La fonction v est donc bien définie sur I et croissante sur I.
La fonction w est donc bien définie sur I et croissante sur I.
c. La fonction u est bien définie et décroissante sur I.
Puisque -8 est un réel strictement négatif, la fonction v est donc croissante sur I.
La fonction w est donc bien définie et croissante sur I.

73 **a.** La fonction u est bien définie, croissante et ne s'annule pas sur I.
La fonction v est donc bien définie sur I et est décroissante sur I.
Puisque -1 est un réel strictement négatif, la fonction w est donc bien définie et croissante sur I.
b. La fonction u est décroissante sur I et positive sur I.
La fonction v est donc bien définie sur I et est décroissante sur I.
Puisque 4 est un réel strictement positif, la fonction w est donc bien définie et décroissante sur I.
c. La fonction u est croissante sur I et ne s'annule pas sur I.
La fonction v est donc bien définie sur I et est décroissante sur I.
Puisque 4 est un réel strictement positif, la fonction w est donc bien définie et décroissante sur I.

74 **a.** Les fonctions dont les courbes représentatives sont verte et rouge s'annulent sur I. Leur fonction inverse ne sont donc pas définies sur I.
b. La fonction 1 vaut -1 en 0 : il s'agit donc de la fonction dont la courbe est bleue.
La fonction 2 vaut 1 en 0 : il s'agit donc de la fonction dont la courbe est orange.
La fonction 3 est linéaire : il s'agit donc de la fonction dont la courbe est rouge.
La fonction 4 n'est pas définie en 1 : il s'agit donc de la fonction dont la courbe est verte.
c. • La fonction 1 est croissante sur $[-2\ ;\ 0]$, décroissante sur $[0\ ;\ 4]$, et ne s'annule pas sur I. Son inverse est donc bien définie sur I, est décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ 4]$.
• La fonction 2 est décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$, croissante sur $[0\ ;\ 4]$, et ne s'annule pas sur I. Son inverse est donc bien définie sur I, est croissante sur $[-2\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ 4]$.
• Les fonctions 3 et 4 s'annulent sur I, donc, leur inverse n'est pas définie sur I.

75 **1. a.** Puisque la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est croissante et ne s'annule pas sur I, sa fonction inverse est bien définie sur I, mais a une monotonie contraire, et est donc décroissante sur I.
La seconde erreur de Léo est que la multiplication d'une fonction par un réel négatif change la monotonie de la fonction.
b. Léo a fait deux erreurs qui se sont compensées et sa conclusion est donc quand même correcte.
c. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est croissante et ne s'annule pas sur I, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$ est bien définie et décroissante sur I.
La multiplication par un réel strictement négatif change les variations, donc f est croissante sur I.
2. a. L'erreur commise par Léo est que la fonction $x \mapsto 3x + 1$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
b. La fonction $x \mapsto 3x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais n'est positive que sur $J = \left[-\dfrac{1}{3}\ ;+\infty\right[$.
La fonction g n'est donc définie que sur J, et elle est croissante sur J.

76 • La fonction $f + 2$ a les mêmes variations que f est sa courbe est déduite de celle de f par une translation de vecteur $2\vec{j}$. Sa courbe représentative est donc la verte claire.
• La fonction $-\dfrac{1}{2}f$ a des variations opposées à celles de f, et elle est de plus négative (car f est positive), donc sa courbe représentative est la verte foncée.
• La fonction $\sqrt{f}$ est bien définie sur I (car f est positive sur I) et possède les mêmes variations que f. Par élimination, sa courbe est donc la orange.

• La fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie sur I (car f ne s'annule pas sur I) et possède des variations opposées à celles de f. Par élimination, sa courbe est donc la bleue.

77 **a.** La fonction f possède les mêmes variations que la fonction f :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f	0	↘	–4	↗ –1	↘	↘	–6

b. La fonction $-2f$ possède des variations opposées à celles de f car –2 est un réel strictement négatif.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f	2	↗	10	↘ 4	↗	↗	14

c. La fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie car f ne s'annule pas sur [–3 ; 3], et elle possède des variations contraires à celles de f.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f	–1	↗	–0,2	↘ –0,5	↗	↗	$-\frac{1}{7}$

d. La fonction f est négative sur [–3 ; 3], donc la fonction $\sqrt{f}$ n'est pas définie sur [–3 ; 3].

78 **1.** Une fonction est dite croissante sur un intervalle I si :
$\forall x \in \mathrm{I}, \forall y \in \mathrm{I}, x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
Une fonction n'est pas croissante sur I si :
$\exists x \in \mathrm{I}, \exists y \in \mathrm{I} \,/\, x < y$ et $f(x) > f(y)$.
2. Une fonction est dite décroissante sur un intervalle I si :
$\forall x \in \mathrm{I}, \forall y \in \mathrm{I}, x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
Une fonction n'est pas décroissante sur I si :
$\exists x \in \mathrm{I}, \exists y \in \mathrm{I} \,/\, x < y$ et $f(x) < f(y)$.
a. $-1 < 0$ et $f(-1) < f(0)$, donc f n'est pas décroissante sur I.
$0 < 1$ et $f(0) > f(1)$, donc f n'est pas croissante sur I.
b. $0 < 4$ et $f(0) < f(4)$, donc f n'est pas décroissante sur I.
$4 < 5$ et $f(4) > f(5)$, donc f n'est pas croissante sur I.
c. Considérons deux réels x et y appartenant à I tels que $x < y$. Par croissance de la fonction carrée sur I, on trouve $x^2 \leqslant y^2$. On en déduit $x^2 + 1 \leqslant y^2 + 1$, puis par croissance de la fonction racine carrée sur I, on obtient : $\sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{y^2+1}$. La fonction h est donc croissante sur I.

79 **a.** La fonction f est définie en un réel x si et seulement si $\lambda - x^2 > 0$, ce qui revient à écrire $x^2 < \lambda$. Si λ était négatif ou nul, aucun réel x ne vérifierait cette condition, et le domaine de définition de f serait l'ensemble vide. On a donc $\lambda > 0$. D'après l'exercice 66, la condition $x^2 < \lambda$ est donc équivalente à $x \in \left]-\sqrt{\lambda}\,;\sqrt{\lambda}\right[$. L'indice n° 1 permet donc de déduire que $\sqrt{\lambda} = 1$, soit encore que $\lambda = 1$.
b. La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est croissante sur]–1 ; 0], décroissante sur [0 ; 1[et positive sur]–1 ; 1[, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est bien définie sur]–1 ; 1[, croissante sur]–1 ; 0] et décroissante sur [0 ; 1[. Cette dernière fonction ne s'annule pas sur]–1 ; 1[, ce qui permet de déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est bien définie sur]–1 ; 1[, décroissante sur]–1 ; 0] et croissante sur [0 ; 1[. L'indice n° 2 permet donc de déduire que le réel β est strictement négatif.
c. L'indice n° 3 permet d'écrire que $\alpha + \beta = 2$.
d. En combinant l'égalité $\alpha + \beta = 2$ et l'indice n° 4, on peut déduire que $\beta^2 + \beta = 2$. On en déduit que $\beta = 1$ ou $\beta = -2$. Or, d'après la question **b.**, le réel β est strictement négatif, donc $\beta = -2$. Il en résulte $\alpha = 4$.
e. D'après le raisonnement mené en **b.**, on peut dire que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est bien décroissante sur]–1 ; 0] et croissante sur [0 ; 1[, donc il en est de même de f, qui ne répond donc pas à l'indice n° 2.

80 **1. a.** En développant l'expression $\left(\mathrm{R} + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{3r^2}{4}$, on trouve bien $\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}r + r^2$.
b. La fonction $\mathrm{R} \mapsto \frac{\pi}{3}\left(\left(\mathrm{R} + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}\right)$ est une fonction polynôme du second degré croissante sur $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$. Le volume $\mathcal{V}$ du tonneau sera toujours supérieur à $0{,}2\,\mathrm{m}^3$ si R appartient à $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$.
2. a. Cela se déduit immédiatement de l'égalité trouvée en **1. a.**

b. La fonction $R \mapsto \left(R+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$ est croissante sur $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. La fonction $R \mapsto \dfrac{1}{\left(R+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}}$ est donc bien définie sur $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$ et est décroissante sur cet intervalle. Puisque $\frac{1,2}{\pi}$ est strictement positif, la fonction $R \mapsto \dfrac{\frac{1,2}{\pi}}{\left(R+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}}$ est décroissante sur $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$. La hauteur h du tonneau sera inférieure à 0,8 m si et seulement si $R \geqslant 0{,}46$.

c. Il suffit d'appliquer la formule de la question **2. a.** On trouve : $h = 9{,}77$m.

81 **a.** • La fonction f_1 est une fonction polynôme du second degré décroissante sur $[-2\,;0]$ et croissante sur $[0\,;2]$.

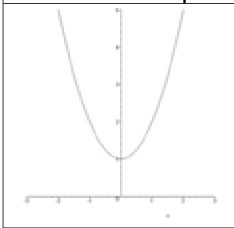
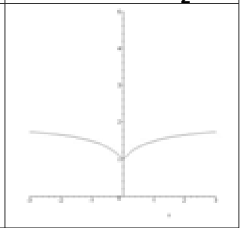
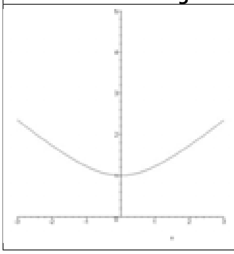
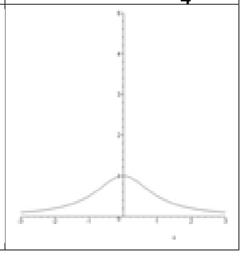
• La fonction $x \mapsto |x|+1$ est décroissante sur $[-2\,;0]$, croissante sur $[0\,;2]$ et ne s'annule pas sur $[-2\,;2]$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x|+1}$ est donc bien définie sur $[-2\,;2]$, est croissante sur $[-2\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;2]$. Puisque -1 est un réel strictement négatif, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{|x|+1}$ est donc décroissante sur $[-2\,;0]$ et croissante sur $[0\,;2]$. Finalement, la fonction f_2 est décroissante sur $[-2\,;0]$ et croissante sur $[0\,;2]$.

• La fonction $x \mapsto 1+\frac{1}{2}x^2$ est une fonction polynôme du second degré décroissante sur $[-2\,;0]$, croissante sur $[0\,;2]$ et positive sur $[-2\,;2]$. La fonction f_3 est donc bien définie sur $[-2\,;2]$, est décroissante sur $[-2\,;0]$ et croissante sur $[0\,;2]$.

• La fonction f_1 est décroissante sur $[-2\,;0]$, croissante sur $[0\,;2]$ et ne s'annule pas sur $[-2\,;2]$. La fonction f_4, qui est l'inverse de la fonction f_1, est donc croissante sur $[-2\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;2]$.
La fonction f_4 ne peut donc pas être la fonction f cherchée.

b. On trouve $f_1(1)=2$, $f_2(1)=\frac{3}{2}$ et $f_3(1)=\sqrt{\frac{3}{2}}$. La fonction cherchée est donc la fonction f_3.

c.

Courbe de f_1	**Courbe de f_2**
	
Courbe de f_3	**Courbe de f_4**
	

82 **1. a.** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$.
La fonction f est de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a=2$, $b=2$, $c=1$ et $d=-4$ qui vérifient $c \neq 0$ et $ad-bc=-10 \neq 0$, donc f est une fonction homographique.

b. Si x est différent de 4, on trouve :
$2+\dfrac{10}{x-4}=\dfrac{2(x-4)+10}{x-4}=f(x)$,
d'où l'égalité annoncée.

c. La fonction $x \mapsto x-4$ est croissante sur $]4\,;+\infty[$, et ne s'annule pas sur cet intervalle. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-4}$ est donc bien définie sur $]4\,;+\infty[$ et est décroissante sur cet intervalle. Puisque 10 est un réel strictement positif, la fonction $x \mapsto \dfrac{10}{x-4}$ est donc décroissante sur $]4\,;+\infty[$, d'où f est décroissante sur $]4\,;+\infty[$. Le même raisonnement peut être tenu en remplaçant $]4\,;+\infty[$ par $]-\infty\,;4[$.

2. a. Si x est différent de c, on peut écrire :
$$a + \frac{ac+b}{x-c} = \frac{a(x-c)+ac+b}{x-c} = g(x).$$
b. La fonction g est donc homographique si et seulement si $ac + b$ est non nul.
c. Par le même raisonnement qu'en **1.c.**, on peut dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-c}$ est bien définie sur $]c\,;+\infty[$ et est décroissante sur cet intervalle. On distingue alors 3 cas :
- Si $ac+b>0$, alors, la fonction $x \mapsto \dfrac{ac+b}{x-c}$ est décroissante sur $]c\,;+\infty[$, donc, f l'est aussi.
- Si $ac+b=0$, alors, la fonction $x \mapsto \dfrac{ac+b}{x-c}$ est nulle sur $]c\,;+\infty[$, donc, f est constante.
- Si $ac+b<0$, alors, la fonction $x \mapsto \dfrac{ac+b}{x-c}$ est croissante sur $]c\,;+\infty[$, donc, f l'est aussi.

Le même raisonnement et la même conclusion peuvent être tenus sur l'intervalle $]-\infty\,;c[$.

83

```
Saisir(a)
Saisir(b)
Saisir(c)
Si ac + b>0
   Alors Afficher(« La fonction proposée
   est décroissante sur ]-∞ ;c[ et sur
   ]c ; +∞[» ).
   Sinon Si ac + b = 0
      Alors Afficher(« La fonction proposée
      n'est pas homographique »).
      Sinon Afficher(« La fonction proposée
      est croissante sur ]-∞ ;c[ et sur
      ]c ; +∞[» ).
   FinSi
FinSi
```

84 **a.** La fonction polynôme du second degré $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ a un discriminant strictement négatif, donc ne s'annule jamais. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.
b. Soit a et b deux réels. Pour tout réel x, on peut écrire :
$$a + \frac{b}{1+(x-1)^2} = \frac{a+a(x-1)^2+b}{1+(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^2-2ax+2a+b}{1+(x-1)^2}.$$
En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on constate donc que cette dernière fonction vaut f.

c. La fonction $x \mapsto 1 + (x-1)^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;1[$, croissante sur $[1\,;+\infty[$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+(x-1)^2}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, est croissante sur $]-\infty\,;1[$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$. Puisque -1 est un réel strictement négatif, la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{1+(x-1)^2}$ est donc décroissante sur $]-\infty\,;1[$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.
Finalement, la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;1[$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

85 **a.**

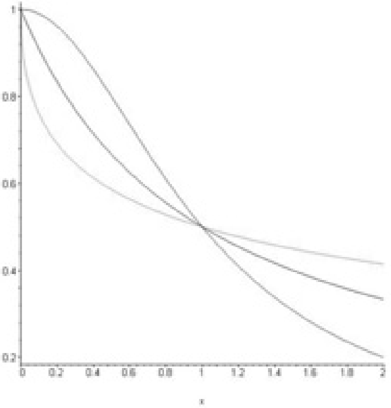
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
distance	2	1,6	1,4	1,3	1,4	1,6	2	2,4	2,8

b. Par définition, la distance AM est donnée par la formule :
$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2-3x+4}.$$
Or, en développant $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$, on trouve $x^2 - 3x + 4$, d'où la formule annoncée.
c. La fonction $x \mapsto \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$ est une fonction polynôme du second degré décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.
Puisque cette fonction est positive sur $\mathbb{R}$, on peut en déduire que la fonction f est bien définie, et qu'elle est décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.
d. Le point de la courbe le plus proche de A, s'il existe, sera celui qui rend la distance AM minimale. D'après l'étude des variations de f faite dans la question précédente, on en déduit qu'il s'agit du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{3}{2}$, donc du point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

86 **a.** La fonction $x \mapsto 1 + x$ est une fonction affine croissante sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est une fonction polynôme du second degré croissante sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Les trois fonctions précédemment citées sont croissantes sur $[0 ; +\infty[$ et ne s'annulent pas sur cet intervalle, donc les fonctions f, g et h sont bien définies sur $[0 ; +\infty[$ et sont décroissantes sur cet intervalle.

b.



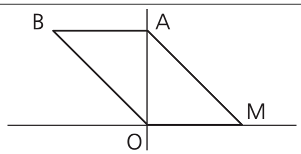
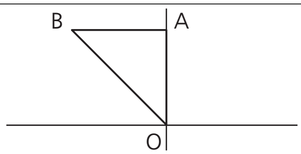
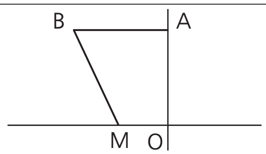
On peut conjecturer que si x appartient à $[0 ; 1]$, alors, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, tandis que, lorsque x appartient à $[1 ; +\infty[$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

c. Envisageons deux cas :

• Si x appartient à $[0 ; 1]$, alors $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$, donc $1 + x^2 \leqslant 1 + x \leqslant 1 + \sqrt{x}$, donc par passage à l'inverse : $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

• Si x appartient à $[1 ; +\infty[$, alors $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$, donc $1 + \sqrt{x} \leqslant 1 + x \leqslant 1 + x^2$, donc par passage à l'inverse : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

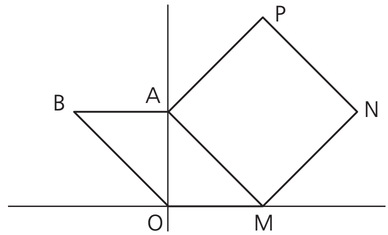
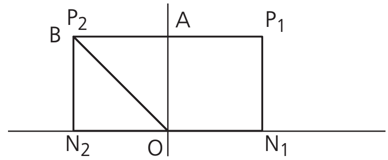
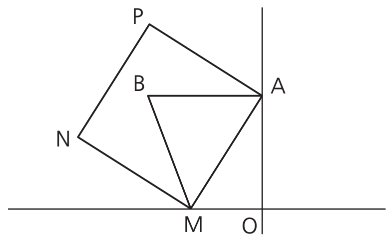
87 **a.** On se trouve dans l'un des trois cas de figure suivants :

$x > 0$	
$x = 0$	
$x < 0$	

b. On trouve $OM = |x|$ et $AM = \sqrt{x^2 + 1}$.

c. Lorsque x est non nul, l'aire cherchée vaut
$$\frac{(OM + AB) \times OA}{2} = \frac{(|x| + 1)}{2}.$$
La formule est encore valable lorsque x est nul.

d.

$x > 0$	
$x = 0$	 Il y a ici deux dessins possibles
$x < 0$	

• Si $x \neq 0$, l'aire du carré vaut $g(x) = AM^2 = x^2 + 1$.

• Si $x = 0$, la formule ci-dessus est encore valable.

e. On trouve
$$g(x) - f(x) = x^2 + 1 - \frac{|x| + 1}{2} = \frac{2x^2 - |x| + 1}{2}.$$
Si $x \geqslant 0$, le numérateur est positif (le polynôme du second degré $2a^2 - a + 1$ a un discriminant strictement négatif), et si $x < 0$, le numérateur est encore positif (c'est la somme de trois termes positifs). Dans tous les cas, $g(x) - f(x) \geqslant 0$. L'aire du polygone est donc toujours inférieure à celle du carré.

Pour aller plus loin

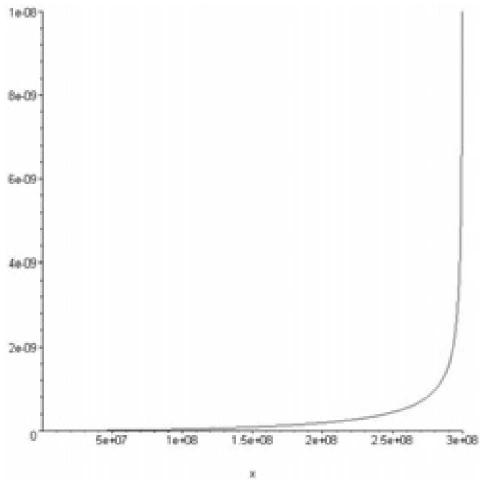
95 **1. a.** Lorsque v se rapproche de c par valeurs inférieures, la fraction $\frac{v^2}{c^2}$ se rapproche de 1 par valeurs inférieures, donc la fraction $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ tend vers $+\infty$.

Une telle situation conduirait à une énergie cinétique infinie, ce qui n'est pas possible.
La fonction E_c est donc cohérente avec ce principe.

b. La fonction $v \mapsto 1 - \frac{v^2}{c^2}$ est une fonction polynôme du second degré décroissante et strictement positive sur $[0 ; c[$, donc la fonction $v \mapsto \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ est définie, décroissante et strictement positive sur $[0 ; c[$.

La fonction $v \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est donc définie et croissante sur $[0 ; c[$. Il en est de même de la fonction E_c.
Lorsque la vitesse augmente, l'énergie cinétique augmente donc aussi.

2. On trouve $mc^2 \approx 5{,}4 \times 10^{-10}$.



96 **1. a.** Soit $[a ; b]$ un intervalle contenu dans $\mathbb{R}$. on trouve, pour tous réels x et y appartenant à I : $|x - y| \leqslant |x - y|$, donc f est bien lipschitzienne sur $[a ; b]$.

b. De l'égalité $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, on tire que $|x^2 - y^2| = |x - y| \times |x + y| \leqslant 4|x - y|$ (car $|x + y| \leqslant 4$), donc la fonction carré est bien lipschitzienne sur $[0 ; 2]$.

2. a. La fonction polynôme $x \mapsto x^2 + 1$ est toujours positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b. On trouve, pour tous réels x et y dans $[0 ; 2]$:

$$g(x) - g(y) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}) \times (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$$

donc : $g(x) - g(y) = \dfrac{(x^2 + 1) - (y^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$

$$= \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}.$$

et le résultat s'obtient par passage à la valeur absolue dans chaque membre.

c. Puisque x et y appartiennent à $[0 ; 2]$, on peut minorer le dénominateur par $1 + 1 = 2$, donc pour tous réels x et y dans $[0 ; 2]$:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{|x^2 - y^2|}{2}.$$

En utilisant alors la question **1.b.**, il vient :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant 4 \times \frac{|x - y|}{2} = 2|x - y|,$$

donc la fonction g est lipschitzienne.

97 **1. a.** Si $a \leqslant x \leqslant b$, alors, par croissance de la fonction f sur $[a ; b]$, on déduit $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

b. L'aire de la partie jaune est comprise entre l'aire du rectangle de base [AB] et de hauteur $f(a)$, et l'aire du rectangle de base [AB] et de hauteur $f(b)$. On trouve donc bien l'encadrement annoncé.

c. La fonction f est croissante sur $]-\infty ; 4]$ et décroissante sur $[4 ; +\infty[$, donc elle est bien croissante sur $[1 ; 3]$. Par ailleurs, puisque $f(1) > 0$, la fonction f est bien positive sur $[1 ; 3]$. La question **1.b.** permet de dire que l'aire A sous la courbe de f est comprise entre $2 \times f(1)$ et $2 \times f(3)$, c'est-à-dire, entre : $2 \times \frac{16}{5}$ et $2 \times \frac{24}{5}$.

2. a. C'est une simple application de la question **1. b.**

b. On trouve donc en sommant tous ces encadrements :

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n - 1) \leqslant A \leqslant f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

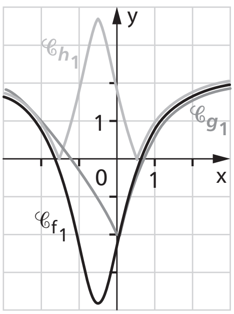
c. • La fonction racine est croissante sur $[0 ; 4]$, donc la fonction f est croissante sur $[0 ; 4]$, de surcroit positive. On trouve donc :

$f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$
$\leqslant A \leqslant f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$,
donc : $6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \leqslant A \leqslant 10 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

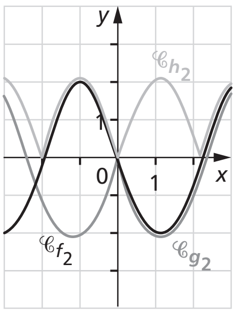
• La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est croissante sur $[0 ; 5]$ et ne s'annule pas sur $[0 ; 5]$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$ est bien définie sur $[0 ; 5]$ et y est décroissante. La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2 + 1}$, puis la fonction f sont donc bien définies sur $[0 ; 5]$ et y sont croissantes. Puisque $f(0) = 1 > 0$, la fonction f est donc positive sur $[0 ; 5]$. On trouve donc :
$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$
$\leqslant A \leqslant f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$,
donc : $\dfrac{692}{85} \leqslant A \leqslant \dfrac{20\,117}{2\,210}$.

• La fonction $x \mapsto 4 - x$ est décroissante sur $[0 ; 3]$ et ne s'annule pas sur $[0 ; 3]$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4 - x}$ est bien définie sur $[0 ; 3]$ et y est croissante. Puisque $f(0) > 0$, la fonction f est donc positive sur $[0 ; 3]$. On trouve donc : $f(0) + f(1) + f(2) \leqslant A \leqslant f(1) + f(2) + f(3)$ donc : $\dfrac{13}{12} \leqslant A \leqslant \dfrac{11}{6}$.

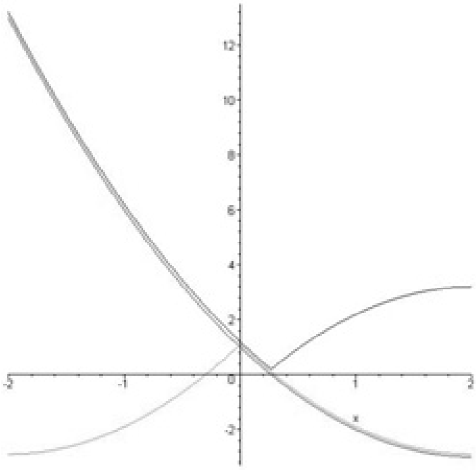
98 **1. a.**



b.



2. a. $\mathscr{C}_f$ est tracée en rouge, $\mathscr{C}_g$ en vert et $\mathscr{C}_h$ en bleu.



b. Il semblerait que la courbe $\mathscr{C}_g$ soit obtenue en gardant la partie de $\mathscr{C}_f$ correspondant aux abscisses positives et en prenant le symétrique par rapport à l'axe (Oy) de cette portion de courbe. Il semblerait que la courbe $\mathscr{C}_h$ soit obtenue en gardant la partie de $\mathscr{C}_f$ située au dessus de l'axe (Ox) et en le symétrique par rapport à l'axe (Ox) de la portion de courbe de $\mathscr{C}_f$ située en dessous de l'axe (Ox).

c. On trouve $g(x) = f(|x|)$. Si $x > 0$, alors $g(x) = f(x)$, et si $x \leqslant 0$, alors, $g(x) = f(-x)$.

d. On trouve $h(x) = |f(x)|$. Si $f(x) > 0$, alors $h(x) = f(x)$, et si $x \leqslant 0$, alors, $h(x) = -f(x)$.

99 **a.** $|(100 - x) - 1| + |(100 - x) - 99|$
$= |99 - x| + |1 - x| = |x - 1| + |x - 99|$.

b. Considérons la fonction f définie par $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 99|$.
En s'inspirant de la question **a.**, on peut démontrer que $f(100 - x) = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction f est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 50$. Raisonnons maintenant par double implication.

• Si l'équation $f(x) = a$ possède une unique solution, alors, d'après la symétrie évoquée ci-dessus, cette solution est nécessairement 50 (sinon, il y aurait deux solutions), ce qui donne $a = f(50)$.

• Réciproquement, supposons que $a = f(50)$. D'après l'exercice 68, on peut écrire :

$f(x) = \underbrace{|x-1| + |x-99|}_{\geqslant 98} + \underbrace{|x-2| + |x-98|}_{\geqslant 96}$

$+ \ldots + \underbrace{|x-49| + |x-51|}_{\geqslant 2} + |x-50|$

$\geqslant a + |x-50|.$

L'égalité $f(x) = a$ ne peut alors avoir lieu que pour $x = 50$.

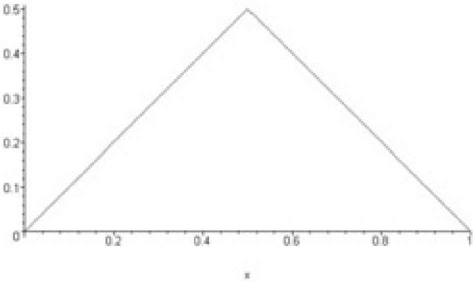
100 **a.** La distance entre x et l'entier le plus proche est exactement égale à la distance entre $x + 1$ et l'entier le plus proche (la situation est juste décalée d'une unité vers la droite), d'où $f(x) = f(x + 1)$.

b. Si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right[$, l'entier le plus proche de x est 0, d'où $f(x) = x$.

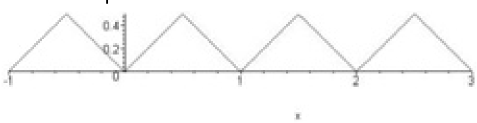
Si x appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$, l'entier le plus proche de x est 1, d'où $f(x) = 1 - x$.

Et si $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

On en déduit la courbe représentative de f sur $[0\,;1]$:



c. D'après la question **a.**, on peut déduire la courbe représentative de f toute entière :



Communiquer à l'écrit ou à l'oral

• Principe de l'algorithme : Soit A un réel positif. L'algorithme de Babylone fournit une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $\sqrt{A}$. On commence par choisir un réel x_0 proche de $\sqrt{A}$ (par exemple, l'entier le plus proche de $\sqrt{A}$, trouvé en prenant le plus grand carré inférieur ou égal à A).

On calcule ensuite $x_1 = \dfrac{x_0 + \frac{A}{x_0}}{2}$, puis

$x_2 = \dfrac{x_1 + \frac{A}{x_1}}{2}$, etc. La suite ainsi obtenue se rapproche de la racine carrée de A.

• Exemple n° 1 : Cherchons la racine carrée de 2.

On part de $x_0 = 1$. On calcule alors

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{2}{x_0}}{2} = 1{,}5,$$

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{2}{x_1}}{2} \approx 1{,}41666666,$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} \approx 1{,}4142156,$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{2}{x_3}}{2} \approx 1{,}4142135\ldots$$

• Exemple n° 2 : Cherchons la racine carrée de 3.

On part de $x_0 = 1$. On calcule alors

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{3}{x_0}}{2} = 2,$$

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{3}{x_1}}{2} = 1{,}75,$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{3}{x_2}}{2} \approx 1{,}7321428,$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{3}{x_3}}{2} \approx 1{,}7320508\ldots$$