Statistiques

Chapitre 9

Ouverture

Bien que d'apparition récente dans les programmes d'enseignement du lycée, les statistiques sont apparues il y a fort longtemps à l'occasion de recensements en Chine au XXIII^{e} siècle avant Jésus Christ ou sous forme de listes concernant le lever du soleil et de la lune à Babylone. Pendant longtemps les statistiques se limitèrent à la collecte de données : relevé de taxes, recensements de production agricole, effectifs des armées, cadastres, etc.
Il a fallu attendre le XVIII^{e} siècle pour voir apparaître un rôle prévisionnel des statistiques sous la forme d'étude de probabilités de la durée de vie humaine (Antoine Deparcieux en 1746)
C'est au XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle que l'activité statistique prit son plein essor et que le double aspect collecte-traitement de données et interprétation des données fut institué.

À l'heure actuelle, la statistique est un domaine important des mathématiques ; en dehors de ses aspects théoriques particulièrement intéressants, cette science offre un champ d'applications extrêmement vaste : étude de la démographie, prévisions météorologiques, sciences économiques, physique statistique… et médecine où des équipes mixtes, médecins-statisticiens, conduisent des études de « pedigrees » dans le cadre d'études génétiques.
L'illustration de ce chapitre fait référence à une utilisation des statistiques dans le domaine du commerce, ici vestimentaire. Lorsque l'on commercialise un vêtement, des chaussures, etc, il convient de fabriquer le nombre d'articles de manière réfléchie afin de répondre à la demande, donc de couvrir toutes les tailles, mais en évitant des fabrications inutiles. Il est clair qu'ici la taille moyenne est insuffisante et que l'ensemble des caractéristiques des séries statistiques doit être utilisé pour prévoir le nombre d'articles à confectionner.

Vérifier ses acquis

1 **1. a. b. c. d.** un seul tableau pour ces questions :

Classes	[59 ; 61]	[62 ; 64]	[65 ; 67]	[68 ; 70]	[71 ; 73]	[74 ; 76]	[77 ; 79]	[80 ; 82]	[83 ; 85]
Effectifs	1	2	5	4	9	4	3	1	1
Effectifs cumulés	1	3	8	12	21	25	28	29	30
Fréquences	0,03	0,07	0,17	0,13	0,3	0,13	0,1	0,03	0,03
Fréquences cumulées	0,03	0,1	0,27	0,4	0,7	083	0,93	0,96	0,99

2. La médiane est entre la 15^{e} et la 16^{e} valeur soit dans l'intervalle [71 ; 73].
3. a. b.
4. On peut la calculer avec les centres des intervalles ce qui donne 71,3 ; ou bien avec les valeurs donnée ce qui donne alors 71,27.

2 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Vrai. **e.** Faux.

3 **a.** L'étendue pour le poids est $85 - 60 = 25$ et pour la taille $190 - 160 = 30$.

b.

Tailles	160	161	164	165	167	168	169	170	171	172	174	175	176	177	178	179	180	181	185	190
Effectifs	1	1	1	1	1	1	1	3	1	2	1	3	1	2	1	1	2	2	3	1
Effectifs cumulés	1	2	3	4	5	6	7	10	11	13	14	17	18	20	21	22	24	26	29	30

c. Le premier quartile est la 8^{e} valeur, le troisième quartile est la 23^{e} valeur, ce qui donne pour le poids 67 et 75, et pour la taille 170 et 180.

d. Le profil moyen est de 71,3 kg et de 174,4 cm.

4 **a.** Le premier quartile est 9, le troisième quartile est 14 donc l'écart interquartile est 3.

b. La médiane vaut 12.

c. La moyenne vaut 11,72.

Activités d'introduction

Activité 1

Objectif : Le premier objectif est de revoir le vocabulaire et les notions de seconde telles que : les effectifs, les effectifs cumulés, les fréquences, les fréquences cumulées, les quartiles, l'étendue, l'écart interquartile et la médiane. Le second objectif est d'introduire les déciles et le diagramme en boite.

1

Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	14	23	31	7	57	10	8
Effectifs cumulés	14	37	68	75	132	142	150
Fréquences (en %)	9,3	15,3	20,7	4,7	38	6,7	5,3
Fréquences cumulées	9,3	24,6	45,3	50	88	94,7	100

2 **a.** On appelle premier quartile, noté Q_1, le plus petit nombre de pièces à partir duquel on peut être sûr qu'au moins 25 % des familles habitent dans un logement comportant un nombre de pièces inférieur ou égal à ce nombre Q_1.

On appelle médiane, notée M, la valeur qui partage la série en 2 groupes (ensembles, parties) de même effectif tels que :

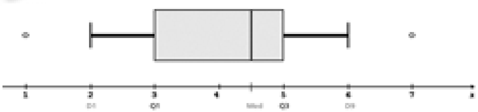
- l'un des groupes contient les données inférieures à cette valeur ;
- l'autre groupe contient les données supérieures à cette valeur.

On appelle, troisième quartile, noté Q_3, le plus petit nombre de pièces à partir duquel on peut être sûr qu'au moins 75 % des familles habitent dans un logement comportant un nombre de pièces inférieur ou égal à ce nombre Q_3.

b. $M = 4{,}5$; $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 5$.

3 **a.** $D_1 = 2$. **b.** $D_9 = 6$.

4 **a.**



b. Les deux morceaux correspondent à 50 % de l'effectif, mais ils n'ont pas la même taille.

5 **a.** L'étendue vaut ici 6 et l'écart interquartile 2.

b. On peut définir l'écart inter décile qui vaut ici 4.

6 La médiane montre la valeur qui coupe l'effectif total en deux et l'écart interquartile montre entre quelles valeurs on obtient la moitié de l'effectif.

Activité 2

Objectif : le but est de faire revoir la moyenne et de faire découvrir la variance et l'écart type. Ces notions étant introduites pas à pas avec des calculs faits à la main.

Pour Pascale on a :

Mois	1	2	3	4	5	6	Moyennes
Chiffres d'affaires	1	2	2	4	3	6	$\bar{x} = 3$
Écarts à la moyenne	–2	–1	–1	1	0	3	0
(écarts à la moyenne)^2	4	1	1	1	0	9	V = 16/6
							$\sigma = 1{,}6$

Pour Virginia on a :

Mois	1	2	3	4	5	6	Moyennes
Chiffres d'affaires	2	3	2	2	6	3	$\bar{x} = 3$
Écarts à la moyenne	–1	0	–1	–1	3	0	0
(écarts à la moyenne)^2	1	0	1	1	9	0	V = 2
							σ = 1,4

Pour Roger on a :

Mois	1	2	3	4	5	6	Moyennes
Chiffres d'affaires	6	4	3	2	1	2	$\bar{x} = 3$
Écarts à la moyenne	3	1	0	–1	–2	–1	0
(écarts à la moyenne)^2	9	1	0	1	4	1	V = 16/6
							σ = 1,6

Pour les questions *a* et *b*, on ne peut pas conclure par contre dès la question *c*, on sait que Virginia a gagné le séjour. La différence entre la variance et l'écart type provient des unités car la variance est un carré d'euros alors que l'écart type est bien en euros.

Travaux pratiques

TP Algorithmique Algorithmes de tris

1 **1. a.** T = [3 ; 6 ; 1 ; 7] On compare 3 et 6 et on n'échange pas.
T = [3 ; 6 ; 1 ; 7] On compare 6 et 1 et on échange pour obtenir :
T = [3 ; 1 ; 6 ; 7] On compare 6 et 7 et on n'échange pas.
b. Un troisième parcours est nécessaire car on peut s'apercevoir que le tableau n'est pas encore trié.
T = [3 ; 1 ; 6 ; 7] On compare 3 et 1 et on échange pour obtenir :
T = [1 ; 3 ; 6 ; 7] On compare 3 et 6 et on n'échange pas.
T = [3 ; 1 ; 6 ; 7] On compare 6 et 7 et on n'échange pas.
c. On peut s'apercevoir que le tableau est trié, donc un quatrième parcours ne semble pas nécessaire.
d. Algorithmiquement, on peut se rendre compte qu'un tableau est trié lorsqu'il n'y a eu aucun échange pendant le parcours du tableau. Il est donc nécessaire de parcourir le tableau une quatrième fois afin de vérifier qu'il est bel et bien trié.

2 **a.** Ligne 3 : au début, on présume que le tableau n'est pas ordonné.
Ligne 4 : on effectue la procédure de tri tant que le tableau n'est pas en ordre.
Ligne 5 : on suppose le tableau en ordre et on effectue un parcours du tableau (lignes 6 à 11).
Ligne 9 : si jamais un échange est effectué à la ligne 8, c'est que le tableau n'était finalement pas en ordre, il faut donc l'indiquer.
b. En JavaScript les indices d'un tableau commencent à 0.
Pour la valeur supérieure, il faut regarder la ligne 7, où on peut voir qu'un indice utilisé est $i + 1$, qui ne doit pas dépasser N – 1 (qui est le rang de la dernière valeur stockée dans le tableau T). Ainsi, $i + 1 \leqslant N - 1 \Leftrightarrow i \leqslant N - 2$.
c. L'échange ne peut pas avoir lieu car après avoir exécuté l'instruction T[*i*] = T[*i*+1], on a perdu la valeur contenue dans T[*i*]. T[*i*] et T[*i*+1] contiennent alors la même valeur, celle contenu initialement dans T[*i*+1]. Il faut donc au préalable sauvegarder la valeur de T[*i*] :
`x = T[i] ;` //sauvegarde de la valeur dans la variable *x*
`T[i] = T[i+1] ;` //on stocke la valeur de T[*i*+1] dans T[*i*]
`T[i+1] = x ;` // on stocke la valeur sauvegardée dans T[*i*+1]

3 **1. a.** Deuxième parcours
T = [1 ; 6 ; 7 ; 3] L'élément d'indice 1 est 6 plus petit que 7. On n'échange pas.
T = [1 ; 6 ; 7 ; 3] L'élément d'indice 1 est 6. On échange 6 et 3 car 3 < 6 et on obtient :
T = [1 ; 3 ; 7 ; 6]
Troisième parcours :
T = [1 ; 3 ; 7 ; 6] L'élément d'indice 2 est 7. On échange 7 et 6 et on obtient :
T = [1 ; 3 ; 6 ; 7]
b. Un quatrième parcours n'est pas nécessaire car l'indice suivant serait 3 et qu'on ne peut pas comparer avec un élément d'indice supérieur à 3 puisque l'indice maximum de ce tableau est 3.

c. Il est juste nécessaire d'effectuer N – 1 parcours.
2. a. La ligne 3 se complète en `k<=N-2` car entre 0 et N – 2 inclus, il y a bien N – 1 valeurs.
b. La ligne 4 se complète en `j<=N-1`.
c. Il ne sert à rien de comparer la valeur de T[k] avec les valeurs d'indices inférieurs ou égaux à k car on sait d'après les étapes précédentes que ce sont nécessairement des valeurs inférieures, et de plus déjà triées.

TP TICE Effets de structures

Question préliminaire
Notons t, le pourcentage d'évolution entre les années n et $n + 1$.

On a donc $x + x\dfrac{t}{100} = y$, c'est-à-dire en résolvant l'équation : $t = 100\left(\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

1. a. Le salaire moyen à l'année n est donné par la formule (que l'on stocke dans par exemple C17)
« =(B3*C3+B4*C4+B5*C5)/(B3+B4+B5) »
ou encore
« =SOMMEPROD(B3:B5;C3:C5)/(B3+B4+B5) »
À l'année n + 1, la formule est (que l'on stocke dans F17)
« =SOMMEPROD(E3:E5;F3:F5)/(E3+E4+E5) ».
b. la formule est « =(F17/C17-1)*100 ».
2. @ Voir le fichier disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee
3. a. Idem

	Total	Moyennes		Total	Moyennes		Evolution
C	40	1502,50		36	1490,28		-0,81
B	42	1792,86		41	1791,46		-0,08
A	19	2552,63		20	2540,00		-0,49
Global	101	1820,79		97	1834,02		0,73

4. a Ces résultats apparemment contradictoires peuvent s'expliquer par l'évolution des effectifs dans chacune des classes socio-professionnelles : les effectifs diminuent dans les catégories B et C, qui perçoivent un salaire moindre mais augmentent dans la catégorie A, qui perçoit un salaire plus élevé.
b. Le mode de calcul détaillé peut profiter aux salariés, qui pourraient désirer un salaire plus important, en indiquant qu'il y a eu une baisse du salaire moyen ; le mode global serait favorable au patron, en indiquant au contraire que non, le salaire moyen a bien augmenté dans l'entreprise.
c. Personne ! On fait dire aux chiffres ce que l'on veut.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** Faux **b.** Faux **c.** Vrai **d.** Faux **e.** Vrai

2 **1.** c. **2.** a. **3.** a. **4.** b.

3 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Vrai.

4 **1.** a. **2.** b. **3.** a. **4.** b.

5 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai.

6 **1.** c. **2.** d. **3.** c.

7 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux.

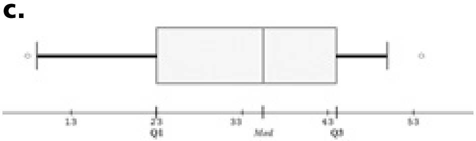
8 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

10 **a.**

Caractéristiques de position	d_1	Q_1	M	Q_3	d_9
Nids de roitelets	20,3	20,9	21	22	22,1
Nids de fauvettes	20,9	22	23,1	23,8	24

b.

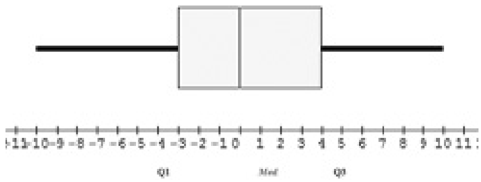
11 **a.** $d_1 = 9$; $Q_1 = 23$; $M_e = 35{,}5$; $Q_3 = 44$ et $d_9 = 50$
b. $\bar{x} \approx 33$ et $\sigma \approx 13{,}95$
c.



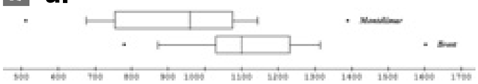
13 Voir les exercices précédents.

15 **1. a.** $Q_1 = -3$; $M = 0$; $Q_3 = 4$
b. $\bar{x} \approx 0{,}74$ et $\sigma \approx 4{,}8$

2.



17 **a.**



b. On constate qu'il pleut nettement plus sur Brest que sur Montélimar.

S'entraîner

18

$$\frac{320 \times 8 + 240 \times 13 + 255 \times 6}{320 + 240 + 255} = \frac{7210}{815} \approx 8{,}8.$$

Un élève du lycée a lu en moyenne 9 livres en un an.

19 **1.** • École 1 :
Effectif total : 150 ; moyenne : $\overline{x}_1 \approx 2{,}84$ mois.
• École 2 :
Effectif total : 177 ; moyenne : $\overline{x}_2 \approx 3{,}89$ mois.
• École 3 :
Effectif total : 137 ; moyenne : $\overline{x}_3 \approx 3{,}11$ mois.

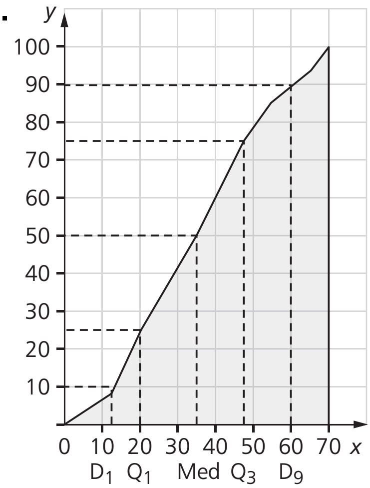
2. $\overline{x} = \dfrac{150 \quad \overline{x}_1 + 177 \quad \overline{x}_2 + 137 \quad \overline{x}_3}{150 + 177 + 137}$
$\approx 3{,}32$ mois.

20 **1.**

Âge (en années)	1	5	12	20	35
Fréquences cumulées croissantes (en %)	0	3	8	25	50
Age (en années)	45	55	65	70	
Fréquences cumulées croissantes (en %)	71	86	94	100	

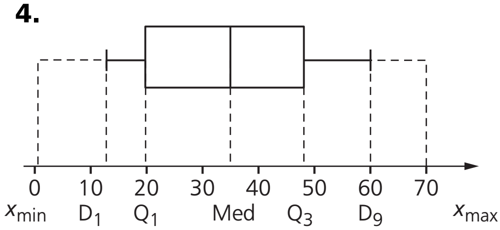
2. a. 50% des patients ont moins de 35 ans ; la classe médiane de la série est donc [35 ; 45[.
b. 8 % des patients ont moins de 12 ans et 25 % ont moins de 20 ans; la classe contenant le 1er décile est donc [12 ; 20[.
25 % des patients ont moins de 20 ans ; la classe contenant le 1er quartile est donc [20 ; 35[.
71 % des patients ont moins de 45 ans et 86 % ont moins de 55 ans; la classe contenant le 3e quartile est donc [45 ; 55[.
86 % des patients ont moins de 55 ans et 94 % ont moins de 65 ans; la classe contenant le 9e décile est donc [55 ; 65[.

3. a.



b. Par lecture graphique, on a : $D_1 = 13$ ans, $Q_1 = 20$ ans, $M = 35$ ans, $Q_3 = 48$ ans et $D_9 = 60$ ans.

4.



21 @ Le fichier complet est disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.
1. a. La ligne 3 est nécessaire car on ne peut faire des calculs des caractéristiques que sur une liste ordonnée.
b. Le rang est $\dfrac{N+1}{2} - 1$ puisque tous les rangs sont décalés d'une unité. La ligne 7 se complète alors : `m = T[(N+1)/2-1]`;
c. Lorsque N est pair, la médiane est la moyenne des termes de rangs $\dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{N}{2} + 1$. lorsque la série est numérotée à partir de 1. Lorsqu'elle est numérotée à partir de 0, il faut alors faire la moyenne des termes de

rangs $\frac{N}{2} - 1$ et $\frac{N}{2}$. La ligne 9 se complète alors : `m = (T[N/2-1]+T[N/2])/2;`

d. Math.ceil() ; est une instruction mathématique permettant de renvoyer le plus petit entier supérieur ou égal à la valeur donnée en paramètre ; c'est l'arrondi supérieur. Pour le troisième quartile et les déciles, la syntaxe est la suivante :

```
q3 = Math.ceil(N*3/4)-1;
Println("Le troisième quartile est : "+T[q3]);
d1 = Math.ceil(N*1/10)-1;
Println("Le premier décile est : "+T[d1]);
d9 = Math.ceil(N*9/10)-1;
Println("Le neuvième décile est : "+T[d9]);
```

2. a. A(T[0],2) ; B(T[d1], 2) ; C(T[q1], 1) ; D(T[q1], 3) ; E(T[q3], 1) ; F(T[q3], 3) ; G(T[d9], 2) ; H(T[N-1],2).
K(m,1) et L(m,3)

b. Les points I et J sont les milieux de [CD] et [EF].

c. Voir fichier téléchargeable.

22 **1.**

Salaire mensuel (× 103 €)	[1 ; 1,2]	[1,2 ; 1,5]	[1,5 ;1,7]	[1,7 ; 2]	[2 ; 2,5]	[2,5 ; 3]
Effectif	120	150	220	360	175	75

2.

Salaire mensuel (× 103 €)	1	1,2	1,5	1,7	2	2,5	3
Effectif cumulé croissant	0	120	270	490	850	1025	1100

L'effectif est égal à : 1 100.

$\frac{25}{100} \times 1\,100 = 275$, donc le premier quartile Q_1 est compris entre 1,5 et 1,7.

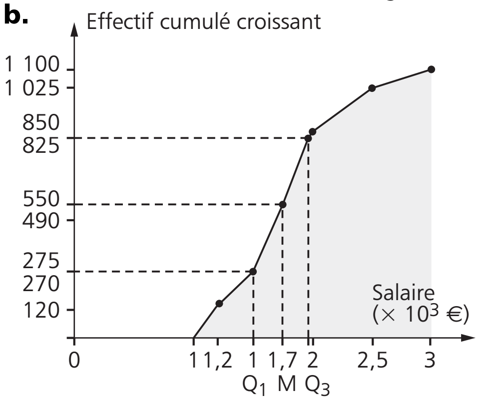
$\frac{50}{100} \times 1\,100 = 550$, donc la médiane M est comprise entre 1,7 et 2.

$\frac{75}{100} \times 1\,100 = 825$, donc le troisième quartile Q_3 est compris entre 1,7 et 2.

a. 275 = 270 + 5. Il faut donc ajouter un demi carreau en colonne après 1,5. D'où : $Q_1 = 1,5$.

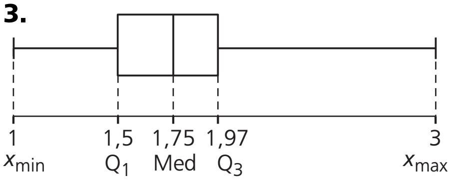
550 = 490 + 60. Il faut donc ajouter 6 carreaux en colonne après 1,7. D'où : M = 1,75.
825 = 490 + 335. Il faut donc ajouter 33,5 carreaux en colonne après 1,7. D'où : $Q_3 = 1,97$.

b.



$Q_1 = 1,5$; $M = 1,75$; $Q_3 = 1,97$

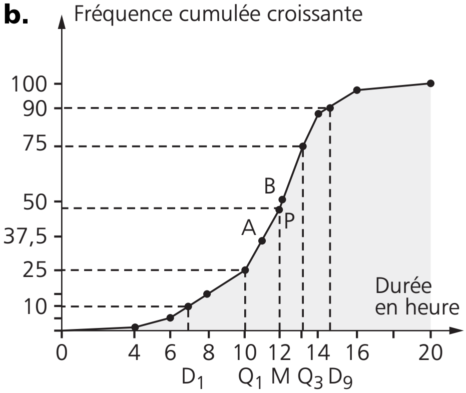
3.



23 **1. a.**

Durée (en heures)	0	4	6	8	10	11
Fréquence cumulée croissante (en %)	0	1,5	6	14	24,5	37,5
Durée (en heures)	12	13	14	16	20	
Fréquence cumulée croissante (en %)	52	72,5	87,5	97	100	

b.



3. a. La fréquence cumulée de 6 est égale à 6 % et celle de 8 à 14 %, donc la fréquence cumulée de 10 % est atteinte pour une valeur D_1 comprise entre 6 et 8.

La fréquence cumulée de 10 est égale à 24,5 % et celle de 11 à 37,5 %, donc la fréquence cumulée de 25 % est atteinte pour une valeur Q_1 comprise entre 10 et 11.

La fréquence cumulée de 13 est égale à 72,5 % et celle de 14 à 87,5 %, donc la fréquence cumulée de 75 % est atteinte pour une valeur Q_3 comprise entre 13 et 14.

La fréquence cumulée de 14 est égale à 87,5 % et celle de 16 à 97 %, donc la fréquence cumulée de 90 % est atteinte pour une valeur D_3 comprise entre 14 et 16.

b. • C(6 ; 6) ; Q(D_1 ; 10) ; D(8 ; 14).

D'où : $\overrightarrow{CQ}(D_1 - 6 ; 4)$ et $\overrightarrow{CD}(2 ; 8)$.

$\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (D_1 - 6) \times 8 = 4 \times 2$

$\Leftrightarrow D_1 = 7$.

• E(10 ; 24,5) ; R(Q_1 ; 25) ; A(11 ; 37,5).

D'où : $\overrightarrow{ER}(Q_1 - 10 ; 0,5)$ et $\overrightarrow{EA}(1 ; 13)$.

$\overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{EA}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (Q_1 - 10) \times 13 = 1 \times 0,5$

$\Leftrightarrow Q_1 = \dfrac{130,5}{13} = 10$.

• F(13 ; 72,5) ; S(Q_3 ; 75) ; G(14 ; 87,5).

D'où : $\overrightarrow{FS}(Q_3 - 13 ; 2,5)$ et $\overrightarrow{FG}$ (1 ; 15).

$\overrightarrow{FS}$ et $\overrightarrow{FG}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (Q_3 - 13) \times 15 = 1 \times 2,5$.

$\Leftrightarrow Q_3 = \dfrac{197,5}{15} = 13,2$.

• G(14 ; 87,5) ; T(D_9 ; 90) ; H(16 ; 97)

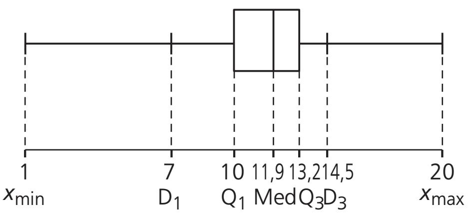
D'où : $\overrightarrow{GT}(D_9 - 14 ; 2,5)$ et $\overrightarrow{GH}(2 ; 9,5)$.

$\overrightarrow{GT}$ et $\overrightarrow{GH}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (D_9 - 14) \times 9,5 = 2 \times 2,5$.

$D_9 = \dfrac{138}{9,5} = 14,5$.

4.



24 **1. a.** L'effectif total est égal à 220.

La médiane est donc égale à la moyenne des prix des 110^e^ et 111^e^ articles, les prix des articles étant classés dans l'ordre croissant : M = 5 €.

b.

Montant	1	2	5	10
Effectif cumulé croissant	34	104	197	220

c. $\dfrac{50}{100} \times 220 = 110$, donc $Q_2 = 5$.

d. $Q_2 = M$.

2. a. L'effectif total est égal à 220.

La médiane est donc égale à la moyenne des prix des 110^e^ et 111^e^ articles, les prix des articles étant classés dans l'ordre croissant :

$M = \dfrac{2 + 5}{2} = 3,5$ €.

b.

Montant	1	2	5	10
Effectif cumulé croissant	34	104	197	220

c. $\dfrac{50}{100} \times 220 = 110$, donc $Q_2 = 2$.

d. $Q_2 \neq M$.

3) $M = Q_2$ sauf lorsque, N étant pair, les $\left(\dfrac{N}{2}\right)^2$ et $\left(\dfrac{N}{2} + 1\right)^2$ valeurs sont différentes.

25 $\bar{x}_a = 6,4375$; $V_a = 4,6836$; $S_a = 2,1642$.

Centre des classes : 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11.

$\bar{x}_b = 7,4375$; $V_b = 4,6836$; $S_b = 2,1642$.

26 **1 a.** Âge moyen : 47,4 ans.

b. variance : 373,15 ; écart-type : 19,3 ans.

27 **1. a.** 1 000 personnes ont été interrogées.

b. Âge moyen : 58,27 ans.

2. $V = \dfrac{1}{n} \sum x^2 - (\bar{x})^2$

$= \dfrac{1}{1000} \times 3\,472\,400 - 58,27^2 = 77,0071$;

$S = \sqrt{V} = \sqrt{77,0071} = 8,775368938$.

L'écart type s est noté σx sur cette calculatrice.

28 **a.** Moyenne : 98,8 dag ; variance : 7,246 ; écart-type : 2,7 dag.

b. Il faut que au moins 90 % des paquets de l'échantillon, soit au moins 135 paquets, aient une masse comprise entre 93,4 dag et 104,2 dag. On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants puis on trace la courbe des effectifs cumulés croissants pour déterminer graphiquement le nombre de paquets dont la masse est comprise entre 93,4 dag et 104,2 dag. 9 paquets environ ont une masse inférieure à 93,4 dag et 147 paquets environ ont une masse inférieure à 104,2 dag. Il y a donc environ 138 paquets de l'échantillon dont la masse est comprise entre 93,4 dag et 104,2 dag. L'organisme de contrôle émettra donc un avis favorable.

29 **1. a.** Série S' : centre des classes : 2,5 ; 7,5 ; 15 ; effectif total : 429 ; $\bar{x}' = 11{,}69$.
Série S'' : centre des classes : 25 ; 35 ; 45 ; effectif total : 371 ; $\bar{x}'' = 29{,}53$.

b. $\bar{x} = \dfrac{429 \times 11{,}69 + 371 \times 29{,}53}{800} = 19{,}96.$

Chaque abonné a lu en moyenne 20 livres l'année dernière.

2. a. V' = 19,40 ; V'' = 45,16 ; V = 110,63.

b. $\dfrac{N'V' + N''V''}{N' + N''} = \dfrac{429 \times 19{,}40 + 371 \times 45{,}16}{800}$
$= 31{,}35 \neq V.$

30 **a.** Série A : moyenne : 11 ; écart-type : 1,31.
Série B : moyenne : 11 ; écart-type : 4.
b. Série A : médiane : 11 ; écart interquartile: 12 – 10 = 2.
Série B : médiane : 11 ; écart interquartile : 15 – 7 = 8.
c. En considérant le couple (moyenne ; écart-type) ou le couple (médiane ; écart interquartile), on peut conclure que les séries A et B ont les mêmes caractéristiques centrales et que les valeurs de la série B sont plus dispersées que celles de la série A. L'élève A est donc plus régulier que l'élève B.

31 **1. a.** $\bar{x}_1 = 2{,}33$; $\bar{x}_2 = 2{,}26$.
b. $\bar{x}_{1A} = 2{,}56$; $\bar{x}_{1B} = 1{,}33$.
c. $\bar{x}_{2A} = 2{,}67$; $\bar{x}_{2B} = 1{,}4$.
2. a. $\bar{x}_{2A} > \bar{x}_{1A}$ et $\bar{x}_{2B} > \bar{x}_{1B}$; donc le directeur de la zone 2 dit la vérité.
$\bar{x}_1 > \bar{x}_2$; donc le directeur de la zone 1 dit la vérité.
b. Le paradoxe apparent s'explique par la différence des effectifs entre les deux zones et entre les deux départements.

32 **1. a.** Moyenne : 11,2 (soit 11 à 0,5 point près).

b.

Note	2	3	4	6	7	8
Effectif	1	1	2	2	3	3
Effectif cumulé croissant	1	2	4	6	9	12
Note	9	10	11	12	13	14
Effectif	4	4	1	2	3	2
Effectif cumulé croissant	16	20	21	23	26	28
Note	15	16	17	18	19	20
Effectif	4	3	1	2	1	1
Effectif cumulé croissant	32	35	36	38	39	40

La médiane est la moyenne des 20^e^ et des 21^e^ notes, soit : 10,5.
c. Variance : 20,91 ; écart-type : 4,57.
2.

Groupe	E	D	C	B	A
Centre de classe	2	6	10	14	18
Effectif	2	7	12	11	8

a) Moyenne : 11,6.
b. Variance : 20,64 ; écart-types : 4,54.

Note	4	8	12	16	20
Effectif cumulé croissant	2	9	21	32	40

Classe médiane : [8 ; 12]
Les points de coordonnées (8 ; 9), (M ; 20), (12 ; 21) sont alignés.
On obtient une interpolation linéaire : M = 11,67.
3.

Groupe	Recalé	Oral	P	AB	B	TB
Centre de classe	4	8	11	13	15	18
Effectif	9	7	5	5	6	8

a. Moyenne : 11,15.
b. Variance : 25,28 ; écart-types : 5,03.

Note	8	10	12	14	16	20
Effectif cumulé croissant	9	16	21	26	32	40

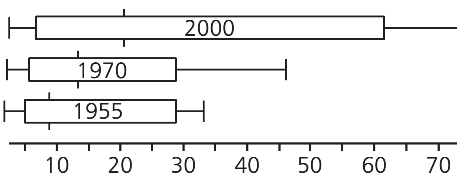
Classe médiane : [10 ; 12]
Les points de coordonnées (10 ; 16), (M ; 20), (12 ; 21) sont alignés.
On obtient ainsi par interpolation linéaire : M = 11,6.

4. La moyenne du deuxième regroupement est plus proche de la moyenne réelle calculée à la question 1) que la moyenne du premier regroupement car le découpage est plus fin. En revanche, l'écart-types est plus élevé, ce qui est dû aux classes extrêmes d'amplitude importante, notamment la classe [0 ; 8[. Quant à la médiane, l'interpolation linéaire considère qu'il y a une répartition régulière des notes dans la classe médiane alors que pour le premier regroupement, dans la classe [8 ; 12[, il y a 11 notes sur 12 inférieures ou égales et dans le deuxième regroupement, dans la classe [10 ; 12[, il y a 4 notes sur 5 égales à 10.

33 **a.**

Superficie (x 10^3 ha)	10	35	50	100	maxi
Effectif cumulé croissant (en 1995)	1 299	2 130	2 213	2 288	2 308
Effectif cumulé croissant (en 1970)	702	1 341	1 456	1 557	1 587
Effectif cumulé croissant (en 2000)	254	463	484	606	684

Pour 1995 : $D_1 = 1{,}78$ ha ; $Q_1 = 4{,}44$ ha ; $M = 8{,}88$ ha ; $Q_3 = 23$ ha ; $D_9 = 33{,}41$ ha.
Pour 1970 : $D_1 = 2{,}26$ ha ; $Q_1 = 5{,}65$ ha ; $M = 13{,}58$ ha ; $Q_3 = 29{,}10$ ha ; $D_9 = 46{,}39$ ha.
Pour 2000 : $D_1 = 2{,}69$ ha ; $Q_1 = 6{,}73$ ha ; $M = 20{,}53$ ha ; $Q_3 = 61{,}89$ ha ; $D_9 = 100$ ha.

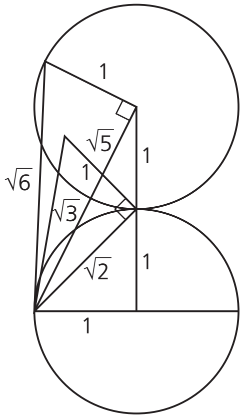


b. • Le nombre d'exploitation agricoles a diminué : 2308 en 1995, 1587 en 1970 et 684 en 2000.

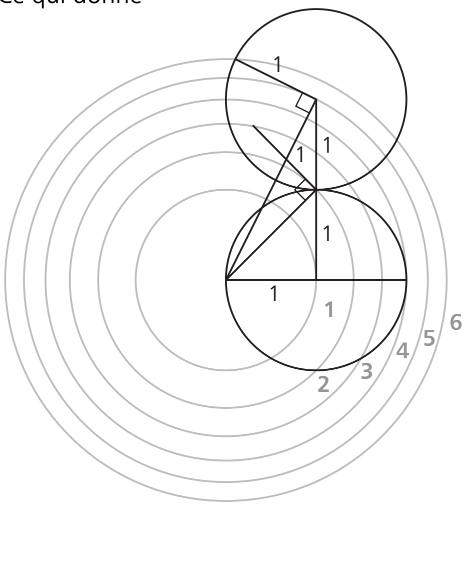
• Le nombre de petites exploitations agricoles a diminué mais il a peu évolué en pourcentage. 25 % des exploitations agricoles avaient une superficie inférieure à : 4,44 ha en 1995 ; 5,65 ha en 1970 ; 6,73 ha en 2000.

• La proportion des grandes exploitations agricoles a beaucoup augmenté. 25 % des exploitations agricoles avaient une superficie supérieure à : 23 ha en 1995 ; 29,10 ha en 1970 ; 61,89 ha en 2000. Et 10 % des exploitations agricoles avaient une superficie supérieure à : 33,41 ha en 1995 ; 46,39 ha en 1970 ; 100 ha en 2000.

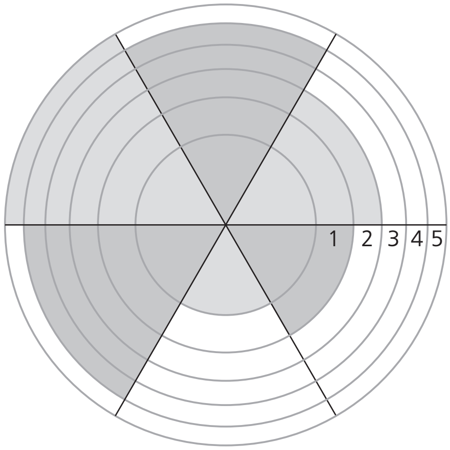
34 Calcul du rayon d'un secteur d'aire double :
Le secteur « unité » a pour rayon r_1, le secteur d'aire double a pour rayon :
$r_2 = 2\frac{1}{n}\pi r_1^2 = \frac{1}{n}\pi r_2^2$. (On écrit cette égalité dans le cas de n secteurs.) Ce qui donne $r_2 = \sqrt{2}\, r_1$. Ce calcul s'applique pour un secteur d'aire k fois l'aire du secteur unité. On doit construire $\sqrt{k}$ pour k entier naturel.
Construction de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}$ à la règle et au compas :



Ce qui donne



En divisant en six secteurs, on trouve



35 Série 1 :

- L'étendue est 15 – 2 = 13 (et non 10),
- 25 % des valeurs sont entre 7 et 9 (et non entre 7 et 13).

Comparaison des deux séries

- La série 2 n'est pas plus hétérogène que la série 1 car son écart interquartile est de 8 – 5 = 3 (50 % des valeurs de la série 2 se situent entre 5 et 8 et 80 % de la série entre $D_1 = 4$ et $D_9 = 10$), l'écart interquartile de la série 1 est supérieur, il vaut 9 – 5 = 4 (50 % des valeurs de la série 1 se situent entre 5 et 9 et 80 % de la série entre $D_1 = 3$ et $D_9 = 13$). Les valeurs de la série 2 sont donc plus concentrées autour de la médiane même si la série connaît des valeurs extrêmes plus éloignées de la médiane que la série 1.
- Pour les deux séries, 25 % des valeurs sont comprises entre 5 et 7 mais les diagrammes en boîtes ne permettent pas de savoir comment sont réparties ces 25 % (25 % des valeurs de la série 1 peuvent être égaux à 5 et 25 % des valeurs de la série 2 égaux à 7).

Remarque : on peut aussi dire que l'effectif de la série 2 est supérieur à celui de la série 1 car la boîte de la série 2 est plus large.

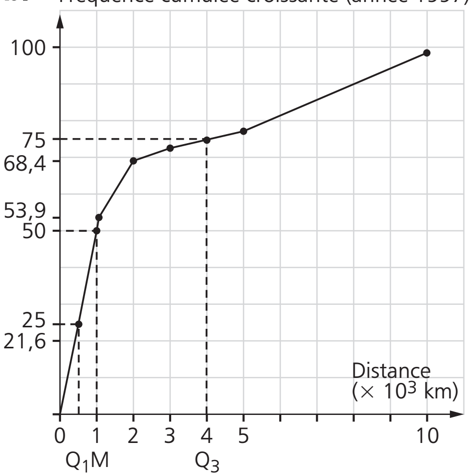
36 **1. a.** Année 1997 :

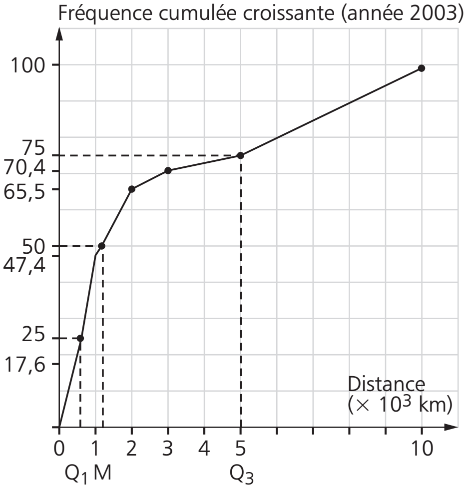
Distance ($\times 10^3$ km)	0,5	1	2	3	5	10	maxi
Fréquence cumulée croissante (en %)	21,6	53,9	68,4	72,8	77,2	98,6	100

Année 2003 :

Distance ($\times 10^3$ km)	0,5	1	2	3	5	10	maxi
Fréquence cumulée croissante (en %)	17,6	47,4	65,5	70,4	75	98,6	100

b.

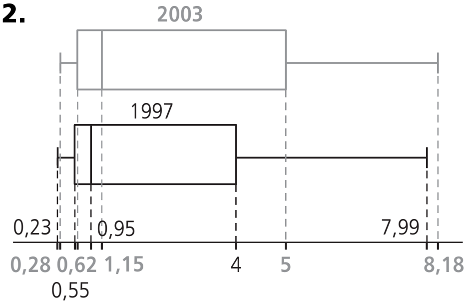




c. En 1997 : $Q_1 = 0{,}55$; M = 0.95 ; $Q_3 = 4$.
En 2003 : $Q_1 = 0{,}62$; M = 1,15 ; $Q_3 = 5$.

d. Pour construire les diagrammes en boîtes, on détermine les premiers et neuvièmes déciles car on ne connaît pas les valeurs maximales :
En 1997 : D_1 : = 0,23 et $D_9 = 7{,}99$.
En 2003 : D_1 : 0,28 et $D_9 = 8{,}18$.

2.



En 2003, les voyageurs ont parcouru des distances plus longues qu'un 1997. Tous les paramètres de position de 2003 sont supérieurs aux paramètres de position correspondants en 1997.

Le quart des voyageurs qui a parcouru le moins de kilomètres est assez similaire sur les deux périodes : en 1997, 25 % des voyageurs ont parcouru moins de 550 km et en 2003, 25 % des voyageurs ont parcouru moins de 620 km.

L'écart augmente avec les distances, mais reste encore assez faible pour le deuxième quart des voyageurs : en 1997, 25 % des voyageurs ont parcouru entre 550 km et 950 km, en 2003, 25 % des voyageurs ont parcouru entre 620 km et 1150 km.

En revanche, les distances parcourues par l'autre moitié des voyageurs sont nettement plus longues en 2003 qu'en 1997 : en 1997, 25 % des voyageurs ont parcouru entre 950 km et 4 000 km, alors qu'en 2003, 25 % des voyageurs ont parcouru entre 1 150 km et 5000 km.

De même en 1997, 25 % des voyageurs ont parcouru entre 4 000 km et 7 990 km, alors qu'en 2003, 25 % des voyageurs ont parcouru entre 5 000 km et 8 180 km

37 **1. a.** Série A

Taille	3,2	3,3	3,7	3,8	3,9	4
Effectif	3	4	4	1	2	1
Taille	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
Effectif	4	1	2	1	1	1
Taille	4,7	4,9	5	5,1	5,2	5,3
Effectif	1	3	2	1	3	1
Taille	5,4	5,6	5,9			
Effectif	2	1	1			

Série B :

Taille	3,2	3,7	3,9	4,1	4,2	4,3	4,7
Effectif	1	1	4	1	1	2	2
Taille	4,8	4,9	5	5,1	5,3	5,4	5,5
Effectif	2	3	1	3	3	3	4
Taille	5,6	5,7	5,8	5,9	6	6,1	6,2
Effectif	1	1	1	2	1	1	2

$\overline{x}_A = 4{,}32$ et $\overline{x}_B = 5{,}0225$.

b. $\overline{x}_B = 1.16\,\overline{x}_A$

on peut donc dire que la taille moyenne augmente de 16 % avec l'engrais. L'annonce est donc justifiée.

c. La taille double tous les dix jours, donc en trente jours la taille est multipliée par 8.

Taille moyenne des tiges du groupe A : 34,56 cm.

Taille moyenne des tiges du groupe B : 40,18 cm.

2. a. $S_A = 0{,}74$ cm et $S_B = 0{,}75$ cm.

b. Série A : (4,32 ; 0,74) ;

Série B : (5,0225 ; 0,75).

La hauteur de tige moyenne est plus élevée dans le groupe avec engrais et les dispersions sont pratiquement égales ; on peut conclure que cet engrais est efficace.

3. a. $Q_{1A} = 3{,}7$; $M_A = 4{,}25$; $Q_{3A} = 4{,}9$.

$Q_{1B} = 4{,}3$; $M_B = 5{,}1$; $Q_{3B} = 5{,}5$.

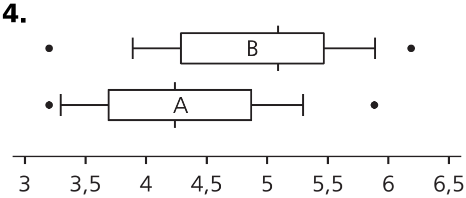
b. $Q_{3A} - Q_{1A} = 1{,}2$; $Q_{3B} - Q_{1B} = 1{,}2$.

Série A : (4,25 ; 1,2) ;

Série B : (5,1 ; 1,2).

La hauteur de tige médiane est plus élevée dans le groupe avec engrais et les écarts interquartiles sont égaux.

4.



5. On peut en conclure que cet engrais est efficace. Les hauteurs de tige sont plus élevées avec l'engrais et la dispersion reste la même avec engrais ou sans engrais.

Pour aller plus loin

42 $$\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i-\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i=p}(n_i x_i - n_i\bar{x})$$
$$= \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i - \sum_{i=1}^{i=p} n_i\bar{x} = N\bar{x} - \bar{x}\sum_{i=1}^{i=p} n_i$$
$= N\bar{x} - N\bar{x} = 0.$

43 **1.** $\bar{x} = 10,4$.
M est la moyenne des 19^e et 20^e notes, donc M = 11.

2.

x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i-\bar{x}$	–5,4	–4,4	–3,4	–2,4	–1,4	–0,4	0,6	1,6
x_i- M	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
$(x_i-\bar{x})^2$	29,16	19,36	11,56	5,76	1,96	0,16	0,36	2,56
$(x_i-$ M$)^2$	36	25	16	9	4	1	0	1
Effectif	4	4	4	2	3	1	4	6

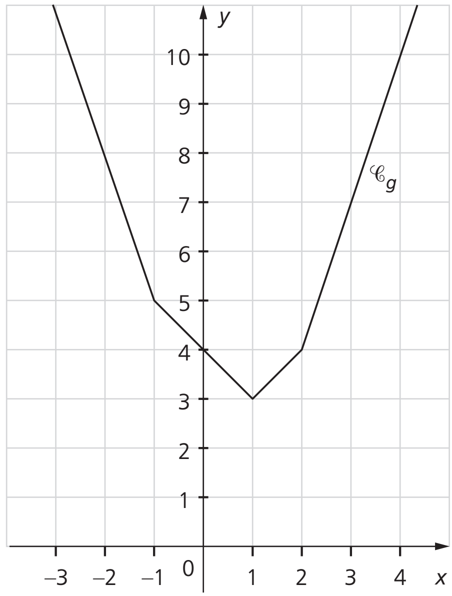
x_i	13	14	15	16	17	18	19
$x_i-\bar{x}$	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6	7,6	8,6
x_i- M	2	3	4	5	6	7	8
$(x_i-\bar{x})^2$	6,76	12,96	21,16	31,36	43,56	57,76	73,96
$(x_i-$ M$)^2$	4	9	16	25	36	49	64
Effectif	3	1	2	1	1	1	1

a. $f(\bar{x}) = 14,65$; $f(\mathrm{M}) = 15,05$.
b. $f(\bar{x}) < f(\mathrm{M})$.
3. a. $g(\bar{x}) = 3,24$; $g(\mathrm{M}) = 3,21$.
$g(\bar{x}) > g(\mathrm{M})$.
b. f atteint son minimum pour $x = \bar{x}$, mais pas g.

44 **1.** série (–1 ; 1 ; 2)
a. La médiane M vaut 1.
b. $g(x) = |x + 1| + |x - 1| + |x - 2|$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	2	$+\infty$
$x + 1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$x - 1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$x - 2$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$g(x)$	$-3x+2$	$-x+4$	$x+2$	$3x-2$

c. g atteint bien son minimum en $x = \mathrm{M} = 1$.



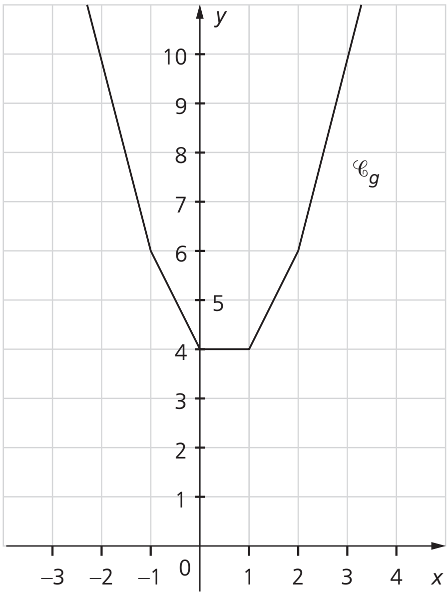
série (–1 ; 0 ; 1 ; 2)
a. La médiane M vaut 0,5.

---

b. $g(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 2|$.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$\lvert x + 1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x		x		x	
$\lvert x - 1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$	
$\lvert x - 2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$g(x)$		$-4x+2$		$-2x+4$		4		$-2x+2$		$4x+2$	

c. g atteint son minimum pour tout x compris entre 0 et 1 donc en particulier en $x = M = 0,5$.



2. a. La première somme est composée de k termes et la deuxième somme est composée de $(N - k)$ termes.

b. $x \in]-\infty ; x_i] \Leftrightarrow |x - x_i| = x_i - x$
$x \in [x_i ; +\infty[\Leftrightarrow |x - x_i| = x - x_i$

c. $x \in [x_k ; x_{k+1}] \Leftrightarrow x \geqslant x_k$ et $x \leqslant x_{k+1}$

g. $g(x) = (x - x_1) + (x - x_2) + \ldots + (x - x_k) + (x_{k+1} - x) + (x_{k+2} - x) + \ldots + (x_n - x)$
$= kx - (N - k)\,x - x_1 - x_2 - \ldots - x_k + x_{k-1} + x_{k+2} + \ldots + x_N$
$= (2k - N)x + (x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_N - x_1 - x_2 - \ldots x_k)$.

3. $N = 2p + 1$; $g(x)$ est la forme de $ax + b$ avec :
$a = 2k - N = 2k - (2p + 1) = 2(k - p) - 1$.

a. • Si $k \leqslant p$, alors $2(k - p) - 1 \leqslant -1$, donc $a < 0$, donc g est strictement décroissante sur $[x_k ; x_{k+1}]$.
• Si $k \geqslant p + 1$ alors $2(k - p) - 1 \geqslant 1$, donc $a > 0$, donc g strictement croissante sur $[x_k ; x_{k+1}]$.

b. g est décroissante sur $[x_1 ; x_{p+1}]$ et croissante sur $[x_{p+1} ; x_N]$, donc g atteint son minimum pour $x = x_{p+1}$.

c. Si $N = 2p + 1$, la valeur X_{p+1} correspond à la médiane.

4. $N = 2p$;
$g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec :
$a = 2k - N = 2k - 2p = 2(k - p)$.

a. • si $k < p$, alors $2(k - p) < 0$, donc $a < 0$, donc g est strictement décroissante sur $[x_k ; x_{k+1}]$.
• Si $k = p$, alors $2(k - p) = 0$, donc $a = 0$, donc g est constante sur $[x_k ; x_{k+1}]$.
• Si $k > p$, alors $2(k - p) > 0$. Donc $a > 0$, donc g est strictement croissante sur $[x_k ; x_{k+1}]$.

b. g est décroissante $[x_1 ; x_p]$, constante sur $[x_p ; x_{p+1}]$ et croissante $[x_{p+1} ; x_N]$, donc g atteint son minimum pour toute valeur de x appartenant à $[x_p ; x_{p+1}]$.

c. Si $N = 2p$, alors $\dfrac{x_p + x_{p+1}}{2}$ correspond à la médiane.

45 **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions polynômes.

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{p} -2n_i(x_i - x) = -2\sum_{i=1}^{p} n_i x_i + 2 \times \sum_{i=1}^{p} n_i$$
$$= -2N\overline{x} + 2xN = 2N(x - \overline{x}).$$

b. $f'(x)$ est du signe de $(x - \overline{x})$ donc f atteint son minimum en $x = \overline{x}$.

x	$-\infty$		$\overline{x}$		$+\infty$
signe de f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

46 **a.** Le nombre total de valeurs est égal à N. Si p valeurs appartiennent à $[\overline{x} - 2s ; \overline{x} + 2s]$, alors le nombre de valeurs n'appartenant pas à cet intervalle est égal à $N - p$.

b. La proposition P :
« $x_i \notin [\overline{x} - 2s ; \overline{x} + 2s] \Leftrightarrow |x_i - \overline{x}| > 2s$ »
est équivalente à la proposition Q :
« $x_i \in [\overline{x} - 2s ; \overline{x} + 2s] \Leftrightarrow |x_i - \overline{x}| \leqslant 2s$ ».
Or : $x_i \in [\overline{x} - 2s ; \overline{x} + 2s]$
$\Leftrightarrow \overline{x} - 2s \leqslant x_i \leqslant \overline{x} + 2s$
$\Leftrightarrow -2s \leqslant x_i - \overline{x} \leqslant 2s \Leftrightarrow |x_i - \overline{x}| \leqslant 2s$
Q est vraie donc P est vraie.

Remarque : On justifiera l'équivalence des deux propositions P et Q en considérant la contraposée de chacune des deux implications réciproques constituant la proposition P.

c. $Ns^2 = NV = \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \overline{x})^2$, donc Ns^2 est supérieur à la somme d'un certain nombre de carrés $(x_i - \overline{x})^2$.

a. Il y a $N - p$ valeurs x_i n'appartenant pas à $[\overline{x} - 2s \,;\, \overline{x} + 2s]$.

Or, pour chaque x_i n'appartenant pas à $[\overline{x} - 2s \,;\, \overline{x} + 2s]$: $|x_i - \overline{x} > 2s$

$\Leftrightarrow x_i - \overline{x})^2 > 4s^2$ $Ns^2 > (N - p)\, 4s^2$

$\Leftrightarrow N > 4(N - p) \Leftrightarrow p > \dfrac{3}{4}N.$

Il y a donc plus de 75 % de l'effectif total dans l'intervalle $[\overline{x} - 2s \,;\, \overline{x} + 2s]$.

47 Les étudiantes réussissent effectivement moins bien que les étudiants car leur taux de réussite n'est que de 56 % quand celui des étudiants est de 75 %. Pourtant le taux de réussite en lettres est identique chez les étudiants et les étudiantes, il est de 50 %; de même le taux de réussite en sciences est identique chez les étudiants et les étudiantes, il est de 75 %. Ce paradoxe s'explique par le fait qu'il y a beaucoup plus de filles en filière littéraire, là où le taux de réussite est le plus bas, que dans la filière scientifique.

48 **a.** Si M est la médiane de la série S alors $f(M)$ est la médiane de la série aS + b. En effet,

• Si N est pair alors $x_1, \ldots, x_{N/2}$ sont les valeurs de la série S inférieures ou égales à M.

• Si a est positif alors pour tout i compris entre 1 et $\dfrac{N}{2}$, $f(x_i) \leqslant f(M)$ et pour tout i compris entre $\dfrac{N}{2} + 1$ et N $f(x_i) \geqslant f(M)$ donc $f(M)$ est la médiane de la série aS + b.

• Si a est négatif alors pour tout i compris entre 1 et $\dfrac{N}{2}$, $f(x_i) \geqslant f(M)$ et pour tout i compris entre $\dfrac{N}{2} + 1$ et N $f(x_i) \leqslant f(M)$donc $f(M)$ est la médiane de la série aS + b.

• Si N est impair alors $x_1, \ldots, x_{(N+1)/2}$ sont les valeurs de la série S inférieures ou égales à M puis on raisonne de la même façon.

b. En raisonnant de façon analogue au **a.**, on a : si a est positif alors $f(Q_1)$ est le premier quartile de la série aS + b et si a est négatif alors $f(Q_1)$ est le troisième quartile de la série aS + b

c. D'après la question **b.** l'écart interquartile de la série aS + b est égale au produit de l'écart interquartile de la série S par la valeur absolue de a.

49 Comme toutes les moyennes des notes, après entrée de chaque note, sont des entiers, nécessairement les sommes des notes entrées doivent être successivement des multiples de 1, 2, 3, 4 et 5. Ceci ne crée aucune condition pour la première note entrée puisque chaque note est entière, ni pour la dernière puisque la somme totale des notes est 70, multiple de 5. Examinons les possibilités pour la dernière entrée ; suivant que cette dernière entrée est 10, 13, 14, 16 ou 17 les sommes des quatre premières entrées sont respectivement 60, 57, 56, 54 et 53. Comme cette somme doit être un multiple de 4, deux cas et deux seulement sont envisageables :

• la dernière entrée est 10. Dans ce cas la somme des quatre premières entrées est 60, multiple de 4. Mais 60 est un multiple de 3 et nécessairement comme la somme des trois premières entrées est un multiple de 3, la quatrième entrée doit nécessairement être un multiple de 3. Aucune des notes n'étant multiple de 3, c'est impossible et cette dernière entrée 10 est impossible ;

• la dernière entrée est donc nécessairement 14.

Il ne reste plus qu'à vérifier que cette unique possibilité permet d'avoir des entrées en accord avec le résultat voulu. Comme la somme des quatre premières entrées est alors 56, multiple de 4, mais aussi multiple de 3 plus 2, nécessairement, la quatrième entrée doit être, elle aussi, un multiple de 3 plus 2 (la différence doit être un multiple de 3) ; seul 17 convient (car 14 est déjà utilisé) donc la quatrième entrée est nécessairement 17.

Comme il ne reste alors qu'un seul nombre impair, nécessairement, les deux premières

entrées sont les deux nombres pairs restants 10 et 16 dans n'importe quel ordre et la troisième entrée est donc 13.
Il y a deux possibilités d'entrées : 10, 16, 13, 17, 14 ou 16, 10, 13, 17, 14.

50 Comme les filles sont 50 % de plus que les garçons les 100 élèves sont 40 garçons et 60 filles.
Désignons par S la somme des notes obtenues par les garçons et S' la somme des notes obtenues par les filles.
On a d'une part S + S' = 1000 car la moyenne totale est 10 pour les 100 participants.
On a aussi $\frac{S}{40} = 1{,}5 \times \frac{S'}{60}$ puisque la moyenne obtenue par les garçons est 50 % de plus que la moyenne des filles. Ces relations entraînent S = S' = 500.
La moyenne obtenue par les garçons est 12,5 ; la moyenne obtenue par les filles est elle de $\frac{25}{3}$.

51 Comme 49 est impair, la médiane de la série ordonnée est 25^{e} terme. Si M est cette médiane les entiers successifs sont :
M – 24, M – 23, … , M – 1, M, M + 1, ..., M + 23, M + 24.
La somme de ces entiers est donc 49M. Donc M = 7^3 = 343.