Comportement d'une suite

Chapitre **5**

Ouverture

La tablette « Yale Babylonian Collection 7289 », datée du XVI^e siècle avant Jésus-Christ, est une énigme pour les mathématiciens ; elle représente un carré annoté de mesures du côté, de la diagonale et du rapport de ces deux mesures. La valeur donnée pour ce rapport est, en sexagésimal, 1,24 ; 51 ; 10 ce qui, traduit en notation décimale, est une valeur de l'ordre de 1,414213. Une telle précision est impossible avec des mesures physiques, mêmes effectuées sur des figures parfaites. Faut-il en conclure que les Babyloniens avaient trouvé une technique de calcul de $\sqrt{2}$, par exemple une suite convergeant vers ce nombre ?
Dans le chapitre précédent, nous avons vu un premier aspect de l'histoire des suites comme instrument mathématique de mesure, par relevé de valeurs ; ici nous découvrons qu'une suite est aussi un procédé de calcul pour approcher certains nombres. Ce procédé est très ancien et, si nous ignorons le procédé utilisé par les Babyloniens, nous connaissons les travaux d'Euclide (300 avant Jésus-Christ) sur l'approximation de l'aire du cercle et aussi ceux d'Héron d'Alexandrie (I^er siècle après Jésus-Christ) sur l'approximation de $\sqrt{2}$.
Ce procédé pour déterminer des valeurs approchées de nombres a été très largement utilisé par de nombreux mathématiciens : Fermat, Bernoulli, Stirling, etc. mais il a fallu attendre longtemps et la création du calcul infinitésimal au XVII^e siècle pour que l'idée de limite et sa formalisation commencent à apparaître.
La question proposée est une étude d'évolution de population. La loi proposée est vraisemblable pour une valeur de k strictement supérieure à 1 et inférieure à 3. Si nous l'étudions, par les méthodes graphiques usuelles, nous constatons qu'après éventuellement une valeur initiale grande, qui va voir la population tomber brutalement faute de nourriture, ensuite la population soit croît légèrement et se stabilise, soit décroît et se stabilise, soit oscille autour d'une valeur et se stabilise, ce qui est assez naturel : les coccinelles sont sensiblement le même nombre chaque année.
Ces études de population peuvent être aussi menées avec proie-prédateur, très célèbre sous la forme lapins-renards ; on peut modéliser les populations en cause, soit par des suites et on étudie alors des suites « doubles », (a_n, b_n), soit pour des populations importantes, par des variables réelles vérifiant un système d'équations aux dérivées partielles.
Ce chapitre 5 doit nécessairement être traité après le chapitre 4, car on suppose ici connaître les différentes façons de calculer un terme d'une suite, ainsi que les notions générales sur les suites arithmétiques ou géométriques. On se préoccupe dorénavant d'étudier le comportement d'une suite.
Dans un premier temps, une approche graphique (volontairement oubliée dans le chapitre 4 déjà très riche) permet de conjecturer à la fois le sens de variation et l'existence éventuelle d'une limite. À cette occasion, on verra que plusieurs représentations graphiques sont possibles, selon si la suite est donnée explicitement ou par récurrence, et demandent à être exploitées pour une meilleure observation du comportement des termes de la suite.
Puis différentes méthodes sont à connaître pour justifier le sens de variation d'une suite, et seulement celui-ci car le calcul des limites n'est pas un objectif du programme. Nous avons cependant fait le choix de donner les règles de base concernant le comportement d'une suite arithmétique ou géométrique.
En outre, il nous a semblé utile de parler de majorant ou de minorant éventuel d'une suite.

Vérifier ses acquis

1 **a.** f est affine, de coefficient directeur négatif, donc est décroissante sur P et en particulier sur $[0\ ;+\infty[$.
b. $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et $\frac{1}{100} > 0$ donc f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
c. f est représentée par une parabole dont le sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$. Comme le coefficient a devant x^2 est positif, f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\frac{1}{2}\right]$ donc en particulier sur $\left[0\ ;\frac{1}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.
d. $x \mapsto 2x + 50$ est croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et ne s'annule pas sur $[0\ ;+\infty[$ donc son inverse f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

2 **a.** $x^2 - 2x + 5$ a pour discriminant $\Delta = -16$ donc n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 5 > 0$. Donc pour tout entier naturel n, $n^2 - 2n + 5 > 0$.
b. Pour tout entier naturel n, $n < n + 3$ et $n + 3 > 0$, donc $\frac{n}{n+3} < 1$.
c. Pour tout entier naturel n,
$\frac{2n+3}{3n+1} - 1 = \frac{-n+2}{3n+1}$; or $3n + 1 > 0$ sur $\mathbb{N}$ donc le signe de $\frac{-n+2}{3n+1}$ ne dépend que de celui de $-n + 2$.
Ainsi, $\frac{2n+3}{3n+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow n \geqslant 2$;
$\frac{2n+3}{3n+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 2$.
d. $0 \leqslant n < n + 1$ donc $f(n) > f(n + 1)$ car f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

3 **1.** $u_2 = 7$; $v_2 = -93$; $w_2 = 6$.
2. a. Suite (w_n).
b. Suite (v_n).
c. Suite (u_n).

4 **a.** Si n augmente, alors u_n semble augmenter.
b. Si n augmente, alors u_n semble diminuer.
c. Si n augmente, alors u_n semble augmenter.
d. Si n augmente, alors u_n semble diminuer.

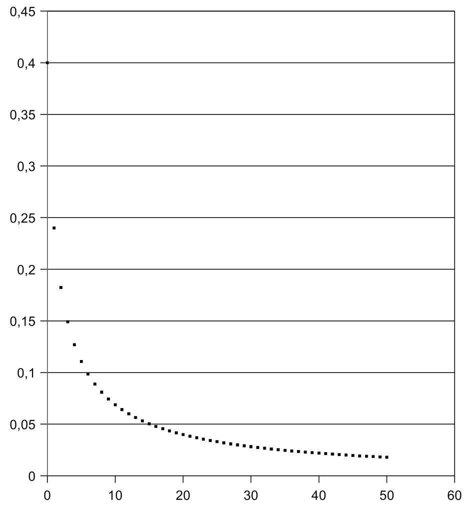
5 **a.** L'algorithme permet de calculer le n-ième terme de la suite (v_n) de l'exercice 3.
b. L'algorithme permet de calculer le n-ième terme de la suite (w_n) de l'exercice 3.

Activités d'introduction

Commentaires : Les activités 1 et 2 permettent de visualiser le comportement d'une suite. L'activité 1 donne un premier exemple de représentation graphique rapide fait sur tableur, pour conjecturer à la fois le sens de variation de la suite et la limite éventuelle (avec trois cas différents). L'activité 2 introduit et explicite la définition de suite croissante ou décroissante (l'algorithme permet de réaliser plus rapidement le dessin qui n'est pas l'objectif principal de l'activité, mais n'est pas indispensable et peut même être évité si l'on souhaite que l'élève s'approprie mieux le contexte géométrique donné par les deux suites) ; cette activité se termine par l'étude du sens de variation d'une suite géométrique, en s'interrogeant sur les différents cas possibles.
Les activités 3 et 4, plus ouvertes, appréhendent bien, de façon ludique, la notion de limite d'une suite : elles demanderont plus d'initiative de la part des élèves pour définir une suite qu'il faudra étudier pour n de plus en plus grand (avec un tableau de valeurs ou une représentation graphique, au choix de l'élève).
On peut noter que le programme demande de n'effectuer que des conjectures de limite, comme dans ces deux dernières activités, aucune définition ou propriété n'étant exigible en classe de première sur ce sujet.

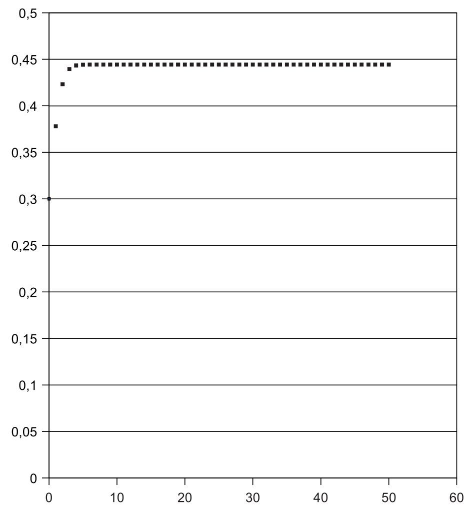
Activité 1

a. @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



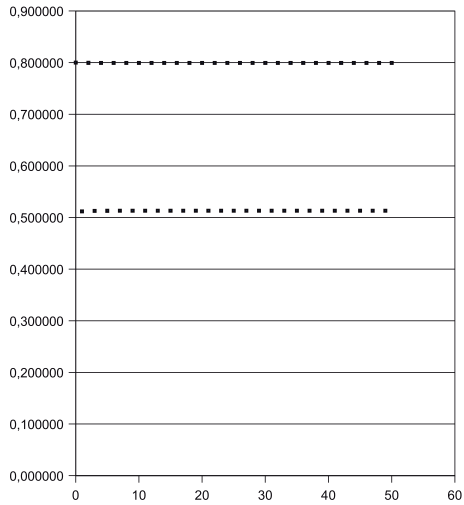
(u_n) semble décroissante et tendre vers 0 : la population semble diminuer au cours du temps et semble être en voie d'extinction.

b. @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



(u_n) semble croissante et tendre vers 0,444444 : la population semble augmenter au cours du temps, tout en se rapprochant de plus en plus de 444 444 coccinelles.

c. @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



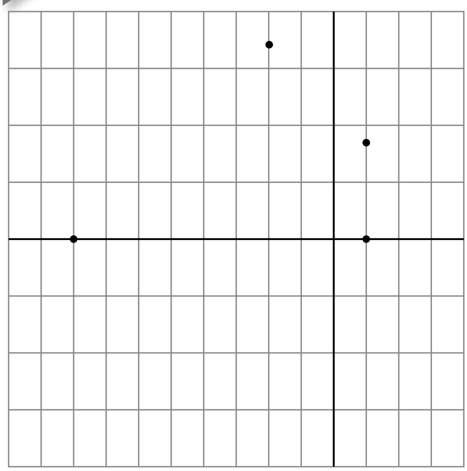
(u_n) semble prendre alternativement les valeurs 0,8 ou 0,513 : la population semble alterner d'une année sur l'autre avec un effectif d'environ 800 000 coccinelles ou 513 000 l'année suivante (à 1 000 près).

Activité 2

1 $A_0\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$; $A_1\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A_2(-1\ ;\ \sqrt{3})$; $A_3(-4\ ;\ 0)$.

$OA_0 = \frac{1}{2}$; $OA_1 = 1$; $OA_2 = 2$; $OA_3 = 4$.

2 **1.**



Xmin : –5 ; Xmax : 2 ; Ymin : –2 ; Ymax : 2 ; GradX : 0,5 ; GradY : 0,5.

2. a. Constante ou plus petite.
b. Ni l'un, ni l'autre.
c. Constante ou plus grande.

3 OA_nA_{n+1} semble rectangle en A_n.
En effet, $OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$
$= x_n^2 + y_n^2 + (-y_n\sqrt{3})^2 + (x_n\sqrt{3})^2 = 4x_n^2 + 4y_n^2$.
Et $OA_{n+1}^2 = (x_n - y_n\sqrt{3})^2 + (x_n\sqrt{3} + y_n)^2$
$= 4x_n^2 + 4y_n^2$.
Donc $OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2 = OA_{n+1}^2$, ce qui prouve que OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

4 **a.** $u_{n+1} = OA_{n+1} = \sqrt{4x_n^2 + 4y_n^2}$
$= 2\sqrt{x_n^2 + 4y_n^2} = OA_n = 2u_n$.
Donc (u_n) est la suite géométrique de raison 2 et de 1er terme $u_0 = OA_0 = \frac{1}{2}$.

b. Dans le triangle OA_nA_{n+1} rectangle en A_n, on a : $\cos\left(A_nOA_{n+1}\right) = \frac{OA_n}{OA_{n+1}} = \frac{1}{2}$ donc, pour tout n, $\widehat{A_nOA_{n+1}} = 60°$.

c. D'après **2.c.**, lorsque n augmente de 1, OA_n augmente donc $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Cette inégalité se vérifie aussi dans les cas suivants de suites géométriques définies par $u_n = u_0 \times q^n$.
– Avec $u_0 > 0$ et $q > 1$;
– ou $u_0 < 0$ et $0 \leqslant q < 1$.

Activité 3

Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = A_nB_n$.
On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 5\sqrt{2}$ (d'après le théorème de Pythagore).
On démontre plus généralement que, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{(u_n - 1)^2 + 1}$.
On observe alors, à l'aide d'une calculatrice, d'un tableur ou d'un logiciel adapté, que la suite (u_n) semble décroissante et tendre indéfiniment vers 1 sans jamais atteindre la valeur 1.
Donc la construction envisagée est bien possible indéfiniment en théorie, même s'il est difficile très rapidement de ne plus pourvoir effectuer la construction à la main.

Activité 4

Méthode préconisée par l'aide :
Pour $n \geqslant 0$, on pose v_n l'aire totale de la surface noire à l'étape n.

$v_0 = 0$; $v_1 = \left(\frac{80}{3}\right)^2$; $v_2 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 + \left(\frac{80}{3^2}\right)^2 \times 8$;

$v_3 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 + \left(\frac{80}{3^2}\right)^2 \times 8 + \left(\frac{80}{3^3}\right)^2 \times 8^2$.

Plus généralement : $v_n = \left(\frac{80}{3}\right)^2 + \left(\frac{80}{3^2}\right)^2 \times 8 + \left(\frac{80}{3^3}\right)^2 \times 8^2 + \ldots + \left(\frac{80}{3^n}\right)^2 \times 8^{n-1}$.

$$v_n = 80^2\left(\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \ldots + \frac{8^{n-1}}{9^n}\right)$$

$$= 6\,400\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^n\right].$$

$$v_n = 6\,400\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}{1 - \frac{8}{9}}\right]$$

$$= 6\,400\left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right].$$

On conjecture alors que lorsque n devient très grand, $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ se rapproche de 0 donc l'aire de la surface noire se rapproche de l'aire totale (6 400 cm^2) du carré initial. Ainsi, l'aire de la partie blanche se rapproche indéfiniment de 0.

Autre méthode : on recherche directement l'aire de la partie non noircie.
Pour $n \geqslant 0$, on pose u_n l'aire totale de la surface blanche à l'étape n.

$u_0 = 80^2$; $u_1 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 \times 8$ car il y a 8 carrés blancs de côté $\frac{80}{3}$;

$u_2 = \left(\frac{80}{3^2}\right)^2 \times 8^2$ car il y a 8^2 carrés blancs de côté $\frac{80}{3^2}$; $u_3 = \left(\frac{80}{3^3}\right)^2 \times 8^3$ car il y a 8^3 carrés blancs de côté $\frac{80}{3^3}$.

Plus généralement $u_n = \left(\frac{80}{3^n}\right)^2 \times 8^n$ car il y a 8^n carrés blancs de côté $\frac{80}{3^n}$, autrement dit, $u_n = 6\,400 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

On conjecture alors que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1

1 **1. a.** $a_2 = 3{,}5$ et $b_2 = 3{,}75$;
$a_3 = 3{,}5$ et $b_3 = 3{,}625$;
$a_4 = 3{,}5625$ et $b_4 = 3{,}625$.
On a bien $b_4 - a_4 \leqslant 0{,}1$.

b.

```
a[0] PREND_LA_VALEUR 3
b[0] PREND_LA_VALEUR 4
n PREND_LA_VALEUR 0
LIRE p
TANT_QUE (b [n] -a[n]>p) FAIRE
   DEBUT_TANT_QUE
   m PREND_LA_VALEUR (a[n] +b[n]) /2
   SI (m*m<13) ALORS
      DEBUT_SI
      a[n+1] PREND_LA_VALEUR m
      b[n+1] PREND_LA_VALEUR b[n]
      FIN_SI
      SINON
         DEBUT _SINON
         a[n+1] PREND_LA_VALEUR a[n]
         b[n+1] PREND_LA_VALEUR m
         FIN_SINON
   n PREND_LA_VALEUR n+1
   FIN_TANT_QUE
AFFICHER "le rang n est "
AFFICHER n
AFFICHER "le terme a[n] est "
AFFICHER a[n]
AFFICHER "le terme b[n] est "
AFFICHER b[n]
```

c. On obtient une précision de 10^{-5} au rang 17 : $3{,}605545 < \sqrt{13} < 3{,}605553$.
On obtient une précision de 10^{-8} au rang 27 : $3{,}60555127 < \sqrt{13} < 3{,}60555128$ (sur Algobox).
On obtient une précision de 10^{-9} au rang 30 : $3{,}605551274 < \sqrt{13} < 3{,}605551275$ (sur calculatrice).

2 **a.**

```
u[0] PREND_LA_VALEUR 3
n PREND_LA_VALEUR 0
LIRE p
TANT_QUE (abs (u[n]-sqrt (13))>p) FAIRE
   DEBUT_TANT_QUE
   u[n+1] PREND_LA_VALEU 0.5* (u[n]+13/u[n])
   n PREND_LA_VALEUR N+1
   FIN_TANT_QUE
AFFICHER "le rang n est"
AFFICHER n
AFFICHER "u[n] = "
AFFICHER u[n]
```

b. On obtient $u_1 = 3{,}6666667$ à 10^{-1} près ;
$u_3 = 3{,}60555131$ à 10^{-5} près ;
$u_4 = 3{,}60555128$ à 10^{-8} près (sur Algobox).

3 On remarque que la méthode de Héron donne beaucoup plus rapidement une valeur approchée de $\sqrt{13}$ précise.

TP Algorithmique 2

1 **1. a.**

```
Entrée
Entrer la hauteur h de la 1ère rangée ;
Initialisation
Donner au nombre n de rangées la valeur 1 ;
Donner à la hauteur totale S la valeur h ;
Traitement
Tant que S < 8 faire
   Ajouter 1 à n ;
   Multiplier h par 2/3 et affecter
   le résultat à h ;
   Ajouter h à S et affecter le résultat à S ;
Fin Tant que
Sortie
Afficher le nombre n de rangées (la dernière
n'étant pas forcément complète).
```

b.

```
LIRE h
n PREND_LA_VALEUR 1
S PREND_LA_VALEUR h
TANT_QUE (S<8) FAIRE
   DEBUT_TANT_QUE
   n PREND_LA_VALEUR n+1
   h PREND_LA_VALEUR (2/3)*h
   S PREND_LA_VALEUR S+h
   FIN_TANT_QUE
AFFICHER n
```

2 **a.** On obtient 6 rangées (séparées par 5 lignes horizontales).
b. Pour $n \geqslant 1$, on note u_n la hauteur de la n-ième rangée.

Comme $u_1 = h$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n$, (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme h.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = h \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Soit S la hauteur totale des n premières rangées complètes.

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = h \times \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = 3h\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Pour $n = 5$, $S \approx 7{,}8$ cm. Et pour $n = 6$, $S \approx 8{,}2$ cm donc il faut bien 6 rangées (la 6e non complète) pour atteindre les 8 cm.

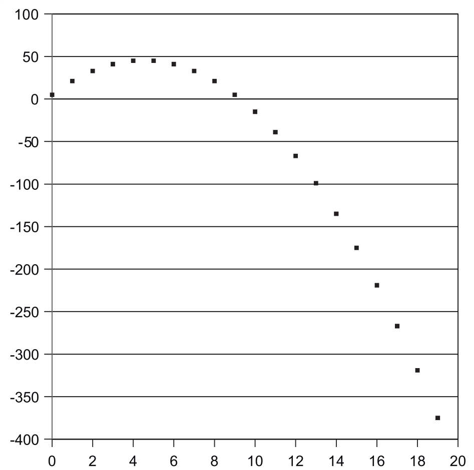
3 On constate que l'on n'a pas de réponse possible avec $h = 2$ cm.

En effet, si $h = 2$, alors $S = 6\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ donc $S < 6$: ainsi on ne peut pas avoir $S \geqslant 8$ cm.

4 Une condition est que $3h > 8$ donc il faut que $h > \frac{8}{3}$.

TP TICE 1

1



Les points semblent être situés sur une parabole.

2 **a.** On cherche trois réels a, b, c tels que, pour tout n, $u_n = an^2 + bn + c$.

$u_0 = 5 \Rightarrow c = 5$.

$u_1 = 21 \Rightarrow a + b + c = 21$.

$u_2 = 33 \Rightarrow 4a + 2b + c = 33$.

La résolution du système obtenu donne $a = -2$, $b = 18$ et $c = 5$.

Donc on peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = -2n^2 + 18n + 5$.

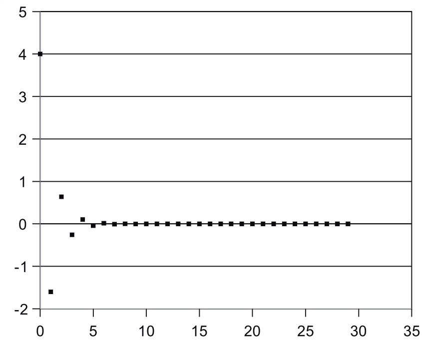
b. On vérifie la formule explicite précédente à l'aide d'une nouvelle colonne de tableur : les 20 premiers termes de la suite sont identiques.

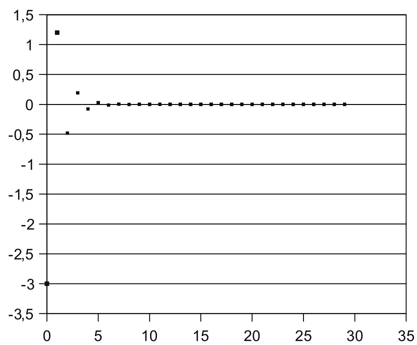
c. Si on suppose que $u_n = -2n^2 + 18n + 5$, alors, comme on sait que $u_{n+1} = u_n - 4n + 16$, on a $u_{n+1} = (-2n^2 + 18n + 5) - 4n + 16$
$= -2n^2 + 14n + 21$.

Or $-2(n+1)^2 + 18(n+1) + 5 = -2n^2 + 14n + 21$ donc on a bien $u_{n+1} = -2(n+1)^2 + 18(n+1) + 5$.

TP TICE 2

1 **a.**





b. Il semble que (u_n) ait pour limite 0, quelle que soit la valeur de a.

c. Il semble que (v_n) ait pour limite 0, quelle que soit la valeur de a.

2 a. b. c.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*a*	*n*	*u*(*n*)	*v*(*n*)	*u*(*n*+1)–*u*(*n*)	*u*(*n*+1)/*u*(*n*)	*v*(*n*+1)–v(*n*)	v(*n*+1)/*v*(*n*)	*w*(*n*)
2	4	0	4	–3					0
3		1	–1,6000000	1,2000000	–5,6	–0,4	4,2	–0,4	0
4		2	0,6400000	–0,4800000	2,24	–0,4	–1,68	–0,4	0
5		3	–0,2560000	0,1920000	–0,9	–0,4	0,67	–0,4	0
6		4	0,1024000	–0,0768000	0,36	–0,4	–0,27	–0,4	0
7		5	–0,0409600	0,0307200	–0,14	–0,4	0,11	–0,4	0
8		6	0,0163840	–0,0122880	0,06	–0,4	–0,04	–0,4	0
9		7	–0,0065536	0,0049152	–0,02	–0,4	0,02	–0,4	0
10		8	0,0026214	–0,0019661	0,01	–0,4	–0,01	–0,4	0
11		9	–0,0010486	0,0007864	0	–0,4	0	–0,4	0
12		10	0,0004194	–0,0003146	0	–0,4	0	–0,4	0
13		11	–0,0001678	0,0001258	0	–0,4	0	–0,4	0
14		12	0,0000671	–0,0000503	0	–0,4	0	–0,4	0
15		13	–0,0000268	0,0000201	0	–0,4	0	–0,4	0
16		14	0,0000107	–0,0000081	0	–0,4	0	–0,4	0
17		15	–0,0000043	0,0000032	0	–0,4	0	–0,4	0
18		16	0,0000017	–0,0000013	0	–0,4	0	–0,4	0
19		17	–0,0000007	0,0000005	0	–0,4	0	–0,4	0
20		18	0,0000003	–0,0000002	0	–0,4	0	–0,4	0
21		19	–0,0000001	0,0000001	0	–0,4	0	–0,4	0
22		20	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
23		21	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
24		22	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
25		23	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
26		24	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
27		25	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
28		26	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
29		27	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
31		28	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0
32		29	0,0000000	0,0000000	0	–0,4	0	–0,4	0

Il semble que (u_n) et (v_n) soient deux suites géométriques de raison –0,4.
Il semble que (w_n) soit constante et égale à 0.

3

a. Pour tout n, $w_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$

$= \frac{3}{5}\left(u_n + 4v_n\right) + \frac{4}{5}\left(3u_n + 2v_n\right)$

$= 3u_n + 4v_n = w_n$.

b. D'après **3.a.**, (w_n) est constante : pour tout n, $w_n = w_0 = 3u_0 + 4v_0 = 0$.

Pour tout n, $3u_n + 4v_n = 0$ donc $v_n = -\frac{3}{4}u_n$.

c. Pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(u_n + 4 \times \left(-\frac{3}{4}u_n\right)\right)$

$= -\frac{2}{5}u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{5}$.

Ainsi, pour tout n, $u_n = a \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

d. $-1 < -\frac{2}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$;

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

e. Pour tout n,

$v_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3 \times \left(-\frac{4}{3}v_n\right) + 2v_n\right) = -\frac{2}{5}v_n$,

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{5}$.

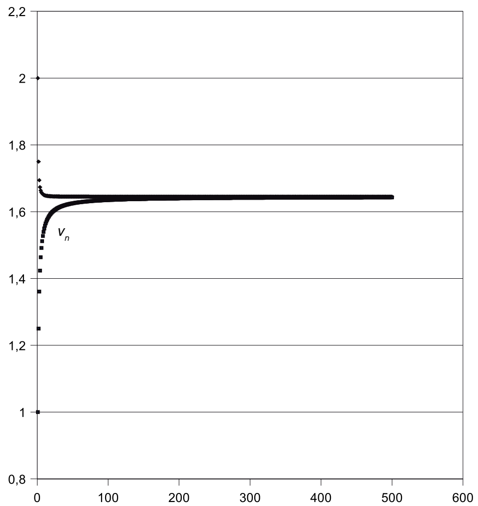
Ainsi, pour tout n, $v_n = -\frac{3}{4}a \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

$-1 < -\frac{2}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$;

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

TP TICE 3

1 **a.** @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



b. (v_n) semble croissante. En effet, pour tout n,

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$,

donc $v_{n+1} - v_n > 0$.

c. (v_n) semble admettre une limite égale environ à 1,643.

2 **a.** $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-3}$ à partir du rang 32.

b. $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-5}$ à partir du rang 318.

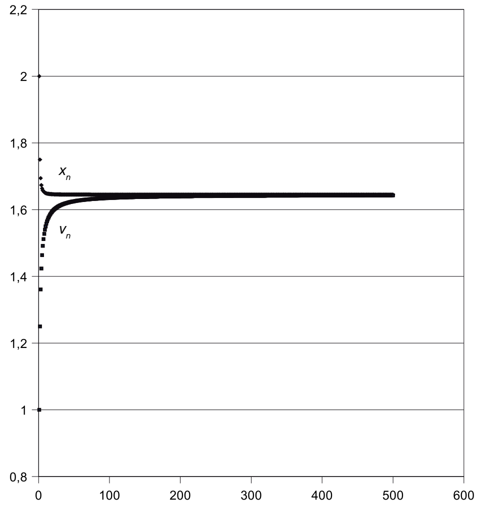
La suite (v_n) croît mais de plus de plus lentement car l'écart entre deux termes consécutifs décroît.

3 **a.** $v_n - \dfrac{\pi^2}{6} \leqslant 10^{-2}$ à partir du rang 100.

b. $v_n - \dfrac{\pi^2}{6} \leqslant 10^{-3}$ à partir du rang 1 005.

On peut conjecturer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

4 **a.** @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.



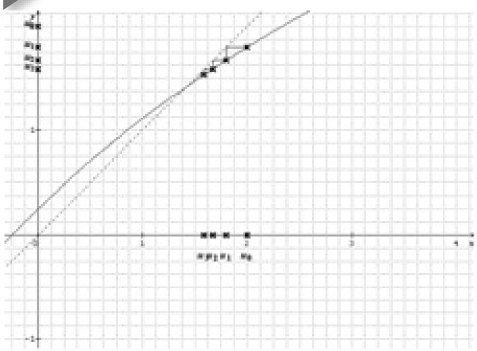
b. (x_n) semble décroissante. En effet, pour tout n, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

$= \dfrac{-1}{n(n+1)^2}$, donc $x_{n+1} - x_n < 0$.

c. Il semble que (x_n) ait la même limite que (v_n) : on conjecture donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

TP TICE 4

1 **a.**

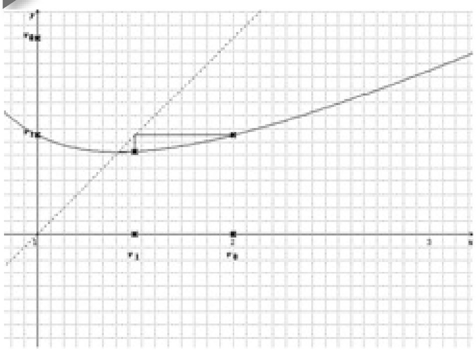


Il semble que (u_n) soit décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$ (solution positive de l'équation $f(x) = x$).

b. Pour tout réel $x \in$ I, $f'(x) = \dfrac{62}{(x+8)^2}$ donc $f'(x) > 0$: ainsi f est croissante sur I.
Donc si $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2$, alors $f(\sqrt{2}) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$; or $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $f(2) = 1{,}8$ donc $\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant 2$, ce qui prouve que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

c. $u_0 = 2$ et $u_1 = 1{,}8$ donc $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$.
Donc $f(\sqrt{2}) \leqslant f(u_1) \leqslant f(u_0) \leqslant f(2)$ car f est croissante sur $[\sqrt{2}\ ;\ 2]$, soit $\sqrt{2} \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant 2$. Etc.
On montre ainsi, de proche en proche que, pour tout n, $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.
On vient de montrer que (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

2 a.

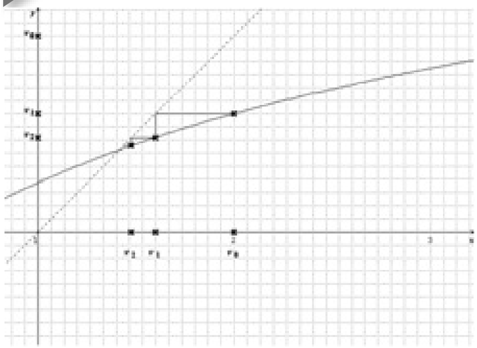


Il semble que (v_n) soit décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$ (solution positive de l'équation $g(x) = x$).

b. Pour tout réel $x \in$ I, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x^2}$ donc $g'(x) > 0$: ainsi g est croissante sur I.
Donc si $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2$, alors $g(\sqrt{2}) \leqslant g(x) \leqslant g(2)$; or $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $g(2) = 1{,}5$ donc $\sqrt{2} \leqslant g(x) \leqslant 2$, ce qui prouve que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

c. $v_0 = 2$ et $v_1 = 1{,}5$ donc $\sqrt{2} \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 2$.
Donc $g(\sqrt{2}) \leqslant g(v_1) \leqslant g(v_0) \leqslant g(2)$ car g est croissante sur $[\sqrt{2}\ ;\ 2]$, soit $\sqrt{2} \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant 2$. Etc.
On montre ainsi, de proche en proche que, pour tout n, $\sqrt{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$.
On vient de montrer que (v_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

3 a.



b. Pour tout réel $x \in$ I, $h'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2}$ donc $h'(x) > 0$: ainsi h est croissante sur I.
Donc si $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2$, alors $h(\sqrt{2}) \leqslant h(x) \leqslant h(2)$; or $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $h(2) = 1{,}6$ donc $\sqrt{2} \leqslant h(x) \leqslant 2$, ce qui prouve que $h(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

c. $w_0 = 2$ et $w_1 = 1{,}6$ donc $\sqrt{2} \leqslant w_1 \leqslant w_0 \leqslant 2$.
Donc $h(\sqrt{2}) \leqslant h(w_1) \leqslant h(w_0) \leqslant h(2)$ car h est croissante sur $[\sqrt{2}\ ;\ 2]$, soit $\sqrt{2} \leqslant w_2 \leqslant w_1 \leqslant 2$. Etc.
On montre ainsi, de proche en proche que, pour tout n, $\sqrt{2} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant 2$.
On vient de montrer que (w_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

4 Les trois suites semblent avoir le même sens de variation et tendre vers la même limite.

5 a. @ Les fichiers sont téléchargeables sur www.libtheque.fr/mathslycee.
Le plus petit entier n tel que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-15}$ est 91.
Le plus petit entier n tel que $\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-15}$ est 5.
Le plus petit entier n tel que $\left|w_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-15}$ est 32.

b. D'après ce qui précède, la suite qui tend le plus vite vers sa limite est (v_n), et celle qui tend le moins vite vers sa limite est (u_n).

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai.
d. Faux. **e.** Faux. **f.** Vrai.

2 **1. a.** n en abscisse. **b.** u_n en ordonnée.
2. Faux.

3 **1. a.** u_n en abscisse. **b.** u_n en ordonnée.
2. Faux.

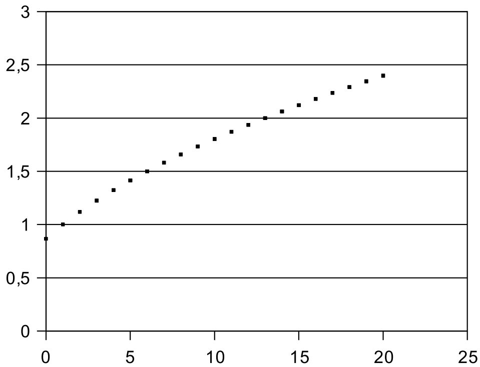
4 **1. a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Vrai.
2. a. Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Vrai.
3. a. Faux. **b.** Faux. **c.** Faux.

5 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Vrai.
e. Vrai. **f.** Faux. **g.** Faux. **h.** Faux.
i. Vrai.

6 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Faux.
e. Vrai. **f.** Faux. **g.** Vrai. **h.** Vrai.
i. Vrai. **j.** Vrai. **k.** Faux.

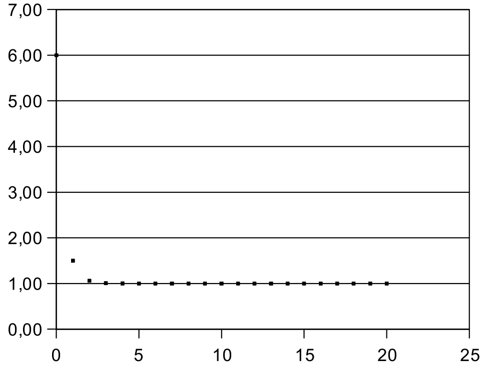
7 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux.
e. Vrai. **f.** Faux. **g.** Vrai. **h.** Faux.
i. Vrai ($r = 0$). **j.** Faux. **k.** Vrai. **l.** Faux.

9 **a.**



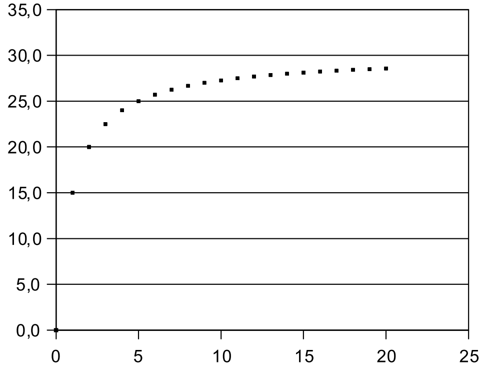
Il semble que (u_n) soit croissante et ait pour limite $+\infty$.

b.



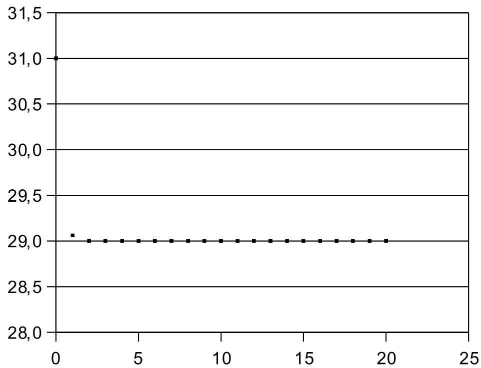
Il semble que (u_n) soit décroissante et ait pour limite 1.

10 **a.**



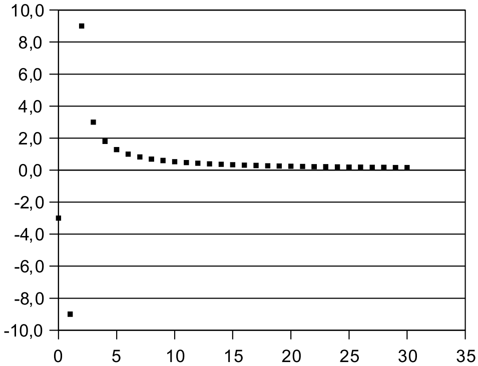
Il semble que (u_n) soit croissante et ait pour limite 30.

b.



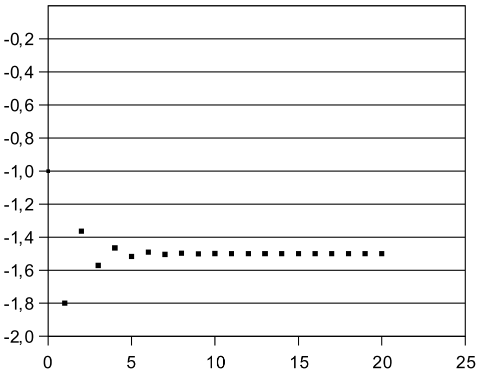
Il semble que (u_n) soit décroissante et ait pour limite 29.

11 **a.**



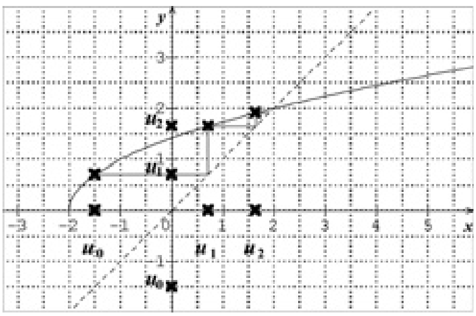
(u_n) n'est pas monotone et il semble que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b.



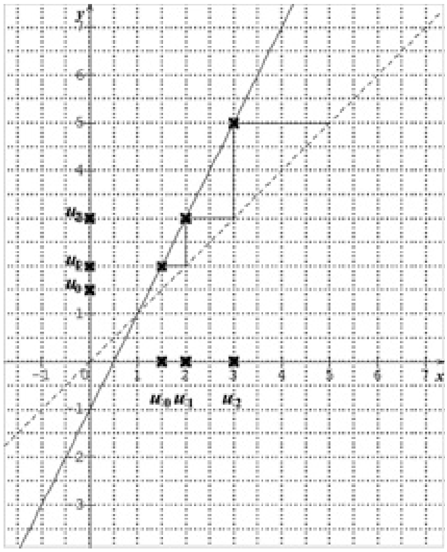
(u_n) n'est pas monotone et il semble que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1{,}5$.

13



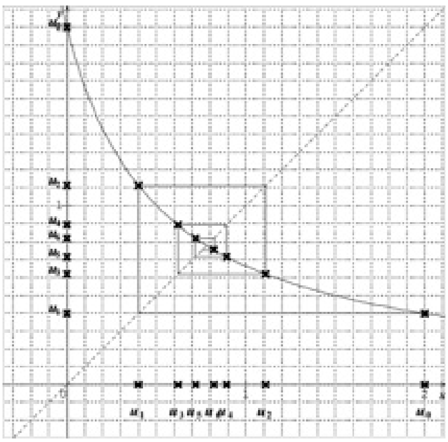
Il semble que (u_n) soit croissante et ait pour limite 2.

14



Il semble que (u_n) soit croissante et ait pour limite $+\infty$.

15



(u_n) n'est pas monotone et il semble que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ (abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite).

17 **a.** Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = n^2 - 3n + 5$. Or $x^2 - 3x + 5$ n'a pas de racine et est strictement positif sur P donc, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que (u_n) est croissante.

b. $u_0 < u_1$ mais $u_2 > u_3$ donc (u_n) n'est pas monotone.

c. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui prouve que (u_n) est croissante.
d. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -3n$; or $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

18 **a.** Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}$;
or $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que (u_n) est strictement croissante.
b. Pour tout n, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = n + 1$;
or $n \in \mathbb{N}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, ce qui prouve que (u_n) est croissante.
c. $u_2 < u_3$ mais $u_3 < u_4$ donc (u_n) n'est pas monotone.
d. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 8n^2 - 42n + 55$.
Or $8x^2 - 42x + 55$ a pour racines 2,5 et 2,75 et est seulement négatif sur [2,5 ; 2,75] ; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que (u_n) est croissante.

20 **a.** $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 9x^2 - 9x + 2$ et $f'(x) = 18x - 9$.
Sur $[0{,}5 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0{,}5 ; +\infty[$, par conséquent, (u_n) est croissante à partir du rang 1.
Or $u_0 = u_1 = 2$ donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
b. $u_2 < u_3$ mais $u_3 > u_4$ donc (u_n) n'est pas monotone.
c. $u_3 > u_4$ mais $u_4 < u_5$ donc (u_n) n'est pas monotone.

21 **a.** $u_n = f(n)$ avec $f(x) = -x^2 - x + 5$ et $f'(x) = -2x - 1$.
Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, par conséquent, (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
b. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ et
$f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$.
Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, par conséquent, (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
c. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{10} - \sqrt{4x+9}$.
Sur $[0 ; +\infty[$, $x \mapsto 4x + 9$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{4x+9}$ aussi ; par conséquent, $x \mapsto -\sqrt{4x+9}$ et donc f sont décroissantes sur $[0 ; +\infty[$.
Ainsi, (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

22 **a.** $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 2x + 1$.
f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, par conséquent, (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
b. Pour tout n, $u_n = 7$ donc (u_n) est constante.
c. Pour tout n, $u_n = -n^2 + 3{,}5n$. Or $u_1 < u_2$ mais $u_2 > u_3$ donc (u_n) n'est pas monotone.
d. Pour tout n non nul, $u_n = \dfrac{2}{n}$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et donc $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ aussi ; par conséquent, (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

24 **a.** (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$, donc est décroissante et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = -\infty$.
b. $5 > 1$ donc (5^n) est croissante et (u_n) est décroissante ; et $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
c. $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est décroissante, donc (u_n) est croissante ; et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

25 **a.** (u_n) est la suite géométrique de raison 4 et de premier terme $\dfrac{1}{12}$.
$4 > 1$ donc (4^n) est croissante et (u_n) est croissante ; et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
b. (u_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{4}{3}$ donc est croissante et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$.
c. (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{4}{3}$.
$-\dfrac{4}{3} < 0$ donc (u_n) n'est pas monotone et $-\dfrac{4}{3} < -1$ donc (u_n) n'a pas de limite.

26 **a.** (u_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme 11.
$0 < \dfrac{1}{10} < 1$ donc $\left(\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right)$ est décroissante

donc (u_n) est décroissante ; et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{11}{10}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$.

$\frac{11}{10} > 1$ donc $\left(\left(\frac{11}{10}\right)^n\right)$ est croissante donc (u_n) est croissante ; et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{11}{10}$ donc est décroissante et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -\infty$.

27 **a.** (u_n) est une suite géométrique de raison 2, croissante avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, décroissante avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, croissante avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d. (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, non monotone avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

29 **a.** Pour tout n, $0 < \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 1$ donc $0 < 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 5$ et $-2 < u_n \leqslant 3$. Ainsi, (u_n) est bornée (minorée par –2 et majorée par 3).

b. Pour tout n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{3}(-1)^n \leqslant \frac{1}{3}$ et $\frac{11}{3} \leqslant u_n \leqslant \frac{13}{3}$. Ainsi, (u_n) est bornée (minorée par $\frac{11}{3}$ et majorée par $\frac{13}{3}$).

c. Pour tout n, $0 \leqslant u_n < 1$ donc (u_n) est bornée (minorée par 0 et majorée par 1).

30 **a.** Pour tout n, $-1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1$ donc $-3 \leqslant -3\cos(2n) \leqslant 3$ et $2 \leqslant u_n \leqslant 8$. Ainsi, (u_n) est bornée (minorée par 2 et majorée par 8).

b. (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{3}{10}$ donc est décroissante et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -\infty$. Ainsi (u_n) est seulement majorée par $u_0 = \frac{1}{2}$ mais pas minorée (et donc pas bornée).

c. Pour tout n, $0 < \left(\frac{1}{10}\right)^n \leqslant 1$ donc $-3 \leqslant u_n < 0$. Ainsi, (u_n) est bornée (minorée par –3 et majorée par 0).

31 **a.** (u_n) n'est pas bornée.

b. Pour tout n, $4 < 5 - \frac{1}{n^2} < 5$ donc $1 - \sqrt{5} < u_n < -1$ donc (u_n) est bornée (minorée par $1 - \sqrt{5}$ et majorée par –1).

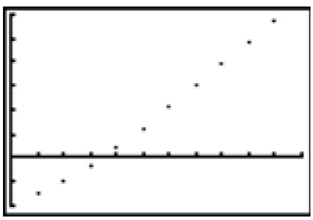
32 **a.** (u_n) est minorée par $-\frac{5}{6}$ mais n'est pas majorée, donc n'est pas bornée.

b. Pour tout n, $u_n = 2 - \frac{11}{n} + \frac{15}{n^2}$; or $0 < \frac{15}{n^2} \leqslant 15$ et $-11 \leqslant -\frac{11}{n} < 0$ donc $-9 \leqslant u_n \leqslant 17$. Ainsi, (u_n) est bornée (minorée par –9 et majorée par 17).

c. Pour tout n, $-4 \leqslant 1 - 5\cos n \leqslant 6$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant 36$. Ainsi (u_n) est bornée (minorée par 0 et majorée par 36).

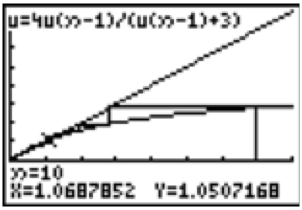
d. Pour tout n, $3 \leqslant 4 + \cos n \leqslant 5$ et $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3 - \sin n} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\frac{3}{4} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{2}$. Ainsi, (u_n) est bornée (minorée par $\frac{3}{4}$ et majorée par $\frac{5}{2}$).

34 **a.**



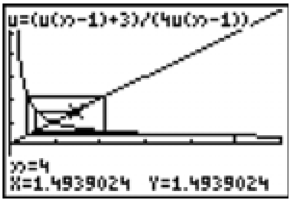
Il semble que (u_n) soit croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b.



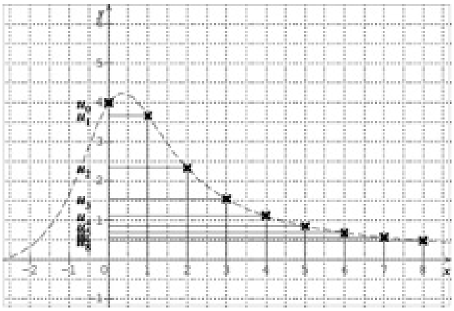
Il semble que (u_n) soit décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

c.



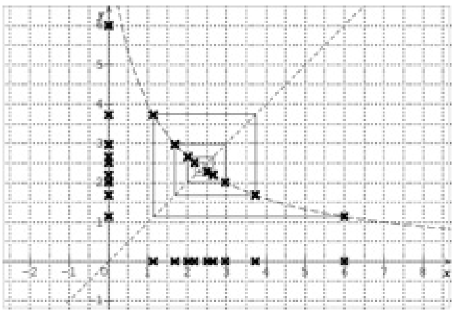
(u_n) n'est pas monotone et il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

36 **a.**



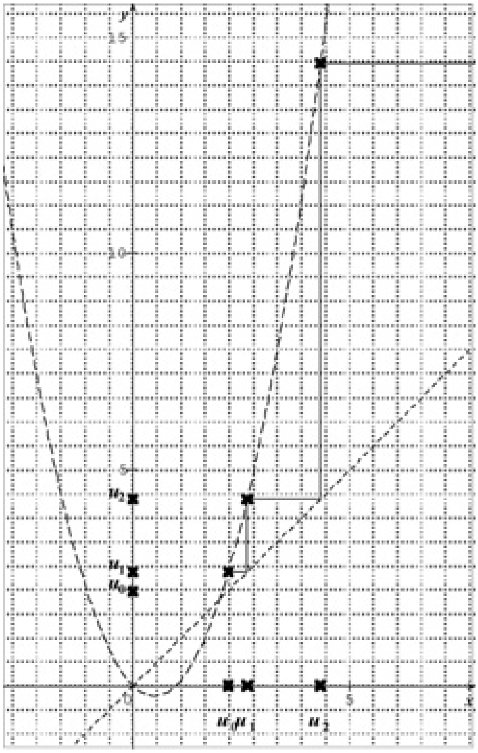
Il semble que (u_n) soit décroissante et ait pour limite 0.

b.



(u_n) n'est pas monotone et il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$ (abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite).

c.



Il semble que (u_n) soit croissante et ait pour limite $+\infty$.

37 **a.** (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, décroissante avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{2}{5}$, non monotone avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

S'entraîner

38 **a.** $d_{2001} = 5$ donc le nombre d'inscrits a augmenté de 5 entre 2000 et 2001.
$p_{2001} \approx 0{,}004$ donc le nombre d'inscrits a augmenté d'environ 0,4 % entre 2000 et 2001.

b.

	A	B	C	D
1	2000	1243	d(n)	p(n)
2	2001	1248	5	0,0040
3	2002	1255	7	0,0056
4	2003	1265	10	0,0080
5	2004	1280	15	0,0119
6	2005	1297	17	0,0133
7	2006	1314	17	0,0131
8	2007	1333	19	0,0145
9	2008	1380	47	0,0353
10	2009	1428	48	0,0348
11	2010	1478	50	0,0350
12	2011	1548	70	0,0474

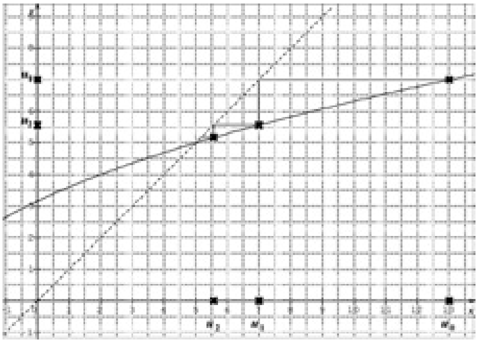
c. Les suites (u_n) et (d_n) semblent croissantes mais la suite (p_n) n'est pas monotone.
Ainsi, le nombre d'inscrits augmente chaque année, et le nombre supplémentaire d'inscrits par an augmente en nombre mais pas en pourcentage par rapport à l'année précédente.

39 **1. a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Faux.
2. a. Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Faux.
3. a. Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Faux. **e.** Faux.

40 **1.** En regardant les premiers termes, (u_n) semble décroissante.
2. a. Pour tout n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1+u_n}{u_n}$ $= \dfrac{1}{u_n} + 1 = v_n + 1$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.
b. Pour tout n, $v_n = n + 1$donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
c. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.
Sur $[0\ ;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$, par conséquent, (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

41 **1. a.** Pour tout réel x positif,
$g'(x) = \dfrac{x\left(-2x^2 - 63x - 120\right)}{\left(x+20\right)^2}$ et $g'(x) \leqslant 0$
donc g est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.
b. D'après **1.a.**, (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
2. a. Pour tout réel x positif, $h'(x) = 40x - 19$ et $h'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{19}{40}$ donc h est décroissante sur $\left[0\ ;\dfrac{19}{40}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{19}{40}\ ;+\infty\right[$.
b. D'après **2.a.**, (w_n) est croissante à partir du rang 1 ; or $w_0 < w_1$ donc (w_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
3. a. P est vraie.
b. Réciproque de P : « Si (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, alors f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$ » .
Cette réciproque est fausse (voir **2.**).
c. Q est vraie.
d. Réciproque de Q : « Si (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$, alors f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ ».
cette réciproque est fausse.

42 **1. a.** $x \mapsto 3x + 10$ est croissante et positive sur $\left[-\dfrac{10}{3}\ ;+\infty\right[$ donc g est aussi croissante sur $\left[-\dfrac{10}{3}\ ;+\infty\right[$.
b. (v_n) semble décroissante.



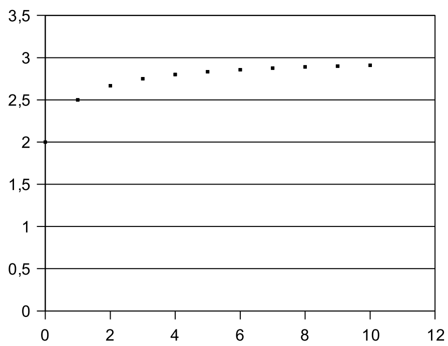
2. Si $v_0 > 5$ alors (v_n) est décroissante.
Si $-\dfrac{10}{3} \leqslant v_0 < 5$ alors (v_n) est croissante.
Si $v_0 = 5$ alors (v_n) est constante.
3. Faux.

43 **1. a.** (R) : $u_{n+1} = u_n + n + 1$.
b. Pour tout n non nul,
$v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(n+1)^2 + \dfrac{1}{2}(n+1) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{3}{2}n + 1$
et $v_n + n + 1 = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{3}{2}n + 1$ donc on a bien $v_{n+1} = v_n + n + 1$.
Mais $v_1 = 1 \neq 8$ donc (v_n) n'est pas la suite (u_n).

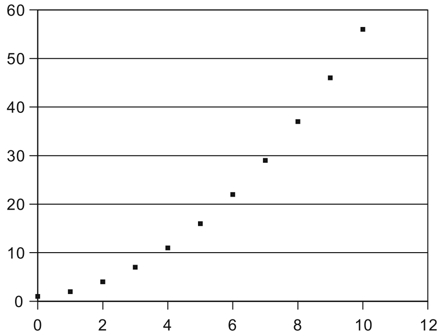
2. a. Pour tout n non nul,
$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = (u_n + n + 1) - (v_n + n + 1)$
$= u_n - v_n = w_n$ donc (w_n) est constante.
b. Pour tout n non nul, $w_n = w_1 = 7$ et
$u_n = w_n + v_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 7$.
c. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 7$ et
$f'(x) = x + \frac{1}{2}$.
Sur $[1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, par conséquent, (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.
d. $(u_n) \geqslant 1\,000$ à partir du rang $n = 45$.

44 **1. a.** L'algorithme 1 (respectivement 2) permet de connaître le sens de variation d'une suite définie sous forme explicite (respectivement sous forme récurrente), en comparant deux termes consécutifs, à partir des termes de rang 0 jusqu'au terme de rang n.
Il affichera NON à chaque fois qu'un terme est strictement inférieur au terme précédent.
Il affichera OUI à chaque fois qu'un terme est supérieur ou égal au terme précédent.
b. L'algorithme doit afficher n fois OUI.
2. a. (u_n) est décroissante jusqu'aux rangs 10, 20 et 30 (le seul OUI de départ indique que $u_0 = u_1$).
b. (u_n) est croissante jusqu'aux rangs 8, 16 et 32.
c. (u_n) est croissante jusqu'aux rangs 8 et 12 mais pas jusqu'au rang 16.

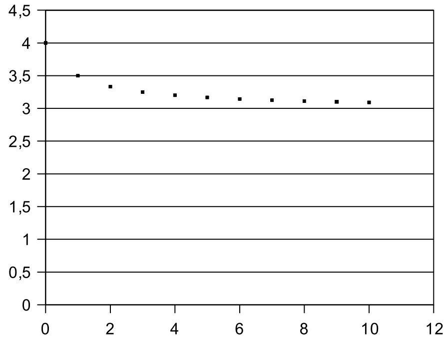
45 **a.**



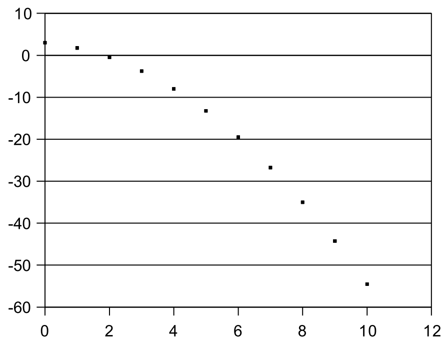
b.



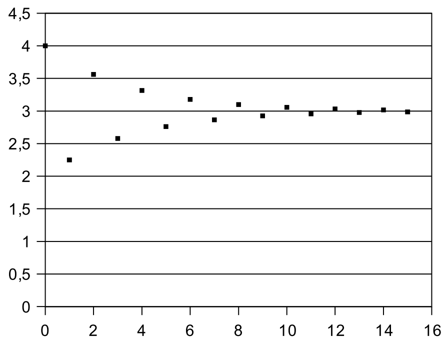
c.



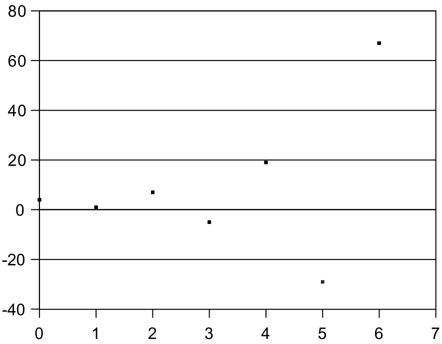
d.



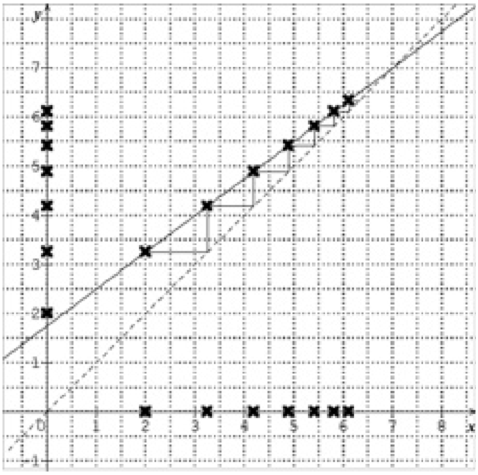
e.



f.



46 **1. a.**



b. Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7$.

2. a. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 7$

$= \dfrac{3u_n + 7}{4} - 7 = \dfrac{3}{4}(u_n - 7) = \dfrac{3}{4}v_n$ donc (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = -5$.

b. Pour tout n, $v_n = -5 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ donc

$u_n = -5 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 7$.

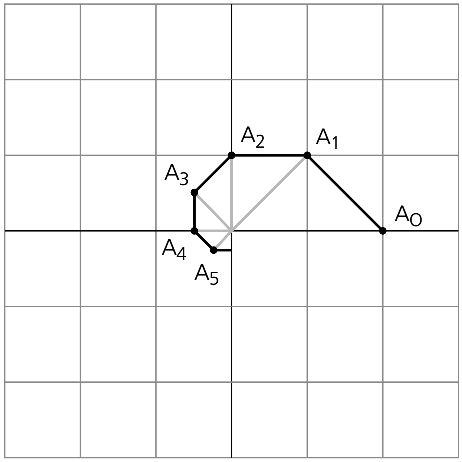
c. $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 7$.

d. Pour tout n, $-5 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \neq 0$ donc $u_n \neq 7$.

47 **1. a.** $A_0(2 ; 0)$, $A_1(1 ; 1)$, $A_2(0 ; 1)$, $A_3\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$, $A_4\left(-\dfrac{1}{2} ; 0\right)$ et $A_5\left(-\dfrac{1}{4} ; -\dfrac{1}{4}\right)$.

b.



2. a. Voir ci-dessus. Dans l'algorithme, rajouter dans la boucle, après le tracé du point : TRACER_SEGMENT (0,0)→(X[I],Y[I]).

b. Pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}y_n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; ainsi, la longueur OA_n se rapproche indéfiniment vers 0.

d. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $u_n \leqslant 0{,}1$ avec $u_n = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ à partir du rang $n = 9$.

3. $\overrightarrow{A_{n+1}O}\left(-\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}y_n ; -\dfrac{1}{2}x_n - \dfrac{1}{2}y_n\right)$ et

$\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\left(\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}y_n ; -\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}y_n\right)$.

On démontre alors que $\overrightarrow{A_{n+1}O} \cdot \overrightarrow{A_{n+1}A_n} = 0$ et $A_{n+1}O = A_{n+1}A_n$ donc le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.

a.

```
VARIABLES
  X EST_DU_TYPE LISTE
  Y EST_DU_TYPE LISTE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  X[0] PREND_LA_VALEUR 2
  Y[0] PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE N
  L PREND_LA_VALEUR 0
  POUR I ALLANT_DE 0 A N
    DEBUT_POUR
    TRACER_POINT (X[I], Y[I])
    TRACER_SEGMENT (0,0) W (X[I], Y[I])
    X[I+1] PREND_LA_VALEUR 0.5*X[I]-0.5*Y[I]
    Y[I+1] PREND_LA_VALEUR 0.5*X[I]+0.5*Y[I]
    TRACER_SEGMENT (X[I], Y[I]) W (X[I+1], Y[I+1])
    L PREND_LA_VALEUR L+sqrt
    (X[I+1]*X[I+1]+Y[I+1]*Y[I+1])
    FIN_POUR
  L PREND_LA_VALEUR L-sqrt
  (X[N+1]*X[N+1]+Y[N+1]*Y[N+1])
  AFFICHER L
FIN_ALGORITHME
```

b. L'algorithme précédent donne $\ell_9 \approx 4{,}615$.

c. $\ell_n = OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n$

$$= u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$

d. $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$,

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$.

Ainsi, la longueur de la spirale se rapproche indéfiniment de la valeur $2 + 2\sqrt{2}$.

48 **a.** Pour tout n, $u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_n + 2 \geqslant 2$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n+2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

b. D'après a., pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\frac{u_i}{u_{i-1}} \leqslant \frac{1}{2}$

donc $\frac{u_n}{u_0} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n \leqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

soit $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

d. Pour tout n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

D'après c, on conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

49 **1. a.** $(t) \in E \Leftrightarrow \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0{,}24\lambda^{n-1}$
$\Leftrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda) = 0{,}24\lambda^{n-1}$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$ (car $\lambda \neq 0$).

b. La résolution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$ donne $\lambda = -0{,}2$ ou $\lambda = 1{,}2$. Ainsi, d'après **1.a.**, les seules suites (t_n) de E sont définies par $t_n = (-0{,}2)^n$ ou $t_n = 1{,}2^n$.

2. a. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n$

$= \frac{39}{7}(1,2)^{n+1} + \frac{3}{7}(-0,2)^{n+1} - \frac{39}{7}(1,2)^n - \frac{3}{7}(-0,2)^n$

$= \frac{39}{7}(1,2)^{n-1}(1,2^2 - 1,2) - \frac{3}{7}(-0,2)^{n-1}(1,2^2 - 1,2)$

$= 0{,}24u_{n-1}$.

Donc $(u_n) \in E$.

b. $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$;

$-1 < -0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}2)^n = 0$.

On conjecture alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On conjecture :

– si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

– si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;

– si $\alpha = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

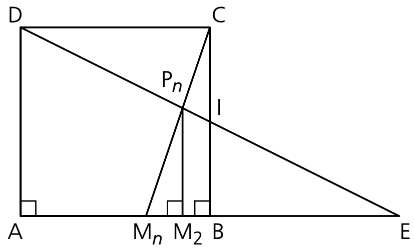
50 **1. a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \frac{\pi^2}{6}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \frac{\pi}{4}$.

51 **1.**



2. a. Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

b. $u_0 = AA = 0$.
Comme I est le milieu de [BC] et [DE], BECD est un parallélogramme donc BE = CD = 1.
D'après le théorème de Thalès dans le triangle EP_nM_{n+1}, $\dfrac{BI}{P_n M_{n+1}} = \dfrac{BE}{M_{n+1}E}$ donc $\dfrac{\frac{1}{2}}{P_nM_{n+1}}$

$= \dfrac{1}{2-u_{n+1}}$, d'où $P_nM_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(2-u_{n+1}\right)$.

Et, d'après le théorème de Thalès dans le triangle BCM_n, on a $\dfrac{M_nM_{n+1}}{M_nB} = \dfrac{P_nM_{n+1}}{BC}$,

soit $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{1-u_n} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(2-u_{n+1}\right)}{1}$,

d'où $u_{n+1} = \dfrac{2}{3-u_n}$.

c. On conjecture à l'aide de l'expression récurrente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

52 **1. a.** Aire totale de la voile S = 8 m^2.

b. $\dfrac{a_2-a_1}{8-a_1} = \dfrac{3\times\frac{1}{2}\times 1^2}{3\times\frac{1}{2}\times 2^2} = \dfrac{1}{4}$.

c. $\dfrac{a_3-a_2}{8-a_2} = \dfrac{3^2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3^2\times\frac{1}{2}\times 1^2} = \dfrac{1}{4}$.

2. Nombre de nouveaux triangles blancs formés à l'étape n : 3^n.

Longueur du côté d'un tel triangle : $4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi, pour tout n non nul, $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{8-a_n}$

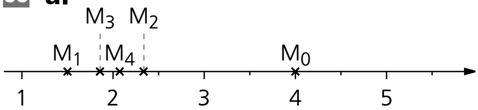
$$= \dfrac{3^n\times\frac{1}{2}\times\left(4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)^2}{3^n\times\frac{1}{2}\times\left(4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)^2} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \dfrac{1}{4}.$$

Ainsi, $4(a_{n+1}-a_n) = 8-a_n$ donc $4a_{n+1} = 8+3a_n$ et, par conséquent, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 2$.

3. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 8$; l'aire de la surface peinte en blanc se rapproche indéfiniment de celle de la surface totale de la voile.

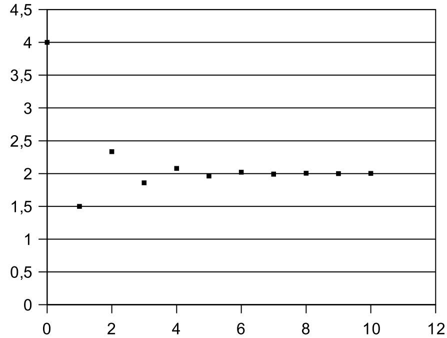
b. $a_n \geqslant 7{,}9$ pour $n \geqslant 16$.

53 **a.**



b. La suite (u_n) n'est pas monotone ; elle semble bornée et tendre vers une limite égale approximativement à 2.

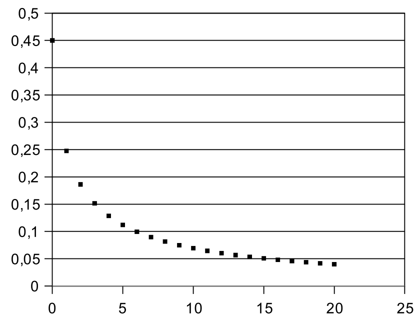
c.



Les conjectures effectuées dans la question **b.** sont bien vérifiées.

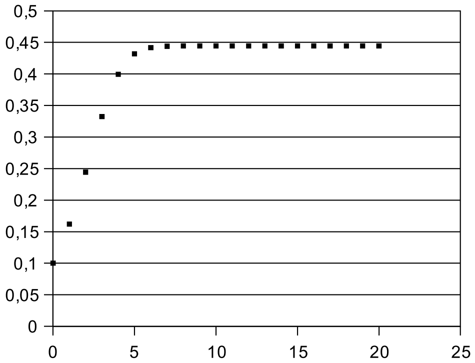
54 **1.** La fréquence des personnes connaissant la nouvelle à une certaine heure est proportionnelle au produit de la fréquence des personnes qui connaissent la nouvelle l'heure précédente par la fréquence des personnes qui ne connaissent pas la nouvelle l'heure précédente.

2. a.



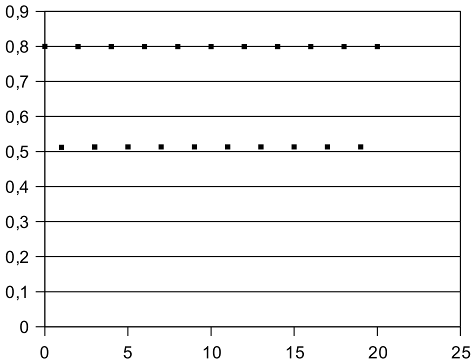
Il semble que (u_n) soit décroissante et ait pour limite 0.

b.



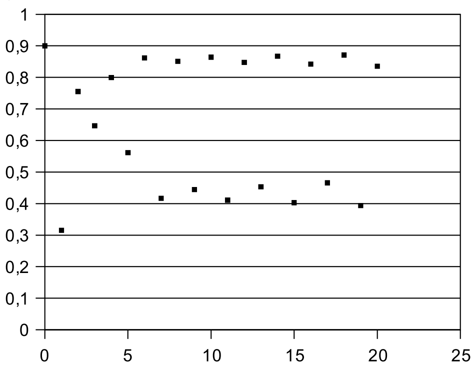
Il semble que (u_n) soit croissante et ait pour limite 0,45.

c.



Il semble que (u_n) ne soit pas monotone et n'ait pas de limite.

d.



Il semble que (u_n) ne soit pas monotone et n'ait pas de limite.

55 **1. a.**

$$\boxed{q_{n+1} = q_n - 0{,}012024 q_n = 0{,}987976 q_n}$$

b. D'après **1.a.**, (q_n) est géométrique de raison 0,987976. Donc $q_n = q_0 \times 0{,}987976^n$

c. $0 < 0{,}987976 < 1$ et $q_0 > 0$ donc (q_n) est décroissante.

d. $-1 < 0{,}987976 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$.

Ainsi, à très long terme, les atomes de carbone 14 se seront quasiment tous désintégrés.

2. a. On cherche n tel que $q_n = \dfrac{q_0}{2}$, c'est-à-dire $0{,}987976^n = 0{,}5$. À la calculatrice, on trouve $n \approx 57$ siècles (demi-vie du carbone 14).

b. On cherche n tel que $q_n = 0{,}3 q_0$, c'est-à-dire $0{,}987976^n = 0{,}3$.

À la calculatrice, on trouve que l'âge du fragment est $n \approx 100$ siècles (soit 10 000 ans).

56 **a.** $u_n = 16 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. $u_n = \dfrac{1}{16} \times 2^n$, donc (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c. $u_n = -16 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

d. $u_n = -\dfrac{1}{16} \times 2^n$, donc (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

e. $u_n = 16 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc (u_n) n'est pas monotone et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

f. $u_n = \dfrac{1}{16} \times (-2)^n$, donc (u_n) n'est pas monotone et n'a pas de limite.

57 **a.** $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{6x - 7}{2x + 1}$ et $f'(x) = \dfrac{20}{(2x+1)^2}$.

Ainsi, f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ car $f'(x) > 0$.

b. $u_n - 3 = \dfrac{-10}{2n+1}$ donc $u_n - 3 < 0$ sur $\mathbb{N}$.

c. D'après **a.**, (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, donc minorée par $u_0 = -7$.

D'après **b.**, (u_n) est majorée par 3.

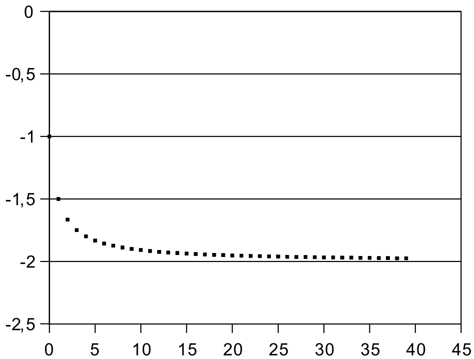
Donc (u_n) est bornée.

d. $(u_n) \geqslant 2{,}9$ à partir du rang $n = 50$.

58 **1. a.**

n	$u(n)$	n	$u(n)$
0	–1	20	–1,95
1	–1,5	21	–1,95
2	–1,67	22	–1,96
3	–1,75	23	–1,96
4	–1,8	24	–1,96
5	–1,83	25	–1,96
6	–1,86	26	–1,96
7	–1,88	27	–1,96
8	–1,89	28	–1,97
9	–1,9	29	–1,97
10	–1,91	30	–1,97
11	–1,92	31	–1,97
12	–1,92	32	–1,97
13	–1,93	33	–1,97
14	–1,93	34	–1,97
15	–1,94	35	–1,97
16	–1,94	36	–1,97
17	–1,94	37	–1,97
18	–1,95	38	–1,97
19	–1,95	39	–1,98

b.



c. (u_n) semble décroissante et avoir pour limite –2.

2. a. Il semble que (v_n) soit une suite arithmétique de raison 3.

b. On conjecture : $v_n = 3n + 3$ donc

$$\frac{3}{u_n + 2} = 3n + 3, \text{ d'où } u_n = \frac{1}{n+1} - 2.$$

3. a. on a bien $u_0 = 1 - 2 = -1$ et

$$\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} = \frac{-\dfrac{1}{n+1} + 2 - 4}{\dfrac{1}{n+1} - 2 + 3} = \frac{-2n - 3}{n+2} ;$$

or $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} - 2 = \dfrac{-2n-3}{n+2}$ donc on a bien $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$.

b. Pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - 2 - \frac{1}{n+1} + 2 = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

c. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et, par suite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

59 Q_4 est la négation de P.

60 **1.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) est croissante.

2. a. $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_2 = 9$; $u_3 = 16$; $u_4 = 25$.
On conjecture : $u_n = (n+1)^2$.

b. On conjecture : $u_{n+1} = (n+2)^2$.

c. $u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$
$= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = u_{n+1}$.

3. a. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = (x+1)^2$ et $f'(x) = 2x + 2$. Or f' est positive sur $[0 ; +\infty[$ donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$; par conséquent (u_n) est croissante.

b. Pour tout n, $u_n - n^2 = 2n + 1$, donc $u_n - n^2 > 0$, c'est-à-dire $u_n > n^2$.

c. (u_n) est croissante donc minorée par $u_0 = 1$.

d. $u_n \leqslant A \Leftrightarrow (n+1)^2 \leqslant A$
$\Leftrightarrow -\sqrt{A} \leqslant n + 1 \leqslant \sqrt{A} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{A} \leqslant n \leqslant 1 + \sqrt{A}$.
En prenant, par exemple $n = 2 + \sqrt{A}$, on voit donc que l'on ne peut pas avoir $u \leqslant A$. Donc P est fausse, ce qui signifie que (u_n) ne peut pas être majorée.

e. D'après **3.b.**, on peut conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

61 **1.** Il semble que (u_n) soit décroissante et ait pour limite 3.

2. a. Pour tout n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(v_n + 3) - 1 = \frac{1}{3}v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 7 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3. a. Comme $u_n = v_n + 3$, on a d'après **2.b.** :

$u_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3.$

b. Pour tout n,

$u_{n+1} - u_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} - 7 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$= -\dfrac{14}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$,

ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

En outre, $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$,

ce qui entraîne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

4. a. $S_n = 7 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{21}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right].$

b. $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc on conjecture

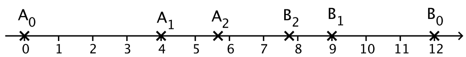
$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{21}{2}.$

5. a. $T_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + \ldots + (v_n + 3)$

$= S_n + 3(n + 1) = \dfrac{21}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + 3n + 3.$

b. On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$.

62 **1.**



2. $2(a_n - a_{n+1}) + (b_n - a_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow a_{n+1}$
$= \dfrac{2a_n + b_n}{3}.$

Et $a_n - b_{n+1} + 3(b_n - b_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow b_{n+1}$
$= \dfrac{a_n + 3b_n}{4}.$

3. a. Pour tout n, $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1}$

$= \dfrac{a_n + 3b_n}{4} - \dfrac{2a_n + b_n}{3}$

$= \dfrac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12}$

$= \dfrac{5}{12}(b_n - a_n) = \dfrac{5}{12}u_n$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$.

b. $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^n = 12 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^n.$

c. Pour tout n, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5}{12}$ avec

$0 < \dfrac{5}{12} < 1$ donc (u_n) est décroissante, ce qui signifie que la distance A_nB_n diminue lorsque n augmente.

$-1 < \dfrac{5}{12} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, ce qui signifie que les points A_n et B_n se rapprochent indéfiniment de 0.

4. a. Pour tout n,

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - \dfrac{3a_n}{3} = \dfrac{1}{3}u_n,$

d'où $a_{n+1} - a_n > 0$ donc (a_n) est croissante.

b. Pour tout n,

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} - \dfrac{4b_n}{4} = -\dfrac{3}{4}u_n,$

d'où $b_{n+1} - b_n < 0$ donc (b_n) est décroissante.

5. a. Pour tout n, $v_{n+1} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1}$

$= 3 \times \dfrac{2a_n + b_n}{3} + 4 \times \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

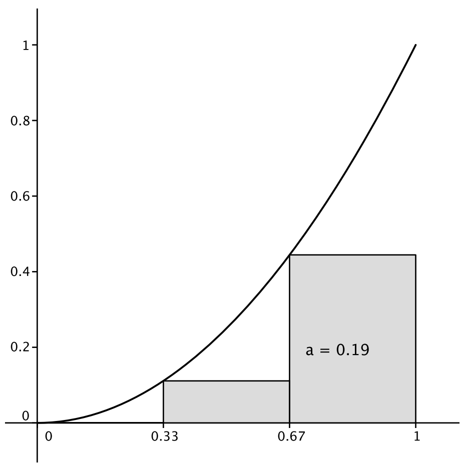
$= 3a_n + 4b_n = v_{n+1}$, donc (v_n) est constante.

Ainsi, pour tout n, $v_n = v_0 = 3a_0 + 4b_0 = 48$.

b. On peut penser que (v_n) tend à la fois vers 48 et aussi à $3\ell + 4\ell = 7\ell$ donc

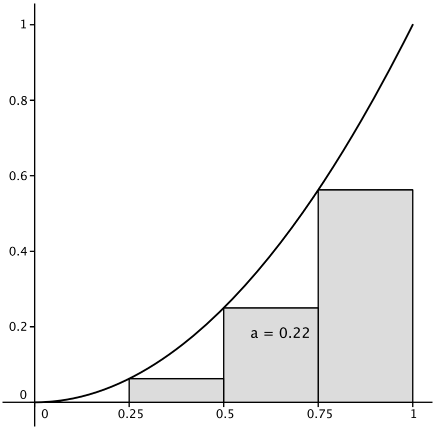
on conjecture : $\ell = \dfrac{48}{7}$.

63 **1. a.**



La valeur exacte de a_3 est $\dfrac{5}{27}$.

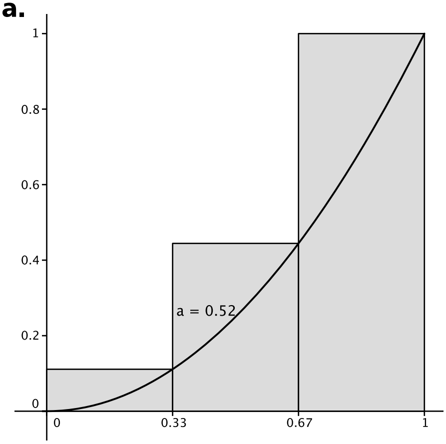
b.



La valeur exacte de a_4 est $\frac{7}{32}$.

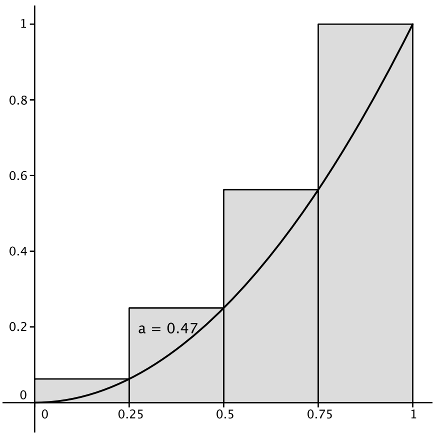
c. On vérifie à l'aide d'un logiciel.

2. a.



La valeur exacte de b_3 est $\frac{14}{27}$.

b.



La valeur exacte de b_4 est $\frac{15}{32}$.

c. On vérifie à l'aide d'un logiciel.

3. (a_n) et (b_n) semblent avoir la même limite égale à $\frac{1}{3}$; cette limite commune semble être l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

70 **1. a.**

1	n	a(n)	b(n)
2	0	9	0,31
3	1	6,1028807	0,6712283
4	2	4,2923299	1,3569187
5	3	3,3138595	2,2765219
6	4	2,9688803	2,8378453
7	5	2,9246686	2,9227164
8	6	2,9240179	2,9240174
9	7	2,9240177	2,9240177
10	8	2,9240177	2,9240177
11	9	2,9240177	2,9240177
12	10	2,9240177	2,9240177
13	11	2,9240177	2,9240177
14	12	2,9240177	2,9240177
15	13	2,9240177	2,9240177
16	14	2,9240177	2,9240177
17	15	2,9240177	2,9240177
18	16	2,9240177	2,9240177
19	17	2,9240177	2,9240177
20	18	2,9240177	2,9240177
21	19	2,9240177	2,9240177
22	20	2,9240177	2,9240177

b. Il semble que (a_n) soit décroissante et que (b_n) soit croissante.
Il semble que les deux suites (a_n) et (b_n) aient la même limite égale environ à 2,924018.

c. Puisque les nombres a_n^3 semblent tendre vers 25, on peut penser que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}.$$

d. Puisque les nombres b_n^3 semblent tendre vers 25, on peut penser que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}.$$

2. a. On sait que $b_n^3 \leqslant a_n^3$ donc $b_n \leqslant a_n$ car la fonction cube est croissante sur P.

b. Pour tout n, $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - \frac{3a_n}{3}$
$= \frac{b_n - a_n}{3}$ donc, d'après **2.a.**, $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$, ce qui prouve que (a_n) est décroissante.

Pour tout n, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{25}{a_{n+1}^2} - \dfrac{25}{a_n^2}$

$= \dfrac{25\left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right)}{a_n^2 a_{n+1}^2}$ donc, d'après **2.b.**,

$b_{n+1} - b_n \geqslant 0$, (si on admet que tous les termes a_n sont positifs), ce qui prouve que (b_n) est croissante.

71 **1. a.** La règle est bien vérifiée sur u_1 et u_2 ; en outre, on a $u_3 = 10\ 110$;
$u_4 = 10\ 110\ 101$; $u_5 = 1\ 011\ 010\ 110\ 110$.
b. (u_n) semble croissante et tendre vers $+\infty$.
c. On remarque que tous les chiffres du rang précédent sont conservés, en partant de la gauche.
En effet, on vérifie que u_2 s'obtient en écrivant à la suite les chiffres de u_1 puis celui de u_0, que u_3 s'obtient en écrivant à la suite les chiffres de u_2 puis celui de u_1, que u_4 s'obtient en écrivant à la suite les chiffres de u_3 puis celui de u_2, etc....
Supposons que la règle soit vraie pour u_{n+2} (et tous les termes précédents), c'est-à-dire que si $u_n = bbb\ldots bb$ et si $u_{n+1} = aaa\ldots aa$ alors $u_{n+2} = aaa..aabbb\ldots bb$, où a et b sont des chiffres 0 ou 1. Ainsi, pour obtenir u_{n+3}, en commençant par la gauche, les premiers chiffres $aaa\ldots aa$ de u_{n+2} donnent $aaa..aabbb\ldots bb$ (d'après la formation de u_{n+2} à partir de u_{n+1}) et les derniers chiffres $bbb\ldots bb$ de u_{n+2} donnent $aaa\ldots aa$ (d'après la formation de u_{n+1} à partir de u_n).
Ainsi, $u_{n+2} = aaa\ldots aabbb\ldots bbaaa\ldots aa$, ce qui prouve que la règle est encore vérifiée entre u_{n+2} et u_{n+3}.
Donc, de proche en proche, la règle est toujours vérifiée.
2. a. $\ell_0 = 1$; $\ell_1 = 2$; $\ell_2 = 3$; $\ell_3 = 5$; $\ell_4 = 8$; $\ell_5 = 13$.
b. (ℓ_n) est la suite de Fibonacci. En effet, le nombre de 1 de u_{n+2} est ℓ_{n+1} car tous les chiffres de u_{n+1} donnent forcément 1 (soit 10 soit 1). Et le nombre de 0 de u_{n+2} est ℓ_n car seuls les 1 de u_{n+1} donnent 0 (d'après le même raisonnement que pour dénombrer les 1 de u_{n+2}). Donc le nombre total de chiffres de u_{n+2} est $\ell_{n+2} = \ell_{n+1} + \ell_n$.
c. (ℓ_n) semble croissante et tendre vers $+\infty$.

72 **1. a.** f_n semble décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$, croissante sur $[-1\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, quelle que soit la valeur de n.
b. Pour tout réel x, $f_n{}'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$
donc $f_n{}'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$.

x	$+\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_n		$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{5}}{n} - \dfrac{4}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{5}}{n}$	$\searrow$	

2. Conjectures :
– Si $n = 1$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet 0 solution.
– Si $n = 2$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet 1 solution.
– Si $n \geqslant 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet 2 solutions.
3. a. Il semble que (α_n) soit croissante et que (β_n) soit décroissante.
b. Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1$.

73 **1.** La hauteur est $x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc l'aire est $x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
2. $c_0 = 3$; $\ell_0 = 1$; $p_0 = c_0\ell_0 = 3$; $a_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
$c_1 = 12$; $\ell_1 = \dfrac{1}{3}$; $p_1 = c_1\ell_1 = 4$;
$a_1 = a_0 + c_0 \times \ell_1{}^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
3. $c_{n+1} = 4c_n$ donc (c_n) est une suite géométrique de raison 4. Ainsi, $c_n = 4 \times 4^n$.
4. $\ell_{n+1} = \dfrac{1}{3}\ell_n$ donc (ℓ_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. Ainsi, $\ell_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
5. a. $p_n = c_n\ell_n = 3 \times 4^n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.
b. $\dfrac{4}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.
6. a. $a_{n+1} = a_n + c_n \times \ell_{n+1}^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ donc

$$a_{n+1} - a_n = 3 \times 4^n \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 4^n \times \frac{1}{9^{n+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.$$

b. On a d'une part, en réduisant :
$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_1 - a_0)$
$= a_n - a_0$.
On a d'autre part, en appliquant l'égalité de la question **6.a.** :
$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_1 - a_0)$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + ... + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

Donc $a_n - a_0 = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ d'où

$$a_n = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

c. $a_{10} = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{10}\right] + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}693.$

d. $-1 < \frac{4}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$;
par conséquent, on peut supposer que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3\sqrt{3}}{20} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

74 **1. a.** Pour tout n, $n + 1 > n$ donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$. Donc $u_n > 0$.
b. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$; or $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

donc $f'(x) < 0$ et f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$, ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

Remarque : on a aussi $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}$$ donc $f'(x) < 0$.

c. D'après **1.a.**, (u_n) est minorée par 0.
D'après **1.b.**, (u_n) est majorée par $u_0 = 1$.
Donc (u_n) est bornée.
d. On peut aussi écrire :

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

donc on conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. a. Pour tout n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ donc, d'après **1.a.**, $S_{n+1} - S_n > 0$, ce qui prouve que (S_n) est croissante.
b. Pour tout n, $S_n = \sqrt{n+1}$ donc on conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

75 $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - x + 5$.
On a $u_0 = k$, $u_1 = f(k)$, $u_2 = f(f(k))$, etc.
Posons $g(x) = f(x) - x$; on a $g'(x) = 2x - 2$.
g est décroissante sur $]-\infty\ ; 1]$ car $g'(x) < 0$, et croissante sur $[1\ ;+\infty[$ avec $g(1) = 4$.
Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 4 donc, pour tout réel x, $g(x) > 0$, c'est-à-dire $f(x) > x$.
Ainsi $f(k) > k$, $f(f(k)) > f(k)$ etc…c'est-à-dire $u_1 > u_0$, $u_2 > u_1$, etc.…
Donc, de proche en proche, on démontre que (u_n) est toujours strictement croissante, quelle que soit la valeur de k.
Donc elle ne peut pas reprendre la valeur k à un rang non nul.

76 La suite est définie par $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Elle est donc positive et ne peut avoir une limite strictement négative.
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2 + x}$. La représentation graphique de la suite, à l'aide de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$, indique que (u_n) semble tendre vers 2 (qui est l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite, donc la solution positive de l'équation $f(x) = x$).

77 Notons r la raison de la suite (a_n) et posons, pour tout $n \geqslant 1$, $d_n = s_{n+1} - s_n$. Démontrons que (d_n) est constante, en plusieurs étapes :
Étape 1 : Comme (s_n) est une suite d'entiers strictement croissante, on a nécessairement, pour tout $n \geqslant 1$, $d_n \geqslant 1$ donc (d_n) est minorée par 1.
D'autre part, pour tout $n \geqslant 1$,
$d_n = s_{n+1} - s_n \leqslant d_{s_{n+1}-1} + \dots d_{s_n}$
donc $d_n \leqslant a_{n+1} - a_n$, soit $d_n \leqslant r$
donc (d_n) est majorée par r.

Par conséquent, (d_n) est bornée.
Étape 2 : Comme la suite (d_n) est bornée et à valeurs entières, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs ; notons $m = \min(d_n)$ et $\mathrm{M} = \max(d_n)$ qui sont les deux valeurs extrêmes et entières de d_n. Il suffit alors de montrer que $m = \mathrm{M}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $m < \mathrm{M}$.
Étape 3 : Soit n l'entier tel que $m = d_n$ et q l'entier tel que $\mathrm{M} = d_q$.
$r = a_{n+1} - a_n \leqslant d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_{n+1}-1}$
$\leqslant m\mathrm{M}$ car le nombre de termes est $s_{n+1} - s_n = d_n = m$ et chaque terme est majoré par M.
Par une méthode analogue, on démontre que $r = a_{q+1} - a_q \geqslant \mathrm{M}m$ car le nombre de termes est cette fois $s_{q+1} - s_q = d_q = \mathrm{M}$ et chaque terme est minoré par m.
Ainsi, $r \leqslant m\mathrm{M}$ et $r \geqslant m\mathrm{M}$ donc $\boxed{r = m\mathrm{M}}$ et chacune des inégalités utilisées est en fait une égalité.
Étape 4 : Ainsi, $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_{n+1}-1} = \mathrm{M}$ et $d_{s_q} = d_{s_q+1} = \dots = d_{s_{q+1}-1} = m$.
Par conséquent, $d_n = m \Rightarrow d_{s_n} = \mathrm{M}$ et $d_q = \mathrm{M} \Rightarrow d_{s_q} = m$.
Étape 5 : On remarque que, pour tout k, $s_k \geqslant k$ car la suite est une suite d'entiers strictement positifs. Donc, d'après l'étape 4 et du fait que $m < \mathrm{M}$, $s_n > n$ et $s_q > q$.
Il en résulte que l'on peut construire une suite strictement croissante d'entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ telle que, alternativement, on ait :
$d_{s_{n_1}} = \mathrm{M}$, $d_{s_{n_2}} = m$, $d_{s_{n_3}} = \mathrm{M}$, $d_{s_{n_4}} = m$, ...
Cette suite est extraite des suites (a_n) et (b_n) qui sont arithmétiques donc on devrait avoir $m = \mathrm{M}$ ce qui contredit l'hypothèse.
Conclusion : $m = \mathrm{M}$ et (d_n) est constante, ce qui prouve que (s_n) est arithmétique.

78 Étape 1 : Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite (a_n) d'entiers positifs ou nuls ne s'annule jamais, c'est-à-dire que, pour tout $k \geqslant 1$, $a_k \geqslant 1$.
On aurait alors : $a_1 \geqslant a_2 + a_3 \geqslant a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \geqslant \dots \geqslant a_{2n} + a_{2n+1} + \dots + a_{2n+1-1} \geqslant 2^n$, ce qui est absurde car la suite (2^n) tend vers $+\infty$.
Donc la suite (a_n) s'annule.
Étape 2 : Choisissons un entier k tel que $a_k = 0$ (k existe d'après l'étape 1).
On aurait alors :
$$0 \geqslant a_{2k} + a_{2k+1} \geqslant a_{4k} + a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} \geqslant \dots \geqslant a_{2^s k} + a_{2^s k+1} + \dots + a_{2^s k+2^s-1} \geqslant 0,$$
ce qui fournit 2^s termes consécutifs qui sont tous nuls.
Étape 3 : Pourtant, une telle suite n'est pas nécessairement la suite nulle.
Par exemple, la suite (a_n) définie par $a_n = 1$ si $n = 2^k$ et $a_n = 0$ sinon, vérifie les hypothèses et n'est pas la suite nulle.

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

Les biographies de Benoît Mandelbrot et de Waclaw Sierpinsky peuvent être recherchées sur Wikipedia.
Les exemples de fractales sont très nombreux : quelques-uns apparaissent dans le chapitre et peuvent être traités ici, s'ils n'ont pas été traités en classe, comme le tapis de Sierpinsky (activité 4 page 129) ou le flocon de Koch (voir exercice 73 page 152). On peut aussi étudier le triangle de Sierpinsky, l'ensemble de Cantor, l'ensemble de Mandelbrot ou la courbe de Peano, etc. L'élève devra être capable de citer la suite utilisée dans chaque exemple de fractale, et montrera des images de fractales obtenues lors de beaucoup de répétitions.
On peut aussi visualiser un film retransmis sur ARTE le 24/09/2010 : la vidéo à télécharger se trouve sur : http://www.megaupload.com/?d=UL3LUS9F.