Second degré

Chapitre 1

Ouverture

Sur la photographie, l'écoulement de l'eau est non perturbé ; le flot est guidé par la rigole de la fontaine et les gouttelettes formant ce flot arrivent toutes parallèlement, avec une vitesse assez importante ; ces vitesses sont toutes dans la direction de l'axe de la rigole. En utilisant l'exercice 94, on voit que les trajectoires de ces gouttelettes sont des arcs de parabole et ces arcs sont sensiblement les mêmes, ceux d'une parabole assez « ouverte » (influence de la vitesse) et cette gerbe de paraboles conduit à l'aspect donné par la photographie. On peut même noter que les deux bords de sortie de la rigole changent très légèrement la direction de la vitesse des gouttelettes, donc le plan de la parabole, ce qui explique le resserrement du flot au niveau médian.

Si l'on place un doigt verticalement dans la vasque supérieure, près de l'entrée de la rigole, on produit une perturbation de l'écoulement : une partie de l'eau heurte le doigt, rebondit dans toutes les directions et perturbe aussi l'écoulement de l'eau qui n'a pas heurtée le doigt. Au lieu de s'engouffrer dans la rigole avec des vitesses assez importantes et toutes dans la direction de l'axe de la rigole, les gouttelettes sinuent dans la rigole, heurtent les parois et sortent de la rigole avec une vitesse nettement plus faible et ces vitesses sont dans toutes les directions. Les trajectoires sont toujours des arcs de parabole mais, d'une part ces paraboles se répartissent dans la famille des plans verticaux à la sortie de la rigole et, d'autre part, ces paraboles sont au contraire très fermées (influence d'une vitesse faible) ; d'ou l'aspect d'une gerbe s'écoulant le long de la paroi, aspect renforcé par le fait que la paroi n'est pas tout à fait verticale.

Vérifier ses acquis

1 **a.** f_1 est sous forme factorisée, avec $a = 3$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 10$.
b. f_2 est sous forme canonique, avec $a = 3$, $\alpha = 5$ et $\beta = -75$.
c. f_3 est sous forme développée, avec $a = 3$, $b = -4$ et $c = -10$.
d. f_4 est sous forme factorisée, avec $a = -1$, $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$.
e. f_5 n'est sous aucune des trois formes. On développe et on réduit pour obtenir : $f_5(x) = -18x - 9$. Il ne s'agit pas d'un polynôme du second degré mais d'une fonction affine.
f. f_6 n'est sous aucune des trois formes. On développe et on réduit pour obtenir : $f_6(x) = 2x^2 + 2x + 41$. Il s'agit d'un trinôme du second degré, sous forme développée avec $a = 2$, $b = 2$ et $c = 41$.
g. f_7 n'est sous aucune des trois formes. On développe et on réduit pour obtenir : $f_6(x) = x^2 + 20x - 25$. Il s'agit d'un trinôme du second degré, sous forme développée avec $a = 1$, $b = 20$ et $c = -25$.

2 **1.** b. **2.** c. **3.** c. **4.** a.

3 **1. 1.** Il s'agit d'une équation produit, donc $x = 4$ ou $x = -4$.
2. Pas de solution.
3. Il s'agit d'une équation produit, donc $x = 7$ ou $x = -3$.
4. Il s'agit d'une équation produit, donc $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.
2. a. $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.
b. $3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + \frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$.
c. $-x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow -x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$.
d. $5x^2 + x = 0 \Leftrightarrow 5x(x + \frac{1}{5}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{5}$.

4 **a.** L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions qui sont –2 et 1. L'équation $g(x) = 0$ admet les mêmes solutions. L'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions qui sont –3,5 et 2,5.

b. L'inéquation $f(x) < 0$ admet comme solution l'ensemble $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.
L'inéquation $g(x) < 0$ admet comme solution l'ensemble $]-2 ; 1[$.
c. Le sommet de $\mathscr{C}_f$ a pour cordonnées (0,5 ; 2,25). Les sommets de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ ont pour coordonnées (0,5 ; –4,5).

5 **a.** $a = 2$ qui est positif, donc il s'agit de g ou h. De plus, les solutions de l'équation $2(x - 1)(x + 2) = 0$ sont 1 et –2 ; il s'agit donc d'une expression de la fonction g.
b. $a = \frac{1}{2}$ qui est positif et les coordonnées du sommet sont $(\alpha ; \beta) = \left(\frac{1}{2} ; -\frac{9}{2}\right)$; il s'agit donc de g ou h. Comme d'après la réponse **a.**, le coefficient $a = 2$ pour g, il s'agit d'une expression de h.
c. Les racines ne sont pas utiles car f et g ont les mêmes. Par contre, $a = -1$ qui est négatif, donc il s'agit d'une expression de la fonction f.
d. $a = \frac{1}{2}$ et d'après la réponse à la question **b.**, il s'agit d'une expression de la fonction h. On peut confirmer en considérant les solutions de l'équation.
e. $a = -1$ qui est négatif, donc il s'agit d'une expression de la fonction f. On peut confirmer à l'aide des coordonnées du sommet de la parabole.
f. $a = 2$ et d'après la réponse à la question **a.**, il s'agit d'une expression de la fonction g.

6 **a.** Il s'agit dans un premier temps de compléter la première ligne en résolvant les équations $x - 1 = 0$ et $x + 2 = 0$, qui a pour solutions $x = 1$ et $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $x - 1$		–		–	0	+	
Signe de $x + 2$		–	0	+		+	
Signe de $-(x - 1)(x + 2)$		–	0	+	0	–	

b. La solution de cette inéquation est l'ensemble $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

Activités d'introduction

Activité 1

Commentaires : Cette activité permet de faire le lien avec la classe de 2^e^ où l'étude d'un problème d'optimisation à l'aide d'un logiciel de géométrie ne pouvait pas toujours être résolu sans « guider l'élève ». Il s'agit ici d'établir une équation du 2^e^ degré, et de ne pas faire l'erreur d'avoir le réflexe de développer, mais plutôt de factoriser.

1 **a.** @ La figure est téléchargeable sur le site www.libtheque.fr/mathslycee.
b. Selon l'intuition de chacun… (mais plutôt du côté du point B).
c. L'emplacement du point M semble être au deux-tiers du segment [AB] en partant de A. Trouver la position exacte n'est pas possible puisqu'il n'est pas possible de placer exactement un point libre.

2 **a.** $\mathscr{A}_{AMPQ} = x^2$.
b. MB = AB – AM = $4 - x$,
donc $\mathscr{A}_{MBRS} = (4 - x)^2$.
c. Comme x représente la longueur AM et que celle-ci ne peut excéder celle de AB, alors $x \in [0 ; 4]$. Dire que l'aire de AMPQ est quatre fois plus grande que celle de MBRS revient à dire que

$$x^2 = 4(4 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4(4 - x)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - [2(4 - x)]^2 = 0.$$

d. La factorisation donne l'équivalence avec l'équation suivante :

$$[x - 2(4 - x)][x + 2(4 - x)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 8)(-x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ou } x = 8.$$

De ces deux solutions, seule la première appartient à l'intervalle [0 ; 4]. Ainsi, il faut placer le point M à une distance de $\frac{8}{3}$ de A sur le segment [AB].

Activité 2

Commentaires : L'activité 1 est particulière car elle permet assez facilement d'obtenir une équation produit à l'aide de l'identité remarquable appropriée. Mais cela n'arrive que très peu souvent.

1 Graphiquement, il semble falloir placer le point M à environ 1,5 cm de A, à l'extérieur du cercle.

2 **a.** On utilise le théorème de Thalès dans les triangles AMM' et ABN'. On obtient alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AN'}{AM'}$.

Mais comme M' appartient au cercle de rayon AB, alors AM' = AB.

b. Selon que M est d'un côté ou de l'autre du point B, la longueur MB est plus petite ou plus grande que 1 ; il faut alors considérer 2 cas :

Si M $\in$]AB], alors $x \in$]0 ; 1].

Ainsi, MB = 1 − x et résoudre le problème revient à résoudre l'équation suivante :

$\frac{1}{x} = \frac{1-x}{1} \Leftrightarrow x(1-x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$

Si M $\notin$]AB[, alors $x \in$]1 ; + ∞[.

Ainsi, MB = x − 1 et résoudre le problème revient à résoudre l'équation suivante :

$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

c. $x^2 - x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

d. $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

e. $x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ et

$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$. Ces deux polynômes sont sous forme dite canonique.

f. On ne peut pas factoriser la première équation car on ne reconnait pas l'identité remarquable $A^2 - B^2$, alors que dans la seconde oui.

g. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

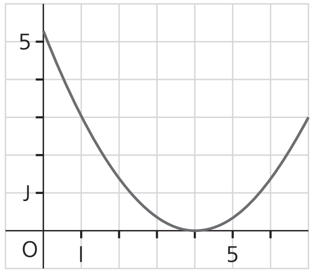
Mais étant donné que la seconde solution n'appartient pas à l'intervalle]1 ; +∞[, la seule solution est la première.

Activité 3

Commentaires : Travailler sur la forme canonique, rappeler les coordonnées du sommet de la parabole.

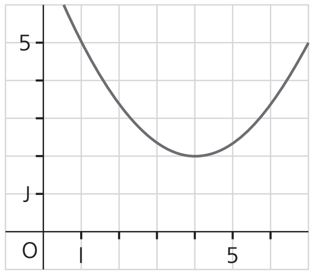
1 **1. a.** $f_1(x) = \frac{1}{3}(x-4)^2$.

b.



c. Il s'agit d'une translation de vecteur ayant pour coordonnées (4 ; 0).

2. a. $f_2(x) = \frac{1}{3}(x-4)^2 + 2$.



b. Il s'agit d'une translation de vecteur ayant pour coordonnées (0 ; 2).

c. Au final, la translation permettant d'obtenir $\mathscr{C}_2$ à partir de $\mathscr{C}$ est la translation de vecteur ayant pour coordonnées

(4 ; 0) + (0 ; 2) = (4 ; 2).

3. a Graphiquement, $\alpha = \beta = 0$.

b. Un carré étant toujours positif, et la multiplication par un positif ne changeant pas les signes, on a donc $\frac{1}{3}x^2 \geqslant 0$. De plus, $f(0) = 0$.

Cela signifie que la fonction f admet un minimum égal à 0, atteint pour $x = 0$.

4. $S_1(4\,;0)$. Pour les mêmes raisons qu'en **3. b.**, $\frac{1}{3}(x-4)^2 \geqslant 0$. De plus, $f_1(4) = 0$. Cela signifie que la fonction f_1 admet un minimum égal à 0, atteint pour $x = 4$.

$S_2(4\,;2)$. D'après l'inégalité précédente, on en déduit que $\frac{1}{3}(x-4)^2 + 2 \geqslant 2$. De plus, $f_2(4) = 2$.

Cela signifie que la fonction f_1 admet un minimum égal à 2, atteint pour $x = 4$.

2 **1.** S(0 ; 0) ; $S_1(-2 ; -3)$; $S_2(-2 ; 3)$; $S_3(2 ; 3)$ et $S_4(2 ; -3)$
2. $f_1(x) = -3(x+2)^2 - 3$; $f_2(x) = -3(x+2)^2 + 3$; $f_3(x) = -3(x-2)^2 + 3$; $f_4(x) = -3(x-2)^2 - 3$.
3. a. Un carré étant toujours positif, on a $(x + 2)^2 \geqslant 0$ puis $-3(x + 2)^2 \leqslant 0$ et enfin $-3(x+2)^2 - 3 \leqslant -3$. De plus, $f_1(-2) = -3$.
b. Même techniques.
c. L'inégalité est inverse à cause du coefficient *a* qui est négatif.

Activité 4

Commentaires : La classe de 2e a permis de découvrir les trois formes d'un trinôme du second degré et il est maintenant nécessaire d'apprendre à jongler entre ces trois formes qui ont chacune une spécificité.

1 **a.** La forme développée est $-2x^2 + 20x + 22$.
b. On commence par factoriser l'expression donnée par -2, et on a $-2[(x-5)^2 - 36]$, puis on reconnait dans les crochets une identité remarquable, qui se factorise ainsi $-2(x-5-6)(x-5+6) = -2(x-11)(x+1)$.

2 **a.** La forme la plus adapté est la forme développée car, x étant égal à 0, il ne reste que le terme $c = 22$.
b. La forme la plus adaptée est la forme canonique car elle donne les coordonnées du sommet de la parabole. De plus, comme $a = -2$ qui est négatif, on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations de f		↗	72	↘	

c. La forme la plus adaptée est la forme factorisée car elle permet d'utiliser la règle des signes.

x	$-\infty$		-1		11		$+\infty$
Signe de $x - 11$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3 **a.** Le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		-1		11		$+\infty$
Signe de $x - 11$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Les signes de l'expression de $f_1(x)$ sont les opposés des signes de $f(x)$. Cela est dû au coefficient *a* qui n'a pas le même signe dans les deux expressions.
« À l'extérieur des racines », on retrouve le signe de *a* et « à l'intérieur des racines », celui de $-a$.

4 $g(x)$ est déjà sous forme développée. La forme factorisée est $g(x) = 3(x-2)(x+2)$.
$h(x) = 5x^2 - 20x$. Ici, il est plus simple d'utiliser la forme développée pour trouver la forme factorisée, qui est $h(x) = 5x(x-4)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g		↘	-12	↗	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de h		↘	-20	↗	

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $g_1(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de $x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de $h_1(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Travaux pratiques

TP TICE 1 Trouver l'expression d'un trinôme

1 **a.** Il est nécessaire que le point S ne soit pas aligné avec A et B, et donc que son ordonnée y_S ne soit pas égale à 0.
b. On se sert de la forme canonique d'un trinôme : (x – x(S)) ^ 2 + y(S).
@ Le fichier est téléchargeable sur www.libtheque.fr/mathslycee.

2 **1. b.** Déplacer « horizontalement » le point S ne change pas les positions relatives des points A et B par rapport à la courbe.

c. Déplacer « verticalement » le point S change les positions relatives des points A et B par rapport à la courbe.
d. Le coefficient a semble donc dépendre uniquement de l'ordonnée de S, c'est-à-dire y(S).
2. a. Lorsque les points A et B sont visuellement sur la courbe, on a $y_S = -1$.
On peut donc penser que a $= -y_S$.
b. On modifie l'expression précédente dans le logiciel pour –y(S)*(x – x(S)) ^ 2 + y(S) et lorsqu'on déplace S, les points A et B semblent être toujours sur la courbe.

3 On sait que l'expression du trinôme ayant pour sommet S est $a(x - x_S)^2 + y_S$. Il reste donc à trouver la valeur de a. On veut que le point A (ou B) appartienne à la représentation graphique, c'est-à-dire algébriquement que
$y_A = a(x_A - x_S)^2 + y_S$
$\Leftrightarrow 0 = a(x_S - 1 - x_S)^2 + y_S$
$\Leftrightarrow 0 = a + y_S \Leftrightarrow a = -y_S$.

4 **a.** Dans cette situation, y_S ne soit pas égal à 1.
Cette fois si, il semble que $a = 1 - y_S$ ou $a = 1 + y_S$ ou … puisqu'il semble falloir positionner S sur l'axe des abscisses pour que les points A et B appartiennent à la courbe.
C'est la première solution qui semble être correcte lorsqu'on fait tracer la fonction (1 – y(S))*(x – x(S)) ^ 2 + y(S) dans le logiciel.
La démonstration se fait selon le même principe, en traduisant algébriquement le fait que A (ou B) appartient à la parabole :
$y_A = a(x_A - x_S)^2 + y_S$
$\Leftrightarrow 1 = a(x_S - 1 - x_S)^2 + y_S$
$\Leftrightarrow 1 = a + y_S \Leftrightarrow a = 1 - y_S$.
b. Il semble qu'il faille que $y_S \leqslant 0$ ou $y_S > 1$.
c. Un trinôme admet au moins une racine lorsque son discriminant est positif ou nul. Pour calculer ce déterminant, on commence par développer et réduire l'expression du trinôme, ce qui donne :
$(1 - y_S)x^2 - 2x_S(y_S - 1)x + x_S^2 - y_Sx_S^2 + y_S$.
Son discriminant est
$\Delta = 4x_S^2(1 - y_S)^2 - 4(1 - y_S)(x_S^2 - y_Sx_S^2 + y_S)$
$= (1 - y_S)(-4\,y_S)$.
$\Delta \geqslant 0$ si et seulement si
$\begin{cases} 1 - y_S \geqslant 0 \\ -4y_S \geqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 1 - y_S \leqslant 0 \\ -4y_S \leqslant 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} y_S \leqslant 1 \\ y_S \leqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y_S \geqslant 1 \\ y_S \geqslant 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $y_S \leqslant 0$ ou $y_S \geqslant 1$.
Il faut encore exclure la valeur 1 car sinon $a = 0$, ce qui est exclu d'après la question **4. a.**

TP Algorithmique 1 Tester si un nombre est un carré parfait

1 L'entier n est un carré parfait si et seulement si r est un entier.

2 **a.** Algorithme ① pour $n = 25$.
La variable `e` vaut
`floor(sqrt(25)) = floor(5) = 5`.
La condition `e*e == n` est vraie donc l'algorithme affiche « n est un carré ».

Algorithme ② pour $n = 25$.
La variable `r` vaut `sqrt(25) = 5`.
La condition `floor(r) == r` est vraie, donc l'algorithme affiche « n est un carré ».

Algorithme ③ pour $n = 25$.
Les valeurs successives de `i` sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. À ce moment là, la condition `i*i<n` est fausse donc la boucle s'arrête.
La condition `i*i == n` est vraie, donc l'algorithme affiche « n est un carré ».

Algorithme ④ pour $n = 25$.
Les valeurs successives de `s` et `k` sont :

s	k
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5

À ce moment là, la condition `s < n` est fausse donc la boucle s'arrête.
La condition `s == n` est vraie, donc l'algorithme affiche « n est un carré ».

Algorithme ① pour $n = 34$.
La variable `e` vaut
`floor(sqrt(34)) = floor(5,83…) = 5`.
La condition `e*e == n` est fausse donc l'algorithme affiche « n n'est est un carré ».

Algorithme ② pour $n = 34$.
La variable `r` vaut `sqrt(34) = 5,83…`
La condition `floor(r) == r` est fausse, donc l'algorithme affiche « n n'est pas un carré ».

Algorithme ③ pour $n = 34$.
Les valeurs successives de `i` sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. À ce moment là, la condition `i*i < n` est fausse donc la boucle s'arrête.
La condition `i*i == n` est fausse, donc l'algorithme affiche « *n* n'est pas un carré ».

Algorithme ④ pour $n = 34$
Les valeurs successives de `s` et `k` sont :

s	k
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6

À ce moment là, la condition `s < n` est fausse donc la boucle s'arrête.
La condition `s == n` est fausse, donc l'algorithme affiche « *n* n'est pas un carré ».

b. À l'issue de ce test, on élimine les algorithmes ③ et ④ qui sont trop longs à exécuter.

c. Dans l'algorithme ①, les nombres comparés sont des entiers tandis que dans l'algorithme ②, il y a un entier et un réel ou du moins la représentation informatique de ce réel.

d. Selon la précision de la machine exécutant l'algorithme il se peut que la comparaison de deux réels ne soit pas correcte.

3 Pour tester toutes les valeurs de p entre -10^5 et 10^5, on encapsule l'algorithme précédant dans une boucle :

```
Pour p allant de -10^5 à 10^5
   n = p*p – 4*p ;
   e = floor(sqrt(n)) ;
   Si e*e == n alors
      Afficher (« p ») ;
   FinSi
FinPour
```

Cet algorithme affiche deux valeurs : 0 et 4.

TP Algorithmique 2 Recherche exhaustive de solutions

1 **a.** Si on pose L et ℓ les dimensions du rectangle, on a $2(L + \ell) = 28$, c'est-à-dire $L + \ell = 14$.
De plus, à l'aide du théorème de Pythagore, on en déduit que : $L^2 + \ell^2 = 10^2 = 100$.

b. On exprime ℓ en fonction de L d'après la première équation et on substitue dans la seconde pour obtenir :

$$\begin{cases} L + \ell = 14 \\ L^2 + (14 - L)^2 = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L + \ell = 14 \\ L^2 + 196 - 28L + L^2 = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L + \ell = 14 \\ 2L^2 + 96 - 28L = 0 \end{cases}.$$

c. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-28)^2 - 4 \times 2 \times 96 = 16$. $\Delta > 0$, donc l'équation possède deux solutions réelles distinctes :

$$L_1 = \frac{28 - \sqrt{16}}{2 \times 2} = 6 \text{ et } L_2 = \frac{28 + \sqrt{16}}{2 \times 2} = 8$$

Si $L = L_1$, alors $\ell = 14 - L = 14 - 6 = 8$ et si $L = L_2$, alors $\ell = 14 - 8 = 6$.
Finalement, il n'y a qu'un seul rectangle possible.

2 **a.** La première équation vient du fait que le périmètre $p = 2(L + \ell)$.
La seconde vient de l'égalité de Pythagore, dans laquelle on substitue l'expression de ℓ en fonction L donnée par la première équation :

$$L^2 + \ell^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow L^2 + \left(\frac{p}{2} - L\right)^2 = (2r)^2$$

$$\Leftrightarrow L^2 + \frac{p^2}{4} - pL + L^2 = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 2L^2 - pL + \frac{p^2}{4} - 4r^2 = 0.$$

b. $$\Delta = (-p)^2 - 4 \times 2 \times \left(\frac{p^2}{4} - 4r^2\right)$$

$$= p^2 - 2p^2 + 32r^2 = 32r^2 - p^2.$$

c. L'équation admet des solutions si et seulement si $\Delta \geqslant 0$, c'est-à-dire $32r^2 \geqslant p^2$. On a alors :

$$L_1 = \frac{p - \sqrt{32r^2 - p^2}}{4}$$

$$\text{et } L_2 = \frac{p + \sqrt{32r^2 - p^2}}{4}.$$

3 **1.** Une condition nécessaire sur Δ est qu'il soit un carré parfait.

Remarque : il est possible de montrer que la condition est aussi suffisante, mais ceci est un problème d'arithmétique de niveau TS.

2. Algorithme

```
Saisir(N) ;
Pour r allant de 1 à N, faire
   p = 1 ;
   TantQue p*p < = 32*r*r
      Delta = 32*r*r - p*p ;
      e = floor(sqrt(Delta)) ;
      Si e*e == Delta alors
         Afficher (r) ;
         Afficher (p) ;
      FinSi
      p = p + 1 ;
   FinTantQue
FinPour
```

3. a. Lorsque $(r\ ;\ p) = (1\ ;\ 4)$, alors $L = 0$ et $\ell = 2$. C'est-à-dire qu'on obtient un rectangle plat, peut intéressant !

b. Lorsque $(r\ ;\ p) = (5\ ;\ 4)$, alors $L = -4$ et $\ell = 8$. Ces solutions ne sont pas possibles car des longueurs sont nécessairement positives.

c. Dans l'algorithme, il suffit de rajouter un test conditionnel sur la valeur de L_1 afin d'éviter l'affichage de r et p lorsqu'elle est négative (L_2 est obligatoirement positive). Le test s'écrit ainsi :

```
Si e*e == Delta && p – e > 0 alors
   Afficher (r) ;
   Afficher (p) ;
FinSi
```

4 **a.** $r \leqslant N$

b. $p^2 \leqslant 32r^2$ donc $p \leqslant 6r$, donc $p \leqslant 6N$

c. Il y a donc au maximum $N \times 6N = 6N^2$ couples testés.

TP Algorithmique 3 La méthode de Monte-Carlo

1 **1.** Pour calculer les abscisses de B et C, on résout l'équation

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Pour les coordonnées du sommet de la parabole, on utilise la forme canonique.

Dans $1 - x^2$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

2. $I = [-1\ ;\ 1]$ et $J = [0\ ;\ 1]$.

3. a. L'intervalle I est d'amplitude 2, tandis que I_{alea} est d'amplitude 1, le nombre a est donc égal à 2. On obtient donc l'intervalle $I_1 = [0\ ;\ 2]$. Il faut alors le décaler de $b = -1$ pour le faire coïncider avec I.

On vérifie que

$0 \leqslant alea \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2alea \leqslant 2$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant 2alea - 1 \leqslant 1.$

b. y = *alea*.

4.
```
Saisir(N) ;
Compteur = 0 ;
Pour i = 1 à N faire
   x = 2*alea – 1 ;
   y = alea ; //ce n'est pas le même qu'à
   la ligne précédente, chaque instan-
   ciation est nouvelle.
   Placer le point de coordonnées (x;y) ;
   Si y < 1– x*x alors //c'est-à-dire si
   le point est «sous» la courbe
      compteur = compteur + 1 ;
   FinSi
FinPour
Afficher(compteur/N) ;
```

5. On trouve une proportion d'environ 0,665 lorsqu'on effectue environ N = 1 000 simulations.

6. On a donc l'égalité suivante :

$$\frac{A_S}{A_{ABCD}} = 0{,}665$$

$\Leftrightarrow A_S = 0{,}665 \times A_{ABCD} = 0{,}665 \times 2 = 1{,}33.$

2 **a.** Pour adapter l'algorithme, il suffit de changer la condition pour laquelle le point est « sous » la courbe, c'est-à-dire `y < sqrt(1 - x*x)`

b. On s'attend à trouver l'aire du demi-disque de rayon 1, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$. Empiriquement, on trouve proportion d'environ 0,763 soit une surface d'environ 1,526 pour N = 1 000 simulations.

Exercices

Appliquer le cours

1 **1.** a. ; **2.** c.

2 **a.** Non ; **b.** Oui.

3 b. ; c. ; f.

4 **a.** Vrai ; **b.** Vrai ; **c.** Faux.

5 **1.** b. et c. ; **2.** c. ; **3.** b. ; **4.** c.

6 ① c. ; ② a. ; ③ c.

7 **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Vrai.

8 **1.** b. ; **2.** a.

9 **a.** canonique ; **b.** factorisée ;
c. canonique ; **d.** factorisée ;
e. factorisée ; **f.** réduite.

11 **a.** C'est un trinôme du second degré sous forme réduite, avec $a = -3$; $b = \sqrt{2} + 7$ et $c = 0$.
b. C'est un trinôme du second degré sous forme réduite, avec $a = \frac{2}{3}$; $b = 0$ et $c = \frac{7}{3}$.
c. C'est un trinôme du second degré que l'on peut mettre sous forme canonique $79 - (x - 3)^2$, avec $a = -1$; $\alpha = 3$ et $\beta = 79$.
d. Cette fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, ce n'est pas donc un trinôme du second degré.
e. On peut développer, ou factoriser par $(x - 1)$, ce qui donne

$$(x-1)(x+2-2x+4) = (x-1)(-x+6) = -(x-1)(x-6).$$

Cette forme est factorisée, avec $a = -1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$.
f. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et on peut simplifier l'expression en $x^2 + 2 - 2 = x^2$.
C'est donc un trinôme du second degré sous les trois formes.

13 **a.** $(x - 5)^2 + 4$; **b.** $(x - 2)^2 + 7$;
c. $(x + 1)^2 - 1$; **d.** $2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$;
e. $-2(x - 2)^2 - 56$; **f.** $9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$.

14 **a.** $-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$;
b. $\left(x + \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$;
c. $\frac{1}{3}(x + 9)^2 - 28$;
d. $(x - 4)^2$.

15 Voici les deux programmes, écrits avec une TI et une CASIO.

```
PROGRAM:CANONIQU
:Prompt A
:Prompt B
:Prompt C
:Disp "ALPHA"
:Disp -B/(2A)▸Fr
ac
:Disp "BETA"
```

```
======CANONIQU======
"A="?→A↵
"B="?→B↵
"C="?→C↵
"ALPHA=":-B⌟(2A)◢
"BETA=":-(B^2-4AC)⌟(4
A)
TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
```

17 L'erreur a été de mal indiquer le nom de l'inconnue. Il fallait indiquer y au lieu de x.
a.

```
(%i1) solve([47*h^2-3*h+sqrt(7)], [h]);
```
(%o1) $\left[h = -\frac{\sqrt{9-188\sqrt{7}}-3}{94},\ h = \frac{\sqrt{9-188\sqrt{7}}+3}{94}\right]$

b.

```
(%i2) solve([x^2-s*x+p], [x]);
```
(%o2) $\left[x = -\frac{\sqrt{s^2-4p}-s}{2},\ x = \frac{\sqrt{s^2-4p}+s}{2}\right]$

c.

```
(%i3) solve([a*x^2+b*x+c], [x]);
```
(%o3) $\left[x = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a},\ x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\right]$

20 **a.** Les solutions sont $-\frac{11}{3}$ et $\frac{11}{3}$.
b. Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et 0.
c. L'unique solution est $-\frac{3}{2}$.
d. Pas de solution réelle.
e. Pas de solution réelle.
f. Les deux solutions sont 0 et 15.

22 **a.** $-\frac{5}{6}(x + 5)^2 + 30 = -\frac{5}{6}[(x + 5)^2 - 36]$
$= -\frac{5}{6}(x + 5 - 6)(x + 5 + 6) = -\frac{5}{6}(x - 1)(x + 11)$.
b. L'expression est déjà sous forme factorisée car $\beta = 0$.
c. $-11(x - 1)^2 - 121 = -11[(x - 1)^2 + 11]$.
Pas de factorisation car on ne reconnait pas l'identité remarquable $A^2 - B^2$.
d. $\sqrt{2}(x - 5)^2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}[(x - 5)^2 - 1]$
$= \sqrt{2}(x - 5 - 1)(x - 5 + 1) = \sqrt{2}(x - 6)(x - 4)$.
e. $-(x - 2)^2 - 3 = -[(x - 2)^2 + 3]$. Pas de factorisation.
f. $6x^2 - 96 = 6[x^2 - 16] = 6(x - 4)(x + 4)$.

23 **a.** $\frac{1}{5}(x + 3)^2 - 7 = \frac{1}{5}[(x + 3)^2 - 35]$
$= \frac{1}{5}(x + 3 - \sqrt{35})\frac{1}{5}(x + 3 + \sqrt{35})$.

b. $-3x^2+49=-3(x^2-\frac{49}{3})$

$=-3\left(x-\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$

$=-3\left(x-\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$.

c. $\frac{2}{3}(x-\sqrt{5})^2+1=\frac{2}{3}\left[(x-\sqrt{5})^2+\frac{3}{2}\right]$.

Pas de factorisation.

d. $-4(x-3)^2-25=-4[(x-3)^2+\frac{25}{4}]$. Pas de factorisation.

e. $-\frac{3}{4}(x-\sqrt{2})^2+\frac{3}{8}=-\frac{3}{4}\left[(x-\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\right]$

$=-\frac{3}{4}\left(x-\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

25 **a.** $x^2+7x=x(x+7)$ donc l'équation possède deux solutions : 0 et –7.

b. $\frac{1}{3}x^2-72=\frac{1}{3}(x^2-216)$

$=\frac{1}{3}(x-6\sqrt{6})(x+6\sqrt{6})$ donc l'équation possède deux solutions : $6\sqrt{6}$ et $-6\sqrt{6}$.

c. $5x^2-2\sqrt{10}x+2=(\sqrt{5}x-\sqrt{2})^2$ donc l'équation possède une unique solution :

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

d. $-x^2-9=-(x^2+9)$ donc l'équation n'a pas de solution.

e. $3x^2-6\sqrt{3}x+9=3(x^2-2\sqrt{3}x+3)$
$=3(x-\sqrt{3})^2$ donc l'équation admet une unique solution : $\sqrt{3}$.

f. $3x^2-\frac{6}{5}x=3x(x-\frac{2}{5})$ donc l'équation possède deux solutions : 0 et $\frac{2}{5}$.

26 **a.** $-3x^2+15=-3(x^2-5)$
$=-3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ donc l'équation possède deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

b. $-x^2-4x=-x(x+4)$ donc l'équation possède deux solutions : 0 et –4.

c. $-2x^2+\sqrt{3}x=-2x\left(x-\frac{\sqrt{9}}{2}\right)$ donc l'équation possède deux solutions : 0 et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d. $9x^2-6\sqrt{7}x+7=(3x-\sqrt{7})^2$ donc l'équation possède une unique solution : $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

e. $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x=\frac{3}{2}x(x-\frac{4}{9})$ donc l'équation possède deux solutions : 0 et $\frac{4}{9}$.

f. $\frac{1}{6}x-6x^2=-6x(x-\frac{1}{36})$ donc l'équation possède deux solutions : 0 et $\frac{1}{36}$.

28 **a.** $\Delta=7^2-4\times24\times(-55)=5\,329$.
L'équation possède donc deux solutions :
$x_1=\frac{-7-73}{48}=-\frac{5}{3}$ et $x_2=\frac{-7+73}{48}=\frac{11}{8}$.

b. $\Delta=(-26)^2-4\times35\times(-48)=7\,396$.
L'équation possède donc deux solutions :
$x_1=\frac{26-86}{70}=-\frac{6}{7}$ et $x_2=\frac{26+86}{70}=\frac{8}{5}$.

c. $\Delta=\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\times1\times1=\frac{1}{9}-4$. $\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.

d. L'équation est équivalente à l'équation suivante : $x^2+3x+2=0$.
$\Delta=3^2-4\times1\times2=1$.
L'équation possède donc deux solutions :
$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2$ et $x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$.

29 **a.** $\Delta=(-3)^2-4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.
L'équation possède donc deux solutions :
$x_1=\frac{3-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
et $x_2=\frac{3+1}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

b. $\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\times1\times(-4)=19$.
L'équation possède donc deux solutions :
$x_1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{19}}{2}$ et $x_2=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{2}$.

c. $\Delta=7^2-4\times3\times1=37$.
L'équation possède donc deux solutions :
$x_1=\frac{-7-\sqrt{37}}{6}$ et $x_2=\frac{-7+\sqrt{37}}{6}$;

d. $\Delta=\sqrt{5}^{\,2}-4\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=5-4\sqrt{6}$.
$\Delta<0$ donc l'équation ne possède pas de solution réelle.

30 **1. a.** On calcule $P(2) = 3 \times 2^2 + 2 - 14 = 0$.
b. On peut alors factoriser P de la manière suivante : $P(x) = 3(x - 2)(x - x_2)$ où x_2 est l'autre racine de P.
c. On développe cette dernière expression : $P(x) = 3x^2 - 3x(x_2 + 2) + 6x_2$. On identifie ensuite les coefficients avec l'expression de départ : $-3(x_2 + 2) = 1$ et $6x_2 = -14$. Ces deux équations ont pour solution $x_2 = -\frac{7}{3}$.
Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc 2 et $-\frac{7}{3}$.
2. a. $P(-10) = 2 \times (-10)^2 + 13 \times (-10) - 70 = 0$.
On en déduit la factorisation suivante :
$P(x) = 2(x + 10)(x - x_2)$, que l'on développe : $P(x) = 2x^2 - 2x(x_2 - 10) - 20x_2$. On identifie les coefficients afin d'obtenir les équations : $-2(x_2 - 10) = 13$ et $-20x_2 = -70$ dont la solution est $x_2 = \frac{7}{2}$. Les solutions de l'équa tion $P(x) = 0$ sont donc -10 et $\frac{7}{2}$.
b. $P\left(-\frac{5}{2}\right) = -2 \times \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 40 = 0$.
On en déduit la factorisation suivante :
$P(x) = -2(x + \frac{5}{2})(x - x_2)$, que l'on développe : $P(x) = -2x^2 - 2x(\frac{5}{2} - x_2) + 5x_2$. On identifie les coefficients afin d'obtenir les équations : $-2(\frac{5}{2} - x_2) = 11$ et $5x_2 = 40$ dont la solution est $x_2 = 8$. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont dont $\frac{5}{2}$ et 8.

31 **1. a.** Une racine évidente est 1.
b. On peut alors factoriser P de la manière suivante : $P(x) = 3(x - 1)(x - x_2)$ où x_2 est l'autre racine de P.
c. On développe cette dernière expression : $P(x) = 3x^2 - 3x(x_2 + 1) + 3x_2$. On identifie ensuite les coefficients avec l'expression de départ : $-3(x_2 + 1) = 4$ et $3x_2 = -7$. Ces deux équations ont pour solution $x_2 = -\frac{7}{3}$.
Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc 1 et $-\frac{7}{3}$.

2. a. Une racine évidente est -1. On en déduit la factorisation suivante :
$P(x) = -2(x + 1)(x - x_2)$, que l'on développe : $P(x) = 2x^2 + 2x(x_2 - 1) + 2x_2$. On identifie les coefficients afin d'obtenir les équations : $2(x_2 - 1) = 1$ et $2x_2 = 3$ dont la solution est $x_2 = \frac{3}{2}$. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc -1 et $\frac{3}{2}$.
b. Une racine évidente est -2. On en déduit la factorisation suivante :
$P(x) = -(x + 2)(x - x_2)$, que l'on développe : $P(x) = -x^2 + x(x_2 - 2) + 2x_2$. On identifie les coefficients afin d'obtenir les équations : $(x_2 - 2) = -12$ et $2x_2 = -20$ dont la solution est $x_2 = -10$. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont dont -2 et -10.

33 **a.** Les racines de ce trinôme sont
$x_1 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{21}}{8}$ et $x_2 = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{21}}{8}$.
On peut donc établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
Signe de $4x^2 + \sqrt{5}x - 1$	+ 0 − 0 +

L'inéquation a donc pour solution l'intervalle $]x_1\ ;\ x_2[$.
b. Les racines de ce trinôme sont $x_1 = -\sqrt{7}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{7}}{7}$. L'inéquation a donc pour solution l'ensemble $]-\infty\ ;\ x_1] \cup [x_2\ ;\ +\infty[$.
c. L'unique racine de ce trinôme est $\alpha = \sqrt{10}$. L'inéquation a donc pour solution l'ensemble $]-\infty\ ;\ \alpha[\cup]\alpha\ ;\ +\infty[$.
d. L'inéquation est équivalente à $x^2 + x + 1 \leqslant 0$. Ce trinôme ne possède pas de racine réelle. Il est dont toujours du signe de $a = 1$, c'est-à-dire ici toujours strictement positif. L'inéquation n'a pas de solution.

34 **a.** Pour tout réel x, $2(x - 3)^2 + 7 \geqslant 0$ comme somme de deux nombres positifs, donc $S = \mathbb{R}$.
b. Pour tout réel x, $-(x + 9)^2 - 11 < 0$ comme somme de deux nombres négatifs sont l'un strictement, donc $S = \varnothing$.
c. $S = \varnothing$. **d.** $S = \mathbb{R}$. **e.** $S = \mathbb{R}$. **f.** $S = \varnothing$.

36 **a.** On utilise la forme factorisée avec le coefficient a que l'on veut :
$P(x) = -15(x-2)(x+3)$.
b. On utilise la forme factorisée, avec le coefficient que l'on veut : $P(x) = 2\,012(x+6)^2$.
c. On utilise la forme factorisée, mais avec $a < 0$, puisque P admet un maximum :
$P(x) = -(x+7)(x-2)$.
d. On utilise la forme canonique, avec $a < 0$ et $\beta < 0$: $P(x) = -7(x+2)^2 - 1$.
e. On utilise la forme canonique, avec $a > 0$,
$\alpha = \dfrac{1}{2}$: $P(x) = 501\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1$.

37 **a.** Les racines sont -5 et 3, donc $P(x) = a(x+5)(x-3)$. De plus $P(0) = -15$, donc $a \times 5 \times (-3) = -15 \Leftrightarrow a = 1$.
b. Le sommet a pour coordonnées (3 ; 4), donc $P(x) = a(x-3)^2 + 4$. De plus $P(0) = 8$, donc $a \times (-3)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{9}$.
c. Le sommet a pour coordonnées (0 ; 6), donc $P(x) = ax^2 + 6$. De plus $P(2) = 0$, donc $4a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser la forme factorisée.

38 On note L et ℓ les dimensions de la zone de baignade.
On a alors $2L + \ell = 100 \Leftrightarrow \ell = 100 - 2L$.
La surface de la zone est donné par
$\ell \times L = (100 - 2L)L$.
Il suffit de déterminer la forme canonique de ce trinôme du second degré pour déterminer à la fois la dimension L et la surface maximale :

$$\begin{aligned}(100 - 2L)L &= -2L^2 + 100L = -2(L^2 + 50L)\\ &= -2[(L+25)^2 - 625]\\ &= -2(L+25)^2 + 1\,250.\end{aligned}$$

Ainsi, il faut que la zone ait des dimensions de 25m et 75m et la surface maximale est de 1 250 m^2.

39 On a $f(0) = -1$, donc la courbe de f passe par le point de coordonnées (0 ; –1) : il s'agit de la courbe rouge.
$g(0) = 0$, donc la courbe de g passe par l'origine : il s'agit de la courbe bleue.
La courbe de h a pour sommet le point de coordonnées (–1 ; 3) : il s'agit donc de la courbe orange.
Enfin, k admet 3 et 5 comme racines, sa courbe représentative est donc la verte.

40 Commençons par calculer l'aire de la surface coloriée. Posons $x = AM$.
On a donc $\mathcal{A}_{AMNP} = x^2$ et $\mathcal{A}_{CQR} = \dfrac{(4-x)^2}{2}$.
L'aire de la partie coloriée est donc égale à
$\dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 8$.
On doit alors résoudre l'inéquation
$\dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 8 \geqslant 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x \geqslant 0$ sur l'intervalle [0 ; 4]. Les racines de ce trinôme sont 0 et $\dfrac{8}{3}$, d'où le tableau de signes :

x	0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2 - 8x$	0	+	0	–	

Il faut donc que le point M soit sur le point A ou bien à une distance supérieure ou égale à $\dfrac{8}{3}$ du point A.

S'entraîner

41 **a.** La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur est toujours strictement positif. Pour tout réel x, on a donc
$f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2} = \dfrac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2+2} = x^2 - 2$;
f est donc un trinôme du second degré.
b. Le dénominateur s'annule en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, donc l'ensemble de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.
Sur cet ensemble de définition, on a
$f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2} = \dfrac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2-2} = x^2 + 2$;
f n'est pourtant pas un trinôme du second degré car f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
c. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur est toujours strictement positif. Par contre, il n'est pas possible de simplifier cette fonction rationnelle qui n'est donc pas un trinôme du second degré.
d. La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.
Sur cet ensemble de définition, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3 - 9x}{x+3} = \frac{x(x^2-9)}{x+3}\\ &= \frac{x(x-3)(x+3)}{x+3} = x(x-3).\end{aligned}$$

f n'est pourtant pas un trinôme du second degré car elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

42 **a.** L'équation $3x^2 + x = 0$ admet 0 et $-\frac{1}{3}$ comme solutions donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\ ;\ 0\}$.

Sur cet ensemble de définition, on a $f(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x(3x+1)} = \frac{3x-1}{x}$.

f n'est pas un trinôme du second degré.

b. f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur ne s'annule jamais. On ne peut pas simplifier cette fonction et ce n'est pas un trinôme du second degré.

c. L'équation $25x^2 - 36x + 49 = 0$ n'admet pas de solution réelle donc f est définie sur $\mathbb{R}$. On ne peut pas simplifier cette expression et f n'est pas un trinôme du second degré.

d. L'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ admet l'unique racine 3 donc f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Sur cet ensemble de définition, on a :

$f(x) = \frac{5(x-3)^2}{(x-3)^2} = 5$. f n'est pas un trinôme du second degré car non définie sur $\mathbb{R}$.

e. L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de racine réelle donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$ qui n'est pas simplifiable.

43 **a.** L'équation $3x^2 + 2x - 8 = 0$ admet -2 et $\frac{4}{3}$ comme solutions. On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2 + 2x - 8$		+	0	−	0	+	

Donc f est définie sur l'ensemble

$]-\infty\ ;\ -2\ ] \cup \left[\frac{4}{3}\ ;+\infty\right[$.

b. L'équation

$2(x-1)^2 + x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0$

n'admet pas de solution réelle donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

c. L'équation

$2(x-1)^2 - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

admet $\frac{1}{2}$ et 2 comme solutions. On peut en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2(x-1)^2 - x$		+	0	−	0	+	

Donc f est définie sur l'ensemble

$\left]-\infty\ ;\frac{1}{2}\right[\cup\ ]2\ ;+\infty\ [$.

44 **a.** $P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = -x^2 + x + 1$. On a $P(x) + Q(x) = 2x + 2$.

b. $P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = x^2 - x - 1$. On a $P(x) + Q(x) = 2x^2$.

c. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ et $Q(x) = -2x^3 + x^2 + x$. On a $P(x) + Q(x) = 2x^2 + x - 1$.

d. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ et $Q(x) = x^3 + x^2 + x$. On a $P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 1$.

45 **1. a.** $x^4 - 6x^2 + 9$ se factorise en $(x^2 - 3)^2$, donc $P(x) = x^2 - 3$.

b. Les racines de P sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de P(x)		+	0	−	0	+	

Donc $I_1 =]-\infty\ ;-\sqrt{3}\ ] \cup [\ \sqrt{3}\ ;+\infty[$

et $I_2 = [-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\ ]$.

c. Sur I_1, on a $f(x) = x^2 - 3$ et sur I_2, on a $f(x) = -x^2 + 3$.

f. C'est la première phrase qui correspond à la situation de f puisque les réels a, b et c dépendent des valeurs de x.

g. f n'est donc pas une fonction trinôme.

2. $x^4 + 6x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2$ donc $P(x) = x^2 + 3$. P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et comme $a = 1 > 0$, $P(x)$ est toujours strictement positif. Donc $g(x) = x^2 - 3$ pour tout réel x. C'est donc la seconde phrase qui caractérise la situation de g car les valeurs de a, b et c ne dépendent pas des valeurs de x.

g est bien un trinôme du second degré.

46 **a.** L'équation $2x - 1 = 0$ admet $\frac{1}{2}$ comme solution, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b. On part de l'expression donnée, que l'on réduit au même dénominateur :

$$ax + b + \frac{c}{2x-1} = \frac{(ax+b)(2x-1)+c}{2x-1}$$
$$= \frac{2ax^2 + (2b-a)x - b + c}{2x-1}.$$

Le numérateur est un trinôme dont on identifie les coefficients avec le numérateur de l'expression de f. On a :

$$\begin{cases} 2a = 12 \\ 2b - a = 24 \\ -b + c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 15. \\ c = 3 \end{cases}$$

47 **a.** L'équation $x^2(2 - x) = 0$ admet 0 et 2 comme solutions, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\ ;\ 2\}$.

b. On part de l'expression donnée, que l'on réduit au même dénominateur :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{2-x}$$
$$= \frac{ax(2-x) + b(2-x) + cx^2}{x^2(2-x)}$$
$$= \frac{(c-a)x^2 + (2a-b)x + 2b}{x^2(2-x)}.$$

On identifie les coefficients avec ceux du numérateur de l'expression de f. On a :

$$\begin{cases} c - a = 0 \\ 2a - b = 3 \\ 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}.$$

48 **a.** L'équation $x(x + 5) = 0$ admet 0 et –5 comme solutions, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\ ;\ -5\}$.

b. On part de l'expression donnée, que l'on réduit au même dénominateur :

$$ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+5}$$
$$= \frac{(ax+b)x(x+5) + c(x+5) + dx}{x(x+5)}$$
$$= \frac{ax^3 + (b+5a)x^2 + (5b+c+d)x + 5c}{x(x+5)}.$$

On identifie les coefficients avec ceux du numérateur de l'expression de f. On a :

$$\begin{cases} a = 4 \\ b + 5a = 0 \\ 5b + c + d = -6 \\ 5c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -20 \\ d = 91 \\ c = 3 \end{cases}.$$

49 **1. a.** $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 5 \times 2 - 2 = 0$.

b. $P(x) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -4 \\ -2b + c = 5 \\ -2c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \\ c = 1 \end{cases}$$

c. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$ donc le trinôme possède une seule racine réelle : $\alpha = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $P(x) = (x - 2)(x - 1)^2$.

2. $Q(-1) = 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 - 9 \times (-1) - 6 = 0$,
donc $Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$
$= ax^3 + (b + a)x^2 + (b + c)x + c$.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -1 \\ b + c = -9 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3. \\ c = -6 \end{cases}$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 57$ donc le trinôme possède deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{57}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{57}}{4}$.

Ainsi, pour tout réel x,
$P(x) = 2(x + 1)(x - x_1)(x - x_2)$.

50 **a.** $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
b. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
c. $15x - x^2 = -x(x - 15)$.
d. $(x^2 - 2)^2 - 1 = (x^2 - 2 - 1)(x^2 - 2 + 1)$
$= (x^2 - 3)(x^2 - 1)$
$= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 1)(x + 1)$.
e. $(x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)^2$
$= (x^2 - 3 - x^2 - 1)(x^2 - 3 + x^2 + 1)$
$= -4(2x^2 - 2) = -8(x^2 - 1) = -8(x + 1)(x - 1)$.

51 **a.** On ne reconnait pas d'identité remarquable : on calcule $\Delta = 16$.
Les deux racines sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$ et donc $P(x) = (x + 3)(x - 1)$.
b. $\Delta = 9$. Les deux racines sont $x_1 = -5$ et $x_2 = -2$ et donc $P(x) = (x + 5)(x + 2)$.
c. $\Delta = 121$. Les deux racines sont $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$ et donc $P(x) = 6\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

d. $\Delta = 24$. Les deux racines sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{6}}{5}$ et donc $P(x) = -5\,(x - x_1)(x - x_2)$.

e. $\Delta = \dfrac{8}{175}$. Les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-28-\sqrt{14}}{10}$ et $x_2 = \dfrac{-28+\sqrt{14}}{10}$ et donc $P(x) = \dfrac{2}{7}(x - x_1)(x - x_2)$.

52 **a.** $7x^3 + 2x^2 - 9x = x(7x^2 + 2x - 9)$
$$= 7x(x-1)\left(x + \frac{9}{7}\right).$$

b. $x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 - 6)^2$
$$= (x - \sqrt{6})^2(x + \sqrt{6})^2.$$

53 **a. b.** Les erreurs sont ligne 5 : $x - 1$ au lieu de $x + 1$; lignes 9 et 10 : $x_2 - 1$ au lieu de $x_2 + 1$; ligne 15 : $x - 1$ au lieu de $x + 1$.

54 **a.** On met sous forme canonique :
$P(x) = 2(x - 1)^2 - 7$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de P	↘	-7	↗

b. $P(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de P	↘	$\dfrac{3}{4}$	↗

c. $P(x) = 3\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{12}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{5}{6}$	$+\infty$
Variations de P	↘	$-\dfrac{1}{12}$	↗

d. $P(x) = -2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{71}{8}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{4}$	$+\infty$
Variations de P	↗	$-\dfrac{71}{8}$	↘

e. $P(x) = (x - 2)^2 - 13$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de P	↘	13	↗

f. $P(x) = 4\left(x + \dfrac{3}{8}\right)^2 + \dfrac{7}{16}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{8}$	$+\infty$
Variations de P	↘	$\dfrac{7}{16}$	↗

55 Pour P_1, le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc la fonction est d'abord croissante puis décroissante : il s'agit de la courbe orange ou bleue. $\Delta = 9$, donc la courbe coupe deux fois l'axe des abscisses. Ainsi, la représentation graphique de P_1 est la courbe bleue.
Pour P_2, $a = 3 > 0$ donc il s'agit de la courbe rouge ou violette. $\Delta = -12$ donc il s'agit de la courbe violette.
Pour P_3, $a = 1 > 0$ donc il s'agit de la courbe rouge. Vérifions avec $\Delta = 9$: il y a bien deux point d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
Pour P_4, il ne reste plus que la courbe orange qui respecte les variations données par $a = -1$. De plus, $\Delta = 0$, donc la courbe coupe une seule fois l'axe des abscisses.

56 La forme canonique du trinôme est $P(x) = a(x - 1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$. Donc $\Delta = 4a^2 - 4a(a + 2) = -8a$. Donc $a = -1$.

57 La forme canonique du trinôme est $P(x) = a(x + 2)^2 + 3$.
On sait que $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{20}{4a}$. Donc $a = \dfrac{5}{3}$.

58 **a.** $x \in [0\,;\,2]$ puisque la longueur AM ne peut pas excéder la longueur du diamètre.

b. L'aire de $\mathcal{D}_1$ est $\pi r_1{}^2 = \pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \pi\dfrac{x^2}{4}$.

L'aire de $\mathcal{D}_2$ est $\pi r_2{}^2 = \pi\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^2$

$= \pi\dfrac{4-4x+x^2}{4}$.

c. $\mathcal{A}(x) = \pi r^2 - \pi\dfrac{x^2}{4} - \pi\dfrac{4-4x+x^2}{4}$

$= \pi - 2\pi \times \dfrac{x^2}{4} - \pi + \pi x$

$= -\dfrac{\pi}{2}x^2 + \pi x$.

On le met sous forme canonique :

$\mathcal{A}(x) = -\dfrac{\pi}{2}(x^2 - 2x) = -\dfrac{\pi}{2}[(x-1)^2 - 1]$

$= -\dfrac{\pi}{2}(x-1)^2 + \dfrac{\pi}{2}$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	1	2
Variations de A	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$

d. L'aire maximale de la partie coloriée est donc de $\dfrac{\pi}{2}$, atteinte lorsque M est sur le point O.

59 **a.** Les racines de ce trinôme sont $x_1 = -3 - \sqrt{10}$ et $x_2 = -3 + \sqrt{10}$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad x_1 \quad x_2 \quad$ $+\infty$
Signe de $x^2 + 6x - 1$	+ 0 − 0 +

Donc S = $]-\infty\ ; x_1] \cup [x_2\ ; +\infty[$.

b. $3x^2 - x + 3 \leqslant 6x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 \leqslant 0$.

Les racines de ce trinôme sont $\dfrac{1}{3}$ et 2.

S = $[\dfrac{1}{3}\ ; 2]$.

c. $5x^2 - 6x - 20 < -x^2 + 6x + 4$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 12x - 24 < 0$. Les racines de ce trinôme sont $1-\sqrt{5}$ et $1+\sqrt{5}$.

S = $\left]1-\sqrt{5}\ ; 1+\sqrt{5}\right[$.

d. Les racines du premier trinôme sont –6 et 1 ; celle du second est la racine double –6. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\quad -6 \quad 1 \quad$ $+\infty$
Signe de $3x^2 + 15x - 18$	+ 0 − 0 +
Signe de $x^2 + 12x + 36$	+ 0 + $\quad$ +
Signe du produit	+ 0 − 0 +

S = $]-\infty\ ; -6[\cup]1\ ; +\infty[$.

e. Les racines du premier trinôme sont –1 et 2 ; celles du second sont 3 et –2. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad 2 \quad 3 \quad$ $+\infty$
Signe de $x^2 - x - 2$	+ $\quad$ + 0 − 0 + $\quad$ +
Signe de $9x^2 - 9x - 54$	+ 0 − $\quad$ − $\quad$ − 0 +
Signe du produit	+ 0 − 0 + 0 − 0 +

S = $]-2\ ; -1[\cup]2\ ; 3[$.

60 **a.** On résout cette inéquation dans $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Sur cet ensemble, elle est équivalente à

$1 - 2x - \dfrac{3}{x+2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-2x)(x+2) - 3}{x+2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 - 3x - 1}{x+2} \leqslant 0$.

Les racines du numérateur sont –1 et $-\dfrac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad \dfrac{1}{2} \quad$ $+\infty$
Signe de $-2x^2 - 3x - 1$	− $\quad$ − 0 + 0 −
Signe de $x + 2$	− 0 + $\quad$ + $\quad$ +
Signe du quotient	+ ‖ − 0 + 0 −

Donc S = $]-2\ ; -1] \cup [-\dfrac{1}{2}\ ; +\infty[$.

b. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ; -2\}$. Sur cet ensemble, elle est équivalente à

$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{(x+1)(x+2)} > 0$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad$ $+\infty$
Signe de $-x$	+ $\quad$ + $\quad$ + 0 −
Signe de $(x + 1)(x + 2)$	+ 0 − 0 + $\quad$ +
Signe du quotient	+ ‖ − ‖ + 0 −

Donc S = $]-\infty\ ; -2[\cup]-1\ ; 0]$.

c. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}\backslash\{-3\ ; 1\}$. Sur cet ensemble, elle est équivalente à

$\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 + 6x - 1}{(x-1)(x+3)} > 0$.

Les racines du numérateur sont $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ -3 x_1 1 x_2 $+\infty$
Signe de $-x^2 + 6x - 1$	$-$ $-$ 0 + + 0 $-$
Signe de $(x-1)(x+3)$	+ 0 $-$ $-$ 0 + +
Signe du quotient	$-$ ‖ + 0 $-$ ‖ + 0 $-$

Donc $S =]-3\,;x_1[\cup]1\,;x_2[$.

61 **a.** Les racines du numérateur sont 1 et $-\frac{1}{2}$; celles du dénominateur sont -2 et 3.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ -2 $-\frac{1}{2}$ 1 3 $+\infty$
Signe du numérateur	+ + 0 $-$ 0 + +
Signe du dénominateur	+ 0 $-$ $-$ $-$ 0 +
Signe du quotient	+ ‖ $-$ 0 + 0 $-$ ‖ +

b. La racine du numérateur est 0 ; celles du dénominateur sont $x_1 = -3 - \sqrt{11}$ et $x_2 = -3 + \sqrt{11}$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ x_1 0 x_2 $+\infty$
Signe du numérateur	+ + 0 + +
Signe du dénominateur	+ 0 $-$ $-$ 0 +
Signe du quotient	+ ‖ $-$ 0 $-$ ‖ +

c. Le dénominateur n'a pas de racine réelle. Il est donc toujours strictement positif. Comme le numérateur est strictement négatif, f est donc toujours strictement négative.

62 **a.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{x + 3}$. Les racines du numérateur sont $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{2}$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ -3 x_1 x_2 $+\infty$
Signe du numérateur	+ + 0 $-$ 0 +
Signe du dénominateur	$-$ 0 + + +
Signe du quotient	$-$ ‖ + 0 $-$ 0 +

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 4}$. L'unique racine du numérateur est 5. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ 4 5 $+\infty$
Signe du numérateur	+ + 0 +
Signe du dénominateur	$-$ 0 + +
Signe du quotient	$-$ ‖ + 0 +

c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$. Les racines du numérateur sont $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ x_1 1 x_2 $+\infty$
Signe du numérateur	+ 0 $-$ $-$ 0 +
Signe du dénominateur	$-$ $-$ 0 + +
Signe du quotient	$-$ 0 + ‖ $-$ 0 +

63 **a.** On pose $X = x^2$ et l'équation donnée est alors équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 5X + 4 = 0 \end{cases}.$$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = 9$. Il y a donc deux solutions réelles : $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$. Ainsi, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} X = x^2 \\ X = 1 \text{ ou } X = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 4$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

b. On pose $X = x^2$ et l'équation donnée est alors équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 + X - 2 = 0 \end{cases}.$$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = 9$. Il y a donc deux solutions réelles : $X_1 = -2$ et $X_2 = 1$. Ainsi, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} X = x^2 \\ X = -2 \text{ ou } X = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = -2 \text{ ou } x^2 = 1$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

c. On pose $X = \sqrt{x}$ et l'équation donnée est alors équivalente au système suivant :

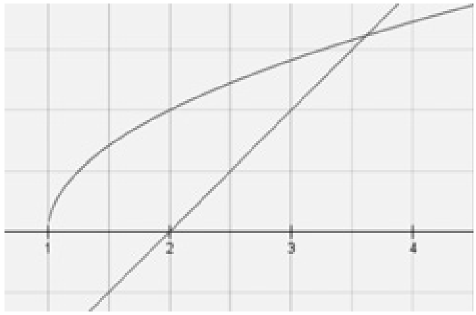
$$\begin{cases} X = \sqrt{x} \\ 6X^2 - 13X - 5 = 0 \end{cases}.$$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = 289$. Il y a donc deux solutions réelles : $X_1 = -\frac{1}{3}$ et $X_2 = \frac{5}{2}$. Ainsi, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X = -\frac{1}{3} \text{ ou } X = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{3} \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{25}{4}.$$

64 **a.** $10x^3 + 12x^2 - 14x = 0$
$\Leftrightarrow 2x(5x^2 + 6x - 7) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $5x^2 + 6x - 7 = 0$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta = 176$. La seconde équation possède donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{-3 - 2\sqrt{11}}{5}$ et $x_2 = \frac{-3 + 2\sqrt{11}}{5}$.
Ainsi, l'ensemble solution de l'équation donnée est $S = \{x_1 ; 0 ; x_2\}$.
b. Pour tout $x \neq 0$, on a :
$7x + \frac{4}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 4 - x = 0$.
Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = -111$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.
c. Pour tout réel $x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \neq 0$, l'équation donnée est équivalente à
$x(2x) = (2x + 3)(x - 1) \Leftrightarrow x = 3$.
d. Pour tout réel $x \neq 3$, l'équation donnée est équivalente à
$x - 3 = (x - 3)(x + 5) \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 12$.
Le discriminant de ce trinôme est égal à $\Delta = 49$. Les deux solutions réelles sont donc $x_1 = -4$ et $x_2 = 3$. Mais comme les solutions sont à chercher dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, la seule solution de $x = -4$.
e. Pour tout réel $x \neq 0$, l'équation donnée est équivalente à $x^2 + x - 6 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est égal à $\Delta = 49$. Les deux solutions réelles sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.
f. Pour tout réel $x \neq 1$et $x \neq 0$, l'équation donnée est équivalente à $x^2 + 6x - 6 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est égal à $\Delta = 60$. Les deux solutions réelles sont donc
$x_1 = -3 + \sqrt{15}$ et $x_2 = -3 - \sqrt{15}$.

65 **1. a.** L'expression sous la racine doit être positive, donc $x \geqslant 1$.
b. Une racine carrée étant toujours positive, on a $x \geqslant 2$.
c. Ainsi, cette équation se résout dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$
Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $x - 1 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 5$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 5$. Les deux solutions réelles sont $x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. Seule x_1 est solution de l'équation de départ car $x_2 \notin [2 ; +\infty[$.
d.



2. a. L'intervalle est $[-1 ; +\infty[$.
Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = x^2 + 3x + 3$. Le discriminant est $\Delta = -3$; cette équation n'admet donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.
b. L'intervalle est $[2 ; +\infty[$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = x^2 - 5x + 3$. Le discriminant est $\Delta = 13$; les deux solutions réelles sont $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.
Seule x_1 est solution de l'équation de départ car $x_2 \notin [2 ; +\infty[$.
c. L'intervalle est $[0 ; +\infty[$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = x^2 - 4x - 4$. Le discriminant est $\Delta = 32$; les deux solutions réelles sont $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$ et $x^2 = 2 - 2\sqrt{2}$.
Seule x_1 est solution de l'équation de départ car $x_2 \notin [0 ; +\infty[$.
d. L'intervalle est $]-\infty ; 1]$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = x^2 - x$. Les deux solutions de cette équation sont 0 et 1, qui sont aussi solution de l'équation initiale.
e. L'intervalle est $]-\infty ; 1]$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = 2x + 8$.
L'unique solution est -4, qui est aussi solution de l'équation initiale.

f. L'intervalle est $]-\infty\ ;-3]$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = 2x - 10$. L'unique solution est 5, qui n'appartient pas à l'intervalle donné. Donc l'équation initiale n'a pas de solution.
g. L'intervalle est $[-3\ ;\ 1]$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à $0 = x^2 - x - 4$. Le discriminant est $\Delta = 17$; les deux solutions réelles sont $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Seule x_1 est solution de l'équation de départ car $x_2 \notin [-3\ ;\ 1]$.

66 **a.** $x^2 + x + 1$ est toujours strictement positif et $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$. On résout donc cette équation dans l'intervalle $[-2\ ;+\infty[$.
Dans cet intervalle, l'équation est équivalente à $x^2 - 1 = 0$. Ses solutions sont -1 et 1, qui sont aussi toutes deux solutions de l'équation initiale.
b. $x^2 + x + 1$ est toujours strictement positif et $x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$. On résout donc cette équation dans$[2\ ;+\infty[$.
Dans cet intervalle, l'équation est équivalente à $x^2 + 3 = 0$ qui n'a pas de solution réelle. L'équation initiale n'en a pas non plus.
c. $-x^2 - x - 1$ est toujours strictement négatif donc le membre de gauche n'existe pour aucun réel x.
d. $x^2 - x - 6$ admet -2 et 3 comme racines : le membre de gauche est défini sur
$]-\infty\ ;-2] \cup [3\ ;+\infty[$.
Le membre de droite est défini sur $[-2\ ;+\infty[$.
Ainsi, l'ensemble sur lequel on doit résoudre cette équation est $\{-2\} \cup [3\ ;+\infty[$.
Sur cet ensemble, l'équation est équivalente à $x^2 - 2x - 8 = 0$. Ses solutions sont -2 et 4 qui sont donc toutes deux solutions de l'équation initiale.

67 **a.** On doit résoudre cette équation sur les intervalles $]-\infty\ ;0]$ et $[0\ ;+\infty[$.
b. $X^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$.
c. (E) $\Leftrightarrow (x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}) + (x + \dfrac{1}{x}) - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + X - 6 = 0 \\ X = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}.$$

d. Le discriminant est $\Delta = 25$, et les solutions sont $X_1 = -3$ et $X_2 = 2$. Ainsi :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} X = -3 \text{ ou } X = 2 \\ X = x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = 2.$$

La première équation est équivalente, sur $\mathbb{R}^*$, à $x^2 + 3x + 1 = 0$.
Ses solutions sont
$\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.
La seconde équation est équivalente, sur $\mathbb{R}^*$, à $x^2 - 2x + 1 = 0$. Son unique solution est 1.
Ainsi, les solutions de (E) sont $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et 1.

68 **a.** Le discriminant de P est
$\Delta = (b-a)^2 - 4b(-a) = b^2 - 2ab + a^2 + 4ab$
$= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \geqslant 0$; mais comme $a \neq -b$, on a $\Delta > 0$.
b. Le discriminant de Q est
$\Delta = (-3ab)^2 - 4a^2(3b^2) = 9a^2b^2 - 12a^2b^2$
$= -3a^2b^2 \leqslant 0$; mais comme P et Q sont deux trinômes du second degré, $b \neq 0$ et $a \neq 0$ et donc $\Delta < 0$.

69 **a.** Le dénominateur possède un discriminant négatif, donc ne possède pas de racine. Comme $a = 1 > 0$, il est toujours strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
b. On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$f(x) = 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 1 = x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow 3x\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Ainsi, il y a deux points d'intersection entre la courbe et la droite, de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\ ;1\right)$.
c. L'équation $f(x) = -3$
$\Leftrightarrow -2x^2 + 1 = -3x^2 - 3x - 3$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$.
Le discriminant est négatif, donc l'équation n'a pas de solution réelle et il n'existe pas de point d'intersection.
d. Le numérateur est déjà donné sous forme

canonique. Comme $a = -2 < 0$, $x \mapsto -2x^2 + 1$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à $\beta = 1$.
La forme canonique du dénominateur est $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Comme $a = 1 > 0$, $x \mapsto x^2 + x + 1$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$, égale à $\beta = \frac{3}{4}$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \leqslant 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

70 **a.** Le coefficient a pour P_1 est égal à -2, donc P_1 est la parabole verte ; et P_2 la rouge.
b. Les deux paraboles semblent tangentes, c'est-à-dire qu'il semble exister un seul point d'intersection.
c. On doit résoudre l'équation
$-2(x + 3)^2 + 5 = x^2 + x + 1$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 13x + 14 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 1$ donc il y a deux solutions, c'est-à-dire deux points d'intersection entre les deux paraboles.

71 **a.** On doit résoudre l'équation
$-x^2 + 2x + 1 = -2x + 5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 0$. Il y a donc un seul point d'intersection entre la parabole et la droite.
b. On doit résoudre l'équation
$-x^2 + 2x + 1 = -2x \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 20$. Il y a donc deux points d'intersection entre la parabole et la droite.

72 On doit résoudre l'équation
$x^2 + x + 1 = -3x + p \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - p = 0$
et considérer le signe du discriminant.
$\Delta = 16 - 4(1 - p) = 12 + 4p$.
a. Il y a un unique point d'intersection si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $p = -3$. Dans ce cas-là, l'abscisse du point d'intersection est $x = -\frac{4}{2} = -2$.
L'ordonnée est $y = -3 \times (-2) - 3 = 3$.
b. Il y a deux points d'intersection si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $p > -3$. Dans ce cas-là, les abscisses des points d'intersection sont $x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3 + p}}{2} = -2 - \sqrt{3 + p}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{3 + p}$ et leur ordonnées respectives sont $y_1 = 6 + 3\sqrt{3 + p} + p$ et $y_2 = 6 - 3\sqrt{3 + p} + p$.

c. Il n'a pas de points d'intersection lorsque $\Delta < 0$, c'est-à-dire $p < -3$.

73 On note ℓ et L ses dimensions. On a alors :
$L + \ell = 26$ et $L\ell = 165$
$\Leftrightarrow L(26 - L) = 165 \Leftrightarrow -L^2 + 26L - 165 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 16$ et les deux solutions sont $L_1 = 15$ et $L_2 = 11$.
Donc $\ell_1 = 26 - 15 = 11$ et $\ell_2 = 26 - 11 = 15$.
Les dimensions du rectangle sont donc 11 cm et 15 cm.

74 On note ℓ et L ses dimensions. On a alors :
$L = \ell + 9$ et $L\ell = 178$
$\Leftrightarrow (\ell + 9)\ell = 178 \Leftrightarrow \ell^2 + 9\ell - 178 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 793$ et les deux solutions sont $\ell_1 = \frac{-9 - \sqrt{793}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{-9 + \sqrt{793}}{2}$.
Seule la seconde solution est possible car l'autre est négative et dans ce cas, $L = \frac{9 + \sqrt{793}}{2}$.

75 On note x la longueur à rajouter à chaque côté. Le triangle est rectangle si et seulement si
$(3 + x)^2 + (4 + x)^2 = (6 + x)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 11 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 48$ et les deux solutions sont $x_1 = -1 - 2\sqrt{3}$ et $x_2 = -1 + 2\sqrt{3}$.
Seule la seconde solution est possible car la première est négative.

76 **a.** On note c la longueur du côté d'un triangle équilatéral. L'aire se calcule par la formule $\frac{ch}{2}$. La hauteur s'exprime $h = \frac{\sqrt{3}c}{2}$.
Donc l'aire s'exprime par $\frac{\sqrt{3}c^2}{4}$ et on doit résoudre l'équation
$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} = 20 \Leftrightarrow c^2 = \frac{80}{\sqrt{3}} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$.
Donc $c = \sqrt{\frac{80\sqrt{3}}{3}} = 4\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{3}}$ cm.
b. L'équation à résoudre est
$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} = 25\sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 = 100$. Donc $c = 10$ cm.

77 **a.** On note x la largeur de l'allée. La surface de l'allée s'exprime
$x \times 20 \times 2 + x \times (30 - x) \times 2 = -2x^2 + 100x$.

On doit alors résoudre l'équation
$-2x^2 + 100x = 30 \times 20 \div 5 = 120$
$\Leftrightarrow -x^2 + 50x - 60 = 0.$
Le discriminant est $\Delta = 2\,260$ et les deux solutions sont
$x_1 = 25 + \sqrt{565}$ et $x_2 = 25 - \sqrt{565}$.
Seule la seconde solution est possible car la première est supérieure aux dimensions du parc.

78 **a.** On note n le premier entier et $n + 1$ l'entier suivant. La somme de leur carré est $2n^2 + 2n + 1$. On doit résoudre l'équation $2n^2 + 2n + 1 = 1\,985 \Leftrightarrow n^2 + n - 992 = 0$.
$\Delta = 3\,969$. $n_1 = -32$ et $n_2 = 31$.
On doit résoudre l'équation
$2n^2 + 2n + 1 = 2\,011 \Leftrightarrow n^2 + n - 1\,005 = 0.$
$\Delta = 4\,021.$
$n_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{4\,021}}{2}$ et $n_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{4\,021}}{2}$.
Il n'y a donc pas de solution à ce problème car les solutions de l'équation ne sont pas entières.
b. On doit résoudre l'équation
$2n^2 + 2n + 1 = k \Leftrightarrow 2n^2 + 2n + 1 - k = 0.$
$\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (1 - k) = 4(1 - 2 + 2k)$
$= 4(2k - 1).$
Pour que le problème ait une solution, il est nécessaire que
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(2k-1)} = 2\sqrt{2k-1}$ soit un entier, donc $\sqrt{2k-1}$ aussi, c'est-à-dire que $2k - 1$ soit un carré parfait.
Réciproquement, si $2k - 1$ est un carré parfait, notons $p = \sqrt{2k-1} \in \mathbb{N}$. Ainsi, les deux solutions de l'équation sont :
$n_1 = \dfrac{-2 - 2p}{2} = -1 - p$ et
$n_2 = \dfrac{-2 + 2p}{2} = -1 + p$ et sont donc entières.

79 On note x l'écart entre la largeur et la longueur. On alors $x + 74 = 2\mathrm{L}$ et $74 - x = 2\ell$; ainsi $(x + 74)(74 - x) = 4\mathrm{L}\ell = 4 \times 1\,288 = 5\,152$
$\Leftrightarrow 324 - x^2 = 0.$
Les solutions de cette équation sont -18 et 18. Seule la seconde est possible, une distance étant positive.

80 **a.** On note m l'abscisse du point M. On a alors $\mathrm{JM}^2 = m^2 + 1$; $\mathrm{MA}^2 = m^2 - 10m + 41$; $\mathrm{JA} = 34$. On doit donc résoudre l'équation $m^2 + 1 + m^2 - 10m + 41 = 34$
$\Leftrightarrow 2m^2 - 10\mathrm{m} + 8 = 0.$
Le discriminant est $\Delta = 36$. Les deux solutions sont $m_1 = 1$ et $m_2 = 4$. Il faut donc placer le point en (1 ; 0) ou en (4 ; 0).
b. Géométriquement, on peut trouver les positions du point M à l'intersection de l'axe des abscisses et du cercle de diamètre [JA].

81 **a.** Le triplet Pythagoricien le plus connu est (3 ; 4 ; 5).
b.

```
for(x=1; x<=100; x++){
   for(y=1; y<=100; y++){
      s = x*x + y*y;
      e = Math.floor(Math.sqrt(s));
      if(e*e==s){
         Println("(_x ; _y ; _e)");
      }
   }
}
```

c. Il suffit de remplacer l'initialisation « y=1 » par « y=x ».

82 **1.** Tout d'abord, on sait que $x_\mathrm{M} = a$ et donc $y_\mathrm{M} = -a\alpha$ puisque $\mathrm{M} \in (\mathrm{OP})$ qui a pour coefficient directeur $-\alpha$. OMC est rectangle en M si et seulement si $\mathrm{OC}^2 = \mathrm{MC}^2 + \mathrm{MO}^2$, c'est-à-dire
$(a - c)^2 + b^2 = c^2 + (-a\alpha - b)^2 + a^2 + (-a\alpha)^2$,
ou encore, une fois réduit : $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.
2. Pour résoudre l'équation, il suffit de trouver les positions du point M sur la droite (AB) pour lesquelles le triangle OMC est rectangle en M. Pour cela, il suffit de tracer le cercle de diamètre [OC] et de prendre les intersections avec la droite (AB). On trace ensuite la droite (OM) et sur cette droite, on regarde l'ordonnée du point d'abscisse -1.
3. @ On pourra télécharger le fichier corrigé à l'adresse www.libtheque.fr/mathslycee.
a. $x_1 \approx -1{,}61$ et $x_2 \approx 0{,}61$.
b. Pas de solution.
c. $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
d. Pas de solution.
4. Il existe des solutions seulement si le cercle coupe au moins une fois la droite (AB), c'est-à-dire si la distance du centre du cercle à la droite est inférieure ou égale au rayon du cercle. Le centre du cercle est le milieu de [OC] et a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{a-c}{2} ; \dfrac{b}{2}\right)$.

Sa distance à la droite (AB) est donc de

$$\left|\frac{a-c}{2}-a\right| = \left|-\frac{a+c}{2}\right| = \left|\frac{a+c}{2}\right|.$$

Le rayon du cercle est égal à

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-2ac+c^2+b^2}.$$

Ainsi, il existe des solutions si et seulement si $(a+c)^2 \leqslant a^2 - 2ac + c^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant b^2 - 4ac$.

83 **a.** La courbe représentant P_2 est la verte car le coefficient du terme de degré 2 de P_2 es positif. Donc la courbe représentant P_1 est la bleue. Graphiquement, l'équation $P_1(x) = 0$ admet une seule solution, donc le discriminant de P_1 est nul, c'est-à-dire $16 + 16a = 0$, d'où $a = -1$.

b. L'unique racine de P_1 est alors

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2.$$

c. Cette racine est la plus grande pour P_2.

d. On a alors $-2 = \dfrac{-10+\sqrt{100-8c}}{4}$,

c'est-à-dire $c = 12$.

84 **1. a.** La longueur AM est positive, donc la valeur minimale pour x est 0. La longueur AN est positive, donc la valeur maximale pour x est 5. Ainsi, $x \in [0\,;5]$.

b. $MN^2 = x^2 + (5-x)^2 = 2x^2 - 10x + 25$

$$= 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{5}{2}$	5
Variations de MN^2	25 ↘	$\frac{25}{2}$	↗ 25

La plus grande valeur de MN est donc de 5, atteint lorsque $x = 0$ ou $x = 5$.

La plus petite valeur de MN est $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, atteinte pour $x = \dfrac{5}{2}$.

2. L'aire de AMN est donnée par l'expression

$$\frac{x(5-x)}{2} = \frac{-x^2+5x}{2} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{5}{2}$	5
Variations de l'aire	0 ↗	$\frac{25}{8}$	↘ 0

L'aire la plus grande est de $\dfrac{25}{8}$, atteinte pour $x = \dfrac{5}{2}$ et l'aire la plus petite est lorsque le triangle est plat !

85 **a.** Si M a pour abscisse 13, alors il a pour ordonnées $y_M = \dfrac{65}{16}$. Ainsi, le point N a pour coordonnées $\left(-3\,;\dfrac{191}{16}\right)$. Mais ce point ne peut pas appartenir à C car -3 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f.

b. N est symétrique de M par rapport à A, donc $x_N = 10 - x_M$ et $y_N = 16 - y_M$.

De plus, comme M appartient à la courbe, on a $y_M = f(x_M)$. Ainsi, $y_N = 12 - \dfrac{1}{x_M+3}$.

Le fait que N appartient à la courbe se traduit par

$$y_N = f(x_N) \Leftrightarrow (y_N - 4)(x_N + 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x_M + 80x_M + 296}{x_M+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_M^2 + 10x_M + 37 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 - 10x_M - 37 = 0.$$

Les points M et N jouent un rôle symétrique : il suffit de refaire la même démonstration en échangeant leur rôle.

c. Cette équation a pour solution $5+\sqrt{62}$ et $5-\sqrt{62}$ qui sont les abscisses des points M et N. Leur ordonnées sont alors $\dfrac{16-\sqrt{62}}{2}$ et $\dfrac{16+\sqrt{62}}{2}$.

Pour aller plus loin

93 **1.** Si x_0 est une racine de P, alors $P(x_0) = 0$.

De plus, et comme $x_0 \neq 0$, on a $P\left(\dfrac{1}{x_0}\right) = 0$.

2. P est un polynôme de degré 4. De plus, pour tout réel x non nul, on a :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x^4} - \frac{12}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{12}{x} + 4$$

$$= \frac{1}{x^4}(4 - 12x + x^2 - 12x^3 + 2x^4).$$

b. $X^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.

c. Pour tout réel x non nul, on a :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 1 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) - 8 + 1 - 12(x + \frac{1}{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \dfrac{1}{x} \\ 4X^2 - 12X - 7 = 0 \end{cases}.$$

On a $Q(X) = 4X^2 - 12X - 7$.

d. Les racines de Q sont $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{7}{2}$.

Ainsi, pour tout réel x non nul :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \dfrac{1}{x} \\ X = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } X = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \text{ ou } x + \frac{1}{x} = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} \text{ ou } x = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}.$$

3. a. P est un polynôme de degré 4. De plus, pour tout réel x non nul, on a :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{13}{4x^2} - \frac{3}{x} + 1$$

$$= \frac{1}{x^4}(1 - 3x + \frac{13}{4}x^2 - 3x^3 + x^4).$$

b. Une racine évidente de P est $x_0 = 2$.

c. Une autre racine de P est donc $x_1 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}$.

d. Q est donc un polynôme de degré 2, que l'on peut écrire $ax^2 + bx + c$. Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$P(x) = (x - 2)(x - \frac{1}{2})(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + (b - \frac{5a}{2})x^3 + (c - \frac{5b}{2} + a)x^2 + (b - \frac{5c}{2})x + c.$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - \dfrac{5a}{2} = -3 \\ c - \dfrac{5b}{2} + a = \dfrac{13}{4} \\ b - \dfrac{5c}{2} = -3 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout réel x, $Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

e. Q ne possède pas de racine réelle, donc les racines de P sont $\frac{1}{2}$ et 2.

4. a. Pour tout réel x non nul, on a :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x^5} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a$$

$$= \frac{1}{x^5}(a + bx + cx^2 + cx^3 + bx^4 + ax^5).$$

b. $P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$.

c. En considérant les degrés, on peut dire que Q est de degré 4. De plus, pour tout réel x non nul, on a :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^5}P(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 1\right)Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^5}(x + 1)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}(x + 1)Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^5}(x + 1)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}Q(x).$$

C'est-à-dire que Q est un polynôme réciproque.

d. La recherche des racines d'un polynôme réciproque de degré 5 se ramène à la recherche des racines d'un polynôme réciproque de degré 4.

e. Dans ce cas-là, on a

$$P(x) = -x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

$$= (x + 1)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

$$= ax^5 + (b + a)x^4 + (c + b)x^3 + (d + c)x^2 + (e + d)x + e.$$

Par identification, on a

$Q(x) = -x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$.

1 est racine évidente de Q, donc 1 est racine double de Q et on a $Q(x) = (x - 1)^2(ax^2 + bx + c)$.

On développe et on identifie, ce qui donne a = –1 ; $b = -3$; c = –1.
Le trinôme $-x^2 - 3x - 1$ admet deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.
Ainsi, toutes les racines de P sont –1 ; 1 ; x_1 et x_2.

94 **1.** D'après la première équation, on a $t = \dfrac{x(t)}{v_0 \cos\alpha}$. On reporte alors dans la seconde, ce qui nous donne le résultat demandé.
2. a. $y(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Ainsi, la portée maximale du canon est

$$x_{max} = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

b. Pour que la portée soit maximale, il faut et il suffit que la quantité $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$ soit maximale, c'est-à-dire égale à 1 (puisqu'un sinus est compris entre –1 et 1). Ainsi, il faut et il suffit que que $2\alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 45°$.
c. Dans ces conditions, on a

$$x_{max} = \frac{333^2}{9{,}81} \approx 11\,303 \text{ m}.$$

d. Cela est dû aux frottements de l'air.
3. a. L'abscisse du sommet est égale à

$$-\frac{b}{2a} = \tan\alpha \times \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

L'ordonnée est égale à

$$y\left(\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h.$$

b. La hauteur maximale espérée est donnée par $\dfrac{820^2 \times \sin^2 90}{2 \times 9{,}81} + h = h + 34\,271$ m.

95 **1.** Notons a et b les deux chiffres composant le nombre n. On a alors, (en base 10), $n = \overline{ab}^{10}$, c'est-à-dire $n = 10a + b$.
La première condition s'écrit $a + b = 13$; la seconde s'écrit $(10a + b)(10b + a) = 4\,930$. En substituant la première égalité dans la seconde, on obtient l'équation suivante :
$(10a + 13 - a)(130 - 10a + a) = 4\,930$
$\Leftrightarrow -81a^2 + 1\,053ab - 3\,240 = 0$
$\Leftrightarrow a = 5$ ou $a = 8$.
Dans ces cas-là, $b = 8$ ou $b = 5$.
Il y a donc deux nombres n possibles : 58 ou 85.
2. Avec ces paramètres, on obtient l'équation $-81a^2 + 1\,377a - 1\,296 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = 16$. Seule la première solution est possible car 16 n'est pas un chiffre. Dans ce cas-là, $b = 16$, ce qui n'est pas possible car ce n'est pas un chiffre. Ainsi, avec ces paramètres, le problème posé n'a pas de solution.
3. a. L'équation est
$-81a^2 + 81sa + 10s^2 - p = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{9s - \sqrt{121s^2 - 4p}}{18}$$

$$\text{ou } a = \frac{9s + \sqrt{121s^2 - 4p}}{18}.$$

Pour que les solutions soient entières, il est nécessaire que $121s^2 - 4p$ soit un carré parfait. Il est nécessaire et suffisant que $9s - \sqrt{121s^2 - 4p}$ soit divisible par 18, auquel cas, $9s + \sqrt{121s^2 - 4p}$ est aussi divisible par 18.
b. L'algorithme est le suivant. On se limite volontairement à 20 valeurs de s. la limitation concernant p provient du fait que le discriminant doit être positif ou nul.

```
1 for(s=1; s<=20; s=s+1){
2   for(p=1; p<=121*s*s/4; p=p+1){
3     Delta = 121*s*s - 4*p;
4     e = Math.floor(Math.sqrt(Delta));
5     if(e*e==Delta && (9*s-e)%18==0){
6       Println("s : _s ; p : _p");
7     }
8   }
9 }
```

c. Le couple (17 ; 4 186) est bien affiché. Pour éviter l'affichage de tels couples, il faut faire deux tests supplémentaires sur les numérateurs des solutions : le numérateur de la plus petite solution doit être supérieur ou égal à 0 et le numérateur de la plus grande doit être strictement inférieur à 180 pour que cette solution soit un chiffre.
La ligne 5 devient alors :

```
if(e*e==Delta && (9*s-e)%18==0 &&
0<=(9*s-e)&& 0<=(9*s+e)<180)
```

96 **1. a.** Le coefficient directeur de la droite (MN) est donné par $m = \dfrac{x_M^2 - x_N^2}{x_M - x_N} = x_M + x_N$.

La droite (MN) a donc pour équation
$y = (x_M + x_N)x + p$.

On trouve p en utilisant les coordonnées d'un point appartenant à la droite (MN), par exemple M :

$y_M = (x_M + x_N)x_M + p \Leftrightarrow p = -x_N x_M$.

Ainsi, la droite (MN) a pour équation
$y = (x_M + x_N)x - x_N x_M$.

b. Le coefficient directeur est donné par

$$m = \frac{ax_M^2 + bx_M + c - ax_N^2 - bx_N - c}{x_M - x_N}$$
$$= a(x_M + x_N) + b.$$

L'ordonnée à l'origine est donnée par
$p = y_M - a(x_M + x_N) - bx_M = c - ax_M x_N$.

2. a. D'après les formules précédentes, et en prenant $a = 1$, on a

$b = m - (x_M + x_N) = \dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} - (x_M + x_N)$ et

$c = p + x_M x_N = y_M - mx_M + x_M x_N$.

b. Dans ce cas, on a

$$b = \frac{y_M - 1}{x_M - 1} - (x_M + 1) = \frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1}$$

et $c = y_M - \dfrac{y_M - 1}{x_M - 1}x_M + x_M = -\dfrac{y_M - x_M^2}{x_M - 1}$.

La parabole coupe l'axe des abscisses si et seulement si le discriminant du trinôme $x^2 + bx + c$ est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1}\right)^2 + 4\frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} \times \left(\frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} + 4\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} \geqslant 0 \text{ et } \frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} + 4 \geqslant 0 \text{ ou}$$

$$\frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} \leqslant 0 \text{ et } \frac{y_M - x_M^2}{x_M - 1} + 4 \leqslant 0.$$

• si $x_M > 1$, alors cette condition est équivalente à :

$y_M - x_M^2 \geqslant 0$ et $y_M - x_M^2 + 4x_M - 4 > 0$ ou
$y_M - x_M^2 \leqslant 0$ et $y_M - x_M^2 + 4x_M - 4 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow y_M \geqslant x_M^2$ et $y_M \geqslant x_M^2 - 4x_M + 4$ ou
$y_M \leqslant x_M^2$ et $y_M \leqslant x_M^2 - 4x_M + 4$
$\Leftrightarrow y_M \geqslant x_M^2$ ou $y_M \leqslant x_M^2 - 4x_M + 4 \leqslant 0$ car si $x_M > 1$, alors $-4x_M + 4 < 0$.

• si $x_M < 1$, et par un raisonnement analogue, on obtient $y_M \leqslant x_M^2$ ou $y_M \geqslant x_M^2 - 4x_M + 4$.

Remarque : sur le fichier disponible sur le site www.libtheque.fr/mathslycee, on peut utiliser la coloration pour visualiser les régions du plan découpé par les deux paraboles.

97 **1. a.** Lorsque le discriminant est strictement positif, la somme des racines est donnée par la formule :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Le produit est donné par

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

b. Lorsque le discriminant est nul, alors

$$x_1 x_2 = 2 \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

et $x_1 x_2 = \left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

2. $y = s - x$, donc
$xy = p \Leftrightarrow x(s - x) = p \Leftrightarrow x^2 + sx + p = 0$.
Donc les solutions de l'équation du 2^d degré sont celles du système. Réciproquement, les solutions de l'équation du 2^d degré vérifient $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 x_2 = p$.

3. a. Il s'agit de résoudre l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$, dont les solutions sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$.

b. Il s'agit de résoudre l'équation

$$x^2 - \frac{29}{10}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 29x + 10 = 0$$

dont les solutions sont $x_1 = \dfrac{2}{5}$ et $x_2 = \dfrac{5}{2}$.

c. Il s'agit de résoudre l'équation $x^2 - sx + s = 0$ dont les solutions sont

$$\frac{s - \sqrt{s^2 - 4s}}{2} \text{ et } \frac{s + \sqrt{s^2 - 4s}}{2}$$

qui n'existent que si $s \in\ ]-\infty\ ;\ 0] \cup [4\ ;\ +\infty[$.

98 Notons $\dfrac{p}{q}$ une racine rationnelle de ce trinôme. On prend p et q premiers entre eux de telle sorte que cette fraction soit irréductible. On a alors :

$$\frac{p^2}{q^2} + k\frac{p}{q} + 1 = 0 \Leftrightarrow p^2 + kpq + q^2 = 0.$$

Comme q divise $kpq + q^2$, alors q divise p^2, donc $q = 1$. De même, comme p divise $kpq + p^2$, alors p divise $q^2 = 1$, donc $p = -1$ ou $+1$. Ainsi, k étant la somme des racines, il est égal à 0 ou 2.

99 Considérons le trinôme du second degré suivant : $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + xb_i)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + x^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Ce trinôme étant toujours positif ou nul (d'après la première expression), son discriminant est toujours négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant 0,$$

ce qui conduit immédiatement à l'égalité recherchée.