Variables aléatoires

Chapitre **10**

Ouverture

En 1654, Pascal et Fermat échangent une correspondance sur les problèmes de jeux de hasard posés par le chevalier de Méré. La résolution de l'un de ces problèmes dit « La règle des partis » est certainement à l'origine de la théorie des probabilités.
Voici ce jeu : au départ, chacun des deux joueurs mise trente-deux pistoles pour constituer un « pot » de soixante-quatre pistoles. Ils entament alors des « manches » comme dans un tournoi de tennis ; chaque « manche » est un jeu de hasard, non décrit dans les écrits (jeu de dés ?), mais ce jeu est tel que chaque joueur a exactement la même chance de gagner la « manche ». La règle du jeu dit que le premier joueur qui a remporté trois manches gagne la totalité du « pot ».
La question précise posée par le chevalier de Méré était : « Si, pour une raison inconnue, les deux joueurs s'arrêtent avant que l'un ou l'autre n'ait remporté trois manches, comment peut-on répartir le "pot" de manière équitable, compte tenu des résultats des "manches" déjà jouées ? »
Ce qui est remarquable est que la solution proposée de ce partage est fondée sur une évaluation rigoureuse des chances de victoire de chacun des deux joueurs : sans leur terminologie, Pascal fait apparaître la notion d'espérance mathématique, d'espérance conditionnelle et même celle de martingale. Cette correspondance marque la naissance de la théorie des probabilités.
L'illustration de la page d'ouverture évoque un domaine important de la théorie des probabilités : « la marche au hasard » qui intervient en économie, en physique théorique, etc.

Les photons émis par le soleil mettent quelques minutes à parcourir la distance du soleil à la terre. Mais, avant, ces photons doivent passer du cœur du soleil à sa surface.
Il s'agit d'une marche aléatoire et la formule $x_T = \sqrt{\ell v T}$, est une estimation probabiliste de la distance du photon au centre du soleil, en fonction de la longueur ℓ des « sauts » entre deux chocs, de sa vitesse et du temps T depuis son départ du centre du soleil. Elle permet de donner une estimation du temps mis par le photon pour « s'extraire » du soleil : plus de 10 000 années !

L'objet de ce chapitre est de revoir les notions de bases de probabilités vues en seconde et de les approfondir avec l'utilisation d'arbre de dénombrement ou de tableau, puis d'enchaîner sur la notion de variables aléatoires, loi de probabilité, calculs et interprétation des paramètres : espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire en faisant le lien avec ce qui a été vu au chapitre 9 en statistiques. Il n'y a pas dans ce chapitre d'arbre de probabilité (ils seront vus au chapitre 11) pour laisser le temps aux élèves d'acquérir la notion d'arbre de dénombrement et ne pas confondre les deux types d'arbre utilisés en probabilité.
L'activité 1 propose de voir ou revoir la notion d'arbre de dénombrement et l'utilisation de la formule d'équiprobabilité, elle a pour suite l'activité 2 qui permet de définir au moins deux variables aléatoires et leurs lois à partir de l'expérience de l'activité 1. On peut donc dès cette activité faire remarquer aux élèves l'infinité de variables aléatoires possibles à partir d'une même expérience. Ces deux activités ne nécessitent pas de logiciels.
L'activité 3 permet d'introduire la notion d'espérance à travers la notion de gain moyen à long terme et utilise un algorithme de simulation de l'expérience aléatoire. La première question doit éveiller la curiosité de l'élève

(les avis dans une même classe seront certainement partagés) et lui donner envie d'avoir une réponse à la question posée, il aura une première idée de la réponse grâce à l'algorithme et la preuve viendra en question **3.**

Vérifier ses acquis

1 **1.** a. c. **2.** c. **3.** a. **4.** c.

2 **1.** b. c. **2.** a. b.

3 c.

4 **1.** c. **2.** b. **3.** a.

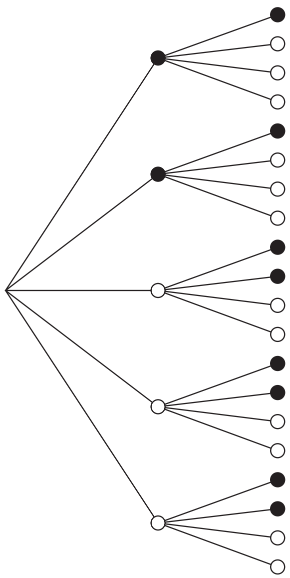
5 b. c.

6 **1.** b. **2.** a.

Activités d'introduction

Activité 1

1 **a.**



b. On dénombre 20 résultats possibles.
c. Il y a cinq jetons possibles au premier tirage, puis pour chacun des cinq cas il y a quatre jetons possibles au deuxième tirage donc il y a $5 \times 4 = 20$ résultats possibles.

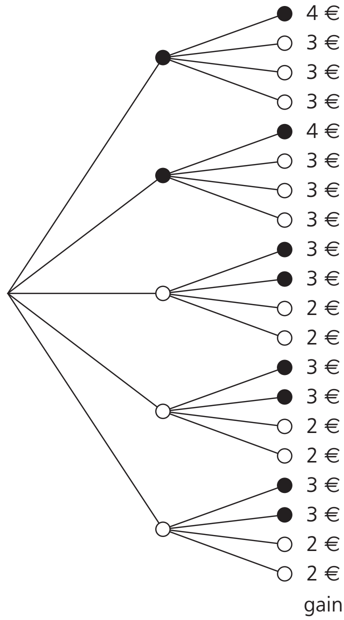
2 **a.** $p = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$. **b.** $q = \dfrac{6}{20} = 0{,}3$.

c. $r = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$.

d. $p + q + r = 1$. La somme des probabilités de tous les résultats d'un univers vaut 1.

Activité 2

1 **a.**



b. X est défini sur l'univers, ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire.
c. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{2 ; 3 ; 4\}$.
d.

Valeurs x_i prises par X	2	3	4
Probabilité $p(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

2

Valeurs y_i prises par Y	–5	–2	1
Probabilité $p(Y = y_i)$	0,3	0,6	0,1

3 On peut considérer Z la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus à l'issue des deux tirages.

Activité 3

1 L'élève donne sa réponse intuitive, sans aucun calcul.

2 **a.** L'algorithme simule n fois deux lancers de ballons (Partie) avec une réussite aléatoire et affiche le gain au bout des n parties.

b. Il suffit de rajouter à la fin de l'algorithme le calcul de G/*n*.

c. On remarque que la simulation donne des gains moyens négatifs.

3 **a.**

Valeur x_i prise par X	1	2	–5
Probabilité $p(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

b. E(X) = –0,25.

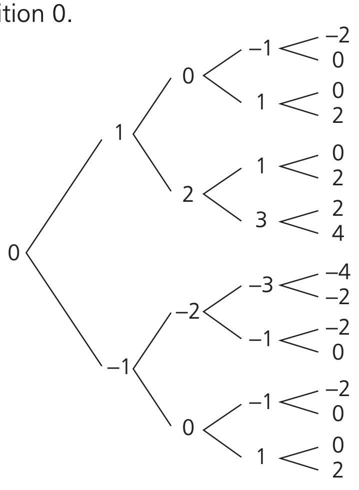
c. E(X) représente le gain moyen que peut espérer Maxence, c'est donc Côme qui va avoir tendance à s'enrichir au bout d'un grand nombre de parties.

d. Lorsque *n* est grand la valeur moyenne des gains obtenue par simulation se rapproche de la valeur théorique –0,25.

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1 Le jeu du fakir

1 **a.** L'arbre ci-dessous dénombre tous les parcours possibles du palet à partir de la position 0.



À la fin de son parcours, la palet peut donc se situé à l'abscisse 2 mais pas à l'abscisse –3.

b. X(Ω) = {–4 ; –2 ; 0 ; 2 ; 4}
et G(Ω) = {1 000 ; 0 ; 2 000}.

2 **a.** Les lignes bleues permettant d'augmenter ou de diminuer l'abscisse du palet de 1 de façon aléatoire. Ces lignes se retrouvent dans l'algorithme de marche aléatoire vu en seconde.

b. La ligne « `L[Indice]=L[Indice]+1` » rajoute 1 au terme de rang 0,1 ou 2 de la liste L suivant que l'abscisse du palet à la fin de son parcours est 0, ±2 ou ±4.

c. L'algorithme B ne permet pas de simuler les 1000 parties car l'initialisation de X à 0 est extérieure à la boucle des 1000 parties ; le palet peut donc à l'issue d'un parcours redémarrer à l'abscisse 4 par exemple et X valoir 6 après quatre déviations aléatoires !

d. La seule différence réside dans la définition de l'indice.

Dans le cas de l'algorithme A, l'indice est défini comme la valeur absolue de X donc l'indice vaut 0 si X = 0, 1 si X = ±2 et 2 si X = ±4.

Dans le cas de l'algorithme C, l'indice est défini à l'aide d'un double « `Si...alors... sinon...` ».

L'algorithme A paraît le plus efficace car la ligne « `Indice=|X|` » remplace le test.

e. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

```
VARIABLES
   I EST_DU_TYPE NOMBRE
   J EST_DU_TYPE NOMBRE
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   Indice EST_DU_TYPE NOMBRE
   Gain EST_DU_TYPE LISTE
   E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   L[0] PREND_LA_VALEUR 0:0:0
   Gain[0] PREND_LA_VALEUR 1000
   Gain[1] PREND_LA_VALEUR 0
   Gain[2] PREND_LA_VALEUR 2000
   E PREND_LA_VALEUR 0
   POUR I ALLANT_DE 0 A 999
      DEBUT_POUR
      X PREND_LA_VALEUR 0
      POUR J ALLANT_DE 0 A 3
         DEBUT_POUR
         SI (random()<0.5 ) ALORS
            DEBUT_SI
            X PREND_LA_VALEUR X-1
            FIN_SI
            SINON
               DEBUT_SINON
               X PREND_LA_VALEUR X+1
               FIN_SINON
         FIN_POUR
      Indice PREND_LA_VALEUR floor(abs(X)/2)
      L[Indice] PREND_LA_VALEUR L[Indice]+1
      FIN_POUR
```

```
   POUR I ALLANT_DE 0 A 2
      DEBUT_POUR
      AFFICHER «L[«
      AFFICHER Gain[I]
      AFFICHER «]=»
      AFFICHER L[I]
      E PREND_LA_VALEUR E+(Gain[I]*L[I])/1000
      FIN_POUR
   AFFICHER «E=»
   AFFICHER E
FIN_ALGORITHME
```

Remarque : l'algorithme fourni sur le fichier calcul aussi le gain moyen (appelé E) au terme des 100 parties.
Le gain qui semble être le plus fréquent est 0.

3 **a.** À l'aide de l'arbre réalisé à la question **1.**, on obtient :

Valeurs g_i prises par G	0	1000	2000
Probabilité $p(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b. En supposant que le joueur effectue un grand nombre de parties, le gain moyen qu'il espérer vaut E(G) = 625 €.

4 @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

```
VARIABLES
   I EST_DU_TYPE NOMBRE
   J EST_DU_TYPE NOMBRE
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   N EST_DU_TYPE NOMBRE
   Indice EST_DU_TYPE NOMBRE
   Gain EST_DU_TYPE LISTE
   Init EST_DU_TYPE NOMBRE
   E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   L[0] PREND_LA_VALEUR 0:0:0
   LIRE N
   LIRE Init
   Gain[0] PREND_LA_VALEUR 1000
   Gain[1] PREND_LA_VALEUR 0
   Gain[2] PREND_LA_VALEUR 2000
   E PREND_LA_VALEUR 0
   POUR I ALLANT_DE 0 A N-1
      DEBUT_POUR
      X PREND_LA_VALEUR Init
      POUR J ALLANT_DE 0 A 3
         DEBUT_POUR
         SI (random()<0.5 ou X==4) ALORS
            DEBUT_SI
            X PREND_LA_VALEUR X-1
            FIN_SI
            SINON
               DEBUT_SINON
               X PREND_LA_VALEUR X+1
               FIN_SINON
         FIN_POUR
      Indice PREND_LA_VALEUR
      floor(abs(X)/2)
      L[Indice] PREND_LA_VALEUR L[Indice]+1
      FIN_POUR
   POUR I ALLANT_DE 0 A 2
      DEBUT_POUR
      AFFICHER «L[«
      AFFICHER Gain[I]
      AFFICHER «]=»
      AFFICHER L[I]
      E PREND_LA_VALEUR E+(Gain[I]*L[I])/N
      FIN_POUR
   AFFICHER «E=»
   AFFICHER E
FIN_ALGORITHME
```

Remarque : l'algorithme correspond à un nombre N de parties, la valeur initiale du palet est donnée par « Init » et E correspond au gain moyen.
L'espérance de gain semble supérieure à celle de la question **3.** si la position de départ est à l'abscisse 2 et elle semble encore plus forte si l'abscisse initiale vaut 4.

TP Algorithmique 2 Simuler une expérience aléatoire

1 Cette question a pour but de tester l'intuition des élèves et de les motiver à avoir la réponse à cette question.

2 **a.** @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

```
VARIABLES
   Nombre_partie EST_DU_TYPE NOMBRE
   Pari EST_DU_TYPE NOMBRE
   DE EST_DU_TYPE LISTE
   I EST_DU_TYPE NOMBRE
   J EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   Gain EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE Nombre_partie
   L[0] PREND_LA_VALEUR 0:0:0:0
   Gain[0] PREND_LA_VALEUR -1:1:2:3
   POUR I ALLANT_DE 0 A Nombre_partie-1
      DEBUT_POUR
      X PREND_LA_VALEUR 0
      Pari PREND_LA_VALEUR floor(6*random())+1
```

```
      POUR J ALLANT_DE 0 A 2
         DEBUT_POUR
         DE[J] PREND_LA_VALEUR floor(6*
         random())+1
         SI (DE[J]==Pari) ALORS
            DEBUT_SI
            X PREND_LA_VALEUR X+1
            FIN_SI
         FIN_POUR
      L[X] PREND_LA_VALEUR L[X]+1
      FIN_POUR
   POUR I ALLANT_DE 0 A 3
      DEBUT_POUR
      AFFICHER «L[«
      AFFICHER Gain[I]
      AFFICHER «]=»
      AFFICHER L[I]
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Remarque : l'algorithme est écrit pour un nombre quelconque de parties appelé « Nombre_partie ».

b. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

```
VARIABLES
   Nombre_partie EST_DU_TYPE NOMBRE
   Pari EST_DU_TYPE NOMBRE
   DE EST_DU_TYPE LISTE
   I EST_DU_TYPE NOMBRE
   J EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   Gain EST_DU_TYPE LISTE
   F EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE Nombre_partie
   L[0] PREND_LA_VALEUR 0:0:0:0
   Gain[0] PREND_LA_VALEUR -1:1:2:3
   POUR I ALLANT_DE 0 A Nombre_partie-1
      DEBUT_POUR
      X PREND_LA_VALEUR 0
      Pari PREND_LA_VALEUR floor(6*random())+1
      POUR J ALLANT_DE 0 A 2
         DEBUT_POUR
         DE[J] PREND_LA_VALEUR floor(6*random
         ())+1
         SI (DE[J]==Pari) ALORS
            DEBUT_SI
            X PREND_LA_VALEUR X+1
            FIN_SI
         FIN_POUR
       L[X] PREND_LA_VALEUR L[X]+1
      FIN_POUR
   POUR I ALLANT_DE 0 A 3
      DEBUT_POUR
      F[I] PREND_LA_VALEUR L[I]/Nombre_partie
      AFFICHER «F[«
      AFFICHER Gain[I]
      AFFICHER «]=»
      AFFICHER F[I]
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Remarque : les fréquences sont données par la liste L.

c. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

```
VARIABLES
   Nombre_partie EST_DU_TYPE NOMBRE
   Pari EST_DU_TYPE NOMBRE
   DE EST_DU_TYPE LISTE
   I EST_DU_TYPE NOMBRE
   J EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   Gain EST_DU_TYPE LISTE
   F EST_DU_TYPE LISTE
   E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE Nombre_partie
   L[0] PREND_LA_VALEUR 0:0:0:0
   Gain[0] PREND_LA_VALEUR -1:1:2:3
   POUR I ALLANT_DE 0 A Nombre_partie-1
      DEBUT_POUR
      X PREND_LA_VALEUR 0
      Pari PREND_LA_VALEUR floor(6*random
      ())+1
      POUR J ALLANT_DE 0 A 2
         DEBUT_POUR
         DE[J] PREND_LA_VALEUR floor(6*
         random ())+1
         SI (DE[J]==Pari) ALORS
            DEBUT_SI
            X PREND_LA_VALEUR X+1
            FIN_SI
         FIN_POUR
      L[X] PREND_LA_VALEUR L[X]+1
      FIN_POUR
   E PREND_LA_VALEUR 0
   POUR I ALLANT_DE 0 A 3
      DEBUT_POUR
      F[I] PREND_LA_VALEUR L[I]/Nombre_partie
      AFFICHER «F[«
      AFFICHER Gain[I]
      AFFICHER «]=»
      AFFICHER F[I]
      E PREND_LA_VALEUR E+Gain[I]*F[I]
      FIN_POUR
   AFFICHER «le gain moyen vaut»
   AFFICHER E
FIN_ALGORITHME
```

Remarque : le gain moyen est donné par E.

d. Faire varier dans l'algorithme précédent la variable Nombre_partie.

e. D'après la simulation le jeu ne semble pas équitable car E est négatif.

3 **a.** $p(X = -1) = p$ (aucun des 3 dés n'est égal au nombre choisi) $= \dfrac{5 \times 5 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{125}{216}$.

b.

Valeurs x_i prises par X	-1	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	$\dfrac{125}{216}$	$\dfrac{75}{216}$	$\dfrac{15}{216}$	$\dfrac{1}{216}$

c. $E(X) = -\dfrac{17}{216}$ donc on a bien $E(X) < 0$.

TP TICE 1 Montant des bourses en hausse

Ce Tp peut aussi se faire en manipulant les listes de la calculatrice.

1 @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	montant bourse X	nbre lycéens	frequence p_i	x_i*p_i	$(x_i)^2$*p_i	(x_i+10)*p_i	$(x_i+10)^2$*p_i	(x_i+15)*p_i	$(x_i+15)^2$*p_i
2	129,24	47	0,094	12,15	1570,08	13,09	1822,45	13,56	1955,69
3	172,32	57	0,114	19,64	3385,14	20,78	3789,43	21,35	4000,12
4	215,4	75	0,15	32,31	6959,57	33,81	7620,77	34,56	7962,62
5	258,48	96	0,192	49,63	12827,89	51,55	13839,65	52,51	14359,93
6	301,56	87	0,174	52,47	15823,29	54,21	16890,12	55,08	17436,58
7	344,64	69	0,138	47,56	16391,19	48,94	17356,20	49,63	17849,05
8	387,72	48	0,096	37,22	14431,37	38,18	15185,40	38,66	15569,61
9	430,8	21	0,042	18,09	7794,72	18,51	8160,79	18,72	8346,98
10		total	total	E(X) :	total :	E(X+10) :	total	E(X+15) :	total
11		500	1	269,08	79183,25	279,08	84664,80	284,08	87480,58
12									
13					V(X)		V(X+10)		V(X+15)
14					6780,45		6780,45		6780,45

$E(X) = 269{,}08$; $V(X) = 6780{,}45$ (voir les valeurs bleues du fichier).

---

2 **a.** Voir les valeurs roses et vertes du fichier. On remarque que :
$E(X + 10) = E(X) + 10$,
$E(X + 15) = E(X) + 15$,
$V(X + 10) = V(X + 15) = V(X)$.

b. On conjecture que $E(X + b) = E(X) + b$.
On considère que $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_m\}$ et on note $p_i = p(X = x_i)$, alors

$$E(X + b) = \sum_{i=1}^{m}(x_i + b)\, p_i = \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_i + b \sum_{i=1}^{m} p_i$$
$$= E(X) + b.$$

c. On conjecture que $V(X + b) = V(X)$, en effet :

$$V(X + b) = \sum_{i=1}^{m}((x_i + b) - E(X + b))^2\, p_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m}(x_i + b - E(X) - b)^2\, p_i = \sum_{i=1}^{m}(x_i - E(X))^2\, p_i$$
$$= V(X).$$

3 **a.** @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	montant bourse X	nbre lycéens	frequence pi	x_i*p_i	$(x_i)^2$*p_i	$(1{,}02x_i)$*p_i	$(1{,}02x_i)^2$*p_i	$(1{,}05x_i)$*p_i	$(1{,}05x_i)^2$*pi
2	129,24	47	0,09	12,15	1570,08	12,39	1633,51	12,76	1731,01
3	172,32	57	0,11	19,64	3385,14	20,04	3521,90	20,63	3732,11
4	215,4	75	0,15	32,31	6959,57	32,96	7240,74	33,93	7672,93
5	258,48	96	0,19	49,63	12827,89	50,62	13346,13	52,11	14142,75
6	301,56	87	0,17	52,47	15823,29	53,52	16462,55	55,10	17445,17
7	344,64	69	0,14	47,56	16391,19	48,51	17053,39	49,94	18071,29
8	387,72	48	0,1	37,22	14431,37	37,97	15014,40	39,08	15910,59
9	430,8	21	0,04	18,09	7794,72	18,46	8109,63	19,00	8593,68
10		total	total	E(X) :	total :	E(1,02X) :	total	E(1,05X) :	total
11		500	1	269,08	79183,25	274,46	82382,25	282,53	87299,53
12									
13					V(X)		V(1,02X)		V(1,05X)
14					6780,45		7054,38		7475,45

On remarque que $E(1{,}02X) = 1{,}02 \times E(X)$ et $E(1{,}05X) = 1{,}05 \times E(X)$.

b. On remarque que $V(1{,}02X) = 1{,}0^2 \times V(X)$ et $V(1{,}02X) = 1{,}02^2 \times V(X)$.

c. On conjecture que $E(aX) = aE(X)$.

$$E(aX) = \sum_{i=1}^{m} ax_i p_i = a\sum_{i=1}^{m} x_i p_i = aE(X).$$

d. On conjecture que $V(aX) = a^2V(X)$.

$$V(aX) = \sum_{i=1}^{m} (ax_i - E(aX))^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (ax_i - aE(X))^2 p_i$$

$$= a^2\sum_{i=1}^{m} (x_i - E(X))^2 p_i = a^2V(X).$$

$$\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)}$$
$$= \sqrt{a^2} \times \sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X).$$

4 Dans le cas d'une augmentation de 10 ou 15 €, les moyennes augmentent mais la dispersion de la série est inchangée car $V(X + b) = V(X)$. Par contre dans le cas d'une augmentation de 2 ou 5 %, la série devient plus dispersée car $V(aX) > V(X)$ dans le cas où $a > 1$.

5 $E(aX + b) = E(aX) + b = aE(X) + b$; $V(aX + b) = V(aX) = a^2\, V(X)$.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** « tirer le roi de trèfle » ; « tirer l'as de pique ».

b. A : « tirer un cœur » B : « tirer une dame ».

c. $A \cup B$ contient les 8 cartes à cœur et les dames de pique, trèfle, carreau.

d. $A \cap B$ contient la dame de cœur.

e. $\bar{A}$ contient les trèfles, carreaux et piques et $\bar{B}$ contient les 28 cartes qui ne sont pas des dames.

2 réponse **d.**

3 **a.** Faux (vrai pour les événements élémentaires).

b. Faux.

c. Faux (vrai pour les événements élémentaires).

d. Vrai.

e. Faux (vrai dans le cas de l'équiprobabilité).

4 **1. a.** Faux (vrai si A et B disjoints).

b. Vrai.

c. Faux.

2. a. Vrai.

b. Faux (vrai, si $B = \bar{A}$).

c. Vrai.

5 **a.** Faux (vrai, si $B = \bar{A}$).
b. Faux (vrai si A et B disjoints). **c.** Faux.

6 **a.** Faux c'est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
b. Faux. **c.** Faux. **d.** Faux. **e.** Vrai.

7 **a.** Faux c'est une fonction définie sur $X(\Omega)$.
b. Vrai.
c. Faux.

8 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai.

9 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai.
d. Faux (si $0 \leqslant V(X) < 1$).

11 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ donc $p_1 + 2p_1 + 3p_1 = 1$, soit $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{2}$.

13 $p(A) = 0{,}4$; $p(B) = 0{,}8$; $p(C) = 0{,}7$.

14 **a.** $\frac{1}{32}$. **b.** $\frac{1}{4}$. **c.** $\frac{1}{8}$. **d.** $\frac{11}{32}$.
e. $1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$.

15 **a.** $p(A) = \frac{18}{37}$. **b.** $p(C) = \frac{11}{37}$.
c. $p(D) = \frac{2}{37}$. **d.** $p(E) = \frac{12}{37}$.

16 **a.** $p(A) = \frac{54}{80}$. **b.** $p(B) = \frac{46}{80}$.
c. $p(C) = \frac{26}{80}$.

18 **a.** On peut considérer la variable aléatoire Y égale au plus grand des huit numéros obtenus, Z la variable aléatoire égale au nombre de résultats pairs obtenus et T la variable aléatoire égale à la somme des huit numéros.
b. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.

20

Valeur x_i prise par X	3	1	-2
Probabilité $p(X = xi)$	0,4	0,25	0,35

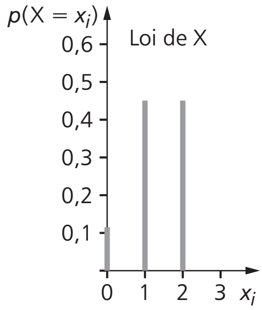
21

Valeur x_i prise par X	1	2	3	4	5
Probabilité $p(X = x_i)$	0,122	0,156	0,224	0,328	0,17

22 **1.a.**

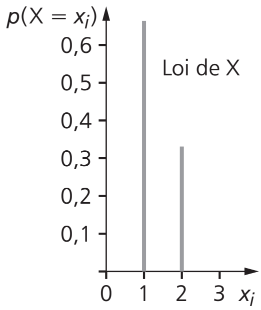
Valeur x_i prise par X	0	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

b.



2.

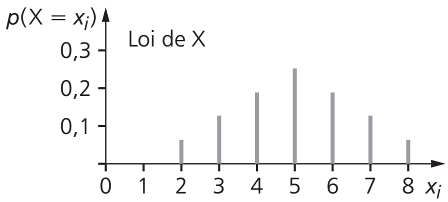
Valeur x_i prise par X	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$



23 **a.**

Valeur x_i prise par X	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

b.



24

Valeur x_i prise par X	0	3	6
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

26 **a.** $E(X) = 3{,}268$ qui représente la note moyenne attribuée par les clients de l'échantillon.
b. Dans les cas avec et sans remise, on obtient $E(X) = \frac{4}{3}$ ce qui représente le nombre moyen de boules blanches obtenues au bout d'un grand nombre de séries de deux tirages.

c. E(X) = 5 ce qui représente la somme moyenne des deux dés obtenue au bout d'un grand nombre de lancers.

28 **a.** $V(X) \approx 1{,}58$; $\sigma(X) \approx 1{,}26$.
b. Dans le cas « avec remise »,
$V(X) = \frac{4}{9}$ et $\sigma(X) = \frac{2}{3}$.
Dans le cas « sans remise »,
$V(X) = \frac{2}{9}$ et $\sigma(X) \approx 0{,}47$.
Les résultats de X sont donc plus homogènes dans ce cas.
c. $V(X) = 2{,}5$; $\sigma(X) \approx 1{,}58$.

S'entraîner

29 **a.**

Somme	2	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
Somme	8	9	10	11	12	
Probabilité	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

b.

Plus petit résultat	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

c.

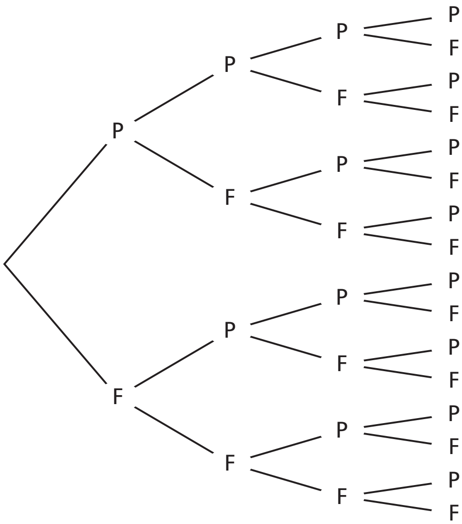
PPCM	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{9}{36}$
PPCM	10	12	15	20	30	
Probabilité	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	

30 **a.** Les deux jetons étant tirés simultanément, on ne peut tirer deux fois le même jeton.
b. Non, car dans un tirage simultané l'ordre ne compte pas.
c.

	0	0	1	2	2
0	X				
0	0	X			
1	0	0	X		
2	0	0	2	X	
2	0	0	2	4	X

Produit	0	2	4
Probabilité	0,7	0,2	0,1

31 **a.** On note P pour « pile » et F pour « face ».



b.

Nombre de « Pile »	0	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

c.

Nombre de « Pile » consécutifs	0	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

32 **a.** C'est Antoine qui a décrit une situation d'équiprobabilité.
b. On note B pour blanc et R pour rouge.

Résultat	(B ; B)	(B ; R)	(R ; B)	(R ; R)
Probabilité	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

33 **a.** $4 \times 3 \times 2 = 24$ tiercés possibles.
b. $10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés possibles.
c. $18 \times 17 \times 16 = 4\,896$ tiercés possibles,
$18 \times 17 \times 16 \times 15 = 73\,440$ quartés possibles,
$18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 = 1\,028\,160$ quintés possibles.

34 **a.**

```
VARIABLES
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   Nombre_Tiercés EST_DU_TYPE NOMBRE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE n
   Nombre_Tiercés PREND_LA_VALEUR 1
   POUR I ALLANT_DE 0 A 2
      DEBUT_POUR
      Nombre_Tiercés PREND_LA_VALEUR Nombre
      _Tiercés* (n-i)
         FIN_POUR
      AFFICHER Nombre Tiercés
```

b. Pour le nombre de quintés, il suffit de modifier la boucle avec : « Pour *i* allant de 0 à 4 ».

35 Il y a $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ plateaux repas différents.

36 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ donc $4 \times \frac{1}{6} + q \times \frac{1}{6} + q^2 \times \frac{1}{6} = 1$ soit $q^2 + q - 2 = 0$ équivaut à $q = -2$ ou $q = 1$. Or q ne peut être négatif donc pour tout entier i compris entre 1 et 6, $p_i = \frac{1}{6}$ et il y a équiprobabilité.

37 **a.** Le raisonnement n'est juste que s'il y a dans la classe autant de filles que de garçons, sinon les choix « fille » et « garçon » ne sont pas équiprobables et le raisonnement est faux.

38 On suppose que l'univers $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ contient n éventualités équiprobables donc $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ (d'après le prérequis 1) or $p_1 + \ldots + p_n = 1$ donc $n \times p_1 = 1$ et pour tout entier i compris entre 1 et n, $p_i = \frac{1}{n}$. Si un événement A contient k éventualités (k entier, $1 \leqslant k \leqslant n$) alors d'après le prérequis 2, $p(\text{A}) = k \times \frac{1}{n}$ soit
$$p(\text{A}) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

39 D'après le prérequis 2, $p(\text{A} \cup \bar{\text{A}}) = p(\text{A}) + p(\bar{\text{A}}) - p(\text{A} \cap \bar{\text{A}})$ or d'après le prérequis 1, $\text{A} \cap \bar{\text{A}} = \varnothing$ donc $p(\text{A} \cap \bar{\text{A}}) = 0$ et $p(\text{A} \cup \bar{\text{A}}) = p(\text{A}) + p(\bar{\text{A}})$.

D'après le prérequis 1, $\text{A} \cup \bar{\text{A}} = \Omega$ donc $p(\text{A} \cup \bar{\text{A}}) = 1$, on obtient alors $p(\text{A}) + p(\bar{\text{A}}) = 1$ soit $p(\bar{\text{A}}) = 1 - p(\text{A})$.

40 **a.** $p(\text{A}\cap\text{B}) = 0$, $p(\text{A}\cup\text{B}) = 0{,}7$ et $p(\bar{\text{A}}) = 0{,}75$.

b. $p(\text{C} \cup \text{D}) \neq p(\text{C}) + p(\text{D})$ donc C et D ne sont pas disjoints.

$$p(\text{C} \cap \text{D}) = p(\text{C}) + p(\text{D}) - p(\text{C} \cup \text{D}) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1.$$

c. On suppose que $p(\text{E}) = 0{,}3$; $p(\text{F}) = 0{,}5$ et $p(\text{E} \cap \text{F}) = 0{,}1$.

$$p(\overline{\text{E} \cup \text{F}}) = 1 - p(\text{E} \cup \text{F}) = 1 - (p(\text{E}) + p(\text{F}) - p(\text{E} \cap \text{F})) = 1 - (0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1) = 0{,}3.$$

41 **1.** R et B sont disjoints, C et V sont contraires.

2. $p(\text{R}) = 0{,}5$; $p(\text{B}) = 0{,}2$; $p(\text{N}) = 0{,}3$;
$p(\text{C}) = 0{,}6$; $p(\text{V}) = 0{,}4$.
$p(\text{R} \cap \text{C}) = 0{,}3$;
$p(\text{R} \cup \text{C}) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}8$;
$p(\text{B} \cap \text{V}) = 0$;
$p(\text{B} \cup \text{V}) = p(\text{B}) + p(\text{V}) = 0{,}6$;
$p(\text{C} \cup \text{V}) = 1$.

3. a. 0,4. **b.** 0,5.

42 $p(\text{A}) = 0{,}05 + 0{,}08 - 0{,}02 = 0{,}11$.
$p(\text{B}) = 0{,}03 + 0{,}06 = 0{,}09$.
$p(\text{C}) = 1 - p(\text{A}) = 0{,}89$.

43 **1. a.** $\frac{50}{800} = \frac{1}{16}$. **b.** $\frac{3}{8}$.

2. a. $\frac{300 \times 299}{800 \times 799} \approx 0{,}14$.

b. Nombre de cas favorables
= 1 (le 1er supporter a la place n° 201 et le 2e la 202)
+ 1 (le 1er supporter a la place n° 500 et le 2e la 499)
+ 298 × 2 (le 1er supporter a une place numérotée de 202 à 499 et le 2e a l'une des deux places consécutives)
= 598. La probabilité vaut donc
$$\frac{598}{800 \times 799} \approx 9{,}36 \times 10^{-4}.$$

44 **a.** Il y a 7 doubles et $\frac{7 \times 6}{2}$ non doubles (il n'y a pas d'ordre) soit $7 + 21 = 28$ dominos différents.

b. $p(A) = \frac{1}{28}$; $p(B) = \frac{21}{28}$; $p(C) = \frac{6}{28}$;
$p(D) = p(A) + p(C) = \frac{7}{28}$; $p(E) = \frac{6}{28}$;
$p(F) = 0,4$; $p(G) = \frac{12}{28}$.

c. D et B sont contraires ; A et B incompatibles.

d. $\overline{E}$: « le domino ne porte pas deux numéros impairs », $p(\overline{E}) = \frac{22}{28}$

$F \cap A$: « le domino porte deux numéros pairs et deux fois le numéro 3 », $p(F \cap A) = 0$.

$E \cap C$: « le domino porte deux numéros impairs et le numéro 3 figure une seule fois »,
$p(E \cap C) = \frac{2}{28}$.

$E \cup C$: « le domino porte deux numéros impairs ou le numéro 3 figure une seule fois »,
$p(E \cup C) = p(E) + p(C) - p(E \cap C) = \frac{10}{28}$.

e. $p(H) = \frac{7^2}{28^2} = \frac{49}{784} = \frac{1}{16}$;
$p(I) = \frac{21^2}{28^2} = \frac{9}{16}$; $p(J) = 1 - p(I) = \frac{7}{16}$.

45 **a.** $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ordres possibles.

b. $\frac{1}{24}$.

46 **a.** Il y a $10^4 = 10\,000$ codes PIN possibles.

b. $p(A) = \frac{1}{10\,000}$; $p(B) = \frac{10^3}{10^4} = \frac{1}{10}$;
$p(C) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = \frac{63}{125}$;
$p(D) = 1 - \frac{9^4}{10^4} = \frac{3\,439}{10\,000}$.

47 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 1 = 0$ or cette égalité n'est vérifiée que pour $a = b = 1$ et $a = 3$ et $b = 2$, de plus il y a 9 tirages possibles donc la probabilité que les deux vecteurs soient orthogonaux est bien de $\frac{2}{9}$.

48 **a.** Si la loi est donnée par

Valeur x_i prise par X	0	2	5
Probabilité $p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

alors $E(X) = 2$.

b. X ne prenant pas de valeurs négatives, nécessairement $E(X) > 0$.

49

Valeur x_i prise par X	–3	0	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$	0,1	0,7	0,1	0,1
Valeur y_i prise par Y	–3	0	1	2
Probabilité $p(Y = y_i)$	0,2	0,4	0,2	0,2

On a $E(X) = E(Y) = 0$, les variances $V(X) = 1,4$ et $V(Y) = 2,8$ ne sont pas égales.

50 **a. b.**

Valeur x_i prise par X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Probabilité $p(X = x_i)$	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

c. $p(X = 2) = 0,2$.

d. $p(X \geqslant 1,5) = 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,7$.

51 **1. a.** p(« les deux boules tirées sont bleues ») = 0,1 ; le gain est alors de 6 €.

b. p(« le joueur a tiré une boule bleue et une boule verte ») = 0,2 ; le gain est alors de –2 €.

2. $X(\Omega) = \{-4 ; -2 ; 2 ; 4 ; 6\}$.

3. a.

x_i	–4	–2	2	4	6	Somme
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	1
$x_i p(X = x_i)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5} = 1,2$
$x_i^2, p(X = x_i)$	$\frac{16}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{72}{5} = 14,4$

b. $E(X) = 1,2$ ce qui représente le gain moyen du joueur au bout d'un grand nombre de parties.

c. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 14,4 - 1,2^2$
$= 12,96$ et $\sigma(X) = 3,6$.

52 **a.**

Valeur x_i prise par X	5	–3
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{13}{25}$	$\frac{12}{25}$

b. $E(X) = \frac{29}{25} = 1,16$; $V(X) = \frac{9\,984}{625} \approx 15,97$;
$\sigma(X) \approx 4$.

53

Valeur x_i prise par Y	5	–3
Probabilité $p(Y = y_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$E(Y) = \frac{1}{5} = 0,2$; $V(Y) = \frac{384}{25} = 15,36$;
$\sigma(Y) \approx 3,9$.

Lors de tirages avec remise le jeu est davantage favorable au joueur car $E(X) > E(Y)$ pour une dispersion des gains quasiment identique.

54 **a.**

Valeur x_i prise par X	–1	2	5
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{29}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$

b. $E(X) = 0$; $V(X) = \frac{162}{36} = 4{,}5$; $\sigma(X) \approx 2{,}12$.

55 **a.** $|x - y|$ où x et y sont des entiers compris entre 0 et 6 prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

b. Les résultats favorables à $(X = 2)$ sont $\{0 ; 2\}$, $\{1 ; 3\}$, $\{2 ; 4\}$, $\{3 ; 5\}$ et $\{6 ; 4\}$ donc $p(X = 2) = \frac{5}{28}$.

c.

Valeur x_i prise par X	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{38}$	$\frac{1}{28}$

d. $E(X) = 2$; $V(X) = \frac{196}{28} - 2^2 = 3$.

56 **1. a.** p(Mickaël absent au moins trois jours) $= 0{,}11 + 0{,}07 + 0{,}03 = 0{,}21$.

b. p(Mickaël absent au plus trois jours) $= 0{,}12 + 0{,}43 + 0{,}24 + 0{,}11 = 0{,}21$.

c. p(Mickaël absent au moins un jour) $= 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

2. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jours d'absence de Mickaël pour une semaine choisie au hasard. Le nombre moyen de journées d'absence lors d'une semaine est donnée par $E(X) = 1{,}67$ or $1{,}67 > 1{,}5$ ce qui justifie l'affirmation de la CPE.

57 **1. a.**

Valeur x_i prise par X	0	5	10	50
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{116}{125}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{500}$

b. $E(X) = \frac{11}{20} = 0{,}55$; $V(X) = \frac{3\,179}{400} = 7{,}9475$;
$\sigma(X) \approx 2{,}82$.

2. a.

Valeur y_i prise par Y	0	2	5	100
Probabilité $p(Y = y_i)$	$\frac{789}{1000}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

$E(Y) = \frac{11}{20} = 0{,}55$; $V(Y) = \frac{4\,299}{400} = 10{,}7475$;
$\sigma(Y) \approx 3{,}28$.

b. Le gain moyen que peut espérer le joueur est identique dans les deux restaurants mais les gains sont plus dispersés dans le second restaurant.

58 **a.** L'espérance
$E(X) = -2 \times 0{,}4 + 0 \times 0{,}5 + 7 \times 0{,}1 = -0{,}1$ est négative donc le jeu est défavorable au joueur.

b. Notons x la mise cherchée.
$E(X) = 0$ équivaut à
$0{,}4 \times (1 - x) + 0{,}5 \times (3 - x) + 0{,}1 \times (10 - x) = 0$
équivaut à $x = 2{,}9$ €.

c. Dans les deux cas la variance vaut 6,49 donc la dispersion des gains est identique.

59 **1. a.**

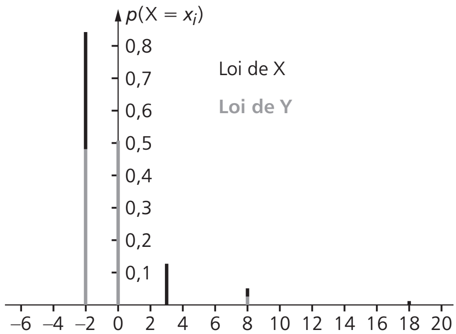
Valeur x_i prise par X	–2	3	8	18
Probabilité $p(X = x_i)$	0,84	0,10	0,05	0,01

b. L'espérance
$E(X) = -2 \times 0{,}84 + 3 \times 0{,}10 + 8 \times 0{,}05 + 18 \times 0{,}01$
$= -0{,}80$ est négative donc le jeu est défavorable au joueur.

c. Notons x le prix d'une enveloppe.
$E(X) = 0$ équivaut à
$0{,}84 \times (-X) + 0{,}10 \times (5 - X) + 0{,}05 \times (10 - X)$
$+ 0{,}01 \times (20 - X) = 0$
équivaut à $X = 1{,}2$ €.

2. a. $E(Y) = -2 \times 0{,}48 + 0 \times 0{,}5 + 8 \times 0{,}02$
$= -0{,}80 = E(X)$

b. La loi de X semble plus dispersée que la loi de Y.



c. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$= 4 \times 0{,}84 + 9 \times 0{,}10 + 64 \times 0{,}05$
$+ 324 \times 0{,}01 - (-0{,}8)^2 = 10{,}06$
$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$
$= 4 \times 0{,}48 + 64 \times 0{,}02 - (-0{,}8)^2 = 2{,}56$.
$V(X) > V(Y)$ ce qui confirme que x est plus dispersée que Y.

60 **a.** L'espérance de la variable aléatoire X égale au gain du joueur pour la règle 1 vaut
$E(X) = -1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 0$
et celle de la règle 2 vaut
$E(Y) = -1\,000 \times 0{,}5 + 1\,000 \times 0{,}5 = 0$
Les deux jeux sont donc bien équitables.
b. $V(X) = 1$ et $V(Y) = 1\,000\,000$ donc le deuxième jeu est beaucoup plus risqué que le premier.

61 Il est tentant de choisir la certitude de gagner 800 € mais l'espérance est pourtant supérieure dans le second cas car
$1000 \times 0{,}85 + 0 \times 0{,}15 = 850 > 800$.

62 On considère la variable aléatoire X égale au gain du joueur.

Valeur x_i prise par X	10	20	–7	–8	–9	–10
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{12}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$

$E(X) = 2$ donc le jeu est favorable au joueur.

63 On considère la variable aléatoire X égale au gain du joueur.

Valeur x_i prise par X	5	–2
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$E(X) = \frac{5}{8}$ donc le jeu est favorable au joueur.

64

$$\begin{cases} E(X) = 2 \\ V(X) = 5{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + 2q = 0{,}8 \\ p + 4q = 1{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0{,}4 \\ q = 0{,}2 \end{cases}.$$

65 **a.**@ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

```
VARIABLES
   m EST_DU_TYPE NOMBRE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
   X EST_DU_TYPE LISTE
   P EST_DU_TYPE LISTE
   S1 EST_DU_TYPE NOMBRE
   S2 EST_DU_TYPE NOMBRE
   V EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE m
   POUR i ALLANT_DE 1 A m
      DEBUT_POUR
      LIRE X[i]
      LIRE P[i]
      FIN_POUR
   S1 PREND_LA_VALEUR 0
   S2 PREND_LA_VALEUR 0
   POUR i ALLANT_DE 1 A m
      DEBUT_POUR
      S1 PREND_LA_VALEUR S1+pow(X[i],2)*P[i]
      S2 PREND_LA_VALEUR S2+X[i]*P[i]
      FIN_POUR
   V PREND_LA_VALEUR S1-pow(S2,2)
   AFFICHER V
FIN_ALGORITHME
```

Remarque : on peut aussi faire afficher S2 qui correspond à l'espérance.

66 **1.** $p(A) = \frac{66}{200} = 0{,}33$;
$p(B) = 0{,}33$; $p(C) = \frac{51}{200} = 0{,}255$.

2. a. b.

Valeur x_i prise par X	28	31	33	36
Probabilité $p(X = x_i)$	0,33	0,33	0,085	0,255

c. $E(X) = 31{,}455$ qui représente le coût moyen journalier des remontées mécaniques pour un skieur de l'échantillon.

67 **a.**

Valeur x_i prise par X	0	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$	0,84	0,13	0,03

c. $E(X) = 0{,}19$ qui représente le nombre moyen de défauts pour un stylo de l'échantillon.

68 Il y a deux erreurs dans la copie :
- les 21 résultats évoqués par l'élève ne sont pas équiprobables en effet
$p(\{1\ ;\ 2\}) = \frac{2}{36}$ alors que $p(\text{double}1) = \frac{1}{36}$.
- L'élève oublie la mise de 2 € dans son raisonnement.

L'espérance du gain (positif ou négatif) du joueur est en fait de $-\frac{1}{36}$ donc le jeu est défavorable au joueur.

69 **a.** On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6, X est la variable aléatoire égale à 10 si le résultat pair et à 0 sinon.
b.

Valeur x_i prise par X	0	10
Probabilité $p(X = x_i)$	0,5	0,5

c. $E(X) = 5$.

70 **a.** On lance un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4 tant que la somme des résultats cumulés est inférieure strictement à 5. La variable aléatoire X est égale au nombre de lancers (c'est-à-dire au numéro du lancer où la somme est supérieure ou égale à 5 pour la première fois).

b. $X(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

c. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

```
VARIABLES
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   s EST_DU_TYPE NOMBRE
   t EST_DU_TYPE NOMBRE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   j EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   L[1] PREND_LA_VALEUR 0:0:0:0
   POUR i ALLANT_DE 1 A 1000
      DEBUT_POUR
      X PREND_LA_VALEUR 0
      s PREND_LA_VALEUR 0
      TANT_QUE (s<5) FAIRE
         DEBUT_TANT_QUE
         t PREND_LA_VALEUR floor(4*random
         ()+1)
         s PREND_LA_VALEUR s+t
         X PREND_LA_VALEUR X+1
         FIN_TANT_QUE
      L[X-1] PREND_LA_VALEUR L[X-1]+1
      FIN_POUR
   POUR j ALLANT_DE 1 A 4
      DEBUT_POUR
      AFFICHER L[j]
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

d. On peut décider par exemple que le joueur gagne 1 € si la somme des résultats atteint 5 en deux ou trois lancers et perd 1 € sinon.

71 **a.** On effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne contenant 5 boules : deux portent le n° 1, deux le n° 2 et une le n° 3, on somme les deux résultats.

b. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

```
VARIABLES
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   s EST_DU_TYPE NOMBRE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   j EST_DU_TYPE NOMBRE
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   t EST_DU_TYPE LISTE
   M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   L[1] PREND_LA_VALEUR 1:1:2:2:3
   LIRE n
   s PREND_LA_VALEUR 0
   POUR i ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      POUR j ALLANT_DE 1 A 2
         DEBUT_POUR
         t[j] PREND_LA_VALEUR L[floor(5*
         random()+1)]
         FIN_POUR
      X PREND_LA_VALEUR t[1]+t[2]
      s PREND_LA_VALEUR s+X
      FIN_POUR
   M PREND_LA_VALEUR s/n
   AFFICHER "La moyenne vaut :"
   AFFICHER M
FIN_ALGORITHME
```

c.

Valeur x_i prise par X	2	3	4	5	6
Probabilité $p(X= x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

d. $E(X) = \frac{90}{25} = 3{,}6$ ce qui est en accord avec les valeurs obtenues par simulation.

72 **a.** L'instruction signifie « tant que l'urne contient des boules jaunes et des boules rouges ».

b. Le calcul « `Ent((jaune+rouge) * alea+1)` » renvoie un entier aléatoire n entre 1 et le nombre total de boules de l'urne.

L'instruction « `Si Ent((jaune+rouge) * alea+1)≤jaune` » traduit « `si n est inférieur ou égal au nombre de boules jaunes` ».

c.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3
Ent ((jaune+rouge)* alea)		3	1	1
Jaune	2	2	1	0
Rouge	3	2	2	2
Jaune+Rouge	5	4	3	2
Tant que jaune > 0 ET rouge > 0	2 > 0 et 3 > 0, d'où Vrai	Vrai	Vrai	Faux
X	0	1	2	3

d. On effectue des tirages successifs sans remise et on s'arrête lorsque les boules de l'urne sont toutes de la même couleur. X est égale au nombre de tirages effectués.

e. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

```
VARIABLES
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   j EST_DU_TYPE NOMBRE
   jaune EST_DU_TYPE NOMBRE
   rouge EST_DU_TYPE NOMBRE
   F EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
   L[1] PREND_LA_VALEUR 0:0:0:0
   POUR i ALLANT_DE 1 A 1000
      DEBUT_POUR
      jaune PREND_LA_VALEUR 2
      rouge PREND_LA_VALEUR 3
      X PREND_LA_VALEUR 0
      TANT_QUE (jaune>0 ET rouge>0) FAIRE
         DEBUT_TANT_QUE
         SI (floor((jaune+rouge)*random()+1)
         <=jaune) ALORS
            DEBUT_SI
            jaune PREND_LA_VALEUR jaune-1
            FIN_SI
            SINON
               DEBUT_SINON
               rouge PREND_LA_VALEUR rouge-1
               FIN_SINON
         X PREND_LA_VALEUR X+1
         FIN_TANT_QUE
      L[X] PREND_LA_VALEUR L[X]+1
      FIN_POUR
   POUR j ALLANT_DE 2 A 4
      DEBUT_POUR
      F[j] PREND_LA_VALEUR L[j]/1000
      AFFICHER F[j]
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

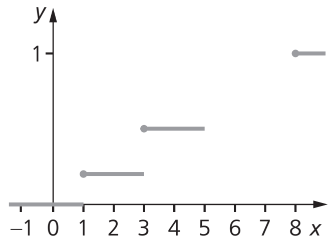
f. La valeur la plus fréquente de X semble 4.

73 **a.** On peut vérifier les résultats de l'énoncé en utilisant le mode statistique de la calculatrice.
b. Appelons Y la variable aléatoire correspondant aux notes ayant subi la transformation affine. D'après le TP TICE1, on a :
$\sigma(Y) = a\sigma(X)$ car a est positif donc $3 = 3{,}75\,a$
soit $a = \dfrac{3}{3{,}75} = 0{,}8$;
$E(Y) = aE(X) + b$ donc $10 = 10{,}95\,a + b$ d'où $b = 10 - 10{,}95 \times 0{,}8 = 1{,}24$.

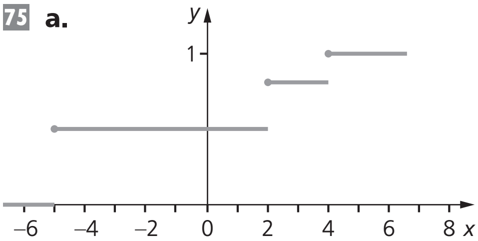
74 **1.**

Valeur x_i prise par X	1	3	8
Probabilité $p(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

2. a. $F(0{,}5) = F(0) = F(-1) = F(-15) = 0 = F(x)$ si $x < 1$.
b. $F(1) = p(X \leqslant 1) = p(X = 1) = 0{,}2$
de même $0{,}2 = F(1{,}5) = F(2) = F(2{,}99) = F(x)$ si $1 \leqslant x < 3$.
c. $F(3) = p(X \leqslant 3) = p(X = 1) + p(X = 3)$ $= 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$ de même $0{,}7 = F(4) = F(6) = F(7{,}99) = F(x)$ si $3 \leqslant x < 8$.
d. $F(8) = p(X \leqslant 8) = 1$ et $F(x) = 1$ si $x \geqslant 8$.
3.



75 **a.**



b.

Valeur x_i prise par X	–5	2	4
Probabilité $p(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

76 @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.

```
VARIABLES
   c EST_DU_TYPE LISTE
   i EST_DU_TYPE NOMBRE
   s EST_DU_TYPE NOMBRE
   X EST_DU_TYPE NOMBRE
   j EST_DU_TYPE NOMBRE
   L EST_DU_TYPE LISTE
   M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   L[1] PREND_LA_VALEUR 0:0
   POUR j ALLANT_DE 1 A 1000
      DEBUT_POUR
      POUR i ALLANT_DE 1 A 4
         DEBUT_POUR
         c[i] PREND_LA_VALEUR floor(9*random())
         FIN_POUR
      s PREND_LA_VALEUR c[1]+c[2]+c[3]+c[4]
      SI (floor(s/2)==s/2) ALORS
         DEBUT_SI
         X PREND_LA_VALEUR 10
         L[1] PREND_LA_VALEUR L[1]+1
         FIN_SI
```

```
        SINON
        DEBUT_SINON
        X PREND_LA_VALEUR -15
        L[2] PREND_LA_VALEUR L[2]+1
        FIN_SINON
      FIN_POUR
   M PREND_LA_VALEUR (10*L[1]-15*L[2])/1000
   AFFICHER "Le gain moyen pour 1000 parties
   est"
   AFFICHER M
FIN_ALGORITHME
```

77 **a.** Si au bout des deux tirages le joueur a deux boules rouges il gagne $2x$ €, s'il a deux boules noires il perd 4 € et dans le cas d'un tirage bicolore il gagne $x - 2$ €.

b.

Valeur g_i prise par G	$2x$	$x - 2$	-4
Probabilité $p(G = g_i)$	0,3	0,6	0,1

c. $E(G) = 1{,}2x - 1{,}6$.

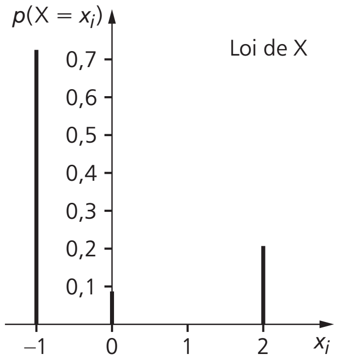
d. $E(G) \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant \frac{4}{3}$ et dans ce cas le jeu est favorable au joueur.

78 **1. a.** 0,2 ; **b.** 0,8 ; **c.** 0,28 ; **d.** 1.

2. a.

Valeur x_i prise par X	-1	0	2
Probabilité $p(X = x_i)$	0,72	0,08	0,2

b.



c. $E(X) = -0{,}32$; $V(X) = 1{,}4176$.

d. Au bout d'un grand nombre de parties, le gain moyen est de $-0{,}32$.

79 **a.** $p(X = 3) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$.

b.

Valeur x_i prise par X	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

c. $E(X) = \frac{167}{36}$; $\sigma(X) \approx 0{,}673$.

d.

Valeur y_i prise par Y	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(Y = y_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(Y) = \frac{91}{36}$; $\sigma(Y) \approx 1{,}404$.

On peut remarquer que Y est plus dispersée que X.

Pour aller plus loin

86 Notons p_i la probabilité du résultat e_i.

$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$
$= 1 - p_1 + 1 - p_2 + \dots + 1 - p_n$
$= n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) = n - 1$.

87 **1.** $365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^{30}$.

2. a. $\bar{A}$: « tous les élèves de la classe ont des dates d'anniversaire différentes ».

b. $365 \times 364 \times \dots \times (365 - 29)$
$= 365 \times 364 \times \dots \times 336$.

3. $p(A) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}}$
$= 0{,}706$ à 0,001 près.

La réponse est donc « oui » (et cela est valable à partir d'une classe de 23 élèves).

4. a. La probabilité est égale à

$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{29} = 0{,}076$ soit moins de 8 chances sur 100.

b. Pour que cette probabilité soit supérieure à 0,5 il faudrait une classe d'au moins 254 élèves !

88

Valeur x_i prise par X	0	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{9}{27}$	$\frac{15}{27}$	$\frac{2}{27}$

89 **1.** $p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2$
$= p_1 x_1^2 - 2\,x_1 p_1\,E(X) + p_1(E(X))^2$
$\quad + p_2 x_2^2 - 2\,x_2 p_2\,E(X) + p_2(E(X))^2$.
$= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - 2E(X)\,(x_1 p_1 + x_2 p_2)$
$\quad + (p_1 + p_2)\,((E(X))^2$ or $x_1 p_1 + x_2 p_2$
$= E(X)$ et $p_1 + p_2 = 1$,
donc $p_1\,(x_1 - E(X))^2 + p_2\,(x_2 - E(X))^2$
$= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - 2E(X)E(X) + ((E(X))^2$
$= E(X^2) - (E(X))^2$.

2. $\sum_{i=1}^{m} p_i (x_i - E(X))^2$

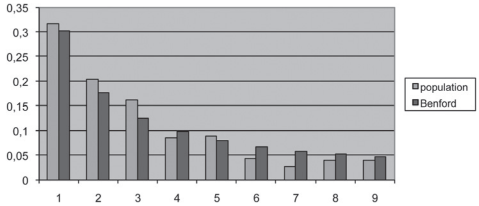
$= \sum_{i=1}^{m} (p_i x_i^2 - 2p_i x_i E(X) - p_i (E(X))^2$

$= \sum_{i=1}^{m} (p_i x_i^2) - 2E(X) \sum_{i=1}^{m} p_i x_i - (E(X))^2 \sum_{i=1}^{m} p_i$

or $\sum_{i=1}^{m} p_i x_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$

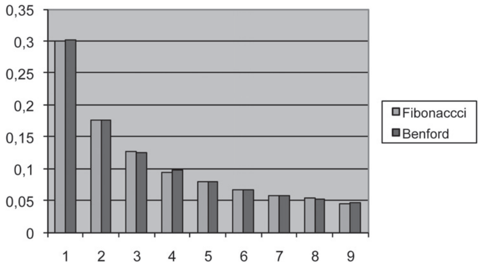
donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

90 **1.** @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.



La série de donnée choisie est composée des estimations de population par région en 2008 par sexe et tranche d'âge.

2. @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.



Remarque : pour déterminer le premier chiffres significatif de un, on peut utiliser la formule : ENT(un/10 ^ (ENT(LOG(un;10)))).

91 **1.** $p(M) = \dfrac{n^2 + 41}{(n+9)^2}$ et $p(D) = \dfrac{18n + 40}{(n+9)^2}$.

2. a.

Valeur x_i prise par X	2	–3
Probabilité $p(X = x_i)$	$\dfrac{n^2 + 41}{(n+9)^2}$	$\dfrac{18n + 40}{(n+9)^2}$

b. $E(X) = 2 \times \dfrac{n^2 + 41}{(n+9)^2} - 3 \times \dfrac{18n + 40}{(n+9)^2}$

$= \dfrac{2(n^2 - 27n - 19)}{(n+9)^2}$.

3. a. $f'(x) = 2 \times \dfrac{45x - 205}{(x+9)^3}$ est du signe de $45x - 205$ car $(x+9)^3$ est positif sur $[1 ; +\infty[$.

x	1		$\dfrac{41}{9}$		$+\infty$
signe de f'		–		+	
f	–0,9	↘	$\dfrac{-222}{169}$	↗	

b. $f(x) = 0$ équivaut à $x^2 - 27x - 19 = 0$

équivaut à $x = \dfrac{27 + \sqrt{805}}{2} \approx 27{,}7$ (car $x \geqslant 1$).

4. a. $E(X) = f(n)$, $\dfrac{41}{9} \approx 4{,}6$ or $f(4) \approx -1{,}313$ et $f(5) \approx -1{,}316$ donc l'espérance est minimale pour $n = 5$, elle vaut alors $\dfrac{-129}{98}$.

b. $E(X) \geqslant 0$ équivaut à $f(n) \geqslant 0$ équivaut à $n \geqslant 28$.

Donc à partir de 28 boules vertes, le jeu devient favorable au joueur.

92 **1. a.** La probabilité pour que (e) admette deux solutions distinctes est de $\dfrac{17}{36}$;

la probabilité pour que (e) admette une solution double est de $\dfrac{1}{18}$.

b. Dans le cas où (e) admet des solutions, la probabilité pour que la somme des solutions soit égale à –1 (ce qui équivaut à $p = 1$) est de $\dfrac{1}{6}$.

2. a.

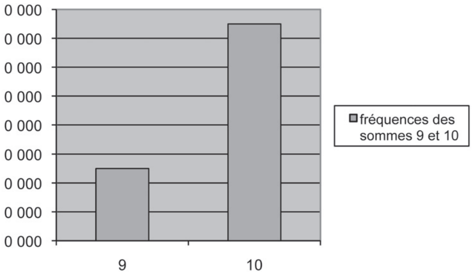
Valeur x_i prise par X	0	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$	$\dfrac{17}{36}$	$\dfrac{2}{36}$	$\dfrac{17}{36}$

b. Au bout d'un grand nombre d'expériences, le nombre moyen de solutions de (e) est égal à l'espérance de X soit 1.

93 **1. a.** $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5$
$= 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5$
$= 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3.$

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6$
$= 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$

b. @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee.



2. On lance successivement trois dés, il y a donc 216 résultats possibles. Parmi eux 6 permettent d'obtenir la somme 9 à partir des résultats 1, 2 et 6, de même pour 1, 3, 5 et 2, 3, 4. Il y a 3 possibilités pour obtenir une somme de 9 à partir des résultats 1, 4, 4 ; de même pour 2, 2, 5 et il y a une seule possibilité pour obtenir 3, 3, 3. La probabilité d'obtenir une somme de 9 est donc de $\frac{25}{216}$.
De la même façon, on trouve que la probabilité d'obtenir une somme de10 est de $\frac{27}{216}$ (qui est bien supérieure à $\frac{25}{216}$).

94

		3^e^ lancer	2^e^ lancer	1^er^ lancer
Listons les cas possibles (voir ci-contre). Il y a 15 cas équiprobables dont 8 avec au moins un 2 lors d'un lancer. La probabilité cherchée est donc : $\frac{8}{15}$	♥	2	1	1
	♥	3	1	2
	♥	3	2	1
		4	1	3
	♥	4	2	2
		4	3	1
		5	1	4
	♥	5	3	2
	♥	5	3	2
		6	1	5
	♥	6	2	4
		6	3	3
	♥	6	4	2
		6	5	1

95 Le nombre de choix de ces trois points est $\frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$.
Le nombre de choix correspondant à trois points alignés est : 4 (en diagonale) + 4 (en colonne) + 3 × 4 (en ligne) soit 20 possibilités. La probabilité est donc de $\frac{1}{11}$.

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

Les élèves pourront trouver de nombreuses informations sur internet (sur le site Wikipédia par exemple).
On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur misant x euros.

• On mise sur un numéro plein, en cas de sortie, on remporte 35 fois la mise.
$E(X) = -\frac{x}{37} \approx -0{,}027x$.

x_i	$-x$	$35x$
$p(X= x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

• On mise sur deux numéros adjacents, en cas de sortie, on remporte 17 fois la mise.
$E(X) = -\frac{x}{37}$.

x_i	$-x$	$17x$
$p(X= x_i)$	$\frac{35}{37}$	$\frac{2}{37}$

• On mise sur une transversale (trois numéros), en cas de sortie, on remporte 11 fois la mise. $E(X) = -\frac{x}{37}$.

x_i	$-x$	$11x$
$p(X= x_i)$	$\frac{34}{37}$	$\frac{3}{37}$

• On mise sur un carré, en cas de sortie, on remporte 8 fois la mise. $E(X) = -\frac{x}{37}$.

x_i	$-x$	$8x$
$p(X= x_i)$	$\frac{33}{37}$	$\frac{4}{37}$

• On mise sur un sixtain, en cas de sortie, on remporte 5 fois la mise. $E(X) = -\frac{x}{37}$.

x_i	$-x$	$5x$
$p(X= x_i)$	$\frac{31}{37}$	$\frac{6}{37}$

• On mise sur une douzaine, en cas de sortie, on remporte 2 fois la mise. $E(X) = -\frac{x}{37}$.

x_i	$-x$	$2x$
$p(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$

• On mise sur une chance simple (noir-rouge, pair-impair, manque-passe), en cas de sortie, on remporte 1 fois la mise. Il y a deux possibilités en cas de sortie du zéro :

– Soit on décide de laisser enfermer notre mise (par exemple on mise sur « rouge », le zéro sort, la mise est enfermée, si au coup suivant le « rouge » sort, on récupère notre mise, si c'est noir ou 0 qui sort on perd notre mise). $E(X) = -\frac{19x}{37^2} \approx -0{,}0139x$.

x_i	$-x$	0	x
$p(X = x_i)$	$\frac{18}{37} + \frac{19}{37^2}$	$\frac{18}{37^2}$	$\frac{18}{37}$

– Soit on décide de récupérer la moitié de notre mise. $E(X) = -\frac{x}{74} \approx -0{,}0135x$.

x_i	$-x$	$-0{,}5x$	x
$p(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{18}{37}$

C'est ce dernier cas qui est le moins défavorable au joueur.