

Ouverture

Mesurer un phénomène à intervalles de temps régulier c'est, en numérotant les intervalles successivement, faire correspondre à tout entier une valeur. La notion de suite numérique, sous forme de suite de mesures, est très naturelle et a existé avant toute formalisation. Par exemple, dans l'Égypte ancienne, à partir de l'Ancien Empire, soit vers 2 700 avant Jésus-Christ, mesurer chaque année le niveau atteint par la crue du Nil était l'une des tâches du gouverneur de l'île Éléphantine ; dans cette île, on peut voir le Nilomètre utilisé pour ce relevé, relevé qui avait une très grande importance : il permettait de prévoir l'entretien des digues, le niveau des récoltes, etc. et permettait aussi d'évaluer le montant des impôts à prélever.

Les premières suites numériques à caractère plus mathématique sont, elles aussi, apparues il y a fort longtemps ; elles étaient liées aux « procédés illimités de calcul » que l'on peut trouver dans la mathématique babylonienne ou chez les Grecs, en particulier dans des procédés d'approximation menés par Archimède. On retrouvera cette préoccupation à partir du XVII^e siècle dans la méthode des « indivisibles » chez Pascal et Cavalieri.

Le cas particulier des suites arithmétiques et des suites géométriques a été particulièrement étudié en France au Moyen Âge. Lorsque l'on représente graphiquement une suite arithmétique, en formant dans le plan repéré l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n) , les points d'une telle suite sont alignés. C'est ce que l'on demande d'observer entre août et novembre pour les températures minimales : elles diminuent chaque mois de la même quantité. On a une régularité similaire pour les températures

minimales entre janvier et avril et pour les maximales entre septembre et décembre.

Ce chapitre appréhende d'abord la notion de suite et les calculs des premiers termes, en présentant les différents modes de génération d'une suite. Puis sont étudiées des suites particulières qui sont les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Ici, il est opportun d'exploiter l'utilité de la calculatrice, d'un tableur, d'un logiciel adapté comme Sinequanon ou d'un algorithme.

Compte-tenu de la volonté de bien faire acquérir le vocabulaire et les notations spécifiques, et compte-tenu de la richesse des activités algorithmiques, la représentation graphique d'une suite a volontairement été écartée de ce chapitre car elle est davantage liée à l'étude du comportement d'une suite qui sera abordée dans le chapitre 5. Toujours pour les mêmes raisons, ce chapitre 4 peut même être traité en deux parties, en séparant les généralités des suites, des suites arithmétiques ou géométriques.

Vérifier ses acquis

1 a. $u(n) = n^2 - 3n + 5$.

b. $n + 1$.

c. $u(n) + 1 = n^2 - 3n + 6$.

d. $u(n+1) = (n+1)^2 - 3(n+1) + 5 = n^2 - n + 3$.

2 a. $123 - 96 + 1 = 28$ pages.

b. A100 contiendrait 99, et B100 contiendrait 1 000.

3 a. 5^{n+1} .

b. $3^{2n} - 1$.

c. $2^n(2 - 1) = 2^n$.

d. $\frac{1}{3^{n+2-n}} = \frac{1}{9}$.

e. $\left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$.

f. $20 \left(1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right)$.

g. $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^n} = \frac{4^{n-1} - 1}{4^n}$.

4 1. c et d.

2. Réponse rectifiée c. 1,25.

3. d. 4. a.

5 1. En 13 mois, Léa aura reçu 133 € ; en 14 mois, elle aura reçu 147 €.

2. Algorithme c.

Activités d'introduction

L'activité 1 permet d'aborder naturellement la notion de suite en introduisant, sur des exemples, le vocabulaire et les notations, où les élèves se prêtent généralement au jeu, en partant de suites « logiques » de plusieurs niveaux. Cette activité donne l'occasion de traiter toutes les généralités sur les suites, en découvrant les deux façons les plus répandues de générer une suite ; la suite w est facile à trouver explicitement mais beaucoup plus difficile et moins naturelle de façon récurrente ; la suite t est volontairement plus difficile (pour que tous les élèves cherchent de

façon ludique) mais peut être explicitée plus facilement par récurrence, une aide étant donnée pour la forme explicite qu'il faudra admettre. L'objectif étant d'appréhender le début du cours, les mots « arithmétique » ou « géométrique » ne seront pas abordés concernant les suites u et v .

L'activité 3 introduit la notion de suite arithmétique, à partir de la différence de deux termes consécutifs qui s'avère constante. Ainsi, cette activité 3 sera à traiter avant l'activité 2 si l'on veut traiter les suites arithmétiques avant les suites géométriques. En outre, elle permet de parler de vitesse moyenne et d'accélération moyenne.

L'activité 2 fait découvrir le cours sur les suites géométriques (définition avec la forme récurrente, formule explicite et la somme de plusieurs termes consécutifs), à partir de considérations géométriques : les suites u , r , a , ℓ s'avèreront géométriques (ℓ étant même constante), alors que la suite s sera vue comme la somme des termes de la suite u .

Activité 1 Suites « logiques »

1 1. u : -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 ; ...

v : 0,125 ; 0,25 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 4 ; ...

w : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ...

t : 1 ; 2 ; 5 ; 14 ; 41 ; 122 ; 365 ; 1 094 ; ...

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7
Terme u_n	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
Terme v_n	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
Terme w_n	0	1	4	9	16	25	36	49
Terme t_n	1	2	5	14	41	122	365	1 094

1. $u_{19} = -5 + 19 \times 2 = 33$.

Conjecture : $u_n = -5 + 2n$.

2. $v_{19} = 0,125 \times 2^{19} = 65\,536$.

Conjecture : $v_n = 0,125 \times 2^n$.

3. $w_{19} = 19^2 = 361$ et $w_n = n^2$.

4. Seule la formule c semble convenir.

4 a. $u_{19} = u_{18} + 2$ et plus généralement :

$u_{n+1} = u_n + 2$.

b. $v_{19} = 2v_{18}$ et plus généralement : $v_{n+1} = 2v_n$.

c. La suite t est construite avec :

$t_{n+1} = 3t_n - 1$.

d. Puisque $w_n = n^2$, on peut être tenté d'écrire : $w_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = w_n + 2n + 1$: on obtient alors w_{n+1} en fonction de w_n et de n . On a aussi la possibilité d'écrire w_{n+1} uniquement en fonction de w_n avec :

$w_{n+1} = (\sqrt{w_n} + 1)^2$.

Activité 2 Lunules

1 a. $u_0 = 1 ; u_1 = 2 ; u_2 = 4 ; u_3 = 8$.

$$r_0 = 4 ; r_1 = 2 ; r_2 = 1 ; r_3 = \frac{1}{2}.$$

$$\ell_0 = 4\pi ; \ell_1 = 4\pi ; \ell_2 = 4\pi ; \ell_3 = 4\pi.$$

$$a_0 = 8\pi ; a_1 = 2\pi ; a_2 = \frac{\pi}{2} ; a_3 = \frac{\pi}{8}.$$

$$s_0 = 1 ; s_1 = 3 ; s_2 = 7 ; s_3 = 15.$$

b. La particularité des suites (u_n) , (r_n) et (a_n) est que l'on obtient un terme en multipliant toujours le terme précédent par le même nombre. Il en est de même pour la suite constante (ℓ_n) (en multipliant chaque terme par 1), mais pas pour la suite (s_n) .

2 $u_5 = u_0 \times 2^5 = 32 ; r_5 = r_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{8} ;$

$$\ell_5 = u_5 \times r_5 = 4\pi ; a_5 = a_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{\pi}{128}.$$

3 a. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$.

b. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = s_5.$$

Activité 3 Chute d'une bille

1 a.

t	$d = 5t^2$	N^0	n	Accroissement
0	0			
1	5	1	5	
2	20	2	15	10
3	45	3	25	10
4	80	4	35	10
...				
$n-1$	$5(n-1)^2$			
n	$5n^2$	n	$10n-5$	
$n+1$	$5(n+1)^2$	$n+1$	$10n+5$	10

b. La particularité de la suite (e_n) est que l'on a toujours $e_{n+1} - e_n = 10$, c'est-à-dire que l'accroissement de la distance parcourue d'une seconde à l'autre (et donc aussi de la vitesse moyenne entre deux instants séparés d'une seconde) est constant et toujours égal à 10 m. Cet accroissement correspond à l'accroissement des vitesses moyennes qui n'est rien d'autre, ici, que l'accélération moyenne d'une seconde à l'autre.

2. a. $d = 324 \Leftrightarrow t \approx 8,05$ s (car $t \geq 0$).

b. Distance parcourue lors de la 8^e seconde : $e_8 = 10 \times 8 - 5 = 75$ m.

Distance parcourue lors de la 7^e seconde : $e_7 = e_8 - 10 = 65$ m.

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1 Suite de Fibonacci

1 a. $u_4 = 5$ car, sur les 3 couples du mois précédent, 2 donnent chacun naissance à un nouveau couple.

$u_5 = 8$ car, sur les 5 couples du mois précédent, 3 donnent chacun naissance à un nouveau couple.

b. On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ car, au mois $n+2$, on a u_{n+1} couples du mois précédent $n+1$, et les u_n couples du mois n donnent chacun naissance à un nouveau couple.

c. $u_6 = u_5 + u_4 = 13$ et $u_7 = u_6 + u_5 = 21$.

2 a.

```

VARIABLES
U EST_DU_TYPE NOMBRE
V EST_DU_TYPE NOMBRE
W EST_DU_TYPE NOMBRE
I EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
U PREND_LA_VALEUR 1
V PREND_LA_VALEUR 1
I PREND_LA_VALEUR 1
LIRE N
TANT_QUE (I<N) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
        W PREND_LA_VALEUR U+V
        U PREND_LA_VALEUR V
        V PREND_LA_VALEUR W
        I PREND_LA_VALEUR I+1
    FIN_TANT_QUE
AFFICHER W
FIN_ALGORITHME
    
```

b. L'algorithme donne $u_{12} = 233$.

c. L'algorithme donne $u_{24} = 75\,025$.

3 a.

```
VARIABLES
U EST_DU_TYPE NOMBRE
V EST_DU_TYPE NOMBRE
W EST_DU_TYPE NOMBRE
I EST_DU_TYPE NOMBRE
K EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
U PREND_LA_VALEUR 1
V PREND_LA_VALEUR 1
W PREND_LA_VALEUR 2
I PREND_LA_VALEUR 1
LIRE K
TANT_QUE (W<K) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    W PREND_LA_VALEUR U+V
    U PREND_LA_VALEUR V
    V PREND_LA_VALEUR W
    I PREND_LA_VALEUR I+1
    FIN_TANT_QUE
AFFICHER I
FIN_ALGORITHME
```

b. L'algorithme donne $u_n \geq 10^9$ à partir de $n = 44$. Il faut donc seulement 44 mois pour obtenir au moins un milliard de lapins !

Complément possible au TP1 :

4 a. Démontrer que, si deux suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation de récurrence, alors toute suite (u_n) définie par $u_n = \lambda a_n + \mu b_n$ (où λ et μ sont deux réels quelconques) vérifie aussi la relation de récurrence.

b. Démontrer qu'il n'existe que deux suites géométriques (a_n) et (b_n) , que l'on déterminera, qui ont pour premier terme 1 et qui vérifient la relation de récurrence.

c. Déterminer les réels λ et μ tels que la suite (u_n) définie par $u_n = \lambda a_n + \mu b_n$, où (a_n) et (b_n) sont les deux suites trouvées dans la question précédente, vérifie les deux conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

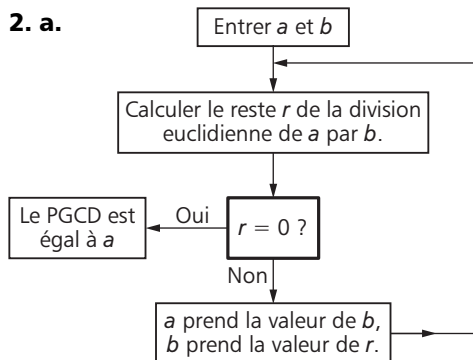
d. En déduire l'expression explicite de la suite de Fibonacci.

TP Algorithmique 2 Algorithme d'Euclide

1 a. $a_2 = 28$; $a_3 = 16$; $a_4 = 12$; $a_5 = 4$; $a_6 = 0$.

b. PGCD(284 ; 128) = 4 (dernier reste non nul a_5).

2. a.



b. Algorithme sur Algobox :

```
VARIABLES
A EST_DU_TYPE NOMBRE
B EST_DU_TYPE NOMBRE
R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE A
LIRE B
TANT_QUE (B!=0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    R PREND_LA_VALEUR A%B
    A PREND_LA_VALEUR B
    B PREND_LA_VALEUR R
    FIN_TANT_QUE
AFFICHER "PGCD = "
AFFICHER A
FIN_ALGORITHME
```

c. L'algorithme donne PGCD(589 ; 116) = 1, ce qui signifie que 589 et 116 sont premiers entre eux.

TP TICE 1 Somme de termes d'une suite

1 a.

	A	B	C
1	n	$S(n)$	$V(n)$
2	0	0	0
3	1	$=B2+A3^3$	$=C2+A3$

On conjecture : $S_n = (V_n)^2$.

b. On conjecture alors :

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2 a. Avec la formule conjecturée, on retrouve bien $S_0 = 0$.

$$b. S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ = \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)(n+1+1)^2}{4}.$$

Donc la formule est aussi vérifiée au rang $n + 1$.

TP TICE 2 Calcul des annuités d'un emprunt

1. a. Le capital restant dû au bout de la 1^{re} année est $v_1 = 1,045C - a$, car en 1 an, il y a eu 4,5 % en plus d'intérêt sur le capital C de départ, et il faut enlever l'annuité payée.

b. $v_{n+1} = 1,045v_n - a$.

c. On a forcément $a \geq \left(\frac{225\,000}{5} \right)$ car le calcul

de a doit se faire avec les intérêts en plus.

Et le calcul de a est fait justement pour que l'on paie le même montant chaque année, et ce pendant 5 ans au bout desquels le montant v_5 restant dû doit être nul (le remboursement est terminé).

d.

	A	B	C
1	a	n	$v(n)$
2	51253	0	225000
3		1	183872
4		2	140893,24
5		3	95980,44
6		4	49046,56
7		5	0,65

On estime l'annuité à environ 51 253 € (à 1 € près).

2. a. $v_2 = 1,045v_1 - a$
 $= 1,045(1,045C - a) - a = 1,045^2C - 1,045a - a$.

b. $v_3 = 1,045v_2 - a$
 $= 1,045(1,045^2C - 1,045a - a) - a$
 $= 1,045^3C - 1,045^2a - 1,045a - a$.

c. $v_4 = 1,045v_3 - a$
 $= 1,045(1,045^3C - 1,045^2a - 1,045a - a) - a$
 $= 1,045^4C - 1,045^3a - 1,045^2a - 1,045a - a$.

d. $v_5 = 1,045v_4 - a$
 $= 1,045(1,045^4C - 1,045^3a - 1,045^2a - 1,045a - a) - a$
 $= 1,045^5C - a(1,045^4 + 1,045^3 + 1,045^2 + 1,045 + 1)$.

Donc $v_5 = 1,045^5C - a \times \frac{1 - 1,045^5}{1 - 1,045}$.

e. $v_5 = 0$ donc $a = 0,045C \times \frac{1 - 1,045^5}{1 - 1,045}$.

f. Sachant que l'on a $C = 225\,000$, on trouve $a \approx 51\,253,12$ €.

3. Avec un taux annuel de 5,3 % et un remboursement sur 6 ans, l'annuité serait d'environ 44 755,13 € (moins importante) mais, sur les 6 ans, le total remboursé serait de 268 530,78 € (plus important que le total de 256 265,6 € sur les 5 ans).

TP TICE 3 Demi-vie

1. a. $C_{n+1} = (1 - k)C_n$.

b. (C_n) est une suite géométrique de raison $1 - k$ (si $k \neq 1$).

c. $C_n = C_0 \times (1 - k)^n = (1 - k)^n$.

2. On calcule $C_n = 0,965^n$ pour n allant de 1 à 300 (avec $C_0 = 1$).

3. a. La concentration initiale de 1 aura diminué de moitié au bout de 20 minutes environ. Lorsque $19 < n < 20$, on a $C_n \approx 0,5$.

b. $C_{30} \approx 0,34$

c. La concentration tombera à 0,17 (la moitié de 0,34) lorsque $49 < n < 50$, c'est-à-dire environ 20 minutes après les 30 premières minutes.

d. Il semble que la concentration diminue de moitié toutes les 20 minutes environ.

4. a. Pour tout entier naturel n ,
 $C_{n+20} - 0,5C_n = 0,965^n(0,965^{20} - 0,5)$
donc $C_{n+20} - 0,5C_n \leq 0$, ce qui prouve que $C_{n+20} \leq 0,5C_n$.

Et $C_{n+19} - 0,5C_n = 0,965^n(0,965^{19} - 0,5)$
donc $C_{n+19} - 0,5C_n > 0$, ce qui prouve que $C_{n+19} > 0,5C_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$C_{n+20} \leq 0,5C_n < C_{n+19}$.

b. L'encadrement précédent prouve qu'à tout instant n , chaque concentration C_n diminue de moitié entre 19 et 20 minutes plus tard.

TP TICE 4 Suite aléatoire

1. 1. En mettant les indices 1 à 10 en ligne 1, et en mettant 0 dans A2 (à copier jusqu'en A1001), on peut mettre par exemple dans B2 : =SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;2)=2;A2+1;A2-1) que l'on copie jusqu'en K2 puis jusqu'en K1001. On remarque que les événements A_1, A_3, A_5, A_7 et A_9 sont impossibles ; en effet, en partant de 0, on ne peut retrouver 0 qu'après deux lancers de pièce, donc uniquement lorsque n est pair.

2 a. b.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N° 1	0,000	0,489	0,000	0,377	0,000	0,298	0,000	0,259	0,000	0,260
N° 2	0,000	0,495	0,000	0,369	0,000	0,312	0,000	0,253	0,000	0,267
N° 3	0,000	0,529	0,000	0,363	0,000	0,316	0,000	0,292	0,000	0,241
N° 4	0,000	0,531	0,000	0,382	0,000	0,322	0,000	0,280	0,000	0,241
N° 5	0,000	0,483	0,000	0,368	0,000	0,304	0,000	0,260	0,000	0,242

3 On peut considérer la variable aléatoire donnant le nombre de succès (obtenir pile) sur les deux lancers : cette variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Or, pour obtenir 0 au bout des deux lancers, il faut compenser un succès par un échec.

Ainsi $p(A_2) = p(X = 1)$

$$= \binom{2}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5.$$

De même, on peut considérer la variable aléatoire sur quatre lancers, et comprendre que l'on n'obtiendra 0 qu'après deux succès et deux échecs : ainsi, $p(A_4) = p(X = 2)$

$$= \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Enfin, après six lancers, on n'obtiendra 0 qu'avec trois succès et trois échecs :

$$p(A_6) = p(X = 3) \\ = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16} = 0,3125.$$

4 Si n est impair alors $p(A_n) = 0$. Si n est pair alors

$$p(A_n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercices

Appliquer le cours

1 a. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 8$.

b. Le 4^e terme se note avec l'indice 3 et vaut $u_3 = 27$.

c. $u_5 = 125$.

d. Conjecture : $u_n = n^3$.

e. Faux, la suite u peut aussi se noter (u_n) .

f. Oui, u est une fonction définie sur \mathbb{N} .

2 1. a. 2. c. 3. b. 4. a. et d.

3 a. Oui. b. Non. c. Non.

d. Oui. e. Oui.

4 a. 28. b. 16. c. 14. d. n .

e. $p + 1$. f. $n - p + 1$.

5 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux. d. Faux.

e. Faux. f. Vrai. g. Faux. h. Vrai.

i. Vrai. j. Vrai.

6 a. Non. b. Non. c. Oui.

7 a. Faux. b. Vrai. c. Faux.

8 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux. d. Faux.

e. Faux. f. Faux. g. Vrai. h. Vrai.

i. Faux.

9 Une suite constante (dont tous les termes sont égaux) est à la fois une suite arithmétique (de raison 0) et une suite géométrique (de raison 1).

10 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux.

12 a. $u_n = 2n$. b. $u_n = n^2$.

c. $u_n = \sqrt{3n + 5}$.

13 a. $u_0 = 3$; $u_1 = 2$; $u_2 = -1$; $u_3 = -6$.

b. $u_0 = \frac{1}{3}$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 9$.

c. $u_0 = 1$; $u_1 = -3$; $u_2 = 9$; $u_3 = -27$.

14 a. $u_0 = 4$; $u_1 = 0$; $u_2 = -2$.

b. $u_{1+1} = u_2 = -2$ et $u_1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

c. $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 5(n + 1) + 4 = n^2 - 3n$, alors que $u_n + 1 = n^2 - 5n + 5$.

d. $u_{2-1} = u_1 = 0$ et $u_2 - 1 = -2 - 1 = -3$.

e. $u_{n-1} = (n - 1)^2 - 5(n - 1) + 4 = n^2 - 7n + 10$, alors que $u_n - 1 = n^2 - 5n + 3$.

15 a. $u_5 = 2$ et $u_6 = \frac{17}{8} = 2,125$.

b. $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$

et $u_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+2} = \frac{3n+2}{n+3}$.

c. On retrouve bien les résultats de la question **a.**

17 a. $u_{n+1} = (u_n)^2$. **b.** $u_n + u_{n+1} = 3$.

c. $u_{n+1} = 0,8u_n$. **d.** $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 5}$.

18 a. $u_1 = 1$; $u_2 = 1,5$; $u_3 = 1,2$.

b. $u_{10} = \frac{3}{u_9 + 1}$. **c.** $u_n = \frac{3}{u_{n-1} + 1}$.

20 a. On définit la suite par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 3$. L'algorithme détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 2\,000$ et précise la valeur de u_n .

b. Le terme recherché est de rang 19 et vaut $u_{19} = 2\,152$.

21 a. L'algorithme permet d'afficher tous les termes du rang 0 jusqu'au rang n donné de la suite définie par $u_n = 3n^2 - 4n + 1$. Avec $n = 2$, on obtient $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = 5$.

b. L'algorithme permet d'afficher le terme de rang n donné de la suite définie par $u_0 = 1$

et $u_{n+1} = \frac{1}{3u_n^2 - 0,9}$.

Avec $n = 2$, on obtient $u_2 = -15$.

22

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
L EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  L[0] PREND_LA_VALEUR 3
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
      L[i] PREND_LA_VALEUR 100*sqrt( (L[i-1]+1) )
    FIN_POUR
  AFFICHER L [n]
FIN_ALGORITHME
```

24 a. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 15 et de raison -5 .

b. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme -1 et de raison 3.

c. Non car $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

d. Non car $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

e. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 1 et de raison 4.

f. Non car $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

g. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 1 et de raison 2.

h. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme b et de raison a .

i. Non car $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

25 a. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme $-\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{3}{4}$.

b. Non car $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

c. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme $\frac{1}{5}$ et de raison -1 .

d. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 1 et de raison $\frac{1}{8}$.

e. Oui, (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme -4 et de raison 3.

27 $u_{80} = u_5 + 75r \Rightarrow r = \frac{1}{3}$.

D'où $u_0 = u_5 - 5r = -\frac{38}{3}$ et $u_{20} = u_5 + 15r = -6$.

28 $u_n = 1 + 2n$ donc $u_{37} = 75$.

29 $u_n = 4 + 6(n - 1) = 6n - 2$ donc $u_{15} = 88$ et $u_{30} = 178$.

30 a. Il s'agit de la suite arithmétique de 1^{er} terme 0 et de raison 1, c'est-à-dire la suite des entiers naturels.

b. On a toujours

$u_p + u_{n-p+1} = p + n - p + 1 = n + 1$.

c. En additionnant membre à membre les deux sommes, et en regroupant deux par deux, on obtient :

$$S + S = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \dots + (u_p + u_{n-p+1}) + \dots + (u_n + u_1).$$

Donc, d'après **a.**, $2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + \dots + (n + 1).$

D'où : $2S = n \times (n + 1)$, c'est-à-dire :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

31 a. $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$.

b. On généralise la disposition précédente avec n lignes et $n + 1$ colonnes, et on obtient de suite la somme des n premiers entiers en divisant par 2 le nombre total de jetons.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots \\
 & \quad + (u_0 + nr) = (n+1)u_0 + r(1+2+\dots+n) \\
 & = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2} = (n+1) \left(u_0 + \frac{rn}{2} \right) \\
 & = (n+1) \times \frac{u_0 + u_0 + nr}{2}. \\
 & \text{Donc } \sum_{i=0}^{i=n} u_i = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.
 \end{aligned}$$

33 a. On a toujours

$$\begin{aligned}
 u_p + u_{n-p} &= u_0 + pr + u_0 + (n-p)r \\
 &= u_0 + (u_0 + nr) = u_0 + u_n.
 \end{aligned}$$

b. On additionne membre à membre

$$\begin{aligned}
 S &= u_0 + u_1 + \dots + u_p + \dots + u_n \\
 \text{et } S &= u_n + u_{n-1} + \dots + u_{n-p} + \dots + u_0.
 \end{aligned}$$

En regroupant les termes deux par deux, on a :

$$\begin{aligned}
 2S &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_p + u_{n-p}) \\
 & \quad + \dots + (u_n + u_0).
 \end{aligned}$$

Donc, d'après **a.**,

$$2S = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n) + \dots + (u_n + u_0).$$

Ainsi, $2S = (n+1)(u_0 + u_n)$.

c. Il résulte de **b.** que $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

35 a. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 6 et de raison 2.

b. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison $\sqrt{5}$.

c. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.

d. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison $-\frac{3}{10}$.

e. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 15 et de raison $\frac{1}{5}$.

f. Non car $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

36 a. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 100 et de raison $\frac{4}{3}$.

b. Non car $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

c. Non car $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.

d. Non car $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.

e. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 7 et de raison $\frac{1}{3}$.

f. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 8 et de raison $\frac{8}{3}$.

g. Oui, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 36 et de raison 9.

38 (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 2 016 et de raison $\frac{1}{3}$.

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 = 672 ; u_2 = u_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 224 ;$$

$$u_{10} = u_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{224}{6561} \approx 0,034.$$

39 $u_6 = qu_5 \Rightarrow q = 1,2$. Or $u_5 = u_0 \times q^5$ donc

$$u_0 = \frac{100}{1,2^5} = \frac{78125}{1944} \approx 40,188.$$

$$\text{Et } u_{12} = u_5 \times q^7 = 358,31808.$$

41 a. $qS_n = q(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$

$$\begin{aligned}
 &= qu_0 + qu_1 + \dots + qu_n \\
 &= u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} u_i.
 \end{aligned}$$

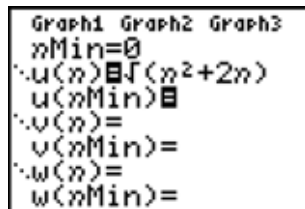
b. $S_n - qS_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_n) - (u_1 + \dots + u_n + u_{n+1})$

$$= u_0 + u_{n+1} = u_0 - u_0 \times q^{n+1}.$$

Donc $(1-q)S_n = u_0(1-q^{n+1})$, et puisque

$$q \neq 1, S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

43 a.



n	$u(n)$
0	0
1	1.7321
2	2.8284
3	3.873
4	4.899
5	5.9161
6	6.9282

$n=4$

b.

```

Graph1 Graph2 Graph3
nMin=0
u(n)=sqrt((u(n-1))
2+2u(n-1))
u(nMin)=100
v(n)=
w(n)=

```

n	$u(n)$
0	100
1	101
2	101.99
3	102.99
4	103.99
5	104.98
6	105.97

$u(n)=103.9804836$

44 Méthode donnée page 107, pour l'utilisation de la calculatrice.

a. $S \approx 228,649$. b. $S \approx 2\,309,020$.

46 a. $S = 23\,811\,350$.

b. Impossible de calculer S (dépasse les capacités du tableur).

47 a. $u_n = \sqrt{n^2 - 3n + 4} - 1$.

b. $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n + 1}$.

c. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 3n - 1$.

S'entraîner

48 a. $u_0 = u_1 = 4$.

b. P est fausse car $u_2 = -2$.

c. Négation de P : « Il existe un entier naturel n tel que $u_n \neq 4$ ».

d. $n^3 - 6n^2 + 5n + 4 = 4 \Leftrightarrow n(n^2 - 6n + 5) = 0$
 $\Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 5$.

49 a. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$.

b. $v_0 = 1$; $v_1 = -1$; $v_2 = 1$; $v_3 = -1$.

c. On peut conjecturer que, pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$.

En effet, lorsque n est pair,

$v_n = \cos(\pi n) = 1 = (-1)^n = u_n$;

et lorsque n est impair,

$v_n = \cos(\pi n) = -1 = (-1)^n = u_n$.

50 a. $u_n = (n+1)^2$. b. $u_n = \frac{1}{n+1}$.

c. $u_n = (-1)^n \times 4$.

d. $u_n = 3 \left| \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| - \frac{1}{3} \left| \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|$.

51 a. Faux, (u_n) n'est pas définie au rang 0 car, si $n = 0$, alors $3n - 1 = 0$.

b. Vrai car, pour tout entier naturel n , $3n - 2 \neq 0$.

c. Faux, (u_n) n'est définie que du rang 1 jusqu'au rang 8 ; u_9 n'existe pas.

d. Vrai car, pour tout entier naturel n , $-2 \leq -2 \times (-1)^n \leq 2$

donc $1 \leq 3 - 2 \times (-1)^n \leq 5$, ce qui prouve que le calcul de u_n est toujours possible.

52 a. $u_0 = \frac{1}{25}$ et $u_{n+1} = 5u_n$.

b. $u_0 = -10$ et $u_{n+1} = 3,1u_n$.

c. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \times (n+1)$.

d. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{u_n} + 1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

e. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.

53 1. a. on suppose que $u_5 = 28$.

b. u_{n+1} en fonction de u_n :

$u_{n+1} = u_n + (n+2)$.

u_{n+1} en fonction de u_1 :

$u_{n+1} = u_1 + (3 + 4 + 5 + \dots + (n+2))$
 $= 10 + \frac{n(n+5)}{2}$.

2. v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = 4v_n + 1$.

v_n en fonction de n :

$v_n = 4^n \times 8 + (4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^2 + 4 + 1)$
 $= 4^n \times 8 - \frac{1}{3}(1 - 4^n)$.

54 a. \mathcal{T}_1 a pour équation $y = 13x + 19$ donc

$x = -\frac{19}{13} \approx -1,462$.

\mathcal{T}_2 a pour équation $y = \frac{1252}{169}x + \frac{20\,309}{2197}$

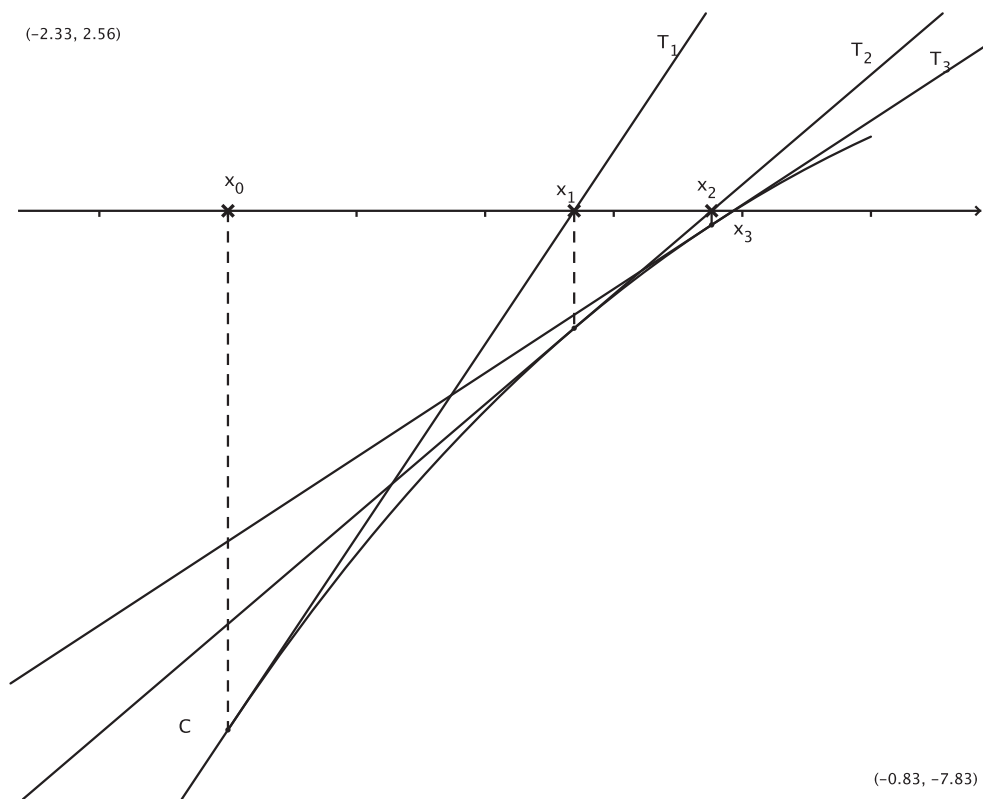
soit environ $y = 7,408x + 9,244$

donc $x_2 \approx -1,248$.

\mathcal{T}_3 a pour équation (environ)

$y = 5,673x + 6,888$ donc $x_3 \approx -1,213$.

$(-2.33, 2.56)$



b. \mathcal{T}_n a pour équation

$$y = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1}),$$

$$\text{soit } y = (3x_{n-1}^2 + 1)x - 2x_{n-1}^3 + 3.$$

$$\text{Ainsi, pour } y = 0, \text{ on obtient } x_n = \frac{2x_{n-1}^3 - 3}{3x_{n-1}^2 + 1}.$$

c. $f(t) = 0$ pour $t = u_6 \approx -1,213411663$.

55 a. $u_1 = 1$; $u_2 = -3$; $u_3 = 1$.

b. $u_9 = u_8^2 - 32$.

c. $u_n = u_{n-1}^2 - 4(n-1)$.

d. L'algorithme peut être le suivant :

Saisir(n) ;

$u = 1$

Pour $i = 0$ à $n - 1$ **faire**

$u = u^*u - 4*i$

$i = i + 1$

FinPour

Afficher(u)

56 a. $u_0 = 5$; $u_1 = 27$; $u_2 = 728$.

b. $u_1 = 2$; $u_2 = -1,5$; $u_3 = \frac{11}{6}$.

c. $u_0 = -1$; $u_1 = 1$; $u_2 = 7$.

57 a. Le cinquième terme est $u_4 = 131\,072$.

b. $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2}.$$

58 En 2005 : $c_0 = 258$.

En 2006 : $c_1 = 256$.

En 2007 : $c_2 = 271$.

En 2008 : $c_3 = 303$.

En 2009 : $c_4 = 352$.

En 2010 : $c_5 = 418$.

59 1. a. f est la fonction définie sur

$[-6 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$.

b. si $-5 \leq x \leq 3$ alors $1 \leq x+6 \leq 9$ donc $1 \leq \sqrt{x+6} \leq 3$, ce qui prouve que $f(x) \in I$.

c. $u_0 = -5$ donc $u_0 \notin I$ et, d'après **1.b.**, si $u_n \in I$, alors $f(u_n) \in I$, soit $u_{n+1} \in I$.

Ainsi, on pourra calculer tous les termes u_n , quel que soit l'entier naturel n .

2. a. On peut montrer que, pour tout entier n , $v_n \in [0 ; 10]$ donc (v_n) est définie sur \mathbb{N} .

b. On peut voir que w_3 n'existe pas donc (w_n) n'est pas définie sur \mathbb{N} .

60 A été définie la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et

$$\text{par } u_{n+1} = \frac{100}{3u_n^2 + 1}.$$

On obtient $u_6 \approx 99,996$ et $u_7 \approx 0,0033$.

61 a. Le nombre d'insectes augmente de 4 375 chaque année.

b. (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 10 000 et de raison 4 375.

c. Nombre d'insectes de la 6^e année :
 $u_6 = 10\,000 + 6 \times 4\,375 = 36\,250$.

62 a. $u_1 = 14\,030$ et $u_2 = 14\,060$. Ainsi le journal comptait 14 030 abonnés le 01/02/2008, et 14 060 le 01/03/2008.

b. Pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = u_n - 950 + 0,8 \times 950 + 220 = u_n + 30$.
 Donc (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 14 000 et de raison 30.

c. Prévion 144 mois plus tard :
 $u_{144} = 14\,000 + 144 \times 30 = 18\,320$ abonnés.

63 On n'a pas le droit d'affirmer que la suite (u_n) est arithmétique uniquement en vérifiant que $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$: il faut démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = 48$, ou démontrer que, pour tout entier naturel n , u_n est de la forme $u_0 + nr$.
 Ici, quel que soit n , $u_n = 48n + 16$ donc (u_n) est bien la suite arithmétique de 1^{er} terme 16 et de raison 48.

64 1. $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = u_n + 1$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 1. (on peut aussi voir simplement que, pour tout entier n , $u_n = n$).

2. $A_2 - A_1 = 3\pi$ et $A_3 - A_2 = 5\pi$ donc $A_3 - A_2 \neq A_2 - A_1$ donc (A_n) n'est pas arithmétique.

3. a. Pour tout $n \geq 2$,
 $S_n = A_n - A_{n-1} = \pi n^2 - \pi(n-1)^2 = 2\pi n - \pi$.
 Donc (S_n) est une suite arithmétique de raison 2π .

b. Aire recherchée :
 $S_{11} = S_1 + 10 \times 2\pi = 21\pi \text{ cm}^2$.

65 a. $u_n = -\frac{5}{8}n + 5$ donc (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 5 et de raison $-\frac{5}{8}$.

b. $u_{20} = -7,5$.

c. $-334 < u_n < -100 \Leftrightarrow 152 < n < 526,4$.
 Le nombre de points recherchés est donc $526 - 153 + 1 = 374$.

66 1. a. $w_0 = 26$ et $w_{10} = 36$.

b. Pour tout n , $w_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}$
 $= \frac{u_n + 5 + v_n - 3}{2} = w_n + 1$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison 1.

c. $w_n = n + 26$. On retrouve bien $w_{10} = 36$.

2. Un algorithme utilisant la forme récurrente des suites :

```
VARIABLES
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  t EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE NOMBRE
  w EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE r
  LIRE u
  LIRE t
  LIRE v
  LIRE n
  w PREND_LA_VALEUR (u+v)/2
  i PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (i < n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      u PREND_LA_VALEUR u+r
      v PREND_LA_VALEUR v+t
      w PREND_LA_VALEUR (u+v)/2
      i PREND_LA_VALEUR i+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER w
FIN_ALGORITHME
```

Un autre algorithme utilisant l'expression explicite des suites :

```
VARIABLES
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  t EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE NOMBRE
  w EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE r
  LIRE u
  LIRE t
  LIRE v
  LIRE n
  w PREND_LA_VALEUR (u+n*r+v+n*t)/2
  AFFICHER w
FIN_ALGORITHME
```

67 On pose $u_1 = AB$, $u_2 = BC$ et $u_3 = CD$.
 (u_n) est arithmétique donc il existe un réel r

tel que $u_2 = u_1 + r$ et $u_3 = u_1 + 2r$.

On sait que $u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) = 45$ donc $u_1 = 15 - r$ et $u_2 = 15$.

Or, d'après le théorème de Pythagore, $(15 - r)^2 + 15^2 + (15 + r)^2 = 773$ donc $r^2 = 49$. On vérifie alors que seul $r = -7$ convient, en vérifiant les calculs d'aires des triangles ABC et ACD.

Ainsi, $AB = 22$ cm, $BC = 15$ cm et $CD = 8$ cm. On construit alors le quadrilatère ABCD à l'échelle $1/2$ en respectant les angles droits en B et en C.

68 On note u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 les âges des cinq cousins.

(u_n) est arithmétique donc il existe un réel r tel que $u_2 = u_1 + r, u_3 = u_1 + 2r, u_4 = u_1 + 3r, u_5 = u_1 + 4r$.

On sait que $u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + (u_1 + 3r) + (u_1 + 4r) = 95$ donc $u_1 = 19 - 2r$ et $u_3 = 13$.

On sait aussi que $(19 - 2r)^2 + (19 - r)^2 + 19^2 + (19 + r)^2 + (19 + 2r)^2 = 1\,895$ donc $r^2 = 9$. L'âge de cousin le plus jeune est donné :

- soit par $u_1 = 13$ ans (avec $r = 3$) ;
- soit par $u_5 = 13$ ans (avec $r = -3$).

69 a. Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Faux.
e. Vrai. **f.** Faux. **g.** Faux.

70 On note u_0 la valeur de la voiture neuve ($u_0 = 16\,000$), et u_n la valeur de la voiture au bout de n années.

On sait que, pour tout $n, u_{n+1} = 0,8u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $0,8$. Ainsi $u_n = 16\,000 \times 0,8^n$, et par conséquent, au bout de 6 ans, la valeur de la voiture est $u_6 \approx 4\,194$ €.

71 a. $p_2 = 2p_1 = 3\,000$ et $p_3 = 2p_2 = 6\,000$.

b. Pour tout $n, p_{n+1} = 2p_n$ donc (p_n) est une suite géométrique de raison 2 .

c. Pour tout $n, p_n = 1\,500 \times 2^{n-1}$ donc :

- le nombre de bactéries à 12 h est $p_9 = 384\,000$;
- le nombre de bactéries à 15 h est $p_{18} = 196\,608\,000$.

72 a. $u_0 = 9\,126$; $u_1 \approx 8\,396$ et $u_2 \approx 7\,724$.

b. Pour tout $n, u_{n+1} = 0,92u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $0,92$.

c. Pour tout $n, u_n = 9\,126 \times 0,92^n$ donc le nombre d'habitants en 2018 sera $u_{18} \approx 2\,035$.

d. À l'aide de la calculatrice, on remarque que $u_8 < 4\,563$ et que $u_9 > 4\,563$ donc le nombre d'habitants aura diminué de moitié au cours de la 9^e année.

73 a. On note C_n la capital au bout de n années après le 02/01/2011, avec $C_0 = 5\,000$. Pour tout $n, C_{n+1} = 1,03C_n$ donc (C_n) est une suite géométrique de raison $1,03$.

b. Pour tout $n, C_n = 5\,000 \times 1,03^n$ donc, en 2020, le capital sera égal à $C_9 \approx 6\,523,87$ €.

c. À l'aide de la calculatrice, on remarque que $u_{23} < 10\,000$ et que $u_{24} > 10\,000$ donc le capital aura doublé, 24 ans après 2011, donc en 2035.

74 1. -4 ; 32 ; -256 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison -8 .

2. a. 4 ; -32 ; 256 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison -8 .

b. -4 ; -32 ; -256 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 8 .

c. -4 ; 32 ; 256 ne peuvent pas être trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

75 a. $\Delta = 16$. L'ensemble des solutions est $S = \{2 ; 6\}$.

b. $u_{10} = u_8 + 2r \Rightarrow r = 2$.

c. Si $v_8 < v_{10}$ alors $v_{10} = v_8 \times q^2 \Rightarrow q = \sqrt{3}$ (car $q > 0$).

Si $v_8 > v_{10}$ alors $v_{10} = v_8 \times q^2 \Rightarrow q = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (car $q > 0$).

76 a. Soit trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r : $u_n - r$; u_n ; $u_n + r$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } & \frac{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}{3} \\ &= \frac{(u_n - r) + u_n + (u_n + r)}{3} = u_n. \end{aligned}$$

b. Soit trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q : $\frac{1}{q}u_n$; u_n ; qu_n .

$$\begin{aligned} \text{On a alors } & \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{q}u_n \times qu_n} = u_n \text{ (car } u_n > 0). \end{aligned}$$

77 a. $S = 25 \times \frac{u_0 + u_{24}}{2} = 25 \times \frac{5 + 77}{2} = 1\,025$.

b. $T = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

$$u_n = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n = 7 \Leftrightarrow n = 10$$

$$\text{donc } T = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}.$$

$$\text{D'où : } T = 11 \times \frac{\frac{1}{3} + 7}{2} = \frac{121}{3}.$$

c. $Z = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

$$u_n = 100 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}n = 100 \Leftrightarrow n = 198 \text{ donc}$$

$$Z = u_0 + u_1 + \dots + u_{198}.$$

$$\text{D'où : } Z = 199 \times \frac{1 + 100}{2} = \frac{20\,099}{2}.$$

78 a. $R = 5 \times \frac{1 - 3^{16}}{1 - 3} = 107\,616\,800.$

b. $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$u_n = 8\,388\,608 \Leftrightarrow 2^n = 8\,388\,608 \Leftrightarrow n = 23$$

$$\text{donc } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{23}.$$

$$\text{Donc } S = \frac{1 - 2^{24}}{1 - 2} = 16\,777\,215.$$

c. $T = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 1,5.

$$u_n = 1\,297,463\,379 \Leftrightarrow 10 \times 1,5^n$$

$$= 1\,297,463\,379 \Leftrightarrow n = 12$$

$$\text{donc } T = u_0 + u_1 + \dots + u_{12}.$$

$$\text{Donc } T = 10 \times \frac{1 - 1,5^{13}}{1 - 1,5} \approx 3\,872,39.$$

79 a. $A = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$u_n = 30\,720 \Leftrightarrow 15 \times 2^n = 30\,720 \Leftrightarrow n = 11$$

$$\text{donc } A = u_0 + u_1 + \dots + u_{11}.$$

$$\text{Donc } A = 15 \times \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = 61\,425.$$

b. $B = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison 15.

$$u_n = 960 \Leftrightarrow 15 + 15n = 960 \Leftrightarrow n = 63 \text{ donc}$$

$$B = u_0 + u_1 + \dots + u_{63}.$$

$$\text{Donc } B = 64 \times \frac{15 + 960}{2} = 31\,200.$$

c. $C = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison -10.

$$u_n = -100 \Leftrightarrow 1\,000 - 10n = -100 \Leftrightarrow n = 110$$

$$\text{donc } C = u_0 + u_1 + \dots + u_{110}.$$

$$\text{Donc } C = 111 \times \frac{1\,000 - 100}{2} = 49\,950.$$

d. $D = u_0 + u_1 + \dots + u_8$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$\text{Donc } D = 10 \times \frac{1 - 0,98^9}{1 - 0,98} \approx 83,126.$$

e. $E = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison -3.

$$u_n = 118\,098 \Leftrightarrow 2 \times (-3)^n = 118\,098$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

$$\text{donc } E = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}.$$

$$\text{Donc } E = 2 \times \frac{1 - (-3)^{11}}{1 - (-3)} = 88\,574.$$

80 a. $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 5.

$$\text{Donc } A = \frac{1 - 5^{13}}{1 - 5} = 305\,175\,781.$$

b. $B = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison -0,2.

$$u_n = 1 \Leftrightarrow 10 - 0,2n = 1 \Leftrightarrow n = 45$$

$$\text{donc } B = u_0 + u_1 + \dots + u_{45}.$$

$$\text{Donc } B = 46 \times \frac{10 + 1}{2} = 253.$$

c. $C = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

$$u_n = 313,810\,5961$$

$$\Leftrightarrow 1\,000 \times 0,9^n = 313,810\,5961$$

$$\Leftrightarrow n = 11$$

$$\text{donc } C = u_0 + u_1 + \dots + u_{11}.$$

$$\text{Donc } C = 1\,000 \times \frac{1 - 0,9^{12}}{1 - 0,9} \approx 7\,175,7046.$$

d. $D = 10^{u_5 + u_6 + \dots + u_{25}}$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison 1.

$$\text{Donc } D = 10^{\frac{26 \times (5 + 25)}{2}} = 10^{390}.$$

e. $E = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$ où (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$.

$$\text{Donc } E = -\frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \approx -0,393.$$

81 On calcule $S = u_1 + u_2 + \dots + u_6$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison 15.

Le nombre total de voitures est

$$S = 6 \times \frac{u_1 + u_6}{2} = 6 \times \frac{320 + 395}{2} = 2\,145.$$

82 Soit (u_n) la suite des entiers naturels, soit la suite arithmétique de raison 1 et de 1^{er} terme $u_0 = 0$.

On veut que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 2\,016$ donc il faut que $\frac{n(n+1)}{2} = 2\,016$, autrement dit

$$\text{que } n^2 + n - 4\,032 = 0.$$

La résolution donne $\Delta = 16\,129 = 127^2$,

$$n = -64 \text{ ou } n = 63.$$

Or n est un entier naturel donc on ne retient que $n = 63$.

Le nombre de chocolats de la 63^e ligne est $u_{63} = 63$.

83 a. Aire du trapèze

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}n + 2\right) + \left(\frac{1}{2}(n+1) + 2\right)}{2} \times 1 = \frac{1}{2}n + \frac{9}{4}.$$

Donc (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er}

terme $\frac{9}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

b. On peut calculer S comme la somme de 10 termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = 10 \times \frac{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}}{2} = 45.$$

On peut aussi voir que S est l'aire du trapèze de bases 2 et 7 et de hauteur 10 donc on a

$$\text{aussi } S = \frac{2+7}{2} \times 10 = 45.$$

84 a. $u_1 = 2$ et $u_3 = 3$.

b. (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 1 et de raison 1.

c. la longueur de la spirale est

$$L = u_0 + u_1 + \dots + u_{19} \\ = 20 \times \frac{u_0 + u_{19}}{2} = 20 \times \frac{1+20}{2} = 210.$$

85 a. $u_1 = A_1A_2 = OA_1 = 1$ et

$$u_2 = A_2A_3 = OA_2 = \sqrt{2}.$$

b. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = A_nA_{n+1} = OA_n = \sqrt{2} A_{n-1}A_n = \sqrt{2} u_{n-1}$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

c. La longueur de la spirale est

$$L = u_1 + \dots + u_{19} = u_1 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^{19}}{1 - \sqrt{2}} \approx 1\,745,663.$$

86 1. a. $u_0 = 8\,880$; $u_1 = 9\,324$; $u_2 = 9\,790,2$.

b. Pour tout n , $u_{n+1} = 1,05 u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

c. Pour tout n , $u_n = 8\,880 \times 1,05^n$.

$$\text{d. } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 8\,880 \times \frac{1 - 1,05^{n+1}}{1 - 1,05} \\ = 177\,600(1,05^{n+1} - 1).$$

2. a. $v_0 = 8\,880$; $v_1 = 9\,380$; $v_2 = 9\,880$.

b. Pour tout n , $v_{n+1} = v_n + 500$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 500.

c. Pour tout n , $v_n = 8\,880 + 500n$.

$$\text{d. } T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ = (n+1) \times \frac{8\,880 + (8\,880 + 500n)}{2} \\ = \frac{(n+1)(500n + 17\,760)}{2}.$$

3. a. $u_5 \approx 11\,333,38$ et $v_5 = 11\,380$ donc $u_5 < v_5$. Ainsi, le contrat n° 1 est plus avantageux en 2015.

b. $S_5 \approx 60\,400,99$ et $T_5 = 60\,780$ donc $S_5 < T_5$. Ainsi, le contrat n° 1 est plus avantageux sur l'ensemble de la période 2010-2015.

c. Le contrat n° 2 est plus avantageux à partir de 2016 car $u_6 \approx 11\,900,05$ et $v_6 = 11\,880$ (alors que $u_5 < v_5$).

d. Le contrat n° 2 est plus avantageux à partir de 2019 car $S_9 \approx 111\,691,69$ et $T_9 = 111\,300$ (alors que $S_8 < T_8$).

87 1.

```
VARIABLES
i EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
i PREND_LA_VALEUR 1
S PREND_LA_VALEUR 0
TANT_QUE (i <= 99) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
        S PREND_LA_VALEUR S+1/(i*(i+1))
        i PREND_LA_VALEUR i+1
    FIN_TANT_QUE
AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

On obtient $S = 0,99$.

2. a. Pour tout n non nul,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = f(n).$$

$$\begin{aligned} \text{b. } S &= f(1) + f(2) \dots + f(98) + f(99) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{100} = 0,99. \end{aligned}$$

88 1. a. $u_1 = \frac{4}{3}$ et $u_2 = \frac{14}{9}$.

b. $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. $v_0 = -1$; $v_1 = -\frac{2}{3}$; $v_2 = -\frac{4}{9}$.

b. Pour tout n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$
 $= \frac{2}{3}(u_n + 1) - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 2) = \frac{2}{3}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

c. Pour tout n , $v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. a. Pour tout n , $u_n = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. $u_{50} \approx 2$.

89 1. a. $u_1 = \frac{11}{2}$ et $u_2 = \frac{23}{4}$.

b. $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. $u_{20} \approx 5,999\,999$.

b. Lorsque l'on soustrait 6 à chaque terme de la suite u , il semble que l'on obtienne les termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. a. Pour tout n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 6$
 $= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 = \frac{1}{2}v_n$ donc
 (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Et $v_0 = -1$.

b. Pour tout n , $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. Pour tout n , $u_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. $u_{20} = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 5,999\,999$.

4. a. $S = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right]$
 $\approx -1,9999999$.

b. $T = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + \dots + (v_{20} + 6)$
 $= S + 21 \times 6 \approx 124,000\,001$.

90 1. a. $u_2 = 8\,400$ et $u_3 = 8\,040$.

b. Pour tout n , $u_{n+1} = 0,6u_n + 3\,000$.

c. $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. Pour tout n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 7\,500$
 $= 0,6u_n + 3\,000 - 7\,500$

$= 0,6(v_n + 7\,500) - 4\,500 = 0,6v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6. Et $v_1 = 1\,500$.

b. Pour tout n , $v_n = 1\,500 \times 0,6^{n-1}$.

Donc $u_n = 1\,500 \times 0,6^{n-1} + 7\,500$.

3. Le nombre de clients prévus dans 36 mois est $u_{36} \approx 7\,500$.

91 1. $u_0 = 2$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{7}$.

$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. Pour tout n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{u_{n+1}} + 1 = \frac{2}{\frac{2u_n}{2+3u_n}} + 1 = \frac{4+6u_n}{2u_n} + 1 \\ &= \frac{2}{u_n} + 4 = v_n + 3. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

b. Pour tout n , $v_n = 2 + 3n$, soit

$\frac{2}{u_n} + 1 = 2 + 3n$ donc $u_n = \frac{2}{1+3n}$.

3. a. $\sum_{k=0}^{20} v_k = 21 \times \frac{v_0 + v_{20}}{2}$

$= 21 \times \frac{2+62}{2} = 672$.

$$\sum_{i=0}^{20} \frac{1}{u_i} = \sum_{i=0}^{40} \left(\frac{1}{2} v_i - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{20} v_i - 21 \times \frac{1}{2} = 325,5.$$

b. $S \approx 4,11$.

92 a. $u_0 = 20$; $u_1 = 13$; $u_2 = 10,5$.

$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

b. On recherche trois réels a, b, c tels que, pour tout n , $v_n = an^2 + bn + c$ vérifie (R).

On veut que

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

$$= \frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + 3.$$

Soit : $an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$

$$= \left(\frac{1}{2}a + 1 \right) n^2 + \frac{1}{2}bn + \left(\frac{1}{2}c + 3 \right).$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}a + 1 \\ 2a + b = \frac{1}{2}b \\ a + b + c = \frac{1}{2}c + 3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -8. \\ c = 18 \end{cases}$$

La suite recherchée est donc définie par $v_n = 2n^2 - 8n + 18$. Elle est différente de (u_n) car $v_0 = 18$ alors que $u_0 = 20$.

Ainsi, deux suites différentes peuvent avoir la même forme de récurrence ; elles auraient été égales si elles avaient eu aussi le même premier terme.

c. Pour tout n , $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$$= \frac{1}{2}u_n + n^2 + 3 - 2(n+1)^2 + 8(n+1) - 18$$

$$= \frac{1}{2}u_n - n^2 + 4n - 9 = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{1}{2}w_n.$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Pour tout n , $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$

$$\text{et donc } u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2n^2 - 8n + 18.$$

e. $u_{10} = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{10} + 2 \times 10^2 - 8 \times 10 + 18 \approx 138.$

93 1. $c_0 = 10$; $c_1 = 5$; $c_2 = \frac{5}{2}$; $c_3 = \frac{5}{4}$.

$p_0 = 40$; $p_1 = 80$; $p_2 = 100$; $p_3 = 110$.

2. Pour tout n , $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$ donc (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc pour tout n , $c_n = 10 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$

3. Au périmètre précédent, on rajoute 8 fois la longueur du côté du nouveau carré donc : Pour tout n , $p_{n+1} = p_n + 8c_{n+1}$

$$= p_n + 80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}.$$

4. a. Pour tout n ,

$$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}} + 1 = \frac{p_n + 80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}$$

$$+ 1 = 2 \frac{p_n}{80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n} + 2 = 2u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

b. Pour tout n , $u_n = u_0 \times 2^n = \frac{3}{2} \times 2^n$.

c. Pour tout n , $u_n - 1 = \frac{p_n}{80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n}$ donc

$$p_n = 80 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \left(\frac{3}{2} \times 2^n - 1 \right).$$

5. on a $c_n \geq 0,2$ jusqu'au rang $n = 5$; le périmètre du dernier polygone pouvant être construit est $p_5 = 117,5$ cm.

94 1. a. $u_n = (2n)^2 = 4n^2$.

b. Au niveau 11, le nombre de cubes est $u_{11} = 484$.

2. $S_{11} = 2\,024$.

3. a. Pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} - p_n$

$$= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n = n^2.$$

b. Pour tout $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
 $= (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \dots + (p_{n+1} - p_n)$
 $= p_{n+1} - p_1 = p_{n+1}$ car $p_1 = 0$.

c. Pour tout $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

$$= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$= 4(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

On vérifie alors que la formule est cohérente avec les résultats de la question **2**.

Pour aller plus loin

103 1. $u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$;
 $u_4 = 11$; $u_5 = 13$; $u_6 = 17$; $u_7 = 19$;
 $u_8 = 23$; $u_9 = 29$.

2. a. $v_0 = 41$; $v_1 = 43$; $v_2 = 47$; $v_3 = 53$;
 $v_4 = 61$; $v_5 = 71$; $v_6 = 83$; $v_7 = 97$;
 $v_8 = 113$; $v_9 = 131$.

b. Il est assez remarquable de voir que v_n est premier jusqu'au rang 39 ; mais $v_{40} = 41^2$ n'est pas premier. Donc on ne peut pas dire que, pour tout entier naturel n , $v_n = n^2 + n + 41$.

104 a. $u_1 = 6$; $u_2 = 3$; $u_3 = 10$; $u_4 = 5$;
 $u_5 = 16$; $u_6 = 8$; $u_7 = 4$; $u_8 = 2$; $u_9 = 1$;
 $u_{10} = 4$; $u_{11} = 2$; $u_{12} = 1$.

b. Si n est pair alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$; si n est impair alors $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

c.

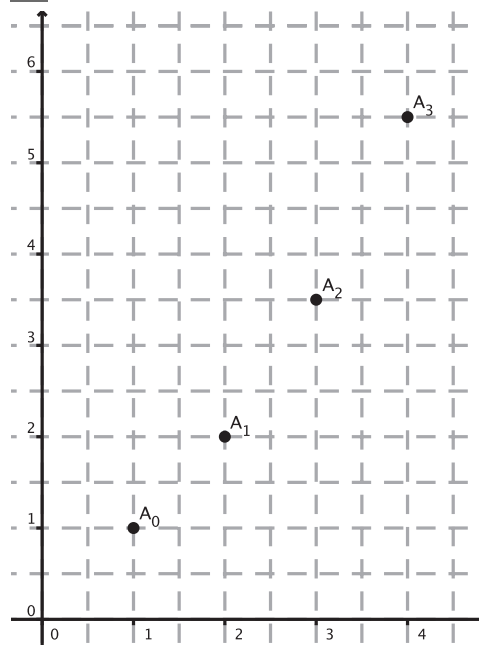
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	1	10	2	16	3	22	4	28	5
3	3	2	4	5	1	8	10	11	2	14	16
4	4	1	2	16	4	4	5	34	1	7	8
5	5	4	1	8	2	2	16	17	4	22	4
6	6	2	4	4	1	1	8	52	2	11	2
7	7	1	2	2	4	4	4	26	1	34	1
8	8	4	1	1	2	2	2	13	4	17	4
9	9	2	4	4	1	1	1	40	2	52	2
10	10	1	2	2	4	4	4	20	1	26	1
11	11	4	1	1	2	2	2	10	4	13	4
12	12	2	4	4	1	1	1	5	2	40	2
13	13	1	2	2	4	4	4	16	1	20	1
14	14	4	1	1	2	2	2	8	4	10	4
15	15	2	4	4	1	1	1	4	2	5	2
16	16	1	2	2	4	4	4	2	1	16	1
17	17	4	1	1	2	2	2	1	4	8	4
18	18	2	4	4	1	1	1	4	2	4	2
19	19	1	2	2	4	4	4	2	1	2	1
20	20	4	1	1	2	2	2	1	4	1	4
21	21	2	4	4	1	1	1	4	2	4	2
22	22	1	2	2	4	4	4	2	1	2	1
23	23	4	1	1	2	2	2	1	4	1	4
24	24	2	4	4	1	1	1	4	2	4	2
25	25	1	2	2	4	4	4	2	1	2	1
26	26	4	1	1	2	2	2	1	4	1	4
27	27	2	4	4	1	1	1	4	2	4	2
28	28	1	2	2	4	4	4	2	1	2	1
29	29	4	1	1	2	2	2	1	4	1	4
30	30	2	4	4	1	1	1	4	2	4	2

On peut conjecturer le fait que chaque suite de Syracuse finisse par atteindre la valeur 1 à partir d'un certain rang, et ainsi prenne les valeurs 1 ; 4 et 2 de façon cyclique indéfiniment.

d. La conjecture précédente se vérifie très rapidement avec 26, mais beaucoup plus lentement avec 27.

e. $L_1 = 4$; $L_2 = 2$; $L_3 = 8$; $L_4 = 3$; $L_5 = 6$;
 $L_6 = 9$; $L_7 = 17$; $L_8 = 4$; $L_9 = 20$; $L_{10} = 7$;
 $L_{26} = 11$; $L_{27} = 112$.

105 a.



b. Pour tout n non nul,

$$a_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = y_n - y_{n-1}.$$

c. Comme (a_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme 1, on a pour tout n

$$\text{non nul : } a_{n-1} = a_0 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}.$$

Donc, pour tout n non nul,

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{d.} \ a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = n \times \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$$

$$= n \times \frac{1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}}{2} = \frac{n^2 + 3n}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mais on a aussi } a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} &= 1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) \\ &= 1 - y_1 + y_n = -1 + y_n. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } -1 + y_n = \frac{n^2 + 3n}{4} \text{ d'où } y_n = \frac{n^2 + 3n + 4}{4}.$$

$$\mathbf{e.} \text{ Pour tout } n, (n+1)^2 + (n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2 = n^2 + 3n + 4.$$

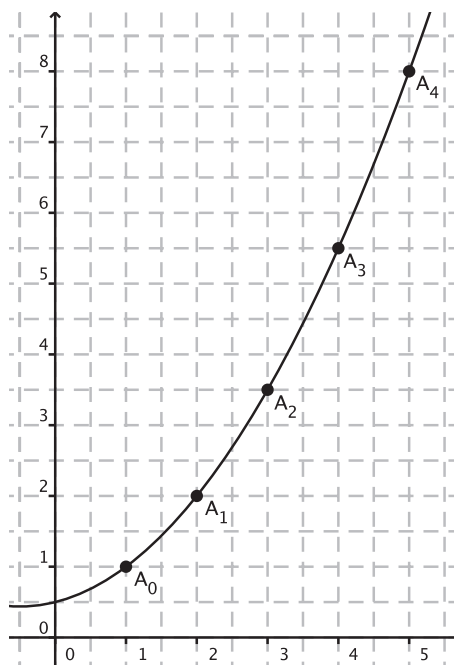
$$\text{Donc } y_n = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que les points A_n sont tous situés sur la parabole d'équation

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

f.



$$\mathbf{106 \ 1. \ a.} \ u_n = 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 10^n + 5 \times 10^{n-1} + 5 \times 10^{n-2} + \dots + 5 \times 10 + 6.$$

$$\text{Donc } u_n = 10^n(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) + 5(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10) + 6.$$

Ainsi,

$$u_n = 10^n \left(\frac{1-10^n}{1-10} \right) + 5 \left(10 \times \frac{1-10^{n-1}}{1-10} \right) + 6.$$

$$\text{D'où } u_n = \frac{10^n (10^n - 1)}{9} + \frac{5 \times 10 \times (10^{n-1} - 1)}{9} + \frac{54}{9}.$$

$$\text{Soit } u_n = \frac{1}{9} (10^{2n} - 10^n + 5 \times 10^n - 50 + 54)$$

$$= \frac{1}{9} (10^{2n} + 4 \times 10^n + 4).$$

b. Il résulte de 1.a que $u_n = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2$.

2. a. $\sqrt{u_1} = 4$; $\sqrt{u_2} = 34$; $\sqrt{u_3} = 334$;
 $\sqrt{u_4} = 3334$.

b. $a_n = 3 \times 10^{n-1} + 3 \times 10^{n-2} + \dots + 3 \times 10 + 4$.
 Donc $a_n = 3(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10) + 4$
 $= 3 \times 10 \times \frac{1-10^{n-1}}{1-10} + 4$.

D'où $a_n = \frac{10(10^{n-1} - 1)}{3} + \frac{12}{3} = \frac{1}{3} (10^n + 2)$.

c. D'après **2.b.** et **1.b.**, on trouve une autre façon d'écrire u_n : $u_n = a_n^2$.

107 1.

I	K	U
1	1	1
2	2	2
3	2	2
4	4	3
5	4	3
6	4	3
7	7	4
8	7	4
9	7	4
10	7	4
11	11	5

Pour $N = 7$, l'algorithme donne $U[1] = 1$;
 $U[2] = 2$; $U[3] = 2$; $U[4] = 3$; $U[5] = 3$;
 $U[6] = 3$; $U[7] = 4$.

Pour $N = 11$, l'algorithme donne $U[1] = 1$;
 $U[2] = 2$; $U[3] = 2$; $U[4] = 3$; $U[5] = 3$;
 $U[6] = 3$; $U[7] = 4$; $U[8] = 4$; $U[9] = 4$;
 $U[10] = 4$; $U[11] = 5$.

2. a. On recherche n tel que $1 + 2 + \dots + n$,
 c'est-à-dire $\frac{n(n+1)}{2}$ se rapproche au mieux

de l'indice 1 000.

Or, pour $n = 44$, on obtient l'indice 990 qui
 donne le dernier terme égal à 44 (et pour
 $n = 45$, on obtient l'indice 1 035 qui donne le
 dernier terme égal à 45). Les 45 indices de 991
 jusqu'à 1 035 donnent un terme égal à 45,
 donc le terme d'indice 1 000 est égal à 45.

b. L'algorithme donne bien tous les termes
 jusqu'au dernier égal à $U[1\ 000] = 45$.

108 a. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = -\frac{1}{2}$; $u_3 = -1$;

$u_4 = -\frac{1}{2}$; $u_5 = \frac{1}{2}$; $u_6 = 1$; $u_7 = \frac{1}{2}$; $u_8 = -\frac{1}{2}$;

$u_9 = -1$.

b. Pour tout n , $u_{n+6} = \cos \left[(n+6) \frac{\pi}{3} \right]$

$= \cos \left(n \frac{\pi}{3} + 2\pi \right) = \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) = u_n$.

c. $u_{2p} = \cos \left(2p \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos^2 \left(p \frac{\pi}{3} \right) - 1$

$= 2u_p^2 - 1$.

d. $u_{n+1} = \cos \left[(n+1) \frac{\pi}{3} \right] = \cos \left(n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right)$

$= \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$

$= \frac{1}{2} \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right)$.

$u_{n-1} = \cos \left[(n-1) \frac{\pi}{3} \right] = \cos \left(n \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right)$

$= \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$

$= \frac{1}{2} \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right)$.

Ainsi, $u_{n+1} + u_{n-1} = \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) = u_n$.

109 a. Soit n le nombre total de pages. Notons x et $x + 1$ les numéros des deux pages collées.

On sait que $1 + 2 + \dots + (x - 1) + (x + 2) + \dots + n = 40\,920$.

$$\text{Donc } (x + 1) \times \frac{1 + (x - 1)}{2} + (n - x - 1) \times \frac{(x + 2) + n}{2} = 40\,920.$$

$$\text{Il vient : } x = \frac{n^2 + n - 81\,840}{4}.$$

Or $1 \leq x \leq n$ donc $4 \leq n^2 + n - 81\,840 \leq 4n$, ainsi, il faut que $n^2 + n - 81\,844 \geq 0$ et $n^2 - 3n - 81\,840 \leq 0$.

La résolution des deux inéquations aboutit à $286 \leq n \leq 287$.

Or n est pair (numéro d'une page de gauche) donc $n = 286$.

Le nombre total de pages est donc

$$\frac{286 \times 287}{2} = 41\,041.$$

b. La somme des numéros des deux pages collées donne :

$x + (x + 1) = 41\,041 - 40\,920$. D'où $x = 60$.
Les deux pages collées sont les pages 60 et 61.

110 a. $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

donc $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

$= \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

On a aussi $f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ donc

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

b. En utilisant les deux résultats précédents, et en prenant $x = 3$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n k \times 3^{k-1} = \frac{2(n+1) \times 3^n + (1 - 3^{n+1})}{4}.$$

c. Avec $n = 5$, on vérifie que les deux formules aboutissent bien au même résultat 547.

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

1. On trouve facilement sur Internet qu'une suite arithmético-géométrique est une suite dans laquelle un terme s'obtient en multipliant le terme précédent par un réel constant a (différent de 0 et de 1) et en ajoutant un réel constant b non nul ; ainsi, la forme récurrente est donnée par : $u_{n+1} = a u_n + b$.

Les exercices 88, 89, 90 et 102 montrent que l'on peut obtenir la forme explicite, à partir d'une suite auxiliaire v qui doit être géométrique de raison a .

On recherche une telle suite géométrique v de raison a telle que $v_n = u_n + k$. On aboutit

$$\text{à } k = \frac{b}{a-1}.$$

On écrit alors la forme explicite de la suite v , puis on en déduit celle de la suite arithmético-géométrique u .

2. Etant deux entiers relatifs p et q tels que $p^2 - 4q > 0$, une suite de Lucas est de la forme :

$$u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; u_{n+2} = p u_{n+1} - q u_n ;$$

$$\text{Ou } v_0 = 2 ; v_1 = p ; v_{n+2} = p v_{n+1} - q v_n ;$$

Plusieurs suites particulières de Lucas :

- Avec $p = 1$ et $q = -1$, on obtient la suite u de Fibonacci.

- Avec $p = 1$ et $q = -1$, on obtient la suite v qui donne les « nombres de Lucas ».

- Avec $p = 2$ et $q = -1$, on obtient la suite u qui donne les « nombres de Pell ».

- Avec $p = 2$ et $q = -1$, on obtient la suite v qui donne les « nombres de Pell-Lucas ».

3. La suite de Conway est construite de la façon suivante :

Le premier terme de la suite de Conway est posé comme égal à 1. Chaque terme de la suite se construit en annonçant le terme précédent, c'est-à-dire en indiquant combien de fois chacun de ses chiffres se répète.

Concrètement : $X_0 = 1$. Ce terme comporte juste un « 1 ». Par conséquent, le terme suivant est : $X_1 = 11$. Celui-ci est composé de deux « 1 » : $X_2 = 21$...etc

On ne dispose pas de formule explicite ou récurrente, mais on devrait pouvoir la programmer à l'aide d'un algorithme...