Dérivation et applications

Chapitre 3

Ouverture

Les problèmes de différentiation, abordés dans ce chapitre sous la forme de la dérivation, ont traversé de très nombreux siècles avant de connaître leur solution. Ils apparaissaient sous trois aspects :

- le problème des maximas et minimas d'une grandeur en fonction d'une autre. Les Babyloniens avaient une astronomie très développée et ils étudiaient le mouvement des astres, essentiellement par des méthodes angulaires ; ils avaient noté que lorsqu'une fonction passait par un maximum, les variations de cette fonction étaient particulièrement lentes au voisinage de ce maximum ;
- le problème des tangentes à une courbe, étudié dans l'Antiquité par les Grecs, qui voyaient la tangente en un point comme une droite passant par ce point, laissant toute la courbe du même côté ;
- le problème des vitesses, en particulier sous la forme de l'étude de la chute des corps, problème très étudié par Galilée.

Tous ces problèmes vont être résolus en un siècle, le XVII^{e} siècle qui a vu la naissance du calcul infinitésimal. Il est pratiquement impossible de citer tous les noms des mathématiciens qui l'ont créé : Descartes, Pascal, Fermat, Barrow, Huygens, Leibniz, etc. et évidemment Newton. On peut consulter la préface de « L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes», publié en 1696 par le Marquis de l'Hospital, qui tente d'attribuer à chacun sa part dans ce travail prodigieux.

La courbe du CAC 40 qui illustre la page d'accueil est mathématiquement intéressante : dans tous les cas, que l'on prenne les valeurs en fonction des années, des mois, des heures ou des minutes, etc. il s'agit d'une fonction continue (pour les élèves, d'un seul tenant), qui présente des points anguleux.

Mais, plus les intervalles de temps sont courts, moins cette courbe est lisse, les points anguleux le sont de plus en plus et on envisage ce que pourrait être une fonction continue, n'admettant aucun point de dérivation ; ce n'est pas la fonction de Weierstrass mais on peut commencer à l'envisager ! Depuis Mandelbrot, on sait que les fluctuations du CAC40 sont fractales.

Pour étudier les fluctuations du CAC40, on dispose de nombreuses données, par exemple en prenant 20 ans et 250 jours de cotations par an, 5 000 données. On peut tracer l'histogramme des fluctuations en pourcentage ; la courbe obtenue a une bonne allure de courbe en cloche, mais ce n'est pas du tout une gaussienne car le CAC40 comporte beaucoup d'évènements extrêmes.

Le chapitre « dérivation et applications » a plusieurs objectifs :

– introduire la notion de nombre dérivé ;
– introduire la notion géométrique de tangente à une courbe ;
– introduire la notion de fonction dérivée ;
– utiliser la dérivation pour connaître les variations d'une fonction, et déterminer les extrema locaux d'une fonction.

Concernant le nombre dérivé, il est défini à partir du taux d'accroissement, sans pour autant donner de définition formelle de la notion de limite. On met en évidence, à l'aide des fonctions racine carrée et valeur absolue, que l'existence d'un nombre dérivé n'est pas toujours assurée. La notion de nombre dérivé est alors exploitée graphiquement à l'aide de la notion de tangente.

Concernant la notion de fonction dérivée : une fois la définition proposée, les dérivées des fonctions usuelles déjà connues sont présentées, ainsi que les règles de dérivation (dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un carré). L'utilisation d'un logiciel de calcul formel (du type Maxima ou XCas) est proposée pour le calcul d'une fonction dérivée.
Enfin, le paragraphe concernant les applications de la dérivation est scindé en deux parties : d'une part, la présentation du lien entre le signe de la dérivée et les variations d'une fonction. D'autre part, le lien entre la présence d'un extremum local et l'annulation de la fonction dérivée. Il est expliqué comment la dérivation permet d'obtenir des inégalités et de nombreux exercices traitent de problèmes d'optimisation. Il est bien mis en évidence qu'il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction.

Vérifier ses acquis

1 **a.** 3. **b.** $-\frac{1}{3}$. **c.** 3. **d.** 1.

2 **1.** a., c. **2.** b., d. **3.** a., c.

3 **a.** –1. **b.** 6. **c.** 0. **d.** $-\frac{1}{2}$.

4 **a.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$. **b.** $y = x + 1$.
c. $y = 4x$. **d.** $y = \frac{1}{3}x - 1$. **e.** $y = -1$.

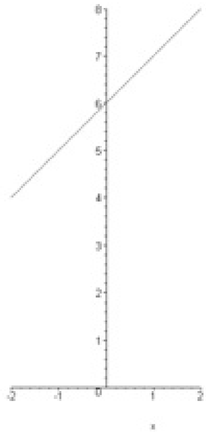
5 **a.** La fonction f admet un minimum sur [0,4] en $x = 3$ et ce minimum vaut –1.
b. La fonction f admet un minimum sur [4,6] en $x = 4$ et en $x = 6$ et ce minimum vaut 0.
c. La fonction f admet un minimum sur [0,7] égal à –3 et atteint en $x = 6,5$.
d. La fonction f admet un maximum sur [0,2] en $x = 1$ et ce maximum vaut 1.
e. La fonction f admet un maximum sur [2,4] en $x = 2$ et en $x = 4$ et ce maximum vaut 0.
f. La fonction f admet un maximum sur [0,6] en $x = 5$ et ce maximum vaut 2.

Activités d'introduction

Activité 1

Introduction : L'objectif de l'activité N° 1 est d'observer, sur deux exemples, le comportement d'un taux d'accroissement en 0 d'une fonction. La première fonction étudiée est une fonction polynôme du second degré, dont le taux d'accroissement admet une limite. La seconde fonction étudiée est la fonction racine carrée dont le taux d'accroissement tend vers l'infini.

1 **a.** Le taux d'accroissement est défini pour tout x réel non nul.
b.



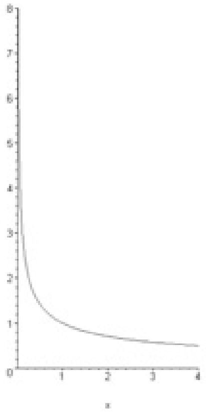
Lorsque x se rapproche de 0, le taux d'accroissement semble se rapprocher de 6.
c.

x	–0,05	–0,04	–0,03	–0,02	–0,01
$\frac{(x+3)^2-9}{x}$	5,95	5,96	5,97	5,98	5,99
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\frac{(x+3)^2-9}{x}$	6,01	6,02	6,03	6,04	6,05

Lorsque x se rapproche de 0, le taux d'accroissement semble se rapprocher de 6.
d. Lorsque x est non nul, on peut écrire : $\frac{(x+3)^2-9}{x} = \frac{x^2+6x}{x} = x + 6$, et cette dernière quantité tend bien vers 6 lorsque x se rapproche de 0.

2 **a.** Le taux d'accroissement proposé est défini sur]0 ; +∞[.

b.



Lorsque x se rapproche de 0, le taux d'accroissement semble devenir indéfiniment grand.

c.

x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	10	7,07	5,77	5	4,47	3,16	2,23	1,82	1,58	1,41

Le résultat du **2.b.** semble se confirmer.

Activité 2

Introduction : En étudiant l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ et celui $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, l'activité 2 propose d'observer que, lorsque qu'un point M de la courbe représentative se rapproche d'un point A de la courbe fixé, la pente de la droite (AM) se rapproche d'une valeur limite.

2 **a.** Lorsque M se déplace et se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) semble se rapprocher de $m_A = 2$. Si on zoome sur la courbe $\mathscr{C}$ autour du point A, la courbe $\mathscr{C}$ ressemble à une droite de coefficient directeur 2.

b.

Abscisse de A	0	0,5	1	1,5	2
Valeur de m_A	0	1	2	3	4
Abscisse de A	2,5	3	3,5	4	
Valeur de m_A	5	6	7	8	

Il semblerait que, dans une colonne donnée, la valeur trouvée sur la seconde ligne soit le double de celle obtenue sur la première ligne.

3

Abscisse de A	1	2	3	4	5
Valeur de m_A	–1	–0,25	–0,1	–0,06	–0,04
Abscisse de A	6	7	8	9	
Valeur de m_A	–0,02	–0,02	–0,01	–0,01	

Ce tableau pourrait être un tableau de valeurs de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

Activité 3

Introduction : L'activité 3 a pour objectif de mettre en évidence le lien qui existe entre le sens de variations d'une fonction sur un intervalle I et le signe des taux d'accroissements calculés entre deux points de I.

1 **a.** Par définition, le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{(a+h) - a} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}.$$

b. Ce coefficient directeur est égal à

$$\frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h = \underbrace{a}_{<0} + \underbrace{a+h}_{<0} < 0.$$

2 Le coefficient directeur est donné par :

$$\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{(a+h) - a} = \frac{2ah + h^2}{h}$$

$$= 2a + h = \underbrace{a}_{>0} + \underbrace{a+h}_{>0} > 0.$$

Le coefficient directeur semble être négatif lorsque la fonction est décroissante, et positif lorsque la fonction est croissante.

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1 Méthode de Newton-Raphson

1 **a.** La fonction f a pour dérivée $x \mapsto 3x^2 + 1$ qui est un polynôme du second degré ayant un discriminant strictement négatif. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Le point A a une abscisse proche de 0,75. Le point B a une abscisse proche de 0,68, qui est voisine de l'abscisse du réel α cherché.

2 **a.** La tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 a pour équation
$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.
b. L'abscisse cherchée vérifie l'égalité :
$(x_1 - x_0)f'(x_0) + f(x_0) = 0$,
d'où $x_1 f'(x_0) = -f(x_0) + x_0 f'(x_0)$,
d'où $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

c.
```
Saisir(x) ;
Pour (i=1;i<=n;i=i+1)
   x = x-f(x)/f'(x) ;
   Afficher(x);
FinPour
```

d.
```
Saisir(x) ;
Saisir(p) ;
TantQue |f(x)|>=10^p Faire
   x=x-f(x)/f'(x) ;
Fin TantQue
Afficher(x) ;
```

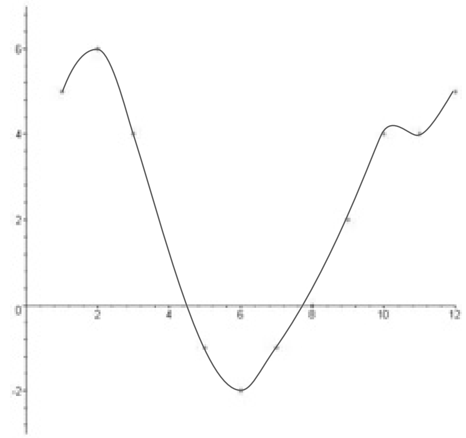
3 **a.** La fonction f a pour dérivée $x \mapsto 5x^4 + 3x^2 + 1$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $f(-1) = -3$ et $f(1) = 3$, donc la fonction f s'annule entre -1 et 1, en un réel α.
Il se trouve qu'ici, le réel α cherché n'est autre que 0, mais on peut programmer l'algorithme de la question 2, par exemple avec $x = 1$, et on obtient, après 5 itérations, $\alpha \approx 10^{-9}$.
b. La fonction f a pour dérivée $x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (car elle possède un discriminant strictement négatif). Par ailleurs, $f(-2) = -4$ et $f(0) = 2$, donc la fonction f s'annule entre -2 et 0, en un réel α.
En utilisant par exemple une calculatrice, on obtient $\alpha \approx -1{,}35$.

TP Algorithmique 2 Construction de la courbe d'une fonction dérivée

1 **a.** On trouve, pour tout entier compris entre 1 et n – 1 : $\alpha_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ et $\beta_i = \dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$.

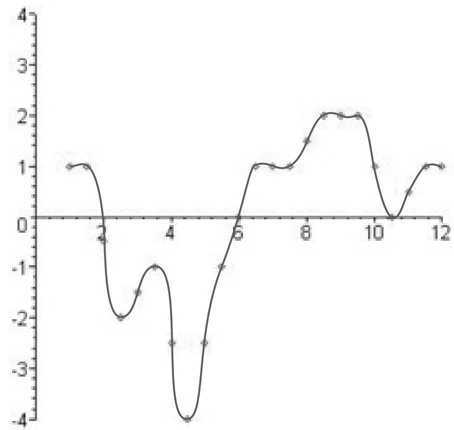
b.
```
Pour i variant de 1 à n-1
  f'(αi) = (yi+1-yi)/(xi+1-xi)
FinPour
```

c.



Pour tracer une courbe représentative de f', on se sert du tableau de valeurs suivant, obtenu grâce à la question **b.** :

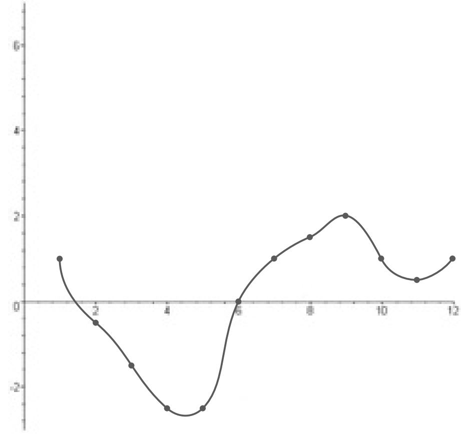
α_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$f'(\alpha_i)$	1	–2	–1	–4	–1	1
α_i	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	
$f'(\alpha_i)$	1	2	2	0	1	



2 **a.**
```
f'(x1)=(y2-y1)/(x2-x1)
f'(xn)=(yn-yn-1)/(xn-xn-1)
Pour i variant de 2 à n-1
   f'(xi)=(yi+1-yi-1)/(xi+1-xi-1)
FinPour
```

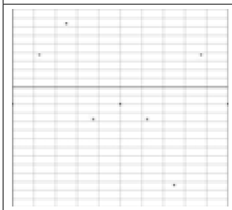
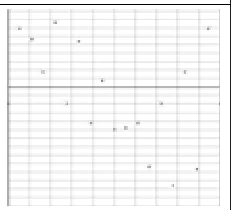
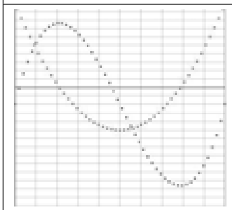
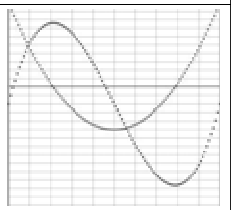
b. On obtient le tableau de valeurs suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$f'(x_i)$	1	–0,5	–1,5	–2,5	–2,5	0
x_i	7	8	9	10	11	12
$f'(x_i)$	1	1,5	2	1	0,5	1



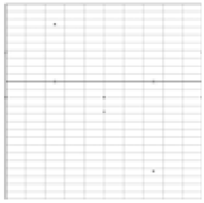
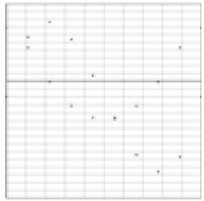
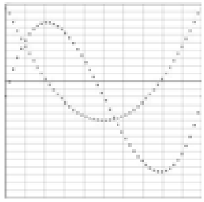
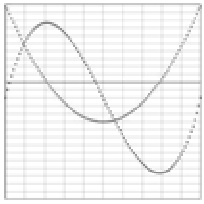
Les deux méthodes fournissent à peu près la même allure de courbe pour f'. Il est à noter que la seconde méthode propose un point de plus que la première.

3 **a.** Cet algorithme permet de tester la première méthode précédemment étudiée, en traçant dans le même repère des points des courbes représentatives de f et f'.

$n = 5$	$n = 10$
	
$n = 50$	**$n = 100$**
	

b.

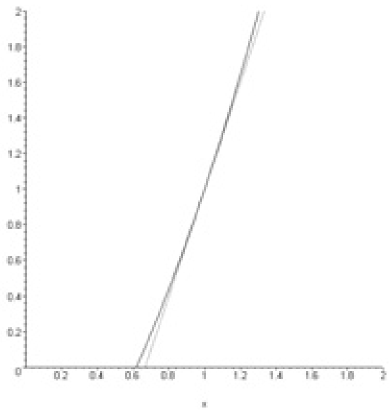
```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  TRACER_POINT (0,F1(0))
  D PREND_LA_VALEUR 10/(n-1)
  TRACER_POINT (10,F1(10))
  TRACER_POINT (0,(F1(D)-F1(0))/D)
  TRACER_POINT (10,(F1(10)-F1(10-D))/D)
  POUR i ALLANT_DE 1 A n-1
    DEBUT_POUR
    TRACER_POINT (i*D,(F1((i+1)*D)-F1((i-1)*D))/(2*D))
    TRACER_POINT (i*D,F1(i*D))
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

$n = 5$	$n = 10$
	
$n = 50$	**$n = 100$**
	

TP TICE 1 Meilleure approximation affine

1 **a.** L'équation cherchée est $y = 3x - 2$.

b.



Lorsque x est proche de 1, les deux quantités $f(x)$ et $g(x)$ sont très proches.

2 **a.** Par définition, le nombre $f'(a)$, lorsqu'il existe, est défini par :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

b. et **c.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
2	f(x)	0,71	0,738	0,766	0,795	0,824	0,853	0,882	0,911	0,94	0,97
3	T(x)	0,7	0,73	0,76	0,79	0,82	0,85	0,88	0,91	0,94	0,97
4	| f(x)-T(x) |	0,01	0,008	0,006	0,005	0,004	0,002	0,002	9E-04	4E-04	1E-04
5	| f(x)-(2x-1) |	0,09	0,082	0,074	0,065	0,056	0,048	0,038	0,029	0,02	0,01
6	| f(x)-x |	0,19	0,172	0,154	0,135	0,116	0,098	0,078	0,059	0,04	0,02
7	| f(x)-(4x-3) |	0,11	0,098	0,086	0,075	0,064	0,052	0,042	0,031	0,02	0,01

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,1
2	1	1,03	1,06	1,091	1,122	1,153	1,184	1,215	1,246	1,278	1,31
3	1	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,18	1,21	1,24	1,27	1,3
4	0	1E-04	4E-04	9E-04	0,002	0,002	0,004	0,005	0,006	0,008	0,01
5	0	0,01	0,02	0,031	0,042	0,052	0,064	0,075	0,086	0,098	0,11
6	0	0,02	0,04	0,061	0,082	0,103	0,124	0,145	0,166	0,188	0,21
7	0	0,01	0,02	0,029	0,038	0,048	0,056	0,065	0,074	0,082	0,09

La fonction affine g semble être celle qui s'approche le plus de $f(x)$, lorsque x est proche de 1.

3. a. $e(x) = |x^2 - (2x-1)| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$.

b. $e(x) = \left|\frac{1}{x} - (-x+2)\right|$

$$= \left|\frac{1 + x^2 - 2x}{x}\right| = \frac{|(x-1)^2|}{|x|}$$

Lorsque x appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$, alors, $|x| = x \geqslant \frac{1}{2}$, de sorte que $e(x) \leqslant 2(x-1)^2$.

c. $e(x) = \left|\sqrt{x} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right|$

$$= \left|\frac{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \times \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}\right|$$

$$= \frac{\left|x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2\right|}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}(x-1)^2}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}.$$

Lorsque x appartient à l'intervalle [0 ; 2], alors, $\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, de sorte que

$$e(x) \leqslant \frac{\frac{1}{4}(x-1)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

TP TICE 2 Inégalité des accroissements finis

1 a. La fonction f' est donnée par $f'(x) = 2x + 1$. Lorsque x est compris entre -3 et 4, on a donc : $-5 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

c. Il semblerait que la pente p_{AB} soit comprise entre -5 et 9.

d. On pourrait conjecturer que : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

2 a. La fonction g est dérivable sur J en tant que somme de fonctions dérivables et sa dérivée est la fonction définie par $g'(x) = f'(x) - M$, négative sur J d'après les hypothèses faites sur f. La fonction g est donc décroissante sur J, et puisque que $g(u) = 0$, la fonction g est donc négative sur J.

b. La fonction h est dérivable sur J en tant que somme de fonctions dérivables et sa dérivée est la fonction définie par $h'(x) = f'(x) - m$, positive sur J d'après les hypothèses faites sur f. La fonction h est donc croissante sur J, et puisque que $h(u) = 0$, la fonction h est donc positive sur J.

c. La fonction g est négative sur J, donc en particulier, $g(v) \leqslant 0$, ce qui implique $f(v) - f(u) \leqslant M(v-u)$. La fonction h est positive sur J, donc en particulier, $h(v) \geqslant 0$, ce qui implique $f(v) - f(u) \geqslant m(v-u)$. Cela fournit donc l'encadrement souhaité.

d. Quels que soient les points P et Q de la courbe représentative de f d'abscisses respectives u et v ($u < v$), la pente de la droite (PQ) est comprise entre m et M.

3. a. On a $100 \leqslant 110 \leqslant 121$, donc $10 \leqslant \sqrt{110} \leqslant 11$.

b. La dérivée de la fonction racine carrée est : $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Lorsque x appartient à l'intervalle [100 ; 121], on a $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 11$, donc $20 \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 22$, d'où $\frac{1}{22} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{20}$.

c. L'inégalité de **2.c.** donne :

$$\frac{1}{22}(110 - 100) \leqslant \sqrt{110} - \sqrt{100} \leqslant \frac{1}{20}(110 - 100),$$

d'où $\frac{10}{22} \leqslant \sqrt{110} - 10 \leqslant \frac{10}{20}$, d'où $\frac{10}{22} + 10 \leqslant \sqrt{110} \leqslant \frac{10}{20} + 10$,

donc, $\frac{230}{22} \leqslant \sqrt{110} \leqslant \frac{210}{20}$.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Vrai.

2 b., c., d.

3 **1.** b. **2.** a. **3.** b. **4.** b.

4 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai.
d. Faux. **e.** Faux. **f.** Vrai.

5 d.

6 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux.
d. Vrai. **e.** Vrai.

7 Les fonctions associées aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_4$.

8 **a.** $f'(2) = -\frac{1}{9}$. **b.** $f'(-4) = -2$.
c. f n'est pas dérivable en -5.

9 **a.** $f'(0) = 5$. **b.** $f'(1) = -\frac{1}{32}$.
c. f n'est pas dérivable en 0.
d. $f'(5) = -\frac{1}{2}$. **e.** $f'(3) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
f. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -18$.

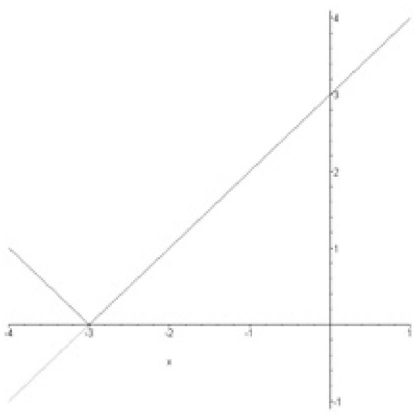
10 **a.** $f'(0) = 0$.
b. f n'est pas dérivable en 2.
c. $f'(-1) = -1$. **d.** $f'(10) = \frac{\sqrt{11}}{11}$.
e. $f'(0) = 1$. **f.** $f'\left(\frac{2}{7}\right) = 5$.

11 **a.** $f'(1) = 1$.
b. f n'est pas dérivable en 1.
c. $f'(1) = 2$. **d.** $f'(1) = 0$.
e. f n'est pas dérivable en 1.
f. f n'est pas dérivable en 1.
g. $f'(1) = -1$. **h.** $f'(1) = 0$.

12 **a.** $f'(0) = 1$.
b. $f'(0) = 0$.
c. $f'(0) = 0$.
d. f n'est pas dérivable en 0.
e. $f'(0) = 0$.
f. $f'(0) = 0$.
g. f n'est pas dérivable en 0.
h. $f'(0) = -1$.

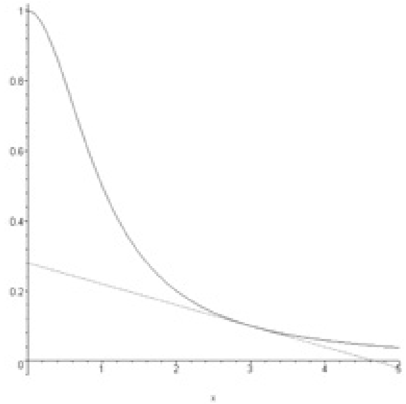
13 **a.** f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel a, on trouve $f'(a) = 2$.
b. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel a, on trouve $f'(a) = 2a - 1$.
c. f est définie et dérivable sur $\mathscr{C}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, et pour tout réel a appartenant à $\mathscr{C}_f$, on trouve : $f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2}$.
d. f est définie sur $\mathbb{R}^+$, mais dérivable uniquement sur $]0 ; +\infty[$, et on trouve, pour tout $a > 0$: $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$.
e. f est définie sur $\mathbb{R}$, mais dérivable uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On trouve, pour tout $a > 0$, $f'(a) = 1$, et pour tout $a < 0$, $f'(a) = -1$.
f. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f'(a) = \frac{-6}{(2a-1)^2}$.

15 **a.** f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse -2 est $y = x + 3$.

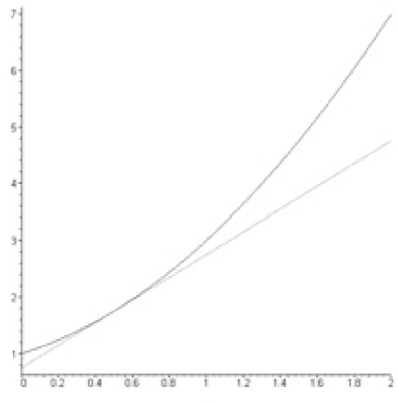


b. f n'est pas dérivable en 4.

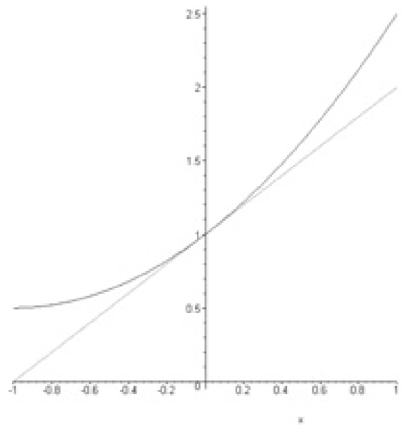
c. f est dérivable en 3 et $f'(3) = \frac{3}{50}$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est $y = -\frac{3}{50}x + \frac{7}{25}$.



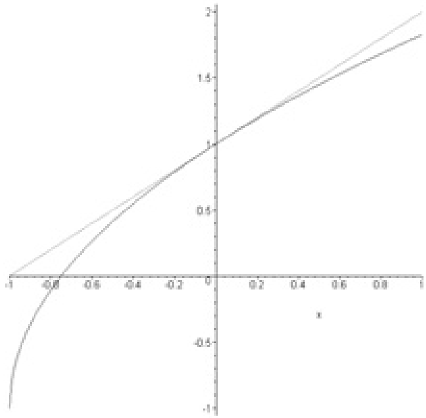
d. f est dérivable en $\frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = 2x + \frac{3}{4}$.



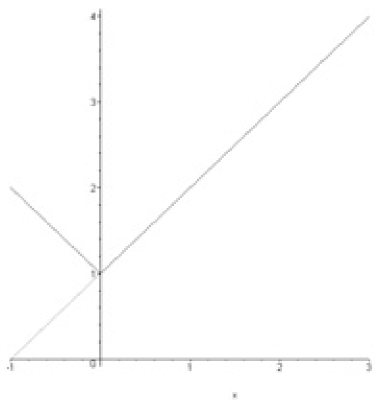
16 **a.** f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.



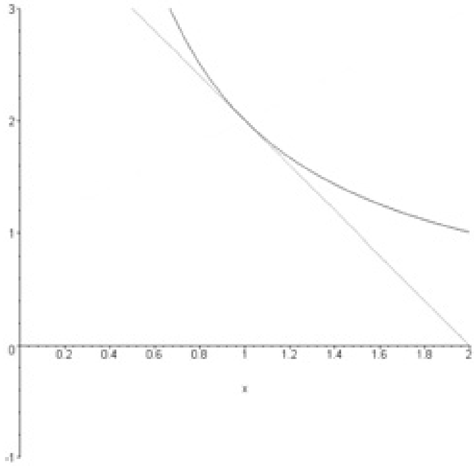
b. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.



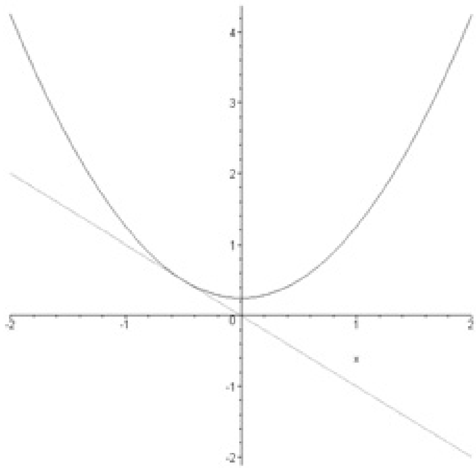
c. f est dérivable en $\frac{3}{2}$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est $y = x + 1$.



d. f est dérivable en 1 et $f'(1) = -2$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = -2x + 4$.



17 **a.**

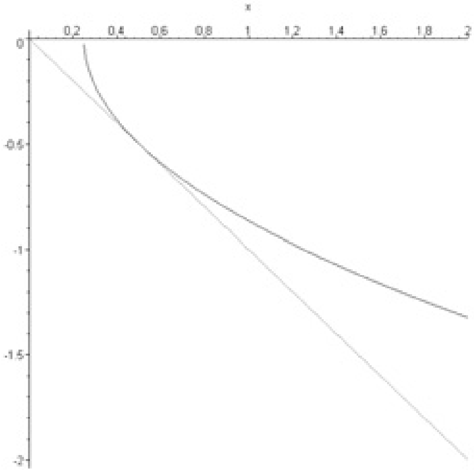


Il semblerait que $\mathscr{D}$ soit la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

f est bien dérivable en $-\dfrac{1}{2}$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ est effectivement $y = -x$.

b.

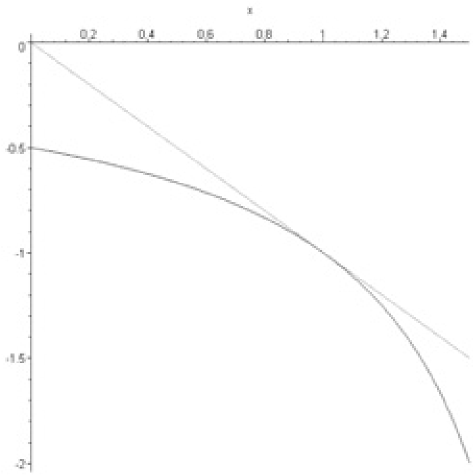


Il semblerait que $\mathscr{D}$ soit la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

f est bien dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est effectivement $y = -x$.

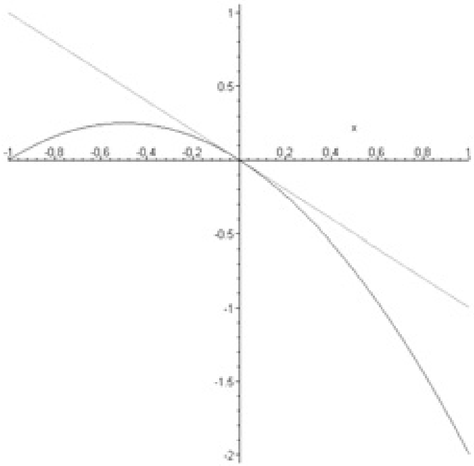
c.



Il semblerait que $\mathscr{D}$ soit la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

f est bien dérivable en 1 et $f'(1) = -1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est effectivement $y = -x$.

d.



Il semblerait que $\mathcal{D}$ soit la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = -1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est effectivement $y = -x$.

18 **a.** f n'est pas dérivable en 0.
b. f est dérivable en 1, $f'(1) = 0$ et la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 1$.
c. f n'est pas dérivable en 2.
d. f est dérivable en 2,5, $f'(2,5) = 1$ et la tangente au point d'abscisse 2,5 a pour équation $y = x - 2$.
e. f n'est pas dérivable en 3.

20 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x + \frac{5}{3}$.
b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
c. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
et $f'(x) = \dfrac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2}$.
d. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 999x^{998}$.
e. f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$
et $f'(x) = \dfrac{x + 1}{2x\sqrt{x}}$.
f. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -14x - \dfrac{1}{x^2}$.
g. f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et
$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$.

h. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{5}\right\}$
et $f'(x) = \dfrac{5}{(2 - 5x)^2}$.

21 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
et $f'(x) = \dfrac{-3x^{26} + 12x^{11}}{(x^{15} + 1)^2}$.
b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$.
c. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
et $f'(x) = \dfrac{-2}{(x + 1)^3}$.
d. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.
e. f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.
f. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et
$f'(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$.
g. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2$.
h. f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$
et $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 15x^4$.

22 **1.** u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$.
2. a. $-7u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $(-7u)'(x) = -14x - 7$.
b. u^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $(u^2)'(x) = 2x(x + 1)(2x + 1)$.
c. $u^3 = u^2 \times u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $(u^3)'(x) = 3x^2(x + 1)^2(2x + 1)$.
d. $u \times (u - 4)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $(u \times (u - 4))'(x) = 2(x - 1)(x + 2)(2x + 1)$.
e. $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ;0\}$
et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{2x + 1}{(x^2 + x)^2}$.
f. $\dfrac{1}{2 + u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $\left(\dfrac{1}{2 + u}\right)'(x) = -\dfrac{2x + 1}{(x^2 + x + 2)^2}$.
g. $\dfrac{u}{1 + u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $\left(\dfrac{u}{1 + u}\right)(x) = \dfrac{2x + 1}{(x^2 + x + 2)^2}$.

23 **1.** u est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = 2x + 5$.

w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $w'(x) = 5x^4 - 15x^2$.

2. a. $u - w$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et
$(u-w)'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - 5x^4 + 15x^2$.

b. $3u - v$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et
$(3u-v)'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} - 2x - 5$.

c. $u \times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et
$(u \times v)'(x) = \dfrac{2(x^3+4x^2+5x+3)}{(x+1)^2}$.

d. $u \times w$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et
$(u \times w)'(x) = \dfrac{x^3(5x^3+6x^2-15x-20)}{(x+1)^2}$

e. $\dfrac{w}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\ ;\ -2\}$ et
$\left(\dfrac{w}{v}\right)'(x) = \dfrac{x^2(3x^4+20x^3+25x^2-50x-90)}{((x+2)(x+3))^2}$.

f. w^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$w'(x) = 2(5x^4 - 15x^2)(x^5 - 5x^3)$.

24 **a.** Posons, pour tout x réel, $u(x) = x^2$. On trouve, pour tout réel x :
$u'(x) = 1 \times x + x \times 1 = 2x$.

b. Posons, pour tout x réel, $v(x) = x^3 = x \times x^2$ et $w(x) = x^4 = x \times x^3$. On trouve, pour tout réel x : $v'(x) = 1 \times x^2 + x \times 2x = 3x^2$ et $w'(x) = 1 \times x^3 + x \times 3x^2 = 4x^3$.

26 **a.** $f'(x) = -\dfrac{3x^4+4x^3-10}{(x^4+10)^2}$.

b. $f'(x) = 30x - 60x^4$.

c. $f'(x) = 2x(x^3 - 5x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 5)$.

d. $f'(x) = \dfrac{(20x^{19}+5x^4)(x^{10}+x^9+x)-(x^{20}+x^5-1)(10x^9+9x^8)}{(x^{10}+x^9+x)^2}$.

e. $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{15}{4}x^{14}+\frac{11}{12}x^{10}\right)\left(\frac{7}{11}x^3-\frac{3}{17}x^2+5\right)-\left(\frac{1}{4}x^{15}+\frac{1}{12}x^{11}-16\right)\left(\frac{21}{11}x^2-\frac{6}{17}x\right)}{\left(\frac{7}{11}x^3-\frac{3}{17}x^2+5\right)^2}$.

27 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x^2(7x^4 + 4x + 3)$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 170x^9 + \dfrac{4}{3x^{21}}$.

c. f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\ (9x^3 + 7x^2 + 5x)$.

d. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-2x(x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2}$.

e. f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{9}{\sqrt{x}} - 99x^8$.

f. f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}\ \ (1+\sqrt{x})^2}$.

28 Chacune des instructions proposées a pour objectif de dériver la fonction indiquée.

a. $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. **b.** $f'(x) = \dfrac{7x^3-1}{2\sqrt{x}}$.

c. $f'(x) = 15x^{14} + 10x^9 + 5x^4$.

d. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

30 **a.** f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto 19x^{18}$ est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un minimum (pas local) en 0 qui vaut -1.

b. f est dérivable sur I et sa dérivée
$f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ est positive sur I.

La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un minimum (pas local) en 1 qui vaut -3 et un maximum (pas local) en 7 qui vaut $\sqrt{7} + 2$.

c. f est dérivable sur I et sa dérivée
$f' : x \mapsto 1 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2}$ est négative sur $[1\ ;\ \sqrt{2}[$ et positive sur $[\sqrt{2}\ ;\ 4[$. La fonction f est donc décroissante sur $[1\ ;\ \sqrt{2}[$ et croissante sur $[\sqrt{2}\ ;\ 4]$. Elle possède un minimum local en $\sqrt{2}$qui vaut $2\sqrt{2}$et un maximum (pas local) en 4 qui vaut $\dfrac{9}{2}$.

d. f est dérivable sur I et sa dérivée
$f' : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un maximum (pas local) en 0 qui vaut $-\dfrac{1}{2}$.

e. f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ est une fonction polynôme du second degré ayant un discriminant strictement négatif, et qui est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un maximum (pas local) en 1 qui vaut 3 et un minimum (pas local) en –1 qui vaut –1.

f. f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{-6x}{(x^2-2)^2}$ est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un maximum (pas local) en –5 qui vaut $\dfrac{3}{23}$ et un minimum (pas local) en –10 qui vaut $\dfrac{3}{98}$.

31 **a.** f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$ est négative sur $]-\infty : -1]$ et positive sur $[-1 ; 0]$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et croissante sur $[-1 ; 0]$. Elle possède un minimum local en –1 qui vaut –1 et un maximum (pas local) en 0 qui vaut 0.

b. f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto 4x(x^2+5)$est négative sur $]-\infty ; 0]$ et positive sur $]0 ; +\infty]$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $]0 ; +\infty]$. Elle possède un minimum local en 0 qui vaut 25.

c. f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 1$ est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un minimum (pas local) en $\dfrac{1}{2}$ qui vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2}$ et un maximum (pas local) en 5 qui vaut $5\sqrt{5} - 5$.

d. f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ est négative sur $\left[\dfrac{1}{10} ; \dfrac{1}{4}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{4} ; 1\right]$. La fonction f est donc décroissante sur $\left[\dfrac{1}{10} ; \dfrac{1}{4}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{4} ; 1\right]$. Elle possède un minimum local en $\dfrac{1}{4}$ qui vaut $-\dfrac{1}{4}$ et un maximum (pas local) en 1 qui vaut 0.

e. f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto 3x^5(3x^3 + 2)$. La fonction $x \mapsto 3x^3 + 2$ est négative sur un certain intervalle $[-10 ; \alpha]$ et positive sur $[10 ; \alpha]$ (avec $\alpha < 0$). La fonction f' est donc positive sur $[-10 ; \alpha]$, négative sur $[\alpha ; 0]$ et positive sur $[0 ; 10]$. La fonction f est donc croissante sur $[-10 ; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha ; 0]$ et croissante sur $[0 ; 10]$. Elle possède un maximum local en α et un minimum local en 0 qui vaut 0.

f. f est dérivable sur I et sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$ est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Elle possède un minimum (pas local) en 0 qui vaut 0 et un maximum (pas local) en 1 qui vaut 2.

32 **a.** • Méthode n° 1 : La fonction racine carrée est croissante et ne s'annule par sur I, donc la fonction f est définie et décroissante sur I.

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ qui est négative sur I. La fonction f est donc décroissante sur I.

b. • Méthode n° 1 : La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, croissante sur $\mathbb{R}^+$, et ne s'annule pas sur I. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est donc bien définie sur I, croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{14x}{(x^2+1)^2}$ qui est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. • Méthode n° 1 : La fonction $x \mapsto (x-1)^2 + 2$ est décroissante sur $[0 ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$, et ne s'annule pas sur I. La fonction f est donc bien définie sur I, croissante sur $[0 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{2-2x}{((x-1)^2+2)^2}$ qui est positive sur [0 ; 1] et négative sur [1 ; +∞[. La fonction f est donc croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; +∞[.

33 **a.** • Méthode n° 1 : Considérons deux réels x et y appartenant à [0 ; 3] tels que $x < y$. En utilisant deux fois consécutivement la croissance de la fonction carrée sur [0 ; 3], on trouve $x^2 \leqslant y^2$ puis $x^4 \leqslant y^4$. On en déduit : $-x^4 \geqslant -y^4$ puis $f(x) \geqslant f(y)$. La fonction f est donc décroissante sur [0 ; 3]. Par le même raisonnement, on trouve que f est croissante sur [–3 ; 0].

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -4x^3$ qui est positive sur]–∞ ; 0] et négative sur [0 ; +∞[. La fonction f est donc croissante sur]–∞ ; 0] et décroissante sur [0 ; +∞[.

b. Commençons par remarquer que la fonction n'est définie que sur l'ensemble $\mathbb{D}$, constitué de I privé des deux réels $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

• Méthode n° 1 : La fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est décroissante sur $[-2 ; -\sqrt{2}[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2}$ est définie sur $[-2 ; -\sqrt{2}[$ et y est croissante. La fonction f est donc croissante sur $[-2 ; -\sqrt{2}[$. Par un raisonnement similaire, on montre que la fonction f est croissante sur $]-\sqrt{2} ; 0]$, décroissante sur $[0 ; \sqrt{2}[$ et décroissante sur $]-\sqrt{2} ; 2]$.

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur $\mathbb{D}$ et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{-4x}{(x^2-2)^2}$ qui est positive sur $\mathbb{D} \cap]-\infty ; 0]$ et négative sur $\mathbb{D} \cap]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc croissante sur $[-2 ; -\sqrt{2}[$, croissante sur $]-\sqrt{2} ; 0]$, décroissante sur $[0 ; \sqrt{2}[$ et décroissante sur $]\sqrt{2} ; 2]$.

c. • Méthode n° 1 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{3x-2}{2\sqrt{x}}$ positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I.

• Méthode n° 2 : Pour cet exemple, l'utilisation de la dérivation semble être indispensable, et il serait sans doute difficile de ne pas y avoir recours !

d. • Méthode n° 1 : La fonction f est une fonction affine décroissante sur I.

• Méthode n° 2 : La fonction f est dérivable sur I et a pour dérivée $f' : x \mapsto -3$ qui est négative sur I. La fonction f est donc décroissante sur I.

e. • Méthode n° 1 : On trouve, pour tout réel x appartenant à I : $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. La fonction inverse est décroissante sur I, donc, il en est de même pour la fonction f.

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ qui est négative sur I. La fonction f est donc décroissante sur I.

f. • Méthode n° 1 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto x(3x+2)$ qui est positive $\left[-4 ; -\dfrac{2}{3}\right]$, négative sur $\left[-\dfrac{2}{3} ; 0\right]$ et positive sur [0 ; 4]. La fonction f est donc croissante sur $\left[-4 ; -\dfrac{2}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\dfrac{2}{3} ; 0\right]$ et croissante sur [0 ; 4].

• Méthode n° 2 : Comme dans l'exemple **c.**, l'utilisation de la dérivation semble être indispensable, et il serait sans doute difficile de ne pas y avoir recours !

34 **a.** • Méthode n° 1 : Considérons deux réels $x < y$ appartenant à [–5 ; 0]. On trouve tout d'abord $x^2 \geqslant y^2 \geqslant 0$. En élevant au carré successivement deux fois chaque membre de cet encadrement, on obtient $x^8 \geqslant y^8$. Il vient donc $x^8 + x^2 \geqslant y^8 + y^2$, d'où $f(x) \leqslant f(y)$. La fonction f est donc croissante sur [–5 ; 0]. Par le même raisonnement, on trouve que f est décroissante sur [0 ; 5].

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -x(8x^6 + 2)$ qui est positive sur [–5 ; 0] et négative sur [0 ; 5]. La fonction f est donc croissante sur [–5 ; 0] et décroissante sur [0 ; 5].

b. Commençons par remarquer que f n'est définie que sur $\mathscr{D}$, constitué de I privé du réel –1.

• Méthode n° 1 : f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ qui est négative sur $]-1\ ;\ 0]$ et positive sur $[0\ ;\ 3[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-1\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ 3[$.

• Méthode n° 2 : Pour cet exemple, l'utilisation de la dérivation semble être indispensable, et il serait sans doute difficile de ne pas y avoir recours !

c. • Méthode n° 1 : La fonction f est une fonction polynôme du second degré croissante sur I.

• Méthode n° 2 : f est dérivable sur I et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto 2x$ qui est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I.

d. • Méthode n° 1 : f est dérivable sur $I\backslash\{0\}$ et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$ positive sur $]0\ ;\ 3]$. La fonction f est donc croissante sur $]0\ ;\ 3]$.

• Méthode n° 2 : Considérons deux réels x et y tels que $0 \leqslant x < y$. On a d'une part $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ et d'autre part $x^2 + 1 < y^2 + 1$, donc $f(x) < f(y)$.

e. • Méthode n° 1 : f est dérivable sur $I\backslash\{1\}$ et a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -1$ sur $[0\ ;\ 1[$ qui est négative, et $f' : x \mapsto 1$ sur $]1\ ;\ 2]$ qui est positive. La fonction f est donc décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ 2]$.

• Méthode n° 2 : Sur $[0\ ;\ 1]$, la fonction f n'est autre que $x \mapsto 1 - x$ qui est décroissante, et sur $[1\ ;\ 2]$, la fonction f n'est autre que $x \mapsto x - 1$ qui est croissante.

f. • Méthode n° 1 : La fonction f est une fonction affine croissante sur I.

• Méthode n° 2 : La fonction f est dérivable sur I et a pour dérivée $f' : x \mapsto 1$ qui est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I.

35 **a.** La fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$, croissante sur $[1\ ;\ 2]$, décroissante sur $[2\ ;\ 3]$. La fonction dérivée est donc négative sur $[0\ ;\ 1]$, positive sur $[1\ ;\ 2]$ et négative sur $[2\ ;\ 3]$.

b. La fonction f n'admet pas d'extremum local ni en 0, ni en 3. Par exemple, en 0, il est impossible de trouver un intervalle $]a\ ;\ b[$ contenant 0 et contenu dans $[0\ ;\ 3]$.

c. La fonction f admet un maximum local en 2, et un minimum local en 1.

37 **a.** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - x + 3$ est définie et dérivable sur I, et admet pour dérivée $f' : x \mapsto -\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ qui est positive sur $]1\ ;\ 2]$ et négative sur $[2\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc croissante sur $]1\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 2 qui vaut 0. La fonction f est donc négative, ce qui permet de conclure.

b. La fonction $f : x \mapsto x^2 - x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}$ est définie et dérivable sur I, et admet pour dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{x}(4\sqrt{x} - 3)$ qui est négative sur $\left]0\ ;\ \dfrac{9}{16}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{9}{16}\ ;\ 4\right]$. La fonction f est donc décroissante sur $\left]0\ ;\ \dfrac{9}{16}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{9}{16}\ ;\ 4\right]$. Elle admet donc un minimum en $\dfrac{9}{16}$, et la valeur de f en ce minimum est positive. La fonction f est donc positive sur I, ce qui permet de conclure.

c. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} - \dfrac{1}{2}$ est définie et dérivable sur I, et admet pour dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ qui est positive sur $]0\ ;\ 1]$ et négative sur $[1\ ;\ 2]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ 2]$. Elle admet donc un maximum en 1 qui vaut 0. La fonction f est donc négative, ce qui permet de conclure.

d. La fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x - \dfrac{5}{27}$ est définie et dérivable sur I, et admet pour dérivée $f' : x \mapsto (3x+1)(x-1)$ qui est positive sur $\left[-1\ ;-\dfrac{1}{3}\right]$ et négative sur $\left[-\dfrac{1}{3}\ ;0\right]$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-1\ ;-\dfrac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\ ;0\right]$. Elle

admet donc un maximum en $-\frac{1}{3}$ qui vaut 0.
La fonction f est donc négative, ce qui permet de conclure.

e. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{2}$ est définie et dérivable sur I\{0}, et admet pour dérivée $f' : x \mapsto \frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$ qui est négative sur]0 ; 2] et positive sur [2 ; 4]. La fonction f est donc décroissante sur]0 ; 2] et croissante sur [2 ; 4]. Elle admet donc un minimum en 2 qui vaut 0. La fonction f est donc positive, ce qui permet de conclure.

f. La fonction $f : x \mapsto x^2 + x - \frac{1}{x} - 1$ est définie et dérivable sur I, et admet pour dérivée $f' : x \mapsto \frac{(x+1)(2x^2 - x + 1)}{x^2}$ qui est positive sur I. La fonction f est donc croissante sur I. Or, $f(1) = 0$, donc, f est donc positive, ce qui permet de conclure.

S'entraîner

38 Soit un réel a. On trouve :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\left(\alpha(a+h) + \beta\right) - \left(\alpha a + \beta\right)}{h} = \alpha,$$
donc, f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

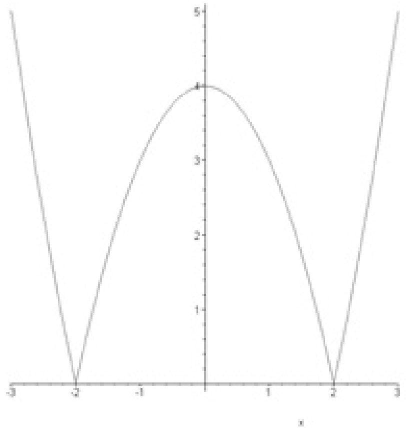
39 **a.** La fonction polynôme $x \mapsto 4 + x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc, f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. $f(a+h) - f(a) = \sqrt{4+(a+h)^2} - \sqrt{4+a^2}$
$$= \frac{\left(\sqrt{4+(a+h)^2} - \sqrt{4+a^2}\right)\left(\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}\right)}{\left(\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}\right)}$$
$$= \frac{(4+(a+h)^2) - (4+a^2)}{\left(\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}\right)}$$
$$= \frac{h^2 + 2ah}{\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}}.$$

c. On en déduit :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h + 2a}{\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}}$$
et cette dernière quantité tend vers $\frac{2a}{2\sqrt{4+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{4+a^2}}$ lorsque h se rapproche de 0. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel a, $f'(a) = \frac{a}{\sqrt{4+a^2}}$.

40 **a.** Si $h > 0$, on trouve :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{|(2+h)^2 - 4|}{h}$$
$$= \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$
qui tend vers 4 lorsque h se rapproche de 0.
Si $h < 0$, on trouve :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{|(2+h)^2 - 4|}{h}$$
$$= \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \frac{-h^2 - 4h}{h} = -h - 4$$
qui tend vers –4 lorsque h se rapproche de 0.
Puisque les deux dernières limites ne sont pas égales, la fonction f n'est pas dérivable en 2.

b.



c. La courbe représentative de f ne semble pas admettre de tangente au point d'abscisse 2, donc, la fonction f ne semble pas être dérivable en 2.

d. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, la fonction f n'est pas dérivable en –2. Cela se retrouve par le calcul :
Si $h > 0$, on trouve :
$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{|(-2+h)^2 - 4|}{h}$$
$$= \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \frac{-h^2 + 4h}{h} = 4 - h$$
qui tend vers 4 lorsque h se rapproche de 0.
Si $h < 0$, on trouve :
$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{|(-2+h)^2 - 4|}{h}$$
$$= \frac{|h^2 - 4h|}{h} = \frac{h^2 - 4h}{h} = h - 4$$

qui tend vers –4 lorsque h se rapproche de 0. Puisque les deux dernières limites ne sont pas égales, la fonction f n'est pas dérivable en –2.

41 **a.** $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\dfrac{\alpha}{1+h}+\beta(1+h)-(\alpha+\beta)}{h}$

$$\frac{\alpha\left(\dfrac{-h}{1+h}\right)+\beta h}{h}=\alpha\frac{-1}{1+h}+\beta$$

Cette dernière quantité tend vers $-\alpha+\beta$ lorsque h tend vers 0, donc, f est dérivable en 1 et $f'(1)=-\alpha+\beta$.

b. $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$$=\frac{\dfrac{\alpha}{-2+h}+\beta(-2+h)-\left(\dfrac{\alpha}{-2}-2\beta\right)}{h}$$

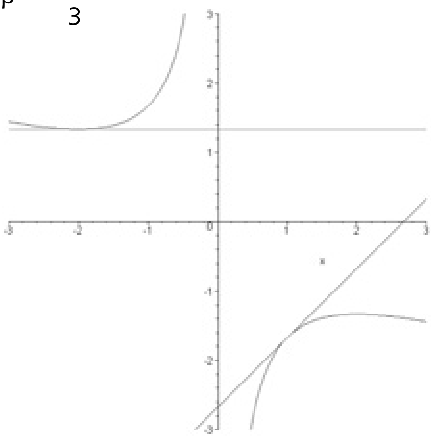
$$=\frac{\alpha\left(\dfrac{h}{2(-2+h)}\right)+\beta h}{h}=\alpha\frac{1}{2(-2+h)}+\beta$$

Cette dernière quantité tend vers $-\dfrac{\alpha}{4}+\beta$ lorsque h tend vers 0, donc, f est dérivable en –2 et $f'(-2)=-\dfrac{\alpha}{4}+\beta$.

c. Nous devons résoudre le système

$\begin{cases}-\alpha+\beta=1\\ -\dfrac{\alpha}{4}+\beta=0\end{cases}$ qui admet pour solution

$$\begin{cases}\alpha=-\dfrac{4}{3}\\ \beta=-\dfrac{1}{3}\end{cases}.$$

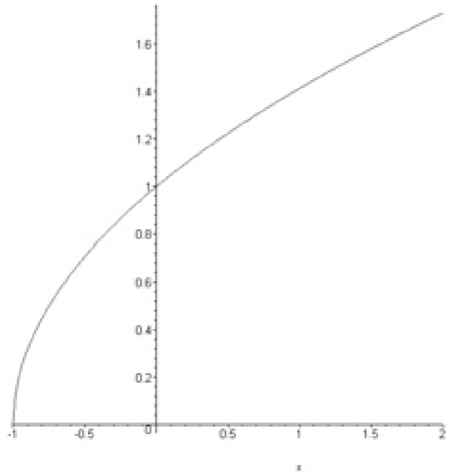


42 **a.**

```
Saisir(a)
Saisir(b)
Saisir(c)
Saisir(x0)
Pour p de 0 à 8
   h:=10^(-p)
   T:=((a*(x0+h)^2+b*(x0+h)+c)-(a*(x0-h)
   ^2+b*(x0-h)+c))/(2*h)
   Afficher(T)
FinPour
```

b. $f'(2)=13$.
$f'(0{,}25)=-0{,}5$.

43 **a.**

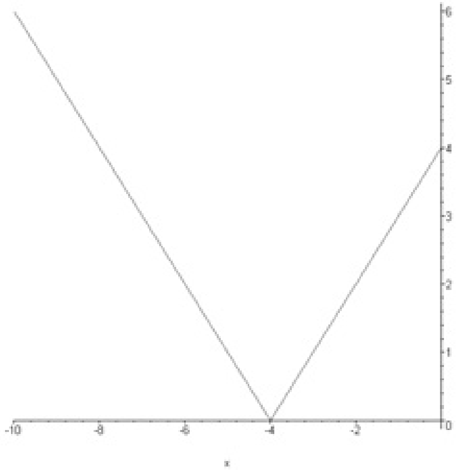


f n'est visiblement pas dérivable en –1. En effet, le taux d'accroissement

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\sqrt{(-1+h)+1}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

tend vers l'infini lorsque h tend vers 0.

b.

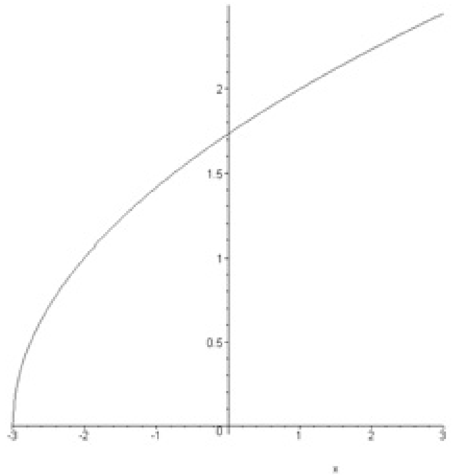


f n'est visiblement pas dérivable en -4. En effet, le taux d'accroissement

$$\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}=\frac{|(-4+h)+4|}{h}=\frac{|h|}{h}$$

tend vers -1 ou 1 suivant que h tend vers 0 en étant négatif ou positif.

c.

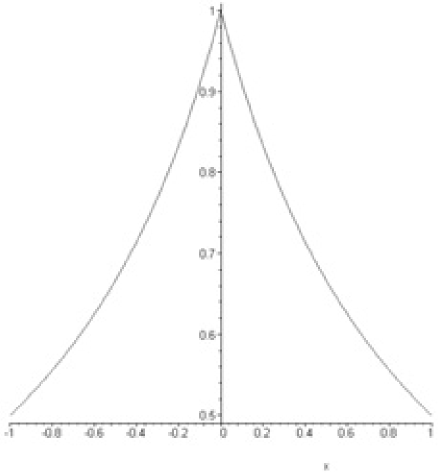


f n'est visiblement pas dérivable en -3. En effet, le taux d'accroissement

$$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\frac{\sqrt{3+(-3+h)}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

tend vers l'infini lorsque h tend vers 0.

d.



f n'est visiblement pas dérivable en 0. En effet, le taux d'accroissement

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\dfrac{1}{1+|h|}-1}{h}=\frac{\dfrac{-|h|}{1+|h|}}{h}$$

tend vers -1 ou 1 suivant que h tend vers 0 en étant négatif ou positif.

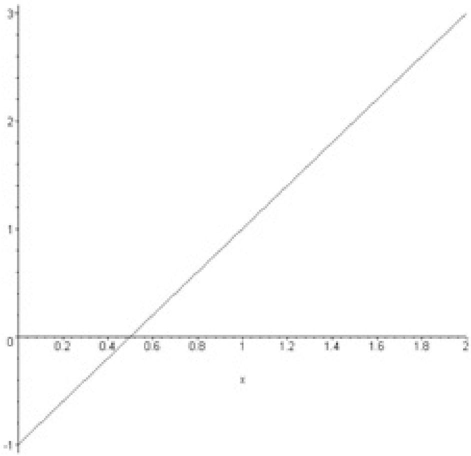
44 $f'(-2)=4$ et la tangente au point d'abscisse -2 a pour équation : $y=4(x+2)-\frac{7}{2}$.
$f'(0)=0$ et la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y=-1$.
$f'(1)=1$ et la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=(x-1)-\frac{7}{4}$.

45 **a.** $f'(-1)<0$ **b.** $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

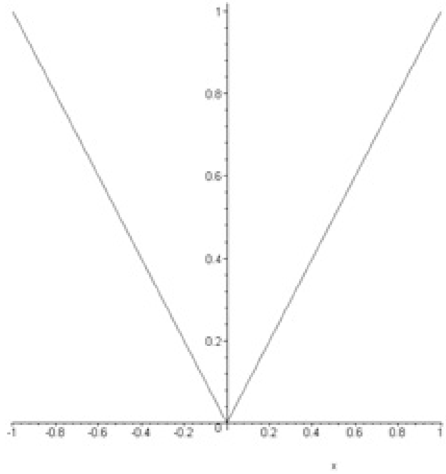
c. $f'(0)>0$ **d.** $f'\left(\frac{3}{4}\right)<0$

e. $f'(1)<0$ **f.** $f'\left(\frac{3}{2}\right)>0$

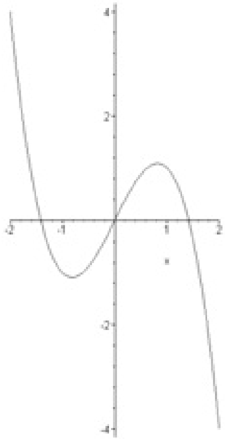
46 **a.** On peut choisir par exemple
$f : x \mapsto 2x - 1$.



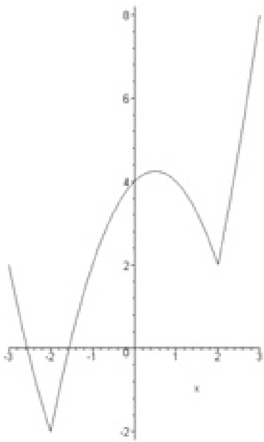
b. On peut choisir la fonction valeur absolue.



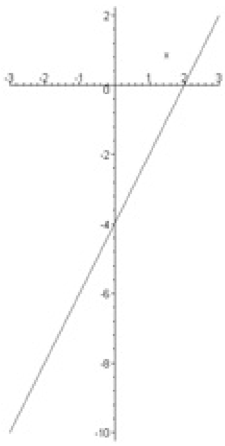
c. On peut choisir par exemple
$f' : x \mapsto -x^3 + 2x$.



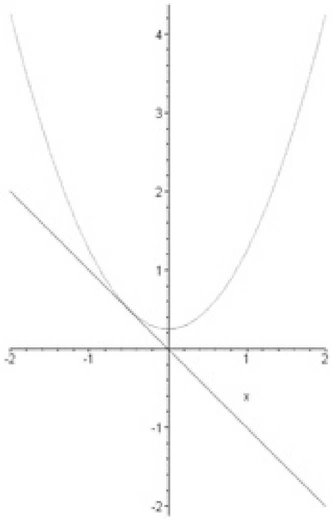
d. On peut choisir par exemple
$f' : x \mapsto |x^2 - 4| + x$.



e. On peut choisir par exemple $f : x \mapsto 2x - 4$.



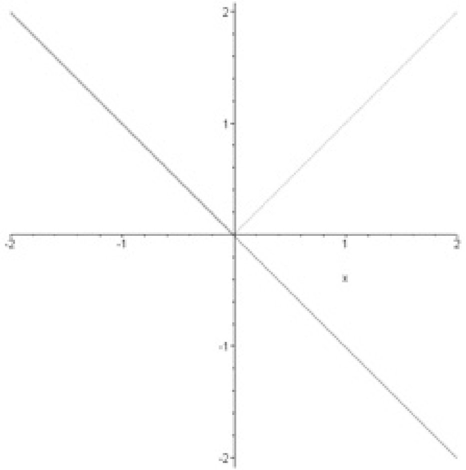
47 a.



La droite $\mathscr{D}$ semble être tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$. On trouve effectivement que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ a pour équation

$$y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = -x.$$

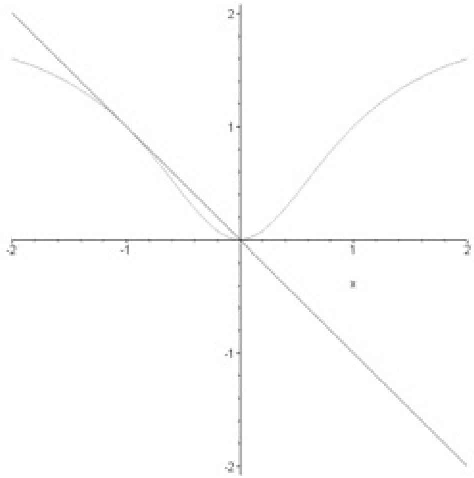
b.



La droite $\mathscr{D}$ semble être tangente à $\mathscr{C}_f$ en tout point d'abscisse strictement négative a. On trouve effectivement que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a < 0$ a pour équation

$y = f'(a)(x - a) + f(a) = -(x - a) + (-a) = -x$.

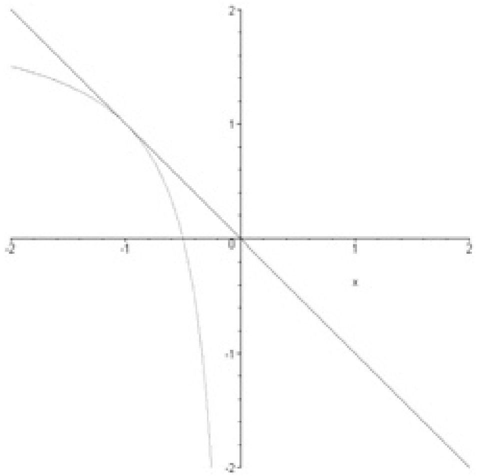
c.



La droite $\mathscr{D}$ semble être tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1. On trouve effectivement que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 a pour équation

$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -(x + 1) + 1 = -x$.

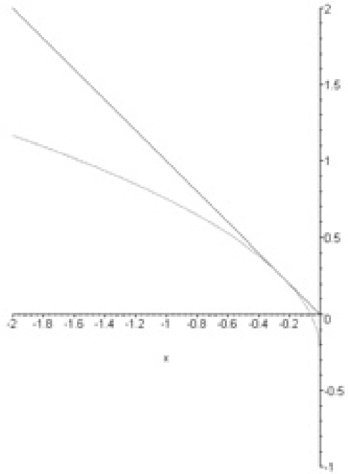
d.



La droite $\mathscr{D}$ semble être tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1. On trouve effectivement que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 a pour équation

$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -(x + 1) + 1 = -x$.

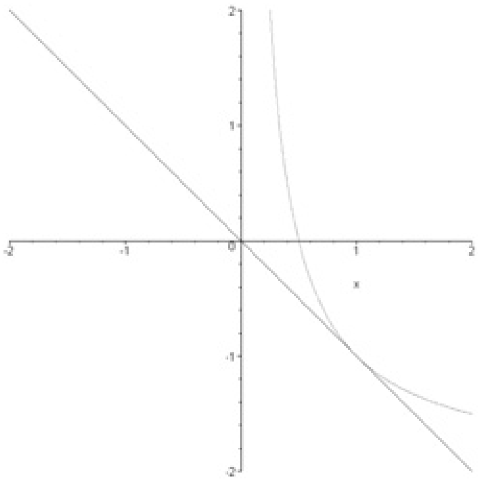
e.



La droite $\mathcal{D}$ semble être tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{4}$. On trouve effectivement que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{4}$ a pour équation

$$y = f'\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= -\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4} = -x.$$

f.

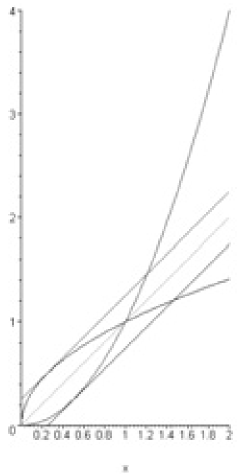


La droite $\mathcal{D}$ semble être tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. On trouve effectivement que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation
$y = f'(1)(x-1)+f(1) = -(x-1)-1 = -x$.

48 **a.** Voir question **c.**
b. La tangente $\mathcal{T}_a$ a pour équation
$y = 2a(x-a)+a^2 = 2ax - a^2$.
La tangente $\mathcal{T}'_a$ a pour équation

$$y = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)+\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{1}{2}\sqrt{a}$$

c. $\mathcal{C}_f$ est une droite de coefficient directeur égal à 1.
Une tangente à $\mathcal{C}_g$ sera parallèle à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $2a = 1$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$.
La dite tangente aura alors pour équation $y = x - \frac{1}{4}$.
Une tangente à $\mathcal{C}_h$ sera parallèle à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $\frac{1}{2\sqrt{a}} = 1$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{4}$.
La dite tangente aura alors pour équation $y = x + \frac{1}{4}$.



d. Soit a un réel différent de $\frac{1}{4}$. Les droites $\mathcal{T}_{\sqrt{a}}$ et $\mathcal{T}'_a$ ont pour équations respectives $y = 2\sqrt{a}x - a$ et $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{1}{2}\sqrt{a}$.
Puisque $2\sqrt{a} \neq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (vu que $a \neq \frac{1}{4}$), ces deux droites sont bien sécantes . Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de leur point d'intersection vérifient le système

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{a}x - a \\ y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{1}{2}\sqrt{a} \end{cases}.$$

Ce dernier est équivalent à

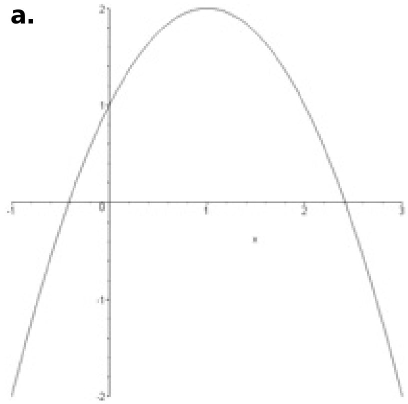
$$\begin{cases} y = 2\sqrt{a}x - a \\ \left(2\sqrt{a} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)x = \dfrac{\sqrt{a}}{2} + a \end{cases},$$

ce qui équivaut encore à

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a\sqrt{a} + a}{4a - 1} \\ y = \dfrac{2a\sqrt{a} + a}{4a - 1} \end{cases}.$$

Le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient bien à $\mathscr{C}_f$.

49 **a.**



b. • La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2$ et a donc pour coefficient directeur 0.

• La tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour équation $y = x + \frac{5}{4}$ et a donc pour coefficient directeur 1.

• La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2x + 1$ et a donc pour coefficient directeur 2.

• La tangente au point d'abscisse –1 a pour équation $y = 4x + 2$ et a donc pour coefficient directeur 4.

• La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -2x + 5$ et a donc pour coefficient directeur –2.

• La tangente au point d'abscisse $\frac{7}{8}$ a pour équation $y = \frac{x}{4} + \frac{113}{64}$ et a donc pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$.

50 **a.** f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

b. f est dérivable en $\frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.

c. f n'est pas dérivable en 1.

d. f est dérivable en –1 et $f'(-1) = 0$.

51 **a.** $(a+h)^4 = ((a+h)^2)^2 = ((a^2 + 2ah) + h)^2)^2$

$= (a^2 + 2ah)^2 + 2(a^2 + 2ah)h^2 + h^4$

$= a^4 + 4a^2h^2 + 4a^3h + 2a^2h^2 + 4ah^3 + h^4$

$= a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4$.

Considérons maintenant un réel a. On trouve :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4 - a^4}{h}$$

$= 4a^3 + 6a^2h + 4ah^2 + h^3$

et cette dernière quantité tend vers $4a^3$ lorsque h tend vers 0, prouvant ainsi que f est dérivable en a et que $f'(a) = 4a^3$.

b. La fonction $x \mapsto x^2$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 2x$, donc, en utilisant la dérivée d'un produit, on obtient, pour tout réel x : $f'(x) = 2x \times x^2 + x^2 \times 2x = 4x^3$.

52 **a.** $f'(x) = 2x + 3$.

b. $f'(x) = 4x^3 + 2x$.

c. $f'(x) = -8x^3 + 42x^2 + 1$.

d. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

e. $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x + 1$.

f. $f'(x) = 24x^7 + 28x^6 + 12x^3 + 12x^2$.

53 **1.** La dérivée de la fonction u^2 est la fonction $2 \times u' \times u$.

2. a. $f'(x) = 2x + 2$.

b. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})$.

c. $f'(x) = \dfrac{2}{(3+2x)^2} \times \dfrac{x+1}{2x+3}$.

d. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$.

e. $f'(x) = 2x^5(x + 1)(4x + 3)$.

f. $f'(x) = 2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

54 **a.** • Méthode n° 1 :

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{(2(5+h)^2 - 1) - 49}{h} = 20 + 2h$$

tend vers 20 lorsque h tend vers 0, donc $f'(5) = 20$.

• Méthode n° 2 : $f'(x) = 4x$, donc $f'(5) = 20$.

b. • Méthode n° 1 :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{-\sqrt{1+h}+1}{h}$$
$$=\frac{1-(1+h)}{h\left(1+\sqrt{1+h}\right)}=-\frac{1}{1+\sqrt{1+h}}$$

tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque h tend vers 0, donc $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

• Méthode n° 2 : $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

c. • Méthode n° 1 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1}{h+1}-1}{h}=\frac{-h}{h(h+1)}=-\frac{1}{h+1}$$

tend vers –1 lorsque h tend vers 0, donc $f'(0)=-1$.

• Méthode n° 2 : $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$, donc $f'(0)=-1$.

d. • Méthode n° 1 :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\frac{-1}{(-1+h)^2}+1}{h}$$
$$=\frac{h^2-2h}{h(-1+h)^2}=\frac{h-2}{(-1+h)^2}$$

tend vers –2 lorsque h tend vers 0, donc $f'(-1)=-2$.

• Méthode n° 2 : $f'(x)=\frac{2}{x^3}$, donc $f'(-1)=-2$.

e. • Méthode n° 1 :

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$=\frac{(-2+h)^2+(-2+h)+1-3}{h}$$
$$=\frac{h^2-3h}{h}=h-3$$

tend vers –3 lorsque h tend vers 0, donc $f'(-2)=-3$.

• Méthode n° 2 : $f'(x)=2x+1$, donc $f'(-2)=-3$.

f. • Méthode n° 1 :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{-\frac{1}{2(1+h)}+\frac{1}{2}}{h}$$
$$=\frac{h}{2h(1+h)}=\frac{1}{2(1+h)}$$

tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque h tend vers 0, donc $f'(1)=\frac{1}{2}$.

• Méthode n° 2 : $f'(x)=\frac{1}{2x^2}$, donc $f'(1)=\frac{1}{2}$.

55 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est dérivable en 1. On trouve, pour tout réel x, $f'(x)=4x^3+2x$, donc $f'(1)=6$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. En particulier, f est dérivable en 1. On trouve, pour tout réel x différent de –1 :

$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$, donc $f'(1)=\frac{3}{4}$.

c. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. En particulier, f est dérivable en 1. On trouve, pour tout réel $x>0$:

$f'(x)=-\frac{7}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(1)=-\frac{7}{2}$.

d. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, f est dérivable en 1. On trouve, pour tout réel x non nul : $f'(x)=\frac{-2}{x^3}$, donc $f'(1)=-2$.

e. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est dérivable en 1. On trouve, pour tout réel x :

$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, donc $f'(1)=\frac{1}{2}$.

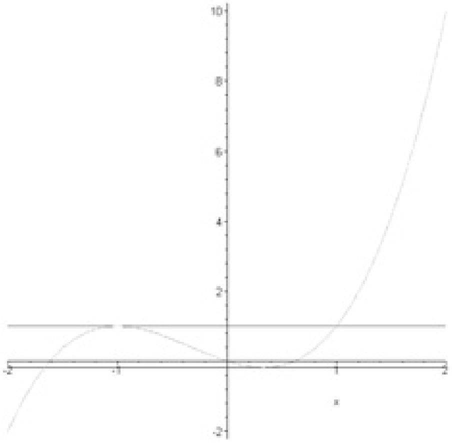
f. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, f est dérivable en 1. On trouve, pour tout réel x non nul, $f'(x)=2-\frac{1}{x^2}$, donc $f'(1)=1$.

56 **1.** Voir question **3.**

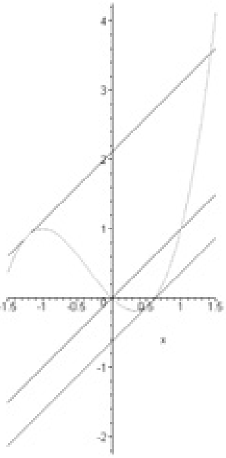
2. La fonction dérivée de f est :
$x\mapsto 3x^2+2x-1$.

3. a. Une tangente à $\mathscr{C}_f$ sera parallèle à $\mathscr{D}_1$ si son coefficient directeur vaut 0. Cela revient à chercher les réels a tels que $f'(a)=0$.

On trouve $a = \frac{1}{3}$ et $a = -1$. Leurs équations respectives sont $y = -\frac{5}{27}$ et $y = 1$.



b. Une tangente à $\mathscr{C}_f$ sera parallèle à $\mathscr{D}_2$ si son coefficient directeur vaut 1. Cela revient à chercher les réels a tels que $f'(a) = 1$.
On trouve $a = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$ et $a = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$.
Leurs équations respectives sont
$y = x + \frac{20}{27} - \frac{14\sqrt{7}}{27}$ et $y = x + \frac{20}{27} + \frac{14\sqrt{7}}{27}$.



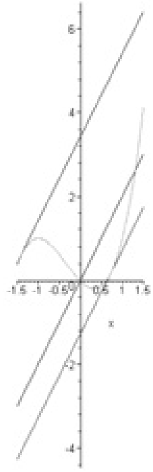
c. Une tangente à $\mathscr{C}_f$ sera parallèle à $\mathscr{D}_3$ si son coefficient directeur vaut 2. Cela revient à chercher les réels a tels que $f'(a) = 2$.

On trouve $a = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}$ et $a = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Leurs équations respectives sont

$$y = 2x + \frac{29}{27} - \frac{20\sqrt{10}}{27} \text{ et}$$

$$y = 2x + \frac{29}{27} + \frac{20\sqrt{10}}{27}.$$



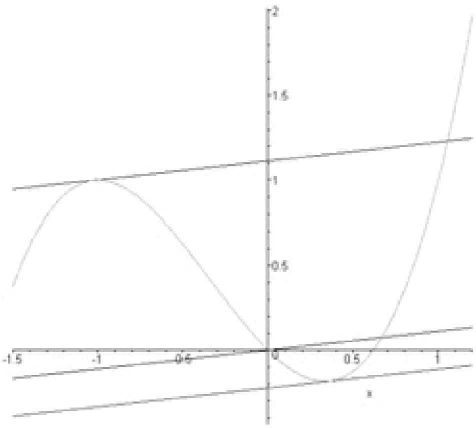
d. Il ne semble pas exister de tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à $\mathscr{D}_4$. Cela se confirme par le calcul car l'équation $f'(a) = -3$ n'admet pas de solution.

e. Une tangente à $\mathscr{C}_f$ sera parallèle à $\mathscr{D}_5$ si son coefficient directeur vaut $\frac{1}{9}$. Cela revient à chercher les réels a tels que $f'(a) = \frac{1}{9}$.

On trouve $a = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{39}}{3}$ et $a = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{39}}{3}$.
Leurs équations respectives sont

$$y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9} - \frac{26\sqrt{39}}{243} \text{ et}$$

$$y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9} + \frac{26\sqrt{39}}{243}.$$



57 **a.** $f: x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$. **b.** $f: x \mapsto x^4 - 7x$.

c. $f: x \mapsto 2\sqrt{x}$. **d.** $f: x \mapsto 4x^2 + x$.

e. $f: x \mapsto x^{1000}$. **f.** $f: x \mapsto -\frac{2}{x}$.

Pour chacune des réponses proposées, il aurait été possible de rajouter une constante quelconque à l'expression de la fonction. Cette constante aurait disparu en dérivant.

58 Tout d'abord, dans chaque cas, on démontrer que les deux fonctions f et g sont bien égales en écrivant f sous la forme d'une fraction.

a. $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

b. $f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

c. $f' : x \mapsto 2x + \frac{1}{x^2}$.

d. $f' : x \mapsto 2 + \frac{3}{(x+1)^2}$.

e. $f' : x \mapsto -1 - \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.

f. $f' : x \mapsto 3 - \frac{5}{(x-7)^2}$.

59 **a.** Le cours dit que la fonction u est dérivable sur I.

b. La fonction u est dérivable sur I et la fonction h est dérivable sur I, donc la fonction $u \times h$ est dérivable sur I et

$(u \times h)' = u' \times h + u \times h'$.

Or, la fonction $u \times h$ n'est autre que $f \times g \times h$, donc $f \times g \times h$ est dérivable sur I et

$(f \times g \times h)' = (f' \times g + f \times g') \times h + f \times g \times h'$

c'est-à-dire :

$(f \times g \times h)' = f' \times g \times h + f \times g' \times h + f \times g \times h'$.

c. La fonction v est dérivable sur I (en tant que produit de fonctions dérivables sur I) et la fonction f est dérivable sur I, donc la fonction $f \times v$ est dérivable sur I et

$(f \times v)' = f' \times v + f \times v'$. Or, la fonction $f \times v$ n'est autre que $f \times g \times h$, donc $f \times g \times h$ est dérivable sur I et

$(f \times g \times h)' = f' \times g \times h + f \times (g' \times h + g \times h')$,

c'est-à-dire :

$(f \times g \times h)' = f' \times g \times h + f \times g' \times h + f \times g \times h'$.

d. Dans chaque cas, nous désignerons par f la fonction proposée.

• $f'(x) = 2x \times \sqrt{x} \times \frac{1}{x+1} + (x^2+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x+1} - (x^2+1) \times \sqrt{x} \times \frac{1}{(x+1)^2}$.

• $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x+2} \times \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x} \times \frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x} \times \frac{1}{x+2} \times \frac{1}{(x+4)^2}$.

• $f'(x) = 2x \times (x^3 - 3) \times (x^4 - 3) + (x^2 - 3) \times 3x^2 \times (x^4 - 3) + (x^2 - 3) \times (x^3 - 3) \times 4x^3$.

• $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times (1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} \times (1+\sqrt{x}) + \sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

f. Soient f, g, h et i quatre fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors, le produit $f \times g \times h \times i$ est dérivable sur I et on trouve :

$(f \times g \times h \times i)' = f' \times g \times h \times i + f \times g' \times h \times i + f \times g \times h' \times i + f \times g \times h \times i'$.

En désignant par f la fonction proposée, on trouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x) = (x-2) \times (x-3) \times (x-4) + (x-1) \times (x-3) \times (x-4) + (x-1) \times (x-2) \times (x-4) + (x-1) \times (x-2) \times (x-3)$.

60 **1.** Une fonction constante est périodique : n'importe quel réel $T > 0$ en est une période.

2. a. Une période de f est 2.

b. La fonction f proposée semble ne pas être dérivable en les entiers.

3. La fonction f étant T – périodique, on a $f(a + T + h) = f(a + h)$, ce qui permet de montrer l'égalité annoncée. De même, on a $f(a) = f(a + T)$. Il en résulte :

$$\frac{f(a+T+h) - f(a+T)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En faisant alors tendre h vers 0, on obtient que $f'(a+T) = f'(a)$ pour tout réel a, de sorte que f' est T – périodique.

61 **a.** • La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On trouve : $f_1'(x) = 4x^3 + 3x^2$. Cette dernière fonction est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $f_1''(x) = 12x^2 + 6x$.

• La fonction f_2 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on trouve : $f_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Cette dernière fonction est elle-même dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et : $f_2''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

• La fonction f_3 est dérivable sur $[1 ; 2]$ et on trouve : $f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Cette dernière fonction est elle-même dérivable sur $[1 ; 2]$ et : $f_3''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

• La fonction f_4 est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et on trouve : $f_4'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Cette dernière fonction est elle-même dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et : $f_4''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$.

b. • $f_1^{(3)} = 24x + 6$; $f_1^{(4)} = 24$.

• $f_2^{(3)} = \dfrac{-6}{x^4}$; $f_2^{(4)} = \dfrac{24}{x^5}$.

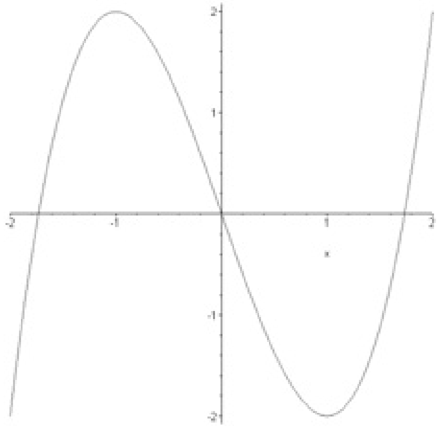
• $f_3^{(3)} = \dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}}$; $f_3^{(4)} = -\dfrac{15}{16x^3\sqrt{x}}$.

• $f_4^{(3)} = \dfrac{-6}{(x+1)^4}$; $f_4^{(4)} = \dfrac{24}{(x+1)^5}$.

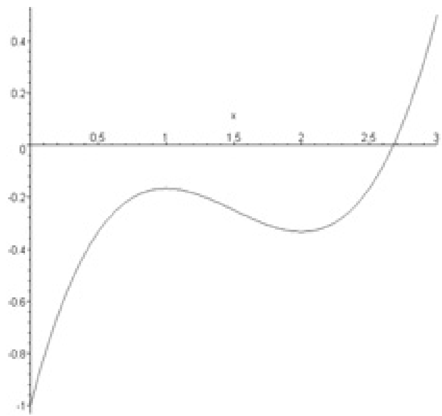
62 **1.**

```
Saisir(a)
Saisir(b)
Saisir(c)
Saisir(d)
Afficher( « La dérivée de la fonction
              x ↦ a*x^3+b*x^2+c*x+d est la
           fonction x ↦ 3*a*x^2+2*b*x+c »)
Delta = (2*b)^2-4*(3*a)*c ;
Si Delta>0, alors
   x1=(-(2*b)-racine(Delta))/(6*a)
   x2=(-(2*b)+racine(Delta))/(6*a)
   Afficher(« La courbe représentative de
   f admet une tangente horizontale aux
   points d'abscisses x1 et x2 »)
Sinon Si Delta = 0 alors
      x1=-(2*b)/(6*a)
      Afficher(« La courbe représentative
      de f admet une tangente horizontale
      au point d'abscisse x1 »)
   Sinon Afficher(« La courbe représentative
   de f n'admet pas de tangente horizontale »)
   FinSi
FinSi
```

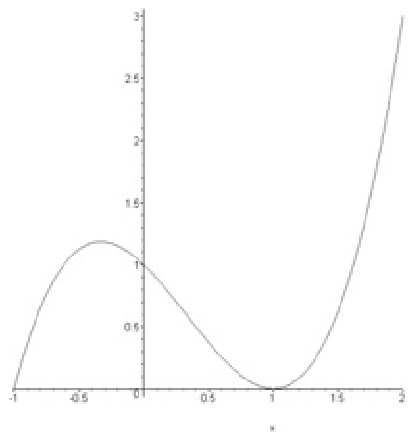
2. a. $f'(x) = 3x^2 - 3$; il y a une tangente horizontale aux points d'abscisses -1 et 1.



b. $f'(x) = x^2 - 3x + 2$; il y a une tangente horizontale aux points d'abscisses 1 et 2.



c. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$; il y a une tangente horizontale aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{3}$ et 1.



63 **a.** f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on trouve, pour tout réel x : $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$.
c. On calcule $(1 - x)f(x)$ et on obtient effectivement $1 - x^6$ en développant. Lorsque x est différent de 1, on peut diviser chaque membre par $1 - x$ pour obtenir $f(x) = g(x)$.
d. Lorsque x est différent de 1, on déduit :
$$f'(x) = \frac{-6x^5(1-x)+(1-x^6)}{(1-x)^2} = \frac{5x^6 - 6x^5 + 1}{(1-x)^2}.$$

64 **1. a.** Si f et g sont deux fonctions dérivables sur J, alors, le produit $f \times g$ est dérivable sur J.
b. La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Les deux fonctions f et g sont donc dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc, leur produit l'est aussi. D'autre part, pour tout réel $h > 0$:
$$\frac{(f \times g)(0+h) - (f \times g)(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$$
qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
La fonction $f \times g$ est donc également dérivable en 0, donc, est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
c. Une condition suffisante pour que le produit $f \times g$ soit dérivable sur J est que f et g soient dérivables sur J. En revanche, il est pas nécessaire que f et g soient dérivables sur J pour que $f \times g$ le soit.
2. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur J, alors, la somme $f + g$ est dérivable sur J.
Utilisons maintenant les fonctions proposées dans l'énoncé. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et la fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Les deux fonctions f et g sont donc dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc, leur somme l'est aussi. D'autre part, pour tout réel $h > 0$:
$\dfrac{(f+g)(0+h) - (f+g)(0)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$ qui tend vers 1 lorsque h tend vers 0.
La fonction $f + g$ est donc également dérivable en 0, donc, est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
c. Une condition suffisante pour que la somme $f + g$ soit dérivable sur J est que f et g soient dérivables sur J. En revanche, il est pas nécessaire que f et g soient dérivables sur J pour que $f + g$ le soit.

65 **1. a.** Il suffit de remplacer f par son expression.
b. Lorsque h se rapproche de 0, le réel ah se rapproche également de 0.
c. Considérons un réel x_0 tel que $ax_0 + b$ appartient à I. Puisque f est dérivable en $ax_0 + b$, le taux d'accroissement
$\dfrac{f(ax_0 + b + ah) - f(ax_0 + b)}{ah}$ tend vers $f'(ax_0 + b)$ lorsque h tend vers 0.
Ainsi, $\dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$ tend vers $f'(ax_0 + b)$ lorsque h tend vers 0. On en déduit que g est dérivable en x_0 et que $g'(x_0) = af'(ax_0 + b)$.
2. a. On peut écrire $g(x) = f(1 - x)$ avec $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc, la fonction g est dérivable sur $]-\infty ; 1[$, et on trouve : $g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
b. On peut écrire $g(x) = f(x + 2)$ avec $f(x) = 5 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc la fonction g est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$, et on trouve : $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$.
c. On peut écrire $g(x) = f(2x + 1)$ avec $f(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc, la fonction g est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$, et on trouve :
$$g'(x) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right).$$

66 **1.** On a $]0 ; 2[$ contenu dans $[-2 ; 6]$ et $f(1) \leqslant f(x)$ pour tout x appartenant à $]0 ; 2[$, donc, f admet un minimum local au point d'abscisse 1.
2. a. On trouve $f_1' = -3f'$.

x	-2		1		6
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	-9	$\nearrow$	-6	$\searrow$	-30

Il y a un maximum local en 1.

b. On trouve $f_1' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

x	-2		1		6
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
f_2	$1{,}7$	$\searrow$	$1{,}4$	$\nearrow$	$3{,}1$

Il y a un minimum local en 1.

c. On trouve $f_3' = \dfrac{-f'}{f^2}$.

x	-2		1		6
$f_3'(x)$		$-$	0	$+$	
f_3	$0{,}33$	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$0{,}1$

Il y a un maximum local en 1.

d. On trouve $f_4' = f'$.

x	-2		1		6
$f_4'(x)$		$-$	0	$+$	
f_4	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	15

Il y a un minimum local en 1.

e. On trouve $f_5' = \dfrac{3f'}{f^2}$.

x	-2		1		6
$f_5'(x)$		$-$	0	$+$	
f_5	0	$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	$0{,}7$

Il y a un minimum local en 1.

f. On trouve $f_6' = -\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

x	-2		1		6
$f_6'(x)$		$-$	0	$+$	
f_6	$-1{,}7$	$\nearrow$	$-1{,}4$	$\searrow$	$-3{,}1$

Il y a un maximum local en 1.

3. a. La fonction f_1 a des variations opposées à celles de f.
b. La fonction f_2 a les mêmes variations que f.
c. La fonction f_3 a des variations opposées à celles de f.
d. La fonction f_4 a les mêmes variations que f.
e. La fonction $\dfrac{1}{f}$ a des variations opposées à celles de f, puis la fonction $\dfrac{3}{f}$ a des variations opposées à celles de f, donc, la fonction $-\dfrac{3}{f}$ a les mêmes variations que f, donc, f_5 a les mêmes variations que f.
f. La fonction $\sqrt{f}$ a les mêmes variations que f, donc, la fonction f_6 a des variations opposées à celles de f.

67 **a.** $f : x \mapsto x$. **b.** $f : x \mapsto -|x|$.
c. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. **d.** $f : x \mapsto -\sqrt{x}$.
e. $f : x \mapsto (x-3)^2$. **f.** $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

68 **a.** • f_1 et f_2 sont définies sur I. En revanche, f_3 n'est définie qu'en les points x vérifiant $f(x) \neq 0$ et f_4 n'est définie qu'en les points x vérifiant $f(x) \geqslant 0$.
• f_1 a les mêmes variations que f.
• f_2 a les mêmes variations que f si $\lambda > 0$, et des variations opposées si $\lambda < 0$.
• Sur l'ensemble J sur lequel la fonction f_3 est définie, cette dernière fonction a des variations opposées à celles de f.
• Sur l'ensemble J sur lequel la fonction f_4 est définie, cette dernière fonction a les mêmes variations que celles de f.
b. • On trouve $f_1' = f'$, donc les fonctions f_1' et f' ont le même signe. Les fonctions f_1 et f ont donc les mêmes variations.
• On trouve $f_2' = \lambda \times f'$, donc les fonctions f_2' et f' ont le même signe si $\lambda > 0$, et des signes opposés si $\lambda < 0$. Les fonctions f_2 et f ont donc les mêmes variations si $\lambda > 0$, et des variations opposées si $\lambda < 0$.
c. On trouve $f_3' = -\dfrac{f'}{f^2}$, donc puisque la fonction au dénominateur est toujours strictement positive, les fonctions f_3' et f' ont des signes opposés. Les fonctions f_3 et f ont donc des variations opposées.
d. On trouve $f' = 2 \times f_4' \times f_4$. Puisque f_4 est positive sur I (en tant que racine carrée), les fonctions f_4' et f' ont le même signe. Les fonctions f_4 et f ont donc les mêmes variations.

69 **a.** On trouve : $v_1(t) = 5$ et $v_2(t) = t + \dfrac{1}{2}$.
b. La course de Sabbah est uniforme.
c. On trouve : $\dot{v}_1(t) = 0$ et $\dot{v}_2(t) = 1$.
d. On trouve $g(\mathrm{t}) - f(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{9}{2}t + 15$ qui possède un discriminant strictement négatif.

Cette fonction est donc strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc, on aura $f(t) < g(t)$ pour tout réel positif t. Sabah ne va donc jamais rattraper sa voiture. L'étude des variations de $g - f$ montre que cette fonction admet un minimum en $t = \frac{9}{2}$ qui vaut $\frac{39}{8}$.

70 **a.** $P = 2(x + y)$ et $S = xy$. On en déduit $y = \frac{S}{x}$, d'où $P = 2x + \frac{2S}{x}$.

b. • Pour S = 1, on trouve le périmètre minimal pour x proche de 1.

• Pour S = 2, on trouve le périmètre minimal pour x proche de 1,4.

• Pour S = 3, on trouve le périmètre minimal pour x proche de 1,7.

• Pour S = 4, on trouve le périmètre minimal pour x proche de 2.

c. La fonction f admet pour dérivée la fonction $x \mapsto 2 - \frac{2S}{x^2} = 2\frac{x^2 - S}{x^2}$ qui est négative sur l'intervalle $]0 ; \sqrt{S}]$ et positive sur $[\sqrt{S} ; +\infty[$. La fonction f admet donc un minimum lorsque $x = \sqrt{S}$, ce qui confirme les résultats de la question **b.**

d. Lorsque $x = \sqrt{S}$ on trouve $y = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$.

« Parmi tous les rectangles d'aire donnée, celui qui a le périmètre le plus petit est le carré. »

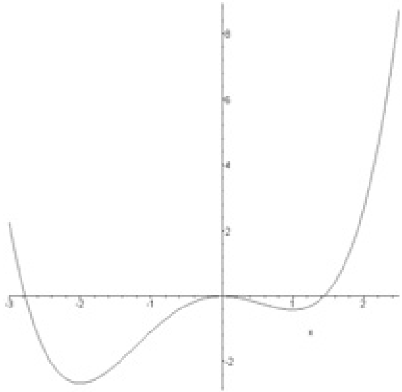
71 **a.** La fonction $x \mapsto x + 1$ est effectivement dérivable sur $\mathbb{R}$, mais elle s'annule en 1. La fonction f n'est donc pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Une réponse correcte aurait été la suivante :
La fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $]-\infty ; -1[$, sur $]1 ; +\infty[$ et ne s'annule pas sur ces intervalles. La fonction f est donc dérivable sur chacun de ces deux intervalles et on a :

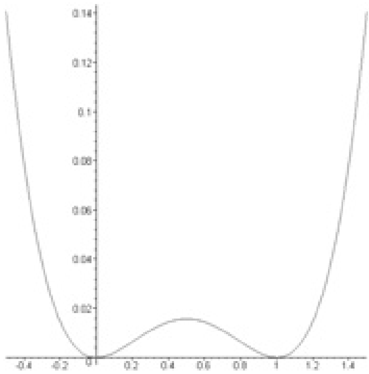
$f'(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$. La fonction f' est donc négative sur $]-\infty ; -1[$, sur $]1 ; +\infty[$, donc f est décroissante sur $]-\infty ; -1[$, sur $]1 ; +\infty[$. On ne peut à priori pas comparer directement $f(-2)$ et $f(2)$.

b. La réponse d'Aenor n'est pas correcte. Pour que g admette un maximum local en 0, il faudrait trouver un intervalle ouvert $]a ; b[$ contenant 0 contenu dans $[0 ; 3]$ et sur lequel $g(x) \leqslant g(0)$. Or, un tel intervalle n'est pas possible à trouver car 0 est au bord de l'intervalle $[0 ; 3]$.

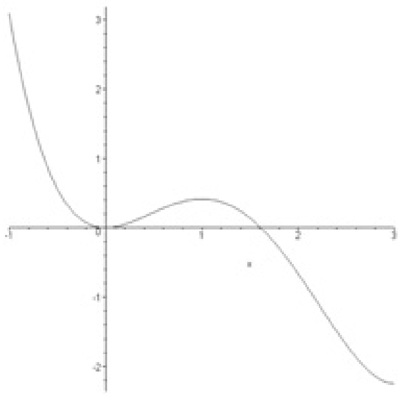
72 **a.** Pour $m = -2$:



Pour $m = \frac{1}{2}$:



Pour $m = 3$:



b. On trouve : $f'(x) \mapsto x^3 - (m+1)x^2 + mx$
$= x(x^2 - (m+1)x + m) = x(x-1)(x-m)$.

c. • Si $m < 0$, f' est négative sur $]-\infty\ ;\ m]$, positive sur $[m\ ;\ 0]$, négative sur $[0\ ;\ 1]$ et positive sur $[1\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ m]$, croissante sur $[m\ ;\ 0]$, décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

• Si $m = 0$, f' est négative sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et positive sur $[1\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

• Si $0 < m < 1$, f' est négative sur $]-\infty\ ;\ 0]$, positive sur $[0\ ;\ m]$, négative sur $[m\ ;\ 1]$ et positive sur $[1\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, croissante sur $[0\ ;\ m]$, décroissante sur $[m\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

• Si $m = 1$, f' est négative sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et positive sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

• Si $m > 1$, f' est négative sur $]-\infty\ ;\ 0]$, positive sur $[0\ ;\ 1]$, négative sur $[1\ ;\ m]$ et positive sur $[m\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, croissante sur $[0\ ;\ 1]$, décroissante sur $[1\ ;\ m]$ et croissante sur $[m\ ;\ +\infty[$.

d. • Si $m < 0$, f possède un minimum local au point d'abscisse m, un minimum local au point d'abscisse 1, et un maximum local au point d'abscisse 0.

• Si $m = 0$, f admet un minimum local au point d'abscisse 1.

• Si $0 < m < 1$, f un minimum local au point d'abscisse 0, un minimum local au point d'abscisse 1, et un maximum local au point d'abscisse m.

• Si $m = 1$, f admet un minimum local au point d'abscisse 0.

• Si $m > 1$, f possède un minimum local au point d'abscisse 0, un minimum local au point d'abscisse m, et un maximum local au point d'abscisse 1.

73

```
Saisir(m)
Si m<0 Alors
   Afficher(« La fonction f est donc
   décroissante sur ] -∞ ;m], croissante
   sur [m ;0], décroissante sur  [0 ;1] et
   croissante sur [1 ; +∞[. »)
   Afficher(« f possède un minimum local
   au point d'abscisse m, un minimum local
   au point d'abscisse 1, et un maximum
   local au point d'abscisse 0. »)
Fin Si
Si m = 0 Alors
   Afficher(« La fonction f est donc dé-
   croissante sur ] -∞ ;1] et croissante
   sur [1 ; +∞[. »)
   Afficher(« f admet un minimum local au
   point d'abscisse 1. »)
Fin Si
Si (m>0 et m<1) Alors
   Afficher(« La fonction f est donc
   décroissante sur ] -∞ ;0], croissante
   sur [0 ;m], décroissante sur [m ;1] et
   croissante sur [1 ; +∞[. »)
   Afficher(« f un minimum local au point
   d'abscisse 0, un minimum local au point
   d'abscisse 1, et un maximum local au
   point d'abscisse m. »)
Fin Si
Si m = 1 Alors
   Afficher(« La fonction f est donc dé-
   croissante sur ] -∞ ;0] et croissante
   sur [0 ; +∞[. »)
   Afficher(« f admet un minimum local au
   point d'abscisse 0. »)
Fin Si
Si m > 1 Alors
   Afficher(« La fonction f est donc
   décroissante sur ] -∞ ;0], croissante
   sur [0 ;1],  décroissante sur [1 ;m] et
   croissante sur [m ; +∞[. »)
   Afficher(« f possède un minimum local
   au point d'abscisse 0, un minimum local
   au point d'abscisse m, et un maximum
   local au point d'abscisse 1. »)
Fin Si
```

74 **a.** La fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x} - 2$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et admet pour fonction dérivée $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ négative sur $]0\ ;\ 1]$ et positive sur $[1\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]0\ ;\ 1]$ puis croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. Elle admet donc un minimum au point d'abscisse 1, qui vaut 0.

La fonction f est donc positive sur $]0\,;+\infty[$, ce qui démontre l'inégalité annoncée.
On retrouve ce résultat en utilisant la positivité du carré :

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}-2.$$

b. La fonction $f : x \mapsto 4\sqrt{x}-4x-1$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et admet pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}-4=\dfrac{2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ positive sur $\left]0\,;\frac{1}{4}\right]$ et négative sur $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$. La fonction f est donc croissante sur $\left]0\,;\frac{1}{4}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$. Elle admet donc un maximum au point d'abscisse $\frac{1}{4}$, qui vaut 0. La fonction f est donc négative sur $]0\,;+\infty[$. Puisque $f(0)=-1$, la fonction f est donc négative sur $[0\,;+\infty[$, ce qui démontre l'inégalité annoncée.
On retrouve ce résultat en utilisant la positivité du carré : $(2\sqrt{x}-1)^2=4x+1-4\sqrt{x}$.
c. La fonction $f : x \mapsto x^4-2x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour fonction dérivée $f' : x \mapsto 4x^3-4x=4x(x^2-1)$ négative sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[0\,;1]$, positive sur $[-1\,;0]$ et sur $[1\,;+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;0]$, décroissante sur $[0\,;1]$ puis croissante sur $[1\,;+\infty[$. Elle admet donc un minimum au point d'abscisse -1 qui vaut 0, et un minimum au point d'abscisse 1 qui vaut 0. La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$, ce qui démontre l'inégalité annoncée.
On retrouve ce résultat en utilisant la positivité du carré : $(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$.

75 **a.** La formule est $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$.
b. On trouve : $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$,
d'où : $R=\dfrac{x(x+1)}{2x+1}$.

c. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on trouve : $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x+1}{(2x+1)^2}$ qui est positive sur $]0\,;+\infty[$. La fonction f est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$.
d. On aura $R \geqslant 3$ lorsque $f(x)\geqslant 3$, ce qui revient à $x^2+x\geqslant 3(2x+1)$, soit encore $x^2-5x-3\geqslant 0$, soit encore (puisque $x>0$) : $x\geqslant\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$.

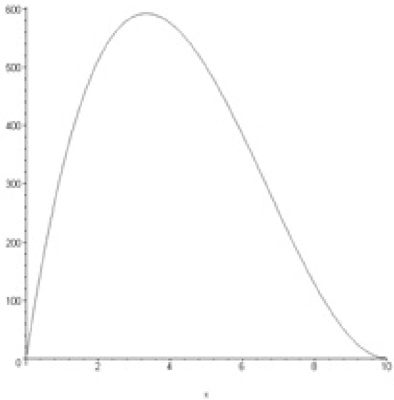
76 **a.** f est homographique lorsque $ad-bc\neq 0$. Son ensemble de définition est alors $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
b. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On trouve alors : $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
c. • Si $ad-bc=0$, alors, f est une fonction constante.
• Si $ad-bc>0$, alors, f est croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{d}{c}\right[$ et croissante sur $\left]-\frac{d}{c}\,;+\infty\right[$.
• Si $ad-bc<0$, alors, f est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{d}{c}\right[$ et décroissante sur $\left]-\frac{d}{c}\,;+\infty\right[$.
d.

```
Saisir(a)
Saisir(b)
Saisir(c)
Saisir(d)
Si ad-bc=0 Alors
   Afficher(« f n'est pas une fonction
homographique »)
Sinon Si ad-bc>0 Alors
   Afficher(« f est croissante sur
      ]-∞;-d/c[ et croissante sur ]-d/c;+∞[ »)
   Sinon
      Afficher(« f est décroissante sur
         ]-∞;-d/c[ et décroissante sur ]-d/c;+∞[ »)
   Fin Si
Fin Si
```

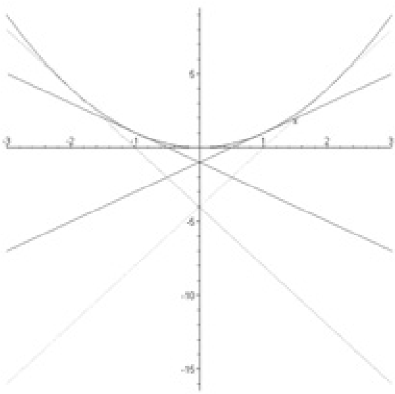
77 **a.** x peut varier dans $I=]0\,;10[$.
b. Le fond de la boîte est un carré de côté $20-2x$, et la boîte a pour hauteur x, donc le volume de la boîte vaut $f(x)=x(2x-20)^2$.

c. La fonction f est dérivable sur I et
$f'(x) = 12x^2 - 160x + 400$.
Cette dernière fonction est positive sur $\left]0\,;\frac{10}{3}\right[$ et négative sur $\left]\frac{10}{3}\,;10\right[$, donc f est croissante sur $\left]0\,;\frac{10}{3}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{10}{3}\,;10\right[$.

d. La fonction f admet donc un maximum en $x = a = \frac{10}{3}$.



78 **a.**



Toutes les tangentes à $\mathscr{C}_f$ semblent être situées en dessous de $\mathscr{C}_f$.

b. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$.
Pour tout réel x, on trouve
$f(x) - g_a(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \geqslant 0$.

c. La tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse –1 a pour équation $y = -x - 2$, et cette droite est située au dessus de la courbe représentative de la fonction inverse. Ainsi, la fonction inverse n'est pas convexe sur $]-\infty\,;0[$.
Considérons maintenant un réel $a > 0$. La tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse a a pour équation $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$.
Or, on constate que pour tout réel $x > 0$:
$$\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}\right) = \frac{a^2 + x^2 - 2ax}{a^2 x} = \frac{(a-x)^2}{a^2 x} \geqslant 0,$$
donc, la courbe représentative de la fonction inverse est bien située au dessus de ses tangentes sur $]0\,;+\infty[$. Elle est donc bien convexe sur cet intervalle.

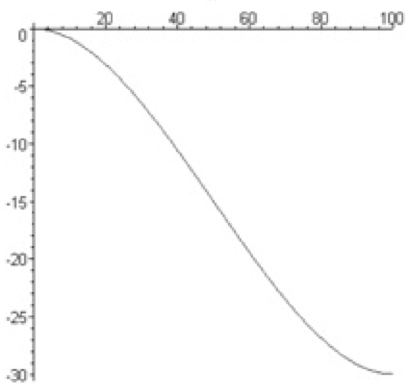
79 **1.** $f(0) = 0$; $f(100) = -30$; $f'(0) = 0$; $f'(100) = 0$.

2. On a $f'(x) = 2ax + b$, donc $b = 0$ et $200a + b = 0$, d'où $a = 0$ et $b = 0$.
La fonction f' est donc nulle, donc, f est constante, et puisque $f(0) = 0$, on en déduit que f est nulle. Ceci est contraire au fait que $f(100) = -30$. La fonction f ne peut donc pas être une polynôme de degré 2.

3. a. Les égalités $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ permettent d'obtenir $d = 0$ et $c = 0$.

b. Les égalités $f(100) = -30$ et $f'(100) = 0$ donnent alors $10^6a + 10^4b + 100c = d = -30$ et $3 \times 10^4a + 200b + c = 0$,
d'où : $a = \frac{3}{50\,000}$ et $a = -\frac{9}{1\,000}$.

c. La fonction f est donc donnée par :
$f : x \mapsto \frac{3}{50\,000}x^3 - \frac{9}{1\,000}x^2$.



Pour aller plus loin

87 **1. a.** On trouve $\mathcal{V} = \pi \times x^2 \times \mathrm{H}$ et $\mathrm{S} = 2 \times \pi \times x^2 + 2 \times \pi \times x \times \mathrm{H}$

b. On en déduit $\mathrm{H} = \dfrac{\mathcal{V}}{\pi \times x^2}$, d'où :

$\mathrm{S} = 2\pi x^2 + \dfrac{2\mathcal{V}}{x}$.

2. a. C'est une conséquence immédiate de **1.b.**

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, sur $]0\ ; +\infty[$ et on trouve : $f'(x) = 12\pi x^2$. Cette dernière fonction est positive, donc, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

L'observation de sa courbe représentative permet d'affirmer qu'elle s'annule, et comme est elle est croissante, elle s'annule une seule et unique fois, en un réel α.

c. Si $\mathcal{V}_0 = 1$, on trouve $\alpha \approx 0{,}54$.
Si $\mathcal{V}_0 = 2$, on trouve $\alpha \approx 0{,}68$.
Si $\mathcal{V}_0 = 3$, on trouve $\alpha \approx 0{,}78$.

d. S est dérivable sur $]0\ ; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. On trouve :

$\mathrm{S}'(x) = \dfrac{-2\mathcal{V}_0}{x^2} + 4\pi x = \dfrac{-2\mathcal{V}_0 + 4\pi x^3}{x^2} = \dfrac{f(x)}{x^2}$

La fonction S' est donc du signe de f, c'est-à-dire négative sur $]0\ ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha\ ; +\infty[$. La fonction F est donc décroissante sur $]0\ ; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha\ ; +\infty[$. Elle admet donc un minimum lorsque $x = \alpha$.

Puisque le réel α vérifie $f(\alpha) = 0$, on obtient $2\mathcal{V}_0 = 4\pi\alpha^3$, d'où :

$\mathrm{H} = \dfrac{\mathcal{V}_0}{\pi \times \alpha^2} = \dfrac{2\pi\alpha^3}{\pi \times \alpha^2} = 2\alpha$, donc la hauteur du cylindre est égale à son diamètre.

88 **1.** Dans chaque cas, on peut conjecturer que f et g sont égales.

3. a. La forme factorisée de P est $\mathrm{P} = a(x - x_1)(x - x_2)$.

En dérivant, on obtient :

$\mathrm{P} = a(x - x_2) + a(x - x_1) = 2ax - a(x_1 + x_2)$.

b. Soit x un réel différent de x_1 et de x_2. On trouve :

$$\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} = \frac{x - x_2 + x - x_1}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$= \frac{2x - (x_1 + x_2)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}$$

(la dernière égalité étant obtenue en multipliant numérateur et dénominateur par a).

c. • Avec Maxima :

ratsimp((diff(a*(x-x1)*(x-x2),x))/(a*(x-x1)*(x-x2))-1/(x-x1)-1/(x-x2));

• Avec XCas :

simplify(derive(a*(x-x1)*(x-x2))/(a*(x-x1)*(x-x2))-1/(x-x1)-1/(x-x2)) ;

d. Soit P une fonction polynôme du second degré admettant une racine double x_1. On peut donc écrire, pour tout réel x :

$\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)^2$, donc, $\mathrm{P}'(x) = 2a(x - x_1)$.

Il vient donc, pour tout réel x différent de x_1 :

$\dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)} = \dfrac{2}{x - x_1}$.

3. a. On peut écrire P sous sa forme factorisée $\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. En dérivant cette fonction, par exemple en utilisant l'exercice **59**, on obtient :

$$\mathrm{P}'(x) = a((x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)).$$

b. • Avec Maxima :

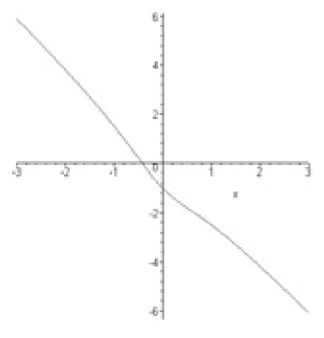
ratsimp((diff(a*(x-x1)*(x-x2)*(x-x3),x))/(a*(x-x1)*(x-x2)*(x-x3))-1/(x-x1)-1/(x-x2)-1/(x-x3));

• Avec Xcas :

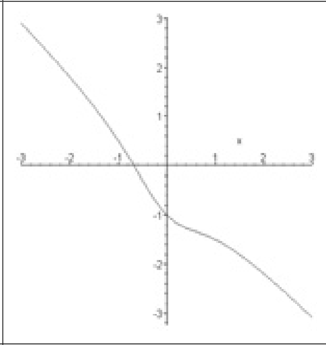
simplify(derive(a*(x-x1)*(x-x2)*(x-x3))/(a*(x-x1)*(x-x2)*(x-x3))-1/(x-x1)-1/(x-x2)-1/(x-x3)) ;

89 **a.**

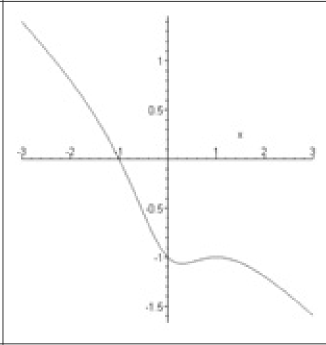
***a* = –2**



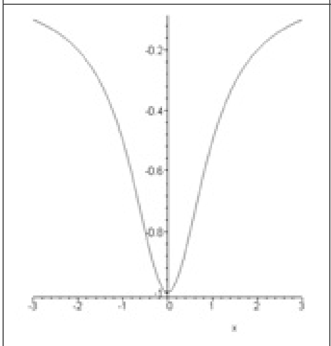
***a* = –1**



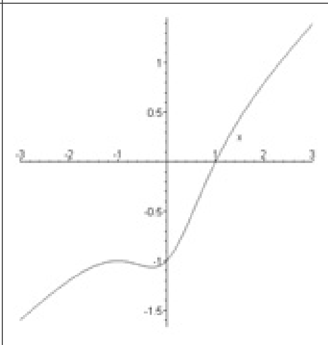
***a* = –0,5**



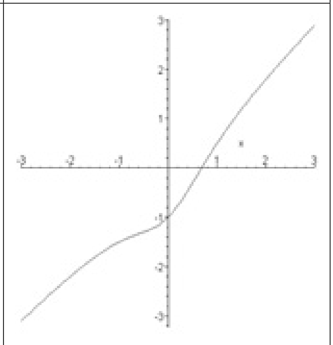
***a* = 0**



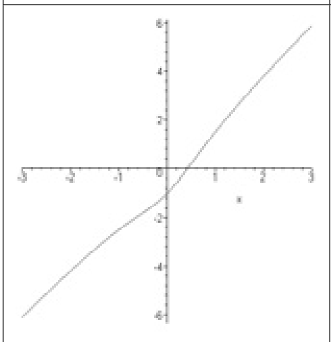
***a* = 0,5**



***a* = 1**



***a* = 2**



---

b. La fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la seconde fonction sommée étant dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). On trouve, pour tout réel x :
$g_a'(x) = \dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$. Cette fonction dérivée est négative sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;+\infty\right[$, et est positive sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$. En posant $\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on en déduit les variations de la fonction g_a :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
g_a		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

On a $\alpha \in I =]\alpha - 0{,}1 ; \alpha + 0{,}1[$ et pour tout réel x appartenant à I, $g(x) \geqslant g(\alpha)$, donc, g admet un minimum local en α.
On a $\beta \in I =]\beta - 0{,}1 ; \beta + 0{,}1[$ et pour tout réel x appartenant à I, $g(x) \leqslant g(\beta)$, donc g admet un maximum local en β.
Enfin, on trouve : $g(\alpha) = a - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, $g(0) = a$ et $g(\beta) = a + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

c. • Si $a \leqslant -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, alors, $g(\beta) \leqslant 0$, donc il apparaît clairement sur le tableau de variations de g_a que cette fonction est négative sur $[\alpha ; +\infty[$. Et puisque g_a est aussi clairement négative sur $\mathbb{R}^-$, elle est donc négative sur $\mathbb{R}$ tout entier.

• Si $a \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, alors, $g(\alpha) \geqslant 0$, donc il apparaît clairement sur le tableau de variations de g_a que cette fonction est positive sur $]-\infty ; \beta]$. Et puisque g_a est aussi clairement positive sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.

• Si $a \in \left]-\dfrac{3\sqrt{3}}{8} ; \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right[$, alors, $g_a(\alpha) < 0$ et $g_a(\beta) > 0$, donc g_a change de signe sur $\mathbb{R}$.

d. La dérivée de la fonction f_a n'est autre que g_a, donc le signe de g_a trouvé dans la question **c.** permet d'affirmer que la fonction f_a est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

90 **1.** Le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On en déduit immédiatement $P' : x \mapsto 2\alpha x + \beta x$ et $P'' : x \mapsto 2\alpha$
Pour tout réel x, on peut donc écrire :

$$P(a) + (x-a)P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}P''(a)$$
$$= \alpha a^2 + \beta a + \gamma + (x-a)(2\alpha a + \beta) + \frac{(x-a)^2}{2}2\alpha$$
$$= \alpha(a^2 + 2ax - 2a^2 + x^2 - 2ax + a^2) + \beta(a + x - a) + \gamma = \alpha x^2 + \beta x = \gamma = P(x).$$

2. a. Le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P : x \mapsto \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. On en déduit immédiatement $P' : x \mapsto 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $P'' : x \mapsto 6\alpha x + 2\beta$ et $P^{(3)} : x \mapsto 6\alpha$. On obtient donc :

$$P(0) + xP'(0) + \frac{x^2}{2}P''(0) + \frac{x^3}{6}P^{(3)}(0)$$
$$= \delta + \gamma x + \beta x + \alpha x^3 = P(x).$$

La formule proposée est donc valable lorsque $a = 0$.

b. • Avec Maxima :

```
P(x):=alpha*x^3+beta*x^2+gamma*x+delta; %%% On définit P
define(P1(x),diff(P(x),x,1));%%% On définit P'
define(P2(x),diff(P(x),x,2));%%% On définit P''
define(P3(x),diff(P(x),x,3));%%% On définit P(3)
ratsimp(P(a)+P1(a)*(x-a)+P2(a)*((x-a)^2)/2+P3(a)*((x-a)^3)/6);
```

• Avec XCAS :

```
P :=x->alpha*x^3+beta*x^2+gamma*x+delta;%%% On définit P
P1 :=fonction_derivee(P)%%% On définit P'
P2 :=fonction_derivee(P1)%%% On définit P''
P3 :=fonction_derivee(P2)%%% On définit P(3)
```

91 **1. a.** $\mathcal{T}_a : y = 2ax - a^2$ et $\mathcal{T}_b : y = 2bx - b^2$.

b. Puisque a et b sont deux réels distincts, les coefficients directeurs de $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_b$ sont différents, donc, ces deux droites sont sécantes.
La résolution du système $\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = 2bx - b^2 \end{cases}$ donne $\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = ab \end{cases}$. Le point I a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2} ; ab\right)$.

c. Le point J a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2} ; \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$. Les deux points I et J ont la même abscisse, donc, la droite (IJ) est parallèle à l'axe des ordonnées.

d. Le milieu K du segment [IJ] a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2} ; \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)$, donc le point K appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en K a pour équation $y = (a+b)x + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ et la droite (AB) a pour équation $y = (a+b)x - ab$, donc ces deux droites sont parallèles puisqu'elles possèdent le même coefficient directeur.

e. Supposons que l'on souhaite tracer la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
On choisit alors un autre B de la courbe, on place le milieu J du segment [AB], puis le point K situé sur la courbe à la verticale de J, puis le point I tel que K soit le milieu de [IJ]. La tangente cherchée n'est autre que (AI).

2. a. $\mathcal{T}_c : y = -\dfrac{1}{c^2}x + \dfrac{2}{c}$.

b. La droite $\mathcal{T}_c$ coupe l'axe des abscisses en un point D dont l'abscisse x vérifie
$-\dfrac{1}{c^2}x + \dfrac{2}{c} = 0$, donc, $x = 2c$.
Ainsi, D a pour coordonnées ($2c$; 0).
La droite $\mathcal{T}_c$ coupe l'axe des ordonnées en un point E dont l'abscisse y vérifie
$y = -\dfrac{1}{c^2} \times 0 + \dfrac{2}{c}$, donc, $y = \dfrac{2}{c}$.

Ainsi, E a pour coordonnées $\left(0 ; \dfrac{2}{c}\right)$.

c. Les coordonnées du milieu du segment [DE] sont $\left(\dfrac{2c+0}{2} ; \dfrac{0+\frac{2}{c}}{2}\right)$, c'est-à-dire, $\left(c ; \dfrac{1}{c}\right)$, donc, ce milieu n'est autre que le point C.

d. Supposons que l'on souhaite tracer la tangente à $\mathscr{C}_g$ en un point C d'abscisse c.
On place le point D de l'axe des abscisses ayant une abscisse égale au double de celle de C, et on place le point E de l'axe des ordonnées ayant une ordonnée égale au double de celle de D. La tangente cherchée n'est autre que la droite (DE).

Défis

92 Nous allons raisonner par double implication.

• Supposons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est en particulier dérivable en –1 et en 1.
Notons que si f est dérivable en a, alors, le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est proche de $f'(a)$ lorsque h tend vers 0, donc $f(a+h)-f(a)$ est proche de $h \times f'(a)$ (autrement dit, f est continue en a). Ainsi, la quantité $f(a+h)-f(a)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. En particulier, lorsque h est négatif, $f(-1+h)$ tend vers $f(-1)$, et lorsque h est positif, $f(1+h)$ tend vers $f(1)$. On en déduit que
$d - e + f = a - b + c$ et $d + e + f = a + b + c$.
On en déduit immédiatement par différence $b = e$ puis $d + f = a + c$. L'expression de f est donc donnée par :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ dx^2 + bx + a + c - d & \text{si } |x| > 1 \end{cases}.$$

La dérivabilité en –1 donne alors

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}, \text{ d'où}$$

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{\left(d(-1+h)^2 + b(-1+h) + a + c - d\right) - \left(a - b + c\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\left(a(-1+h)^2 + b(-1+h) + c\right) - (a - b + c)}{h}$$

$$\text{donc : } \lim_{h\to 0, h<0} \left(dh + (b - 2d)\right), = \lim_{h\to 0, h>0} \left(ah + (b - 2a)\right),$$

d'où $b - 2d = b - 2a$, ce qui entraîne $a = d$.
La dérivabilité en 1 donne elle :

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h},$$

d'où

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{\left(a(1+h)^2 + b(1+h) + c\right) - \left(a + b + c\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\left(d(1+h)^2 + b(1+h) + a + c - d\right) - (a + b + c)}{h}$$

$$\text{donc : } \lim_{h\to 0, h<0} \left(ah + (b + 2a)\right) = \lim_{h\to 0, h>0} \left(dh + (b + 2d)\right),$$

d'où $b + 2a = b + 2d$, ce qui entraîne $a = d$.
On en déduit que $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout réel x.

• Réciproquement, si f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alors, elle est bien entendu dérivable sur $\mathbb{R}$.

93 • Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ l'équation générale d'une fonction polynôme de degré 2 (avec a non nul). La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = (2a + b)(x - 1) + a + b + c$,

c'est-à-dire $y = (2a + b)x + c - a$.
Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet pour tangente $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 1 si et seulement si $a = c$ et $2a + b = 1$, c'est-à-dire, si et seulement si $a = c$ et $b = 1 - 2a$. L'ensemble des paraboles cherchées est donc précisément l'ensemble des paraboles d'équation
$f : x \mapsto ax^2 + (1 - 2a)x + a$.

• Une telle expression peut s'écrire sous la forme canonique :

$$f : x \mapsto a\left[x^2 + \frac{1-2a}{a}x + 1\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{1-2a}{2a}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1-2a}{2a}\right)^2\right],$$

donc, le sommet d'une telle parabole a pour coordonnées $\left(1 - \frac{1}{2a} ; 1 - \frac{1}{4a}\right)$.

• Lorsque a varie dans $\mathbb{R}^*$, ces sommets appartiennent à la droite d'équation
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

1. Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point du cercle $\mathscr{C}$. La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon (OA).

2. Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Remarquons que tous les points de ce cercle ont une abscisse x comprise entre –1 et 1. Cette équation est équivalente à $y^2 = 1 - x^2$. Les points du cercle se divisent donc en deux catégories :

• Ceux ayant une ordonnée y positive, qui vérifient donc $y = \sqrt{1 - x^2}$ et appartiennent à la courbe représentative de la fonction f.

• Ceux ayant une ordonnée y négative, qui vérifient donc $y = -\sqrt{1 - x^2}$ et appartiennent à la courbe représentative de la fonction g.

Tracer le cercle $\mathscr{C}$ revient donc exactement à tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

3. • Le point A appartient à la courbe représentative de la fonction f, et la tangente au cercle en A a pour équation

$$y = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -x + \sqrt{2}.$$

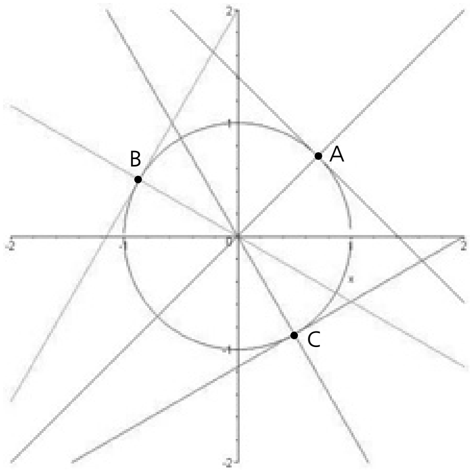
• Le point B appartient à la courbe représentative de la fonction f, et la tangente au cercle en B a pour équation

$$y = f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
$$= \sqrt{3}x + 2.$$

• Le point C appartient à la courbe représentative de la fonction g, et la tangente au cercle en C a pour équation

$$y = g'\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(x - \frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Traçons les trois tangentes sur un dessin : on constate que ces droites passent respectivement par les points A, B et C en étant respectivement perpendiculaires aux rayons (OA), (OB) et (OC) . Les deux définitions de la tangente coïncident sur ces exemples.



De manière plus générale, si a appartient à]–1 ; 1[, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a a pour équation

$$y = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} \times (x - a) + \sqrt{1 - a^2}$$

et est effectivement perpendiculaire au rayon (OA) qui a pour équation $y = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}x$.

Le même raisonnement peut s'appliquer pour les tangentes à $\mathscr{C}_g$.