Loi binomiale

Chapitre **11**

Ouverture

Si l'on dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et qui est parfaitement équilibré, chacun sait que, lors d'un lancer, la probabilité d'obtenir le nombre six est $\frac{1}{6}$. Mais les choses se compliquent un peu si l'on envisage d'effectuer 1 000 lancers successifs de ce dé : comme, à priori, le nombre de six obtenus est un entier compris entre 0 et 1 000, quelle « chance » a-t-on d'obtenir 1 000 fois le nombre six ? D'autre part si l'on divise le nombre de six obtenus par 1 000 pour former la fréquence d'apparition, obtient-on un nombre proche de $\frac{1}{6}$?

C'est à propos de telles questions, en apparence futiles, que se sont posés les premiers problèmes de la théorie des probabilités et les plus grands mathématiciens du XVII^{e} siècle et du XVIII^{e} siècle ont créé cette nouvelle science qui « scelle l'alliance de la rigueur mathématique et de l'incertitude du sort » (Pascal).

Cette théorie est utilisée dans des domaines très variés et l'estimation du nombre de loups n'en est qu'un exemple ; ce qui est intéressant est que l'on associe procédés génétiques et mathématiques.

Comme pour toutes les espèces d'animaux sauvages, le compte exact du nombre de loups présents dans les Alpes est impossible, à déterminer. Pour en avoir une estimation, on fait appel aux estimations dites par « capture-marquage-recapture ».

Historiquement développée dans le cas des oiseaux, capturés aux filets, marqués puis capturés à nouveau ultérieurement, on applique cette méthode aux loups mais évidemment sans capture effective. On détecte la présence de loups et on les marque par les signatures génétiques identifiées dans les excréments récoltés sur le terrain. Mathématiquement cette méthode s'appuie sur les résultats que l'on va découvrir dans ce chapitre et un exemple de calcul est développé dans le TP TICE 1.

Lorsqu'un loup est détecté et marqué, et qu'aux cours des années suivantes, il n'est plus détecté au moins trois hypothèses peuvent être envisagées :

- le loup est mort ;
- il est resté dans la zone étudiée mais n'a pas été détecté ;
- il s'est déplacé et a quitté la zone étudiée.

Il faudrait connaître les probabilités de ces différentes hypothèses. C'est délicat et par exemple pour la troisième hypothèse, qui est celle de la dispersion des sujets étudiés, on a pu constater qu'un loup détecté en 1997 et 1998 dans le Mercantour a été détecté en 1999 dans le massif de Belledonne qui est à 160 kilomètres !

Vérifier ses acquis

1 tableau 1 : **d.** tableau 2 : **c.**
tableau 3 : **a.** tableau 4 : **b.**

2 réponse **b.**

3 **a.** Vrai. **b.** Faux, il y en a trois.
c. Vrai. **d.** Faux.

4 **Ent(2*alea)** renvoie 0 ou 1 donc l'expérience pouvant être simulée par l'algorithme est : « je lance dix fois de suite une pièce de monnaie et X est égale au nombre de « pile » (le résultat pile correspond à 1 et face à 0) obtenus ».

5 réponse **b.**

Activités d'introduction

Le but de l'activité 1 (qui peut se faire rapidement et sans ordinateur ni calculatrice) est de bien faire comprendre la notion d'expériences indépendantes en étudiant les deux types de tirages sans et avec remise. L'activité 2 nécessite l'utilisation d'un tableur ; elle apprend comment simuler avec le tableur un tirage non équiprobable puis fait conjecturer à l'élève que la probabilité d'un chemin dans un arbre pondéré est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui composent ce chemin. L'activité 3 fait découvrir la loi binomiale en réalisant un arbre pondéré correspondant au schéma de Bernoulli, l'élève a en effet souvent besoin de réaliser lui-même un tel arbre et de compter « à la main » le nombre de chemins de l'arbre réalisant deux succès, par exemple, pour s'approprier pleinement la formule donnant $p(X = k)$ dans le cas où X suit une loi binomiale. L'activité 4, qui peut se faire en utilisant un tableur ou les listes de la calculatrice, fait conjecturer assez facilement la formule de l'espérance d'une loi binomiale.

Activité 1

1 Nous ne sommes pas dans le cadre de l'équiprobabilité car $p(\{1\}) \neq p(\{2\})$ (mais chaque boule a la même probabilité d'être tirée).

Résultat	1	2	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2 **a.** $p = \frac{1}{2}$.

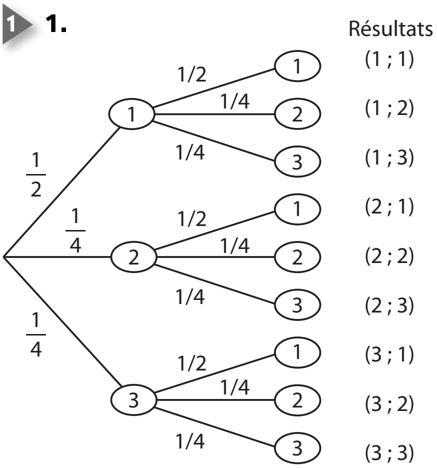
b. $q = \frac{1}{3}$.

c. $p \neq q$ car la composition de l'urne n'est pas la même lors des deux tirages, la composition de l'urne au deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage.

3 $p = q = \frac{1}{2}$ car lors de tirages avec remise la composition de l'urne est identique à chaque tirage, la composition de l'urne au deuxième tirage ne dépend pas du résultat du premier tirage ; on dit alors que les épreuves sont indépendantes.

Activité 2

1 **1.**



2 **a.** La formule rentrée en B3 renvoie 1 lorsque la valeur en A3 est 0 ou 1 et la valeur de A3 dans les autres cas (c'est-à-dire si A3 = 2 ou A3 = 3). Elle permet donc bien de simuler le tirage d'une boule d'une urne composée de deux boules numérotées 1, une boule numérotée 2 et une boule numérotée 3.

b. Si on multiplie les deux résultats obtenus à l'issue des deux tirages, la seule possibilité d'obtenir un produit égal à 1 est d'avoir obtenu le résultat (1 ; 1). Si tel est le cas, la formule rentrée en E3 renvoie 1 et 0 sinon.

c. @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

d. La fréquence semble tendre vers $\frac{1}{4}$.

3 Interprétation

Règle permettant de calculer la probabilité d'un chemin dans un arbre pondéré : on multiplie les probabilités inscrites sur les branches qui composent ce chemin.

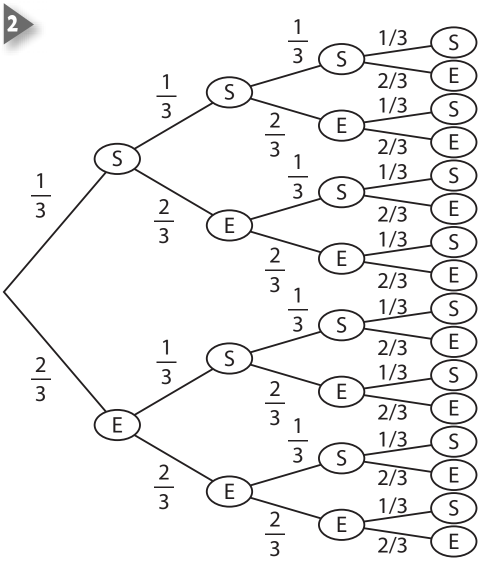
Résultat	Probabilité
(1 ; 1)	$\frac{1}{4}$
(1 ; 2)	$\frac{1}{8}$
(1 ; 3)	$\frac{1}{8}$
(2 ; 1)	$\frac{1}{8}$
(2 ; 2)	$\frac{1}{16}$
(2 ; 3)	$\frac{1}{16}$
(3 ; 1)	$\frac{1}{8}$
(3 ; 2)	$\frac{1}{16}$
(3 ; 3)	$\frac{1}{16}$

Activité 3

1 **1.** Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

Résultat	Succès	Échec
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2



3 **a.** p(« les quatre tirs sont des succès »)
$= \left(\frac{1}{3}\right)^4$.

b. p(« les deux premiers tirs sont des succès et les deux suivants des échecs »)
$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

c. p(« le premier et le dernier tir sont des succès et les deux autres des échecs »)
$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

On remarque que le résultat est identique à celui de la question **b.**

d. Il y a 6 chemins réalisant deux succès donc p(« le tireur réalise deux succès »)
$= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

4

Valeur x_i prise par X	Probabilité $p(X = x_i)$
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$
1	$4 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$
2	$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$
3	$4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)$
4	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$

Activité 4

1 **a.** L'épreuve « choisir un jour de la semaine » comporte deux issues contraires (c'est une épreuve de Bernoulli) qui sont :

- « Cédric est en retard » appelé succès de probabilité p;
- « Cédric n'est pas en retard » appelé échec de probabilité $1 - p$.

On répète 5 fois de façon indépendante cette épreuve. On réalise donc un schéma de 5 épreuves de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale de paramètres 5 et p.

2 **a.** @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

b. Pour passer de la première à la dernière colonne, il faut multiplier par 5 donc on conjecture que X a pour espérance

$E(X) = 5 \times p = n \times p$ où n est le nombre d'expériences réalisées.

Travaux pratiques

TP Algorithmique 1 Loi géométrique tronquée

1 **a.** La formule **Ent(2*alea)** fait prendre les valeurs 0 ou 1 de façon aléatoire à la variable Piece.

b. Voici un tableau possible :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3
i	0	1	2	3
Pièce	0	0	0	1
Tant que (Pièce == 0 ET i<3)	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
X				3

c. On considère une pièce de monnaie (et on décide par exemple que « face » correspond à la valeur 0 et « pile » à la valeur 1). On lance la pièce de monnaie jusqu'à la première apparition de « pile » et on effectue trois lancers au maximum.

X est égale au nombre de lancers effectués jusqu'à l'apparition du premier « pile » et à 0 si aucun « pile » n'a été obtenu au bout de trois lancers.

d.

Valeur x_i prise par X	0	1	2	3
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

e. E(X) = 1,375. Si on répète un grand nombre de fois l'expérience, le nombre moyen de lancers à effectuer avant l'obtention du 1er pile est 1,375.

2 **a.** $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$.

b. $p(X = 0) = (1 - p)^n$ et pour tout entier k compris entre 1 et n $p(X = k) = (1 - p)^k \times p$.

c. En utilisant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} p(X=k) = (1-p)^n + p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + \ldots + (1-p)^{n-1} p.$$

$$\sum_{k=0}^{n} p(X=k) = (1-p)^n + p[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots + (1-p)^{n-1}].$$

$$\sum_{k=0}^{n} p(X=k) = (1-p)^n + p\frac{1-(1-p)^n}{p}$$

$$= (1-p)^n + 1 - (1-p)^n = 1.$$

3 **a.** On a un schéma de 6 épreuves de Bernoulli de paramètre 0,12 (une épreuve est « le représentant rencontre un client » et le succès est « le représentant conclu une vente avec le client »). X est égale au numéro de l'épreuve qui apporte le premier succès et à 0 si aucune vente n'est réalisée donc X suit la loi géométrique tronquée de paramètres 6 et 0,12.

b. @fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

c. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

TP TICE 1 Probabilité maximale et principe de vraisemblance

1 **a.** @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

b.

p	Valeur(s) de k telle(s) que $p(X = k)$ est maximale	$p(n + 1)$
0,15	1	1,5
0,20	1 et 2	2
0,25	2	2,5
0,28	2	2,8
0,33	3	3,3
0,4	3 et 4	4

c. Il semble exister au minimum 1 et au maximum 2 valeurs de k telles que $p(X = k)$ est maximale.

d. On a deux valeurs de k lorsque $p(n + 1)$ est un entier. Dans ce cas, les valeurs de k sont $p(n + 1)$ et $p(n + 1) - 1$.

e. $k = E(p(n + 1))$ rend $p(X = k)$ maximale. On admettra ce résultat et on l'utilisera dans la question 2. (La démonstration nécessite l'expression de « k parmi n » avec les factorielles).

2 a. L'épreuve « prélever un écureuil » comporte deux issues contraires (c'est une épreuve de Bernoulli) qui sont :

- « L'écureuil est marqué » appelé succès de probabilité $\frac{60}{N}$.
- « L'écureuil n'est pas marqué » appelé échec.

On répète 60 fois de façon indépendante (car les tirages sont supposés être avec remise) cette épreuve. On réalise donc un schéma de 60 épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{60}{N}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc que X suit la loi binomiale de paramètres 60 et $\frac{60}{N}$.

b. $k = E(p(n+1)) = E\left(\frac{60}{N} \times 61\right)$ donc

$$k \leqslant \frac{3\,660}{N} < k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \geqslant \frac{N}{3\,660} > \frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\,660}{k} \geqslant N > \frac{3\,660}{k+1}$$

c. $k = 5$ donc $732 \geqslant N > 610$.

TP TICE 2 Échantillonnage

1 1. L'épreuve « choisir un individu de la population » comporte deux issues qui sont :

- succès : « L'individu possède le caractère », de probabilité p ;
- échec : « L'individu ne possède pas le caractère ».

On répète n fois de façon indépendante (car les tirages sont avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres n et p.

2. La variable aléatoire $\frac{X}{n}$ mesure la fréquence d'individus de la population possédant le caractère.

3. a. Tableau ci-dessous.

n	p	a	b	$\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$	$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$	$n \geqslant 30$	$np \geqslant 5$	$n(1-p) \geqslant 5$
10	0,4	1	7	[0,1 ; 0,7]	[0,08 ; 0,72]	non	non	oui
50	0,4	13	27	[0,26 ; 0,54]	[0,26 ; 0,54]	oui	oui	oui
100	0,4	31	50	[0,31 ; 0,50]	[0,3 ; 0,5]	oui	oui	oui
500	0,4	179	222	[0,358 ; 0,444]	[0,355 ; 0,445]	oui	oui	oui
50	0,03	0	4	[0 ; 0,08]	[−0,11 ; 0,17]	oui	non	oui
50	0,98	47	50	[0,94 ; 1]	[0,83 ; 1,12]	oui	oui	non

b. La formule **SI(ET(B2≤0,025;B3>0,025);A3;»»)** signifie : si $p(X \leqslant$ **A2**$) \leqslant 0,025$ et $p(X >$ **A3**$) > 0,025$ alors écrire le contenu de la cellule A3 et sinon ne rien écrire. Ainsi dans la colonne C n'apparaît qu'une seule valeur qui est bien le plus petit entier k pour lequel la probabilité cumulée $p(X \leqslant k)$ dépasse strictement 0,025. Dans la colonne D, il faut saisir la formule **SI(ET(B2<0,975;B3>=0,975);A3;»»)** qui permet d'obtenir le plus petit entier k pour lequel la probabilité cumulée $p(X \leqslant k)$ dépasse 0,975.

Remarque : dans le fichier Excel fourni, les colonnes B, C et D sont les colonnes C, D et E.

4. a. Lorsque $p = 0,4$, la représentation graphique de X est assez équilibrée (presque symétrique) et les grandes valeurs de $p(X = k)$ sont d'autant plus regroupées autour de la moyenne E(X) que n est grand. On peut aussi remarquer que pour $p = 0,4$ et $n = 500$, les sommets des bâtons semblent former une courbe (de Gauss) en forme de cloche.

Par contre lorsque p est très petit (0,03) ou très grand (0,98), la représentation graphique est très asymétrique et fortement regroupée à gauche ou à droite.

b. Lorsque p = 0,4, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation diminue lorsque la taille de l'échantillon augmente. L'intervalle de fluctuation est donc d'autant plus précis que la taille de l'échantillon est grande.

c. L'intervalle de fluctuation et l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ introduit en seconde sont très proches (quasiment confondus) lorsque les trois conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont réunies. Sinon, ils diffèrent de quelque peu à sensiblement.

2 Utilisation avec un test

a. L'épreuve « choisir une huître de la production » comporte deux issues qui sont :

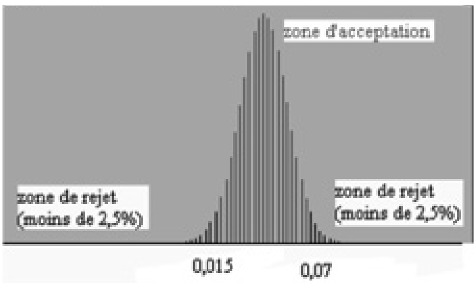
- succès : « L'huître est infectée par le parasite », de probabilité p = 0,04 ;
- échec : « L'huître n'est pas infectée ».

On répète 200 fois de façon indépendante (car les tirages sont considérés comme étant avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,04.

b. Voir le fichier Excel pour les valeurs a et b.
Si l'affirmation du producteur est correcte, l'intervalle J auquel doit appartenir la fréquence f des huîtres infectées de l'échantillon au seuil de risque de 5 % est

$$J = \left[\frac{3}{200}\ ;\ \frac{14}{200}\right] = [0{,}015\ ;\ 0{,}07].$$

c.



Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle [0,015 ; 0,07], l'hypothèse p = 0,04 est acceptable, sinon l'hypothèse p = 0,04 est rejetée au seuil de 5 %.

d. Avec le seuil de risque de 10 %, on a :

$$J = \left[\frac{4}{200}\ ;\ \frac{13}{200}\right] = [0{,}02\ ;\ 0{,}065].$$

Lorsque le seuil de risque augmente, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation diminue car il n'y a plus 5 mais 10 % des cas où la fréquence est extérieure à l'intervalle de fluctuation.

e. Sur l'échantillon observé, la fréquence est égale à f = 0,07 qui appartient à l'intervalle J = [0,015 ; 0,07], donc on décide d'accepter l'hypothèse p = 0,04 et on considère que l'affirmation du producteur est vraie, au seuil de risque 5 %.
Par contre, f n'appartient pas à l'intervalle [0,02 ; 0,065] donc au seuil de risque de 10 %, on décide de rejeter l'hypothèse p = 0,04 et on considère que l'affirmation du producteur est fausse.
On peut ainsi remarquer l'importance du seuil de risque qui lorsqu'il varie peut apporter des conclusions opposées.

TP TICE 3 La roue tourne

1 et **2** @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

3

Valeur s_i prise par S	Probabilité $p(S = s_i)$
3	$\frac{1}{27}$
4	$\frac{3}{27}$
5	$\frac{6}{27}$
6	$\frac{7}{27}$
7	$\frac{6}{27}$
8	$\frac{3}{27}$
9	$\frac{1}{27}$

4 Les fréquences des simulations sont du même ordre de grandeur que les probabilités mais ne sont pas très proches car seulement 100 expériences sont simulées.

5 Voici une possibilité : le joueur mise 2 €, il double sa mise si la somme des trois résultats est paire et perd sa mise sinon. L'espérance du joueur est alors égale à $\frac{-2}{27}$.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** oui. **b.** non. **c.** oui. **d.** non.

2 **a.** faux. **b.** faux. **c.** vrai. **d.** vrai.

3 **a.** faux. **b.** vrai. **c.** faux. **d.** faux. **e.** vrai.

4 **a.** faux, c'est $\binom{k}{n}$.

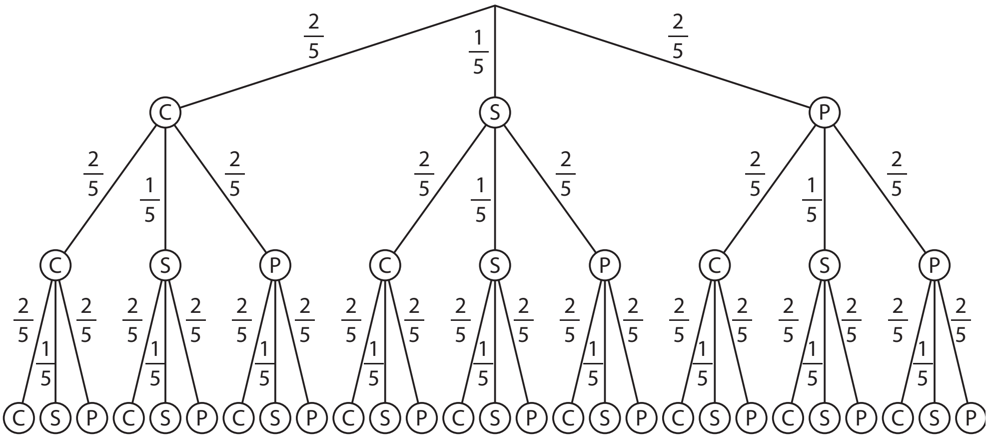
b. vrai. **c.** vrai. **d.** vrai.

5 **1. c.** **2. b.** **3. a.** **4. b.** et **c.**

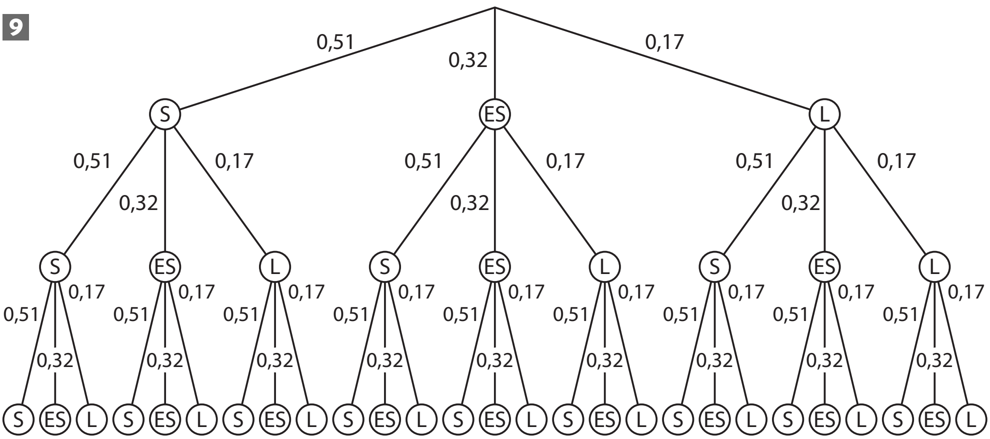
6 **1. b.** **2. c.**

---

8 Notons respectivement C, S et P les événements « l'enfant choisit un cube », « l'enfant choisit un cylindre » et « l'enfant choisit un parallélépipède droit ».



9



11

Valeur x_i prise par X	Probabilité $p(X = x_i)$
6	$\frac{1}{125}$
7	$\frac{6}{125}$
8	$\frac{12}{125}$
9	$\frac{14}{125}$
10	$\frac{24}{125}$
11	$\frac{24}{125}$
12	$\frac{12}{125}$
13	$\frac{24}{125}$
15	$\frac{8}{125}$

13 L'épreuve « prélever une souris » comporte deux issues contraires (c'est une épreuve de Bernoulli) qui sont :

- « La souris est saine » appelé succès de probabilité 0,88.
- « La souris n'est pas saine » appelé échec de probabilité 0,12.

On répète 2 fois de façon indépendante (car les tirages sont supposés être avec remise) cette épreuve. On réalise donc un schéma de 2 épreuves de Bernoulli de paramètre 0,88. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc que X suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,88.

14 L'épreuve « jouer une partie à la roulette » comporte deux issues contraires (c'est une épreuve de Bernoulli) qui sont :

- « La partie est remportée par Florian » appelé succès de probabilité $\frac{1}{37}$.
- « La partie n'est pas remportée par Florian » appelé échec de probabilité $\frac{36}{37}$.

On répète 15 fois de façon indépendante cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc que X suit la loi binomiale de paramètres 15 et $\frac{1}{37}$.

16 @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

18 **a.** $p(X = 2) = \binom{57}{2} \times 0{,}06^2 \times (1 - 0{,}06)^{55}$

$= 0{,}191$ à 10^{-3} près.

Il y a environ 19,1 % de chance que 2 ascenseurs sur les 57 tombent en panne un jour donné.

b. $p(X \leqslant 2) = 0{,}327$ à 10^{-3} près.

Il y a environ 32,7 % de chance qu'au plus 2 ascenseurs tombent en panne un jour donné.

c. $E(X) = 57 \times 0{,}06 = 3{,}42$.

Il y a donc, en moyenne, 3,42 ascenseurs en panne un jour donné.

19 **a.** $p(X = 15)$

$= \binom{200}{15} \times 0{,}025^{15} \times (1 - 0{,}025)^{185}$

$= 0{,}000126$ à 10^{-6} près.

Il y a environ 0,0126 % de chance que le singe tape 15 fois sur la lettre E.

b. $p(X \leqslant 15) = 0{,}99995$ à 10^{-5} près.

Il y a environ 99,995 % de chance que le singe tape au plus 15 fois sur la lettre E.

c. $E(X) = 200 \times 0{,}025 = 5$.

Donc le singe tape en moyenne 5 fois sur la lettre E.

21 @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

22 @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

On observe que la représentation de X est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 30$ (cette symétrie n'existe que pour $p = 0{,}5$).

24 **a.** Le nombre de chemins de l'arbre réalisant 10 succès lors des n premières expériences est $\binom{n}{10}$.

b. Le nombre de chemins de l'arbre réalisant 9 succès lors des n premières expériences est $\binom{n}{9}$.

c. $\binom{n+1}{10}$ est le nombre de chemins de l'arbre réalisant 10 succès lors de $n + 1$ expériences.

Un tel chemin est formé :

• soit de 10 succès lors des n premières expériences puis d'un échec, il y a $\binom{n}{10}$ tels chemins.

• soit de 9 succès lors des n premières expériences puis d'un succès, il y a $\binom{n}{9}$ tels chemins.

Donc $\binom{n}{9} + \binom{n}{10} = \binom{n+1}{10}$.

26 **a.** @ fichier Excel corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

b. $a = 25$ et $b = 38$.

c. $p(X \leqslant 25) + p(26 \leqslant X \leqslant 38) + p(X > 38)$
$= 1$ donc $p(26 \leqslant X \leqslant 38)$
$= 1 - p(X \leqslant 25) - p(X > 38)$.
Or $p(X \leqslant 25) \leqslant 0{,}025$ et $p(X > 38) \leqslant 0{,}025$
donc $p(26 \leqslant X \leqslant 38) \geqslant 0{,}95$
soit $p(0{,}26 \leqslant f \leqslant 0{,}38) \geqslant 0{,}95$

28 **a.** L'épreuve « choisir un utilisateur du laprosil » comporte deux issues qui sont :

• succès : « L'utilisateur ne souffre plus d'hypertension », de probabilité $p = 0{,}82$;

• échec : « L'utilisateur n'est pas guéri ».

On répète 150 fois de façon indépendante (car les tirages sont considérés comme étant avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 150 et 0,82.

b. $J = \left[\frac{114}{150} ; \frac{132}{150}\right] = [0{,}76 ; 0{,}88]$.

c. Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle [0,76 ; 0,88], l'hypothèse $p = 0{,}82$ est acceptable, sinon l'hypothèse $p = 0{,}82$ est rejetée au seuil de risque 5 %.

d. Sur l'échantillon observé, $f = \frac{116}{150}$ appartient à l'intervalle J = [0,76 ; 0,88], donc on décide d'accepter l'hypothèse $p = 0{,}82$ et on considère que l'affirmation de l'entreprise « Guéritout » est vraie.

29 **a.** L'épreuve « choisir un concurrent de la course » comporte deux issues qui sont :

• succès : « Le concurrent est dopé », de probabilité $p = 0{,}04$;

• échec : « Le concurrent n'est pas dopé ».

On répète 30 fois de façon indépendante (car les tirages sont considérés comme étant avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 30 et 0,04.

b. $J = \left[\frac{0}{30} ; \frac{4}{30}\right] = [0 ; 0{,}133]$.

c. Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle [0 ; 0,133], l'hypothèse $p = 0{,}04$ est acceptable, sinon l'hypothèse $p = 0{,}04$ est rejetée au seuil de risque 5 %.

d. Sur l'échantillon observé, $f = \frac{5}{30}$ n'appartient pas à l'intervalle $J = \left[0 ; \frac{4}{30}\right]$, donc on décide de rejeter l'hypothèse $p = 0{,}04$ et on considère que l'affirmation de l'organisateur de la course est fausse.

S'entraîner

30 **1. a.** 0,04.

b. $\frac{1}{49} \approx 0{,}02$ résultat très différent du **a.**

2. a. 0,04. **b.** $\frac{399}{9\,999} \approx 0{,}0399$.

3. Dans le second cas, la probabilité concernant le second tirage est très très proche de celle du premier tirage, on pourra donc considérer les expériences comme indépendantes.

31 **a.** $\left(\frac{5}{10}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{500}$.

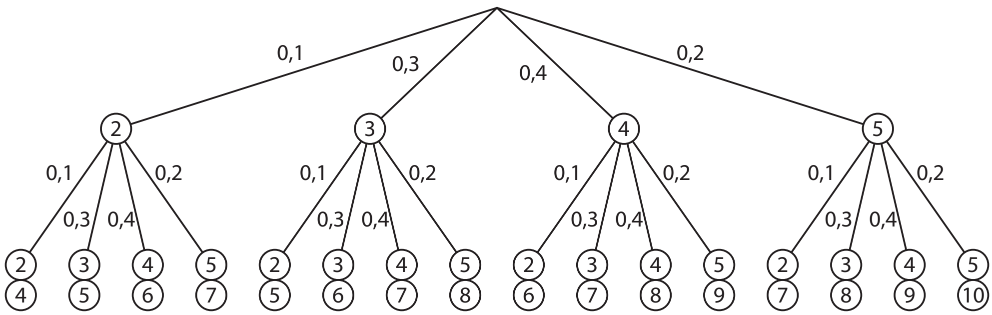
b. $\left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{64}{15\,625}$.

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^6 + \left(\frac{1}{10}\right)^6 + \left(\frac{5}{10}\right)^6 = \frac{9\,861}{500\,000}$.

d. $6 \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{324}{625}$.

e. $1 - p$(aucun feu n'est vert)
$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$.

32 **1.**



2. $p(\text{A}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$. $p(\text{B}) = 0{,}4^2 = 0{,}16$.
$p(\text{C}) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}06$.

3. a. $p(\text{X} = 10) = p$(le joueur marque 5 buts à chacune des deux séries) $= 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}2^2$.

D'après l'arbre pondéré, on a :

$$p(\text{X} = 7) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}28$$

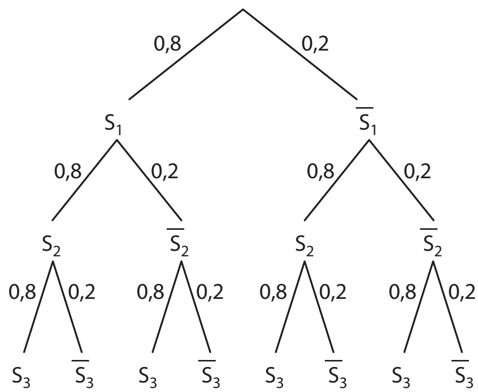
b.

Valeur x_i prise par X	Probabilité $p(\text{X} = x_i)$
4	0,01
5	0,06
6	0,17
7	0,28
8	0,28
9	0,16
10	0,04

c. $p(\text{X} \geqslant 5) = 1 - p(\text{X} = 4) = 0{,}99$.

d. $\text{E}(\text{X}) = 7{,}4$ qui représente le nombre moyen de buts marqués au cours de deux séries de tirs au but par un joueur de l'équipe.

33 **1. a.** Notons Si l'événement « Julien réussi son i-ième tir »



b. p(Julien réussi ses deux tirs)
$= 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$.
p(Julien rate ses deux tirs) $= 0{,}2^2 = 0{,}04$.

c. $1 - 0{,}64 - 0{,}04 = 0{,}32$.

2. a. Voir question **1.**

b. p(Julien réussi ses trois tirs) $= 0{,}8^3 = 0{,}512$.

c. p(Julien rate au moins un tir)
$= 1 - p$(Julien réussi ses trois tirs)
$= 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

d. p(Julien rate exactement un tir)
$= 3 \times 0{,}2 \times 0{,}8^2 = 0{,}384$.

D'après l'arbre pondéré, on a :

$$p(\text{X} = 7) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}28$$

3. On cherche n tel que $1 - 0{,}8^n > 0{,}9$ soit $0{,}8^n < 0{,}1$. Avec la calculatrice, on peut par exemple utiliser la table de la fonction $x \mapsto 0{,}8^x$, on trouve $n \geqslant 11$.

34 **1.** On tire successivement et avec remise deux boules d'une urne comportant 20 % de boules n° 1, 50 % de boules n° 2 et 30 % de boules n° 3 et on note le numéro de la boule obtenue après chaque tirage.

35 **1.** L'épreuve « prélever une résistance de la production» comporte deux issues qui sont :

• succès – « La résistance est défectueuse », de probabilité $p = 0{,}005$;

• échec – « La résistance n'est pas défectueuse ».

On répète 1 000 fois de façon indépendante (car les prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,005.

2. a. $p(X=2)=\binom{1\,000}{2}\times 0{,}005^2\times 0{,}995^{998}$

$\approx 0{,}084.$

b. $p(X \leqslant 2) \approx 0{,}124$.

c. $p(X \geqslant 2) = 1 - p(X < 2) \approx 0{,}9599$.

2. $E(X) = 1\,000 \times 0{,}005 = 5$ qui représente le nombre moyen de résistances défectueuses dans un lot de 1 000 résistances.

36 **1. a.** L'épreuve « choisir une moto » comporte deux issues qui sont :

• succès – « La moto est volée au cours de l'année », de probabilité $p = 0{,}01$;

• échec – « La moto n'est pas volée au cours de l'année ».

On répète 10 fois de façon indépendante cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,01.

b. $p(X = 0) = 0{,}99^{10} \approx 0{,}904$.

$p(X = 1) = 10 \times 0{,}01 \times 0{,}99^9 \approx 0{,}091$.

$p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}01^2 \times 0{,}99^8 \approx 0{,}004$.

$p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) \approx 0{,}995$.

$p(X \leqslant 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$

$\approx 0{,}999$.

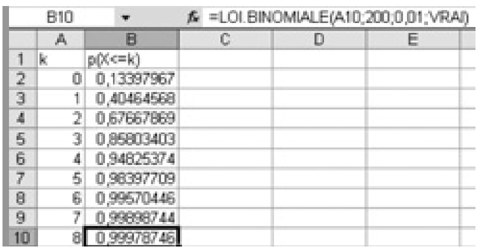
Donc le plus petit entier k à partir duquel $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}999$ est 2.

c. Les provisions de l'assurance doivent être de $2 \times 4\,500 = 9\,000$ € soit un coût de 900 € par assuré.

2. En utilisant un tableur ou la calculatrice, on trouve que le plus petit entier k à partir duquel $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}999$ est 8. Les provisions de l'assurance doivent alors être de $8 \times 4\,500 = 36\,000$ € soit un coût de

$\frac{36\,000}{200} = 180$ € par assuré.

On remarque que plus le nombre d'assurés est grand et moins le coût par assuré est important.



B10 =LOI.BINOMIALE(A10;200;0,01;VRAI)

	A	B	C	D	E
1	k	p(X<=k)			
2	0	0,13397967			
3	1	0,40464568			
4	2	0,67667869			
5	3	0,85803403			
6	4	0,94825374			
7	5	0,98397709			
8	6	0,99570446			
9	7	0,99898744			
10	8	0,99978746			

37 **a.** La variable aléatoire Y égale au nombre de contrôles où un lecteur MP3 est rejeté suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,106.

Valeur y_i prise par Y	Probabilité $p(Y = y_i)$	Valeur g_i prise par G	Probabilité $p(G = g_i)$
0	0,63878	70	0,63878
1	0,30296	10	0,30296
2	0,05388		
3	0,00426	−50	0,05827
4	0,00013		

b. $E(G) \approx 44{,}83$ qui représente le gain moyen de l'entreprise par lecteur MP3 fabriqué.

38 **a. b.** @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

Le calcul de la fréquence de gagner au moins une partie (variable p) a été rajoutée à l'algorithme pour permettre la comparaison demandée dans la question **c.**

c. @ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee

D'après les simulations, avec 4 parties la fréquence de gagner au moins une partie est de l'ordre de 0,4 et avec 8 parties elle est de l'ordre de 0,6. Les chances de gagner au moins une partie ne sont donc pas doublées lorsque l'on double le nombre de parties.

39 • Dans la justification de la loi binomiale, il manque l'indépendance des 10 expériences aléatoires et le fait que X compte le nombre de succès.

• Il faut calculer $1 - p(X = 0)$ et non $1 - p(X = 1)$.

40 Si le policier ne s'est pas fait leurrer c'est qu'il y avait effectivement 2 daltoniennes sur les 45 conductrices. La variable aléatoire X égale au nombre de daltoniennes suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(45\,;\frac{25}{10\,000}\right)$,

$p(X=2)=\binom{45}{2}\times\left(\frac{25}{10\,000}\right)^2\times\left(1-\frac{25}{10\,000}\right)^{43}$

soit environ 0,56 %.

Il y a donc environ 99,44 % de chance que le policier se soit fait leurrer.

41 **1. a.** L'épreuve « interroger un élève au hasard » comporte deux issues qui sont :

• succès : « L'élève est une fille », de probabilité $p = \frac{2}{3}$;

• échec : « L'élève est un garçon ».

On répète n fois de façon indépendante cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

b. Si X suit la loi $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{2}{3}\right)$ alors

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx 0{,}329.$$

c. Si X suit la loi $\mathcal{B}\left(5\,;\frac{2}{3}\right)$ alors

$$p(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0{,}004.$$

2. L'algorithme renvoie la plus petite valeur entière n telle que

$p(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ soit inférieur à 0,001,

c'est-à-dire le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001. On obtient $n = 7$.

3. $44 \times \left(\frac{2}{3}\right) \approx 29{,}3$ qui représente le nombre moyen de cours durant lequel une fille est interrogée par trimestre.

42 **a.** L'épreuve « tirer une boule de l'urne » comporte deux issues qui sont :

• succès : « La boule est blanche », de probabilité $p = \frac{r}{t}$;

• échec : « La boule n'est pas blanche », de probabilité $\frac{s}{t}$.

On répète nt fois de façon indépendante cette épreuve. La variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres nt et $\frac{r}{t}$.

b. $p(X = k) = \binom{nt}{k} \times \left(\frac{r}{t}\right)^k \times \left(\frac{s}{t}\right)^{nt-k}$.

43 La variable aléatoire X égale au nombre de pannes suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,; 10^{-4})$.
$p(X = 1) = 100 \times 10^{-4} \times (1 - 10^{-4})^{99}$ soit environ $9{,}9 \times 10^{-3}$ qui est très proche de $\frac{1}{100}$ donc la réponse est correcte.

44 $\binom{10}{k}$ est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès, les rôles des succès et des échecs étant symétriques dans l'arbre (si on intervertit succès et échec, on obtient le même arbre), c'est aussi le nombre de chemins réalisant k échecs. Un tel chemin comportant $10 - k$ succès, $\binom{10}{k}$ est le nombre de chemins réalisant $10 - k$ succès soit $\binom{10}{10-k}$ par définition du coefficient binomial.

45 $\binom{122}{0} = 1$; $\binom{13}{13} = 1$; $\binom{215}{1} = 215$;
$\binom{13}{3} - \binom{13}{10} = 0$; $\binom{17}{16} = 17$;
$\binom{100}{96} - \binom{99}{95} - \binom{99}{96} = 0.$

46

n=0	1							
n=1	1	1						
n=2	1	2	1					
n=3	1	3	3	1				
n=4	1	4	6	4	1			
n=5	1	5	10	10	5	1		
n=6	1	6	15	20	15	6	1	
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1

47 **a.** voir corrigé de l'exercice **46.**

b. $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.
On remarque que les coefficients 1, 3, 3, 1 sont ceux de la ligne du triangle de Pascal correspondant à $n = 3$.

c. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
On remarque que les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 sont ceux de la ligne du triangle de Pascal correspondant à $n = 4$.

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

On remarque que les coefficients 1, 5, 10, 10, 5, 1 sont ceux de la ligne du triangle de Pascal correspondant à $n = 5$.

d. On conjecture $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, puis on vérifie la résultat avec un calculateur formel.

e. $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$.

48 **1. a.** La relation de Pascal se retrouve à la ligne «L[j+1] prend_la_valeur K[j] + K[j+1]».

b. La liste K correspond à la ligne du tableau qui est connue (initialement, K correspond à la ligne $n = 2$). On détermine alors les coefficients de la ligne suivante qui composent la liste L ; K prend ensuite les valeurs de L pour pouvoir réitérer l'opération.

Toutes les données du tableau ne sont donc pas mémorisées, seules les données de la ligne précédente sont stockées car elles suffisent à déterminer les coefficients de la ligne suivante.

c. Les lignes 2 à 4 correspondent à l'initialisation de la liste K : 1, 2 et 1 sont les coefficients binomiaux correspondants à $n = 2$, ainsi au début de l'algorithme K = [1 ; 2 ; 1].

d. On utilise la propriété $\binom{n}{0} = 1$ à la ligne «L[0] prend_la_valeur 1».

On utilise la propriété $\binom{n}{n} = 1$ à la ligne «L[i] prend_la_valeur 1».

2. • On se donne une valeur de n.

• On initialise la liste K avec les valeurs [1 ; 2 ; 1].

• Pour i allant de 3 à n on va calculer ligne par ligne les valeurs du tableau, la ligne suivant K est appelée L.

• L[0] vaut 1.

• On calcule toutes les valeurs de L de L[1] à L[i-1] en utilisant la relation de Pascal avec les valeurs de la ligne précédente stockées dans K.

• La dernière valeur L[i] de la ligne L vaut 1.

• Toutes les valeurs de la ligne L sont stockées dans la ligne K et ce jusqu'à $i = n$.

• Les valeurs de la liste correspondant aux coefficients de la ligne n sont affichés.

49 **a.** L'épreuve « choisir une utilisatrice de la crème anti-rides Noreal » comporte deux issues qui sont :

• succès : « La consommatrice est satisfaite », de probabilité $p = 0{,}78$;

• échec : « La consommatrice n'est pas satisfaite ».

On répète 200 fois de façon indépendante (car les tirages sont considérés comme étant avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,78.

b. $J = \left[\frac{144}{200} ; \frac{167}{200}\right] = [0{,}72 ; 0{,}835]$.

c. Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle [0,72 ; 0,835], l'hypothèse $p = 0{,}78$ est acceptable, sinon l'hypothèse $p = 0{,}78$ est rejetée au seuil de risque 5 %.

d. Sur l'échantillon observé, $f = 0{,}71$ n'appartient pas à l'intervalle J = [0,72 ; 0,835], donc on décide de rejeter l'hypothèse $p = 0{,}78$ et on considère que l'affirmation de Noreal est fausse.

e. X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,78 et J = [0,70 ; 0,86]. Dans ce cas f appartient à J et on décide d'accepter l'hypothèse $p = 0{,}78$ et on considère que l'affirmation de Noreal est vraie.

On remarque que pour une même fréquence la taille de l'échantillon peut amener à des conclusions contraires (plus la taille de l'échantillon est grande et plus l'amplitude de l'intervalle de fluctuation est petite).

50 **a.** Si le joueur ne triche pas, nous sommes en situation d'équiprobabilité et

$p = \frac{4}{32} = 0{,}125$.

L'épreuve « piocher une carte » comporte deux issues qui sont :

• succès : « La carte est un as », de probabilité $p = 0{,}125$;

• échec : « La carte n'est pas un as ».

On répète 400 fois de façon indépendante (car les tirages sont avec remise) cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 400 et 0,125.

b. $a = 61$.

c. $p(X \leqslant a) \geqslant 0{,}95$ équivaut à

$p\left(\frac{X}{400} \leqslant \frac{a}{400}\right) \geqslant 0{,}95$ donc la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle

$\left[0\,;\dfrac{a}{400}\right]$ dans au moins 95 cas sur 100.

L'intervalle $\left[0\,;\dfrac{a}{400}\right]$ est un intervalle de fluctuation à 95 % mais non centré en p.

d. Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle $J = \left[0\,;\dfrac{61}{400}\right] = [0\,;0{,}1525]$, l'hypothèse $p = 0{,}125$ est acceptable, sinon l'hypothèse $p = 0{,}125$ est rejetée au seuil de risque 5 %.

Sur l'échantillon observé, $f = \dfrac{63}{400} = 0{,}157$ n'appartient pas à l'intervalle J donc on décide que le joueur est un tricheur. Nous venons de réaliser un test unilatéral.

51 **1.**

	1^er élevage	2^e élevage	Total
Ne survivront pas après 3 mois	12	4	16
Deviendront rouges	90	52	142
Deviendront gris	18	24	42
Total	120	80	200

2. a. La probabilité que le poisson soit mort à l'âge de trois mois est $\dfrac{16}{200} = 0{,}08$ donc la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois après son achat est de $1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

b. La probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge est de $\dfrac{14}{200} = 0{,}71$.

c. $\dfrac{18}{42} \approx 0{,}43$.

3. La variable aléatoire Y égale au nombre d'alevins encore en vie à l'âge de trois mois suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,92. La probabilité demandée est :

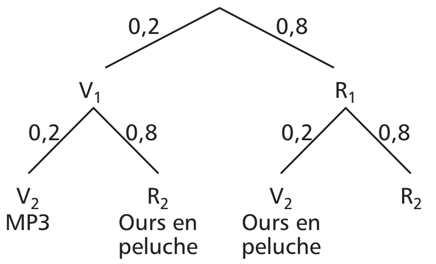
$$p(Y = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}92^3 \times 0{,}08^2 \approx 0{,}05.$$

4.

Valeur x_i prise par X	1	0,25	−0,10
Probabilité $p(X = x_i)$	0,71	0,21	0,08

$E(X) \approx 0{,}75$ € qui représente le gain moyen de l'animalerie par poisson acheté.

52 **a.** On note V_i l'événement « tirer une boule verte au i-ième tirage » et R_i l'événement « tirer une boule rouge au i-ième tirage ».



p(« gagner un lecteur MP3 ») $= 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$.

b. p(« gagner un ours en peluche ») $= 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}32$.

c. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de gagnants d'un lecteur MP3.
L'épreuve aléatoire « jouer une partie » comporte deux issues qui sont :
- succès : « Le joueur gagne un lecteur MP3 », de probabilité $p = 0{,}04$;
- échec : « Le joueur ne gagne pas un lecteur MP3 ».

On répète 20 fois de façon indépendante cette épreuve. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,04.

$$p(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0{,}04^2 \times 0{,}96^{18} \approx 0{,}146.$$

d. X suit la loi binomiale de paramètres n et 0,04.
$p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}96^n$.
$p_n \geqslant 0{,}99$ équivaut à $0{,}96^n \leqslant 0{,}01$ équivaut à $n \geqslant 113$.
@ fichier Algobox corrigé disponible sur www.libtheque.fr/mathslycee
À partir de 113 joueurs à la loterie, il y a plus de 99 % de chances qu'au moins un participant remporte un lecteur MP3.

Pour aller plus loin

58 $$p(X \leqslant 4) = \sum_{k=0}^{4} \binom{9}{k} \frac{1}{2^9} = \sum_{k=0}^{4} \binom{9}{9-k} \frac{1}{2^9} = \sum_{k'=5}^{9} \binom{9}{k'} \frac{1}{2^9} = p(X > 4)$$

en posant $k' = 9 - k$. Or $p(X > 4) = 1 - p(X \leqslant 4)$ donc $p(X \leqslant 4) = 1 - p(X \leqslant 4)$,

soit $p(X \leqslant 4) = \dfrac{1}{2}$.

59 **a.** La proposition 1 est vraie car :

$p(X = 1) = 4\,p(X = 0)$

$\Leftrightarrow 3p(1-p)^2 = 4(1-p)^3$

$\Leftrightarrow (1-p)^2[3p - 4(1-p)] = 0$

$\Leftrightarrow (1-p)^2(7p - 4) = 0 \Leftrightarrow p = 1$

ou $p = \dfrac{4}{7} \Leftrightarrow p = \dfrac{4}{7}$ car $0 < p < 1$.

La proposition 2 est vraie car :

$p(X = 1) = p(X = 0)$

$\Leftrightarrow 3p(1-p)^2 = (1-p)^3$

$\Leftrightarrow (1-p)^2[p - (1-p)] = 0$

$\Leftrightarrow (1-p)^2(2p - 1) = 0$

$\Leftrightarrow p = 1$ ou $p = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$ car $0 < p < 1$.

b. La proposition 3 est fausse car :

$p(X = 1) = p(X = 0)$

$$\Leftrightarrow n \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{n}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\right] = 0$$

$\Leftrightarrow n = 3$.

c. La proposition 3 rectifiée est :

Si $p(X = 1) = p(X = 0)$ alors $n = 3$.

Les réciproques des trois propositions sont vraies car toutes nos preuves sont faîtes d'équivalences.

60 **a.** On considère la variable aléatoire X égale au nombre de skis qui se décrochent.

Avec deux skis : X suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,4.

p(« Plume tombe ») $= p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$
$= 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64$.

Avec quatre skis : X suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,4.

p(« Plume tombe ») $= p(X \geqslant 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0{,}6^4 - 4 \times 0{,}4 \times 0{,}6^3 = 0{,}5248$.

$0{,}64 > 0{,}5248$, Plume a plus de chances de tomber s'il chausse deux skis, on lui conseille donc d'en chausser quatre.

b. Avec deux skis : X suit la loi binomiale de paramètres 2 et $1 - p$.

p(« Plume tombe ») $= p(X \geqslant 1)$
$= 1 - p(X = 0) = 1 - p^2$.

Avec quatre skis : X suit la loi binomiale de paramètres 4 et $1 - p$.

p(« Plume tombe ») $= p(X \geqslant 2)$
$= 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$
$= 1 - p^4 - 4 \times (1 - p) \times p^3$
$= 1 - 4p^3 + 3p^4$.

Plume a intérêt à chausser quatre skis

$\Leftrightarrow 1 - p^2 \geqslant 1 - 4p^3 + 3p^4$

$\Leftrightarrow p^2(-3p^2 + 4p - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant p \leqslant 1$.

61 **1. a.** p(« toutes les boules tirées sont de la même couleur ») $= p$(« toutes les boules tirées sont noires ») $+ p$(« toutes les boules tirées sont blanches ») $= \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. p(« obtenir exactement une boule blanche ») $= n \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{n}{2^n}$.

c. $A \cap B$: « obtenir exactement une boule blanche » donc $p(A \cap B) = \dfrac{n}{2^n}$.

$p(A) = 1 - p$(« toutes les boules tirées sont de la même couleur ») $= 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

$p(B) = p$(« toutes les boules tirées sont noires ») $+ p$(« obtenir exactement une boule blanche ») $= \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n+1}{2^n}$.

2. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{2n-1}}$$

$$\Leftrightarrow n = n + 1 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2^{n-1}} = 1$$

si et seulement si $2^{n-1} = n + 1$.

3. a. $u_2 = -1$, $u_3 = 0$ et $u_4 = 3$.

b. $u_{n+1} - u_n = 2^n - (n + 2) - 2^{n-1} + n + 1$
$= 2^{n-1}(2 - 1) - 1 = 2^{n-1} - 1$.

Or $n \geqslant 2$ donc $n - 1 \geqslant 1$ d'où $2^{n-1} \geqslant 2$ ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) strictement croissante.

4. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow u_n = 0 \Leftrightarrow n = 3$ (car $u_2 < 0$, $u_3 = 0$ et $u_n > 0$ si $n \geqslant 4$).

62 **a.** On considère la variable aléatoire X égale au nombre de parties d'échec gagnées par Grégoire. X suit la loi binomiale de paramètres n et 0,6.

p(« Grégoire gagne au moins deux parties »)
$= p(X \geqslant 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$
$= 1 - 0{,}4^n - 0{,}6n \times 0{,}4^{n-1} = 1 - 0{,}4^{n-1}$
$\times \left(\dfrac{4 + 6n}{10}\right) = 1 - \dfrac{u_n}{10}$.

b. $u_{n+1} - u_n = 0{,}4^n(10 + 6n) - 0{,}4^{n-1}(4 + 6n)$
$= 0{,}4^{n-1}(4 + 2{,}4n - 4 - 6n) = -3{,}6 \times 0{,}4^{n-1}$.
Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et (u_n) strictement décroissante d'où $\left(1 - \dfrac{u_n}{10}\right)$ est une suite croissante.

c. En utilisant la table de valeurs de la suite $\left(1 - \dfrac{u_n}{10}\right)$, on trouve que Grégoire a plus de 90 % de chances de gagner au moins deux parties à partir de 5 parties.

63 **1. a.**

	A	A
A	AA	AA
a	A*a*	A*a*

L'enfant sera donc du type AA ou A*a* avec des probabilités égales à $\dfrac{1}{2}$.

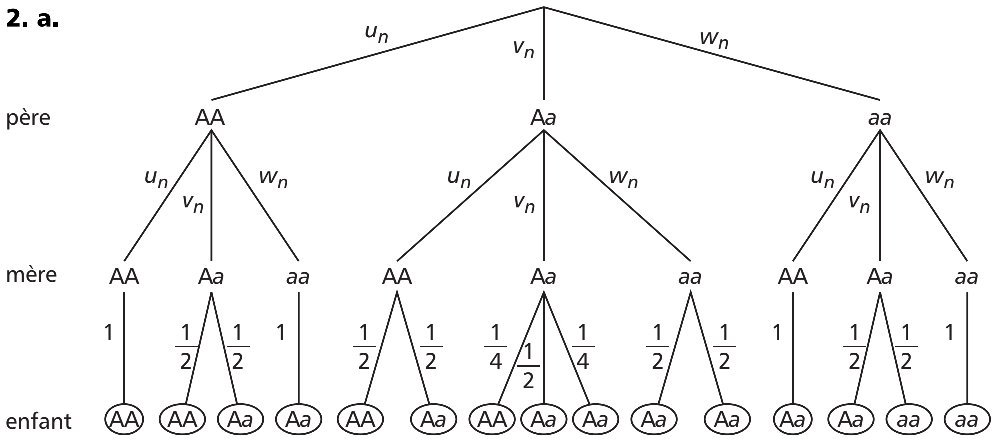
b.

	A	*a*
A	AA	A*a*
a	A*a*	*aa*

L'enfant sera donc du type AA, *aa* ou Aa avec des probabilités égales respectivement à $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$.

c. Si les deux parents ont le génotype AA, l'enfant sera nécessairement du type AA et si un parent a le génotype AA et l'autre *aa*, l'enfant sera nécessairement du type A*a*.

2. a.



b. $u_{n+1} = p$(« l'enfant est du type AA »)
$$= u_n \times u_n + \left(\frac{1}{2}\right) u_n \times v_n + \left(\frac{1}{2}\right) u_n \times v_n + \left(\frac{1}{4}\right) v_n \times v_n$$
$$u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n \times v_n + \left(\frac{1}{4}\right)(v_n)^2$$
donc $u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{v_n}{2}\right)^2$.

Comme $w_{n+1} = p$(« l'enfant est du type *aa* »), on montre de même que $w_{n+1} = \left(w_n + \dfrac{v_n}{2}\right)^2$.

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} - w_{n+1} = 1 - \left(u_n + \frac{v_n}{2}\right) - \left(w_n + \frac{v_n}{2}\right)^2.$$

c. $u_{n+1} - w_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{v_n}{2}\right)^2 - \left(w_n + \dfrac{v_n}{2}\right)^2$
$= u_n(u_n + v_n) - w_n(w_n + v_n)$
$= u_n(1 - w_n) - w_n(1 - u_n)$.

$u_{n+1} - w_{n+1} = u_n - w_n$, donc la suite $(u_n - w_n)$ est constante et pour tout entier naturel n, on pose $u_n - w_n = k$.

d. $u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{v_n}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2u_n + v_n}{2}\right)^2$

or $2u_n + v_n = u_n + u_n + v_n = 1 - v_n - w_n + u_n + v_n = 1 + u_n - w_n = 1 + k$

donc $u_{n+1} = \left(\dfrac{1+k}{2}\right)^2$.

On montre de même que $w_{n+1} = \left(\dfrac{1-k}{2}\right)^2$.

$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} - w_{n+1}$

$= 1 - \left(\dfrac{1+k}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-k}{2}\right)^2$

$= \dfrac{4 - 1 - 2k - k^2 - 1 + 2k - k^2}{4} = \dfrac{1-k^2}{2}$.

e. Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont donc des suites constantes à partir du rang 1.

64 **1. a.** Le nombre de chemins de l'arbre réalisant 0 succès est $\binom{n}{0}$, un succès est $\binom{n}{1}$, deux succès est $\binom{n}{2}$, …, n succès est $\binom{n}{n}$.

b. Le nombre de chemins de l'arbre est donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. a. Si $n = 2$ alors quatre chemins composent l'arbre, si $n = 3$ alors huit chemins composent l'arbre et si $n = 4$ alors seize chemins composent l'arbre.

b. De façon générale, 2^n chemins composent l'arbre.

3. On déduit que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

ainsi $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = 2^5 = 32$.

65 Les lancers de dés étant indépendants, la probabilité que Lucas gagne au premier tour est $p = \left(\dfrac{1}{2}\right) \times \left(\dfrac{4}{6}\right) \times \left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{18}$ (Jasmine ne gagne pas, Karine ne gagne pas et Lucas fait un 6). La probabilité que personne ne gagne au cours d'un tour vaut

$q = \left(\dfrac{1}{2}\right) \times \left(\dfrac{4}{6}\right) \times \left(\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{5}{18}$.

Donc la probabilité que Lucas gagne au second tour est qp, la probabilité que Lucas gagne au troisième tour est q^2p, etc.

La probabilité que Lucas gagne est donc :

$p(1 + q + q^2 + \ldots) = \dfrac{p}{(1-q)}$ (car la limite de $\dfrac{(1-q^n)}{(1-q)}$ est $\dfrac{1}{(1-q)}$ en $+\infty$), soit $\dfrac{\frac{1}{18}}{\left(1 - \frac{5}{18}\right)} = \dfrac{1}{13}$.

66 On considère la variable aléatoire X égale au nombre de six obtenus. X suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{6}$. Le jeu est équitable si et seulement si $p(X = 1) = p(X = 0)$

$\Leftrightarrow n \times \left(\dfrac{1}{6}\right) \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \left[\left(\dfrac{n}{6}\right) - \left(\dfrac{5}{6}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow n = 5$.

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

Soit p la probabilité de gagner le jeu (on suppose que $0 < p < 1$) et X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées au bout de n parties. X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

p(« gagner au moins une partie »)
$= 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$.

$0 < 1 - p < 1$ donc $(1 - p)^n$ s'approche de 0 lorsque n est grand donc la probabilité de gagner au moins une fois une partie s'approche de 1 quand n est grand.

Concernant les différentes martingales, de nombreuses informations se trouvent, par exemple, sur le site « wikipedia.org ». Voici néanmoins quelques exemples :

On considère que l'on joue à la roulette et que l'on mise 1 € sur rouge, par exemple, à chaque partie. Appelons n le numéro de la première partie gagnante.

– la martingale simple ou montante géométrique :

Il s'agit de doubler sa mise après chaque partie perdue. Le joueur a perdu

$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ €

pendant les $n - 1$ premières parties et il a gagné 2^n € à la n-ième partie, son gain est donc de $2^n - (2^n - 1) = 1$ € (le joueur a un gain net égal à sa mise de départ).

Le problème de cette stratégie est que les sommes mises en jeu deviennent vite conséquentes et de plus les casinos plafonnent les mises sur une partie.

– la montante d'Alembert :

Il s'agit d'augmenter la mise d'un euro après chaque partie perdue. Le joueur a perdu

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ €

pendant les $n - 1$ premières parties et il a gagné n € à la n-ième partie, son gain est donc de $n - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n}{2}(3 - n)$ €.

Le joueur n'est donc bénéficiaire (avec une seule série) que si $n \leqslant 3$, sinon il doit réitérer sa stratégie.

Une variante est « la Piquemouche » où le joueur double sa mise après 3 pertes consécutives.

– la montante Whittacker :

Il s'agit de doubler la mise après une défaite et si on perd à nouveau, la mise suivante est la somme des deux mises précédentes. Cela conduit à la suite de Fibonacci.