Chapitre 8

Produit scalaire

Ouverture

Depuis l'antiquité on savait que, si en tirant sur une corde, on souhaitait déplacer un corps selon un chemin rectiligne, l'effort à développer dépendait de l'inclinaison de la corde par rapport à la direction du chemin. Pourtant il a fallu attendre le XIXe siècle pour que la notion de travail d'une force apparaisse en Sciences Physiques et pour que celle de produit scalaire apparaisse en Mathématiques.
C'est le mathématicien allemand Grassmann qui, en 1839, dans sa thèse, introduit, pour deux vecteurs, le produit de l'un de ces vecteurs par la projection du second sur le premier ; mais ses travaux furent ignorés de ses contemporains. On trouve ensuite trace du produit scalaire chez Hamilton, chez Gibbs, etc, et la définition adoptée dans ce chapitre, qui utilise le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs, est due à Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti.
La notion de produit scalaire de deux vecteurs possède de très nombreuses applications : en Physique, par exemple pour le travail d'une force, en géométrie euclidienne traditionnelle pour les calculs de longueurs, d'angles, etc, pour la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle, pour l'exploitation de l'orthogonalité, etc.
Mais ce chapitre peut s'étendre à des espaces vectoriels réels de toute dimension et les formules de calcul du produit scalaire à partir de la norme sont celles que les élèves utiliseront lors d'études ultérieures dans les espaces préhilbertiens réels.
La photographie de Kevin Fast tirant un avion illustre ce que l'on connaît depuis l'antiquité : pour déplacer un corps selon un chemin rectiligne, pour un effort donné, le meilleur résultat est obtenu en tirant suivant la direction du chemin.

Vérifier ses acquis

1 **1.** b. et c.
2. $AB = 2\sqrt{7}$.

2 **a.** $AB^2 = 8$, $AC^2 = 80$, $BC = 72$, donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et le triangle ABC est rectangle en B.
b. Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre le milieu du segment [AC], à savoir le point (–2 ; 5) et pour rayon la moitié de l'hypoténuse, *i.e.* $2\sqrt{5}$.

3

Mesure (°)	0	135	120	112,5	120	75	30	60	90	150
Mesure (radian)	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$

4 **1.** b. et f.
2. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}1225$
$= 0{,}8775 \approx 0$ et $\alpha \approx 159{,}5°$,
car $180 - 20{,}5 = 159{,}5$.
Et une valeur en radian de α est $\pi - 0{,}36$.

5 **a.** $\cos(\pi + x) = -\cos x$.
g. $\sin(-x) = -\sin x$.
h. $\sin(\pi - x) = \sin x$.
b. c. d. e. et **f.** sont vraies.

6 **a.** $\frac{\pi}{4}$, **b.** $-\frac{2\pi}{3}$, **c.** $\frac{5\pi}{6}$, **d.** $-\frac{\pi}{5}$, **e.** $\frac{\pi}{8}$, **f.** π.

7 **1. a.** $\overrightarrow{OA} = -0{,}5\overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ}$.

b. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3}$.

2. a. $\overrightarrow{OB} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\overrightarrow{OJ}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$.

Activités d'introduction

Activité 1

a. On obtient le théorème de Pythagore.
b. $BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + AC^2 - AH^2$
$= AC^2 + (HB - AH)(HB + AH)$.

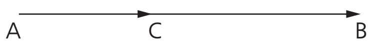
Dans le deuxième cas :
$BC^2 = AC^2 + AB(AB - 2AH)$
$= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AH$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}$.

Dans le troisième cas :
$BC^2 = AC^2 + (-AB)(2AH - AB)$
$= AC^2 - 2AB \cdot AH + AB^2$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \sin \widehat{ACH}$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{CAB}$.

Dans le quatrième cas :
$BC^2 = AC^2 + AB(AB + 2AH)$
$= AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AC \cos \widehat{CAH}$
$= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{CAB}$.

Activité 2

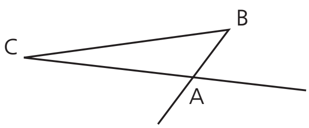
1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :
$k > 0$:



L'angle $\widehat{BAC}$ est nul. Une mesure en degré est 0°, une mesure en radian est 0 et son cosinus vaut 1.
$k < 0$:

L'angle $\widehat{BAC}$ est plat. Une mesure en degré est 180°, une mesure en radian est π et son cosinus vaut -1.

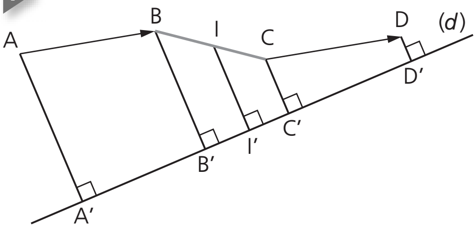
2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :



Les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{v})$ sont supplémentaires, donc la somme de leur mesure vaut 180° ou π radians.
Les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(-\vec{u}, -\vec{v})$ sont opposés par le sommet et ont la même mesure.
Les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(2\vec{u}, \vec{v})$ ont la même mesure.
Les angles $(\vec{u}, -\vec{v})$ et $(2\vec{u}, -3\vec{v})$ ont la même mesure, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(2\vec{u}, -3\vec{v})$ sont supplémentaires.
Les angles $(\vec{u}, \vec{v})$, $(-\vec{u}, -\vec{v})$ et $(2\vec{u}, \vec{v})$ ont la même mesure donc un cosinus identique.
Les angles $(\vec{u}, -\vec{v})$, et $(2\vec{u}, -3\vec{v})$, étant supplémentaires de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ ont un cosinus opposé à celui de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Activité 3

1



Si A est un point de (*d*), il est confondu avec sa projection orthogonale sur (*d*).

2 **a. b.** Si A = B, alors A′ = B′, et si A est différent de B, et si la droite (AB) est perpendiculaire à (*d*), alors A′ = B′.

3 **a.** Soit I, le milieu de [BC] et I′ sa projection sur (*d*).
Si les points B et C appartiennent à (*d*) il n'y a rien à démontrer.
Si le point B est sur (*d*), mais pas le point C, alors I n'est pas sur (*d*) et les droites (II′) et (CC′) sont parallèles ; on applique alors le théorème de Thalès dans le triangle BCC′.
Si les points B et C n'appartiennent pas à (*d*) et si le milieu I de [BC] appartient à (*d*), alors le théorème de Thalès nous donne la conclusion.
Si les points B, C et I n'appartiennent pas à (*d*), alors les droites (BB′), (II′) et (CC′) sont parallèles. et l'application du théorème de Thalès nous donne la conclusion.
b. De manière analogue, le milieu de [AD] se projette en le milieu de [A′D′]. Or les milieux de [AD] et [BC] sont confondus, donc I′ est le milieu commun de [A′D′] et de [B′C′] et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
c. d. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors A = B, A′ = B′ et $\overrightarrow{u'} = \vec{0}$.

4 Si $\overrightarrow{u'} = \vec{0}$, alors A′ = B′, donc les points A et B admettent la même projection orthogonale sur (*d*), donc appartiennent tous deux à la droite perpendiculaire à (*d*) passant par A′. La réciproque est vraie (question **2.b.**).

5 La projection de $\vec{u}$ sur (*d′*) est égale à la projection de $\vec{u}$ sur (*d*).

Activité 4

1 Si l'angle $\widehat{BGC}$ est nul ou aigu, la force amplifie le mouvement.
Si l'angle $\widehat{BGC}$ est droit, la force n'a pas d'effet sur le mouvement.
Si l'angle $\widehat{BGC}$ est obtus ou plat, la force s'oppose au mouvement.

2 $500 \times 80 = 40\,000$.

Mesure de $\widehat{BGC}$ (en °)	Travail W (en J)
0	40 000
30	34 641
45	28 284
90	0
120	–20 000
150	–34 641

Travaux pratiques

TP Algorithmique Régionnement du plan et cosinus

1 **1.** Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'\,;\,y')$,
alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

2 On a d'une part $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI} = x$ d'après la question **1.** et d'autre part,
$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI} = OM \times OI \times \cos\widehat{IOM}$
$= \sqrt{x^2 + y^2} \times \cos\widehat{IOM}$.
En égalant ces deux égalités, on obtient l'égalité attendue.

3 **a.** D'après la question **2.**, la variable C représente le cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$, où M est un point dont les coordonnées *x* et *y* ont été choisies aléatoirement.
b. Cet algorithme détermine un point M de manière aléatoire dont l'abscisse et l'ordonnée sont des réels de [0 ; 1].
c. L'utilisation d'une boucle For n'aurait pas été possible ici, car il peut se faire que 10 000 passages dans la boucle ne suffisent pas à produire 10 000 points différents (si jamais un nouveau point aléatoire créé l'a déjà été).

4 **a.** Il suffit de remplacer la ligne « `Si (C>1/4 ET C<1/2) ALORS` » par la ligne « `Si (C>0 ET C<sqrt(2)/2) ALORS` ».
On trouve alors le triangle OCD où C(1 ; 1) et D(0 ; 1).
b. Il suffit de faire les trois modifications suivantes :
• Remplacer la ligne « `x PREND LA VALEUR random()` » par « `x PREND LA VALEUR 2*random()` » ;
• Remplacer la ligne « `y PREND LA VALEUR random()` » par « `y PREND LA VALEUR 2*random()` » ;
• remplacer la ligne « `Si (C>1/4 ET C<1/2) ALORS` » par la ligne « `Si (C>sqrt(2)/2 ET C<1) ALORS` ».
c. Il suffit de faire les deux modifications suivantes :
• Remplacer la ligne « `y PREND LA VALEUR random()` » par « `y PREND LA VALEUR 2*random()-1` » ;
• remplacer la ligne « `Si (C>1/4 ET C<1/2) ALORS` » par la ligne « `Si (C>sqrt(2)/2 ET C<1) ALORS` ».
On trouve alors le triangle OCE où C(1 ; 1) et E(1 ; –1).

TP TICE 1 Droite d'Euler et cercle d'Euler

2 **a.** On peut conjecturer que les points M et N appartiennent à la droite .
b. On peut conjecturer que le cercle $\mathscr{C}'$ passe par les points P, Q et R.

3 **a.** On trouve facilement A′(2 ; 0), B′(4 ; 4), C′(–2 ; 4), P(0 ; 0), Q(2 ; 6).
• Pour trouver les coordonnées $(x_R\,;\,y_R)$ de R, on peut dire d'une part que le vecteur $\overrightarrow{CR}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$, ce qui donne l'égalité $-4(x_R - 8) - 8y_R = 0$, et d'autre part que le point R appartient à la droite (AB), de sorte que $y_R = 2x_R + 8$. On trouve donc un système de deux équations à deux inconnues dont l'unique solution est $x_R = -\dfrac{8}{5}$ et $y_R = \dfrac{24}{5}$.

• L'orthocentre H appartient à la hauteur issue de A, donc, a une abscisse nulle. Il appartient par ailleurs à la droite (BQ), donc, a pour ordonnée 4. Ainsi : H(0 ; 4).

• Le centre de gravité G du triangle ABC appartient aux deux droites (AA') et (BB'), donc, on trouve $x_G = \frac{4}{3}$ et $y_G = \frac{8}{3}$.

b. La médiatrice du segment [BC] a pour équation $x = 2$.
La médiatrice du segment [AC] a pour équation $y = x$, donc : M(2 ; 2).
On a $AM = 2\sqrt{5}$, donc, C a pour équation : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 40$.

c. La médiatrice du segment [A'B'] a pour équation $x + 2y - 7 = 0$.
La médiatrice du segment [B'C'] a pour équation $x = 1$, donc : N(1 ; 3).
On a $A'N = \sqrt{10}$, donc, C' a pour équation : $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$.

d. La droite (GH) a pour équation $x + y = 4$.
Les points M et N appartiennent effectivement à la droite (GH).

e. Les points P, Q et R appartiennent effectivement au cercle $\mathscr{C}'$.

TP TICE 2 Puissance d'un point par rapport à un cercle

2 a. La première égalité résulte de la définition même du symétrique de A par rapport à O.
On trouve, en utilisant la relation de Chasles :
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA'})$
$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA'}$.
Or, Les droites (AB) et (A'B) sont perpendiculaires, donc, les droites (MA) et (BA') aussi.
Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA'}$ est donc nul, et on a bien $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

b. D'après la relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$
et $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}$,
d'où l'égalité annoncée.

c. En combinant les réponses des deux questions précédentes, on obtient :
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$
$= \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$
$= OM^2 - R^2$.

d. Le point M étant fixé, le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est effectivement indépendant des points A et B.

e. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$OM^2 = OT^2 + TM^2 = R^2 + MT^2$,
donc, $P_{\mathscr{C}}(M) = MT^2$.

3 a. $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 9$, et $\mathscr{C}'$ a pour équation $(x-10)^2 + y^2 = 25$.

b. On a d'une part :
$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'})\cdot(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}) = MO^2 - MO'^2$
$= (P_{\mathscr{C}}(M) + 9) - (P_{\mathscr{C}'}(M) + 25) = -16$.
On a d'autre part :
$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'})\cdot(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'})$
$= (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega O'})\cdot\overrightarrow{O'O} = 2\overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{O'O}$
(car les vecteurs $\overrightarrow{\Omega O}$ et $\overrightarrow{\Omega O'}$ sont opposés.
On obtient donc $2\overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{O'O} = 16$.
Il en résulte $\overrightarrow{K\Omega}\cdot\overrightarrow{OO'} = (\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{M\Omega})\cdot\overrightarrow{OO'}$
$= \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{OO'}$
(car les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{OO'}$ sont perpendiculaires vu que K est le projeté de M sur la droite (OO').
On a donc $2\overrightarrow{K\Omega}\cdot\overrightarrow{OO'} = 16$, d'où $\overrightarrow{K\Omega}\cdot\overrightarrow{OO'} = 8$.
En désignant par $(a\ ;\ b)$ les coordonnées de K, on a bien entendu $b = 0$, et la dernière égalité permet d'obtenir $10 \times (5 - a) = 8$,
d'où $a = \frac{21}{5}$ et $b = 0$.
Le point M appartient donc à la droite d'équation $x = \frac{21}{5}$.
Réciproquement, si $M\left(\frac{21}{5}\ ;\ y\right)$ est un point de cette droite, alors :
$P_{\mathscr{C}}(M) = OM^2 - 9$
$= \left(\frac{21}{5}\right)^2 + y^2 - 9 = \frac{216}{25} + y^2$.
$P_{\mathscr{C}'}(M) = O'M^2 - 25$
$= \left(\frac{21}{5} - 10\right)^2 + y^2 - 25 = \frac{216}{25} + y^2$.
On a bien égalité des deux puissances.

Exercices

Appliquer le cours

1 a. V. **b.** F. **c.** F. **d.** V. **e.** F.

2 a. V. **b.** V. **c.** F. **d.** V.

3 **a.** F. **b.** F. **c.** V. **d.** V. **e.** V. **f.** V.

4 **1.** V. **2.** V.
3. a. V. **b.** V. **c.** V.
4. V. **5.** V. **6.** F. **7.** F.

5 **a.** V. **b.** F. **c.** V. **d.** F. **e.** V. **f.** V.
g. V. **h.** V.

6 **1.** F. **2.** V. **3.** F. **4.** V. **5.** V.
6. a. F. **b.** V. **c.** V.

7 **a.** $(b\ ;\ -a)$. **b.** (1 ; 5). **c.** (3 ; 5).
d. Elles sont perpendiculaires.
e. Non. **f.** (5 ; –2).

8 **a. d.** et **f.** Ni l'un, ni l'autre.
b. et **e.** Directeur.
c. Normal.

9 **a.** F. **b.** V.

11 **1. a.** $\sqrt{2}$. **b.** $3\sqrt{2}$. **c.** $\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$. **d.** 6.

2. a. $\sqrt{29}$. **b.** $5\sqrt{2}$. **c.** $2\sqrt{3}$.

12 c. et d.

13 **1.** a., b., d **2.** d.

14 On peut prendre $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$, ou bien l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ nul. Sinon, soit A, B, C, trois points tels que AB soit un représentant de $\vec{u}$ et AC un représentant de $\vec{v}$, et D tel que ACDB soit un parallélogramme, alors $\|\vec{u} + \vec{v}\| = AD$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = BC$. Il est équivalent de dire que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ ou de dire que le quadrilatère ACDB est un rectangle, ou encore de dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

16 **a.** $\overrightarrow{OB}$ **b.** $\overrightarrow{ED}$ **c.** $\vec{0}$ **d.** $\overrightarrow{DH}$ **e.** $\overrightarrow{DE}$ **f.** $\overrightarrow{EF}$.

18 **a.** $\frac{\pi}{4}$ ou 45°. **b.** $\frac{\pi}{8}$ ou 22,5°.
c. $\frac{\pi}{8}$ ou 22,5°. **d.** $\frac{5\pi}{8}$ ou 112,5°.
e. $\frac{\pi}{8}$ ou 22,5°. **f.** $\frac{\pi}{8}$ ou 22,5°.

19 **1. a.** $\frac{\pi}{2}$ ou 90°. **b.** $\frac{\pi}{3}$ ou 60°.
c. $\frac{\pi}{6}$ ou 30°. **d.** $\frac{\pi}{3}$ ou 60°.
2. a. $\frac{\pi}{2}$ ou 90°. **b.** $\frac{\pi}{6}$ ou 30°.

21 **a.** $12\sqrt{3}$. **b.** $6\sqrt{2}$. **c.** $-17{,}5$. **d.** $-1{,}5\sqrt{2}$.

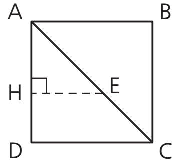
22 **a.** 4. **b.** –2,5. **c.** $-14\sqrt{3}$. **d.** $-3\sqrt{2}$.

23 **a.** –58, 99, –143. **b.** 186, 120, 70.

24 Soit O, le centre du losange.
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DB} = 2DO^2 = 18\cos^2\frac{\pi}{12}$
$\approx 16{,}8$ à 10^{-1} près.

25 **a.** $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$
$= 36 + 25 - 81 = -20$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10$.
b. $2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = CB^2 + CA^2 - AB^2$
$= 16 + 64 - 49 = 31$, donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 15{,}5$.

27 **a.**



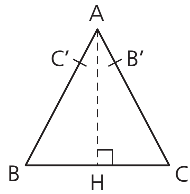
b. Soit H, la projection orthogonale de E sur (AD). $\overrightarrow{AH} = 0{,}6\overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} = 0{,}6AH^2 = 15$.

28 Soit H, la projection orthogonale de B sur (GC).

$GH = GO + OH = 5\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GH} = GC\cdot GH = 25\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

29 **a.**



b. $\overrightarrow{B'C'} = 0{,}25\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{C'B} = 0{,}75\overrightarrow{AB}$. Soit H, la projection orthogonale de A sur (BC).
$\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{C'B} = \frac{3}{16}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{3}{16}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HB} = \frac{3}{16}CB\cdot HB$
$= \frac{3}{16} \times 18 = \frac{27}{8}$.

30 **a.** $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = AB^2 - BC^2$
$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}$
$= -2\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Donc $AB^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b. De même $CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{CA}$.
Donc $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID})$
$= 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.
Et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(1 - 4 + 9 - 16) = -5$.

32 **1.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7 = 3 \times 4 \times \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$
donc $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) \approx 54{,}3°$ à 10^{-1} près.
2. a. $\vec{u}\cdot(4\vec{u} - 2\vec{v}) = 4 \times 9 - 2 \times 7 = 22$.
b. $(\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(-0{,}5\vec{u} + 3\vec{v})$
$= -0{,}5 \times 9 + 4\vec{u}\cdot\vec{v} - 6 \times 16 = -72{,}5$.

33 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.
$2\vec{u}\cdot(-\vec{u} + 2\vec{v}) = -2 \times 4 + 4 \times 5\sqrt{3}$
$= 20\sqrt{3} - 8$.
b. $(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = 4 - 2 \times 5\sqrt{3} + 4 \times 25$
$= 104 - 10\sqrt{3}$.
c. $(\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(2\vec{u} - \vec{v}) = 2 \times 4 - 7\vec{u}\cdot\vec{v} + 3 \times 25$
$= 83 - 35\sqrt{3}$.
d. $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 = 4 \times 4 - 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9 \times 25$
$= 241 - 60\sqrt{3}$.
Donc $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\| = \sqrt{241 - 60\sqrt{3}}$.

34 $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \geqslant 0$,
donc la réponse est non.

35 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
$= -2 + 3 = 1$.

36 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
$= (\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v})$
$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

37 Cet exercice est le n° 14 dont on propose une autre correction qui utilise le produit scalaire. Il est équivalent de dire que
$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ ou que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$,
ou encore que
$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
soit encore $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ou encore $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.

38 **a.** $4 \times 5 - 4 \times 5 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
b. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{41}$.
Il y a deux vecteurs de norme 1 colinéaires à $\vec{u}$: $\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{41}}$ et $-\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{41}}$. Soit $\vec{w} = \dfrac{\vec{u}}{\sqrt{41}}$.
De même, il y a deux vecteurs de norme 1 colinéaires à $\vec{v}$: $\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{41}}$ et $-\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{41}}$. Soit $\vec{z} = \dfrac{\vec{v}}{\sqrt{41}}$.
Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ forment une base orthonormée correspondant à $A\left(\dfrac{4}{\sqrt{41}}\,;\dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)$ et $B\left(\dfrac{5}{\sqrt{41}}\,;-\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right)$. Mais il y a quatre solutions en tout car on peut prendre aussi comme base orthonormée $(\vec{w}\,;-\vec{z})$, $(-\vec{w}\,;\vec{z})$ et $(-\vec{w}\,;-\vec{z})$.

39 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$
$= AI^2 + \overrightarrow{AI}\cdot(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC} = AI^2 + 0 - IB^2$
$= AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.
$AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$
$= AI^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2 - AI^2 - 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}) - IC^2$
$= 2\overrightarrow{AI}\cdot(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

40 Soit H, le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B. Alors :
$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH} = 0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0\end{cases}$ donc $\begin{cases}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{BH} = 0\\ (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AH} = 0\end{cases}$.
En soustrayant la deuxième ligne du dernier système de la première, on a
$\overrightarrow{HC}\cdot(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{AH}) = 0$, soit $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$ donc la hauteur issue de C passe par H et les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

42 $M(x\,;y)$.
a. $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$
$\Leftrightarrow (x + 5) \times 1 + (y - 1) \times 3 = 0$
$\Leftrightarrow x + 3y + 2 = 0$.
b. $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$
$\Leftrightarrow (x - 8) \times 5 + (y + 2)(-4) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - 4y - 48 = 0$.
c. $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)(-2) + (y - 5) \times 2 = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 2y - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x - y + 3 = 0$.

43 $M(x\,;y)$.
a. Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(3\,;5)$, lequel est directeur de Δ.
$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires
$\Leftrightarrow (x - 5) \times 5 - 3(y + 6) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - 3y - 43 = 0$.
b. Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-1\,;5)$, lequel est directeur de Δ.
$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires
$\Leftrightarrow 5(x - 11) + (y + 2) = 0$
$\Leftrightarrow 5x + y - 53 = 0$.
c. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(1\,;3)$ donc un vecteur directeur de Δ (qui est normal à $\mathcal{D}$) sera $\vec{u}\left(1\,;-\dfrac{1}{3}\right)$.
$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires
$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}(x - 2) - (y - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 17 = 0$.

44 $M(x\ ;\ y)$.

a. $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $(5\ ;\ 1)$ orthogonaux
$\Leftrightarrow 5(x - 5) + (y - 1) = 0$
$\Leftrightarrow 5x + y - 26 = 0$.

b. $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $(-1\ ;\ 4)$ orthogonaux
$\Leftrightarrow -(x - 11) + 4(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 19 = 0$.

c. $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $(2\ ;\ 7)$ orthogonaux
$\Leftrightarrow 2(x - 2) + 7(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + 7y - 39 = 0$.

46 **a.** $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}$
$= 49 + 9 - 42\cos\widehat{ABC} = 58 - 42\cos\widehat{ABC}$.
$42\cos\widehat{ABC} = 22$ et $\widehat{ABC} \approx 58°$.

b. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos 40°$, donc
$BC = \sqrt{34 - 30\cos 40°} \approx 3{,}32$ à 10^{-2} près.

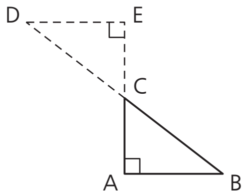
47 **a.** $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 28$, donc
$AC = 2\sqrt{7}$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \sqrt{2} = 2AB\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $AB = 1$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{2}$
et $BC = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.

48 Soit I, le milieu de [BC]. Le théorème de la médiane nous donne :
$2AI^2 = AB^2 + AC^2 - 0{,}5BC^2$
$= 36 + 16 - 12{,}5 = 39{,}5$.
Donc $AI = \sqrt{19{,}75} \approx 4{,}44$ à 10^{-2} près.

49 Remarque : le triangle ABC est rectangle en A. Soit E, le projeté orthogonal de D sur (AC), E est aussi le symétrique de A par rapport à C.



a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = 2AC^2 = 18$ et
$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$, c'est-à-dire que
$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = AC^2 + AD^2 - BC^2 = AD^2 - 16$.

b. On en déduit que $AD^2 = 36 + 16 = 52$, donc $AD = 2\sqrt{13}$.
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = AC\cdot AD\cdot\cos\widehat{CAD} = 6\sqrt{13}\cos\widehat{CAD}$
$= 18$, d'où $\widehat{CAD} \approx 33{,}69°$.

50 $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}(4\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{BC}(2\ ;\ -3)$
donc $AB^2 = 13$, $AC^2 = 16$ et $BC^2 = 13$.
Le triangle ABC est isocèle en B.
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}$
$= 2BA^2 - 2BA^2\cdot\cos\widehat{ABC} = 26 - 26\cos\widehat{ABC}$.
$26\cos\widehat{ABC} = 26 - 16 = 10$ et $\widehat{ABC} \approx 67{,}4°$.

51 $AI = 3\cos 20° \approx 2{,}82$.

53 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

54 $x^2 + (y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 5$.

56 $(x - 3)(x + 2) + (y - 3)(y - 5) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 8y + 9 = 0$.

57 $(x + 6)(x - 2) + (y - 1)(y + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x = 13$.

58 $AB(1{,}5\ ;\ -1)$; $AC(2\ ;\ 3)$; $BC(0{,}5\ ;\ 4)$.
$AB^2 = 3{,}25$; $AC^2 = 13$; $BC^2 = 16{,}25$.
Donc le triangle est rectangle en A, et [BC] est un diamètre de son cercle circonscrit qui aura donc pour équation :
$(x - 0{,}5)(x - 1) + (y + 2)(y - 2) = 0$
ou encore $x^2 + y^2 - 1{,}5x = 3{,}5$.

60 **a.** $(x - 2)^2 - 4 + (y - 1{,}5)^2 - 2{,}25 + 15 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 6{,}25 - 15 < 0$,
donc aucun point du plan ne vérifie cette équation.

b. $(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 13 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$,
donc l'ensemble cherché est réduit au point $(-3\ ;\ 2)$.

c. $(x + 2{,}5)^2 - 6{,}25 + (y + 3)^2 - 9 = 5$
$\Leftrightarrow (x + 2{,}5)^2 + (y + 3)^2 = 20{,}25$
et l'équation donnée est celle du cercle de centre $(-2{,}5\ ;\ -3)$ et de rayon 4,5.

61 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = k$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = k + 10$.
L'équation donnée est celle d'un cercle si et seulement si $k > -10$.

62 $x^2 + y^2 - 2ax + 4y = 20$
$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y + 2)^2 = a^2 + 24$.
C'est une équation d'un cercle de rayon 7 si et seulement si $a^2 + 24 = 49$ soit $a = 5$ ou $a = -5$.
On obtient alors deux réponses : le cercle de centre $(5\ ;\ -2)$ et de rayon 7, et celui de centre $(-5\ ;\ -2)$ et de rayon 7.

63 **a.** $3x^2 - 4x + 3y^2 - 6y - 15 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{4}{3}x + y^2 - 2y = 5$
$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = \dfrac{58}{9}$.

L'équation donnée est celle du cercle de centre $\left(\frac{2}{3}\,;\,1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{58}}{3}$.

b. Les coefficients de x^2 et de y^2 sont différents. Cette équation n'est pas celle d'un cercle.

64 $x^2+y^2-2ax-2by=0$
$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2>0$ si a et b sont non nuls. Donc quels que soient les réels a et b non nuls, l'équation donnée sera celle d'un cercle (celui-ci passera par l'origine).

66 **a.** $\cos(\pi-x)=\cos\pi\,\cos x+\sin\pi\,\mathrm{sis}x$
$=-\cos x$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\,\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\,\sin x=\sin x$.

b. $\cos(\pi+x)=\cos\pi\,\cos x-\sin\pi\,\sin x=-\cos x$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\,\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\,\sin x=-\sin x$.

$\sin(\pi-x)=\sin\pi\,\cos x-\sin x\,\cos\pi=\sin x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\,\cos x-\sin x\,\cos\frac{\pi}{2}=\cos x$.

$\sin(\pi+x)=\sin\pi\,\cos x+\sin x\,\cos\pi=-\sin x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\,\cos x+\sin x\,\cos\frac{\pi}{2}=\cos x$.

67 **a.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\,\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\,\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

b. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$.

c. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\,\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\,\cos x$

$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

d. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\,\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\,\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$.

68 **a.** $\cos\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

b. $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

c. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$.

d. $\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

69 **a.** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

b. $\cos\left(-x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

c. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$.

d. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$.

70 **a.** $\cos(2a)=2\cos a\Leftrightarrow 2\cos^2 a-1$
$=2\cos a\Leftrightarrow 2\cos^2 a-2\cos a-1=0$.
On pose $x=\cos a$ et on résout
$2x^2-2x-1=0$.

$\Delta=12$ et $X=\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1$

ou $X=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\in[-1\,;\,1]$, donc $\cos a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
et $a\approx 1{,}95$.

b. $\sin(2a)=2\sin a\Leftrightarrow 2\sin a\,\cos a=2\sin a$
$\Leftrightarrow 2\sin a(\cos a-1)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin a=0\\ \text{ou}\\ \cos a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=k\pi\\ \text{ou}\\ a=2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow a=k\pi\ \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$

71 $\cos(2a)=2\cos^2 a-1$
$=2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Or, $2a\in[0\,;\,\pi]$ donc $2a=\frac{\pi}{6}$ et $a=\frac{\pi}{12}$.

72 $\sin(2x)=\cos x\Leftrightarrow 2\sin x\,\cos x-\cos x=0$
$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \text{ou}\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$$

73 $\cos(2x) + \cos x = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$
On pose $X = \cos x$.
On résout $2X^2 + X - 1 = 0$. $\Delta = 9$, $X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$.

$$\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}.$$

74 $3\cos(2x) + 2\sin^2 x = 0$
$\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x = 0$
$\Leftrightarrow 3 - 4\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \sin x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \sin x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \sin x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \text{ou} \\ \sin x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

75 $4\sin^2 x + \cos(2x) + \cos x = 0$
$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 x) + 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$
$\Leftrightarrow -2\cos^2 x + \cos x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0.$
On pose $X = \cos x$.
On résout $2X^2 - X - 3 = 0$.
$\Delta = 25$, $X = -1$ ou $X = \frac{3}{2}$.

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow x + \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi.$

76 $\cos x(\cos(2x) - 4) + \frac{7}{2}\sin(2x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x(\cos(2x) - 4) + 7\sin x \cos x = 0$
$\Leftrightarrow \cos x(\cos(2x) - 4 + 7\sin x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin^2 x - 4 + 7\sin x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x(2\sin^2 x - 7\sin x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \end{cases}.$$

On pose $\sin x = X$.
On résout $2X^2 - 7X + 3 = 0$.
$\Delta = 25$, $X = 3$ ou $X = \frac{1}{2}$.

$\cos x\,(\cos(2x) - 4) + \frac{7}{2}\sin(2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}.$$

77 $P = \cos x \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \sin\frac{x}{4}$
$= \frac{1}{2}\cos x \cos\frac{x}{2} \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\cos x \sin x = \frac{1}{8}\sin x.$

S'entraîner

78 **1. a.** $p = -ac$. **b.** $p = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.
c. $p = \frac{\sqrt{3b^2}}{2}$. **d.** $p = c^2$.
2. a. $p = (b - a)(c - a)$.
b. $p = (b - a)(c - a) + a^2$.

79 Faire des dessins !
1. c. et d. **2.** d. **3.** b., c. et d.

80 $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5\sqrt{3}$
et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cos\widehat{AOB} = 10\cos\widehat{AOB}$.
$\cos\widehat{AOB} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{6}$.

81 On se ramène à $x = 1$ par une réduction ou un agrandissement. L'angle a est inchangé. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABI rectangle en B donne $AI^2 = \frac{5}{4}$.
$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = AI\cdot AJ\cdot\cos a = AI^2 \cos a = \frac{5}{4}\cos a$.

En se plaçant dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $I\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = 1$.

Donc $\cos a = \frac{4}{5}$ et $a = 36{,}9°$ à 10^{-1} près.

82 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{DB} = A'C'\cdot DB = \sqrt{34}\ A'C'$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{5}, \frac{\overrightarrow{AD}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 25 - 9 = 16$.

On en déduit que $A'C' = \frac{8\sqrt{34}}{17}$.

83 **a.** Si $\vec{u}$ ou $\vec{v} = 0$, alors l'inégalité est évidente. Sinon, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$ et $\cos(\vec{u},\vec{v}) \in [-1 ; 1]$, donc $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$.
Cas d'égalité : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls :
$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$ ou 1
$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Sinon ils sont colinéaires. Donc :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2ab$, et $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = a^2 + b^2$, d'où l'inégalité demandée.
c. L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs $(a ; b)$ et $(b ; a)$ donne
$2|ab| \leqslant a^2 + b^2$, donc $2ab \leqslant a^2 + b^2$,
et $2ab + a^2 + b^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$,
donc $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$.

84 Faire des dessins !
a. ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont égales : ABCD est un rectangle.
b. ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont orthogonales donc est un losange.
c. ABCD est un parallélogramme dont un angle est droit et dont deux côtés consécutifs sont de même longueur donc est un carré.
d. ABCD est un parallélogramme dont un angle est droit et dont deux côtés consécutifs sont de même longueur donc est un carré.
e. ABCD est un parallélogramme dont trois points sont alignés donc est un parallélogramme aplati.

85 Faire un dessin ! Quitte à effectuer un agrandissement ou une réduction, on peut supposer $a = 1$. Dans le repère othonormé (D, C, A), $I(0{,}5 ; 1)$, $J(0 ; 0{,}5)$, $C(1 ; 0)$.
$\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{JC} = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$. Donc les droites (DI) et (JC) sont perpendiculaires.

86 Faire un dessin !
1. a. $\widehat{EBC} = 30°$ donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$,
$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB} = \frac{a^2}{2}$.
b. Le triangle BCG est équilatéral car ses côtés sont de même longueur.
c. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} = \frac{a^2}{2}$ et $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BG} = -\frac{a^2}{2}$.
d. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ car $\widehat{AEF} = 150°$.
e. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})$.
$(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}$
$= -\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a2\sqrt{3}}{2} = 0$.
f. On en déduit que les droites (DE) et (BF) sont perpendiculaires. Les droites (DE) et (EG) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (BF) et passent toutes deux par le point E donc sont confondues et les points D, E et G sont alignés.
2. On peut s'y prendre de la même façon ou : $\widehat{ACB} = 45°$, $\widehat{BCG} = 60°$, $\widehat{GCF} = 75°$, donc $\widehat{ACF} = 45° + 60° + 75° = 180°$, donc les points A, C et F sont alignés.

87 Faire un dessin !
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.
b. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$.
c. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}\cdot\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}\right)$
$= \frac{5}{2}\frac{a^2}{2} - \frac{5}{4}a^2 = 0$. D'où la conclusion.
d. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}a^2 = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC} = AH\cdot AC = a\cdot AH$.
Donc $AH = \frac{3}{4}a$.
e. $HC = \frac{1}{4}a$ et $\overrightarrow{HC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$, donc le quadrilatère EBHC est un parallélogramme.

88 Faire un dessin !
a. La droite (AC) est bissectrice de $\widehat{DAB}$, donc $\widehat{CAE} = 45°$ et les triangles AHE et AHF sont rectangles isocèles en H donc
HA = HE = HF et AE = AF.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = AB\cdot AE = AD\cdot AF = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$.

b. $\overrightarrow{AI} = 0,5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF})$.

c. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DE} = 0,5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF})\cdot(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})$
$= 0,5(0 + \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} + 0) = 0$. *q.e.d.*

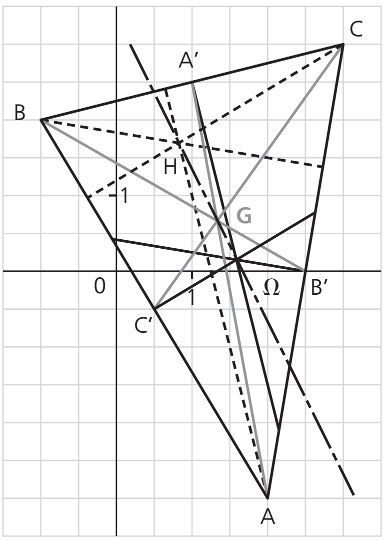
89 **1. a.** Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ (3 ; –2) est directeur de (AB) donc normal à $\mathscr{D}$, et une équation de $\mathscr{D}$ est $3(x - 2) - 2(y - 1) = 0$, soit
$3x - 2y - 4 = 0$.

b. I, milieu de [AB] a pour coordonnées (0,5 ; 2), donc une équation de $\sqrt{13} \times \sqrt{5}$ est $3x - 2y + k = 0$, où k est déterminé par $3x_I - 2y_I + k = 0$, soit $k = 2,5$.
Une équation de Δ est $3x - 2y + 2,5 = 0$.

c. Le vecteur (2 ; 1) est normal à $\mathscr{T}$ donc une équation de $\mathscr{T}$ est $2(x - 2) + y - 1 = 0$, soit $2x + y - 5 = 0$.

2. $\mathscr{D}$ et Δ sont parallèles, donc les deux angles aigus demandés sont égaux. Le vecteur $\vec{u}$ (2 ; 3) est directeur de $\mathscr{D}$ et $\vec{v}$ (1, –2) de $\mathscr{T}$.
Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé donc
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 - 6 = -4 = \sqrt{13} \times \sqrt{5}\cos(\vec{u}, \vec{v})$ donc
$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-4}{\sqrt{65}}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ est obtus donc l'angle aigu formé par les droites Δ et $\mathscr{T}$ a pour valeur $\cos^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{65}} \approx 60,3°$ à 10^{-1} près.

90



2. A(2 ; –3), B(–1 ; 2), C(3 ; 3).
A'(1 ; 2,5), B'(2,5 ; 0), C'(0,5 ; –0,5).

3. b. $\overrightarrow{AA'}(-1\,;5,5)$ et $\overrightarrow{AM}(x - 2\,;y + 3)$.
Une équation de (AA') est
$5,5(x - 2) + y + 3 = 0$, soit $5,5x + y = 8$.
$\overrightarrow{BB'}(3,5\,;-2)$, et $\overrightarrow{BM}(x + 1\,;y - 2)$.
Une équation de (BB') est
$-2(x + 1) - 3,5(y - 2) = 0$, soit $2x + 3,5y = 5$.

c. G vérifie $x = \begin{cases} 5,5x + y = 8 \\ 2x + 3,5y = 5 \end{cases}$

soit $x = \dfrac{4}{3}$ et $y = \dfrac{2}{3}$.

4. b. $\overrightarrow{AB}(-3\,;5)$ et $\overrightarrow{C'M}(x - 0,5\,;y + 0,5)$.
Une équation de la médiatrice de [AB] est
$-3(x - 0,5) + 5(y + 0,5) = 0$ *i.e.* $3x - 5y = 4$.
$\overrightarrow{BC}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{A'M}(x - 1\,;y - 2,5)$.
Une équation de la médiatrice de [BC] est
$4(x - 1) + y - 2,5 = 0$ *i.e.* $4x + y = 6,5$.

c. Ω vérifie $x = \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 4x + y = 6,5 \end{cases}$

soit $x = \dfrac{73}{46}$ et $y = \dfrac{7}{46}$.

5. b. $\overrightarrow{BC}(4\,;1)$ et $\overrightarrow{AM}(x - 2\,;y + 3)$.
Une équation de la hauteur issue de A est
$4(x - 2) + y + 3 = 0$ soit $4x + y = 5$.
$\overrightarrow{AC}(1\,;6)$ et $\overrightarrow{BM}(x + 1\,;y - 2)$.
Une équation de la hauteur issue de B est
$x + 1 + 6(y - 2) = 0$ soit $x + 6y = 11$.

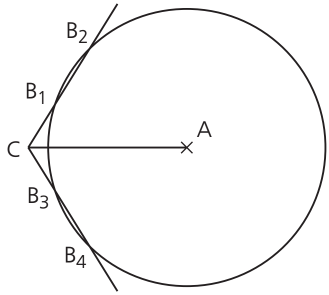
c. H vérifie $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$

soit $x = \dfrac{19}{23}$ et $y = \dfrac{39}{23}$.

6. $\overrightarrow{GH}\left(-\dfrac{35}{69}\,;\dfrac{71}{69}\right)$ et $\overrightarrow{\Omega G}\left(-\dfrac{35}{46,3}\,;\dfrac{71}{46,3}\right)$.

On remarque que $3\,\overrightarrow{GH} = 6\,\overrightarrow{\Omega G}$, ou encore que $\overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{\Omega G}$. Donc, les points G, H et Ω sont alignés et $GH = 2\,\Omega G$.

91 Il en existe quatre :



$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC\cdot BC\cdot\cos 60°$.
$BC^2 - 8BC + 15 = 0$. $\Delta = 4$ et $BC = 5$ ou 3.

Géométriquement, on trace un segment AC de longueur 8 cm puis les deux demi-droites de sommet A formant un angle de 60° avec la demi-droite [AC) et enfin le cercle de centre A et de rayon 7cm qui coupe chacune des deux demi-droites en deux points.

92 **a.** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$
$= AB^2 + AD^2 + 2AB\cdot AD\cos 60° = 76$,
donc $AC = 2\sqrt{19}$.
$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2 = \|\overrightarrow{DB}\|^2$
$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 - 2AB\cdot AD\cos 60° = 28$,
donc $BD = 2\sqrt{7}$.
b. $BD^2 = BA^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cos 60° = 28$.
Donc $BD = 2\sqrt{7}$.
c. Le théorème de la médiane donne
$BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + 0{,}5\,AC^2$
d'où $AC^2 = 2(36 + 16 - 2\times 7) = 76$,
donc $AC = 2\sqrt{19}$.

93 **a.** Le théorème de la médiane donne $AB^2 + AD^2 = 2AI^2 + 0{,}5\,BD^2$, ce qui est équivalent à $x^2 + y^2 = 24{,}5 + 9{,}5 = 34$.
b. $BD^2 = 19 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cos 60°$
$= x^2 + y^2 - xy$. Donc $x^2 + y^2 - xy = 19$.
c. x et y vérifient $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (x-5)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$.
Une condition nécessaire est que
$xy = 15$, x étant non nul, $y = \dfrac{15}{x}$.
Le couple $(x\,;y)$ doit vérifier $x^2 + \left(\dfrac{15}{x}\right)^2 = 34$.
On pose $X = x^2$ et on obtient :
$X^2 - 34X + 225 = 0$.
$\Delta = 34^2 - 900 = 256 = 16^2$.
On trouve $X = 9$ et $X = 25$.
x, étant une longueur, est non nul et $x = 3$ ou 5.
Si $x = 3$, $y = 5$, et si $x = 5$, $y = 3$.
Réciproquement, ces deux couples conviennent. On obtient :

Ces deux parallélogrammes sont symétriques l'un de l'autre par une symétrie axiale.

94 **1. a.** Soit A', la projection orthogonale du point A sur la droite (BC).
$2S = BC\cdot AH$.
Si $\widehat{ACB}$ est aigu,
$AH = AC\sin\widehat{ACH} = AC\sin\widehat{ACB} = AC\sin\widehat{C}$.
Si $\widehat{ACB}$ est obtus,
$AH = AC\sin\widehat{ACH} = AC\sin\widehat{ACB} = AC\sin\widehat{C}$.
(car deux angles supplémentaires ont même sinus).
D'où $2S = ab\sin\widehat{C}$, ou encore $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.
b. De même $2S = bc\sin\widehat{A}$ et $2S = ac\sin\widehat{B}$.
c. On obtient :
$\dfrac{2S}{abc} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{c}$
ou encore $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$.
2. La médiatrice du segment BC coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points. Un, et un seul, de ces deux points appartient à l'arc du cercle circonscrit contenant A ; soit A' ce point.
D'après les propriétés des angles inscrits interceptant le même arc, vues en classe de troisième, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ sont égaux. Ils ont donc même sinus.
Le triangle BCA' est isocèle en A' et son cercle circonscrit est le même que celui du triangle ABC.
Désignons par O le centre du cercle circonscrit au triangle A'BC et par H le milieu de BC, qui est aussi le pied de la hauteur issue de A' dans le triangle A'BC. À nouveau, en appliquant les résultats vus en classe de troisième, l'angle au centre $\widehat{BOC}$ (éventuellement rentrant si l'angle $\widehat{BA'C}$ est obtus) est le double de l'angle $\widehat{BA'C}$; comme la droite (OH) est médiatrice de BC, les angles $\widehat{BA'C}$ et $\widehat{BOH}$ sont égaux (éventuellement à nouveau $\pi - \widehat{BOH}$).
Ainsi : $\sin\widehat{A} = \sin\widehat{A'} = \dfrac{BH}{BO} = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{a}{2R}$ et
$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R$.
3. Par **1.c.** on a : $\dfrac{abc}{2S} = 2R$, d'où $abc = 4RS$.

95 **1.** $\overrightarrow{AM}(x+2\,;y+5)$, $\overrightarrow{BM}(x-2\,;y+1)$.
Une équation de $\mathscr{C}$ est
$(x+2)(x-2) + (y+5)(y+1) = 0$
i.e. $x^2 + y^2 + 6y + 1 = 0$.

2. a. $1 \neq 0$ donc O n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

b. On résout $\begin{cases} x^2+y^2+6y+1=0 \\ x=0 \end{cases}$

qui revient à $y^2 + 6y + 1 = 0$, ou encore à $(y+3)^2 = 8$, soit $y + 3 = 2\sqrt{2}$ ou $-2\sqrt{2}$ soit $y = -3 + 2\sqrt{2}$ ou $y = -3 - 2\sqrt{2}$.

c. On résout $\begin{cases} x^2+y^2+6y+1=0 \\ y=0 \end{cases}$

qui revient à $x^2 = -1$, équation qui n'admet pas de solution.

3. a. $MA^2 + MB^2 = 32$
$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+5)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=32$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 12y + 34 = 32$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}$.

b. $AB(4\ ;\ 4)$ donc $AB^2 = 32$.
Donc $MA^2 + MB^2 = 32 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2$
$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = MA^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ *i.e.* M parcourt le cercle de diamètre [AB].

96 **a.** $AB(3\ ;\ 1)$, $AC(5\ ;\ -5)$, $BC(2\ ;\ -6)$.
$AB^2 = 10$, $AC^2 = 50$, $BC^2 = 40$.
On remarque que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en B, et par conséquent son cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypoténuse qui a pour coordonnées $(-1{,}5\ ;\ -1{,}5)$ et pour rayon la moitié de l'hypoténuse, *i.e.* $\dfrac{\sqrt{50}}{2}$.

b. Une équation de $\mathscr{C}$ est
$(x+1{,}5)^2 + (y+1{,}5)^2 = \dfrac{25}{2}$
soit $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8$.

c. On résout $\begin{cases} x^2+y^2+3x+3y=8 \\ x=0 \end{cases}$

qui revient à $y^2 + 3y - 8 = 0$, $\Delta = 41$.
Les intersections de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées sont $\left(0\ ;\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}\right)$ et $\left(0\ ;\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}\right)$.
x et y jouent des rôles symétriques et on aura donc comme intersections avec l'axe des abscisses les points :
$\left(\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}\ ;0\right)$ et $\left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}\ ;0\right)$.

d. Non.

e. $\overrightarrow{DA}(-4\ ;6)$, $\overrightarrow{DC}(1\ ;\ 1)$, $DA^2 = 52$ et $DC^2 = 2$.
$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = 2 = 2\sqrt{26}\cos\widehat{ADC}$ donc $\widehat{ADC} \approx 78{,}7°$.

f. $CA^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA\cdot DC\cos\widehat{ADC}$
$50 = 54 - 4\sqrt{26}\cos\widehat{ADC}$ donc $\widehat{ADC} \approx 78{,}7°$.

g. $\overrightarrow{\Omega C}(2{,}5\ ;\ -2{,}5)$, $\overrightarrow{CM}(x-1\ ;\ y+4)$.
Le vecteur $(1\ ;\ -1)$ est normal à $\mathscr{T}$.
Une équation de $\mathscr{T}$ est $x - 1 - y - 4 = 0$ soit $x - y - 5 = 0$. Le point D appartient à $\mathscr{T}$.

h. $MA^2 + MC^2 = 6 \times 12{,}5 = 75$.
$\overrightarrow{AM}(x+4\ ;\ y-1)$, $\overrightarrow{CM}(x-1\ ;\ y+4)$.
$MA^2 + MC^2 = 75$
$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y+4)^2=75$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 6x + 6y = 41$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x + 3y = 20{,}5$
$\Leftrightarrow (x+1{,}5)^2 + (y+1{,}5)^2 = 25$,
équation du cercle de centre Ω et de rayon 5.

97 **a.** $\cos a + \cos\left(a+\dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(a+\dfrac{4\pi}{3}\right)$
$= \cos a - \dfrac{1}{2}\cos a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a - \dfrac{1}{2}\cos a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$
$= 0$.

b. $\sin a + \sin\left(a+\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(a+\dfrac{4\pi}{3}\right)$
$= \sin a - \dfrac{1}{2}\sin a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos a - \dfrac{1}{2}\sin a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos a$
$= 0$.

98 **a.** $\cos^2 x = 1 - (\sin x)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$
$= 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$, donc $\cos x = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

b. Le cosinus et le sinus ne sont pas linéaires, ou dit autrement, on n'a pas :
$\cos(2x) = 2\cos x$ ni $\sin(2x) = 2\sin x$.

c. La réponse serait exacte si x appartenait à $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Mais puisque x appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;0\right]$, il faut prendre son supplémentaire, à savoir 2,80 radians à 10^{-2} près.

99 **a.** $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{4}$
$= \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

b. $\cos\dfrac{7\pi}{6} = \cos\left(2\times\dfrac{7\pi}{12}\right) = 2\cos^2\dfrac{7\pi}{12} - 1$

donc $2\cos^2\dfrac{7\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ce qui revient à

$\cos^2 \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{3}+2}{4}$, et comme $\cos \dfrac{7\pi}{12} < 0$,

$\cos \dfrac{7\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Il faut vérifier que les deux valeurs trouvées sont égales. Elles sont de même signe.
Comparons leurs carrés :

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2.$$

$\sin \dfrac{7\pi}{6} = \sin\left(2 \times \dfrac{7\pi}{12}\right) = 2\sin \dfrac{7\pi}{12} \cos \dfrac{7\pi}{12}$ donc

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin \frac{7\pi}{6}}{-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Il faut vérifier que les deux valeurs trouvées sont égales. Elles sont de même signe.
Comparons leurs carrés :

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2.$$

100 **a.** $\widehat{\text{BIC}} = 2\theta$ (théorème de l'angle inscrit), l'égalité suivante est immédiate.

b. $\overrightarrow{\text{IB}}\cdot\overrightarrow{\text{IC}} = \text{R}^2 \cos \widehat{\text{BIC}} = \text{R}^2\cos(2\theta)$
et $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 4\text{R}^2\cos^2\theta$.

c. $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = (\overrightarrow{\text{AI}} + \overrightarrow{\text{IB}})\cdot(\overrightarrow{\text{AI}} + \overrightarrow{\text{IC}}) = 2\overrightarrow{\text{IB}}\cdot(\overrightarrow{\text{AI}} + \overrightarrow{\text{IC}})$
$= 2\text{R}^2 + 2\text{R}^2\cos(2\theta) = 2\text{R}^2(\cos(2\theta) + 1)$.
On en déduit que $2\cos^2\theta = \cos(2\theta) + 1$ soit $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$.

d. $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta)$
$= \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta$
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta)$
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Pour aller plus loin

108 **1.** Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ a pour coordonnées $(x_0 - \alpha\,;\, y_0 - \beta)$, donc :
$\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = (x_0 - \alpha)a + (y_0 - \beta)b$.
Et puisque H appartient à la droite $\mathscr{D}$, on a $a\alpha + b\beta + c = 0$, d'où $-a\alpha - b\beta = c$, ce qui permet de conclure.

2. En utilisant l'expression du produit scalaire avec les normes, on trouve :
$\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM} \times \|\vec{n}\| \times \cos(\overrightarrow{HM}, \vec{n})$
$= HM \times \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(\overrightarrow{HM}, \vec{n})$, et puisque les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, le cosinus concerné vaut -1 ou 1. Un passage à la valeur absolue donne donc le résultat.

3. En égalant les deux expressions de $|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}|$, on obtient : $|ax_0 + by_0 + c| = HM \times \sqrt{a^2 + b^2}$, ce qui donne l'égalité annoncée.

4. a. On trouve :

$$d(\text{A, D}) = \frac{\left|2 \times (-1) + 3 \times 3 - 5\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

b. La droite d'équation $3x + 4y + \lambda = 0$ est tangente au cercle proposé si et seulement si la distance entre le centre du cercle et la droite est égale au rayon du cercle.

Cela revient à dire que $\dfrac{\left|3 \times 1 + 4 \times 1 + \lambda\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$,

autrement dit que $|7 + \lambda| = 5$, soit encore que $\lambda = -2$ ou $\lambda = -12$.

109 **1.** On peut conjecturer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. Un point $\text{M}(x\,;\,y)$ appartient à la droite (AP) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont orthogonaux, ce qui revient à écrire $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 0$, soit encore que :

$$(x - a)(c - b) + \left(y - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) = 0.$$

Cela équivaut encore à

$$(c - b)\left[(x - a) + \left(y - \frac{1}{a}\right)\frac{-1}{bc}\right] = 0.$$

Puisque b et c sont différents, on peut diviser par $c - b$, puis tout multiplier par abc pour obtenir l'équation annoncée.

b. L'orthocentre appartient à la hauteur issue de A, mais aussi à la hauteur issue de B dont une équation est, par analogie avec ce qui précède : $abcx - by - ab^2c + 1 = 0$.
On peut donc résoudre un système de deux équations à deux inconnues pour obtenir :

$x_{\text{H}} = -\dfrac{1}{abc}$ et $y_{\text{H}} = -abc$.

c. Le point H appartient donc bien à l'hyperbole puisque $y_{\text{H}} = \dfrac{1}{x_{\text{H}}}$.

110 **1.** On trouve d'une part
$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = BC\cdot BC = a^2$
et d'autre part :
$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
$= AC^2 - AB\cdot AC - AC\cdot AB + AB^2$
$= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
En égalant ces deux expressions, on retrouve bien la formule d'Al-Kashi.

2. a. On peut isoler le cosinus dans la formule d'Al-Kashi pour obtenir :

$$1-\cos(\widehat{BAC}) = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}.$$

b. $1 + \cos(\widehat{BAC}) = 1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}.$$

c. En multipliant membre à membre les égalités des questions précédentes, on trouve :
$1 - \cos^2(\widehat{BAC})$

$$= \frac{\left(a^2-(b-c)^2\right)\times\left((b+c)^2-a^2\right)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{\left(a+b-c\right)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}{4b^2c^2},$$

ce qui est la formule annoncée.

d. On a d'une part $\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \cos^2(\widehat{BAC})$ et d'autre part :
$(a + b + c)(a + b - c)(c + b - a)(c - b + a)$
$= (2p)(2p - 2c)(2p - 2a)(2p - 2b)$
$= 16p(p - a)(p - b)(p - c)$.
En remplaçant dans l'égalité du **c**, on obtient le résultat souhaité.

3. D'après l'exercice 94, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC}).$$

Or, d'après ce qui précède :

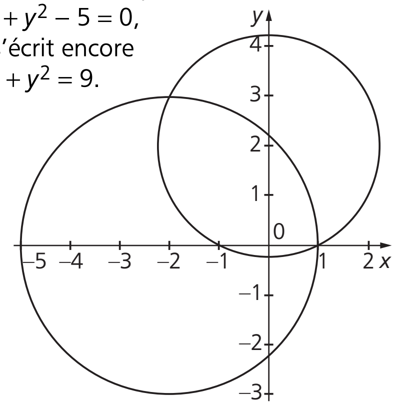
$$\left(\frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})\right)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

donc, le résultat annoncé s'obtient par passage à la racine carrée.

4. On a ici $a = 13$, $b = 37$, $c = 40$ et $p = 45$, d'où $S = \sqrt{45\times32\times8\times5} = \sqrt{57600} = 240$.
Le triangle ABC a bien des côtés de mesures respectives 13, 37 et 40. En désignant par H le projeté orthogonal de B sur (AC), on trouve H(5 ; 0), et l'aire de ABC vaut

$$\frac{AC\times BH}{2} = \frac{40\times12}{2} = 240.$$

111 **a.** $\mathscr{C}_0$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$, ce qui s'écrit encore $x^2 + (y - 2)^2 = 5$.
$\mathscr{C}_{-2}$ est le cercle d'équation $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$, ce qui s'écrit encore $(x + 2)^2 + y^2 = 9$.

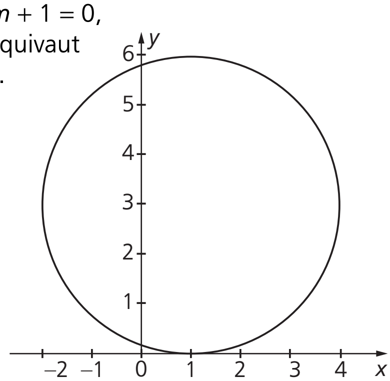


b. L'équation de $\mathscr{C}_m$ peut s'écrire:
$(x - m)^2 + (y - (m + 2))^2 = 2m^2 + 2m + 5$.
Il s'agit bien de l'équation d'un cercle de centre $K_m(m\ ;\ m + 2)$ et de rayon $R_m = \sqrt{2m^2+2m+5}$.

c. Il est clair que les deux points intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_{-2}$ sont les points de coordonnées (1 ; 0) et (–2 ; 3). Réciproquement, ces deux points vérifient bien l'équation de $\mathscr{C}_m$ pour tout réel m.

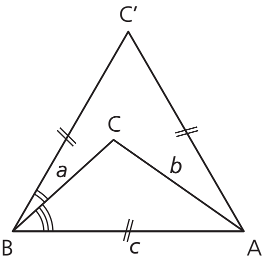
d. On constate que, pour tout réel m, $y_m = x_m + 2$, donc, tous les points K_m appartiennent à la droite d'équation $y = x + 2$.

e. Le cercle $\mathscr{C}_m$ sera tangent à l'axe des abscisses si la distance entre son centre et l'axe des abscisses est égale à son rayon, autrement dit si : $|m + 2| = \sqrt{2m^2+2m+5}$.
En élevant au carré, cela équivaut à :
$m^2 + 4m + 4 = 2m^2 + 2m + 5$, soit encore à $m^2 - 2m + 1 = 0$,
ce qui équivaut à $m = 1$.



f. Le cercle $\mathscr{C}_m$ sera tangent à l'axe des ordonnées si la distance entre son centre et l'axe des ordonnées est égale à son rayon, autrement dit si : $|m| = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$.
En élevant au carré, cela équivaut à :
$m^2 = 2m^2 + 2m + 5 = 0$, soit encore à :
$m^2 = 2m + 5 = 0$, équation qui n'admet pas de solution. Il n'existe donc aucun cercle $\mathscr{C}_m$ tangent à l'axe des ordonnées.

112 Cette inégalité porte le nom de « Inégalité de Weitzenböck ».



Comme l'énoncé le suggère, intéressons-nous à CC'^2 :

$CC'^2 = (CB + BC')^2 = CB^2 + BC'^2 + 2CB{\cdot}BC'$
$= a^2 + c^2 - 2BC{\cdot}BC' = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{CBC'})$.

Or, on a les égalités d'angles : $\widehat{CBC'} = \dfrac{\pi}{3} - \widehat{ABC}$,

donc : $\cos(\widehat{CBC'}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \widehat{ABC}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cos(\widehat{ABC}) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\widehat{ABC})$.

Or, d'après l'exercice 94, on a :

$\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{2S}{ac}$, donc :

$CC'^2 = a^2 + c^2 - ac\,[\cos(\widehat{ABC}) + \sqrt{3}\sin(\widehat{ABC})]$

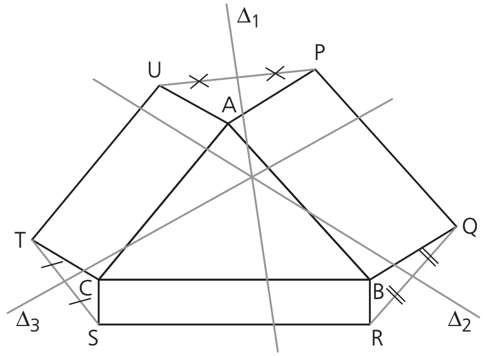
$= a^2 + c^2 - ac\left[\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \sqrt{3}\,\dfrac{2S}{ac}\right]$

$= \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} - 2\sqrt{3}S$.

Finalement : $a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S = 2CC'^2 \geqslant 0$, ce qui fournit le résultat. Le cas d'égalité a lieu si et seulement si $CC' = 0$, ce qui revient à dire que ABC est équilatéral.

113 **a.** Notons O le milieu du rectangle.
On trouve :
$\overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{MR}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OR})^2$
$= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OP}^2 + \overrightarrow{OR}^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR})$
$= 2\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{OP}^2$
(car les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont opposés, donc, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = 0$).

Le même raisonnement conduit à
$MS^2 + MQ^2 = 2MO^2 + 2OP^2$, d'où l'égalité.



b. Notons I le point d'intersection des médiatrices de [QR] et [UP].
D'après la question **a.**, on a les trois égalités :
$IP^2 + IB^2 = IA^2 + IQ^2$,
$IC^2 + IR^2 = IS^2 + IB^2$,
$IA^2 + IT^2 = IC^2 + IU^2$.
En sommant ces trois égalités, et en tenant compte des égalités $IU = IP$ et $IQ = IR$, on obtient : $IT^2 = IS^2$, d'où $IT = IS$, donc, I appartient à la médiatrice du segment [TS].

114 **1.** $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$, et $\mathscr{C}'$ a pour équation $(x - a)^2 + y^2 = R'^2$.
2. a. Si $M(x_0\,;\,y_0)$ appartient à $\mathscr{C}$, alors :
$x_0^2 + y_0^2 = R^2$ et $(x_0 - a)^2 + y_0^2 = R'^2$.
Par différence de ces deux égalités, on obtient : $2ax_0 - a^2 = R^2 - R'^2$, ce qui donne l'égalité attendue en isolant x_0.
b. On a donc :

$y_0^2 = R^2 - x_0^2 = R^2 - \dfrac{(a^2 + R^2 - R'^2)^2}{(2a)^2}$

$= \left(R - \dfrac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a}\right)\left(R + \dfrac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a}\right)$

$= \dfrac{1}{4a^2}(2aR - a^2 - R^2 + R'^2)(2aR + a^2 + R^2 - R'^2)$

$= \dfrac{1}{4a^2}\left(R'^2 - (a - R)^2\right)\left((a + R)^2 - R'^2\right)$

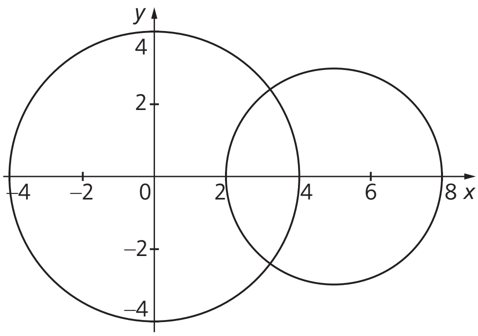
$= \dfrac{1}{4a^2}(R' + a - R)(R' - a + R)(a + R + R')(a + R - R')$.

c. Les deux quantités $a + R + R'$ et $a + R - R'$ sont positives, donc, s'il existe effectivement deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, alors, la quantité $(R' + a - R)(R' - a + R)$ doit être strictement positive, ce qui implique que le polynôme du second degré en a, à savoir

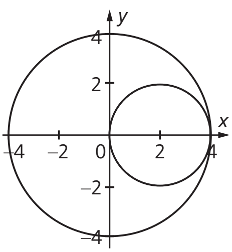
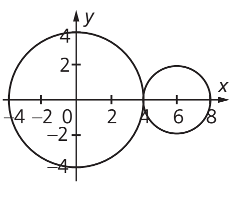
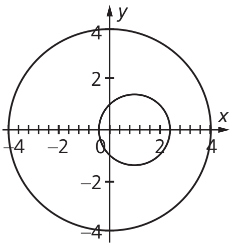
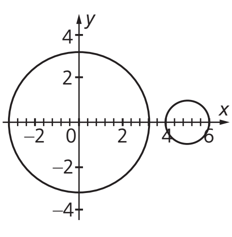
$(a - (R - R'))(a - (R + R'))$ doit être strictement négatif, donc que $R - R' < a < R + R'$.
Réciproquement, si un tel encadrement est vérifié, alors, l'équation du **2.b.** admet effectivement deux solutions distinctes y_0 et y'_0 distinctes, donc, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points d'intersection.

d. On a bien $R - R' < a < R + R'$, donc, les deux cercles proposés ont deux points d'intersection, dont les coordonnées sont les solutions du système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (x-5)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$.

Les deux points d'intersection sont donc :
$M_1\left(\frac{16}{5}; \frac{12}{5}\right)$ et $M_2\left(\frac{16}{5}; -\frac{12}{5}\right)$.



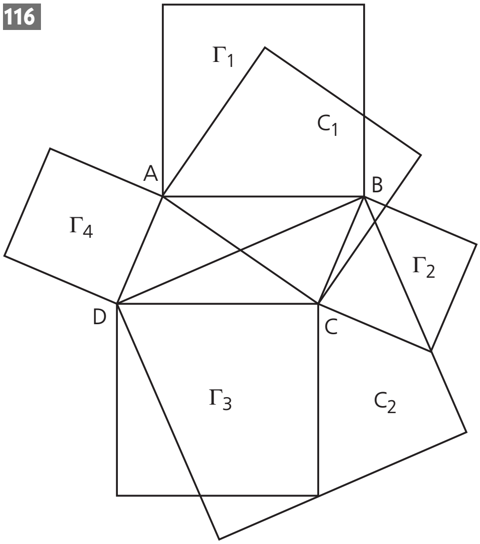
3. Ils peuvent être dans une des 4 configurations suivantes :

Tangents intérieurement	Tangents extérieurement
	
L'un intérieur à l'autre	L'un extérieur à l'autre
	

Défis

115 **1.** On pourrait imaginer que :
$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_n\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\| + \ldots + \|u_n\|$.
2. Il suffit d'appliquer le **1.** avec les vecteurs $\vec{u}_1(a_1 ; b_1)$, $\vec{u}_2(a_2, b_2)$, …, $\vec{u}_n(a_n, b_n)$.

116



La somme des aires des carrés Γ_i est égale à $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
La somme des aires des carrés C_i est égale à
$AC^2 + BD^2 = (AB + BC)^2 + (BC + CD)^2$
$= AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC + BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD$
$= AB^2 + BC^2 + AD^2 + DA^2 + 2BC \cdot (AB + CD)$
(car $DA^2 = BC^2$).
Puisque le vecteur AB + CD est nul, on a bien l'égalité annoncée.

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

1. Al-Kashi est un mathématicien et astronome Perse qui vécut de 1380 à 1429. On rencontre pour la première fois un résultat similaire à la formule d'Al-Kashi dans « Les éléments d'Euclide » au troisième siècle avant Jésus-Christ. Mais ce sont Al-Kashi et François Viète qui, avec l'apparition des tables trigonométriques pour les fonctions cosinus et sinus, proposèrent la version actuelle de ce résultat. Jusqu'à 1990, on attribuait à cette formule le nom de « Théorème de Pythagore généralisé » ou encore

« Loi des cosinus ». Ce n'est que depuis cette date qu'on parle du théorème (ou de la formule) d'Al-Kashi.

2. Les deux figures 1 et 2 ont le même contour et sont parfaitement superposables. Ce sont seulement les découpages de ces deux figures qui diffèrent.

Les aires proposées sur la figure 1 sont claires (il s'agit d'aires de carrés).

Les deux parallélogrammes BCMN et ACLK de la figure 2 ont une aire égale à la longueur de leur base ([CM] ou [LK]), à savoir b, multipliée par leur hauteur égale à $a \times \cos(\gamma)$.

En égalant les aires des figures 1 et 2, on trouve donc :

$a^2 + b^2 + \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CFH} + \mathcal{A}_{CDH}$
$= ab\cos(\gamma) + ab\cos(\gamma) + c^2 + \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CFH} + \mathcal{A}_{CDH}$,

ce qui donne après simplifications :

$a^2 + b^2 = 2ab\cos(\gamma) + c^2$, c'est-à-dire :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ACB})$.

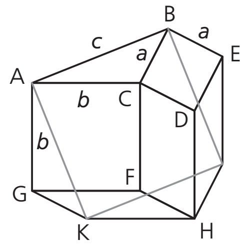
Si l'angle $\widehat{ACB}$ est aigu (ce qui correspond à la figure du livre)

$\mathcal{A}_{ABC} + a^2 + b^2 + \mathcal{A}_{DCFH}$
$= c^2 + \mathcal{A}_{ABC} + 2\,\mathcal{A}_{ABC} + 2\mathcal{A}_{AKLC}$.

$a^2 + b^2 = c^2 + 2\mathcal{A}_{AKLC}$

$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\widehat{ACB}$.

Si l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus,



$a^2 + b^2 + \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CDHF} + 2\mathcal{A}_{GFHK}$
$= c^2 + \mathcal{A}_{ABC} + 2\mathcal{A}_{AGK}$.

$c^2 = a^2 + b^2 + 2\mathcal{A}_{GFHK} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ACB}$.