Trigonométrie

Chapitre 6

Ouverture

Comme l'écriture des nombres, la trigonométrie trouve sa source à Babylone, il y a environ 4 000 ans. Les Babyloniens observaient le ciel et souhaitaient déterminer les distances entre les astres. Afin de mesurer des angles, pour des raisons qui tiennent à leur système de numération de base 60, les Babyloniens choisirent comme unité d'angle la 360^{e} partie du cercle : le degré était né. Il semble, car c'est un sujet de débats, qu'ils disposèrent aussi de tables permettant de passer des mesures des angles à des mesures de distances.
Les premières « Tables de cordes », qui sont des tables de longueurs d'arcs de cercles et des longueurs des cordes sous-tendues, apparurent dans un ouvrage d'Hipparque au II^{e} siècle avant Jésus Christ : ce furent les premières « Tables trigonométriques ».
Ce travail fut poursuivi par Ptolémée, en Egypte, au II^{e} siècle, dans son traité « l'Almageste » ; dans cet ouvrage, Ptolémée expose la manière de calculer des longueurs de cordes et développe même des formules d'addition et de soustraction équivalentes aux formules du sinus et du cosinus de la somme, qui sont au programme de première.
Le pas décisif fut réalisé en Inde, vers les années 500 : l'astronome et mathématicien Aryabhata eut l'idée de ne considérer que la demi corde interceptée par l'angle double : le sinus tel qu'il est enseigné au collège était né.

L'étude des engrenages est intéressante pour des élèves à plusieurs points de vue :
• les sens comparés des rotations des différentes roues figurant dans l'engrenage ;
• les comparaisons des vitesses de rotation de ces différentes roues. En particulier une horloge possède en général un seul axe initial de rotation, entraîné par un dispositif mécanique (poids, eau, ressort, etc.). Sur cet axe sont fixées les deux roues qui vont entraîner, après des roues intermédiaires, les aiguilles des heures et des minutes. Calculer tous les rayons, des roues initiales et des roues intermédiaires, afin que l'aiguille des minutes fasse un tour complet pendant que l'aiguille des heures fait un douzième de tour, et ceci dans le bon sens, est un exercice intéressant.
La question posée est, elle, relative aux sens comparés des rotations dans un engrenage : lorsqu'une roue entraîne une autre roue, le sens de rotation s'inverse. Comme il y a quatre transmissions (trois roues intermédiaires), la roue motrice doit tourner dans le sens des aiguilles, qui est le sens inverse du sens direct.

Vérifier ses acquis

1 **a.** 180°, 90°, 45°, 30°.
b. π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.
c. π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$.

2 **1.** c. **2.** d. **3.** c.

3 **1.** a. **2.** a. **3.** c. **4.** a. **5.** a.

4 **a.** $\cos t = \text{OH}$, $\sin t = \text{HM}$.
b. M($\cos t$; $\cos t$).
c. Le théorème de Pythagore dans OHM donne $\text{OM}^2 = 1 = \text{OH}^2 + \text{HM}^2 = \cos^2 t = \sin^2 t$.

Activités d'introduction

Commentaires

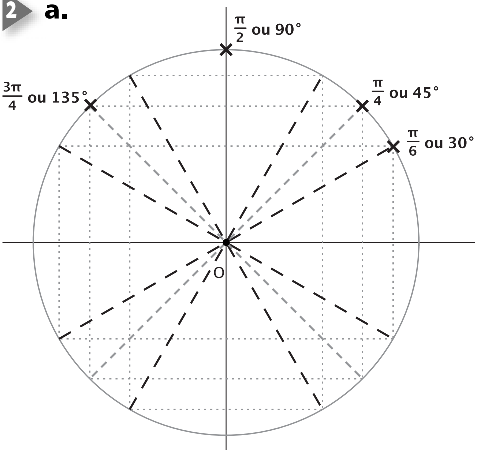
Activité 1 : l'objectif est de faire découvrir d'autres unités d'angles que le degré.
Activité 2 : le but est d'utiliser la division euclidienne pour découvrir la mesure principale d'un angle en radian.

Activité 3 : dans cette activité, on cherche à faire le lien entre la représentation graphique sur le cercle trigonométrique et la mesure principale d'un angle.
Activité 4 : ici il faut revoir la définition du cosinus et du sinus d'un réel pour faire le lien grâce au cercle trigonométrique entre les différentes valeurs du cosinus et du sinus des angles proposés.

Activité 1

1 **a.** Dans un tour, il y a donc 400 grades.
b. La formule de conversion est donc :
1 grade $= \dfrac{400}{360}$ degré $= \dfrac{10}{9}$ degré.

2 **a.**



b. On en déduit la formule de conversion :
1 radian $= \dfrac{2\pi}{360}$ degré $= \dfrac{\pi}{180}$ degré.

c.

Angles	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$
Longueur de l'arc complémentaire	$\dfrac{11\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{7\pi}{4}$	$\dfrac{4\pi}{3}$
Angle au centre	300	270	315	240

Activité 2

1 **a.** $\dfrac{17\pi}{4} = 2 \times \dfrac{8\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 2 \times 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$.

b. $\dfrac{14\pi}{3} = 2 \times \dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 2 \times 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$.

c. $\dfrac{19\pi}{6} = 1 \times \dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{7\pi}{6} = 1 \times 2\pi + \dfrac{7\pi}{6}$.

d. $-\dfrac{35\pi}{6} = -2 \times \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{11\pi}{6} = -2 \times 2\pi - \dfrac{11\pi}{6}$.

2 **a.** Pas de changement.
b. Pas de changement.

c. $\dfrac{19\pi}{6} = 2 \times \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6} = 2 \times 2\pi - \dfrac{5\pi}{6}$.

d. $-\dfrac{35\pi}{6} = -3 \times \dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = -3 \times 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$.

Activité 3

1 **a.** A correspond aux réels : $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{13\pi}{6}$; $\dfrac{25\pi}{6}$; $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-\dfrac{23\pi}{6}$; $-\dfrac{35\pi}{6}$.

B correspondaux réels : $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$; $\dfrac{14\pi}{3}$; $-\dfrac{4\pi}{3}$; $-\dfrac{10\pi}{3}$; $-\dfrac{16\pi}{3}$.

C correspond aux réels : $\dfrac{21\pi}{4}$; $\dfrac{13\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{4}$; $-\dfrac{11\pi}{4}$; $-\dfrac{19\pi}{4}$

et D correspond aux réels : $\dfrac{11\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{9\pi}{2}$.

b. Sur $[0 ; 2\pi[$, les solutions sont pour A, B, C et D : $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{4}$; $\dfrac{3\pi}{2}$ et sur $]-\pi ; \pi]$,
les solutions sont pour A, B, C et D : $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $-\dfrac{3\pi}{4}$; $-\dfrac{\pi}{2}$.

c. Ce sont les mêmes points car on fait un tour de plus ou de moins.

2 **a.** Il suffit de comparer avec les valeurs de la question **1. a.**

b. On a : $\dfrac{4\pi}{3} = 1 \times \dfrac{6\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = 1 \times 2\pi - \dfrac{2\pi}{3}$;

$\dfrac{17\pi}{6} = 1 \times \dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = 1 \times 2\pi + \dfrac{5\pi}{6}$;

$-\dfrac{5\pi}{4} = -1 \times \dfrac{8\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = -1 \times 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$;

$\dfrac{7\pi}{6} = 1 \times \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6} = 1 \times 2\pi - \dfrac{5\pi}{6}$;

$-\dfrac{5\pi}{3} = -1 \times \dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = -1 \times 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$

et $\dfrac{11\pi}{6} = 1 \times \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 1 \times 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$.

Il n'y a pas deux points associés à un même réel.

Activité 4

1 **a.** $\cos\frac{13\pi}{6} \approx 0,866$ et $\sin\frac{13\pi}{6} = 0,5$.

b. $\frac{13\pi}{6} = 1\times\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 1\times 2\pi + \frac{\pi}{6}$.

c. $\cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x_1 = \frac{1}{2}$.

d. $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

2 **a.** $\cos\frac{35\pi}{6} \approx 0,866$; $\sin\frac{35\pi}{6} = -0,5$;
$\frac{35\pi}{6} = 3\times\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 3\times 2\pi - \frac{\pi}{6}$
qui donne $y_1 = -x_1$,
$\cos\frac{29\pi}{6} \approx -0,866$; $\sin\frac{29\pi}{6} = 0,5$;
$\frac{29\pi}{6} = 2\times\frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$
qui donne $z_1 = \pi - x_1$ et
$\cos\frac{19\pi}{6} \approx -0,866$; $\sin\frac{19\pi}{6} = -0,5$;
$\frac{19\pi}{6} = 2\times\frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 2\times 2\pi - \frac{5\pi}{6}$
qui donne $t_1 = x_1 - \pi = x_1 + \pi$.

b. $\cos y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin y_1 = -\frac{1}{2}$,

$\cos z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin z_1 = \frac{1}{2}$,

$\cos t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin t_1 = -\frac{1}{2}$.

c. M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, M et P sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, M et Q sont symétriques par rapport à O.

d. $\cos y_1 = \cos x_1$ et $\sin y_1 = -\sin x_1$,
$\cos z_1 = -\cos x_1$ et $\sin z_1 = \sin x_1$
et $\cos t_1 = -\cos x_1$ et $\sin t_1 = -\sin x_1$.

3 On en déduit que : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

Travaux pratiques

TP TICE Que vaut le sinus d'un angle double ?

1 **1.** On peut penser à multiplier par 2 mais avec des exemples on voit bien que cela ne fonctionne pas.

2.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha \times \cos\alpha$	$\sin 2\alpha$
0	0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0,5	0,866	0,433	0,866
$\frac{\pi}{4}$	0,707	0,707	0,5	1
$\frac{\pi}{3}$	0,5	0,866	0,433	0,866
$\frac{\pi}{2}$	1	0	0	0
π	0	1	0	0
1,5	0,997	0,071	0,071	0,141
2	0,909	–0,416	–0,378	–0,757
2,5	0,598	–0,801	–0,479	–0,959
3	0,141	–0,99	–0,14	–0,28

On semble conjecturer que :
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \times \cos\alpha$.

3. On constate que les deux courbes oscillent de la même façon mais celle de g avec une amplitude plus grande.

4. a. b. On constate le même résultat.

2 **a.** Le triangle OAB est isocèle en O donc ses angles sont : $\widehat{O} = \pi - 2\alpha$; $\widehat{A} = \widehat{B} = \alpha$.

b. Dans le triangle ABI rectangle en B,
$\sin\alpha = \frac{BI}{AI} = \frac{BI}{2}$ et $\cos\alpha = \frac{AB}{AI} = \frac{AB}{2}$.

c. L'aire donne : $\frac{AI \times BH}{2} = \frac{AB \times BI}{2}$ soit :
$BH = \frac{AB \times BI}{2} = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

d. On a dans OBH : $\sin\widehat{O} = \frac{BH}{OB}$ soit :
$BH = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

TP Algorithmique La méthode de la sécante

1 **a.** L'équation de la droite est :
$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}x + f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}x_1.$$

b. Elle coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$ ce qui donne l'équation :

$$0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x_2 + f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x_1$$

d'où : $x_2 = x_1 - \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$.

c. $x_2 = 2 - \dfrac{1}{f(2) - f(1)} f(2) \approx 1{,}614$.

2 **a. b. c.** Ci-dessous un algorithme qui peut répondre aux trois questions :

```
======TPALGO   ======
"A=":?→A↵
"B=":?→B↵
"N=":?→N↵
For 1→I To N↵
B-(B-A)÷(Y1(B)-Y1(A))
×Y1(B)→C↵
B→A↵
C→B↵
C◢
Next↵
TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
```

```
PROGRAM:TPALGO
:Prompt A,B,N
:For(I,1,N)
:B-(B-A)/(Y1(B)-
Y1(A))*(Y1(B))→C
:B→A
:C→B
:Pause
:Disp C
:End
:
```

3 **a.** a doit appartenir à l'intervalle $[-1 ; 1]$.
b. On peut choisir l'intervalle $[0 ; \pi]$ où la fonction cosinus est strictement décroissante.
c. Il faut résoudre l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne à la calculatrice : 1,047 197 6.
d. On va utiliser la fonction : $f(x) = \cos x - 0{,}5$.
e. Le programme s'arrête à la valeur 1,047 197 551 dès la sixième itération.
f. Pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier, il suffit d'ajouter $k \times 2\pi$, où k est un entier relatif, à la solution précédente.

Exercices

Appliquer le cours

1 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux. **e.** Faux. **f.** Faux.

2 **1.** d. **2.** b. **3.** c. **4.** b.

3 **1.** b. **2.** c. **3.** d.

4 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Vrai. **f.** Vrai.

5 **1.** b. **2.** b. **3.** c. **4.** d.

6 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

7 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Faux.

8 **a.** Faux **b.** Faux **c.** Faux **d.** Faux

9 **1.** d. **2.** b.

11 **a.** $\dfrac{2\pi}{3} \times \dfrac{180}{\pi} = 120°$.

b. $\dfrac{7\pi}{6} \times \dfrac{180}{\pi} = 210°$.

c. $-\dfrac{3\pi}{4} \times \dfrac{180}{\pi} = -135°$.

d. $-144 \times \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{4\pi}{5}$ rad.

e. $240 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{4\pi}{3}$ rad.

f. $330 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{11\pi}{6}$ rad.

13 $-\dfrac{5\pi}{6}$ est une mesure principale.

$-\dfrac{7\pi}{2}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{2}$.

$\dfrac{11\pi}{3}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{3}$.

$-\dfrac{5\pi}{4}$ a pour mesure principale $\dfrac{3\pi}{4}$.

$-\dfrac{16\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{2\pi}{3}$.

$\dfrac{19\pi}{2}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{2}$.

$\dfrac{19\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{5\pi}{6}$.

$\dfrac{19\pi}{4}$ a pour mesure principale $\dfrac{3\pi}{4}$.

$\dfrac{10\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{3}$.

$\dfrac{4\pi}{3}$ a pour mesure principale $-\dfrac{2\pi}{3}$.

14 **a.** $\dfrac{17\pi}{4}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{4}$.

b. $-\dfrac{16\pi}{3}$ a pour mesure principale $\dfrac{2\pi}{3}$.

c. $\dfrac{37\pi}{6}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{6}$.

d. $\dfrac{28\pi}{6}$ a pour mesure principale $\dfrac{2\pi}{3}$.

15 **a.** $-\dfrac{7\pi}{2}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{2}$.

b. $\dfrac{13\pi}{3}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{3}$.

c. $\dfrac{11\pi}{4}$ a pour mesure principale $\dfrac{3\pi}{4}$.

d. $\dfrac{23\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{6}$.

e. $-\dfrac{11\pi}{3}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{3}$.

f. $-\dfrac{15\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{2}$.

16 **a.** $\dfrac{23\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{6}$.

b. $-\dfrac{7\pi}{6}$ a pour mesure principale $\dfrac{5\pi}{6}$.

c. $\dfrac{79\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{5\pi}{6}$.

d. $-\dfrac{49\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{6}$.

17 **a.** $\dfrac{245\pi}{3} = \dfrac{246\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = 82\pi + \dfrac{\pi}{3}$ donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{3}$.

b. $-\dfrac{75\pi}{4} = -\dfrac{72\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = -18\pi - \dfrac{3\pi}{4}$ donc la mesure principale est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

c. $-\dfrac{131\pi}{6} = -\dfrac{132\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = -22\pi + \dfrac{\pi}{6}$ donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{6}$.

d. $\dfrac{153\pi}{2} = \dfrac{152\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 76\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{2}$.

e. $\dfrac{134\pi}{6} = \dfrac{67\pi}{3} = \dfrac{66\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = 22\pi + \dfrac{\pi}{3}$ donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{3}$.

f. $-1\,961\pi = -1\,962\pi + \pi$ donc la mesure principale est π.

19 **1.** c. **2.** b.

20 **a.** $\dfrac{31\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{5\pi}{6}$, donc $\cos\dfrac{31\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{31\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

b. $-\dfrac{13\pi}{4}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{4}$, donc $\cos\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\dfrac{29\pi}{3}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(\dfrac{29\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{29\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d. $\dfrac{35\pi}{2}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\dfrac{35\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{35\pi}{2}\right) = -1$.

21 **a.** $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

b. $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

c. $\cos(x - \pi) = -\cos x$.

d. $\sin(3\pi + x) = -\sin x$.

e. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

f. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

22 **a.** $\cos(5\pi + x) = -\cos x$.

b. $\sin(x - 5\pi) = -\sin x$.

c. $\cos(x - 3\pi) = -\cos x$.

d. $\sin(-\pi + x) = -\sin x$.

e. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

f. $\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos x$.

24 **a.** $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$. **b.** $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

c. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **d.** $\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **f.** $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

25 **a.** $\cos 213\pi = -1$ et $\sin 213\pi = 0$.

b. $\cos\dfrac{31\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{31\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. $\cos\left(-\dfrac{19\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{19\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d. $\cos\left(-\dfrac{13\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{2}\right) = -1$.

e. $\cos\dfrac{84\pi}{6} = 1$ et $\sin\dfrac{84\pi}{6} = 0$.

f. $\cos\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

26 **a.** $t = \dfrac{2\pi}{3}$. **b.** $t = \dfrac{3\pi}{4}$. **c.** $t = -\dfrac{\pi}{6}$.

d. $t = -\dfrac{\pi}{6}$. **e.** $t = -\dfrac{3\pi}{4}$. **f.** $t = \dfrac{4\pi}{3}$.

28 **a.** $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

b. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

c. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

d. $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

e. $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.

f. $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

29 **a.** $2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

donc $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

b. $-x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

ou $-x = \pi - \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

donc $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

c. $3x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

ou $3x = \pi - \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

donc $x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

d. $-x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-x = -\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$

donc $x = -\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

e. $2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

ou $2x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

donc $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$.

f. $3x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $3x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

donc $x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

31 **a.** $x = 0{,}305 + 2k\pi$
ou $x = \pi - 0{,}305 + 2k\pi = 2{,}837 + 2k\pi$.
b. $x = 1{,}875 + 2k\pi$ ou $x = -1{,}875 + 2k\pi$.
c. $x = 0{,}100 + 2k\pi$
ou $x = \pi - 0{,}1 + 2k\pi = 3{,}242 + 2k\pi$.
d. $x = 2{,}691 + 2k\pi$ ou $x = -2{,}691 + 2k\pi$.
e. $x = 1{,}2 + 2k\pi$
ou $x = \pi - 1{,}2 + 2k\pi = 2{,}022 + 2k\pi$.
f. $x = 0{,}795 + 2k\pi$ ou $x = -0{,}795 + 2k\pi$.

32 **a.** $2x = 0{,}412 + 2k\pi$
ou $2x = \pi - 0{,}412 + 2k\pi = 2{,}73 + 2k\pi$
donc $x = 0{,}206 + k\pi$ ou $x = 1{,}365 + k\pi$.

b. $-x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

donc $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

c. $3x = -0{,}201 + 2k\pi$
ou $3x = \pi - 0{,}201 + 2k\pi = 3{,}343 + 2k\pi$

donc $x = -0{,}067 + \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = 1{,}14 + \dfrac{2k\pi}{3}$.

d. $2x = 2{,}346 + 2k\pi$ ou $2x = -2{,}346 + 2k\pi$
donc $x = 1{,}173 + k\pi$ ou $x = -1{,}173 + k\pi$.

e. $-x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

$-x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

donc $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

f. $\frac{x}{2} = 1,471 + 2k\pi$ ou $\frac{x}{2} = -1,471 + 2k\pi$ donc $x = 2,942 + 4k\pi$ ou $x = -2,942 + 4k\pi$.

33 a. c. f.

34 a. c. f.

S'entraîner

35 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux. **e.** Vrai. **f.** Faux.

36 **1.** c. **2.** c. **3.** c. **4.** c.

37 **a.** Cet algorithme donne la mesure principale **b.**

38 **a.** $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$.

c. $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4}\right]$.

d. $\left]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.

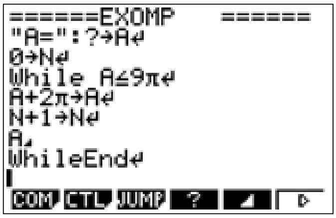
e. $\left]-\pi ; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.

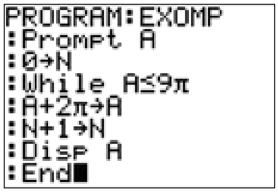
39 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Vrai. **e.** Faux. **f.** Vrai.

40 La zone rouge est définie par : $1 \leqslant r \leqslant 3$ et $\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.
la zone bleue est définie par : $1 \leqslant r \leqslant 3$ et $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$.
la zone verte est définie par : $1 \leqslant r \leqslant 3$ et $-\frac{5\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{2}$.
la zone violette est définie par : $1 \leqslant r \leqslant 3$ et $\frac{5\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \pi$.

41 Il suffit de rajouter $k \times 2\pi = k \times \frac{8\pi}{4}$ tout en restant dans l'intervalle $\left]\frac{-12\pi}{4} ; \frac{28\pi}{4}\right]$ ce qui donne : $-\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} ; \frac{15\pi}{4} ; \frac{23\pi}{4} ; -\frac{9\pi}{4}$.

42 Une solution dans le même intervalle mais dans laquelle on peut choisir son réel :





43 **a.** Positif. **b.** Positif. **c.** Négatif. **d.** Négatif.

44 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Faux.

45 **a.** $\cos x = \frac{1}{2}$. **b.** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
c. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **d.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

46 **1.** a. **2.** d. **3.** c. **4.** c.

47 **a.** $\sin x = -0,8$. **b.** $\cos x = -0,6$.

48
a. Voir la table dite des sinus.
b. $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$ degrés $= \frac{180 \times 60}{\pi}$ minutes $= 3\,475,75$.

49 **a.** $t = 1,159$. **b.** $t = 0,927$.
c. $t = -0,795$.
d. $t = \pi - 0,305 = 2,837$.

50 **a.** On calcule
$x_A^2 = y_A^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = 1$,
donc le point A est sur le cercle $\mathscr{C}$.
b. Par conséquent, ses coordonnées donnent exactement le cosinus et le sinus de l'angle t, donc : $\cos t = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin t = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.
c. La calculatrice donne : $t \approx 1,96$ mais comme les coordonnées de A sont négatives, $t \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et donc en fait : $t \approx -1,96$.

d. On divise le résultat de la calculatrice par π, on trouve –0,625, soit $-\frac{5}{8}$, donc : $t = -\frac{5\pi}{8}$.

e. $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

51 **a.** Le théorème de Pythagore dans ABC donne : $AC = \sqrt{2}$, et dans ACG : $AG = \sqrt{3}$.

b. Dans ACG, on a : $\cos\widehat{CAG} = \frac{AC}{AG} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, d'où : $\widehat{CAG} \approx 0{,}615$ radians, soit 35,26°.

52 **a.** Le théorème de Thalès dans OMH et OTI donne : $\frac{OM}{OT} = \frac{OH}{OI} = \frac{MH}{TI}$,

soit : $\frac{OM}{OT} = \frac{\cos t}{1} = \frac{\sin t}{TI}$,

donc : $TI = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$.

b. Pour un angle de $\frac{\pi}{4}$, OITJ forment un carré donc : TI = 1.

c. Pour un angle de $\frac{\pi}{2}$, les droites (TI) et (OJ) sont parallèles donc la tangente n'existe pas.

d. On a : $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ et

$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$ donc impossible car $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

De plus : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

et $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

53 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Faux. **e.** Faux. **f.** Vrai.

54 **a.** A = 2. **b.** B = 0.

c. $C = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2\sin^2\alpha = 1$.

d. $D = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1 = 0$.

55 **1. a.** $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{HI}{OI} = HI$

donc le coté du polygone intérieur vaut

$OA = 2HI = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{180}{n}\right)$.

b. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{KC}{OK} = KC$

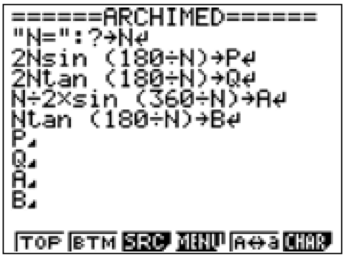
donc le coté du polygone extérieur vaut

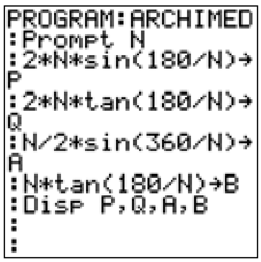
$BC = 2KC = 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{180}{n}\right)$.

2. Le périmètre du polygone intérieur vaut $2n\sin\left(\frac{180}{n}\right)$ et celui du polygone extérieur $2n\tan\left(\frac{180}{n}\right)$.

L'aire du polygone intérieur vaut $\frac{n}{2}\sin\left(\frac{360}{n}\right)$ et celle du polygone extérieur $n\tan\left(\frac{180}{n}\right)$.

3. a.





b. Il suffit de diviser les périmètres par 2.

56 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Faux. **e.** Vrai. **f.** Vrai.

57 **a.** $-\cos x + 2\cos x - 3(-\cos x) = 4\cos x$.

b. $-\sin x - 2(-\sin x) + 5(-\sin x) = -4\sin x$.

c. $\cos x - 2\cos x - \cos x = -2\cos x$.

d. $-\sin x + 3(-\sin x) - (-\sin x) = -3\sin x$.

58 **a.** $\cos x - 2\cos x + (-\cos x) = -2\cos x$.
b. $\cos x - 2(\cos x) + (-\cos x) = -2\cos x$.
c. $-\cos x + 3\cos x - \cos x = \cos x$.
d. $-\sin x + 2(-\sin x) + \sin x = -2\sin x$.

59 **a.** $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$
$= \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} = 0$.
b. $\sin\frac{\pi}{7} + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{7}\right)$
$= \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = 0$.
c. $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$
$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = 2$.

60 **a.** $\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
donc deux à deux, on obtient 1 et donc :
$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \ldots + \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 5 + \sin^2\left(\frac{6\pi}{12}\right) = 6$.
b. De même, on a
$\sin^2\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{10}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$
donc deux à deux, on obtient 1 et :
$\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \ldots + \sin^2\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
$= 4 + \sin^2\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 5$.
c. $\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
$= \cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$
$= \cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$.

61 **a. b.** $-\frac{\pi}{5}$ est symétrique par rapport aux abscisses, $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ est symétrique par rapport aux ordonnées, $-\frac{4\pi}{5} = -\pi + \frac{\pi}{5}$ est symétrique par rapport à O, $\frac{7\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$ et $-\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2}$.
c. $\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}$
$= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$ donc $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.
d. $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;
$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;
$\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;
$\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;
$\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

62 **a.** Ici, les solutions générales sont $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Comme $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi] = \left[0 ; \frac{8\pi}{4}\right]$, on a les solutions $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$.
b. Le cours donne $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ mais il reste à savoir quelles sont les valeurs de k qui donnent des solutions dans l'intervalle $[-\pi ; 5\pi] = \left[-\frac{3\pi}{3} ; \frac{15\pi}{3}\right]$.
Car ici $2\pi \frac{6\pi}{3}$, cela donne les valeurs $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$.
c. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$.
d. $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$.

e. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$.

f. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$.

63 **a.** $x = 3x + 2k\pi$ ou $x = -3x = 2k\pi$ c'est-à-dire $x = -k\pi$ ou $x = k\frac{\pi}{2}$.

b. $x = 2x + 2k\pi$ ou $x = \pi - 2x + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = -2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.

c. $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi$.

d. $3x - \frac{\pi}{4} = x + 2k\pi$ ou $3x - \frac{\pi}{4}\ \pi - x + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$.

e. $3x - \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $3x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$.

f. Il faut transformer l'équation par exemple en $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ d'où $2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

64 **a.** $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ donc change de signe entre a et b.

b. $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ qui change aussi de signe donc $\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$.

c. $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0{,}53 > 0$ donc $\alpha \in \left[\frac{\pi}{8} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

d. I de 1 à N ; $B = \frac{(A+B)}{2}$; sinon $A = \frac{(A+B)}{2}$.

e. La valeur approchée est 0,739.

65 On transforme le système en $\begin{cases} 8X + 3Y = 1 \\ 6X + 5Y = -2 \end{cases}$ qui donne $X = \frac{1}{2}$ et $Y = -1$ soit alors : $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\sin y = -1$ et donc :

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

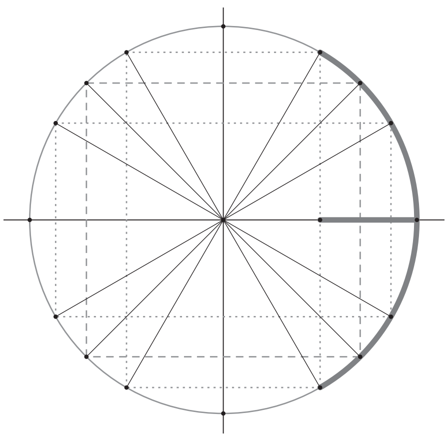
66 **a.** Le discriminant vaut $\Delta = 9$ d'où les solutions $\cos t = -1$ et $\cos t = \frac{1}{2}$ qui donnent finalement $t = \pi + 2k\pi$ ou $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

b. Plus rapidement $\cos^2 t = \frac{1}{2}$ donne $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ qui donnent finalement $t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

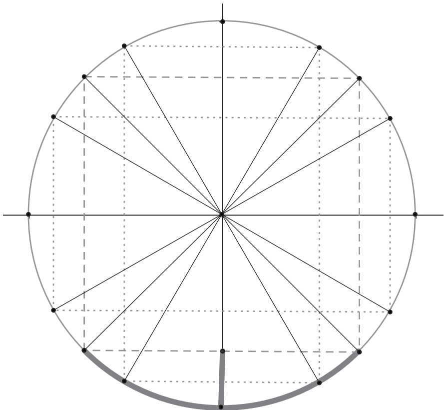
c. Le discriminant vaut $\Delta = 3$ d'où les solutions $\sin t = \sqrt{3}$ et $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; la première est impossible et la deuxième donne $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

d. Le discriminant vaut $\Delta = 4(\sqrt{3} - 1)^2$ d'où les solutions $\sin t = \frac{1}{2}$ et $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ qui donnent finalement $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $t = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

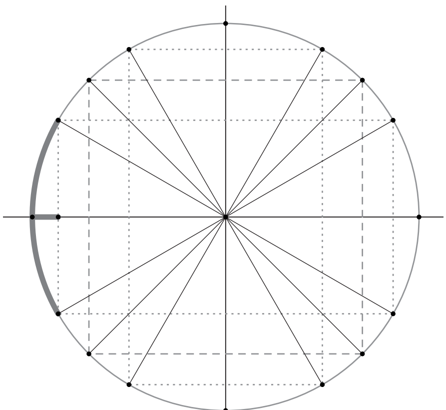
67 **a.** $x \in \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[$.



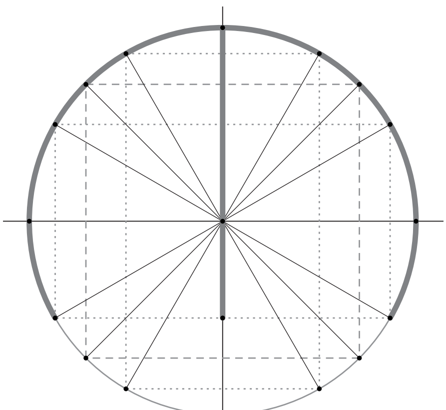
b. $x \in \left]-\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\right[$.



c. $x \in \left]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$.



d. $x \in \left]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6} ; \pi\right]$.



68 **a. b.** Yann a oublié qu'il y avait deux solutions sur un tour et Gaëlle a oublié que l'équation $x^2 = a$ donne deux solutions.

69 **1.** $A\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. a. Le coté vaut : $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

b. L'aire vaut : $\frac{\sqrt{3} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. En général l'aire vaut : $\frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

70 **a.** La longueur de l'arc vaut : $R\alpha$.

b. L'aire vaut : $\frac{1}{2}R^2\alpha$.

71 Il faut retirer trois secteurs angulaires égaux, qui constituent ensemble un demi-disque, à un triangle équilatéral de coté 2, ce qui donne : $2^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\pi 1^2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$.

72 **a.** $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$ et $g(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = g(x)$.

b. $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ donc f est impaire et $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$ donc g est paire.

c. d. $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = g(x)$

donc les deux courbes sont translatées de $\frac{\pi}{2}$.

73 **a.** L'équation équivaut à : $\cos x = \sin x$ ou $\cos x = -\sin x$, c'est-à-dire que les solutions sont sur la droite $y = x$ ou la droite $y = -x$ ce qui donne : $\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}$.

b. $f(x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ d'où le tableau de signe :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x - \sin x$	+	−	−	
$\cos x + \sin x$	+	+	−	
$f(x)$	+	−	+	

c. $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$;
$0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$; $0 \leqslant 2\cos^2 x \leqslant 2$; $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

74 **a.** $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$,

$A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

et $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{4}$.

b. L'aire du secteur vaut : $\frac{\alpha}{2}$.

c. L'aire du triangle vaut : $\frac{OA\times HM}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}$.

d. Il faut résoudre l'équation : $\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

soit $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc : $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ou $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

e. L'aire coloriée vaut : $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin\alpha}{2}$.

75 **a.** $\frac{AB\times AC}{2}=\frac{AB\times EK}{2}+\frac{AC\times GK}{2}+\frac{BC\times FK}{2}$

qui donne : $S=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}$

et donc : $r=\frac{2S}{a+b+c}$. Ici cela donne :

$r=\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b. On a : $\cos\widehat{B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\widehat{B}=\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$.

c. Dans ACD, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{AC}{CD}=\frac{1}{CD}$ donc :

$CD=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

d. Le théorème de Thalès donne : $\frac{CG}{CA}=\frac{CK}{CD}$

soit $\frac{1-r}{1}=\frac{CK}{CD}$ donc : $CK=(1-r)\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

e. BCD est isocèle donc : $BD=CD=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

f. Dans le triangle DEK, $\widehat{K}=\frac{\pi}{6}$ donc :

$DK=\frac{r}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

et $DE=DK\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$.

g. Le théorème de Pythagore dans BKE donne :
$BK^2=BE^2+EK^2=(BD+DE)^2+EK^2$

$=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)^2+r^2$

$=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

donc : $BK=\sqrt{2}$.

h. Dans BEK, on obtient :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{BE}{BK}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{EK}{BK}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Pour aller plus loin

83 **a.** $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{5}$; $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\frac{2\pi}{5}$;

$\widehat{ABD}=\frac{\pi}{5}$; $\widehat{ADB}=\frac{3\pi}{5}$; $\widehat{BDC}=\frac{2\pi}{5}$.

b. On a donc deux autres triangles isocèles ABD et CBD d'où : DA = DB et BC = DB.

c. DAB étant isocèle, le projeté de D sur (AB) est le milieu de [AB] donc :

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\frac{AB}{2}}{a}=\frac{AB}{2a}$ d'où : $AB=2a\cos\frac{\pi}{5}$.

De même dans BCD, on a : $CD=2a\cos\frac{2\pi}{5}$.

Et dans ABC, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\frac{BC}{2}}{AB}=\frac{BC}{2AB}$ qui donne :

$BC=2AB\cos\frac{2\pi}{5}=4\alpha\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$.

d. On a : AD = AB – CD = AC – CD donne :

$a=2a\cos\frac{\pi}{5}-2a\cos\frac{2\pi}{5}$ et donc :

$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

De plus : $BC=4a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=a$ d'où :

$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$.

e. La relation donne :

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2$$

$= 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$ soit en remplaçant :

$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2-\frac{1}{4}=1$ d'où :

$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2=\frac{5}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Il reste à résoudre un système qui donne :

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

84 **a.** $\widehat{DOB} = 51°\,02' - 41°\,23' = 9°\,39'$

$=\left(9+\frac{39}{60}\right)\times\frac{\pi}{180}\approx 0{,}1684$ rad

et donc la distance qui les sépare vaut :

$6\,370 \times 0{,}168\,4 \approx 1\,072{,}86$ km.

b. Si on creuse un tunnel sa longueur vaut :

$2\times 6\,370\sin\left(\frac{9°\,39'}{2}\right)\approx 1\,071{,}6$ km.

85 **a.** L'angle vaut $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

b. Elle devient :

$-\mathrm{P}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\mathrm{T}\cos\beta+0=0.$

c. $\mathrm{P}\sin\alpha=\mathrm{T}\cos\beta$ donc : $\sin\alpha=\frac{\mathrm{T}\cos\beta}{\mathrm{P}}$.

d. Dans ce cas on a :

$\sin\alpha=\frac{500\cos 45°}{70\times 10}=\frac{5\sqrt{2}}{14}$ qui donne :

$\alpha\approx 0{,}53$ rad.

86 $\mathrm{R}=\frac{5\,000\times 157{,}5\times 10^{-3}}{7°12'\times\pi/180}\approx 6\,266{,}73$ km

qui donne une circonférence de :

$6\,266{,}73\times 2\pi = 39\,375$ km.

87 **a.** L'angle entre deux centres de petites sphères et le centre de la grande vaut $\frac{\pi}{4}$. Ces centres forment un triangle isocèle et alors :

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{r}{\mathrm{PB}}$.

b. Dans le triangle APB, le théorème de Pythagore donne : $\mathrm{AB}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{PB}^2$ soit :

$(\mathrm{R}+r)^2=(\mathrm{R}-r)^2+\mathrm{PB}^2$ et donc : $\mathrm{PB}^2=4r\mathrm{R}$.

c. On en déduit que : $4rR=\left(\frac{r}{\sin\frac{\pi}{8}}\right)^2$ et donc :

$\frac{r}{R}=4\sin^2\frac{\pi}{8}\approx 0{,}59.$

88 **a.** La grande aiguille fait un tour en 1 heure et la petite en 12 heures dans le sens négatif.

b. $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG})-(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP})$

$=-2\pi t+k\times 2\pi+\frac{2\pi}{12}t-k'\times 2\pi$

$=-\frac{11\pi}{6}t\times k''\times 2\pi.$

À 11 h 12 cela donne : $t=11+\frac{12}{60}=11{,}2$

et donc : $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG})=-\frac{11\pi}{6}\times 11{,}2$

$=\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)(11+0{,}2)$

$=-22\pi-0{,}4\pi+\frac{11\pi}{6}+\frac{0{,}2\pi}{6}$

$=-22\pi-\frac{2\pi}{5}+\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{30}$

$=-22\pi\,\frac{22\pi}{15}=-20\pi-\,-\frac{8\pi}{15}.$

ce qui donne un angle géométrique de :

$\frac{8\pi}{15}\times\frac{180}{\pi}=96°.$

c. Ici on a : $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG})=-\frac{11\pi}{6}t=0+k\times 2\pi$

d'où : $t=-\frac{12k}{11}$ donc pour $k=-1$ on obtient la première fois à : $t=\frac{12}{11}=1$ h 5′ 27″ ;

ensuite ce sera 2 h 10′ 54″, et ainsi de suite toutes les 1 h 5′ 27″.

d. Ici on a : $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG})=-\frac{11\pi}{6}t=-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$

d'où : $t=\frac{3}{11}-\frac{12k}{11}$ donc pour $k=0$ on obtient la première fois à : $t=\frac{3}{11}=0$ h 16′ 21″,

et ainsi de suite toutes les $\frac{6}{11}=32'\,43''$.

e. Ici on a : $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OG})=-\frac{11\pi}{6}t=-\pi+k\times 2\pi$

d'où : $t=\frac{6}{11}-\frac{12k}{11}$ donc pour $k=0$ on obtient la première fois à : $t=\frac{6}{11}=0$ h 32′ 43″.

Défis

89 On réalise la construction ci-dessous et on remarque en calculant ses cotés que le grand triangle est isocèle et rectangle donc :

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.