Notas de Teoria Macroeconômica I

Filipe Stona
Programa de Pós-Graduação em Economia (UFRGS)

7 de julho de 2017

Sumário

Resumo

Notas de aula da disciplina de Teoria Macroeconômica I, ministrada pelo professor Sabino Porto Jr. no Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) em 2016.

Comentários

Agradeço ao colega Felipe Teixeira pelo auxílio na resolução de vários problemas dessas notas. Cabe salientar, todavia, que essas são notas de aula sujeitas a erros de conteúdo e de digitação, que são inteiramente de minha responsabilidade. Caso você identifique algum erro ou queira complementar o conteúdo, envie um e-mail para `fstona@live.com`. A versão mais atualizada dessas notas pode ser encontrada em `https://sites.google.com/view/fstona`. Os capítulos são compostos de notas tomadas em aula e complementadas com a bibliografia sugerida para cada matéria. Assim, recomenda-se a consulta das mesmas para esclarecimentos ou aprofundamento nos temas.

Parte I

Modelos de Crescimento Exógeno

Capítulo 1

Modelo Ramsay-Cass-Koopmans

1.1 Características

Ramsey (1928), Cass e Koopmans (1965). Comportamento ótimo da poupança para o país.

Bibliografia: Blachard e Fischer (cap 2) e Novales et al (cap 3).

Novidades de Cass-Koopmans em relação a Ramsay:

- Taxa de crescimento populacional positiva, exógena e constante ($n > 0$).
- Fator de desconto (θ), taxa de preferência pelo tempo que indica se os indivíduos são pacientes ou não, positivo ($\theta > 0$)
- Controle Ótimo
- Planejador Central

No primeiro momento, iremos estudar o modelo de uma economia centralizada em que há um planejador central, em seguida, o caso de uma economia centralizada sem governo e, por fim, uma economia descentralizada com governo.

1.2 Economia Centralizado

1.2.1 Hipóteses

a - Horizonte infinito,

b - Sem moeda (escambo),

c - Agentes Homogêneos, representativos e racionais, d - Concorrência perfeita,

e - Oferta inelástica de mão-de-obra $\rightarrow$ taxa de desconto positiva e constante ($\bar{n} > 0$)

f - Fun. de produção homogênea de grau 1,

g - Retornos ctes de escala (RCE).

1.2.2 Tecnologia

Considerando Y_t, K_t e C_t como o produto, capital e consumo, respectivamente, a tecnologia é dada por:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= F(K_t, N_t) && (1.1)\\
Y_t &= C_t + \frac{dK_t}{dt} && (1.2)\\
Y_t &= C_t + \dot{K}_t && (1.3)
\end{aligned}
$$

tal que $\dot{K}_t$ é considerado a taxa de investimento, e a taxa de depreciação é zero ($\delta = 0$).

Proposição 1.1 Se a função de produção tem RCE, podemos usar a versão per-capita (intensiva):

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t}{N_t} &= F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) = f(k_t)\\
k_t &= \frac{K_t}{N_t}\\
\frac{dk_t}{dt} &= \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t \cdot N_t - K_t \cdot \dot{N}_t}{N_t^2}\\
&= \dot{K}_t \cdot \frac{1}{N_t} - \underbrace{\frac{K_t}{N_t}}_{k_t} \cdot \underbrace{\frac{\dot{N}_t}{N_t}}_{n}\\
&= \left[\frac{\dot{K}_t}{N_t}\right] - k_t \cdot n
\end{aligned}
$$

Assim teremos:

$$
\left[\frac{\dot{K}_t}{N_t}\right] = \dot{k}_t + k_t n \qquad (1.4)
$$

Considerando 1.3 e tomando a versão per capita:

$$\frac{Y_t}{N_t} = \frac{C_t}{N_t} + \frac{\dot{K}_t}{N_t} \tag{1.5}$$

substituímos 1.4 em 1.5, considerando $f(k_t) = \frac{Y_t}{N_t}$ como o produto per capita e $c_t = \frac{C_t}{N_t}$ como o consumo per capita, e teremos:

$$f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + nk_t \tag{1.6}$$

tal que $\dot{k}_t + nk_t$ pode ser considerado o investimento líquido. Como temos RCE, assumimos que $f(k_t) = F(K_t/N_t, 1)$ é estritamente côncava e crescente, logo, $f(k_t)' > 0$ e $f(k_t)'' < 0$.

Condição de Inada

a) Indispensabilidade dos fatores: $f(0) = 0, k_0 > 0$, ou seja, partimos de estoque de capital positivo, pois quando $k = 0$, não há produção.

b) $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$ e
$\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$

As duas condições de Inada, junto com o fato da função de produção ser estritamente côncava, formam as três características básicas do Modelo Neoclássico.

1.2.3 Função de Utilidade dos Agentes

$$\boldsymbol{U_s = \int_s^{\infty} U(c_t) e^{-\theta(t-s)} dt} \tag{1.7}$$

tal que:

- U_s é a utilidade da família em t=s;
- $U(c_t)$ é a utilidade instantânea (função felicidade), Bernoulli clássica;
- Função utilidade crescente e côncava, $U'(c_t) > 0$ e $U''(c_t) < 0$;
- $\theta > 0$ é a taxa de preferência pelo tempo ($\theta = 0$ em Ramsey). Quanto mais próximo de 0, mais impaciente é o indivíduo, valoriza mais o presente. $\theta = 1$ o indivíduo é mais paciente;
- $e^{-\theta(t-s)}$ é o fator de desconto do tempo.

1.2.4 O Problema do Planejador Central

Assumindo a hipótese que exista um planejador central, ele terá que lidar com o seguinte problema:

$$\begin{aligned} U_0 &= \max_{c_t*} \int_0^\infty U(c_t)e^{-\theta(t)}dt \\ \text{s.a.} \quad & \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t \\ & k_0 > 0 \text{ (dado)} \\ & k_t, c_t \geq 0 \quad \forall t \text{ (não negatividade)} \end{aligned}$$

Definição 1.1 Taxa Marginal de Substituição (TMS) do tempo t em relação a t+1:

$$TMS_{t,t+1} = 1 + \theta, \text{ então } \theta = TMS_{t,t+1} - 1$$

Para um bem normal (ver Wald, p. 132 - 136),

$$TMS_{i,j} = \frac{\partial U(\cdot)/\partial c_i}{\partial U(\cdot)/\partial c_j} > 0$$

1.2.5 Solução do Controle Ótimo a valor presente

Para solucionar o problema do planejador central utilizamos o princípio do máximo e montamos o Hamiltoniano:

$$\max_{c_t*} \quad \mathcal{H} = U(c_t)e^{-\theta t} + \mu_t[f(k_t) - c_t - nk_t] \tag{1.8}$$

tal que c_t é a variável de controle, k_t de estado, e μ_t de co-estado (ou o preço sombra de uma unidade de investimento).

Conceito 1.1

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t &= [\mathcal{H}_c]e^{-\theta t} \\ \mathcal{H}_c &= [\mathcal{H}_t]e^{\theta t} \end{aligned}$$

Condição de Primeira Ordem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial c_t} &= 0 && (1.9)\\
-\mathcal{H}_k &= \dot{\mu} && (1.10)\\
\lim_{t\to\infty} k_t U'(c_t) e^{\theta t} &= 0 && (1.11)
\end{aligned}
$$

A partir de 1.9 teremos:

$$
\begin{gathered}
U'(c_t)e^{-\theta t} - \mu_t = 0,\\
U'(c_t) = \mu_t e^{\theta t}.
\end{gathered}
$$

Considerando o multiplicador de valores correntes $\lambda_t = e^{\theta t}\mu_t$:

$$U'(c_t) = \lambda_t \tag{1.12}$$

De outra forma,

$$
\begin{gathered}
\tfrac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial c_t} = 0, \quad e^{\theta t}\tfrac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial c_t} = 0\\
e^{\theta t}[U''(c_t)\cdot e^{-\theta t} - \mu_t] = 0\\
U'(c_t) = \mu_t \cdot e^{\theta t}\\
U'(c_t) = \lambda_t.
\end{gathered}
$$

Por sua vez, a partir de 1.10 temos que:

$$\dot{\mu} = -\mu[f'(k_t) - n]. \tag{1.13}$$

Dado que $\lambda_t = e^{\theta t}\cdot \mu_t$, consequentemente, $\dot{\lambda}_t = \theta e^{\theta t}\cdot \mu_t + e^{\theta t}\cdot \dot{\mu}$, portanto,

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= e^{\theta t}[\theta\mu - \mu(f'(k_t) - n)]\\
\dot{\lambda} &= e^{\theta t}\mu[\theta = f'(k_t) + n]\\
\dot{\lambda} &= \lambda[\theta - f'(k_t) + n] && (1.14)
\end{aligned}
$$

De outra forma, poderia ser mais lógica pensar que queremos encontrar $\dot{\mu}$, sabendo que $\mu_t = \lambda_t e^{-\theta t}$, teríamos $\dot{\mu}_t = e^{-\theta t}(\dot{\ } - \theta\lambda_t)$. Substituindo μ_t e $\dot{\mu}_t$, é fácil chegar novamente a expressão (1.14).

A Equação (1.14) já é a Equação de Euler. Esta é condição necessária para todo caminho ótimo, todavia, para montar o diagrama de fases para $\dot{c}$ e $\dot{k}$, apenas c_t e k_t podem estar em função do tempo, por isso temos que eliminar λ_t. A partir das Equações (1.12), (1.14) e da condição de transversalidade (1.11), percebe-se que não seria ótimo $k_t > 0$ em T, para um caso de tempo discreto, pois ele poderia ser consumido. Não sobra capital no final da vida. A condição de transversalidade justamente aponta que não seria ótimo ter estoque de capital positivo no final, pois ele poderia ser consumido.

Substituindo 1.12 em 1.14,

$$\dot{\lambda} = U'(c)[\theta - f'(k) + n], \tag{1.15}$$

como $\lambda = U'(c)$, $\dot{\lambda} = \dot{U}'(c)$, então,

$$\begin{aligned} \dot{U}'(c) &= \frac{dU'(c_t)}{dt} \\ &= U''(c_t)\frac{dc_t}{dt} \\ &= U''(c) \cdot \dot{c}_t \end{aligned} \tag{1.16}$$

logo,

$$\frac{U''(c)\dot{c}}{U'(c)} = \theta - f'(k_t) + n, \tag{1.17}$$

tal que 1.17 também é uma equação de Euler. Considerando uma função CARA, que é um caso específico da função HARA[1], tal que $U(c_t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha c_t}$ teríamos a equação de Euler como $\alpha\dot{c}_t = f'(k_t) - n_t - \theta$.

Definição 1.2 Para simplificar 1.17 definimos a elasticidade da utilidade marginal do consumo (UMg):

$$\varepsilon_{UMg} = \frac{U''(c) \cdot c}{U'(c)} < 0. \tag{1.18}$$

A elasticidade de substituição intertemporal (δ) será então:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{-1}{\varepsilon_{UMg}} > 0 \\ -\delta &= \left[\frac{U'(c)}{U''(c)c}\right], \\ -\frac{1}{\delta} &= \frac{U''(c)c}{U'(c)} \end{aligned} \tag{1.19}$$

[1] ver seção 1.5 sobre utilidades especiais.

Assim, multiplicando 1.17 por c_t e substituindo 1.19,

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{c}\cdot U''(c)\cdot c}{c\cdot U'(c)} &= \theta - f'(k) + n \\
\frac{\dot{c}}{c}\cdot\left(-\frac{1}{\delta}\right) &= \theta - f'(k) + n \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \delta\left[f'(k) - \theta - n\right]. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

É importante perceber que 1.20 também é a equação de Euler, todavia, apenas k e c estão em função do tempo (apesar de "$_t$" ter sido suprimido para simplificar a notação), de tal forma que será possível utilizá-la para a o diagrama de fases no plano (k, c). No mesmo sentido, para simplificar a notação, relembramos que $\dot{c} = \frac{dc_t}{dt}$. Por fim, percebe-se que $\frac{\dot{c}}{c} = y^*_{c_t}$.

Nesse momento, em função da elasticidade intertemporal, caberia apresentar algumas funções de utilidade instantâneas que são comumente utilizadas em modelos de otimização intertemporal. Todavia, para evitar a interrupção do raciocínio, essa funções são apresentadas no final do capítulo, na Seção 1.5.

1.2.6 Regra Keynes-Ramsey

A Regra Keynes-Ramsey já está implícita na equação de Euler e equivale a hipótese de eficiência. Ela diz que uma diminuição no consumo no tempo t permite acumulação de capital e, portanto, mais consumo no tempo t+1. Assim,

$$U'(c_t) = (1+\theta))^{-1}(1+n)^{-1}[1 + f'(k_t)u'(c_{t+1})], \qquad (1.21)$$

onde o lado direito representa uma perda de consumo em t e o lado esquerdo o ganho em t+1. Reescrevendo, temos:

$$\frac{1+n}{1+f'(k_t)} = \frac{(1+\theta)^{-1}U(c_{t+1})}{U'(c_t)}, \qquad (1.22)$$

ou seja, a taxa marginal de transformação da produção entre o consumo em t e t+1 ($TMT_{c_t,c_{t+1}}$) é igual a taxa marginal de substituição em t e t+1 ($TMS_{c_t,c_{t+1}}$).

Considerando dois pontos no tempo (t e s, tal que s¿t), uma diminuição do consumo em t (Δc_t) aumenta a acumulação de capital por $\Delta c_t \Delta t$. O capital é acumulado entre $t + \Delta t$ e s, e consumido a partir de s, levando o consumo ao caminho original, conforme demonstrado na Figura 1.1.

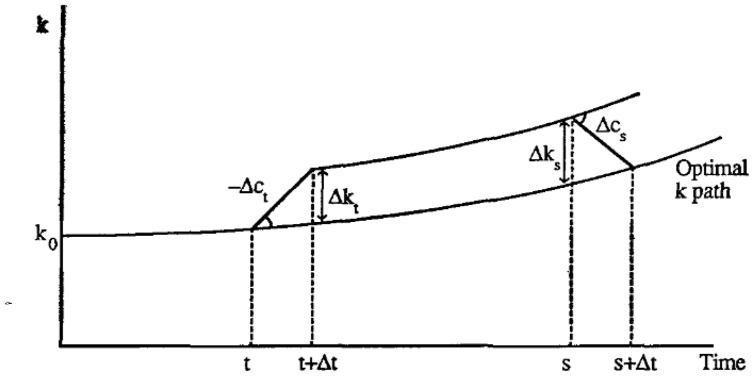


Figura 1.1: Regra Keynes-Ramsey (BF, cap. 2, p. 42)

1.2.7 Steady State e Dinâmicas

O caminho ótimo se dá a partir da equação de Euler 1.20, da condição de transversalidade 1.11 e 1.6, utilizada na restrição do problema de controle ótimo do planejador central. Além disso, cabe lembrar que no steady-state (SS), c_t e k_t são constantes.

Golden Rule Modificada

Quando $\dot{c} = 0$ teremos a golden rule modificada (grm):

$$f'(k_t^*) = n + \theta, \tag{1.23}$$

tal que $n+\theta$ pode ser considerado o juros real da economia. A PMgK no SS é igual a soma da taxa de preferência pelo tempo e a taxa de crescimento da população. Caso $theta = 0$, teremos a golden rule (gr): $f'(k_t^*) = n$. A grm fica abaixo da gr, assim, a impaciência (θ) indica que não é ótimo diminuir o consumo hoje para alcançar um nível mais alto da golden rule.

Definição 1.3 Considerando a Eq. 1.20, $f'(k_t) - n - \theta = \frac{\dot{c}}{c} \cdot \frac{1}{\delta}$, onde $f'(k_t) - n = r_t$, para r_t sendo o juros real de equilíbrio. Se $r_t \neq \theta$, o consumo irá variar.

- $r_t > 0, \quad y_c > 0$
- $r_t < 0, \quad y_c < 0$

Por sua vez, considerando Eq. 1.6, para $\dot{k} = 0$ teremos:

$$f(k_t^*) = c_t^* + nk_t^* \quad \text{ou} \quad c_t^* = f(k_t^*) - nk_t^*. \tag{1.24}$$

Note que $f(k_t^*) - c_t^* = nk_t^*$, e $s \cdot f(k_t^*) = nk_t^*$, para $s \rightarrow$ propensão marginal a poupar. Então, $n = s \cdot \frac{f(k^*)}{k}$ e $n = \frac{1}{v}$ para $v = \frac{k}{f(k^*)}$.

Resumindo. Para c^* e k^* representando nível ótimo de consumo e de capital (respectivamente),

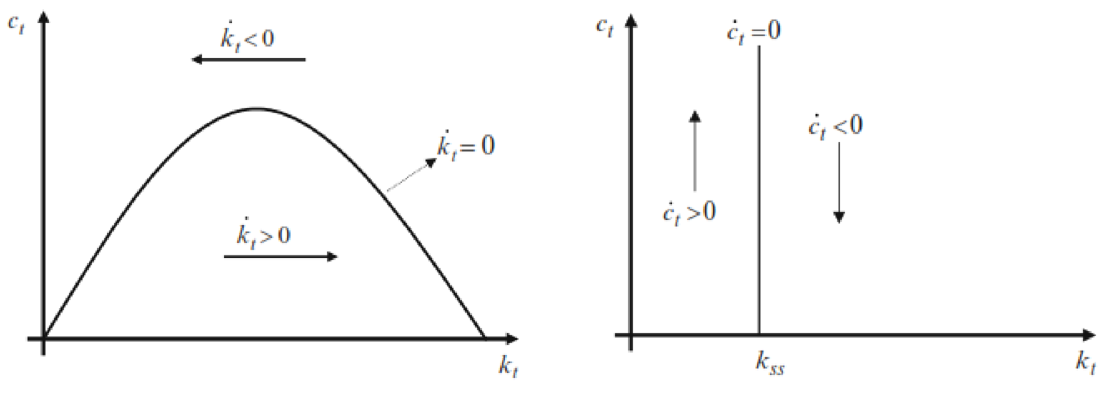
$$\begin{cases} \dot{c} = 0 \implies f'(k_t^*) = n + \theta, \\ \dot{k} = 0, \implies c_t^* = f(k_t^*) - nk_t^*. \end{cases}$$

Dinâmicas e Diagrama de Fases

A diferença entre a grm e a gr faz com que o locus $\dot{c} = 0$ fique mais a direita na grm, quando $\theta > 0$. Nesse caso, o indivíduo prefere consumir mais hoje, fazendo o consumo de SS ser menor que o potencial. A produtividade de equilíbrio é definida por θ e n em $f'(k_t^*) = n + \theta$. Na figura 1.2 temos os gráficos dos locus $\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$, considerando o $\dot{c} = 0$ da grm.

Começando pelo locus $\dot{k} = 0$, Figura 1.2a, percebemos que o gráfico inicia na origem, $f(k_t) = 0$, devido a condição de Inada, que diz que quando o estoque de capital é zero, não há produção. Em seguida, vemos que, quando $f(k_t) = nk_t$, o consumo é zero (esse seria o caso de uma guerra, por exemplo). Quanto as dinâmicas, acima de $\dot{k} = 0$ há excesso de consumo, dilapidando o capital, e por isso temos $\dot{k} < 0$ representado por $(\leftarrow)$ no gráfico.

Quanto ao locus $\dot{c} = 0$, nota-se que a esquerda do locus, $\dot{c} > 0$, a produtividade $f'(k)$ é elevada, e $f'(k) > (\theta + n)$, então teremos $(\uparrow)$ a esquerda de $\dot{c} = 0$ no gráfico.



(a) Locus $\dot{k} = 0$ (b) Locus $\dot{c} = 0$

Figura 1.2: Direções das mudanças no consumo e no estoque de capital (Novales et al, p. 117)

Juntando os dois gráficos teremos o diagrama de fases representado na Figura 1.3. O primeiro ponto que é possível destacar é, o $k^* = k_{SS}$, representa o k da golden rule modificada (k_{grm}) e fica abaixo do que seria o k de golden rule (k_{gr}), o qual seria o nível de k associado ao pico de $\dot{k} = 0$, onde $f'(k) = n$. O ponto E é o ponto de equilíbrio, onde tanto $\dot{k}$ quanto $\dot{c}$ são zero, não havendo mais movimento. Por último, percebe-se que existe um trilho de equilíbrio, "caminho ótimo"ou "caminho de sela", que passa por E. Para qualquer valor inicial de k, dado um valor de c que esteja no caminho de sela, a dinâmica levará a economia ao ponto E. Ainda, como todos os indivíduos tem as mesmas preferências, a alocação de recursos feita pela solução do problema do planejador central também será Pareto-eficiente. O estoque de capital e consumo de equilíbrio são determinados indefinidamente, sem mudança na qualidade de vida.

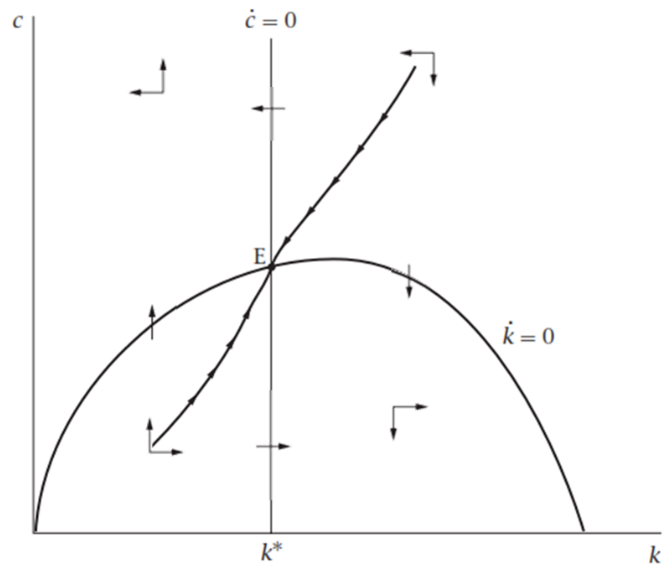


Figura 1.3: Diagrama de Fases (Romer, 2012, p. 60)

1.3 Economia Descentralizada

Dado que até agora vimos qual o resultado de uma economia centralizada, organizada por um planejador central, agora iremos observar se os resultados seriam os resultados de uma economia descentralizada.

1.3.1 Hipóteses

- Famílias idênticas escolhem:
  - Acumular capital,
  - Poupança-consumo,

  - Emprestar e tomar emprestado,
  - Ofertam capital e trabalho (K e L) inelasticamente,
  - Indiferentes à composição da riqueza;

- Dois mercados de fatores $K(r_t)$ e $L(w_t)$, para r_t sendo o retorno do capital e w_t o preço do trabalho (salário);
- Firmas idênticas, RCE, competitivas, w_t e r_t dados;
- Existe um mercado financeiro, existem títulos, logo, acumulação física e financeira (indivíduos são indiferentes a riqueza física ou financeira);
- Sem moeda.

Conceito 1.2 Taxa de retorno do capital = taxa de juros por crédito.

Conceito 1.3 Taxa real do capital = taxa de juros sobre o crédito.

Conceito 1.4 Taxa de retorno do ativo (r):

$$r = \frac{r_k + \frac{dP_k}{dt} + \delta_{P_k}}{P_k},$$

tal que r_k é o retorno de k, $\dot{P}_k$ é o ganho de capital, e δ a depreciação. Assim, suponto $\delta = 0$, $\dot{P}_k = 0$ e $P_k = 1$, então $r = r_k$. Ou seja, o retorno do capital é igual ao retorno dos ativos (taxa de juros), por simplificação.

1.3.2 Comportamento das firmas

As firmas buscam maximizar lucros. Sua tecnologia é caracterizada pela mesma função de produção do problema centralizado (ver a Eq. 1.6). Como $r_t \to PMgK = \partial Y_t/\partial K_t$, $w_t \to PMgL = \partial Y_t/\partial N_t$, tal que $L_t = N_t$, as condições de primeira ordem para maximização dos lucros implicam:

$$r_t = f'(k_t) \tag{1.25}$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{1.26}$$

Ver no Capítulo 2, na sub-seção de Tecnologia o cálculo completo.

Teorema 1.1 (Teorema de Euler) Se $Y = F(K, L)$ for linearmente homogênea, então $k\frac{\partial Y}{\partial K} + L\frac{\partial Y}{\partial L} = Y$ para qualuqer função genérica homogênea de grau 1.

1.3.3 O problema do agente representativo

A diferença em relação ao problema do planejador central estará na restrição orçamentaria, mas a utilidade será a mesma da Equação 1.7. Assim, cada família (agente representativo) maximiza, em qualquer tempo s:

$$\begin{aligned} U_s &= \max_{c_t*} \int_s^\infty U(c_t)e^{-\theta(t-s)}dt && (1.27)\\ \text{s.a.} \quad & c_t + \frac{da_t}{dt} + na_t = w_t + r_t a_t \quad \forall t && (1.28)\\ & k_0 > 0 \text{ (dado)} && (1.29)\\ & a_t \equiv k_t - b_{pt}. && (1.30)\end{aligned}$$

- a_t é a riqueza familiar não humana líquida em t, definida pela diferença entre o capital k_t e a dívida familiar no tempo t (b_{pt}). a_t também pode ser entendido como ações que a empresa emite e o consumidor compra, recebendo uma taxa de retorno r_t por ela.
- $r_t a_t$ é a renda do capital;
- na_t é a reposição de riqueza líquida para manter a_t constante quando $n > 0$;

Novales et al chama $\dot{a}_t$ de $\dot{v}_t$, e reorganiza a restrição para o equivalente na nossa notação a $\dot{a}_t + c_t = w_t + (r_t - n_t)a_t$. Assim, podemos dizer que o consumidor utilizada seu salário mais retornos reais no seu portfólio para pagar o consumo e as mudanças no portfólio. O crescimento populacional é subtraído do retorno real dos ativos porque é preciso ter novos consumidor (nascimentos) a cada período, com o mesmo portfólio de todos outros consumidores.

Condição de No-Ponzi-Game

Como o agente pode se endividar, vamos estabelecer a condição de *no-Ponzi-game* ou não Ponzi (NPG), para evitar o endividamento indefinido. A condição de no-ponzi tenta evitar que as famílias escolham o caminho de consumo infinito[2]. Assim, para a solução do problema de uma economia descentralizada, além de maximizar a utilidade sujeita a nova restrição estabelecida, vamos precisar considerar a NPG

[2] A NPG não exclui a possibilidade de endividamento temporário

no controle ótimo. Assim, estabelecemos a condição de que a dívida da família não pode aumentar assintoticamente mais rápido que a taxa de juros:

$$\lim_{t\to\infty} a_t \exp\left[-\int_0^\infty (r_v - n)dv\right] \geq 0. \tag{1.31}$$

A equação 1.31 representa a condição de no-ponzi, que será utilizada para solucionar o controle ótimo. A partir dela, também conseguimos extrair uma restrição orçamentária intertemporal para as famílias (ROI), enquanto a equação 1.28 representa a restrição orçamentária dinâmica (RO), a qual iremos utilizar aa solução do controle ótimo. Apesar da equação 1.31 ser apresentada como uma desigualdade, iremos utilizar com igualdade[3].

Restrição Orçamentária Intertemporal

Reorganizando a restrição orçamentária dinâmica para $\dot{a}_t - (r_t - n_t)a_t = w_t - c_t$, percebe-se que essa é uma equação diferencial com coeficientes e termos variáveis. O fator integrante será $\exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right]$. Multiplicando a RO pelo fator integrante:

$$\begin{aligned}\exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right] \cdot [\dot{a}_t - (r_t - n)a_t] \\ = \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right](w_t - c_t).\end{aligned}$$

Agrupando a derivada do lado esquerdo e aplicando a integral dos dois lados, teremos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d\left(a_t \cdot \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right]\right)}{dt}dt \\ = \int_0^T \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right](w_t - c_t)dt,\end{aligned}$$

isolando a_t, eliminamos a derivada e a integral do lado direito e multiplicamos a equação por $\exp\left[\int_t^T (r_v - n)dv\right]$ nos dois lados:

$$a_t \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right] = \left\{a_0 + \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right]\int_0^T (w_t - c_t)dt\right\}$$

[3]Conforme BF (p.50), a medida que a utilidade marginal é positiva, as famílias não vão querer aumentar sua riqueza para sempre a uma taxa r - n, então se sustentará a igualdade.

Deixando $T \to \infty$ e considerando a condição de no-ponzi, $a_t \exp\left[-\int_0^\infty (r_v - n)dv\right] = 0$:

$$0 = a_0 + \exp\left[-\int_0^T (r_v - n)dv\right]\int_0^\infty (w_t - c_t)dt$$

. Além disso, podemos dizer que

$$h_0 \equiv \exp\left[-\int_0^T (r_v - n)dv\right]\int_0^\infty (w_t)dt, \tag{1.32}$$

tal que h_0 é o valor presente da riqueza humana (trabalho). Reorganizando, teremos que a Restrição Orçamentária intertemporal é:

$$\exp\left[-\int_0^T (r_v - n)dv\right]\int_0^\infty (c_t)dt = a_0 + h_0 \tag{1.33}$$

A ROI nos diz que o valor presente do consumo é igual a riqueza total, a qual é a soma da riqueza não-humana (a_0) e da riqueza humana (h_0), o valor presente da renda do trabalho. Com a ROI 1.33 não é possível planejar o caminho ótimo sem conhecimento perfeito do preço dos fatores (w_t e r_t); expectativas racionais. Por isso que vamos utilizar a RO dinâmica para resolver o problema do agente a seguir.

1.3.4 Controle Ótimo

O problema do agente em uma economia descentralizada será formulado com a função utilidade do agente (1.7), a restrição orçamentária dinâmica (1.28) e a NPG (1.31). Montando Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = U(c_t)e^{-\theta t} + \mu[w_t + (r_t - n)a_t - c_t] \tag{1.34}$$

A variável de controle é c_t, $\dot{a}_t$ é a variável de estado, e μ_t é a variável de coestado. Aplicando o princípio do máximo, a partir da CPO $\mathcal{H}_c = 0$ teremos:

$$\begin{aligned} U'(c_t)e^{-\theta t} - \mu_t &= 0 \\ U'(c_t) &= \mu_t e^{\theta t} \\ U'(c_t) &= \lambda_t. \end{aligned}$$

Lembrando que, a valor presente, $\mu_t e^{\theta t} = \lambda_t$.

A partir da segunda CPO $-\mathcal{H}_a = \dot{\mu}_t$, e lembrando que se $\mu_t e^{\theta t} = \lambda_t$, $\dot{\mu}_t =$

$\dot{\lambda}_t e^{-\theta t} - \theta e^{-\theta t}\lambda_t$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_t &= \mu_t[r_t - n] \\
\dot{\lambda}_t e^{-\theta t} - \theta e^{-\theta t}\lambda_t &= \lambda e^{-\theta t}[r_t - n] \\
e^{-\theta t}\left(\dot{\lambda}_t - \theta\lambda_t\right) &= \lambda e^{-\theta t}[r_t - n] \\
\dot{\lambda}_t &= \lambda_t[r_t - n] + \theta\lambda_t \\
\dot{\lambda}_t &= \lambda_t[\theta - r_t + n]
\end{aligned}$$

como $\lambda = U'(c)$, e $\dot{\lambda} = \dot{U}'(c) = U''(c) \cdot \dot{c}_t$, então,

$$\frac{U''(c_t)\dot{c}}{U'(c_t)} = \theta + n - r_t \tag{1.35}$$

ou, como em BF (cap. 2, p. 50),

$$\frac{dU'(c_t)/dt}{U'(c_t)} = \theta + n - r_t, \tag{1.36}$$

será a Equação de Euler, condição necessária e suficiente junto com:

$$\lim_{t\to\infty} = a_t U'(c_t)e^{-\theta t}. \tag{1.37}$$

Dado que no equilíbrio não há nem emprestador nem tomador de crédito, $a_t = k_t$. Então, a equação 1.28 ficará:

$$c_t + \dot{k}_t + nk_t = w_t + r_t k_t. \tag{1.38}$$

No comportamento ótimo da firma, para w_t e r_t do problema da firma[4], e a condição de no-ponzi (1.31), teremos:

$$\begin{aligned}
r_t &= f'(k_t) & (1.39) \\
w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t). & (1.40)
\end{aligned}$$

Substituindo w_t e r_t na RO:

$$\begin{aligned}
c_t + \dot{k}_t + nk_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) + f'(k_t)k_t & (1.41) \\
c_t + \dot{k}_t + nk_t &= f(k_t), & (1.42)
\end{aligned}$$

[4]Equações (1.25) e (1.26), respectivamente.

e fazendo o mesmo na Equação de Euler:

$$\frac{dU'(c_t)/dt}{U'(c_t)} = \theta + n - f'(k_t). \tag{1.43}$$

Conclusão: o comportamento dinâmico ótimo da economia descentralizada é idêntico ao da economia com planejador central. Terá a mesma dinâmica e trajetória ótima.

1.4 Governo no modelo de horizonte infinito

- Gastos do governo são exógenos
- Objetivos: analisar o efeito de uma mudança nos gastos do governo sobre o equilíbrio da economia, e o efeito de diferentes formas de firma.
- O governo pode se financiar com impostos e empréstimos.

A partir da análise feita para uma economia descentralizada, iremos estudar três casos envolvendo o governo. No primeiro, o governo tem um orçamento equilibrado, no segundo caso, o governo poderá financiar sua dívida, e no último, os impostos serão distorcidos pela tributação sobre o retorno do capital.

1.4.1 Caso 1: Orçamento equilibrado

Considerando

$$\tau_t = g_t \quad \forall t \tag{1.44}$$

tal que τ_t é um imposto lump-sum, neutro, que não afeta o comportamento dos indivíduos e g_t é a demanda per capita do governo por recursos (exógena), não importa a utilidade marginal das famílias.

Com isso, a nova RO dinâmica das famílias será:

$$c_t + \dot{a}_t = w_t + (r_t - n)a_t - \tau_t. \tag{1.45}$$

Novamente, teremos uma EDO. Para encontrar a restrição orçamentária intertemporal, teremos que resolver a EDO, utilizar a condição de no-ponzi, etc., da mesma forma que antes. O fator integrante é $\exp[-\int_0^T (r_v - n)dv]$. Seguindo o mesmo procedimento para resolver a equação diferencial, teremos:

$$a_t \exp\left[-\int_0^T (r_v - n)dv\right] = a_0 + \int_0^T (w_t - \tau_t - c_t) \exp\left[-\int_0^T (r_v - n)dv\right] dt \tag{1.46}$$

novamente, o lado esquerdo da equação será zero, pela condição de no-ponzi (Eq. 1.31). Como $a_t \equiv k_t - b_{pt}$, dizemos que $a_0 = k_0 - b_{p0}$. Para simplificar a notação, podemos dizer que $R_t = \exp\left[-\int_0^T (r_v - n)dv\right]$, assim, com $T \to \infty$:

$$\int_0^\infty (c_t R_t)dt = k_0 - b_{p0} + \int_0^\infty (w_t R_t)dt - \int_0^\infty (\tau_t R_t)dt \tag{1.47}$$

Lembre-se que definimos $h_0 = \int_0^\infty (w_t R_t)dt$ em 1.32. Definindo também $\int_0^\infty (\tau_t R_t)dt = \tau_0 = g_0$, a ROI do caso em que o governo tem o orçamento equilibrado será:

$$\underbrace{\int_0^\infty (c_t R_t)dt}_{I} = \underbrace{k_0 - b_{p0}}_{II} + \underbrace{h_0 - g_0}_{III} \tag{1.48}$$

tal que I representa o valor presente do consumo descontado, II a vp da riqueza não humana e III o vp da riqueza humana. Ou seja, o governo entra na restrição orçamentária das famílias e afeta a decisão de consumo (c_t^*).

Diagrama de Fases

Comparando a dinâmica entre uma economia descentralizada ou centralizada com planejador central (equivalentes) com uma economia com governo e orçamento equilibrado, temos a Figura 1.4.

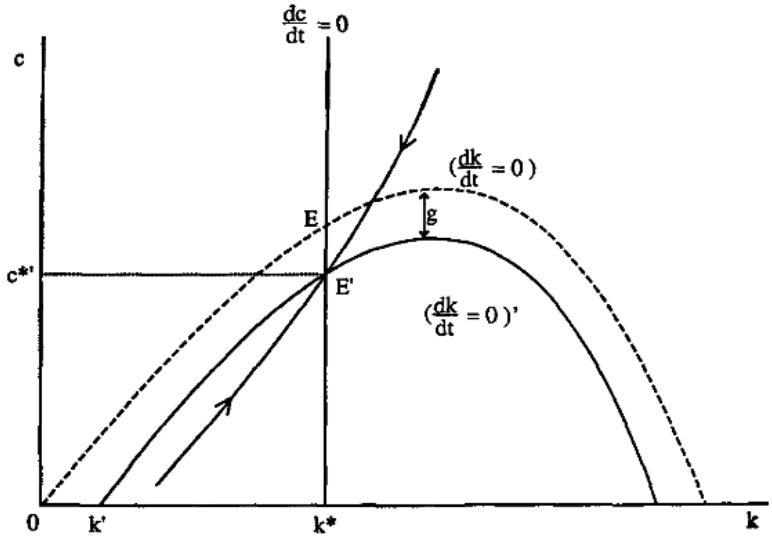


Figura 1.4: Efeito dos gastos públicos (BF, cap. 2, p. 54)

A única diferença é que o produto disponível para o setor privado é menor em g unidades, equivalente aos recursos demandas pelo governo em termos per capita. Assim, para $\tau_t g_t > 0$ a renda diminui, deslocando $\dot{k}_t \to \dot{k}'_t$. E' é o novo equilíbrio

SS, o consumo de equilíbrio é menor ($c^{*'} < c^*$), enquanto $k_t = k_{grm}$, logo, $\dot{c} = 0$ permanece o mesmo.

Conclusão: Com orçamento equilibrado, g_t expulsa completamente o consumo privado e não tem efeito sobre a acumulação de capita.

Proposição 1.2 Se a economia encontra-se inicialmente no SS, então, qualquer $\Delta^+ g = \Delta^- c$ ($\uparrow g, \downarrow c$). Caso não esteja no SS, em $t = t_0$, então Δg pode ou não ter efeito transitório, podendo $\Delta^+ g = \Delta^+ c$ temporariamente, e isso dependerá da forma de $U(c_t)$. Se $c_t \in CARA$, não há efeito dinâmico na acumulação de capital, Δg não causa esse efeito.

Nesse cenário, o governo se autofinancia, não emite títulos, por exemplo. Antes de estudarmos o próximo caso, cabe observar que alterações de τ tem efeito de mudar a distribuição de renda, mas não muda a taxa de crescimento.

1.4.2 Caso 2: Financiamento da Dívida

No caso anterior, vimos o efeito de introduzir um governo que se autofinancia. Agora, iremos permitir que o governo tome empréstimos do setor privado, supondo que o governo paga a mesma taxa de juros do mercado, a mesma taxa de retorno do capital (r_t). Ainda, definimos b_t como a dívida per capita do governo. A RO dinâmica do governo nesse caso é:

$$\dot{b}_t + nb_t = g_t - \tau_t + r_t b_t, \tag{1.49}$$

tal que $\dot{b}_t + nb_t$ é o empréstimo per capita, $g_t - \tau_t$ o déficit primário e $r_t b_t$ os encargos da dívida.

Reorganizando a RO, fica claro que podemos resolver a equação diferencial para encontrar a ROI do governo, onde teremos o mesmo fator integrante dos casos anterior,

$$\begin{aligned} \dot{b}_t + (n - r_t)b_t &= g_t - \tau_t, \\ b_t \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right] &= b_0 + \int_0^T (g_t - \tau_t)\exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right] \end{aligned}$$

Considerando $T \to \infty$ e aplicando a condição de no-ponzi para o governo, que a dívida não pode crescer assintoticamente mais rápido que a taxa de juros, o lado esquerdo da equação será zero. Tal como antes, substituímos $R_t = \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right]$ e teremos a ROI do governo:

$$b_0 + \int_0^\infty (g_t R_t)dt = \int_0^\infty (\tau_t R_t)dt. \tag{1.50}$$

O valor presente da arrecadação deve ser igual ao valor da dívida inicial mais o valor presente dos gastos púbicos. De outra forma, podemos dizer que o governo deve escolher a trajetória de gastos em impostos tal que o valor presente de $g_t - \tau_t$, o déficit primário, seja igual ao negativo da dívida inicial b_0.

A existência de uma dívida governamental, altera a dinâmica da restrição orçamentária das famílias. A RO dinâmica das famílias será semelhante ao caso anterior, porém, agora as famílias podem emprestar ou tomar emprestado com a mesma taxa de juros do governo, portanto, somamos b_t na definição anterior de a_t, tendo:

$$\begin{aligned} c_t + \dot{a}_t &= w_t + (r_t - n)a_t - \tau_t, \\ a_t &\equiv k_t - b_{pt} + b_t \end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos do caso anterior, resolvendo a restrição orçamentária e considerando a condição de no-ponzi, teremos a restrição orçamentária intertemporal das famílias,

$$\int_0^\infty (c_t R_t)dt = k_0 - b_{p0} + b_0 + \int_0^\infty (w_t R_t)dt - \int_0^\infty (\tau_t R_t)dt. \tag{1.51}$$

Assim, o valor presente do consumo deve ser igual a riqueza não-humana ($k_0 - b_{p0} + b_0$) somada a riqueza não humana (o valor presente do salário menos impostos).

Queremos saber qual o efeito da alteração na trajetória dos impostos para financiar um dado padrão de gastos do governo. Para isso, substituímos 1.50 em 1.51, ou seja, a ROI do governo na das famílias:

$$\int_0^\infty (c_t R_t)dt = k_0 - b_{p0} + \int_0^\infty (w_t R_t)dt - \int_0^\infty (g_t R_t)dt \tag{1.52}$$

Esse resultado demonstra a irrelevância da decisão do governo entre financiar seus gastos com dívida ou impostos (Equivalência Ricardiana), pois terá o mesmo efeito na dinâmica do consumo dos agentes. Note que a equação 1.52 é exatamente a mesma do caso 1, Eq. 1.48. Apenas os gastos do governo importam. Financiamento via endividamento, financiamento da dívida, tem o mesmo resultado que financiar via impostos lump-sum. O governo continua fazendo crowd out perfeito, forma de financiamento não altera o equilíbrio com governo. No SS, o governo faz crowd out perfeito do consumo privado, ou seja, desencorajando o consumo, mas não tem efeito no estoque de capital.

A alteração no nível de impostos não altera o comportamento das famílias. A redução dos impostos no período t, aumenta o déficit e gera um aumento de impostos em t+1. Resultado de forte neutralidade[5]. Conclusão: Se o governo respeita a condição de no-ponzi, o tamanho da dívida e o financiamento do déficit não tem consequência, não afetam a dinâmica da economia.

1.4.3 Caso 3: Imposto Distorcido

Suponha que o governo tributa o retorno do capital (τ_k). Considerando r_t a taxa de retorno do capital pré-imposto, $(1-\tau_k)r_t$ é a taxa de retorno do capital pós-imposto. Então, a RO dinâmica da família será:

$$c_t + \dot{a}_t + na_t = w_t + (1-\tau_k)r_t a_t + z_t, \tag{1.53}$$

tal que z_t representa transferências lump-sum per capital para as famílias.

Utilizando a nova restrição orçamentária no problema das famílias, teremos que montar um novo Hamiltoniano[6]. Assim, a segunda CPO do problema descentralizado sem governo (Eq. 1.35), será:

$$\frac{\dot{U}'(c_t)}{U'(c_t)} = \theta + n - r_t(1-\tau_k) \tag{1.54}$$

Pelo comportamento ótimo da firma (Eq. 1.25 e 1.26), sabemos que a produtividade marginal do capital é $r_t = f'(k_t)$. Podemos ver então que a taxação do capital irá afetar o equilíbrio do estoque de capital ($\dot{c} = 0$). Substituindo r_t em 1.54 e lembrando que $\dot{U}'(c) = U''(c) \cdot \dot{c}_t$, quando $\dot{c} = 0$, teremos:

$$\begin{aligned} f'(k_t)(1-\tau_k) &= \theta + n \\ f\ (k_t) &= \frac{\theta+n}{1-\tau_k} \\ k_t^* &= f'^{-1}\left(\frac{\theta+n}{1-\tau_k}\right). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Lembrando que pelo Teorema da Função Inversa, $c'(u) = m \rightarrow u = c'^{-1}(m)$. A taxa de retorno ótima do capital pós impostos será $\theta + n$, uma vez que $r_t(1-\tau_k) = f'(k_t'^*)$. Assim, o retorno pré-impostos será maior que pós ($k_t^* > k_t'^*$). O equilíbrio do estoque de capital será menor do que seria caso não houvesse taxação sobre o capital.

Esse resultado pode ser observado na Figura 1.5. O SS desloca de $E \rightarrow E'$, $c'^* < c^*$ e $k_{grm}'^* < k_{grm}^*$, ou seja, o consumo de equilíbrio e o estoque de capital de

[5] Além disso, quando aumenta o déficit, aumenta a poupança, pois as famílias sabem que em t+1 os impostos irão aumentar. O agente antecipa via expectativas racionais.

[6] Ver páginas 16 a 17, com o Hamiltoniano do problema sem governo e descentralizado

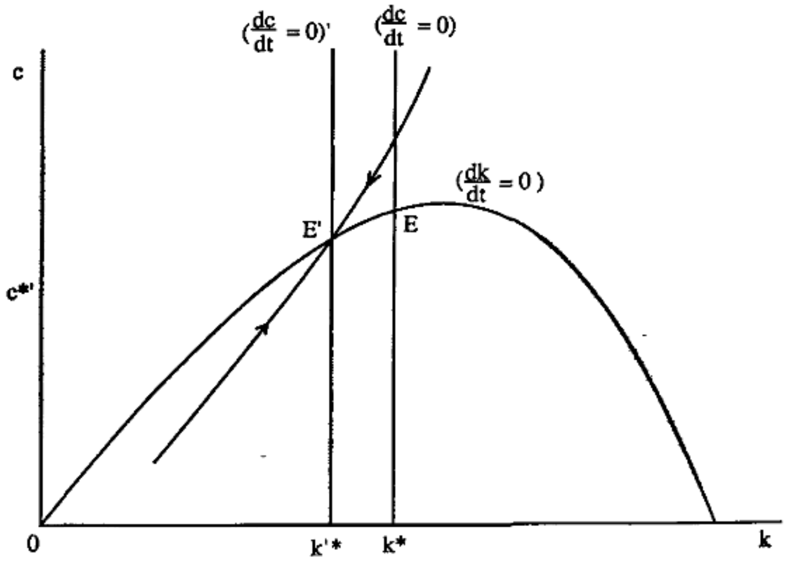


Figura 1.5: Efeito dos impostos sobre o capital (BF, cap. 2, p. 57)

equilíbrio serão menores que no cenário em que não há taxação distorciva.

1.5 Apêndice: Utilidades Especiais

Antes de Apresentar diferentes tipos de utilidades, cabe lembrar os coeficientes de aversão ao risco de Arrow-Pratt, utilizado para mensurar o nível de aversão ao risco do agente. Definimos o coeficiente de aversão ao risco absoluto como $C^A_{AP} = U''(x)/U'(x)$, e o coeficiente de aversão relativa como $C^R_{AP} = -U''(x) \cdot x/U''(x)$.

1. $U(c_t) = \gamma \ln(c_t) + (1-\gamma)\ln(c_{t+1})$

   $\varepsilon_{t,t+1} = 1$ (ver Walde)

2. Elasticidade de Substituição Constante (CES):

   $U(c_t) = \gamma \ln(c_t^{1-\sigma}) + (1-\gamma)\ln(c_{t+1}^{1-\sigma})$

   $\varepsilon_{t,t+1} = \frac{1}{\sigma}$ (cte)

3. CRRA (aversão relativa ao risco constante):

   $U(c_t) = \dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \forall \gamma > 0, \gamma \neq 1$

   Coeficiente de Arrow-Pratt Relativo (coeficiente de aversão ao risco) será:

   $C^R_{AP} = -\dfrac{U''(c_t)c_t}{U'(c_t)} = \gamma$ (cte)

4. DARA (aversão absoluta ao risco decrescente). Esse tipo de função representa agentes que tornam-se menos aversos ao risco a medida que ficam mais ricos. Um agente com esse tipo de função, se ficar mais rico, irá colocar essa riqueza adicional em risco. Um exemplo de função de utilidade com essa propriedade é $U(c_t) = \ln(c_t)$. O coeficiente de Arrow-Pratt será:
   $C^A_{AP} = -\dfrac{U'(c_t)}{U''(c_t)} = \dfrac{1}{c}, \quad C^A_{AP} = 1 \in CARA$

5. IARA (aversão absoluta ao risco crescente). O oposto da DARA, quanto mais rico, menos disposto a arriscar será o indivíduo. Funções quadráticas tem esse propriedade.
   $U(c_t) = -\dfrac{\lambda c^2}{2}$
   $C^A_{AP} = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda c_t}$, então, $\frac{dC^A_{AP}}{dc} > 0$

6. CARA (aversão absoluta ao risco constante) ou exponencial.
   $U(c_t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha c}$.
   Nesse caso, o coeficiente de aversão ao risco será:
   $C^A_{AP} = -\frac{U''(c)}{U'(c)} = -\frac{-\alpha e^{-\alpha c}}{e^{-\alpha c}} = \alpha$.
   $\varepsilon_{t,t+1} = (\alpha c)^{-1}$

Podemos resumir as funções de aversão absoluta ao risco como:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\alpha x}{1-\gamma} + \beta\right)^{\gamma} \\ C^A_{AP} &= \left(\frac{x}{1-\gamma} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} > 0 \text{ para } \gamma > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

Assim,

- Se $\beta = 1$ e $\gamma = -\infty$ teremos uma função CARA.
- Se $\beta = 0$ e $\gamma < 1$ teremos uma função CRRA.
- Se $\gamma = 2$ teremos uma função quadrática.

É importante lembrar que as funções CARA, CRRA e quadrática são especificações de uma função HARA (*harmonic absolute risk aversion*), uma classe de função mais genérica, conforme demonstrado acima. Outra forma de demonstrar a versão genérica de uma HARA é a partir de $U(W) = \theta\left(\mu + \frac{W}{\gamma}\right)^{1-\gamma}$. Nessa notação, é possível demonstrar, por exemplo, que para $\theta = [(1-\gamma)/\gamma]^{\gamma-1}$ e $\mu = 0$.

Capítulo 2

Modelo Solow-Swan

2.1 Modelo de Crescimento Neoclássico

Bibliografia: Novales et al (cap. 2) e Barro e Sala-I-Martin (1998, cap. 1)

2.1.1 Hipóteses

- Tecnologia:
  - Retornos constantes de escala (RCE)
  - Homogeneidade de grau 1
  - Condições de Inada
  - Retornos decrescentes em cada fator
  - Retornos constantes no agregado (por isso, uma função tipo Cobb-Douglas será adequada)
- Taxa de depreciação positiva. $D_t = \delta K_t$, com $\delta > 0$.
- Trabalhos ofertam inelasticamente uma unidade de tempo em cada período.
- Pleno emprego: $L_t = N_t$.
  - N_t: população total em t, oferta de trabalho.
  - L_t: Demanda por trabalho, emprego.
- Preços e salários completamente flexíveis
- Não há idade na população, não há estrutura de idade, por isso as pessoas podem trabalhar ao nascer

- Não há governo na economia
- Economia fechada para o comércio exterior
- Poupança agregada igual ao nível de investimentos agregado, $S_t = I_t$.
  - A poupação evolui a taxas constantes, é uma fração s do produto, $S_t = sY_t$, ou em termos per capita, sy_t.
- Força de trabalho, ou população, cresce a taxas constantes n. $N_t = N_0 e^{nt}$
- Economia produz commoditie única que pode ser consumido ou acumulada em forma de capital físico
- Não considera o comportamento otimizador dos agentes na economia. Modelo não normativo ou positivo.

Kaldor (1963) listou uma série de fatos estilizados que ele entendia tipificarem o processo de crescimento econômico[1]:

1. O produto per capita e sua taxa de crescimento não tendem a diminuir ao longo do tempo,
2. O capital físico por trabalhador cresce ao longo do tempo,
3. A taxa de retorno do capital é praticamente constante,
4. A razão entre capital físico e produção é praticamente constante,
5. A taxa de trabalho e capital físico na renda nacional é praticamente constante,
6. A taxa de crescimento do produto per capita difere substancialmente entre países.

2.1.2 Tecnologia

$$
\begin{aligned}
Y_t &= F(K_t, N_t) \\
PMgK &= \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 K} < 0 \\
PMgN &= \frac{\partial F}{\partial N} > 0, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial^2 K} < 0.
\end{aligned}
$$

Sabemos assim que F é côncava.

Pelas **condições de Inada**, temos:

[1] ver em Barro e Sala-i-Martin, p.12

a) Indispensabilidade dos fatores: $F(K_t, 0) = F(0, N_t) = 0$, ou seja, para produzir qualquer bem, é necessário ter fatores positivos.

b) $\lim\limits_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim\limits_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty$ e
$\lim\limits_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim\limits_{L \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$

As duas condições de Inada, junto com o fato da função de produção ser estritamente côncava, formam as três características básicas do Modelo Neoclássico.

A função de produção exibe RCE e homogeneidade de grau 1, logo,

$$
\begin{aligned}
Y_t &= N_t \cdot F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) \\
Y_t &= N_t \cdot f(k_t)
\end{aligned}
$$

tal que $k_t = \frac{K_t}{N_t}$. Considerando $y_t = \frac{Y_t}{N_t}$, a função de produção intensiva (ou per capita) será:

$$
y_t = f(k_t) \tag{2.1}
$$

As características da função de prudção também se aplicam a versão per capital, então $f'(k_t) > 0$, $f''(k_t) < 0$, assim como as condições de Inada, $\lim\limits_{k_t \to \infty} f'(k_t) = 0$, $\lim\limits_{k_t \to 0} f'(k_t) = \infty$ e $F(0) = 0$.

Para saber as características de $Y_t = N_t \cdot f(k_t)$, podemos diferenciar em relação K e L.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} &= N_t f'(k_t) \frac{\partial k_t}{\partial K_t} \\
&= N_t f'(k_t) \frac{1}{N_t} \\
&= f'(k_t); \\
\frac{\partial Y_t}{\partial N_t} &= f(k_t) + N_t f'(k_t) \frac{\partial k_t}{\partial N_t} \\
&= f(k_t) + N_t f'(k_t) \frac{-K_t}{N_t^2} \\
&= f(k_t) - k_t \cdot f'(k_t).
\end{aligned}
$$

Como $F(K_t, N_t)$ é côncava, a versão per capita também é.

Proposição 2.1 A função de produção Cobb-Douglas $(\alpha, 1-\alpha)$ obedece todas as propriedades da função de produção neoclássica.

Nesse contexto, uma função de produção Cobb-Douglas pode ser utilizada:

$$
Y_t = A K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \tag{2.2}
$$

É fácil perceber que a Cobb-Douglas tem retornos constantes de escala[2], a versão intensiva, ou per capita, será

$$y_t = Ak_t^{\alpha}, \tag{2.3}$$

tal que $f(k_t) = Ak_t^{\alpha}$, e α representa a participação dos recursos destinada para o capital. Note que esse tipo de função satisfaz as propriedades de uma função de produção neoclássica, pois $f'(k) = A\alpha k^{\alpha-1} > 0$, $f''(k) = A\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0$ e $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = 0$, $\lim\limits_{k\to 0} f'(k) = \infty$. Não apenas a PMgK é positiva, mas também a PMgN, $\frac{\partial f(k)}{\partial N} = f(k) - kf'(k) = Ak^{\alpha} - kA\alpha k^{\alpha-1} = (1-\alpha)Ak^{\alpha} > 0$.

2.1.3 A Dinâmica da Economia

Em uma economia simples, o produto da economia é utilizado para o consumo ou na forma de investimento bruto. Este é utilizado na compensação do capital depreciado, e também como adições líquidas ao estoque de capital.

Definição 2.1 Investimento Líquido:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

para I_t representando o investimento bruto, e δK_t a depreciação do capital. ■

Assim, em uma economia fechada, sem governo, ou se consome ou investe:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \qquad (2.4)\\ &= C_t + \dot{K}_t + \delta K_t \\ \dot{K}_t &= F(K_t, N_t) - C_t - \delta K_t \end{aligned}$$

Dividindo por N_t:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}_t}{N_t} &= \frac{F(K_t,N_t)}{N_t} - \frac{C_t}{N_t} - \frac{\delta K_t}{N_t} \\ \frac{\dot{K}_t}{N_t} &= f(k_t) - c_t - \delta k_t. \end{aligned}$$

Como já vimos no modelo RCK (Proposição 1.1, página 4), $\dot{K}_t/N_t = k_t + nk_t$. Substituindo e isolando $f(k_t)$, teremos

$$f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t, \tag{2.5}$$

[2]Ver Romer, p.13

que é a restrição de recursos per capita, que descreve a utilização da renda.

Lembre que uma das hipóteses é que $s = PMgS$. Uma vez que $C_t = (1-s)Y_t$, em termos per capital $c_t = (1-s)f_{k_t}$. Então, substituindo em 2.5 e isolando $\dot{k}_t$, temos

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (n+\delta)k_t. \tag{2.6}$$

Esta é a lei de movimento da economia, demonstrando como o estoque de capital per capital aumenta nos períodos em que a poupança é maior que a depreciação do capital, ou seja, se $sf(k_t) > (n+\delta)k_t$, então $\dot{k} > 0$.

2.2 Progresso Tecnológico

Vamos considerar a possibilidade de existir progresso tecnológico exógeno na forma de produtividade de um dado fator, representada por Γ_t, que cresce a taxas constantes γ:

$$g_\Gamma = \frac{\dot{\Gamma}_t}{\Gamma_t} = \gamma, \quad \forall t$$

Vamos introduzir o progresso tecnológico tendo efeito no fator de trabalho, fazendo com que o progresso aumente a produtividade do trabalhador. Esse tipo de pregresso é conhecido como sendo o tipo "Harrod Neutra"[3] ou "trabalho poupador":

$$Y_t = F(K_t, \Gamma_t N_t),$$

tal que $\Gamma_t N_t$ é o trabalho efetivo, trabalho aumentado ou trabalho eficiência. Essa função é côncava, tem RCE, homogeneidade de grau 1, e possibilidade de crescimento com mudança na produtividade. A derivada de F em relação a K_t ou $\Gamma_t N_t$ é positiva, e a derivada segunda negativa. Além disso, obedece as condições de Inada, $F(0, \Gamma_t N_t) = 0$ e $F(K_t, 0) = 0$.

Considerando o estoque de capital por unidade efetiva de trabalho, teremos

$$\begin{aligned} k_t &= \frac{K_t}{\Gamma_t N_t} \\ f(k_t) &= F\left(\frac{K_t}{\Gamma_t N_t}, 1\right) \end{aligned}$$

[3]Se o conhecimento/tecnologia afeta o capital, no formato $Y_t = F(\Gamma_t K_t, N_t)$, é conhecido como Solow-Neutro, ou capital aumentado. Ainda, existe o formato Hicks-Neutro, para a função no formato $Y_t = \Gamma_t F(K_t, N_t)$.

Para uma função Cobb-Douglas,

$$\begin{aligned} Y_t &= AK_t^\alpha(\Gamma_t N_t)^{(1-\alpha)} \\ &= A\Gamma_t N_t K_t^\alpha \\ &= \Gamma_t N_t f(k_t) \end{aligned}$$

para $f(k_t) = AK_t^\alpha$. O produto per capital será agora:

$$y_t = \frac{Y_t}{\Gamma_t N_t} = Ak_t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Relembrando a Equação 2.4, vamos refazer o processo para a nova função de produção com progresso tecnológico, para comprar o efeito do progresso na dinâmica da economia.

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t = C_t + \dot{K}_t + \delta K_t \\ \dot{K}_t &= F(K_t, \Gamma_t N_t) - C_t - \delta K_t \end{aligned}$$

Dividindo por $\Gamma_t N_t$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t N_t} &= \frac{F(K_t, \Gamma_t N_t)}{\Gamma_t N_t} - \frac{C_t}{\Gamma_t N_t} - \frac{\delta K_t}{\Gamma_t N_t} \\ \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t N_t} &= f(k_t) - c_t - \delta k_t. \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Definição 2.2 Note que:

$$\begin{aligned} \dot{k}_t &= \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t N_t} - \underbrace{\frac{\Gamma_t \dot{N}_t}{\Gamma_t N_t}}_{n} k_t - \underbrace{\frac{\dot{\Gamma}_t N_t}{\Gamma_t N_t}}_{\gamma} k_t \\ \dot{k}_t &= \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t N_t} - nk_t - \gamma k_t \\ \frac{\dot{K}_t}{\Gamma_t N_t} &= \dot{k}_t + (n+\gamma)k_t \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Substituindo 2.8 em 2.7,

$$\begin{aligned} \dot{k}_t + (n+\gamma)k_t &= f(k_t) - c_t - \delta k_t \\ f(k_t) &= c_t + \dot{k}_t + k_t(n+\delta+\gamma) \qquad (2.9) \end{aligned}$$

onde podemos explorar o uso da renda em termos per capita. Cabe destacar que γ é a taxa de crescimento da produtividade. A equação mostra que a produção de cada trabalhador é utilizada no consumo e adições ao estoque de capital.

Novamente, a partir de $C_t = Y_t(1-s)$, dividindo por $\Gamma_t N_t$, teremos $c_t = (1-s)f(k_t)$. Substituindo em 2.9 e isolando $\dot{k}_t$:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (n+\delta+\gamma)k_t \tag{2.10}$$

que será a lei de movimento para o modelo com progresso tecnológico. Se $sf(k_t) > (n+\delta+\gamma)k_t \to \dot{k}_t > 0$. Perceba que s é exógeno e que a poupança que define o nível de capital, que define o nível de consumo.

2.3 Steady State

Definição 2.3 Em uma economia com progresso tecnológico exógeno, um SS é um vetor das taxas de crescimento do consumo, produto e capital físico em unidades de trabalho efetivo $(\gamma_{ct}, \gamma_{yt}, \gamma_{kt})$ que quando alcançada pode ser mantido constante indefinidamente. SS: $\dot{k} = 0$. ■

Vamos considerar a lei de movimento da economia (Eq. 2.10), da onde podemos escrever a taxa de crescimento do capital como:

$$\begin{aligned} \gamma_{kt} &= \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - \frac{(n+\delta+\gamma)k_t}{k_t} \\ \gamma_{kt} &= \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (n+\delta+\gamma) \end{aligned} \tag{2.11}$$

No SS, $\gamma_{kt} = 0$, logo, $\frac{f(k)}{k}$ deve ser constante. Para isso, derivamos em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d[f(k_t)/k_t]}{dt} &= \frac{[df(k_t)/dt]\cdot k_t - f(k_t)\cdot \dot{k}_t}{k_t^2} \\ &= \frac{\dot{k}_t}{k_t}\frac{[f'(k_t)k_t - f(k_t)]}{k_t}\underbrace{=0}_{\text{no SS}}. \end{aligned}$$

Como no SS $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = 0$, então também sabemos que $\frac{f(k_t)}{k_t}$ será constante. Isso implica que o estoque de capital produtivo per capital cresça a taxas constantes γ.

Considerando $Y_t = F(K_t, \Gamma_t N_t)$, dividindo por N_t e considerando a homogeneidade de grau 1 e RCE:

$$\frac{Y_t}{N_t} = \frac{K_t}{N_t} F\left(1, \frac{\Gamma_t}{K_{t/N_t}}\right)$$

Como $k_t = \frac{\Gamma_t}{K_{t/N_t}}$ e é uma constante, y_t tem que cresce a mesma taxa, logo $\gamma_{kt} = \gamma_{yt} = 0$ em unidades de trabalho, ou $\gamma_{kt} = \gamma_{yt} = \gamma$ quando consideramos em termos per capita.

Por último, o consumo per capital também cresce a taxa γ, pois $c_t = (1-s)f(k_t)$. Perceba que, meso que as variáveis per capita tenham a mesma taxa de crescimento, γ é exógeno no modelo, por isso dizemos que esse é um modelo de crescimento exógeno. Esse resultado pode ser generalizado em uma proposição.

Proposição 2.2 Variáveis em termos per capital crescem no SS a taxa γ (exógena). É possível ter aumento na qualidade de vida desde que $\gamma > 0$.

Como o SS é caracterizado por $\dot{k}_t = 0$, substituindo na lei de movimento teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= sf(k_{ss}) - (n+\delta+\gamma)k_{ss} \\ sf(k_{ss}) &= (n+\delta+\gamma)k_{ss} \end{aligned}$$

Para uma função de produção que respeite as condições de Inada, o equilíbrio será único e estável, conforme a Figura 2.1.

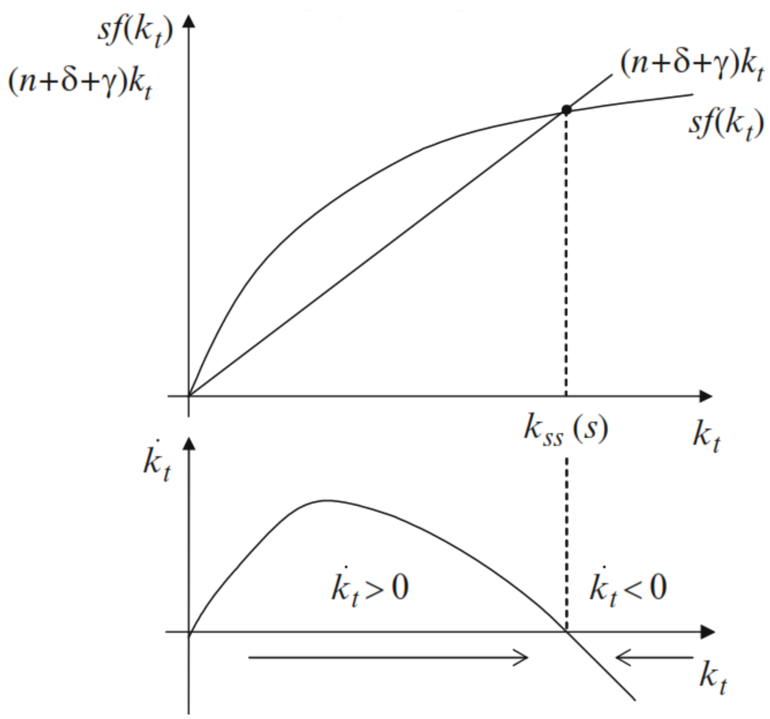


Figura 2.1: Steady State no modelo de Solow-Swan (Novales et al, p.71)

Como exemplo, considere uma função de produção Cobb-Douglas $y_t = Ak_t^{\alpha}$, para

$0 < \alpha < 1$. O SS será caracterizado por:

$$\begin{aligned} \dot{k}_t = 0 \implies sAk_{ss}^{\alpha} &= (n+\delta+\gamma)k_{ss} \\ k_{ss} &= \left(\frac{sA}{n+\delta+\gamma}\right)^{1/(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Então, o nível de equilíbrio do capital físico per capita é maior para maiores taxas de poupança, enquanto será menor para maiores taxa de crescimento populacional, taxa de depreciação do capital físico, ou taxa de crescimento da produtividade. Ainda, o nível de equilíbrio do capital físico será maior a medida que a elasticidade do capital físico aumenta. Em resumo:

$$\begin{cases} \text{Se } \uparrow s, \alpha \implies \uparrow k_{ss} \\ \text{Se } \uparrow \gamma, n, \delta \implies \downarrow k_{ss} \end{cases}$$

A Figura 2.2 demonstra a dependência entre o SS e o nível constante da taxa de poupança. Um aumento de s desloca $sf(k_t)$ e aumenta o k_{ss}, assim como a renda, o consumo e investimento. O limite para esse processo é quando $s = 1$, pois a curva de $sf(k_t)$ irá coincidir com a função de produção, atingido o nível de subsistência, quando $f(\hat{k}_t) = (n+\delta+\gamma)\hat{k}_t$. Situações em que $k_{ss} > \hat{k}$ não são sustentáveis, pois implicariam em consumo negativo.

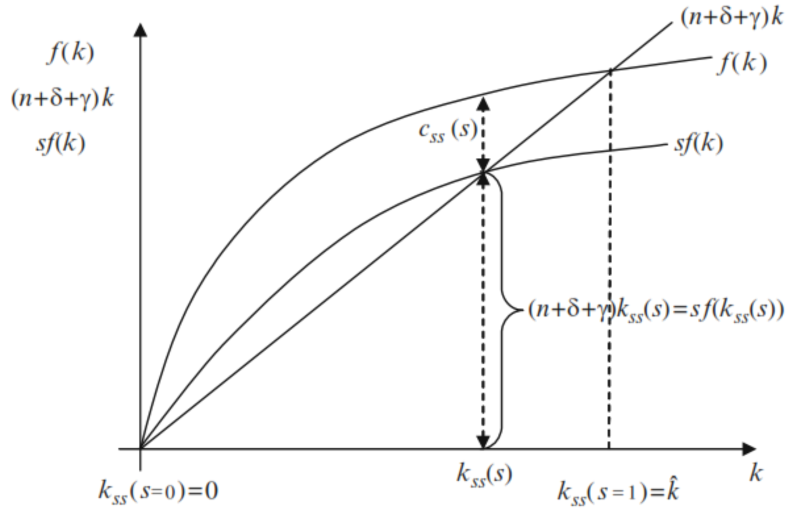


Figura 2.2: Steady State como função da taxa de poupança (Novales et al, p.72)

2.3.1 Transição para o SS

Fora do SS, a taxa de crescimento da economia não é constante, mas se comporta conforme a Equação 2.11. Queremos saber qual o caminho percorrido, dado um estoque de capital inicial k_0, até o SS.

Observando o primeiro termo da Equação 2.11, $sf(k_t)/k_t$, vemos que este é contínuo e uma função decrescente de k_t. Já o segundo termo é uma constante. Assim teremos o gráfico[4] da Figura 2.3. Quando $sf(k_{ss})/k_{ss} = \delta + n + \gamma$, $\gamma_{kt} = 0$. O ponto em que a taxa de crescimento do estoque de capital intensivo é zero será o steady-state da economia. Se $k_0 > k_{ss}$, então $sf(k_t)/k_t < \delta + n + \gamma$ e $\gamma_{kt} < 0$. Da mesma forma, se $k_0 < k_{ss}$, então $sf(k_t)/k_t > \delta + n + \gamma$ e $\gamma_{kt} > 0$. Na Figura 2.3, podemos ver que a taxa de crescimento de k é dada pela distancia vertical entre a curva $sf(k)/k$ e a horizontal $n + \delta$. Note que, ao longo da transição de nível baixo de capital per capita, γ_{kt} declina monotonicamente até zero.

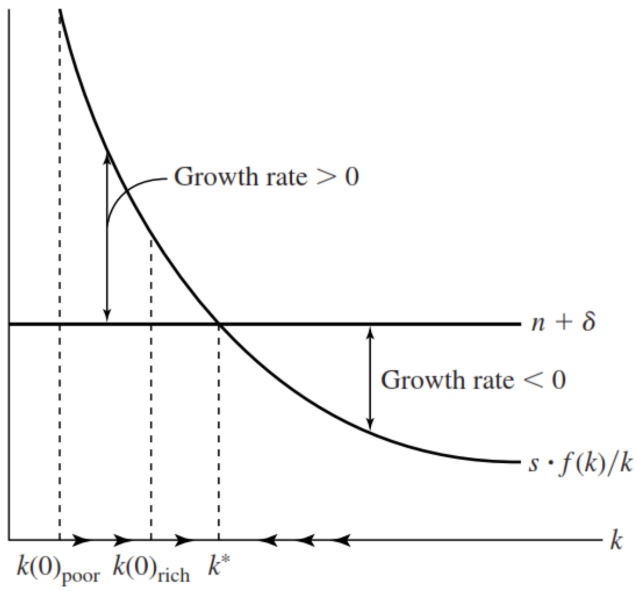


Figura 2.3: Dinâmica e transição (Barro e Sala-i-Martin, p.38)

Assim, quando k_t é relativamente pequeno, a produtividade média do capital $f(k_t)/k_t$ é relativamente grande, pela lei dos retornos decrescentes. Analiticamente, os efeitos em γ_{kt} das mudanças em k_t podem ser vistos em:

$$\frac{\partial \gamma_{kt}}{\partial k_t} = s\frac{k_t f'(k_t) - f(k_t)}{k_t^2} < 0.$$

[4] No gráfico, γ_{kt} = growth rate.

2.3.2 Velocidade de Aproximação para o SS

Para analisar a velocidade que a economia se aproxima do SS, temos que olhar para $\dot{k}$. Construindo uma aproximação linear da lei de movimento, teremos:

$$\dot{k} = \underbrace{[sf(k_{ss}) - (\delta + n + \gamma)k_{ss}]}_{=0 \text{ no SS}} + [sf'k_{ss} - (\delta + n + \gamma)](k_t - k_{ss}),$$

como $s = \frac{(\delta+n+\gamma)k_{ss}}{f'(k_{ss})}$,

$$\dot{k} = \left[\frac{(\delta + n + \gamma)k_{ss}f'k_{ss}}{f'(k_{ss})} - (\delta + n + \gamma)\right](k_t - k_{ss}).$$

Definindo a elasticidade de produção em relação a k_t como

$$\alpha_k(k_t) = \frac{k_t f'(k_t)}{f(k_t)},$$

em uma função de produção Cobb-Douglas, $\alpha_k(k_t) = \alpha$, constante. Substituindo $\alpha_k(k_t)$ em $\dot{k}$ teremos:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= [\alpha_k(k_{ss}) - 1](\delta + n + \gamma)(k_t - k_{ss}) \\ \dot{k} &= -[1 - \alpha_k(k_{ss})](\delta + n + \gamma)(k_t - k_{ss}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim, quando a economia está distante do SS, move-se mais rápido em direção ao equilíbrio, e quando se aproxima, vai diminuindo a velocidade, aproximando-se gradualmente ao SS.

Resolvendo a equação diferencial 2.12 encontramos a velocidade de convergência. Reorganizado,

$$\begin{aligned} \dot{k}_t &= -[1 - \alpha_k(k_{ss})](\delta + n + \gamma)(k_t - k_{ss}) \\ \dot{k}_t + k_t[1 - \alpha(k_{ss})](\delta + n + \gamma) &= k_{ss}(\delta + n + \gamma), \end{aligned}$$

o fator integrante será $e^{(1-\alpha_k)(\delta+n+\gamma)t}$. Então, para $\mu = (1-\alpha_k)(\delta+n+\gamma)$, a solução será

$$(k_t - k_{ss}) = e^{-\mu t}(k_0 - k_{ss}). \tag{2.13}$$

Poderíamos calibrar 2.13 para ver se uma economia está próxima de alcançar se caminho de crescimento de equilíbrio. Supondo $\alpha_k = 1/3$, $\delta + n + \gamma = 6\%$, $\mu = 4\%$, a distância entre k_t e k_{ss} vai diminuir 4% a cada período. A meia vida[5] da distância

[5] $MV = \frac{\ln(2)}{\mu}$

inicial até o SS seria aproximadamente 17 anos.

2.3.3 Transição do produto para o SS

O modelo de Solow-Swan tem estabilidade global, isso significa que qualquer economia está no Steady-State ou convergindo pra ele. Considerando uma economia que esteja convergindo para o SS, queremos saber o comportamento do produto nesse processo. Seu comportamento será caracterizado por

$$\begin{aligned}\gamma_{yt} &= \frac{\dot{y}}{y} = \frac{f'(k)}{f(k)}\dot{k} \\ &= k\frac{f'(k)}{f(k)}\gamma_{kt} \\ &= \alpha_k(k_t)\gamma_{kt}\end{aligned}$$

lembrando que $\gamma_{kt} = \dot{k}/k \rightarrow \dot{k} = \gamma_{kt}k$. Como exemplo, para uma Cobb-Douglas teríamos $\gamma_{yt} = \alpha\gamma_{yt}$.

Usando a Eq. 2.11 para γ_{kt} em γ_{yt}:

$$\gamma_{yt} = sf'(k_t) - (\delta + n + \gamma)\alpha_k(k_t).$$

Diferenciando em relação a k_t, seria possível observar os efeitos da variação do estoque de capital per capita no crescimento do produto da economia,

$$\frac{\partial\gamma_{yt}}{\partial k_t} = \frac{f''(k)k}{f(k)}\gamma_{kt} - \frac{(\delta + n + \gamma)f'(k)}{f(k)}(1 - \alpha_k(k))$$

de tal forma que, se $\frac{\partial\gamma_{yt}}{\partial k_t} < 0$, então $\gamma_{kt} \geq 0$. Ao contrário, se $\gamma_{kt} < 0$, o sinal de $\frac{\partial\gamma_{yt}}{\partial k_t}$ será ambíguo.

Para a taxa de crescimento do consumo, γ_c, utiliza-se $c_t = f(k_t) - k_t(n + \delta + \gamma)$,

$$\begin{aligned}\frac{dc_t}{dt} &= f'(k_t)\dot{k}_t - \dot{k}_t(n + \delta + \gamma) && (2.14) \\ \gamma_c &= \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(k_t)\dot{k}_t}{f(k_t)} - \frac{\dot{k}_t}{k_t} && (2.15) \\ \gamma_c &= \gamma_{yt} - \gamma_{kt} && (2.16) \\ \gamma_c &= (\alpha_k(k_t) - 1)\gamma_{yt}. && (2.17)\end{aligned}$$

2.3.4 Convergência

Quando estudamos a convergência no modelo neoclássico, estamos interessados em saber se duas economias diferentes tendem a ficar mais similares com o tempo ou as distinções entre elas tende a aumentar.

Definição 2.4 (Convergência Absoluta) Se dois grupos de países forem idênticos em $\delta, n, \gamma, \alpha$ e diferentes apenas em k_0, então, os países relativamente mais pobres cresceram a taxas maiores do que os países mais ricos. ■

A Figura 2.4 mostra que a taxa de crescimento da economia pobre, com k_0^p inicial, seria maior que a taxa de crescimento da economia rica, com estoque de capital inicial maior, k_0^r. A convergência absoluta considera que as economias atrasadas tendem a crescer a taxas mais elevadas do que as economias ricas e que, portanto, em algum momento do tempo os países pobres acabariam alcançando o nível de renda per capita dos países ricos.

Todavia, o que vemos em Solow-Swan é que existe convergência relativa entre os países, de tal forma que cada economia teria seu próprio SS. Assim, as economias tenderiam a crescer mais rápido conforma a distância do seu SS, mas as economias mais pobres não necessariamente alcançariam o nível de renda dos países ricos, como pode ser visto no segundo gráfico da Figura 2.4.

Definição 2.5 (Convergência Relativa) A taxa de crescimento dos países depende das distâncias relativas da renda ou produtividade do capital do valor de SS. ■

O que Solow propõe em seu modelo é convergência relativa, não absoluta. Econometricamente, a regressão absoluta sugere que uma regressão do tipo $\gamma_{kt} = \beta_0 + \beta_1 \ln k_t + u_t, \beta_1 < 0$, explica a taxa de crescimento da economia como uma função da sua situação atual. No entanto, uma forma mais adequada, considerando a convergência relativa seria $\gamma_{kt} = \beta_0 + \beta_1(\ln k_t - \ln k_{ss}) + u_t$, tal que k_{ss} pode ser estimado a partir da utilização de um vetor de controles.

Ver Souza e Porto Jr. (2002) para uma revisão da discussão de convergência, a Falácia de Galton e as críticas de Friedmann e Quah.

2.3.5 Consumo máximo no SS

Como vimos na Figura 2.2, o consumo máximo será influenciado pela taxa de poupança. Portanto, queremos saber qual taxa de poupança que maximiza o nível de steady-state do consumo. Esse nível de poupança e SS serão chamados de *golden rule* da acumulação de capitais.

Sabemos que no SS, na Eq. 2.6, $\dot{k}_t = 0$, logo $sf(k_{ss}) = (\delta+n+\gamma)k_{ss}$. O consumo

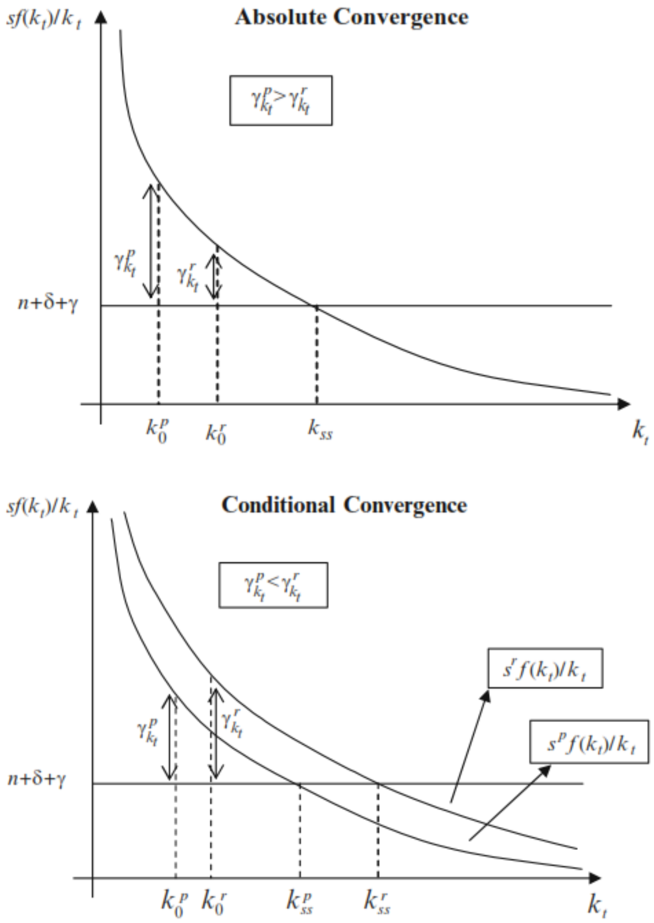


Figura 2.4: Convergência absoluta e condicional (Novales et al, p.77)

é $c_t = f(k_t) - sf(k_t)$. Substituindo $sf(k_{ss})$, teremos o consumo que queremos maximizar:

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(\delta + n + \gamma).$$

Percebe-se que o consumo de SS será máximo quando $\frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} = 0$, assim, a condição de primeira ordem será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} &= f'(k_{ss}) - (\delta + n + \gamma) = 0 \\ f'(k^{gr}_{ss}) &= \delta + n + \gamma. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim, no ponto em que a inclinação de $f(k_t)$ for paralela a linha reta $(\delta+n+\gamma)k_t$, teremos o nível de capital em unidades de trabalho eficiente de Golden Rule, k^{gr}_{ss}. A taxa de poupança de Golden Rule, s_{gr}, é o valor de s para o qual a função $sf(k_{ss})$ cruza $(\gamma + n + \delta)k_t$, conforme a Figura 2.5.

A absorção de GR é ótima de recursos? Podemos ter duas respostas para essa

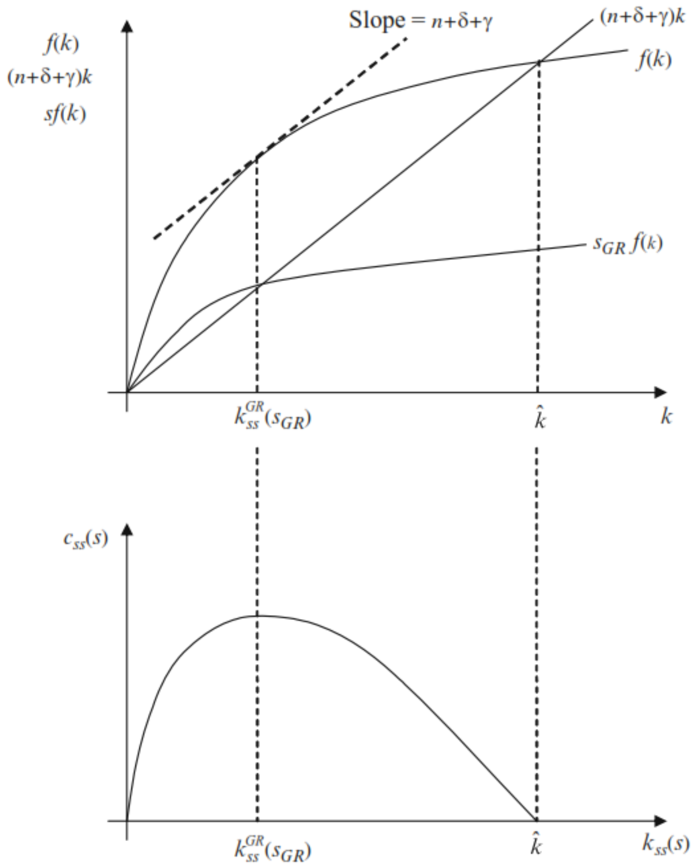


Figura 2.5: Determinação da Golden Rule (Novales et al, p.79)

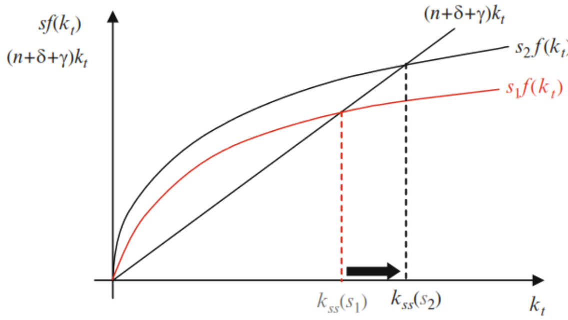
questão, uma normativa e outra positiva. O **normativo** é que a GR é o SS preferido, se a função de utilidade não apresenta ponto de êxtase, pois representa o consumo máximo de SS. Do ponto de vista **positivo/prático**, isso depende do k_{ss}^0, pois a transição $k_0 \to k_{ss}^{gr}$ pode implicar sacrifícios maiores do que os benefícios de obter o nível de consumo de SS. Se estiver muito distante, o consumo que vai abrir mão pode não ser maior que o consumo de GR. Depende da função utilidade que cada indivíduo tem[6].

2.4 Mudança nos Parâmetros Estruturais

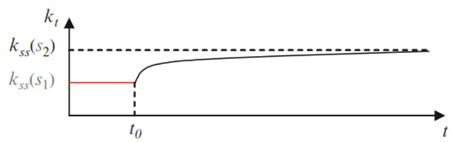
Vamos assumir que estamos no SS e há um aumento na taxa de poupança s, $\Delta^+ s$, quais os efeitos em k_{ss}, γ_{yt} e $\ln(Y_t/L_t)$? Um aumento de s desloca a curva $sf(k_t)$, conforme a Figura 2.6a. Assumindo que s pula para o novo nível em t_0, o estoque de capital se desloca gradualmente $k_{ss}(s_1) \to k_{ss}(s_2)$, que pode ser visto na Figura 2.6a e 2.6b.

[6]Não no modelo, porque nele não tem função utilidade.

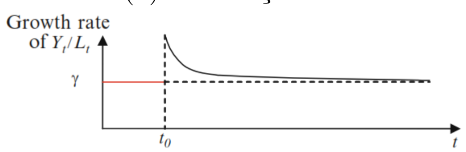
Quanto ao comportamento do renda per capita (output per work), Y/L cresce a taxa a taxa γ_{yt} (ou γ), conforme a Figura 2.6c. No entanto, quando o estoque de capital alcança o novo nível de SS, $k_{ss}(s_2)$, a taxa de crescimento retorna para o nível anterior. Assim, um aumento na taxa de poupança gera um aumento temporário na taxa de crescimento do produto per capita. Esse efeito reflete no produto per capita representado na Figura 2.6d, que muda sua trajetória e mantém em um nível paralelo e mais alto que o inicial.



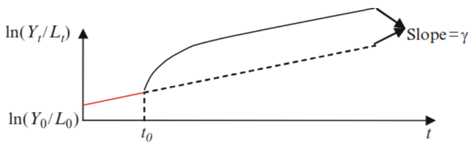
(a) Mudança em s



(b) Efeito em k_{ss}



(c) Efeito em na taxa de crescimento γ_{yt} ou γ



(d) Efeito em $\ln(Y_t/L_t)$

Figura 2.6: Efeito de um aumento na taxa de poupança (Novales et al, p. 85)

Ainda, temos o impacto de um aumento na taxa de poupança no consumo. O consumo por unidade de trabalho efetivo é igual ao produto por unidade efetiva de trabalho vezes a fração que é consumida, ou seja, $c_t = f(k_t)(1-s)$. Como em t_0 há um pulo da taxa de poupança para um novo nível, o consumo cai imediatamente. Com o aumento gradual de k_t, o consumo vai aumentando, enquanto s permanece constante no novo nível mais alto. Podemos perceber esse efeito ao considerar:

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - (\delta + n + \gamma)k_{ss} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial c}{\partial s} = [f'k_{ss} - (\delta + n + \gamma)]\frac{\partial k_{ss}}{\partial s}. \tag{2.20}$$

Como $\frac{\partial k_{ss}}{\partial s} > 0$, o novo nível de consumo será menor ou maior que o nível anterior dependendo de $f'k_{ss} - (\delta + n + \gamma)$. Se $f'k_{ss} > (\delta + n + \gamma)$, teremos um novo nível de consumo mais alto. Nesse

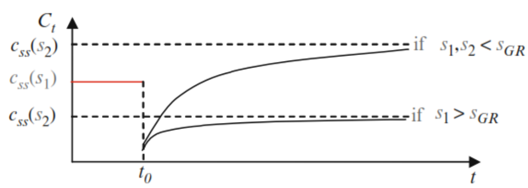


Figura 2.7: Efeito em c_{ss}

caso, temos $k_{ss}^0 < k_{ss}^{gr}$, ou seja, o estoque de capital de golden rule é maior que o estoque inicial, fazendo com que $f'(k_t)$ seja menor que $(\delta+n+\gamma)$, e que um aumento na taxa de poupança aumente no nível de consumo. Por outro lado, quando $f'k_{ss} < (\delta+n+\gamma)$, $k_{ss}^0 < k_{ss}^{gr}$ e $\frac{\partial c}{\partial s} < 0$. Os dois efeitos estão representados na figura 2.7.

Resumindo, temos que um aumento em s, tem efeito positivo em k, y e Y/L, efeito zero na taxa de crescimento $\gamma_{yk} = \dot{Y}/Y$ e efeito incerto no consumo c.

2.4.1 Mudanças estruturais - políticas econômicas

Novales et. al expandem a análise anterior para observar os efeitos de mudanças em s, na taxa de crescimento da população, n, depreciação do capital, δ, crescimento tecnológico, γ, e elasticidade de produção do capital, α. Resumindo os resultados tal como na Figura 2.8. Para isso eles consideram w_{ss} e r_{ss}, os valores do salário real e da taxa de juros real no SS, como:

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{2.21}$$

$$r_t = f'(k_t). \tag{2.22}$$

O primeiro ponto que destacamos é que, se $\uparrow k_t$, $\downarrow f'(k_t)$ e, consequentemente, diminui a taxa de juros no SS, r_{ss}. Em seguida, agregando $\eta = \delta, n, \gamma, \alpha, s$, derivamos r e w em relação a η,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \eta} &= \frac{\partial f'(k)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \eta} = f''(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta} \\
\frac{\partial w}{\partial \eta} &= f'(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta} f'(k_{ss}) + k_{ss} f''(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta}\right] \\
&= -k_{ss} f''(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

Percebe-se então que a taxa de juros real está inversamente relacionada com o capital no SS, sinal de $\partial r/\partial \eta = -\partial k_{ss}/\partial \eta$, pois $f''(k_t) < 0$, enquanto o salário real é positivamente relacionado, tendo o mesmo sinal.

Para analisar a relação o efeito de mudança nos parâmetros no consumo[7] e no

[7] $c = (1-s)f(k)$

produto[8], usamos e $\xi = n, \gamma, \delta, \alpha$, e derivamos c em relação ξ e s:

$$\frac{\partial c}{\partial \xi} = (1-s)f'(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial \xi} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial c}{\partial s} = f'(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial s} - f(k_{ss}), \tag{2.24}$$

tal que observamos uma relação positiva no sinal de $\frac{\partial c}{\partial \xi}$ com $frac\partial k_{ss}\partial\xi$, e a indefinição quanto a s, como já estudado. Quanto a y, teremos:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = f'(k_{ss})\frac{\partial k_{ss}}{\partial \eta}, \tag{2.25}$$

que também terá relação de sinal positiva.

O produto médio do capital terá efeito de sinal negativo, pois:

$$\frac{Y_t}{K_t} = \frac{f(k_t)}{k_t} \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial(Y_t/K_t)}{\partial k_t} = -\frac{f(k_t) - k_t f'(k_t)}{k_t^2} < 0. \tag{2.27}$$

Por outro lado, o produto médio do trabalho, $\frac{Y_t}{\Gamma_t N_t} = f(k_t)$, se comporta da mesma forma que k_{ss}. Finalmente, a taxa de crescimento do produto (ou renda), γ_{yt}, pode ser escrito como $\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta$, sendo afetado apenas pela taxa de crescimento da população e a taxa de crescimento do progresso tecnológico, já que no SS, a taxa de crescimento da renda per capita é zero.

	k_{ss}	c_{ss}	y_{ss}	ω_{ss}	r_{ss}	Y/K	Y/N	$\dot{Y}/Y$
s	+	?	+	+	−	−	+	0
n	−	−	−	−	+	+	−	+
δ	−	−	−	−	+	+	−	0
γ	−	−	−	−	+	+	−	+
α	+	+	+	+	−	−	+	0

Figura 2.8: Resumo dos efeitos das mudanças estruturais (Novales et al, p.86)

Em resumo, a única variável de política econômica do modelo é a poupança, pois as outras são difíceis de serem controladas. Ela tem efeito em praticamente todas as outras, mas é exógena no modelo.

[8] $y_t = f(k_t)$, conforme eq. 2.1.

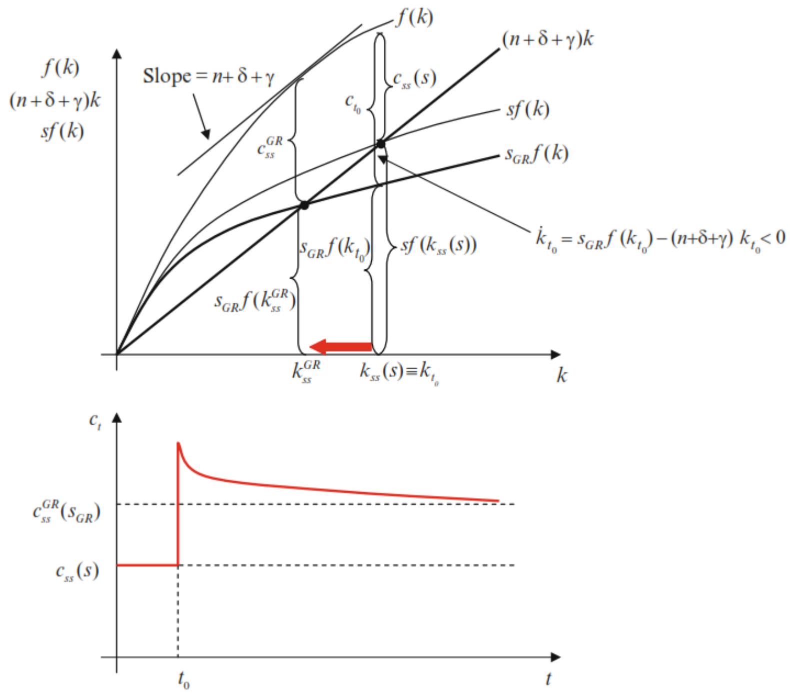
2.5 Ineficiência Dinâmica

O último tema que vamos abordar em Solow é a ineficiência dinâmica. O modelo de Solow-Swan supõe estabilidade, a economia sempre vai convergir para um SS (k_{ss}) associado a uma taxa de poupança s.

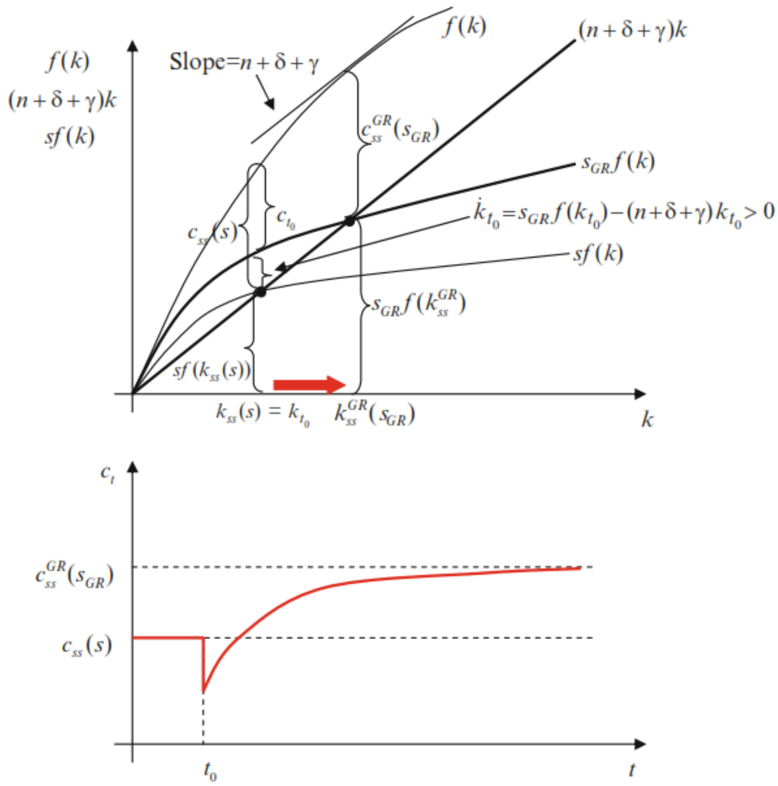
Definição 2.6 (Ineficiência Dinâmica) Uma situação da economia na qual é melhor para o indivíduo que a economia migre para uma taxa de poupança de golden rule (s_{gr}) e fique lá para sempre. Isso vai depender do k_{ss}^{gr} e k_{ss}^{0}. ▪

Suponha que começamos com uma taxa de poupança s e um estoque de capital $k_{ss}(s)$, conforme a Figura 2.9a. Se reduzirmos a taxa de poupança para s_{gr}, $c_{ss}(s) \to c_{t0}$, que é maior que c_{ss}^{gr}. A permanência nesse nível de consumo maior será temporária, pois haverá uma queda gradual no estoque de capital $k_{ss}(s) \to k_{ss}^{gr}$, fazendo o consumo per capital diminuir paulatinamente até chegar em c_{ss}^{gr}. O consumo de golden rule é maior que o consumo inicial, $c_{ss}(s)$, logo, a queda na taxa de poupança fez com que o consumo fosse maior ao longo da trajetória até o consumo de golden rule. Isso será verdade para todo ponto de steady-state a direita da golden rule, e será considerado dinamicamente ineficiente.

Na segunda situação, temos $k_{ss}^{0} < k_{ss}^{gr}$. Na Figura 2.9b, começamos em $k_{ss}(s)$. Um aumento em s, gera uma queda no consumo, $c_{ss}(s) \to c_{t0}$. O novo SS se dará em k_{ss}^{gr}, com a economia aumentando o estoque de capital gradualmente até esse ponto. Com isso, o nível de consumo irá crescer gradualmente até c_{ss}^{gr}, que é maior o primeiro nível de consumo, afinal, essa é a característica do steady-state de golden rule. Todavia, ao longo dessa trajetória, o consumo ficou alguns períodos abaixo desse nível, fazendo com que não seja claro se vamos alcançar um nível de consumo maior que no período inicial. Mesmo que um aumento na taxa de poupança gere sacrifícios no consumo de curto prazo, há a possibilidade de acumular capital físico e atingir um nível de produto e consumo mais alto. Pode ou não ter eficiência dinâmica. Não temos como saber se vale a pena o sacrifício. Um argumento informal seria que, só se s_0 for muito menor que s_{gr} haverá ineficiência dinâmica.



(a) Ineficiência Dinâmica



(b) Não-Ineficiência Dinâmica

Figura 2.9: Ineficiência e não ineficiência dinâmica (Novales et al, p.88-89)

Parte II

Modelos de Crescimento Endógeno

Capítulo 3

Modelos AK

Modelos endógenos da tecnologia. Bibliografia:

- Aghion e Howitt (2009): the Economics of Growth.

Incorporar tecnologia endógena gera algumas dificuldades, como ter que lidar com retornos crescentes de escala. Assim, a teoria de crescimento endógeno não pode ser baseada no arcabouço teórico dos mercados competitivos.

Soluções propostas:

1. Arrow (1962): crescimento do conhecimento é consequência não intencional da função de produção de bens de capital. Ou seja, é uma espécie de externalidade positiva. Processo de learning-by-doing. Não precisamos remunerar a pesquisa. Preserva o equilíbrio competitivo e o teorema de Euler. Tecnologia ("A") endógena, $\Delta PMgK \rightarrow \uparrow \dot{A}$.

2. Kaldor (57): Função de produção de progresso tecnológico com taxa de crescimento do SS que continua dependendo de fatores exógenos.

3. Nordhaus (69) e Shell (73): Primeiros modelos em que a busca por $\dot{A}$ é uma decisão econômica intencional, deliberada. Indivíduos buscam renda de monopólio. Continua com padrão de vida limitado.

4. Uzawa (65): A vai ser capital humano para o trabalhador. $\dot{K}$ se refere a capital fixmo e humano. Taxa de crescimento no SS positiva.

3.1 Modelo Shell (1966)

Bibliografia: Chiang, Alpha. Elements of optimization dynamic (capítulo 9, 267 em diante).

Produto em função do capital, trabalho e estoque de conhecimento. Função de produção:

$$Y(t) = Y[K_t, L_t, A_t]. \tag{3.1}$$

Lei de movimento para o estoque de conhecimento:

$$\dot{A}_t = \sigma\alpha_t Y_t - \beta A_t. \tag{3.2}$$

Assim, a trajetória do conhecimento depende do coeficiente de sucesso da pesquisa ($0 < \sigma \leq 1$) e a fração de recursos canalizado para a atividade criativa ($\alpha_t Y_t$, para $0 < \alpha < 1$) menos a taxa de fracasso da pesquisa ($\beta \geq 0$) vezes o estoque de conhecimento no tempo t (A_t).

A lei de movimento do estoque de capital seria:

$$\dot{K}_t = s_t(1 - \alpha_t)Y_t - \delta K_t, \tag{3.3}$$

tal que s_t é a propensão marginal a poupar.

Considerando $c_t = (1 - s)(1 - \alpha)Y_t$, o problema do planejador central é:

$$\begin{array}{rl} \max & \int_0^\infty U_t(c_t)e^{-\theta t} \\ \text{s.a.} & \dot{A}_t = \sigma\alpha Y_t - \beta A_t \\ & \dot{K}_t = s_t(1 - \alpha_t)Y_t - \delta K_t \\ \text{e} & A(0) = A_0, \quad K(0) = K_0 \end{array}$$

A questão é que esse problema não tem uma solução funcional, sendo apenas possível estudar a dinâmica do SS. Mostra-se que quando $t \to \infty$, o estoque de conhecimento e capital será constante:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} A_t &= \bar{A}_t \\ \lim_{t\to\infty} K_t &= \bar{K}_t, \end{aligned}$$

de tal forma que o padrão de vida será limitado.

Em uma outra formatação, Sato (66) sugere alterar a lei de movimento do estoque de conhecimento:

$$\dot{A}_t = \sigma\alpha A_t - \beta A_t \text{ ou } \frac{\dot{A}}{A} = \sigma\alpha - \beta,$$

então, a taxa de crescimento para A_t será positiva quando $\sigma\alpha > \beta$.

3.2 Frankel (62) e Romer (86)

Crítica ao modelo de Harrod-Domer, que utiliza uma função de produção com coeficientes fixos de tecnologia, $Y = f(K, L) = \min\{AK, BL\}$. Como A e B são fixos, precisamos de 1/A de K e 1/B de L para produzir uma unidade de Y. Não há compensação via substituição pelo outro fator. O crescimento não será permanente.

Frenkel assume que cada firma tem uma fução de produção dada por:

$$Y = \bar{A}K^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{3.4}$$

para $\bar{A}$ sendo a produtividade agregada, dado para a firma, mas endógeno para a economia. Por sua vez, a produtividade agregada depende da quantidade todal de capital acumulado por todas as firmas, tal que:

$$\bar{A} = A_0(K/L)\beta$$

então, o produto agregado pode ser escrito,

$$Y = A_0(K/L)^{\beta}K^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{3.5}$$

$$Y = AK^{\beta+\alpha} \tag{3.6}$$

com $A = A_0L^{1-\alpha}$ e $\beta + \alpha = 1$ para retornos constates de capital, de tal modo que a economia sustente taxas de crescimento estritamente positivas e finitas. Então, a produtividade marginal do capital será igual a produtividade média, que será igual a A, $\frac{\partial Y}{\partial K} = A = PMgK = PMeK$.

Características:

- Esse modelo viola Inada, $F'(K_t \to \infty) \to 0$.
- Mesmo no pleno emprego, há aumento em K e Y, pois há um aumento automático em A.
- Há pleno emprego.
- Retornos marginais decrescentes em k são compensados pelo comportamento de k sobre A ($\uparrow K, \uparrow A$).
- L = 1 (por simplificação) e $\delta = 0$.
- Agente representativo com utilidade intertemporal.

O problema de otimização dinâmico do modelo é definido por:

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^\infty U_t(c_t)e^{-\theta t}dt & (3.7) \\ \text{s.a.} \quad & \dot{k}_t = \bar{A}k^\alpha - c_t & (3.8) \\ \text{e} \quad & \dot{k} > 0. & \end{aligned}$$

Assumindo uma função com elasticidade de substituição intertemporal constante do tipo CRRA[1],

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\rho} - 1}{1-\rho}$$

A condição de primeira ordem (Equação de Euler) será:

$$-\rho\frac{\dot{c}}{c} = \theta - \alpha\bar{A}k^{\alpha-1}. \tag{3.9}$$

Se $\bar{A} = AK^\beta$, a equação de Euler será $-\rho\frac{\dot{c}}{c} = \theta - \alpha\bar{A}k^{\alpha+\beta-1}$. Considerando $\alpha+\beta = 1$, sabemos que consumo e produto crescem a taxas iguais, então:

$$g = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{(\alpha\bar{A} - \theta)}{\rho}, \tag{3.10}$$

onde vemos que, quanto maior a taxa de desconto θ, ou menor a elasticidade de substituição intertemporal medida por $1/\rho$, menor será a taxa de crescimento no steady state g. Também vemos que g não depende no estoque de capital K_t. Considerando N firmas,

$$g = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{(N^{1-\alpha}\alpha\bar{A} - \theta)}{\rho} > 0.$$

Logo, percebe-se que $\uparrow N, \uparrow A, \uparrow g$. Com isso, é possível entender que a abertura econômica é *pró-growth*.

3.2.1 Comentários Finais

- ⋆ Se α e θ diferem entre países, então a diferença entre as taxas de crescimento entre os países será permanente.
- ⋆ Não ocorre convergência condicional.
- ⋆ PMgK é constante, logo, não há ineficiência dinâmica.
- ⋆ São spill-overs de produção da firma que geram o crescimento do conhecimento. $g_A > 0 \rightarrow g_{SS} > 0$, crescimento endógeno.

[1]Constant Relative of Risk Aversion

* ⋆ A taxa de crescimento de SS do modelo (g_{ss}) é menor que o ótimo social, $g_{ss} < g_{ss}^{\text{ótimo social}}$, logo, ineficiente.

Capítulo 4

Modelos endógenos de capital humano

O modelo de Uzawa (1965) e Lucas (1988) é um modelo de crescimento endógeno que dá foco ao capital humano. Começamos com uma estrutura que o capital físico e humano tem funções de produção idênticas. Em seguida, iremos permitir que eles sejam produzidos por tecnologias diferentes. Especificamente, focamos no caso em que a educação, que produz novo capital humano, é relativamente intensiva em capital humano como insumo.

A presença de capital humano pode relaxar a restrição de retornos decrescentes para uma conceito mais amplo de capital e pode levar a um crescimento per-capital de longo prazo mesmo sem progresso tecnológico exógeno. Assim, a produção de capital humano pode ser uma alternativa para o desenvolvimento tecnológico como um mecanismo gerador de crescimento de longo prazo.

A acumulação de capital difere da criação de conhecimento. Se pensarmos como capital humano como uma habilidade incorporada ao trabalhador, o uso dessa capacidade em uma atividade impede o uso dela em outra, por isso dizemos que o capital humano é um **bem rival**. Como as pessoas tem direito de propriedade sobre suas habilidades, o capital humano também é um bem excludente (excludable). Por outro lado, o conhecimento é dito **não-rival**, dado que pode se espalhar livremente entre as atividades, e muitos são considerados não excludentes (nonexcudable).

4.1 Antecedentes

Modelo de capital humano - Schultz (63) e Becker (64) - investimento realizado para aumentar a produtividade do capital humano. Proxy: educação.

A configuração inicial considera uma função Cobb-Douglas:

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, A é o nível tecnológico e H o capital humano. O capital humano pode ser considerado o número de trabalhadores L multiplicado pelo capital humano, ou qualidade, do trabalhador típico h, assim $H = Lh$. Por conveniência, assume-se que a força de trabalho L é fixa, e H cresce somente pela melhora na qualidade média do trabalhador, h.

A restrição de recursos da economia é:

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = C + I_K + I_H, \tag{4.1}$$

tal que I_K e I_H são o investimento em capital físico e humano. As mudanças nos estoques de capital são dadas por:

$$\dot{K} = I_K - \delta K, \quad \text{e} \quad \dot{H} = I_H - \delta H \tag{4.2}$$

Considerando as restrições 4.1 e 4.2, dado que o consumidor maximiza $U = \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-pt}dt$, com a função utilidade associada, $u(C) = (C^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$, montando o Hamiltoniano, teremos que a segunda condição é que o produto marginal líquido do capital físico é igual ao produto marginal líquido do capital humano[1]. Essa condição implica que a razão dos dois estoques de capital será:

$$\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}, \tag{4.3}$$

que valerá para o steady-state.

Substituindo 4.3 em $Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$, teremos:

$$Y = AK\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)}, \tag{4.4}$$

que é constante. Assim, se ocorrer uma catástrofe que destrói todo o capital físico, então parte do H se transforma em capital físico, o que não é razoável ou realista. Assim, Uzawa-Lucas fez com que K e H não fossem intercambiáveis ($K \neq K$).

[1] Iremos resolver esse problema novamente no Uzawa-Lucas, por enquanto, basta saber os resultados.

4.1.1 Estrutura Básica

Lucas (1988): qualquer modelo razoável tem que ser consistente com o padrão observado do comportamento em nível e variação do PIB per capita.

a Desenvolvimento observado (dados de renda per capita)

$$\left.\begin{aligned}\text{Países industrializado: } & \$10k\\ \text{Índia: } & \$240\\ \text{Haiti: } & \$270\end{aligned}\right\}\text{dist} \sim 40\text{x em nível}$$

b Taxa de crescimento do PIB per capita (1960 - 1980)

$$\left.\begin{aligned}\text{Japão: } & 7,1\% a.a.\\ \text{EUA: } & 2,3\% a.a.\\ \text{Índia: } & 1,4\% a.a.\\ \text{Coréia do Sul: } & 7,0\% a.a.\end{aligned}\right\}\text{dispersão grande}$$

c Dentro de países (mesma tendência de dif. regionais)

Crítica convergência absoluta de Solow, mesmo quando os países são iguais. Essência do modelo de Lucas: capital humano vai ser fator determinante, pois a produção de capital humano não envolve o capital físico.

4.2 Lucas e Uzawa

No modelo de Uzawa-Lucas existem dois setores: bens finais (Y) e capital humano (H).

Notação 4.1 :

- K_y: Capital físico no setor Y;
- H_y: Capital humano no setor Y.

Considerando uma economia fechada e sem governo teremos $Y = C + I$. Considerando uma função de produção tipo Cobb-Douglas:

$$Y = AK_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha}. \tag{4.5}$$

Considerando a equação de movimento do capital como

$$\dot{K} = I_K - \delta K, I_K = \dot{K} + \delta K \tag{4.6}$$

teremos,

$$\begin{aligned} AK_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} &= C + I \\ AK_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} &= C + \dot{K} + \delta K \\ \dot{K} &= AK_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} - C - \delta K \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para o setor H, teremos uma situação análoga.

$$H = BK_h^{\eta} H_h^{1-\eta} \tag{4.8}$$

$$\dot{H} = BK_h^{\eta} H_h^{1-\eta} - \delta_h H. \tag{4.9}$$

Considerando que a quantidade toda de capital humano se dará por $H = H_h + H_y$, e que u representa o percentual de capital humano (H) utilizado na produção de bens finais, teremos:

$$H_y = uH \quad \text{e} \quad H_h = (1-u)H. \tag{4.10}$$

Substituindo 4.10 em 4.6 e 4.9, e considerando $\eta = 0$, pois a produção de capital humano não envolve a utilização de capital, teremos as seguintes equações de movimento,

$$\dot{K} = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta_k K \tag{4.11}$$

$$\dot{H} = B(1-u)H - \delta_h H, \tag{4.12}$$

onde podemos subtrair a notação que refere a utilização de capital físico no setor de bens finais, uma vez que o setor de capital humano não utiliza capital. Tomando a versão per capita,

$$\frac{\dot{K}}{L} = Ak^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - \delta_k k. \tag{4.13}$$

Sabendo que $k = \frac{K}{L}$, $\dot{K} = \dot{k}L + k\dot{L}$, logo $\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + kn$, para a taxa de crescimento da população $n = \dot{L}/L$. Assim,

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k. \tag{4.14}$$

O mesmo vale para encontrar a versão per capita da equação de movimento do capital humano, que será

$$\dot{h} = B(1-u)h - \delta_h h. \tag{4.15}$$

4.2.1 O problema do Agente

Utilizando as equações de movimento, o problema do agente será:

$$\begin{aligned}
&\max_{c_0} && \int_0^\infty U(c_t)e^{-pt}dt && (4.16)\\
&s.a. && \dot{k} = Ak^\alpha(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k, && (4.17)\\
& && \dot{h} = B(1-u)h - \delta_h h, && (4.18)\\
& && h_0 \text{ e } k_0 \text{ dados.}
\end{aligned}$$

Para $U(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$, temos k e h como variáveis de estado, c e u como variáveis de controle e λ_k e λ_h de co-estado, considera-se o Hamiltoniano a valores correntes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} &+ \lambda_k[Ak^\alpha(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k] \\
&+ \lambda_h[B(1-u)h - \delta_h h].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= 0\\
\mathcal{H}_u &= 0\\
-\mathcal{H}_k &= \dot{\lambda}_k - \rho\lambda_k\\
-\mathcal{H}_h &= \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h\\
\lim_{t\to\infty} \lambda_{k,t}k_t &= 0\\
\lim_{t\to\infty} \lambda_{h,t}h_t &= 0.
\end{aligned}$$

Em $\mathcal{H}_c = 0$ teremos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &:= c_t^{-\theta} - \lambda_{k,t} = 0\\
c_t^{-\theta} &= \lambda_{k,t}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Para $\mathcal{H}_u = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_u := (1-\alpha)\lambda_{k,t}Ak^\alpha(uh)^{-\alpha}h - \lambda_h Bh &= 0\\
(1-\alpha)\lambda_{k,t}Ak^\alpha u^{-\alpha}h^{1-\alpha} &= \lambda_h Bh.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Pelas condições de primeira ordem das variáveis de estado obtemos:

$$\begin{aligned} -\mathcal{H}_k &:= -[\alpha\lambda_{k,t}Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \lambda_k(n+\delta_k)] = \dot{\lambda}_k - \rho\lambda_k \\ & \quad -\lambda_{k,t}[\alpha Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - n - \delta_k] = \dot{\lambda}_k - \rho\lambda_k \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$-\mathcal{H}_h := \begin{array}{l} -\{\lambda_{h,t}[B(1-u) - \delta_h - n] \\ \qquad + (1-\alpha)Ak^{\alpha}(uh)^{-\alpha}\cdot u\cdot\lambda_{k,t}\} = \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h. \end{array} \tag{4.23}$$

Percebe-se que em 4.22,

$$-[\alpha Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - n - \delta_k] = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_{k,t}} - \rho\lambda_k,$$

como, a partir de 4.20, encontramos $\dot{\lambda}_{h,t} = -\theta c_t^{-(\theta+1)}\dot{c}_t$,

$$\begin{aligned} n + \delta_k - \alpha Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} &= \frac{-\theta c_t^{-(\theta+1)}\dot{c}_t}{c_t^{-\theta}} - \rho\lambda_k, \\ n + \delta_k - \alpha Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} &= \frac{-\theta\dot{c}_t}{c_t} - \rho\lambda_k. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Assim, sabendo que $\rho = p - n$, é possível definir a equação de crescimento do consumo como:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}_t}{c_t} &= \frac{1}{\theta}\left[\alpha Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - n - \delta_k - \rho\right] \\ \frac{\dot{c}_t}{c_t} &= \frac{1}{\theta}\left[\alpha Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta_k - p\right], \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde $Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta_k$ é a produtividade marginal em Y e $g_c = \dot{c}_t/c_t$.

A partir de $\dot{k}$ encontramos um expressão para a PMgY,

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta+n)k \tag{4.26}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k} - \delta - n \tag{4.27}$$

$$\frac{c}{k} + n + g_k = Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta_k. \tag{4.28}$$

Substituindo em g_c,

$$g_c = \frac{1}{\theta}[g_k + c/k + n - p] \tag{4.29}$$

$$\theta g_c + \rho - \frac{c}{k} = g_k \tag{4.30}$$

$$g_c^* = g_k^*, \tag{4.31}$$

considerando $\rho - \frac{c}{k}$ constante.

A taxa de crescimento do capital humano g_h utiliza a Eq. 4.25,

$$\begin{aligned} \theta g_c + \delta_k + p &= \alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} \\ \frac{\theta g_c + \delta_k + p}{\alpha A u^{1-\alpha}} &= k^{\alpha-1}h^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Para d/dt e considera-se que u é constante no tempo,

$$0 = (\alpha-1)k^{\alpha-2}\dot{k}h^{1-\alpha} + (1-\alpha)h^{-\alpha}\dot{h}k^{\alpha-1} \tag{4.32}$$

$$0 = (\alpha-1)\frac{\dot{k}}{k}k^{\alpha-1}\frac{h^{\alpha}}{h} + (1-\alpha)h^{\alpha}\frac{\dot{h}}{h}k^{\alpha-1} \tag{4.33}$$

$$g_h^* = g_k^*. \tag{4.34}$$

Para encontrar a taxa de crescimento de y, utiliza-se a versão per capita função de produção de bens finais (Eq. 4.5), aplicamos logaritmo e derivamos em relação ao tempo, relembrando que u é constante no tempo:

$$\ln(y_t) = \alpha\ln(k_t) + (1-\alpha)\ln(h_t) + (1-\alpha)\ln(u) \tag{4.35}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\alpha\dot{k}_t}{k_t} + \frac{(1-\alpha)\dot{h}_t}{h_t}. \tag{4.36}$$

Utilizando o resultado de $g_h^* = g_k^*$ e $g_c^* = g_k^*$, teremos:

$$g_y^* = g_h^* = g_k^* = g_c^*. \tag{4.37}$$

Retomando os resultados da CPO, em 4.23 temos:

$$\begin{aligned} -\{\lambda_h[B(1-u) - \delta_h - n] + \lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}(uh)^{-\alpha}u\} &= \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h \\ \lambda_h[B(1-u) - \delta_h - n] + \lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}h^{-\alpha}u^{1-\alpha} &= \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Em 4.21, temos

$$\begin{aligned} \lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}h^{-\alpha}u^{-\alpha} &= \lambda_h B \\ \lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}h^{-\alpha} &= \lambda_h B u^{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Substituindo este resultado em 4.38 e dividindo por λ_h,

$$\lambda_h[n + \delta_h - B(1-u) - Bu^\alpha u^{1-\alpha}] = \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h \tag{4.40}$$

$$n + \delta_h - B = \frac{\dot{\lambda}_h}{\lambda_h} - \rho \tag{4.41}$$

$$g_{\lambda h} = \delta_h - B + p. \tag{4.42}$$

Para $g_{\lambda h} = g_{\lambda k}$, teremos:

$$g_y^* = g_h^* = g_k^* = g_c^* = \frac{1}{\theta}(B - \delta - n). \tag{4.43}$$

Assim, nota-se que o crescimento da economia depende de B. A PMgH é pró-growth. Além disso, a acumulação intencional de H é o motor da economia. Diferente do modelo AK, em que o crescimento da economia dependia do setor de bens finais, no modelo de Lucas e Uzawa o crescimento depende do setor H de capital humano. A solução é Pareto eficiente, pois a taxa de crescimento de Steady-State é a mesmo de ótimo social. Finalmente, há transição complexa no modelo.

Capítulo 5

Modelos de Inovação Tecnológica Endógena

Bibliografia: Heijar e Ploeg, cap. 14, seção 14.6.3, p. 461.

Nessa capítulo iremos tratar dos modelos que consideram a inovação tecnológica, pesquisa e desenvolvimento (P&D), a principal fonte de crescimento. O motor da economia é atividade intencional em P&D .

5.1 Romer (1987)

Existem três setores produtivos na economia:

- Setor de bens finais,
- Setor de P&D ,
- Setor de bens intermediários

O setor de **bens finais** produz bens homogêneos usando vários tipos de bens intermediários como insumo. A produção está sujeita a retornos constantes de escala nos insumos e perfeita competição. O **setor de P&D** também é perfeitamente competitivo. Neste, o trabalho é utilziado para produzir projetos de uma nova variedade de insumos. Por fim, o **setor de bens intermediários** é composto por várias firmas pequenas. Cada uma destas pequenas firmas produz uma das variedades dos diversos insumos, formando um mercado de concorrência monopolísticas de Chamberlim.

5.1.1 Caracterização dos Setores

Setor de bens finais

A função de produção no setor de bens finais é dada por:

$$Y(t) = N^{\eta}(t)\left[N^{-1}(t)\int_0^{N(t)} X_j(t)^{1/\mu}dj\right]^{\mu}, \quad \mu > 1, \eta \geq 1, \tag{5.1}$$

tal que N(t) é o número de diferentes variedades em t (número de firmas em t), $X_j(t)$ é a variedade de j (número de firmas no setor intermediário), e μ e η são parâmetros. Observe que, mantendo tudo mais constante, dobrar o número de insumos dobra a produção, respeitando RCE.

Proposição 5.1 (Ethier, 1982) : Se $\eta > 1$ há retornos de especialização. Suponha $X_j = \bar{X}(t), \forall j \in (0, N(t))$. Então, a produção total no setor de bens finais será $Y(t) = N^{\eta-1}(t)(L_X(t)/k_X)$, onde $L_X(t) = k_X N(t)\bar{X}(t)$ representa a quantidade total de trabalho utilizada no setor de bens intermediários (X). Com $\bar{X}(t) = \frac{L_X(t)}{K_X N(t)}$, teremos $Y(t) = N(t)^{\eta-1}\left(\frac{L_X(t)}{K_x}\right)$. Assim, se $\eta > 1$, o aumento em N leva a um aumento em Y.

O **produtor representativo** no setor de bens finais minimiza seus custos e determina o preço do bem final igual ao custo marginal da produção[1]:

$$P_Y(t) \equiv N(t)^{-\eta}\left[N(t)^{\frac{\mu}{(1-\mu)}}\int_0^{N(t)} P_j(t)^{\frac{1}{(1-\mu)}}dj\right]^{(1-\mu)}, \tag{5.2}$$

tal que $P_j(t)$ é o preço da variedade j de insumo. Minimizando os custos, encontra-se a demanda pelo insumo j:

$$\frac{X_j(t)}{Y(t)} = N(t)^{(\eta-\mu)/(\mu-1)}\left(\frac{P_j(t)}{P_Y(t)}\right)^{\mu/(1-\mu)}, \quad j \in [0, N(t)], \tag{5.3}$$

tal que $\frac{\mu}{1-\mu}$ equivale a elasticidade-preço da demanda por j (constante).

Setor de bens intermediários

No setor de bens intermediários, existem várias firmas de competição monopolística que produzem bens ligeiramente diferenciados $X_j(t)$. O lucro da firma j é dado por:

$$\Pi_j(t) = P_j(t)X_j(t) - W(t)L_j(t), \tag{5.4}$$

[1] Que é igual ao custo médio

para W(t) sendo o salário comum a todas as firmas (mobilidade perfeita de mão de obra/trabalho) e $L_j(t)$ a quantidade de trabalho usado pela firma j. Percebe-se que o lucro nada mais é que receita total $(P_j(t)X_j(t))$ menos os custos totais $(W(t)L_j(t))$.

As firmas escolhem seu nível de produção $X_j(t)$ dada a demanda pelo seu produto e sua função de produção (função de produção da firma de bens intermediários):

$$X_j(t) = \left(\frac{1}{k_X}\right) L_j(t), \tag{5.5}$$

para k_X sendo a produtividade no setor X. A escolha ótima da firma representativa de bens intermediários é determinar o preço conforme um markup fixo em relação ao custo marginal da produção:

$$P_j(t) = \mu W(t) k_X, \tag{5.6}$$

tal que μ representa o markup (constante).

Todas as firmas escolhem a mesma quantidade ótima e o mesmo preço, uma vez que compartilham dos mesmos função de produção, preços dos insumos e markup. Então, podemos simplificar a notação retirando o subscrito j:

$$\begin{aligned} X_j(t) &= \bar{X}(t), \\ P_j(t) &= \bar{P}(t), \\ \Pi_j(t) &= \bar{\Pi}(t) \end{aligned}$$

para $j \in [0, N(t)]$, e as variáveis com barra representando a escolha da firma representativa no setor intermediário. Reescrevendo a função de lucro para uma firma representativa do setor intermediário, substituindo 5.6 em 5.4, teremos:

$$\bar{\Pi}(t) = [\bar{P}(t) - W(t)k_X]\bar{X}(t) = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) \bar{P}(t)\bar{X}(t). \tag{5.7}$$

Setor de P&D

No setor de pesquisa e desenvolvimento, as firmas usam trabalho (pesquisadores) para produzir novos projetos ou modelos. Para N(t) representando o estoque de projetos ou modelos, a sua taxa de mudança representa novos modelos $(\dot{N}(t))$. Assim, podemos dizer que a inovação tecnológica segue:

$$\dot{N}(t) = \left(\frac{1}{k_R}\right) N(t) L_R(t), \tag{5.8}$$

tal que $L_R(t)$ é a quantidade de trabalho empregada no setor de P&D e $1/k_R$ é o parâmetro de produtividade. Intuitivamente, vemos que o estoque de conhecimento existente influencia positivamente a produtividade dos pesquisadores. Ainda, como o setor de P&D é competitivo, o preço de novos projetos, $P_N(t)$, é igual ao custo marginal da produção:

$$P_N(t) = \frac{k_R W(t)}{N(t)} \tag{5.9}$$

5.1.2 Resolvendo o problema da economia descentralizada

Antes de resolver o problema da economia, temos que definir o comportamento ótimo do agente representativo (que vive infinitamente). Ele terá a mesma função utilidade do agente em Uzawa-Lucas, e restrição orçamentária:

$$P_Y(t)C(t) + P_N(t)\dot{N}(t) = W(t)L + N(t)\bar{\Pi}(t),$$

para L sendo a oferta de trabalho das famílias, estabelecida de forma exógena. A RO das famílias diz que o consumo mais investimentos realizados serão iguais a renda com trabalho e lucros obtidos com investimentos em tecnologia. Considerando o preço do produto final $P_Y(t) = 1$, obtemos a RO em termos reais:

$$C(t) + P_N(t)\dot{N}(t) = W(t)L + N(t)\bar{\Pi}(t). \tag{5.10}$$

Podemos então montar o problema de controle ótimo como:

$$\begin{aligned} \max_{C_t} \quad & U_0 = \int_0^\infty \left[\frac{C(t)^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - 1/\sigma} \right] e^{-\rho t} dt, \\ \text{s.a.} \quad & \dot{N}(t) = \frac{W(t)L + N(t)\bar{\Pi}(t) - C(t)}{P_N(t)}. \end{aligned}$$

Assim, o Hamiltoniano a valores correntes será:

$$\mathcal{H}(t) = \left[\frac{C(t)^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - 1/\sigma} \right] + \mu_N(t) \left[\frac{W(t)L + N(t)\bar{\Pi}(t) - C(t)}{P_N(t)} \right]. \tag{5.11}$$

tal que $\mu_N(t)$ é a variável de co-estado para N(t).

Para as condições de primeira ordem necessárias $\mathcal{H}_C = 0$ e $-\mathcal{H}_N = \dot{\mu_N} - \rho\mu_N$, teremos[2]:

$$C^{-1/\sigma} = \frac{\mu_N}{P_N}, \tag{5.12}$$

$$\frac{\dot{\mu_N}}{\mu_N} = \rho - \frac{\bar{\Pi}}{P_N}. \tag{5.13}$$

Isolando μ_N em 5.12, teremos que $\mu_N = C^{-1/\sigma}P_N$, logo, $\dot{\mu_N} = C^{1/\sigma}\left(-\frac{\dot{C}P_N}{\sigma C} + \dot{P}_N\right)$. Para obter a equação de Euler do consumo, substituímos μ_N e $\dot{\mu_N}$ em 5.13:

$$\begin{aligned}
\frac{C^{1/\sigma}\left(-\frac{\dot{C}P_N}{\sigma C} + \dot{P}_N\right)}{C^{1/\sigma}P_N} &= \rho - \frac{\bar{\Pi}}{P_N} \\
-\frac{\dot{C}}{\sigma C} &= \rho - \underbrace{\left(\frac{\bar{\Pi} + \dot{P}_N}{P_N}\right)}_{r(t)} \\
\frac{\dot{C}}{C} &= \sigma\left[r(t) - \rho\right]. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Assim, 5.14 é a equação de Euler, considerando $r(t)$ a taxa de retorno dos projetos/modelos.

Além disso, o modelo apresenta duas condições de equilíbrio. O mercado de bens finais estará em equilíbrio quando o consumo for igual a produção de bens finais:

$$Y(t) = C(t). \tag{5.15}$$

E o mercado de trabalho estará em equilíbrio quando a oferta toda de trabalho for igual a soma da demanda do setor intermediário e de P&D : $L = L_X(t) + L_R(t)$. Como demonstrado na Proposição 5.1, sabemos que $L_X(t) = k_X N(t)\bar{X}(t)$, e $L_R(t) = k_R\dot{N}(t)/N(t)$, conforme Eq. 5.8. Assim, a segunda condição de equilíbrio é:

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{L - k_X N(t)\bar{X}(t)}{k_R}, \tag{5.16}$$

da onde assumimos que o setor diferenciado não será muito grande e não irá absorver toda a mão de obra disponível.

5.1.3 Crescimento na Economia

Queremos agora determinar a taxa de crescimento da economia. Para isso, o primeiro passo é destacar três resultados intermediários importantes, a taxa real de

[2]Para simplificar a notação, omitimos o (t).

dividendos, a taxa de ganhos reais do capital com projetos/modelos e o equilíbrio no mercado de bens finais.

1. A taxa real de dividendos sobre os projetos depende do markup μ do monopólio e da quantidade total de trabalho absorvida pelo mercado de bens finais:

$$\frac{\bar{\Pi}(t)}{P_N(t)} = (\mu - 1)\frac{L_X(t)}{k_R}, \tag{5.17}$$

lembrando que $L_X(t) = k_X N(t)\bar{X}(t)$, conforme Proposição 5.1.

2. A taxa de ganhos reais do capital com projetos será proporcional a taxa de crescimento das variedades (taxa de inovação):

$$\frac{\dot{P}_N(t)}{P_N(t)} = (\eta - 2)\left[\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}\right] \tag{5.18}$$

3. Equilíbrio no mercado de bens finais[3]:

$$C(t) = N(t)^{\eta-1}N(t)\bar{X}(t). \tag{5.19}$$

O segundo passo é encontrar uma forma funcional para a taxa de crescimento. Primeiro, definindo a notação de crescimento[4] de C como $g_C \equiv \dot{C}/C$, substituímos 5.17 e 5.19 na equação de Euler (5.14). É importante lembrar que na Eq. de Euler $r(t) = \left(\frac{\bar{\Pi}+\dot{P}_N}{P_N}\right)$ e, na Eq. 5.17, $L_X = k_X L\bar{X}$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{C}}{C} &= \sigma\left[(\mu-1)\frac{k_X N\bar{X}}{k_R} + (\eta+2)\frac{\dot{N}}{N} - \rho\right] \\ g_C &= \sigma\left[\frac{(\mu-1)L_X}{k_R} + g_N(\eta-2) - \rho\right]. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Em seguida, derivando a Eq. 5.19 em relação ao tempo, teremos:

$$g_C = (\eta - 1)g_N(t) + \dot{L}_X(t). \tag{5.21}$$

E, considerando a Eq. 5.16, substituindo $L_X = k_X L\bar{X}$, teremos:

$$g_N = \frac{L - L_X}{k_R}. \tag{5.22}$$

[3]obtido a partir de C(t) = Y(t) e da simetria no equilíbrio.
[4]No livro, a notação é γ_C, ao invés de g_C.

Chegamos então ao terceiro passo, onde eliminamos g_C e g_N para encontrar $\dot{L}_x$, que irá nos dizer como é a dinâmica da economia para o steady-state. Para isso, substituímos as equações 5.22 e 5.21 em 5.20:

$$\begin{aligned} g_C &= \sigma\left[\frac{(\mu-1)L_X}{k_R} + g_N(\eta-2) - \rho\right] \\ (\eta-1)\frac{L-L_X}{k_R} + \dot{L}_X(t) &= \sigma\left[\frac{(\mu-1)L_X}{k_R} + \frac{L-L_X}{k_R}(\eta-2) - \rho\right] \\ & \quad \sigma L_X\left(\frac{\mu-1}{k_R}\right) + \\ \dot{L}_X &= \quad \sigma(\eta-2)\left(\frac{L-L_X}{k_R}\right) - \\ & \quad (\eta-1)\left(\frac{L-L_X}{k_R}\right) - \sigma\rho \end{aligned}$$

Reorganizando e colocando L_X e L em evidência, teremos:

$$\dot{L}_X = \underbrace{\left[\frac{\sigma\mu + (1-\sigma)(\eta-1)}{k_R}\right]}_{>0} L_X - \left[\frac{\eta - 1 + \sigma(2-\eta)}{k_R}\right] L - \sigma\rho \tag{5.23}$$

Como o coeficiente de L_X no lado direito da equação é positivo, ela será instável. Lembre que $\mu > 1$, $\eta \geq 1$, e, para uma elasticidade de substituição intertemporal relativamente pequena ($0 < \sigma < 1$), percebe-se que esse coeficiente será positivo[5].

Como o coeficiente de L_X é positivo, a EDO é instável. A única solução econômica razoável é ter um salto para o SS, sem transição, tal que a economia sempre está em equilíbrio. Quando $\dot{L}_X = 0$, o valor de steady-state de L_X será:

$$L_X^{SS} = \frac{[\eta - 1 + \sigma(2-\eta)]L + \sigma\rho k_R}{\sigma\mu + (1-\sigma)(\eta-1)}. \tag{5.24}$$

Como não há dinâmica de transição em L_X e, portanto, $\dot{L}_X = 0\forall t$, o mesmo vale para a taxa de crescimento do consumo e do número de variedade. Substituindo 5.24 em 5.22 e 5.20, teremos a taxa de consumo e inovação em função dos parâmetros:

$$g_N^* = \frac{\sigma(\mu-1)(L/K_R) - \sigma\rho}{\sigma\mu + (1-\sigma)(\eta-1)} > 0 \tag{5.25}$$

$$g_C^* = (\eta-1)g_N = g_Y. \tag{5.26}$$

Com um aumento de μ as firmas tem mais incentivo para inovar. A taxa de inovação aumenta com o markup do monopólio ($\partial g_N/\partial\mu > 0$) e o tamanho da força

[5]Se $\sigma > 1$, a expressão será positiva para o caso em que a condição suficiente de $\eta < 2$.

de trabalho ($\partial g_N/\partial L > 0$). Tudo que aumenta a renda do monopólio é pró-growth. Enquanto um aumento na taxa de inovação diminui a taxa de preferência pelo tempo ($\partial g_N/\partial \rho < 0$).

O efeito do equilíbrio parcial na elasticidade intertemporal de substituição é:

$$\frac{\partial g_N}{\partial \sigma} = \frac{(\eta - 1)g_N}{\sigma[\sigma\mu + (1-\sigma)(\eta - 1)]}. \tag{5.27}$$

Assim, $\frac{\partial g_N}{\partial \sigma} > 0$ se $\eta > 1$, ou seja, dado que os retornos de especialização são operativos, um aumento na propensão das famílias de substituir consumo através do tempo, aumenta a taxa de inovação. A taxa de crescimento no **consumo** e no **produto** também dependem do retorno de especialização.

5.1.4 Economia com Planejador Central

Para testar a eficiência do modelo, vamos observar o ótimo social para um problema com planejador central e comparar com os resultados do modelo descentralizado[6]. O problema do planejador central irá endogeneizar as perdas com o monopólio. Considerando 5.16, 5.19 e $L_X = k_X N\bar{X}$, o problema do planejador central será:

$$\begin{aligned} \max \quad & U_0 = \int_0^\infty \left[\frac{(N(t)^{\eta-1}N(t)\bar{X}(t))^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - 1/\sigma}\right] e^{-\rho t} dt, \\ \text{s.a.} \quad & \dot{N}(t) = \left[\frac{L - L_X(t)}{k_R}\right] N(t). \end{aligned}$$

Assim, após montar o Hamiltoniano a valor presente, calcular as condições de primeira ordem, combinando as CPO e mais algumas etapas, teremos:

$$\frac{\dot{L}_X(t)}{L_X(t)} = \left[\frac{\eta - 1}{k_R}\right] L_X(t) - \left[\frac{(\eta-1)(1-\sigma)}{k_R}\right] L - \sigma\rho. \tag{5.28}$$

Considerando $\eta > 1$, ocorrendo retornos de especialização, o lado direito da EDO será positivo e esta será instável. Assim, o ótimo social (OS) é pular para o equilíbrio ($\dot{L}_X = 0$):

$$L_x^{OS}(t) = (1-\sigma)L + \frac{\sigma\rho k_R}{\eta - 1} > 0. \tag{5.29}$$

[6]Quando estamos no modelo descentralizado, usamos SS, no caso da economia com planejador central, usamos ótimo social (OS).

Com isso, a taxa de inovação socialmente ótima será:

$$g_N^{OS} = \sigma(L/k_R) - \frac{\sigma\rho}{\eta - 1} \tag{5.30}$$

$$g_C^{OS} = (\eta - 1)g_N^{OS} = g_Y^{OS}. \tag{5.31}$$

Percebe-se, desse resultado, que a taxa de inovação no ótimo social não depende do markup (μ), apenas do retorno de especialização (η). Ou seja, o fator de especialização determina o crescimento.

Essa é a primeira vez que veremos o caso do resultado com planejador central não ser melhor ou pior sempre, em comparação com o caso descentralizado. Existem três possibilidades em relação a eficiência, onde os dois primeiros será considerados ineficientes:

- $g_N^{SS} < g_N^{OS}$: mercado sub-investe em P&D ;
- $g_N^{SS} > g_N^{OS}$: Excesso de P&D no mercado. Pode ser causado por "destruição criativa", mas Romer não explora essa questão.
- $g_N^{SS} = g_N^{OS}$: "fio da navalha", resultado eficiente, porém muito instável.

Se $\eta = \mu$, g_N^{SS} sub-investe em P&D (taxa maior, mas mais baixa) e também será ineficiente.

5.2 Romer (1990)

Bibliografia: Chiang II, cap. 9.

Modelo em que o motor do crescimento é a busca intencional por mudanças tecnológicas. **Suposição inédita**: a tecnologia não é nem bem público nem privado/convencional; a tecnologia tem propriedades dos dois, é **não-rival** e **parcialmente excludente**. Não convexidade $\implies$ concorrência imperfeita. A tecnologia pode ser usada indefinidamente sem novos custos. Como consequência dessa suposição, quanto maior o mercado, maior o crescimento (mais pesquisa, mais crescimento). Assim, a abertura do mercado seria *pró-growth*.

Um exemplo seria o design, que pode ser copiado e usado em outras atividades, não dependendo de outro objeto físico. Mesmo que tivesse algum custo de replicar, ele seria muito menor do que o custo de criar. O conhecimento também tem essas propriedades. Por outro lado, um contra-exemplo seria "a capacidade de somar", que está amarrada ao corpo humano, algo específico do indivíduo que não é onipresente. Acaba sendo excludente e rival, com elevado custo para replicar. Bens não-rivais podem ser acumulado sem limites em termos per capita (capital humano não tem essa propriedade). Exclusividade parcial gera spill-overs, os indivíduos tem ganhos com o avanço tecnológico.

Aplicando esse entendimento à função de produção:

$$Y = F(A, X),$$

teríamos que A é não rival e X é rival. Assim, a função nõa seria côncava e não obedeceria o teorema de Euler. Logo:

$$\begin{aligned} F(A, \lambda X) &= \lambda F(A, X) \\ F(\lambda A, \lambda X) &> \lambda F(A, X). \end{aligned}$$

5.2.1 Modelo

O conhecimento tem dois componentes: H (capital humano, rival) e A (tecnologia, não-rival). Chiang usa S ao invés de H, para evitar confundir com o Hamiltoniano, então S_0 é a quantidade fixa de capital humano especializado na economia. Como S pode ser utilizado na produção de bens finais (Y) e no setor de tecnologia (A), teremos:

$$S_0 = S_A + S_Y. \tag{5.32}$$

A tecnologia A, por outro lado, não é fixa, podendo ser criada pela equação de movimento:

$$\dot{A} = \sigma S_A A \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{A}}{A} = \sigma S_A \tag{5.33}$$

tal que σ é o parâmetros de sucesso na pesquisa. Se $\sigma > 0$ e $S_A > 0$, $\frac{\dot{A}}{A} > 0$ indefinidamente. Ou seja, a tecnologia pode crescer indefinidamente (g_A). Note ainda que a atividade de tecnologia é intensiva em capital humano e em tecnologia.

No setor de bens finais (Y) será diferente do setor de tecnologia, que não usava mão de obra não qualifica e capital. A função de produção para bens finais será uma Cobb-Douglas:

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} (x_1^{1-\alpha-\beta} + x_2^{1-\alpha-\beta} + \cdots), \tag{5.34}$$

tal que L_0 representa a mão de obra não qualificada (fixa e inelástica). Para simplificar, todos os designs x_i são considerados de forma aditiva e separável, assim, todos os designs indexados por i podem ser transformados em uma variável contínua. A função de produção torna-se:

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} \int_0^A x^{1-\alpha-\beta}(i)di, \tag{5.35}$$

tal que todos x_i entram simetricamente na função de produção, logo, tem o mesmo peso ($\bar{x}$). Poderíamos dizer que $\bar{x}$ é como uma cesta de insumos, avanços de desing, todos com o mesmo peso. Considerando:

$$\int_0^A x^{1-\alpha-\beta}(i)di = \underbrace{\int_0^A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}di}_{A\bar{x}^{1-\alpha-\beta}},$$

teremos a função de produção:

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} A \bar{x}^{1-\alpha-\beta}. \tag{5.36}$$

Considerando bens de capital $K = \gamma A \bar{x}$, tal que γ é a quantidade de bens de capital necessária para produzir um tipo de desgin, teremos $\bar{x} = \frac{K}{\gamma A}$. Substituindo na função de produção:

$$\begin{aligned} Y &= S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} A \left(\frac{K}{\gamma A} \right)^{1-\alpha-\beta} \\ &= S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} A^{\alpha+\beta} K^{1-\alpha-\beta} \gamma^{\alpha+\beta-1} \\ & \quad \text{Introduzindo neutralidade de Harrod...} \\ &= (S_Y A)^{\alpha} (L_0 A)^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} \gamma^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Na última função vemos que temos quatro insumos:S_Y, L_0, A, K. Além disso, percebe-se que a tecnologia pode ser vista como capital aumentada ($S_Y A$) ou trabalho aumentada ($L_0 A$).

Considerando $Y = C + \dot{K}$, e relembrando que $S_Y = S_0 - S_A$, a equação de movimento do capital será:

$$\dot{K} = \underbrace{\gamma^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} (S_0 - S_A)^{\alpha} L_0^{\beta} K^{1-\alpha-\beta}}_{\equiv \Delta} - C. \tag{5.37}$$

Definimos Δ por conveniência.

5.2.2 Controle Ótimo

O agente representativo terá duas variáveis de estado (A e K) e duas variáveis de controle (C e S_A), sendo descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\max_{C,S_A} \quad & U_0 = \int_0^\infty \left[\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}\right] e^{-\rho t} dt, \\
\text{s.a.} \quad & \dot{A}(t) = \sigma S_A A \\
& \dot{K}(t) = \Delta - C
\end{aligned}$$

O Hamiltoniano a valor presente:

$$\mathcal{H} = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda_A(\sigma S_A A) + \lambda_K(\Delta - C). \tag{5.38}$$

E teremos quatro condições de primeira ordem mais as duas condições de transversalidade:

1. $\mathcal{H}_C = 0$:
$$C^{-\theta} = \lambda_K \tag{5.39}$$

2. $\mathcal{H}_{S_A} = 0$:
$$\begin{aligned}
\lambda_A \sigma A - \lambda_K \alpha (S_0 - S_A)^{-1}\Delta = 0 \\
\Delta = \frac{\lambda_A \sigma A}{\lambda_K \alpha}(S_0 - S_A)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

3. $-\mathcal{H}_A = \dot{\lambda}_A - \rho\lambda_A$:
$$-\lambda_A \sigma S_A - \lambda_K(\alpha+\beta)A^{-1}\Delta + \rho\lambda_A = \dot{\lambda}_A \tag{5.41}$$

4. $-\mathcal{H}_K = \dot{\lambda}_K - \rho\lambda_K$:
$$\dot{\lambda}_K = -\lambda_K(1-\alpha-\beta)K^{-1}\Delta + \rho\lambda_K \tag{5.42}$$

Steady State

No SS, todas as variáveis (Y, C, K, A) crescem a taxas iguais. A partir da equação 5.33 sabemos que $\frac{\dot{A}}{A} = \sigma S_A$, portanto:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A} = \sigma S_A. \tag{5.43}$$

Considerando $\lambda_K = C^{-\theta}$ (Eq. 5.39), derivando em relação a t, teremos $\dot{\lambda}_K = -\theta C^{-\theta-1}\dot{C}$. Assim,

$$\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K} = -\theta\frac{\dot{C}}{C} = -\theta\sigma S_A. \tag{5.44}$$

Substituindo $\frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K}$ em 5.42 teríamos:

$$\begin{aligned} -\theta\sigma S_A &= -(1-\alpha-\beta)K^{-1}\Delta + \rho \\ S_A &= \frac{(1-\alpha-\beta)K^{-1}\Delta - \rho}{\sigma\theta}. \end{aligned}$$

Todavia, essa equação não é conveniente, e Romer prefere calcular $\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A}$. Considerando Δ em 5.40 e substituindo em 5.41, teremos:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_A &= \lambda_A[-\sigma S_A - (\alpha+\beta)(S_0 - S_A)\sigma\alpha^{-1} - \rho] \\ \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} &= \rho - \sigma\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}S_0 - \frac{\beta}{\alpha}S_A\right). \end{aligned} \tag{5.45}$$

Utilizando o fato de no SS $\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K}$, podemos isolar S_A:

$$S_A = \frac{\sigma(\alpha+\beta)S_0 - \alpha\rho}{\sigma(\alpha\theta+\beta)}. \tag{5.46}$$

A partir de 5.46 vemos que S_A depende apenas de constantes no SS. Além disso, vemos que a taxa de crescimento no SS pode ser representada parametricamente como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\sigma(\alpha+\beta)S_0 - \alpha\rho}{(\alpha\theta+\beta)}.$$

Resultados

Dessa forma, os fatores pró-crescimento no modelo são:

- $\uparrow S_0 = \uparrow g_{SS}$

- $\uparrow \sigma = \uparrow g_{SS}$

- $\downarrow \rho = \uparrow g_{SS}$, pois $\rho\alpha < 0$ no SS.

Parte III

Modelo Schumpeteriano

Capítulo 6

Aghion e Howitt (1992)

Bibliografia: Aghion e Howitt (Endogenous Growth Theory, 1998, cap. 2).

6.1 Introdução

É considerado um modelo Schumpeteriano.

Os autores reconhecem que as teorias de crescimento endógeno deram uma grande contribuição, principalmente pela acumulação de conhecimento via vários canais (como educação formal, pesquisa científica, inovação de produtos, et.). Esses modelos geram crescimento sustentável da renda per capita. Também elogiam Lucas e Romer.

6.1.1 Novidades

O modelo insere algumas novidades em relação ao modelos existentes. No modelo, os produtos podem ficar obsoletos, isso faz com que o crescimento produza ganhos e perdas. Antes deles, crescimento só trazia melhorias. Os autores também incorporam a ideia de destruição criadora de Schumpeter (1942), sendo um dos primeiros modelos ditos schumpeterianos. Há inovação vertical de produtos[1].

Os autores utilizam modelos de organização industrial de Tirole (1988) e Reign (1989), relacionados a ideia de corridas de patentes. Introduzem incerteza, tal que a inovação segue um processo de Poisson. A inovação pode produzir esterilidades positivas e negativas, como roubar negócios, torna obsoleta a pesquisa atual (ideia de briga de patentes de Tirole, 1988). Quanto maior a taxa futura de pesquisa esperada, menor o crescimento será hoje. Ainda, os autores usam equações à diferença.

[1]Lembrando que em Romer, Rebele, entre outros, a inovação era horizontal, ou seja, servia para toda a indústria. Vários outros autores já haviam trabalhado com inovação vertical (Stocey, 1988; Grossman e Helpman, 1991).

6.2 Modelo Básico

É muito importante perceber que, nesse modelo, o subscrito "t" não significa tempo, mas uma sequência de inovações (talvez fosse mais prudente trocar t por i).

O setor de bens produz bens utilizando insumos do setor intermediário, conforma a seguinte função de produção:

$$Y_t = A_t x^{\alpha} \tag{6.1}$$

tal que x é a quantidade de bens intermediários, A é um parâmetro que indica a produtividade do setor intermediário e t é a sequência de inovações. Uma inovação aumenta A á uma taxa constante:

$$A_{t+1} = \gamma A_t, \tag{6.2}$$

para γ sendo um parâmetro de produtividade ou tamanho da inovação. Uma inovação substitui a variedade de inovações antigas e aumenta a produtividade do insumo intermediário no setor de bens finais.

A oferta e demanda no mercado de trabalho. A oferta agregada de trabalho é dada por:

$$L = x + n, \tag{6.3}$$

sendo x a quantidade de trabalho usada na indústria (intermediária) e n a quantidade de pessoas usada na pesquisa.

O papel da inovação no modelo. A inovação gera renda de monopólio, spill-overs positivos e negativos. Os spill-overs positivos (parcialmente excludentes) está relacionado ao poder de monopólio não perfeito, que dura por um tempo, mas depois se expande, com outras firmas usando aquilo que foi inventado. O spill-over negativo, relaciona-se com a ideia de que o monopolista de sucesso consegue a patente agora e torna a geração prévia de pesquisa obsoleta. Isso ocorre por causa da inovação vertical, pois quando era horizontal todos se beneficiavam.

Condição de Arbitragem:

$$w_t = \lambda V_{t+1}, \tag{6.4}$$

tal que w_t é o valor de uma hora de trabalho na indústria e λV_{t+1} o valor esperado de uma hora em pesquisa. λ é a probabilidade de ocorrer uma inovação e V_{t+q} o valor da inovação. Basicamente, essa equação diz que o valor esperado de uma unidade de trabalho aplicado na pesquisa deve ser igual ao seu custo. A arbitragem governa a dinamica da economia através de sucessivas inovações.

Equação de Fisher. O valor de V_{t+1} é determinado nessa equação. Se aplicassem juros na inovação, teria uma expectativa de lucros e perdas (ext. positivas e negativas):

$$rV_{t+1} = \Pi_{t+1} - \lambda n_{t+1} V_{t+1}. \tag{6.5}$$

Na equação, rV_{t+1} representa os juros (r) sobre o valor da inovação, Π_{t+1} o lucro monopolista e $\lambda n_{t+1} v_{t+1}$ a perda esperada de capital decorrente da destruição criativa. Especificamente, podemos dizer que λn_{t+1} equivale a probabilidade de perda de renda de monopólio.

Isolando V_{t+1},

$$V_{t+1} = \frac{\Pi_{t+1}}{r + \lambda n_{t+1} v_{t+1}}, \tag{6.6}$$

onde o aumento no valor da pesquisa em t+1 (na próxima sequência de inovação), aumenta o lucro monopolista, e se aumenta a probabilidade de perda da renda monopolista, o valor da inovação diminui.

6.3 O lucro do setor intermediário

Sendo P o preço do insumo intermediário,

$$P = \alpha A x^{\alpha-1}. \tag{6.7}$$

Essa equação mostra que o setor de bens finais irá utilizar x até que seus preços sejam iguais ao produto marginal (P = PMg = CMg), pois é competitivo.

Como o produtor do setor intermediário de insumos é monopolista, ele escolhe o nível de produto x que maximiza seus lucros:

$$\Pi_t = \arg\max_x [P_t(x)x - w_t x]. \tag{6.8}$$

Substituindo 6.7 em 6.8,

$$\Pi_t = \arg\max_x [\alpha A x^{\alpha} - w_t x]. \tag{6.9}$$

Pela CPO,

$$A_t \alpha^2 x^{\alpha-1} - w_t = 0, \tag{6.10}$$

$$x_t^* = \left(\frac{\alpha^2}{w_t/A_t}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \equiv \left(\frac{w_t}{A_t}\right). \tag{6.11}$$

É importante perceber que $w_t/\alpha = A_t \alpha x^{\alpha-1}$ para chegar no resultado de x_t^*. Considerando $\omega_t = w_t/A_t$ como o salário ajustado pela produtividade, e definindo $\tilde{\Pi}_t(\omega_t)$ como uma função lucro produtividade ajustada, estritamente decrescente para todos valores positivos de ω_t, tal que $\partial\Pi_t/\partial\omega_t < 0$, o fluxo de lucro do monopólio é:

$$\Pi_t = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) w_t x_t = A_t \tilde{\Pi}_t(\omega_t). \tag{6.12}$$

O modelo agora pode ser totalmente caracterizado pela equação de arbitragem (A) e pela equação de equilíbrio no mercado de trabalho (L). Considerando o fluxo de lucro de t+1,

$$\Pi_{t+1} = A_{t+1}\tilde{\Pi}(\omega_{t+1}) \tag{6.13}$$

$$A_{t+1} = \gamma A_t \tag{6.14}$$

$$\Pi_{t+1} = \gamma A_t \tilde{\Pi}(\omega_{t+1}). \tag{6.15}$$

Lembrando a condição de arbitragem 6.4, substituindo o valor de t+1 inovação (V_{t+1}) representado em 6.6, e substituindo Π_{t+1}, teremos:

$$w_t = \lambda \frac{\Pi_{t+1}}{r + \lambda n_{t+1}}$$

$$w_t = \lambda \frac{\gamma A_t \tilde{\Pi}(\omega_{t+1})}{r + \lambda n_{t+1}} \tag{A}$$

tal que (A) reflete o fato de que o trabalhador pode ser alocado livremente entre a indústria e a pesquisa.

Determinando a demanda por trabalho na indústria como $x_t = \tilde{x}(\omega_t)$ e substituindo em 6.3, a equação de equilíbrio no mercado de trabalho será:

$$L = n_t + \tilde{x}(\omega_t), \tag{L}$$

que reflete a natureza de um mercado de trabalho sem fricções.

6.4 Steady-State

O equilíbrio de steady-state é definido pela solução estacionária do sistema de (A) e (L), com $\omega_t \equiv \omega$ e $n_t \equiv n$. Assim, no steady-state, as equações de arbitragem e equilíbrio do mercado de trabalho serão:

$$\omega = \lambda \frac{\gamma \tilde{\Pi}(\omega)}{r + \lambda n} \tag{$\hat{A}$}$$

$$n + \tilde{x}(\omega) = L. \qquad (\hat{L})$$

Assim, representando o sistema acima no plano (ω, n), teremos:

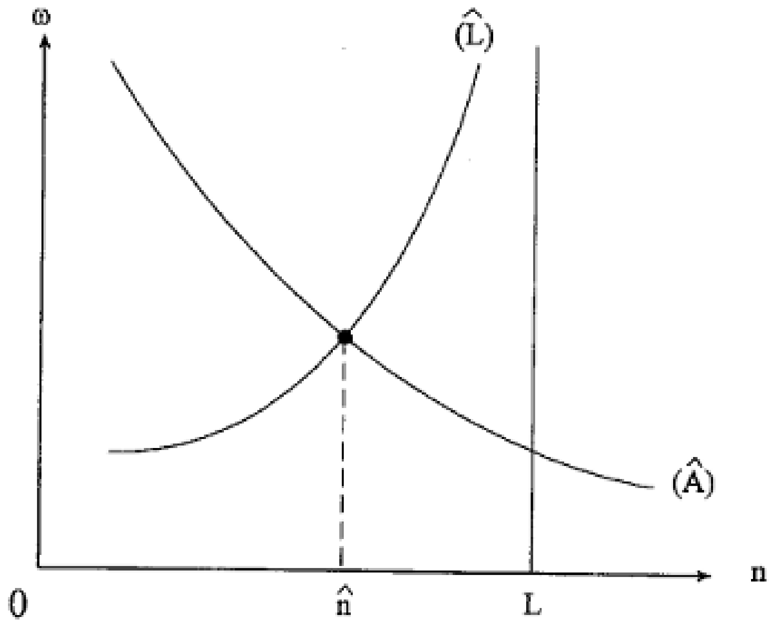


Figura 6.1: Steady-State (AH, cap. 2, p. 59)

O nível de pesquisa de equilíbrio ($\hat{n}$) será definido por:

$$\hat{n} = f(\underbrace{r}_{-}, \underbrace{L}_{+}, \underbrace{\lambda}_{-}, \underbrace{\gamma}_{+}).$$

Intuitivamente, uma queda na taxa de juros (r) o benefício marginal de pesquisar, através do aumento no valor presente do lucro do monopólio. Um aumento no tamanho da inovação (γ) também aumenta o benefício marginal de pesquisar. Um aumento na dotação de trabalhadores especializados (L), diminui os salários, diminuindo o custo marginal da pesquisa e aumentando o benefício marginal em pesquisar. Por último, um aumento na produtividade do P&D (λ) diminui o benefício marginal da pesquisa, pois aumenta a taxa de destruição criativa no próximo intervalo.

Queremos ainda encontrar a condição de equilíbrio na economia descentralizada e, para isso, iremos utilizar ($\hat{A}$) e ($\hat{L}$). Lembando que em 6.12 encontramos $A_t\tilde{\Pi}(\omega_t) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) w_t x_t$, e em (L) definimos $x_t = \tilde{x}(\omega_t)$, no SS teremos a seguinte forma funcional do fluxo de lucro ajustado pela produtividade:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}(\omega) &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{w \cdot x}{A} \\
\tilde{\Pi}(\omega) &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\omega \cdot x \\
\tilde{\Pi}(\omega) &= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\omega(L-n), \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

lembrando que $\omega = w/A$.

Substituindo $\tilde{\Pi}(\omega)$ em $(\hat{A})$:

$$\omega = \lambda \frac{\gamma\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\omega(L-n)}{r+\lambda n}, \tag{6.17}$$

e dividindo os dois lados por ω, teremos a condição de equilíbrio na economia descentralizada:

$$1 = \lambda \frac{\gamma\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(L-\hat{n})}{r+\lambda \hat{n}}. \tag{6.18}$$

Resultado inicial: a competição reduz o incentivo para inovar no setor de pesquisa, por causa da obsolescência, externalidade negativa, mas ainda não temos o resultado líquido.

Para introduzir tempo no modelo, será realizada a estática comparativa na taxa de crescimento no steady-state.

6.5 Estática Comparativa

No SS, o fluxo de bens de consumo (ou bens finais) produzidos durante um intervalo de tempo e entre as inovações t e t+1 é:

$$y_t = A_t \hat{x}^\alpha = A_t(L-\hat{n})^\alpha$$

quem resulta em:

$$y_{t+1} = \gamma y_t, \tag{6.19}$$

lembrando que t refere-se a sequência de inovações.

Aplicando logaritmo,

$$\ln y_{t+1} = \ln \gamma \ln y_t \tag{6.20}$$

$$\underbrace{\ln y_{t+1} - \ln y_t}_{\tau} = \ln \gamma \tag{6.21}$$

onde τ representa o tempo real entre duas gerações. O tempo real do intervalo entre duas inovações sucessivas é aleatório. Portanto, o caminho no tempo do log do último produto $\ln y(\tau)$ será uma função de passo aleatório com distribuição de Poisson e terá o tamanho $\ln\gamma > 0$, como pode ser observado na Figura 6.2

O tempo para a próxima inovação não é conhecido, por isso seguirá essa distribuição, sendo a inovação um processo estocástico. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta \ln y(\tau) &= \ln\gamma > 0 \\ \ln y(\tau+1) &= \ln y(\tau) + (\ln\gamma)\varepsilon(\tau), \end{aligned}$$

para $\varepsilon(\tau)$ representado o número de inovações entre τ e $\tau+1$. Dado que $\varepsilon(\tau)$ tem distribuição de Poisson com parâmetros $\lambda\hat{n}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln y(\tau+1) - \ln y(\tau)] = \lambda\hat{n}(\ln\gamma) \\ g = \lambda\hat{n}(\ln\gamma), \end{aligned} \tag{6.22}$$

tal que g é a taxa de crescimento de SS.

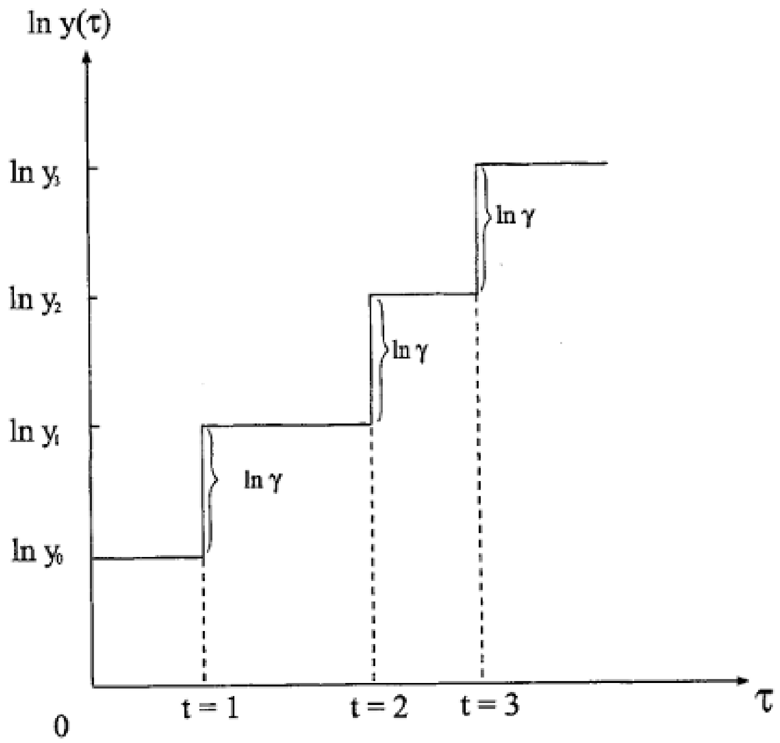


Figura 6.2: Crescimento no SS (AH, cap. 2, p. 60)

Como pode ser visto na Figura 6.2, o tamanho do salto é sempre o mesmo, o que muda é o tempo entre uma inovação e outra, pois não sabemos quando ocorrerá a próxima. Combinando a análise do nível de pesquisa ($\hat{n}$) no SS, teremos os efeitos dos parâmetros. Um aumento no tamanho do mercado de trabalho (L) ou uma redução na taxa de juros (r) e no nível de competição no mercado (α) irão aumentar $\hat{n}$ e também g. Por sua vez, um auemnto no tamanho da inovação (γ) e/ou na produtividade (λ) também irá promover o crescimento, tanto diretamente quanto indiretamente (via $\hat{n}$). Resumindo:

$$g = f(\underbrace{r}_{-}, \underbrace{L}_{+}, \underbrace{\lambda}_{+}, \underbrace{\gamma}_{+}, , \underbrace{\alpha}_{-}).$$

6.6 Análise do Bem-estar: economia descentralizada x comando ótimo

Nessa seção, o mais importante é lembrar dos resultados, sem se preocupar em decorar ou calcular as passagens. Assim, queremos comparar a taxa de crescimento média encontrada na seção anterior com a taxa de crescimento média escolhida por um planejador central com o objetivo de maximizar o valor presente esperado do consumo $y(\tau)$.

A riqueza esperada que o planejador central irá maximizar é:

$$\max U = \int_0^\infty \left[\sum_{t=0}^{\infty} \Pi(t,\tau) A_t x^\alpha\right] e^{-r\tau} d\tau, \tag{6.23}$$

sujeito a restrição de força de trabalho, $L = x + n$. Em 6.23, $\Pi(t,\tau)$ é igual a probabilidade de haver t inovações no tempo τ. Dado que o processo de inovação é Poisson com parâmetro λn, temos:

$$\Pi(t,\tau) = \frac{(\lambda n \tau)^t \cdot e^{-\lambda n \tau}}{t!}.$$

Considerando ainda que $A_t = A_0 \gamma^t$, podemos expressar a riqueza esperada U, Eq. 6.23, como:

$$U(n) = \frac{A_0 (L-n)^\alpha}{r - \lambda n(\gamma - 1)}. \tag{6.24}$$

O nível de pesquisa no ótimo social (n^*) irá satisfazer a condição de primeira ordem $U'(n^*) = 0$, que será equivalente a,

$$1 = \frac{\lambda(\gamma-1)\left(\frac{1}{\alpha}\right)(L - n^*)}{r - \lambda n^*(\gamma - 1)}. \tag{6.25}$$

Esse nível de pesquisa irá produzir uma taxa de crescimento médio igual a $g^* = \lambda n^* \ln(\gamma)$. Assim, o nível de crescimento no ótimo social pode ser maior ou menor que o crescimento de uma economia descentralizada conforme $n^* >$ ou $< \hat{n}$. Para isso, vamos comprar os resultados.

Lembrando a solução de livre mercado (Eq. 6.18) e a solução de comando centra (Eq. 6.25):

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \frac{\gamma \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (L - \hat{n})}{r + \lambda \hat{n}} \\ 1 &= \frac{\lambda(\gamma - 1) \left(\frac{1}{\alpha}\right) (L - n^*)}{r - \lambda n^*(\gamma - 1)}. \end{aligned}$$

Existem três diferenças entre essas duas equações:

(a) Taxa de desconto privado, $r + \lambda \hat{n} > r$, e a taxa de desconto social, $r - \lambda n^*(\gamma - 1) < r$. A taxa de desconto social é menor que a taxa de juros, enquanto a taxa de desconto privado é maior. Com isso, o planejador central leva em conta que os benefícios da próxima inovação irão continuar para sempre, enquanto a pesquisa privada não dá peso a próxima inovação. Assim, a pesquisa privada é insuficiente, devido ao fator de desconto provado ser menor que a taxa de desconto. Esse resultado tende a gerar pesquisas insuficientes em um livre mercado.

(b) O fator $(1 - \alpha)$ aparece na solução de livre mercado, mas não no comando central. Esse fator refere-se ao percentual do produto apropriado pelo monopolista, e também gera menos pesquisa, ou pesquisa privada insuficiente, em livre mercado.

(c) O fator $(\gamma - 1)$ demonstra que o comando central considera o roubo de negócios ao fazer a otimização. A pesquisa privada não internaliza a perda do monopolista anterior com uma inovação, diferente do planejador central. Esse efeitos gera excesso de pesquisa privada.

Conclusão. Se os efeitos (a) e (b) domina, então $g_{ss}^{ED} < g_{ss}^{OS}$. Se (c), $g_{ss}^{ED} > g_{ss}^{OS}$. Ou seja, a taxa de crescimento do ótimo social pode ser maior ou menor que a taxa de crescimento da economia descentralizada. Nos casos (a) e (b), a melhor solução seria dar incentivos a pesquisa, enquanto no caso (c), quando há muitos roubos de negócios, melhor seria colocar impostos.

Dica para a prova: foco na estrutura do modele, ênfase na economia descentralizada e depois partir para a comparação.

.

Parte IV

Modelo de Gerações Sobrepostas

Capítulo 7

Gerações Sobrepostas

Bibliografia: BF.

Duas gerações: novos e velhos.

Primeiros: Diamond (1965), Allais (1947), Samuelson(1958).

Permite estudar as implicações do ciclo de vida de poupança dos indivíduos. O equilíbrio competitivo não é necessariamente o mesmo que seria escolhido pelo planejador central. Mais do que isso, o equilíbrio competitivo pode não ser ótimo de Pareto.

Aplicações (exemplos): transferências inter-geracionais, seguridade social, herança e altruísmo, tributos de heranças, educação (resultado só no futuro), fertilidade e expectativa de vida (bônus demográfico), meio ambiente, finanças públicas, mobilidade social, etc.

No modelo de gerações sobrepostas, os indivíduos vivem por dois períodos, de tal forma que a economia é composta por duas gerações, jovens e velhos. Indivíduos que nascem no tempo t, consomem c_{1t} no período t e c_{2t+1} no período t+1, tal que em t o indivíduo é jovem e em t+1, velho. Jovens e velhos vivem ao mesmo tempo.

7.1 Equilíbrio Descentralizado

7.1.1 Indivíduos

A economia de mercado é composta por indivíduos e firmas. Os indivíduos tem uma função de utilidade aditiva:

$$u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}),$$

tal que $\theta \geq 0$, e $u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$.

Supondo que indivíduos trabalham apenas quando jovens, a oferta de trabalho é inelástica, recebendo por uma unidade de trabalho um salário real w_t. Eles consomem parte da renda no primeiro período, e o resto poupam para consumir no segundo período, como consumo de aposentadoria. Além disso, a taxa de crescimento da população no período t, N_t, será: $N_t = N_0(1+n)^t$.

Dessa forma, o problema do indivíduo é:

$$\max \quad u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}), \tag{7.1}$$

$$s.a. \quad c_{1t} + s_t = w_t \tag{7.2}$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t, \tag{7.3}$$

tal que r_{t+1} é a taxa de juros paga pela poupança mantida por t períodos até t+1.

Substituindo c_{1t} e c_{2t+1} na função objetivo (FO), teremos

$$\max u(w_t - s_t) + (1+\theta)^{-1}u[(1+r_{t+1})s_t],$$

de tal forma que a condição de primeira ordem (CPO) será:

$$u'(w_t - s_t) = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s_t] \tag{7.4}$$

Proposição 7.1 (Resolvendo pelo Método de Lagrange) : Observe que resolvemos o problema pelo Teorema do Envelope, mas também poderia ser feito pelo Lagrangeano. Substituindo a segunda restrição na primeira e montando o Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1}) + \lambda_t \left[w_t - c_t - \frac{c_{2t+1}}{(1+r_{t+1})} \right] \tag{7.5}$$

As condições de primeira ordem (CPO) serão:

$$u'(c_{1t}) = \lambda_t \tag{7.6}$$

$$(1+\theta)^{-1}u'(c_{2t+1}) = \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}}. \tag{7.7}$$

Substituindo 7.6 em 7.7, teremos que a taxa marginal de substituição de c_{1t} por c_{2t+1} é igual ao preço relativo,

$$\frac{u'(c_{1t})}{u'(c_{2t+1})} = \frac{(1+r_{t+1})}{1+\theta}. \tag{7.8}$$

A partir desse resultado, podemos encontrar a elasticidade de substituição intertemporal $\sigma(\cdot)$ como:

$$\sigma[(1+r_{t+1})s_t] = \frac{u'[(1+r_{t+1})s_t]}{-(1+r_{t+1})s_t \cdot u''[(1+r_{t+1})s_t]}, \tag{7.9}$$

que mede a disposição do consumidor mudar o consumo no tempo t em resposta a uma mudança na taxa de retorno em t+1.

Voltando a 7.4, pelo teorema da função implícita, podemos definir:

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{-u'(w_t - s_t) + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s_t]}_{\phi(w_t, s_t, r_{t+1}) \equiv 0} && (7.10) \\ s_t &= f(w_t, r_{t+1}), && (7.11) \end{aligned}$$

tal que temos a poupança como uma função do salário e dos juros. Para saber o efeito dos salários e da taxa de juros na poupança, precisamos fazer,

$$\frac{\partial s}{\partial w} = -\frac{\partial \phi / \partial w}{\partial \phi / \partial s} \qquad \frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{\partial \phi / \partial r}{\partial \phi / \partial s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \underbrace{u''(w_t - s_t)}_{u''(\cdot)<0} + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})^2 \underbrace{u''[s_t(1+r_{t+1})]}_{u''(\cdot)<0} < 0 && (7.12) \\ \frac{\partial \phi}{\partial w} &= -u''(w_t - s_t) > 0. && (7.13) \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial s}{\partial w} > 0$, dado que é um bem normal normal tanto para jovens quanto para velhos.

Por sua vez, para definir o efeito dos juros na poupança, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_{t+1}} = (1+\theta)^{-1} \cdot u'[(1+r_{t+1})s_t] + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})s_t \cdot u''[(1+r_{t+1})s_t]. \tag{7.14}$$

Como $c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t$, para simplificar a notação, vemos que a elasticidade de substituição intertemporal em 7.9 pode ser representada como $\sigma(c_{2t+1}) = -\frac{u'(c_{2t+1})}{c_{2t+1} \cdot u''(c_{2t+1})}$. Multiplicando a expressão anterior por $u'(c_{2t+1})/u'(c_{2t+1})$ do lado direito, será possível simplificar a expressão anterior para:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r_{t+1}} &= (1+\theta)^{-1} u'(c_{2t+1}) \left[\frac{u'(c_{2t+1}) + c_{2t+1} \cdot u''(c_{2t+1})}{u'(c_{2t+1})} \right] \\ &= (1+\theta)^{-1} u'(c_{2t+1}) \left[1 - \frac{1}{\sigma(c_{2t+1})} \right] && (7.15) \end{aligned}$$

Assim, a derivada da poupança em relação aos juros em t+1 será:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} &= -\frac{(1+\theta)^{-1}\cdot u'(c_{2t+1}) + (1+\theta)^{-1}c_{2t+1}\cdot u''(c_{2t+1})}{u''(w_t - s_t) + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})} \\
&= -\frac{(1+\theta)^{-1}\cdot u'(c_{2t+1})[1-1/\sigma(\cdot)]}{u''(w_t - s_t) + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})}. \qquad (7.16)
\end{aligned}$$

Logo, o efeito dos juros (r_{t+1}) na poupança (s_t) é **ambíguo**, pois depende do numerador, uma vez que o denominador sempre será negativo ($\frac{\partial \phi}{\partial s} < 0$). Um aumento na taxa de juros diminui o preço do consumo no próximo período, fazendo com que os indivíduos mudem o padrão de consumo do primeiro para o segundo período, ou seja, substituindo consumo em t+1 por consumo em t, como efeito substituição. Todavia, o aumento do juros também aumenta o conjunto possível de consumo, permitindo que o consumo aumente em ambos os períodos, como efeito renda. Se a elasticidade de substituição entre consumo nos dois períodos é maior que 1, então, em um modelo com dois períodos o efeito substituição irá dominar, e um aumento nos juros aumentará a poupança.

Podemos dizer uma alteração em r terá dois efeitos:

1. Efeito renda: receita da poupança será maior, ou
2. Efeito substituição: seria lucrativo substituir o consumo de hoje pelo consumo de amanhã.

Proposição 7.2 Caso $\sigma(\cdot) < 1$, o efeito renda domina efeito substituição, tal que $\partial s/\partial r < 0$, caso contrário, $\sigma(\cdot) > 1$, o efeito substituição irá dominar o efeito renda, $\partial s/\partial r > 0$.

7.1.2 Tecnologia e Firmas

A função de produção da fima é tipicamente neoclássica, com retornos constantes de escala agregado, RMg decrescente para insumos e respeitando as condições de Inada.

$$\begin{aligned}
Y_t &= F(K_t, L) \\
\max \Pi_t &= p_t Y_t - r_t K_t - w_t^L L\big|_{p_t=1}
\end{aligned}$$

Considerando que Y_t tem RCE, obedece o Teorema de Euler, tal que

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial L}L}_{\text{Renda total dos fatores}} = \underbrace{Y_t}_{\text{Renda total da econ.}}$$

Finalmente, temos que as firmas agem de forma competitiva, contratando trabalhadores até a produtividade marginal do trabalho ser igual ao salário, e retém capital até a produtividade marginal do capital ser igual a sua taxa de aluguel:

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{7.17}$$

$$r_t = f'(k_t), \tag{7.18}$$

tal como visto no capítulo de Solow na seção 2.1.2.

7.1.3 Equilíbrio no Mercado de Bens

O equilíbrio do mercado de bens exige que a demanda seja igual a oferta de bens no período, ou, o equivalente a dizer que investimento e poupança líquidos sejam iguais:

$$K_{t+1} - K_t = N_t s(w_t, r_{t+1}) - K_t, \tag{7.19}$$

onde o lado esquerdo é o investimento líquido e o lado esquerdo a poupança líquida, tal que $N_t s(w_t, r_{t+1})$ representa a poupança do jovem e $-K_t$ a "despoupança" do velho. Eliminando K_t dos dois lados, temos a regra de acumulação no equilíbrio,

$$K_{t+1} = N_t s(w_t, r_{t+1}),$$

que diz que o capital em t+1 é igual a poupança do jovem em t.

Dividindo os dois lados por N_t, para encontrar um locus de poupança e analisar o SS, teremos:

$$\frac{K_{t+1}}{N_t} = s(w_t, r_{t+1}).$$

Como definimos no início do capítulo, $N_t = N_0(1+n)^t$. Além disso, temos que

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}},$$

assim, $K_{t+1} = N_{t+1} \cdot k_{t+1}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{N_{t+1}k_{t+1}}{N_t} &= s(w_t, r_{t+1}) \\
\frac{N_0(1+n)^{t+1}k_{t+1}}{N_0(1+n)^t} &= \\
(1+n)k_{t+1} &= \\
k_{t+1} &= \frac{s(w_t, r_{t+1})}{(1+n)} \qquad (7.20)
\end{aligned}$$

Juntando a equação de acumulação de capital (Eq. 7.20) com as condições de equilíbrio no mercado de fatores (eq. 7.18 e 7.17), teremos o comportamento dinâmico do estoque de capital:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{s(w(k_t), r(k_{t+1}))}{(1+n)} \qquad (7.21) \\
k_{t+1} &= \frac{s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}))}{(1+n)}
\end{aligned}$$

O locus de poupança se dará pela relação entre k_{t+1} e k_t na Eq. 7.21. O formato do locus de s depende da derivada:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s_w(k_t) \cdot k_t \cdot f''(k_t)}{(1+n) - s_r(k_{t+1}) \cdot f''(k_{t+1})} \qquad (7.22)$$

O numerador dessa expressão é positivo, porém, o denominador é ambíguo por causa de $s_t(k_{t+1})$, pois o efeito da taxa de juros reflete de forma ambígua na poupança. Se $s_r > 0$, o denominador é positivo e também será dk_{t+1}/dk_t.

A Figura 7.1 apresenta os steady states da poupança. A linha de 45 graus representa os pontos em que $k_{t+1} = k_t$. Qualquer ponto em que o locus de poupança s cruzar essa linha será um steady state. Existem três comportamentos possíveis para o locus de poupança. No locus A não há steady state com estoque de capita positivo. No locus B, existem dois equilíbrios, o primeiro estável e o segundo instável. E no locus C, existe apenas um único e estável ponto de equilíbrio.

Assumindo a existência de um único equilíbrio com estoque de capital positivo, caso C, podemos garantir que este será estável avaliando a derivada 7.22 próxima do steady state. Para que o equilíbrio tenha estabilidade local e seja não oscilatório, exige-se que:

$$0 < \left| \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right| < 1.$$

Podemos ainda representar o ajuste dinâmico em direção ao steady state no caso

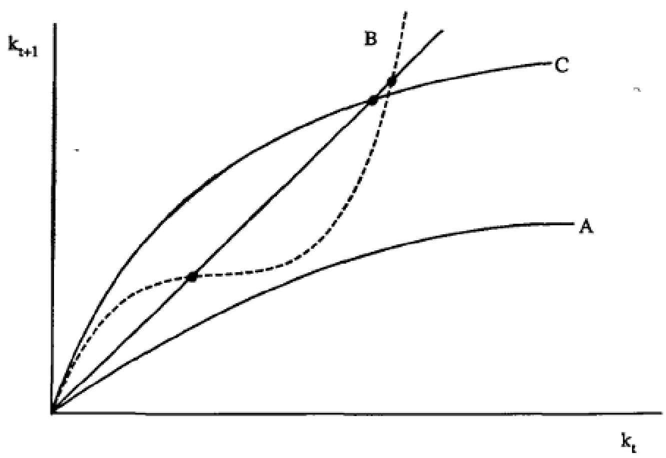


Figura 7.1: Poupança e SS (BF, p.95)

C, quando o equilíbrio é único e estável, conforme a Figura 7.2. A economia começa em k_0 e se move gradualmente para para o estoque de capital de steady state.

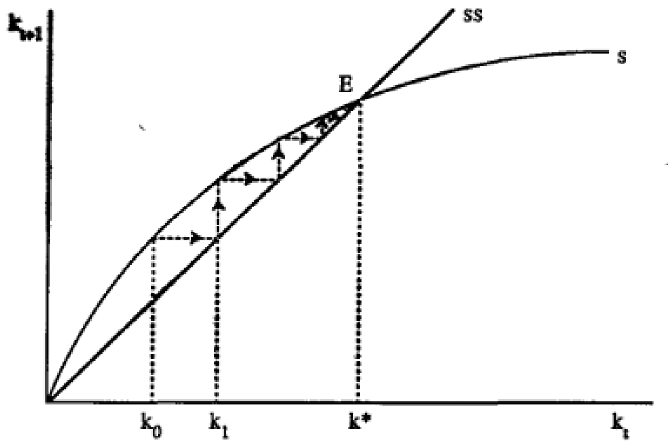


Figura 7.2: Ajuste dinâmico (BF, p.97)

7.2 Comando Central

Nessa seção, queremos comprar a alocação do mercado com a decisão de um planejador central que busca maximizar uma função de bem-estar social intertemporal, pois se preocupa com as gerações futuras.

Supondo horizonte finito, t e t+1, e considerando que o planejador central desconta uma taxa R da utilidade das gerações futuras, temos a função de bem-estar social que o ditador central pretende maximizar:

$$\begin{aligned} \max \quad & U = (1+\theta)^{-1}u(c_{20}) + \sum_{t=0}^{T-1}(1+R)^{-t-1} \\ & \qquad \cdot [u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})] \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$s.a. \quad k_t + f(k_t) = (1+n)k_{t+1} + c_{1t} + (1+n)^{-1}c_{2t} \tag{7.24}$$

$$k_0 \text{ e } k_{T+1} = \text{ dados.} \tag{7.25}$$

O primeiro ponto que cabe ser destacado é que a restrição orçamentária 7.24 é a versão per capita de

$$\underbrace{K_t + F(K_t, N)}_{\text{oferta de bens}} = \underbrace{K_{t+1}}_{\text{estoq. cap.}} + \underbrace{N_t C_{1t}}_{\text{cons. jovens}} + \underbrace{N_{t-1} C_{t2}}_{\text{cons. velhos}}.$$

Outro ponto importante, é o significado de R na função utilidade 7.23, se:

- $R > 0 \implies$ planejador preocupa-se menos com as gerações futuras;
- $R < 0 \implies$ planejador preocupa-se mais com as gerações futuras
- $R > 0 \implies$ igualmente.

Ponderando utilidades pelo tamanho de cada geração, teremos $1 + R = (1+n)^{-1}$, fazendo com que R seja negativo de fato.

Isolando c_{1t} em 7.24 e substituindo em 7.23, teremos um problema de maximização irrestrito:

$$U = (1+\theta)^{-1}u(c_{20}) + \sum_{t=0}^{T-1}(1+R)^{-t-1} \cdot [u(k_t + f(k_t) - (1+n)k_t - (1+n)^{-1}c_{2t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})]. \tag{7.26}$$

Diferenciando 7.26 em relação a c_{2t} e k_t teremos as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial U}{\partial c_{2t}} \; : \; (1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}) - (1+R)^{-1}(1+n)^{-1}u'(c_{1t}) = 0 \tag{7.27}$$

$$\frac{\partial U}{\partial k_t} \; : \; (1+R)^{-1}[1 + f'(k_t)]u'(c_{1t}) - (1+n)u'(c_{1t-1}) = 0. \tag{7.28}$$

A equação 7.27 pode ser expressa como a igualdade entre a taxa marginal de substituição e de transformação[1], tal que após um pouco de manipulação teremos:

$$\underbrace{1+n}_{TMT} = \underbrace{\frac{u'(c_{1t})(1+R)^{-1}}{u'(c_{2t})(1+\theta)^{-1}}}_{TMS_{c1t,c2t}}$$

Combinando 7.27 e 7.28, temos:

$$u'(c_{1t-1}) = [1+f'(k_t)](1+\theta)^{-1}u'(c_{2t}). \tag{7.29}$$

Nota-se que, com $r_t = f'(k_t)$, esse é o mesmo resultado da economia descentralizada, equivalente a equação 7.4. Assim, o comando centra aloca consumo entre jovens e velhos da mesma forma dos indivíduos.

7.2.1 Steady State

Vamos ver quais as implicações das condições ótimas do planejador no steady state. A partir das equações 7.27 e 7.28, c_1^*, c_2^* e k^* representam os valores de SS, satisfazendo:

$$(1+\theta)^{-1}u'(c_2^*) = (1+R)^{-1}(1+n)^{-1}u'(c_1^*) \tag{7.30}$$

$$1+f'(k^*) = (1+R)(1+n). \tag{7.31}$$

Se R e n não forem muito grandes, 7.31 implica que $f'(k_t) = R+n$, de tal forma que o nível de capital de steady state satisfaz a golden rule modificada (grm). Se R=0, $f'(k_t) = n$, resultado na golden rule. Logo, o resultado entre a grm e a gr depende do R que o planejador central define.

Todavia, essa economia numca estará no SS. O caminho ótimo da economia, o melhor caminho de $k_0 \to k_{t+1}$, pelo teorema de Turnpike, é permanecer o maior tempo possível próximo de k^*, conforme a Figura 7.3. O que irá determinar a convergência é o R estabelecido pelo comando central:

- Se $R > 0$, $k_0 \to k^*_{grm}$;
- Se $R = 0$, $k_0 \to k^*_{gr}$;
- Se $r < 0$, não há convergência.

[1] No Blanchard e Fischer ele diz que a partir da equação 7.28 podemos expressar essa igualdade, mas não demonstra.

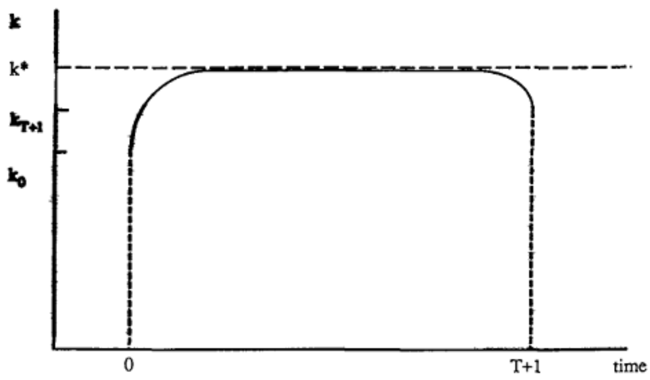


Figura 7.3: Caminho ótimo no comando central (BF, p.101)

No ótimo do comando centra, se $R > 0$, a economia converge para:

$$1 + f'(k^*) = (1+n)(1+R) \tag{7.32}$$

Como R é um parâmetro arbitrário, $k^* \neq k_{ss}^{ED}$.

Pareto Ótimo

Mais do que isso, queremos saber se o equilíbrio é Pareto ótimo. Para isso, começamos definindo o consumo total como $c_t = c_{1t} + (1+n)^{-1}c_{2t}$. Com a equação de acumulação 7.24, temos

$$k_t + f(k_t) = (1+n)k_{t+1} + \underbrace{c_{1t} + (1+n)^{-1}c_{2t}}_{c_t}.$$

Assim, a equação de acumulação implica que no SS[2],

$$f(k^*) - nk^* = c^*.$$

Considerando os efeitos de mudanças em k* no c*:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = [f'(k^*) - n], \tag{7.33}$$

que é ambíguo, pois pode ser maior ou menor que 0, dependendo se $f'(k^*) > n$ ou $f'(k^*) < n$. Esse resultado sugere a importância do nível de capital de golden rule. Se $k_{ss} > k_{gr}$, uma diminuição no estoque de capital k gera um aumento no consumo de equilíbrio, $c*$. Sugerindo, assim, que o steady state com excesso de capital da golden rule **não é Pareto ótimo**.

[2] No SS, o k_{t+1} e o k_t viram k^*.

Ineficiência Dinâmica

Há ineficiência dinâmica na prática? É possível que economias acumulem capital em excesso? Para isso, BF usam como exemplo duas funções de utilidade e de produção tipo Cobb-Douglas:

$$U = \ln c_1 + (1+\theta)^{-1} \ln c_2,$$
$$f(k) = Ak^{\alpha} - \delta k.$$

Nesse caso, a equação 7.20, $(1+n)k_{t+1} = s(w_t, r_{t+1})$, sugere que a taxa de juros de steady state seja:

$$r^* = \left[\frac{\alpha(1+n)(2+\theta)}{1-\alpha}\right] - \delta,$$

tal que $r^* > n$ ou $r^* < n$.

Com o modelo expandido, permitindo crescimento, $g > 0$, teremos que o nível de capital de golden rule é tal que a taxa de juros deve ser igual a taxa de crescimento da economia ($r_{ss} = g_{ss}^{ED}$). Olhando para o caso americano, que tem duas taxas de juros (risk-free e retorno de capital), vemos que

$$r_{rf} \underbrace{<}_{\text{ambíguo}} g_{ss} \underbrace{<}_{\text{ID}} r_{rc}.$$

7.3 Altruísmo

O altruísmo em uma economia de mercado surge pelo motivo herança. Esta pode ter como motivo a preocupação com gerações futuras, a tentativa de manipular os filhos, ou a incerteza sobre a data da morte[3]. De certa forma, a herança equivale a inserir a utilidade das crianças nas utilidades dos indivíduos.

A utilidade da geração nascida no tempo t (V_t) com preocupação nas gerações seguintes é dada por:

$$V_t = u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+1}) + (1+R)^{-1} V_{t+1}. \tag{7.34}$$

Cada geração se preocupa com sua própria utilidade ($u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1}u(c_{2t+1})$) e com a utilidade da próxima geração (V_{t+1}) descontada a taxa $R > 0$. Repare que R agora reflete a preferência do indivíduo, algo como o quanto os pais se preocupam com os filhos.

[3]Considerando que não existe um mercado de seguros.

Resolvendo recursivamente, isto é, substituindo V_{t+1} e 7.34, teremos:

$$V_t = \sum_{i=0}^{\infty} (1+R)^{-i} \left[u(c_{1t+i}) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+i+1}) \right], \tag{7.35}$$

tal que cada geração se preocupa com todas as i gerações, pois é uma série que faz a ligação entre as gerações.

A geração nascida no tempo t terá como restrição, além da renda salarial, a herança recebida da geração anterior (b_t) e deixará uma herança para a próxima geração (b_{t+1}). Dessa forma, o **problema do jovem nascido em t** será:

$$\begin{aligned} \max_{s_t, b_{t+1}} \quad & V_t = u(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1} u(c_{2t+1}) + (1+R)^{-1} u(c_{1t+1}) + \cdots . && (7.36) \\ s.a. \quad & c_{1t} + s_t = w_t + b_t, && (7.37) \\ & c_{2t+1} + (1+n) b_{t+1} = (1+r_{t+1}) s_t. && (7.38) \end{aligned}$$

Substituindo as restrições na função objetivo e derivando em relação a s_t e b_{t+1} teremos as seguintes condições de primeira ordem[4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial s_t} \quad &: \quad -u'(c_{1t}) + (1+\theta)^{-1} u'(c_{2t+1})(1+r_{t+1}) = 0 \\ & \quad\;\; u'(c_{1t}) = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1}) u'(c_{2t+1}). && (7.39) \\ \frac{\partial V_t}{\partial b_{t+1}} \quad &: \quad -(1+\theta)^{-1} u'(c_{2t+1})(1+n) + (1+R)^{-1} u'(c_{1t+1}) = 0 \\ & \quad\;\; (1+R)^{-1} u'(c_{1t+1}) = (1+\theta)^{-1}(1+n) u'(c_{2t+1}). && (7.40) \end{aligned}$$

Note que em 7.40 consideramos uma herança positiva $b_{t+1} > 0$, caso contrário, quando $b_{t+1} = 0$, seria $(1+R)^{-1} u'(c_{1t+1}) \leq (1+\theta)^{-1}(1+n) u'(c_{2t+1})$.

Relembrando que $r_t = f'(k_t)$, e assumindo herança positiva, vemos que a CPO com altruísmo é idêntica a CPO de comando central. Se tivermos herança positiva e economia de mercado, replica o ótimo de comando central. Nesse caso, o nível de capital de steady state é o nível de capital de golden rule modificada ($k_{ss} = k_{grm}$).

Além disso, sabe-se que essa formatação do modelo tem ineficiência dinâmica, pois as preferências das gerações futuras afetam as gerações correntes. Assim, considerando a restrição de não-negatividade na herança, teremos $(1+r^*) = (1+n)(1+R)$. Com $k_0 << k_{gr}$ pode ter ineficiência dinâmica. Com $k_0 >> k_{gr}$ terá ID.

[4]Para resolver esse problema basta considerar $i = 0$ e $i = 1$ em V_t. Para $\frac{\partial V_t}{\partial s_t}$, teremos efeito só em $i = 0$, todavia para $\frac{\partial V_t}{\partial b_{t+1}}$ em $i = 0$ teremos efeito em c_{2+t+i} e para $i = 1$ em c_{1t+i}.

7.3.1 Altruísmo bi-lateral

Movimento inter-gerações de recursos vai tando de pais para filhos quanto no sentido oposto. A utilidade dos indivíduos é afetada não apenas pela utilidade dos filhos, mas também a utilidade dos pais. Não necessariamente garante Pareto ótimo.

7.4 Sistema de Seguridade Social e Acumulação de Capital

Nessa seção, o foco é o efeito da seguridade social na acumulação de capital e no bem-estar[5]. Os indivíduos fazem contribuições quando jovens para ter retorno no futuro, procurando manter o padrão de vida. O objetivo será analisar os tipos de financiamento do sistema de seguridade social (SSS) e seus impactos sobre o equilíbrio de uma economia descentralizada sem altruísmo.

Para introduzir o SSS, definimos d_t como a contribuição de um jovem em t, e b_t como o benefício recebido por um velho em t. Podem haver duas formas de fazer o SSS funcionar. O formato *fully funded*[6], onde a contribuição do jovem é retornada em t+1 com juros para o velho, tal que

$$b_t = (1 + r_t)d_{t-1}.$$

Ou o SSS pode ser não-capitalizado, denominado de *pay-as-you-go system*[7]. Este é um sistema sem financiamento, de repatriação, onde transfere-se contribuições correntes feitas pelos jovens diretamente para o velho corrente, assim

$$b_t = (1 + n)d_t,$$

ou seja, conforme a taxa de crescimento populacional n, que fará o papel de taxa de retorno sobre a contribuição no sistema PAYG.

Definição 7.1 Relembrando que o equilíbrio em uma economia descentralizada é caracterizado por (7.4),

$$u'(w_t - s_t) = (1 + \theta)^{-1}(1 + r_{t+1})u'[(1 + r_{t+1})s_t],$$

[5]Revisão: Remontar restrições orçamentárias para os dois sistemas.
[6]Caso chileno.
[7]Caso brasileiro e americano de 1939.

pela representação da Eq. 7.20 como

$$s_t = (1+n)k_{t+1},$$

e pelas condições de equilíbrio dos fatores 7.18 e 7.17,

$$\begin{aligned} w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \\ r_t &= f'(k_t) \end{aligned}$$

7.4.1 Sistema *Fully Funded*

Nesse sistema o governo pega as contribuições d_t dos jovens, investe como capital e paga $b_t = (1+r_t)d_{t-1}$ para os velhos. Assim, as CPO equivalentes as equações (7.4) e (7.20) serão:

$$u'[w_t - (s_t + d_t)] = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})(s_t + d_t)] \tag{7.41}$$

$$s_t + d_t = (1+n)k_{t+1}. \tag{7.42}$$

Comparando as equações acima com as do modelo descentralizado, nota-se que se k_t é a solução para o primeiro sistema (descentralizado) também será para o segundo. O d_t é percebido como poupança e obtém a mesma taxa de retorno da poupança privada. Assim, a taxa de poupança não vai ser afetada. Então, $d_t < s_t$ na economia pré-SSS, tal que a contribuição de seguridade social não excede a quantidade de poupanças que existiria caso contrário.

Para esse sistema, o consumidor é indiferente entre a forma de poupança (s_t ou d_t). Um aumento em d_t gera uma queda na poupança privada, de tal forma que $s_{t-1} = s_t + d_t$, pois os os dois dão a mesma taxa de retorno. **Conclusão:** O SSS fully funded não tem impacto na acumulação de capital ou no nível de poupança total.

7.4.2 Sistema pay-as-you-go

Utilizando $b_{t+1} = (1+n)d_{t+1}$, as equações 7.4 e 7.20 serão:

$$u'[w_t - (s_t + d_t)] = (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s_t + (1+n)d_{t+1}] \tag{7.43}$$

$$s_t = (1+n)k_{t+1}. \tag{7.44}$$

Como o PAYG é um sistema de transferência puro, todo o recurso de capital vem da poupança privada.

Qual o impacto de d_t sobre s_t? Diferenciando 7.43 e considerando $d_t = d_{t+1}$, teremos que

$$\left|\frac{\partial s_t}{\partial d_t}\right| \lesseqgtr 1$$

dependendo se $n \lesseqgtr r$. Em geral, $\frac{\partial s_t}{\partial d_t} > 0$, tal que um queda na poupança s_t diminui o estoque de capital k_t e w_t. Caso aumente os juro r_t, o efeito será ambíguo.

Qual o efeito de um aumento da contribuição sobre a acumulação? A relação entre k_{t+1} e k_t depende da função de poupança $s(\cdot)$, conforme a Figura 7.4. Assumindo que o equilíbrio é único, estável e a dinâmica não é oscilatória, teremos:

$$0 < \left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1,$$

para $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$ conforme definido em 7.22.

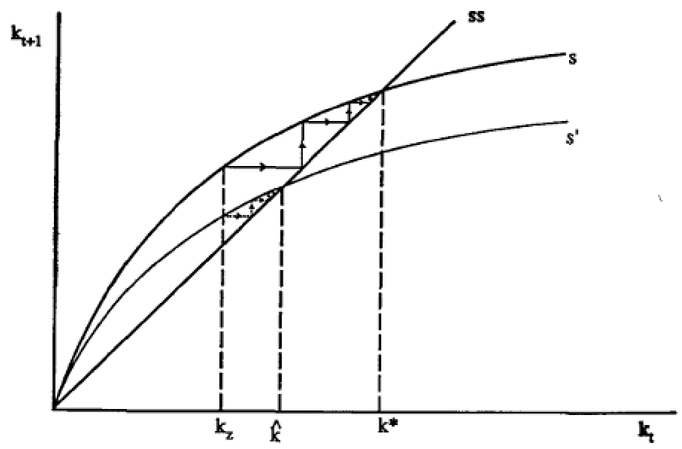


Figura 7.4: Efeito do SSS no equilíbrio (BF, p.112).

Considerando a equação dinâmica e diferenciando em relação a d_t, encontraremos que um aumento da seguridade social move o locus da poupança para baixo na Figura 7.4, $s \to s'$. Ou seja, o sistema PAYG vai afetar a acumulação de capital, pois altera o grau de poupança.

Características de Pareto-ótimo desse resultado:

(a) Se $r < n$, então a seguridade social melhora o bem-estar da economia, pois reduz ou elimina a ineficiência dinâmica.

(b) se $r > n$, o sistema PAYG beneficia apenas a geração seguinte (que recebe a transferência positiva de d_t), e todas as demais pioram, não havendo uma melhora de Pareto.

Qual o efeito de PAYG com herança positiva? Note que d_t pode ser considerada uma herança negativa, pois é uma transferência de recursos do jovem para o velho. O governo retira $(1+n)d_t$ do jovem e transfere para o velho. Além disso, há a herança feita pelo velho $(1+n)b_t$ e a herança recebida pelo herdeiro (b_t). O velho aumentará a herança deixada para a próxima geração em d_t. Logo, a variação de SSS são compensadas exatamente por mudanças na herança.

Parte V

Outros modelos

Capítulo 8

Consumo

Capítulo 7 (edição de 1996) ou 8 (edição de 2012) do Romer (Advanded Macroeconomics).

8.1 Hipótese da Renda Permanente

Considere um indivíduo que vive T períodos com utilidade ao longo do período de vida:

$$U = \sum_{t=1}^{T} u(C_t), \tag{8.1}$$

para $u(\cdot)$ representando a utilidade instantânea com características $u'(\cdot) > 0$ e $u''(\cdot) < 0$. Por simplificação, as taxas de juros e de desconto, r_t e θ, são iguais a 0. O indivíduo tem riqueza inicial A_0 e renda corrente do trabalho Y_t para $t = 1, \ldots, T$. Ambos são dados. Dessa forma, a restrição orçamentária será:

$$\sum_{t=1}^{T} C_t = A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t. \tag{8.2}$$

Portanto, o problema do indivíduo será maximizar a utilidade 8.1 sujeito a restrição orçamentária 8.2:

$$\begin{aligned} \max_{C_t} \quad & U = \sum_{t=1}^{T} u(C_t), \\ s.a. \quad & \sum_{t=1}^{T} C_t = A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t. \end{aligned}$$

O Lagrangeano será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} u(C_t) + \lambda \left(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t - \sum_{t=1}^{T} C_t \right),$$

e a condição de primeira ordem para C_t,

$$u'(C_t) = \lambda. \tag{8.3}$$

Percebe-se que a utilidade marginal do consumo ($u'(C_t)$) é constante. Além disso, como o nível de consumo é determinado pela utilidade marginal, e o consumo deve ser constante, então $C_1 = C_2 = \cdots = C_T$. Como o somatório da constante será $T \cdot C_t$, substituindo esse resultado na R.O. (Eq. 8.2),

$$T \cdot C_t = \frac{1}{T} \left(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \right) \quad \forall t. \tag{8.4}$$

O termo em parenteses representa os recursos do indivíduo ao longo da vida, de tal forma que o indivíduo divide igualmente seus recursos a cada período. Além disso, o consumo em cada período depende da renda para a vida inteira (renda permanente).

Romer analisa o impacto de um aumento transitório na renda para demonstrar a importância da distinção entre renda permanente e renda transitória. Suponha um aumento de renda Z, que aumenta a renda permanente em Z/T. Se T é longo, aumento transitório da renda tem pouco impacto sobre o consumo (dilui Z/T). Um exemplo de aumento transitório da renda pode ser o corte temporário de impostos, e se o indivíduo tem uma expectativa longa de vida, o impacto no consumo desse corte de impostos será pequeno.

A poupança do indivíduo é:

$$\begin{aligned} S_t &= Y_t - C_t \\ &= \left(Y_t - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_t \right) - \frac{1}{T} A_0. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Dessa forma, a renda transitória tem efeito sobre a poupança. Quando a renda é elevada, em relação a renda média, a poupança é elevada. Renda transitória alta, poupança elevada. Os indivíduos usam s_t e empréstimos para alisar/suavizar o caminho de consumo.

Proposição 8.1 Nesse modelo, a poupança (s_t) é vista como consumo futuro. O indivíduo poupa hoje para consumir no futuro.

Informações usuais (e erradas) sobre a poupança:

1. Pobre poupam percentualmente menos em relação a sua renda, pois suas rendas estão apenas pouco acima do necessário apara um padrão de vida digno. **Na verdade**, pobre e ricos tem poupança determinada pela renda permanente.

2. Indivíduos preocupam-se com o padrão de consumo dos vizinhos (efeito demonstração de Keynes, visão de curto prazo). **Na verdade**, se indivíduos se preocupassem em manter as aparências, então, isso induziria eles a reduzirem o consumo hoje para alcançar uma "aparência" no futuro.

8.1.1 Revisão Empírica

A função de consumo Keynesiana tradicional diz que o consumo é determinado pela disponibilidade de renda atual. Estudos empíricos negaram essa teoria, demonstrando a inconsistência de tal relação. Variações da renda afetam o consumo apenas através do seu impacto sobre a renda permanente.

Supondo que o consumo é determinado pela renda permanente, $C = Y^P$. A renda atual é igual a soma das rendas permanente e transitória: $Y = Y^P + Y^T$. A renda transitória tem média zero e é não-correlacionada com a renda permanente.

Agora considere uma regressão do consumo em relação a renda corrente:

$$C_i = a + bY_i + e_i. \tag{8.6}$$

Por MQO, o coeficiente b será determinado pela covariância entre a variável independente e a independente, dividido pela variância da variável do lado direito da equação[1]:

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{Cov(Y,C)}{Var(Y)} \\ &= \frac{Cov(Y^P + Y^T, Y^P)}{Var(Y^P + Y^T)} \\ &= \frac{Var(Y^P)}{Var(Y^P) + Var(Y^T)}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Para estimar o parâmetro a, consideramos a constante igual a média da variável a esquerda da equação menos a inclinação estimada multiplicando a média da variável

[1]Lembrando que, se x e y são independentes, $Cov(x, y) = 0$. Da mesma forma, vale lembrar que $Cov(Y, Y) = Var(Y)$.

a direita:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \bar{C} - \hat{b}\bar{Y} \\ &= \bar{Y}^P - \hat{b}(\bar{Y}^P + \bar{Y}^T) \\ &= (1-\hat{b})\bar{Y}^P, \end{aligned} \tag{8.8}$$

considerando que a média da renda transitória é zero ($\bar{Y}^T = 0$).

Previsões da hipótese de renda permanente:

1. $\hat{b}$ é determinado pelas variâncias relativas de Y^P e Y^T;
2. Consumo só é afetado pela variação ΔY^P;
3. Se $\Delta Y^P \gg \Delta Y^T$, então $\Delta Y \cong \Delta C$;
4. Se a variação da renda permanente é menor, $\Delta Y^P < \Delta Y^T$, então o consumo aumento com relação a $\Delta^+ Y$.

A Figura 8.1 apresenta três relações entre C e Y^P. Na primeira, $\hat{b} \ll 1$ e $\hat{a} > 0$, de tal forma que as variações de renda entre as famílias refletem fatores como o desemprego e, principalmente, diferentes pontos no ciclo de vida. Com o tempo, quase toda a variação na renda agregada reflete o crescimento de longo prazo; assim, $\hat{b} \approx 1$ e $\hat{a} \approx 0$, como no segundo gráfico em 8.1. Por fim, Romer considera as diferenças entre negros (B) e brancos (W). A variância da renda transitória e permanente é similar, então $\hat{b}$ será praticamente o mesmo. Porém, a renda média dos negros é melhor que a renda média dos brancos, log, $\hat{a}_B < \hat{a}_W$, como apresentado no último gráfico de de 8.1.

8.2 Consumo com Incerteza

Considerando a existência de incerteza em relação a renda do trabalho em cada período (Y_t), mantendo a r e θ iguais a zero, e considerando uma função utilidade instantânea quadrática, o problema do indivíduo será:

$$\max \quad \mathbb{E}[U] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(C_t - \frac{a}{2}C_t^2\right)\right], \tag{8.9}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=1}^{T} C_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t, \tag{8.10}$$

para $a > 0$. Vamos também assumir que a riqueza do indivíduo é tal que o consumo está sempre na faixa em que a utilidade marginal é positiva.

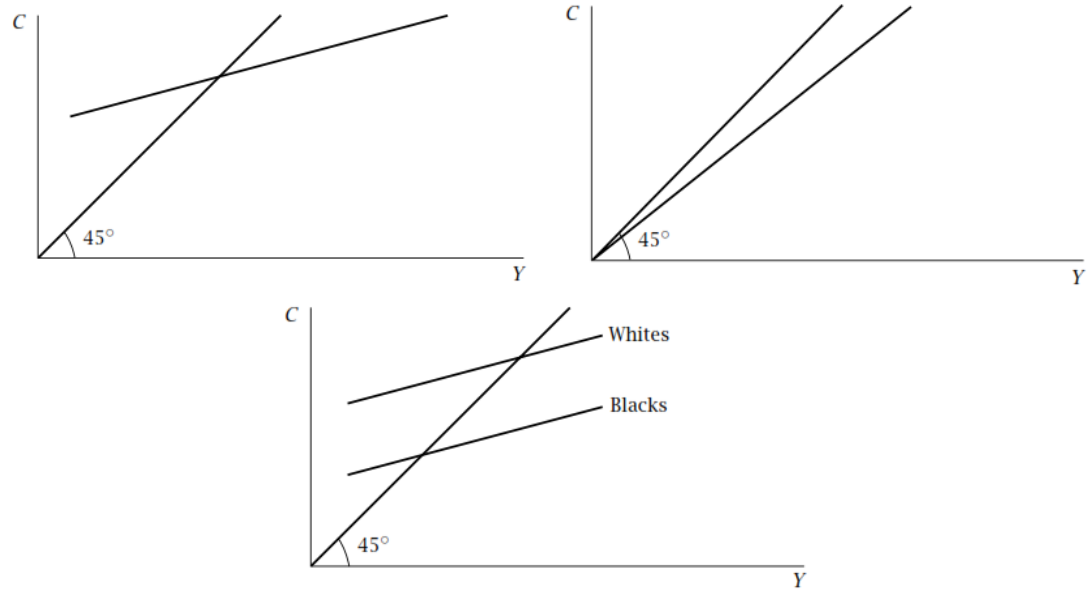


Figura 8.1: Relação entre renda atual e consumo (Romer, p.369)

A utilidade marginal do consumo no período 1 é $UMgC = U'(C_1) = 1 - aC_1$, e uma mudança tem um custo na utilidade de $(1 - aC_1)dC$. Como a utilidade marginal do consumo no período t é $1 - aC_t$, uma mudança tem um benefício em utilidade esperada $\mathbb{E}_1[1 - aC_t]dC$, condicionada a informação disponível em t=1. Se o indivíduo está otimizando, a equação de Euler será:

$$1 - aC_1 = \mathbb{E}_1[1 - aC_t] \quad \forall t = 2, 3, \ldots, T. \tag{8.11}$$

Como $\mathbb{E}[1 - aC_t] = 1 - a\mathbb{E}_1[C_t]$,

$$\begin{aligned} 1 - aC_1 &= 1 - a\mathbb{E}_1[C_t] \\ C_1 &= \mathbb{E}_1[C_t]. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Tomando a expectativa na restrição orçamentária do indivíduo, e considerando que o indivíduo sabe que o consumo da sua vida irá satisfazer sua limitação de recursos com igualdade, teremos:

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}_1[C_t] = A_0 + \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}_1[Y_t]. \tag{8.13}$$

Como $\mathbb{E}_1[C_t] = C_1$, o lado esquerdo da equação será $T \cdot C_1$. Logo,

$$C_1 = \frac{1}{T}\left[A_0 + \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}_1[Y_t]\right], \tag{8.14}$$

ou seja, podemos dizer que o indivíduo consome 1/T dos recursos esperados para sua vida, ou que o indivíduo consome sua renda esperada média a cada período.

O resultado de 8.12 implica que a expectativa de consumo no próximo período é igual ao consumo corrente, tornando mudanças no consumo imprevisíveis. Pela definição de expectativa, podemos reescrever:

$$C_t = \mathbb{E}_{t-1}[C_t] + e_t, \tag{8.15}$$

tal que e_t é um ruído no qual a expectativa para o período t-1 é zero. Dado que $\mathbb{E}_{t-1}[C_t] = C_{t-1}$,

$$C_t = (C_{t-1}) + e_t. \tag{8.16}$$

Note que a Eq. 8.16 é um passeio aleatório (RW). Esse é o famoso resultado de Hall (1978), que a hipótese de renda permanente resulta em um consumo que segue um random walk. Assim, o que determina a mudaça no consumo é um choque aleatório (erro, ruído branco). O indivíduo ajusta o seu consumo até o ponto que é esperado não haver mudanças no consumo. Os indivíduos vão fazer ajustes para alisar/suavizar o consumo. "Path of smoothing" do consumo.

8.2.1 Mudanças no consumo

Vamos analisar o que determina mudanças no consumo do período 1 para o período 2. Considerando o fato de que $A_1 = A_0 + Y_1 - C_1$, é fácil perceber que o consumo no período 2 será:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{1-T}\left(A_1 + \sum_{t=2}^{T} \mathbb{E}_2[Y_t]\right) \\ &= \frac{1}{1-T}\left(A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^{T} \mathbb{E}_2[Y_t]\right). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Podemos reescrever a expectativa de renda para o resto da vida no período 2 como a expectativa em t=1 mais a informação recebida entre os dois períodos,

$$\sum_{t=2}^{T} \mathbb{E}_2[Y_t] = \sum_{t=2}^{T} \mathbb{E}_1[Y_t] + \left(\sum_{t=2}^{T} \mathbb{E}_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} \mathbb{E}_1[Y_t]\right).$$

Substituindo em 8.17 e lembrando 8.14,

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{1-T}\left[\underbrace{A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^{T}\mathbb{E}_1[Y_t]}_{TC_1 - C1} + \left(\sum_{t=2}^{T}\mathbb{E}_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T}\mathbb{E}_1[Y_t]\right)\right] \quad (8.18)\\
C_2 &= \frac{1}{1-T}\left[C_1(T-1) + \ldots\right]\\
C_2 &= C_1 + \frac{1}{1-T}\left[\left(\sum_{t=2}^{T}\mathbb{E}_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T}\mathbb{E}_1[Y_t]\right)\right]. \quad (8.19)
\end{aligned}$$

Na equação 8.19 tempos que $C_2 - C_1$ é uma função das expectativas na renda ao longo da vida dividido pelo número de períodos de vida restante.

Perceba também que o comportamento do indivíduo exibe equivalente certeza, pois consome a quantidade equivalente a média da sua renda futura, logo, a incerteza sobre a renda futura não impacta no consumo. Considerando a equação de Euler relacionando o consumo nos períodos 1 e 2,

$$U'(C_1) = \mathbb{E}_1[U'(C_2)]. \quad (8.20)$$

Considerando uma função utilidade quadrática, $U(\cdot) = C_t - \frac{a}{2}C_t^2$ para $a > 0$, a utilidade marginal será linear, $U'(\cdot) = 1 - aC_t$, assim,

$$\begin{aligned}
1 - aC_1 &= \mathbb{E}_1[1 - aC_2]\\
1 - aC_1 &= 1 - a\mathbb{E}_1[C_2]\\
C_1 &= \mathbb{E}_1[C_2] \quad (8.21)
\end{aligned}$$

Essa análise mostra que a utilidade quadrática é fonte de equivalente certeza, se a utilidade não fosse quadrática, e a utilidade marginal não fosse linear, não haveria essa proporção de equivalente certeza.

8.2.2 Aplicações Empíricas

Hall prediz que quando o PIB declina inesperadamente, o consumo declina apenas pela quantidade de queda na renda permanente. Hipóteses testadas:

1. Excesso de sensibilidade do consumo pela mudança esperada na renda;

2. Excesso de suavização do consumo (o consumo responde menos que a renda permanente). Mudança inesperada na renda;

3. As duas anteriores ocorrem (híbrido);

4. Random Walk. Consumo segue RW, portanto, nenhuma informação em t-1 pode ser usada para revisão das variações de consumo entre t-1 e t. ΔC é imprevisível.

Testes

$$\Delta C = a + bX_i$$

Se $\hat{b} = 0$, Hall está certo, e o processo é RW. X_i pode ser tanto o consumo quando a renda defasados. Hall não conseguiu rejeitar a hipótese de que as variáveis defasadas não podem prever mudanças no consumo.

Outro teste foi feito por Campbell e Mankiw (1989). Eles consideram a alternativa de que uma fração de consumidores (λ) gasta de acordo com a renda corrente, e o restante age de acordo com a teoria de Hall. Ou seja, existiriam dois grupos, para o primeiro, $\Delta C = \Delta Y$, e para o segundo, $\Delta C = \mathbb{E}_1(\Delta Y^P)$. As mudanças no consumo agregado seriam determinadas por:

$$\begin{aligned} C_t - C_{t-1} &= \lambda(Y_t - Y_{t-1}) + (1-\lambda)e_t \\ &= \lambda Z_t + v_t, \end{aligned} \tag{8.22}$$

tal que Z_t e v_t são correlacionadas, havendo endogenia, de tal forma que o estimador de OLS teria viés.

A saída é usar variáveis instrumentais que quebre a endogenia. Para $Z_t = f(instrumentos) \to \hat{Z}_t$ teríamos $C_t - C_{t-1} = \lambda \hat{Z}_t + \lambda(Z_t - \hat{Z}_t) + v_t$. O problema é encontra instrumentos adequados, que não sejam correlacionados com o erro. Os autores utilizam alterações defasadas na renda e no consumo.

- Com 3 lags no consumo, eles encontram $\lambda = 0,42$;

- Com 5 lags no consumo, eles encontram $\lambda = 0,52$.

Assim, eles rejeito a hipótese nula dos valores passados não terem efeito (RW). Todavia, os valores de λ estimados são menores que 1, sugerindo que a hipótese de renda permanente é importante para entender o consumo. Por outro lado, valores defasados do produto parecem confirmar a existência de um processo RW.

8.3 Juros e Consumo

Expandindo a análise para uma taxa de juros diferente de zero, porém constante ($r = cte$). Para esse caso, a restrição orçamentária dos indivíduos passa a ser em valor presente:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} C_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} Y_t, \tag{8.23}$$

onde o valor presente do consumo é menor ou igual a renda inicial mais o valor presente da renda, descontados para o período zero.

Também iremos considerar uma taxa de desconto diferente de zero ($/rho \neq 0$). Assumindo que os indivíduos tem uma função utilidade do tipo CRRA[2], $u(C_t) = C_t^{1-\theta}/(1-\theta)$, para θ representando o coeficiente de aversão ao risco (o inverso da elasticidade de substituição intertemporal). A função utilidade será:

$$U = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+\rho)^t} \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}. \tag{8.24}$$

Para chegar a equação de Euler, temos que a utilidade marginal do consumo nos períodos t e t+1 são:

$$U'(C_t) = \frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} \qquad U'(C_{t+1}) = \frac{C_{t+1}^{-\theta}}{(1+\rho)^{t+1}}.$$

Uma queda no consumo em t é acompanhada por um aumento no consumo no próximo período $1 + r$ vezes o tamanho da queda no consumo. Para a otimização, a taxa marginal desse tipo de mudança não pode ter efeito na utilidade do período de vida. Assim, a Equação de Euler é:

$$\frac{C_t^{-\theta}}{(1+\rho)^t} = (1+r)\frac{C_{t+1}^{-\theta}}{(1+\rho)^{t+1}} \tag{8.25}$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{1/\theta}. \tag{8.26}$$

O comportamento do consumo, dado uma variação nos juros, depende da relação entre r e ρ:

- se $r > \rho$, o consumo aumento ao longo do tempo;
- se $r < \rho$, o consumo cai ao longo do tempo; e

[2]Constant Relative Risk Aversion.

- se $r = \rho$, RW.

Se houver variações na taxa real de juros, também ocorrerão variações nos componentes do crescimento do consumo, mas quanto o consumo responde a mudanças na taxa de juros? Estudos como Campbell e Mankiw (1989) mostram que a variação do consumo é pequena, sugerindo uma baixa elasticidade de substituição intertemporal (isso é, θ alto).

8.4 Juros e Poupança

Nessa seção queremos ver qual o efeito de uma alteração da taxa de juros na poupança em um caso com dois períodos. Por simplificação, o indivíduo não tem riqueza inicial ($A_0 = 0$). Em um espaço (C_1, C_2), a restrição orçamentária vai dos pontos (Y_1, Y_2). A inclinação da restrição orçamentária é $-(1+r)$, ou seja, abrindo mão de 1 unidade consumo em t=1, ele poderá aumentar seu consumo em $1+r$ no segundo período. Quando r aumenta, a restrição orçamentária gira no sentido horário.

Analisando qualitativamente através das curvas de indiferença na Figura 8.2, no gráfico 8.2a o indivíduo está inicialmente no ponto (Y_1, Y_2), com $s_1 = 0$, $C_1 = Y_1$ e $C_2 = Y_2$. Um aumento de r não tem efeito renda (ER), o consumo no primeiro período cai e a poupança aumenta ($\uparrow r, \downarrow C_1, \uparrow s_1, \uparrow C_2$).

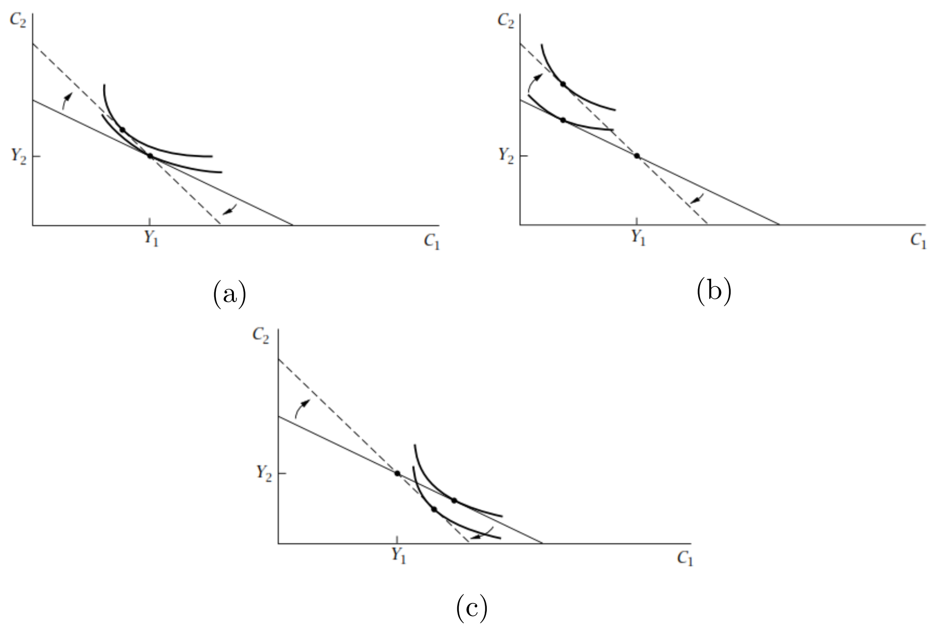


Figura 8.2: Consumo, juros e poupança em dois períodos (Romer, 382)

No gráfico 8.2b, inicialmente $C_1 < Y_1$ e $s > 0$.Nesse caso, um aumento nos juros tem ER positivo ($\uparrow r, ER^+$). O efeito renda força uma diminuição na poupança, enquanto o efeito substituição age para aumentá-la. **O efeito é ambíguo e a poupança não se altera**.

Por fim, em 8.2c, $C_1 > Y_1$, ou seja, o indivíduo está consumindo mais que sua renda, tendo que pegar empréstimo. Nesse caso, um aumento da taxa de juros desestimula que ele continue consumindo tão acima da sua renda, pois os empréstimos ficaram mais caros, assim, efeito renda e efeito substituição reduzem o consumo C_1 e aumentam a poupança s.

De forma geral, o efeito renda de um aumento nos juros é positivo. Assim, um aumento nos juros tem efeito renda positivo, influenciando negativamente a poupança, mas um efeito substituição negativo, influenciando positivamente a poupança.

8.5 Consumo de Ativos Arriscados

Considere o caso de um indivíduo que reduz o consumo no período t para utilizar a poupança resultante na compra de ativos i, que produzem um fluxo de pagamentos incertos. Supondo que o indivíduo fica com o ativo por 1 período, definimos r^i_{t+1} como retorno do ativo i. O comportamento ótimo do indivíduo que está otimizando será:

$$u'(C_t) = \frac{1}{1+\rho}\mathbb{E}_t[(1+r^i_{t+1})u'(C_{t+1})]. \tag{8.27}$$

Definição 8.1 (Covariância) Lembrando algumas propriedades da covariância,

$$\begin{aligned} Cov(x,y) &= \mathbb{E}[(x-\mathbb{E}(x))(y-\mathbb{E}(y))] \\ &= \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) \\ \mathbb{E}(xy) &= Cov(x,y) + \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) \end{aligned} \tag{8.28}$$

Considerando a propriedade 8.28 da covariância, podemos substituir a expectativa do produto em 8.27 tal que

$$u'(C_t) = \frac{1}{1+\rho}\left\{\mathbb{E}_t[1+r^i_{t+1}]\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]\right\} + Cov_t(1+r^i_{t+1}, u'(C_{t+1})) \tag{8.29}$$

para todo i, e considerando $Cov_t(\cdot,\cdot)$ a covariância condicionada a informação em t.

Supondo uma utilidade quadrática, a utilidade marginal do consumo será $u'(C) = 1 - aC$. Substituindo $u'(C_{t+1})$, teremos[3]:

$$u'(C_t) = \frac{1}{1+\rho}\left\{\mathbb{E}_t[1+r^i_{t+1}]\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]\right\} - aCov_t(1+r^i_{t+1}, C_{t+1}). \tag{8.30}$$

Como a variância do ativo não aparece, o indivíduo não considera qual arriscado é o ativo. O risco do ativo não é correlacionado com o risco global que o indivíduo enfrenta. Log, ele olha apenas para o retorno esperado. A relação demonstrada na equação 8.30 diz que a relação de risco observado pelo agente é a de ter mais ativos, escolhendo entre o retorno do ativo e consumo. Implicações:

- Hedge é importante para o portfólio ótimo;
- Viés contra papéis de empresas domésticas. No mundo real, há um viés contrário (home bias).

8.6 Consumo CAPM

Até aqui, o retorno do ativo era dado. Agora, a demanda dos indivíduos por ativos determina o retorno esperado. Resolvendo a equação 8.30 para $\mathbb{E}_t[1+r^i_{t+1}]$:

$$\mathbb{E}_t[1+r^i_{t+1}] = \frac{1}{\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]}[(1+\rho)u'(C_t) + aCov_t(1+r^i_{t+1}, C_{t+1})]. \tag{8.31}$$

Vemos que, se aumenta a covariância do retorno do ativo com o consumo, maior será o retorno esperado do ativo.

Considerando um ativo livre de risco, a covariância será 0, pois o retorno é certo. Assim, a taxa livre de risco ($\bar{r}_{t+1}$) satisfaz

$$1 + \bar{r}_{t+1} = \frac{(1+\rho)u'(C_t)}{\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]}. \tag{8.32}$$

Subtraindo 8.32 de 8.31,

$$\mathbb{E}_t[r^i_{t+1}] - \bar{r}_{t+1} = \frac{aCov_t(1+r^i_{t+1}, C_{t+1})}{\mathbb{E}_t}. \tag{8.33}$$

O coeficiente de uma regressão do retorno de um ativo no crescimento do consumo é conhecido como beta do consumo. O que o CAPM de consumo diz é que os prêmios que os ativos oferecem são proporcionais ao seus betas.

[3] Não sei porque só na covariância. Não poderia substituir também na expectativa?

8.6.1 Aplicação Empírica: Equity-Premium Puzzle

$$\mathbb{E}(r^i) - \bar{r} = \theta Cov(r^i, g^c) \tag{8.34}$$

Para θ representando o coeficiente de risco e g^c a taxa de crescimento do consumo.

Paradoxo: θ teria que ser =25, dadas observações. Muito elevado, então parece que essa relação não vigora.

Capítulo 9

Investimento

Bibliografia: Romer (cap. 9, 2012; cap. 8, 1996).

9.1 Investimento e Custo de Capital

Suposições

- Firmas podem alugar capital a preços r_t
- O lucro da firma é dado por $\pi(K, X_1, ..., X_n) - r_K K$, tal que L é a quantidade de capital que a firma aluga e X é o preço dos produtos das firmas, custos de outros insumos.
- Assumimos que $\pi_L > 0$ e $\pi_{KK} < 0$.

Notação 9.1 As derivadas parciais de primeira e segunda poderem podem ser representadas como

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = X_Y$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 Y} = X_{YY}$$

O problema da firma competitiva é

$$\max_{k^*} \pi(K, X_1, ..., X_n) - r_K K, \tag{9.1}$$

e a condição de primeira ordem (CPO)[1]:

$$\pi_K(K, X_1, ..., X_n) = r_K K. \tag{9.2}$$

[1]Lembre que $\pi_K = \frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial K}$.

A partir desse resultado, podemos entender qual o impacto de uma mudança de r_k em K^*. Diferenciando 9.2 em relação a r_k e isolando $\partial K(\cdot)/\partial r_K$, teremos:

$$\pi_{KK}(K, X_1, ..., X_n)\frac{\partial K(r_K, X_1, ..., X_n)}{\partial r_K} = 1 \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial K(r_K, X_1, ..., X_n)}{\partial r_K} = \frac{1}{\pi_{KK}(K, X_1, ..., X_n)} < 1. \tag{9.4}$$

Como π_{KK} é negativo, K é decrescente em r_K.

9.1.1 Custo de utilização de K

Considerando $p_K(t)$ o preço de mercado do capital em t, a firma deve escolher entre vender K ou continuar usando K. Componentes do custo de manter K:

1. Renúncia de juros, com um custo $r(t)p_K(t)$ para a firma.
2. Depreciação do capital, custando $\delta p_K(t)$ por unidade de tempo a firma.
3. Dudanças no p_k, com um custo equivalente a variação do preço $-\dot{p}_k(t)$, pois se o preço cai, aumenta o custo de capital.

Juntando os três, temos o custo de capital:

$$r_K(t) = r(t)p_K(t) + \delta p_K(t) - \dot{p}_K(t) \tag{9.5}$$

$$= p_K(t)\left[r(t) + \delta - \frac{\dot{p}_K(t)}{p_K(t)}\right]. \tag{9.6}$$

Essa análise ainda não considera os impostos. Vamos incorporar imposto sobre o crédito de investimento, significando que o preço efetivo de uma unidade de capital da firma é $(1 - f\tau)p_K(t)$, onde τ é a taxa marginal de imposto de renda e f o crédito fiscal, o custo de capital será então:

$$r_K(t) = p_K(t)\left[r(t) + \delta - \frac{\dot{p}_K(t)}{p_K(t)}\right](1 - f\tau). \tag{9.7}$$

O impacto é uma redução no custo de manter K igual, reduz o custo de capital, aumentando o desejo da firma por manter estoque de capital.

Críticas:

- Esse modelo pode gerar uma taxa de investimento sem limites.
- Não há expectativa, pois o comportamento futuro da RMgK e r_K não são observados.

9.2 Teoria q-investimento

Modelo de investimento com custo de ajustamento.

Notação 9.2 O capital da firma será representado por $\kappa(t)$, e o capital da indústria por $K(t)$.

Suposições:

- N-firmas idênticas na indústria;
- Lucro é proporcional ao $\kappa(t)$ da firma e é decrescente no K(t);
- Função de produção neoclássica, economia competitiva, RCE, oferta perfeitamente elásticas nos outros insumos.

Além disso, o lucro real da firma no tempo t:

$$\pi(K(t))\kappa(t),$$

tal que $\pi'(\cdot) < 0$, para isso, a curva de demanda por produtos da indústria é negativamente inclinada.

As firmas tem custo de ajustamento do estoque de capital. Esse custo em relação a taxa de mudança do estoque de capital da firma $C(\dot{\kappa})$ satisfaz $C(0) = 0$, $C'(0) = 0$, $C''(\cdot) > 0$, ou seja, o custo de ajustamento é uma função convexa da taxa de mudança do estoque de capital da firma $\dot{\kappa}$. O custo de ajustamento é crescente no tamanho do ajuste. Não há taxa de ajuste externo e, por simplificação, $\delta = 0$. O investimento da firma é igual a taxa de mudança no estoque de capital da firma ($I(t) = \dot{\kappa}$).

Resolvendo o problema na versão discreta

Na versão discreta do problema da firma, ela escolhe o nível de investimento e estoque de capital em cada período observando a restrição em relação ao estoque de capital. Temos então o seguinte problema:

$$\max_{I^*} \tilde{\Pi} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t)\kappa_t - I_t - C(I_t)] \tag{9.8}$$

$$s.a. \quad \kappa_t = \kappa_{t-1} + I_t \tag{9.9}$$

Montando o Lagrangeano, é importante perceber que, como tempos infinitos períodos, teremos infinitas restrições, logo,

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t)\kappa_t - I_t - C(I_t)] + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t[\kappa_{t-1} + I_t - \kappa_t]$$

Definindo $q_t = (1+r)^t \lambda_t$, para q_t representando o valor de uma unidade adicional de capital para a firma. Reorganizando, podemos substituir $\lambda_t = \frac{q_t}{(1+r)^t}$ no Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t)\kappa_t - I_t - C(I_t) + q_t(\kappa_{t-1} + I_t - \kappa_t)].$$

As condições de primeira ordem serão:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} : \frac{1}{(1+r)^t}[-1 - C'(I_t) + q_t] = 0 \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \kappa_t} : \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t) - q_t] + \frac{1}{(1+t)^{t+1}} q_{t+1} = 0 \tag{9.11}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{(1+r)^T} q_T \kappa_T = 0. \tag{9.12}$$

É importante perceber que 9.11 considera que o problema para o período t, envolve tanto κ_t quanto κ_{t-1}, por isso que o estoque de capital κ_t aparecem em termos dos períodos t e t+1. Além disso, destaca-se que 9.12 é a condição de transversalidade.

Em 9.10, multiplicando por $(1+r)^t$ e reorganizando, temos:

$$q_t = 1 + C'(I_t), \tag{9.13}$$

tal que o custo de adquirir uma unidade de capital é igual ao preço de compra (fixado em 1) mais o custo de ajustamento marginal. A firma investe até que o custo de adquirir capital seja igual ao valor do capital.

Na condição 9.11, multiplicamos por $(1+r)^{t+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{(1+r)^{t+1}}{(1+r)^t}[\pi(K_t - q_t)] + q_{t+1} &= 0 \\
(1+r)[\pi(K_t) - q_t] + q_{t+1} &= 0 \\
(1+r)\pi(K_t) &= (1+r)q_t - q_{t+1} \\
&= rq_t + q_t - q_{t+1}.
\end{aligned}$$

Considerando $\Delta q_t = q_{t+1} - q_t$, temos que $q_t - q_{t+1} = -\Delta q_t$. Substituindo Δq_t e reorganizando, teremos:

$$\pi(K_t) = \frac{rq_t - \Delta q_t}{(1+r)}, \tag{9.14}$$

onde o lado esquerdo representa o capital na indústria, e o lado direito o custo de oportunidade de uma unidade de capital. Assim, as equações 9.14, 9.13 e 9.12 caracterizam o comportamento da firma em tempo discreto.

Resolvendo o problema na versão contínua

O problema da firma em tempo contínuo é:

$$\begin{aligned} \max_{I^*} \Pi &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt}[\pi(K_t)\kappa_t - I_t - C(I_t)]dt && (9.15) \\ s.a. \quad \dot{\kappa} &= I_t. && (9.16) \end{aligned}$$

Montando o Hamiltoniano a valores correntes,

$$\mathcal{H} = [\pi(K_t)\kappa_t - I_t - C(I_t)] + q_t(I_t). \tag{9.17}$$

As condições de primeira ordem $\mathcal{H}_I = 0$, $-\mathcal{H}_\kappa = \dot{q}_t - rq_t$ e a condição de transversalidade serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_t} \quad &: \quad -1 - 1C'(I_t) + q_t = 0 \\ & \qquad q_t = 1 + C'(I_t) && (9.18) \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \kappa_t} = \dot{q} - rq \quad &: \quad -\pi(K_t) = \dot{q}_t - rq_t \\ & \qquad \pi(K_t) = rq_t - \dot{q}_t && (9.19) \\ & \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-rt} q_t \kappa_t = 0. && (9.20) \end{aligned}$$

De tal forma que 9.18, 9.19 e 9.20 caracterizam o comportamento da firma em tempo contínuo.

Por fim, é útil notar que podemos expressar q, o valor do capital, em termos do retorno marginal futuro do capital. Reorganizando a equação 9.19, temos uma EDO de primeira ordem. Resolvendo essa equação diferencial, teremos:

$$q_t = \int_{\tau=t}^{T} e^{-r(\tau-t)}\pi(K_\tau)d\tau + e^{-r(T-t)}q_T, \tag{9.21}$$

para $T > t$. Aplicando a equação de transversalidade no segundo termo, teremos que quanto T se aproxima do infinito,

$$q_t = \int_{\tau=t}^{\infty} e^{-r(\tau-t)}\pi(K_\tau)d\tau. \tag{9.22}$$

Esse resultado mostra que o valor de uma unidade de capital é igual ao valor descontado da receita marginal futura.

9.3 Q de Tobin

Uma implicação da teoria de Tobin é que $I = f(q)$, para $q = \frac{V}{K}$, sendo V o valor presente do capital investido e K o custo de reposição do capital. Assim, o q_t em 9.18 pode ser entendido como o q de Tobin. Se $q_t > 1$, a firma pode ter interesse em aumentar K. Se $q_t < 1$, a firma não tem interesse em investir.

O que interessa é o q marginal (taxa de variação). Porém, é muito difícil mensurar o valor para a firma de uma unidade marginal do capital. Hipótese: O K afeta apenas o custo de ajustamento, q marginal ¡ q médio.

9.4 Dinâmica

Para analisar a dinâmica do modelo, vamos observar a evolução conjunta da quantidade agregada de capital (K) e o valor de uma unidade de capital (q).

Locus $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$. Lembrando a condição 9.18, $1 + C'(I) = q$, $I = 0$ quando $q = 1$, pois $C'(I) = 0$, e $C'(0) = 0$. Assim, para a taxa de mudança do estoque de capital agregado ($\dot{K}$) será o número de firmas (N) vezes o valor de I em 9.18. Pelo Teorema da Função inversa, o valor de I será:

$$\begin{aligned} C'(I) &= q - 1 \\ I &= C'^{-1}(q-1). \end{aligned}$$

Assim, $\dot{K}_t = f(q_t)$, para $f(q) \equiv NC'^{-1}(q-1)$, tal que $f(1) = 0$ e $f'(\cdot) > 0$. No SS, quando $\dot{K} = 0$, teremos $q = 1$. Sabemos então que K aumenta quando $q > 1$, e diminui quando $q < 1$ e é constante quando $q = 1$. Na figura 9.1, $q > 1$ e $\dot{K} > 0$ é representado por ($\leftarrow$) acima de $\dot{K} = 0$, e $q < 1$ e $\dot{K} < 0$ é representado por ($\rightarrow$) abaixo de $\dot{K} = 0$.

Locus $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Na equação 9.19, temos $\pi(K_t) = rq_t - \dot{q}_t$. Portanto, quando $\dot{q} = 0$, $\pi(K) = rq$ ou $q = \frac{\pi(K)}{r}$. Como $\pi'(K) < 0$, a curva $\dot{q} = 0$ tem inclinação negativa. Além disso, teremos que a direita de $\dot{q} = 0$ ($\uparrow$) e a esquerda ($\downarrow$), conforme a Figura 9.1.

O único equilíbrio, dado valor inicial de K, é para q igual ao valor que coloca a indústria no caminho de ponto de sela, e para K e q então mover-se pelo caminho ótimo até o ponto de equilíbrio E. Este é o equilíbrio de longo prazo.

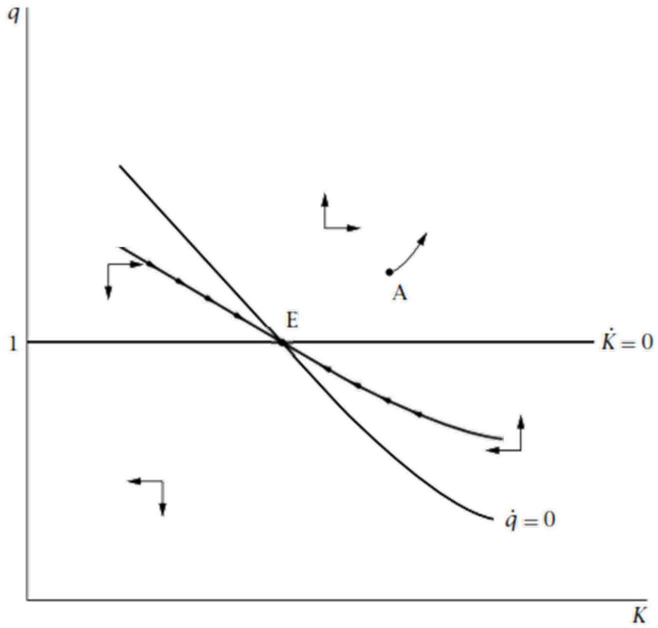


Figura 9.1: Diagrama de Fases (Romer, 9.1)

9.5 Implicações

Nessa seção veremos as implicações de mudanças permanentes e temporárias no PIB, nos juros e nos impostos.

9.5.1 Mudança no PIB

Uma aumento permanente no PIB, aumenta a demanda por investimento e aumenta o lucro $(\Delta^+\pi(\cdot))$. Um aumento de $\pi(\cdot)$ desloca o locus $\dot{q}=0$ para cima, com isso, q salta para um novo caminho de sela, que leva ao equilíbrio E', representado na Figura 9.2a.

No caso de um aumento temporário do produto, haveria um aumento do investimento, no entanto, q aumenta menos que no caso de um aumento permanente, chegando ao ponto A sem alcançar um novo caminho de sela. Com isso, a dinâmica leva de volta ao equilíbrio original, E, conforme a figura 9.2b.

9.5.2 Mudança nos juros

Lembrando que a equação de movimento para q é $\dot{q}=rq-\pi(K)$, uma alteração na taxa de juros implica numa mudança na inclinação de $\dot{q}$. Uma queda permanente nas taxas de juros, irá jogar oo locus $\dot{q}=0$ para cima, e, como r multiplica q, o queda nos juros também faz o locus ficar mais inclinado. Ver Figura 9.3. Quanto ao efeito de um choque temporário, a interpretação será semelhante ao caso de mudança no PIB.

9.5.3 Mudança nos impostos

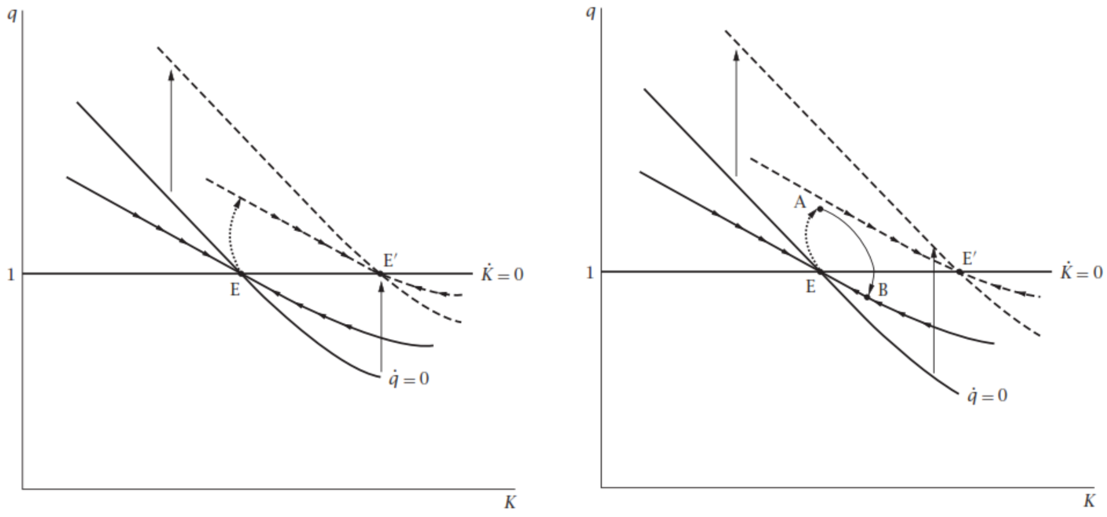
Uma diminuição nos impostos pode ser compreendida como crédito fiscal para investimentos, normalmente proposto para estimular a demanda agregada em períodos de recessão. Suponto um reembolso direto para a firma (θ_t), a Equação 9.18 será $q_t + \theta_t = 1 + C'(I_t)$.

Nesse caso, $\dot{q}_t = 0$ não muda, mas o locus $\dot{K} = 0$ é deslocado para baixo por θ. Se o crédito por permanente, q pula para um novo caminho de ótimo, deslocando-se para um novo ponto de equilíbrio (E') com K maior e q menor que no ponto original. Veja Figura 9.4.

Caso fosse um crédito temporário, q iria cair menos, tal que a dinâmica o colocaria novamente no caminho ótimo do ponto de equilíbrio original E. Como o crédito é temporário, não leva a um aumento permanente no estoque de capital, causando uma redução menor no valor do capital existente.

9.6 O efeito da incerteza

Ver Romer (2012, seção 9.6).



(a) (b)

Figura 9.2: Efeito de mudanças no produto

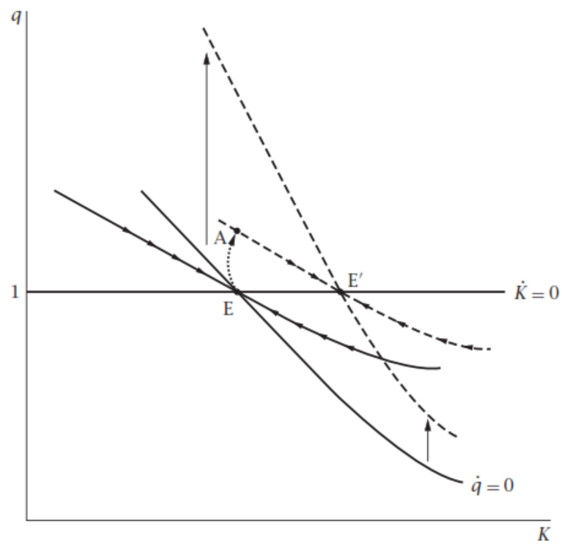


Figura 9.3: Efeito de uma queda nos juros

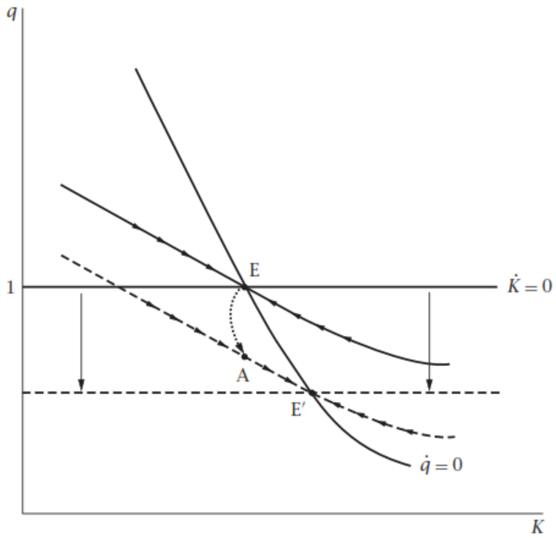


Figura 9.4: Efeito de crédito fiscal permanente ao investimento

Capítulo 10

Desemprego

10.1 Modelo Salário-Eficiente

Romer (2012)

10.2 Job Search

Bibliografia: Fitzgerald (An Introduction to the Search Theory of Unemployment).

Indivíduos podem não aceitar o emprego porque acreditam ter uma proposta melhor no futuro, ou seja, encontrar um bom emprego é um processo incerto que requer tempo e recursos financeiros.

O problema do trabalhador é maximizar o valor presente esperado do seu salário-renda para o resto da vida:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t\right]. \tag{10.1}$$

Sendo y_t a renda do trabalhador e w o salário, $y_t = w$ caso o indivíduo esteja empregado e $y_t = w^u$ se ele estiver desempregado, recebendo seguro desemprego (w^u). A escolha do trabalhador é aceitar ou rejeitar a oferta de trabalho, conforme o salário w.

Notação 10.1 Vamos definir a notação para o valor do indivíduo rejeitar, aceitar ou retirar uma oferta de trabalho como:

- $v^{esp}(w)$: valor de rejeitar a oferta w,
- $v^{ac}(w)$: valor de aceitar w, e
- $v^{of}(w)$: valor de retirar uma oferta no período (semana) seguinte.

Ainda, o modelo supões que as ofertas de w são independentes, ou seja, uma oferta baixa essa semana não significa que a próxima oferta será baixa ou alta. Cada uma das três funções definidas acima assumem que o indivíduo irá se comportar de forma ótima, tomando a melhor decisão para maximizar sua renda dada por 10.1.

O valor de rejeitar uma oferta e esperar por uma oferta melhor será:

$$v^{esp}(w) = w^u + \beta\mathbb{E}[v^{of}(w)]. \tag{10.2}$$

O valor de aceitar uma oferta é:

$$v^{ac}(w) = w + \beta\alpha\mathbb{E}[v^{of}(w)] + \beta(1-\alpha)v^{ac}(w), \tag{10.3}$$

tal que α é a probabilidade de ser demitido no próximo período (semana), logo, $(1-\alpha)$ é a probabilidade de continuar empregado. Reorganizando 10.3, teremos:

$$v^{ac}(w) = \frac{w + \beta\alpha\mathbb{E}[v^{of}(w)]}{1-\beta(1-\alpha)}, \tag{10.4}$$

que cresce linearmente com w.

Por último, $v^{of}(w)$ representa que uma oferta será aceita apenas quando for melhor que esperar, sendo:

$$v^{of}(w) = \max\{v^{ac}(w), v^{esp}(w)\}. \tag{10.5}$$

Logo, a solução do problema é caracterizada pelas funções de $v^{of}(w)$ e $v^{ac}(w)$, e uma $v^{esp}(w)$ constante (Eqs. 10.5, 10.4, 10.2).

Na Figura 10.1 estão as funções de valor em relação ao salário. A decisão de aceitar ou rejeitar uma oferta depende de $v^{esp}(w) \lesseqgtr v^{ac}(w)$. Definindo w^r como o salário de reserva, se $w < w^r$, é preferível esperar uma nova oferta ($v^{esp}(w) \succ v^{ac}(w)$), e se $w > w^r$, é preferível aceitar a esperar uma nova oferta ($v^{esp}(w) \prec v^{ac}(w)$). Como podemos ver, w^r satisfaz as três equações e representa o menor salário que o trabalhador desempregado aceitaria.

Para descobrir o valor do salário de reserva w^r, utilizamos o fato de $v^{ac}(w^r) = v^{esp}(w)$. Portanto, em $w = w^r$, podemos igualar 10.2 e 10.4:

$$w^u + \beta\mathbb{E}[v^{of}(w^r)] = \frac{w^r + \beta\alpha\mathbb{E}[v^{of}(w^r)]}{1-\beta(1-\alpha)}. \tag{10.6}$$

Resolvendo 10.6, reescrevendo para ter w^r a esquerda e apenas um $\mathbb{E}[v^{of}(w')]$ a

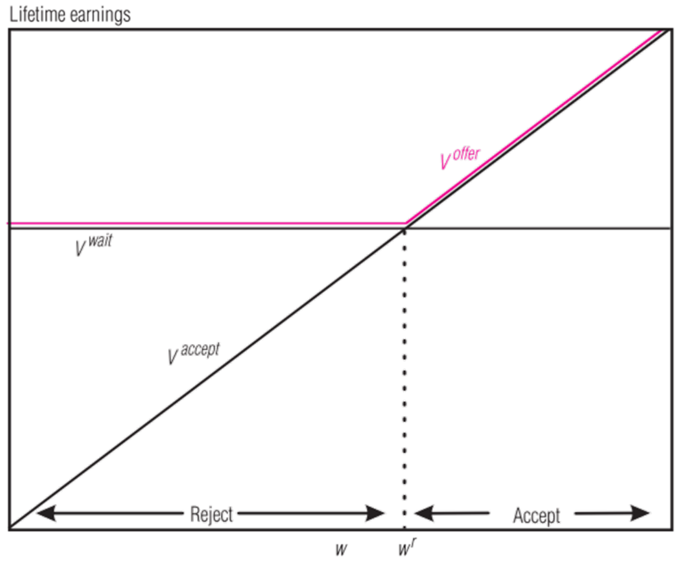


Figura 10.1: Ganho esperado

direita, teremos:

$$\begin{aligned} w^r &= [1-\beta(1-\alpha)][w^u + \beta\mathbb{E}v^{of}(w')] - \beta\alpha\mathbb{E}[v^{of}(w')] \\ w^r &= [1-\beta(1-\alpha)]w^u + \beta\mathbb{E}[v^{of}(w')][1-\beta(1-\alpha)-\alpha] \\ w^r &= [1-\beta(1-\alpha)]w^u + \beta(1-\beta)(1-\alpha)\mathbb{E}[v^{of}(w')]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Precisamos encontrar uma forma funcional para $\mathbb{E}[v^{of}(w^r)]$. Para isso, consideramos que o salários tem uma distribuição uniforme entre $\underline{w}$ e $\bar{w}$, ou $w \in U(\underline{w}, \bar{w})$. Isso faz com que todos salários entre $\underline{w}$ e $\bar{w}$ são igualmente prováveis de ocorrer.

Para $F(w)$ representando a função de distribuição cumulativa (CDF)[1], $F(\hat{w}) = \mathbb{P}(w \leq \hat{w})$. A definição de $\mathbb{E}[v^{of}(w)]$ é

$$\mathbb{E}[v^{of}(w')] = \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} v^{of}(w')dF(w'). \quad (10.8)$$

Definição 10.1 Lembrando que a função densidade de probabilidade de uma uniforme é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } x \in (a,b) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a probabilidade de x ficar entre a e b será $\mathbb{P}(x \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{b-a}dv$. ■

[1] *Cumulative Distribution Function.*

Considerando 10.8, a função densidade dessa uniforme será

$$F(w') = \frac{1}{\bar{w} - \underline{w}}. \tag{10.9}$$

Então, teremos

$$\mathbb{E}[v^{of}(w')] = \frac{1}{\bar{w} - \underline{w}} \int_{\underline{w}}^{\bar{w}} v^{of}(w')dw'. \tag{10.10}$$

Perceba que $\int_{\underline{w}}^{\bar{w}} v^{of}(w')dw'$ é a área abaixa da curva $v^{of}(w')$, portanto:

$$\int_{\underline{w}}^{\bar{w}} v^{of}(w')dw' = v^{esp}(\bar{w} - \underline{w}) + \frac{1}{2}(\bar{w} - w^r)s(\bar{w} - w^r), \tag{10.11}$$

tal que $s = \frac{1}{1-\beta(1-\alpha)}$ é a inclinação[2] da curva $v^{ac}(w)$. O primeiro termo de 10.11 é a largura $(\bar{w} - \underline{w})$ vezes a altura $v^{esp}(w)$. O segundo termo é o triângulo com largura $(\bar{w} - w^r)$ e altura $s(\bar{w} - w^r)$. Todavia, a expressão 10.11 continuam em termos de $\mathbb{E}[v^{of}(w)]$, pois

$$v^{esp}(w) = w^u + \beta\mathbb{E}[v^{of}(w)].$$

Substituindo 10.11 em 10.10, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v^{of}(w')] &= \frac{1}{\bar{w} - \underline{w}} \left\{ [w^u + \beta\mathbb{E}(v^{of})](\bar{w} - \underline{w}) + \frac{s(\bar{w} - w^r)^2}{2} \right\} && (10.12)\\
&= w^u + \beta\mathbb{E}[v^{of}(w')] + \frac{s(\bar{w} - w^r)^2}{2(\bar{w} - \underline{w})}. && (10.13)
\end{aligned}$$

Isolando $\mathbb{E}[v^{of}(w')]$, tirando do lado direito da equação, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v^{of}(w')](1 - \beta) &= w^u + \frac{s(\bar{w} - \underline{w})^2}{2(\bar{w} - \underline{w})}\\
\mathbb{E}[v^{of}(w')] &= \frac{1}{1 - \beta}\left[w^u + \frac{s(\bar{w} - \underline{w})^2}{2(\bar{w} - \underline{w})}\right]. && (10.14)
\end{aligned}$$

Substituindo $\mathbb{E}[v^{of}(w')]$ em w^r:

$$\begin{aligned}
w^r &= w^u[1 - \beta(1 - \alpha)] + \left[\frac{w^u}{1 - \beta} + \left(\frac{1}{1 - \beta}\right)\frac{s(\bar{w} - \underline{w})^2}{2(\bar{w} - \underline{w})}\right]\\
\vdots &= \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
w^r &= w^u + \left[\frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - \beta(1 - \alpha)}\right]\left[\frac{(\bar{w} - w^r)^2}{2(\bar{w} - \underline{w})}\right]. && (10.15)
\end{aligned}$$

Percebe-se que 10.15 é uma equação quadrática de w^r, porém, ainda temos $w^r =$

[2]Veja que $v^{ac}(w) = \frac{1}{1-\beta(1-\alpha)}\{w + \beta\alpha\mathbb{E}[v^{of}(w)]\}$.

$f(w^r)$. Para resolver esse problema, definimos uma nova função:

$$\varphi(w^r) \equiv \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{1-\beta(1-\alpha)}\right]\left[\frac{(\bar{w}-w^r)^2}{2(\bar{w}-\underline{w})}\right]. \tag{10.16}$$

Dessa forma,

$$w^r = w^u + \varphi(w^r). \tag{10.17}$$

Podemos entender $\varphi(w^r)$ como o beneficio esperado de uma nova oferta de w quando $w = w^r$. Se $w^r = \bar{w}$, $\varphi(w^r) = 0$, pois não espera-se ter benefício maior, uma vez que $\bar{w}$ é o maior salário.

A Figura 10.2 representa a relação entre as curvas de aceitar e rejeitar uma nova proposta, determinando o salário de reserva. A curva de aceitar é representada por w, tendo inclinação de 45^o. Já a curva de "rejeitar" é representada pelo lado esquerdo $w^u + \varphi(w)$ e, como $\varphi(w)' < 0$, "rejeitar" tem inclinação negativa.

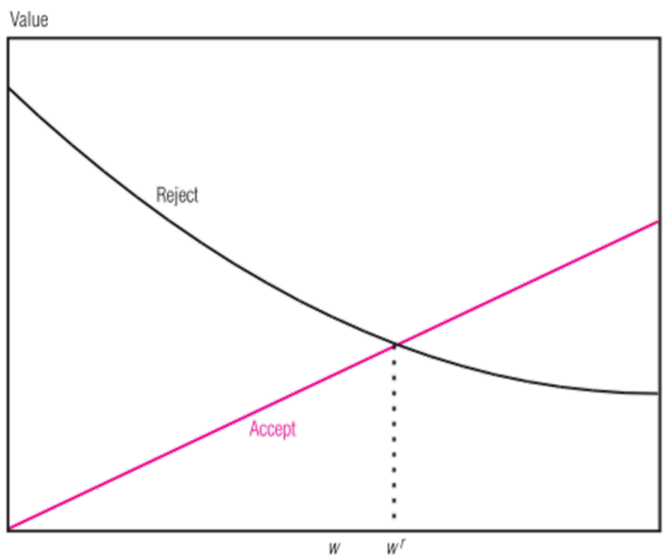


Figura 10.2: Determinação do salário de reserva

Quanto mais exigente for o indivíduo, menores são as chances de obter uma oferta tentadora, então, menor o valor de esperar. No ponto em que as duas curvas se cruzam, w^r, o benefício de aceitar é igual ao benefício de rejeitar. **Conclusão**: a cada semana, trabalhadores preferem continuar a pesquisar por trabalho (continuar desempregado) a aceitar propostas menores que o salário de reserva. Se $w^r = \underline{w}$ a taxa de desemprego é nula.

10.2.1 Duração e taxa de desemprego

Esse modelo não leva em consideração as firmas, considerando que a distribuição dos salários é determinada de forma ad hoc. Para determinar a duração do desemprego e a taxa de desemprego, necessita-se fazer novas suposições:

1. Muitos trabalhadores idênticos que obtêm ofertas de trabalho independentes.

2. Demissões eventuais correm no final da semana.

3. No começo de cada semana os desempregados recebem oferta de emprego e decidem se aceitam ou rejeitam. Se w^r for alto, a probabilidade de aceitar será baixa.

Definindo a **taxa de aceitação de uma oferta** (ou taxa de risco) como a fração das ofertas maiores ou iguais a w^r, considerando a distribuição uniforme, teremos:

$$\Psi = \frac{\bar{w} - w^r}{\bar{w} - \underline{w}}, \tag{10.18}$$

sendo Ψ a taxa de aceitação de uma oferta. O **tempo médio de espera** será $1/\Psi$. Se $w^r = \bar{w}$, então $\Psi = 0$ e $\lim\limits_{\Psi \to 0} \frac{1}{\Psi} = \infty$. Se $w^r = \underline{w}$, o tempo de espera será igual a 1, logo, qualquer emprego novo será aceito na semana seguinte. A **duração média de desemprego** será $\left[\frac{1}{\Psi} - 1\right]$. Assim, se $w^r = \bar{w}$, a duração média será 0. Se $w^r = 0,10$, o tempo médio de desemprego será 9 semanas.

O caminho da taxa de desemprego no tempo pode ser computado para qulquer taxa de desemprego inicial u_1. Considerando u_t a fração de trabalhadores desempregado durante a semana t (taxa de desemprego) e L a população total, $L \times u_t$ será o desemprego total, e $L - desemprego$ será o emprego total[3].

Dado u_t, podemos encontrar u_{t+1}:

$$Lu_{t+1} = Lu_t(1-\Psi) + \left[L(1-u_t)\alpha(1-\Psi)\right], \tag{10.19}$$

onde $Lu_t(1-\Psi)$ representa o número de desempregados que não aceitaram a proposta de trabalho. Dividindo por L,

$$u_{t+1} = u_t(1-\Psi) + \left[(1-u_t)\alpha(1-\Psi)\right], \tag{10.20}$$

será a lei de movimento da taxa de desemprego.

[3] O emprego total será $L(1-u_t)$.

A partir de 10.20, podemos observar o caminho da taxa de desemprego no tempo. A taxa de desemprego para qual esse caminho converge pode ser calculada considerando $u_{t+1} = u_t = u_s$ na Eq. 10.20, sendo u_s a taxa de desemprego de steady-state:

$$u_s = \frac{\alpha(1-\Psi)}{\alpha(1-\Psi)+\Psi} \tag{10.21}$$

Propriedades do u_s:

- $u_s = f(\alpha, \Psi)$, sendo α exógeno e Ψ endógeno.
- Desemprego não é um fenômeno de desequilíbrio, pois ocorre mesmo quando todos indivíduos agem de maneira ótima. Há equilíbrio com desemprego ($u_s > 0$)
- Desemprego depende de matches ótimos entre desempregados e boas ofertas de emprego. O desemprego é involuntário no sentido do trabalhador rejeitar a proposta.

10.2.2 Exemplo Numérico