Função de lucros

convexidade (convexidade na teoria da produção) — retornos constantes / crescentes } o problema (descontinuidade em $\pi(\cdot)$)

concorrência perfeita

"abandonando a convexidade do conjunto de possibilidade de produção é incompatível com a hipótese de competição perfeita entre as firmas"

Propriedades — Lema de Hotteling — prova

restrita e não restrita

$$\pi(p,w) = \max \; p \cdot y - w x$$
$$\text{s.a.} \quad f(x) = y$$

$$\pi(p,w) = p \cdot f(x) - w \cdot x(p,w)$$

Propriedades:

- → não decrescente em $\vec{p}$
- → não crescente em $\vec{w}$
- → Homogênea de grau 1 em $\vec{p}$ e $\vec{w}$
- → Convexa em $\vec{p}$ e $\vec{w}$ (prova)
- → contínua em p e w $\forall$ $p \gg 0$ e $w \gg 0$
- → Lema de Hotteling (prova)

$$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p_i} = y_i(p,w) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w_i} = -x_i(p,w)$$

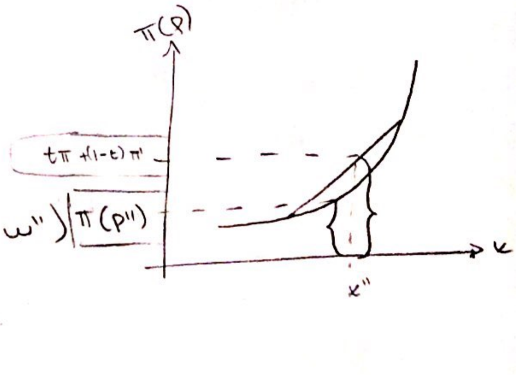
<u>Convexidade</u>

Para y e x que max lucros p/ p e w, y' e x' maximizam para p' e w'. Definindo $p'' = tp + (1-t)p'$ e $w'' = tw + (1-t)w'$ $\forall \; t \in [0,1]$, e y'' e x'' max. lucros para p'' e w''. Então

$$\pi(p,w) = py - wx \geq py'' - wx''$$
$$\pi(p',w') = p'y' - w'x' \geq p'y'' - w'x''$$

Logo,

$$t\pi(p,w) + (1-t)\pi(p',w') \geq p''y'' - w''x'' = \pi(p'', w'')$$



Lema de Hotteling (prova)

$$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p_i} = y_i(p,w) \qquad \frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w_i} = -x_i(p,w)$$

Dado o problema de maximização de lucros da firma:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \pi = py - wx \\ s.a.\ f(x) = y \end{array}\right] p.f(x) - wx$$

Considerando que $x(p,w)$ satisfaz a condição de primeira ordem, $\partial \pi(p,w)/\partial x = 0$, teremos que

$$p.\frac{df(x(p,w))}{dx} - w = 0$$

E a função de lucros será dada por:

$$\pi(p,w) \equiv pf(x(p,w)) - wx(p,w)$$

Derivando em relação a w:

$$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w_i} = p.\frac{\partial f[x(p,w)]}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial w} - w.\frac{\partial x}{\partial w} - x(p,w)$$

$$= \underbrace{\left[p.\frac{\partial f[x(p,w)]}{\partial x} - w\right]}_{I}\frac{\partial x}{\partial w} - x(p,w)$$

tal que $I = 0$, em virtude da FOC. Logo $\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial w} = -x(p,w)$

Para $\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p_i} = y_i(p,w)$, teremos

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial p_i} = p.\frac{\partial f(x(p,w))}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial p} + f[x(p,w)] - w.\frac{\partial x}{\partial p}$$

$$= \underbrace{\left[p.\frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} - w\right]}_{I}\frac{\partial x}{\partial p} + f[x(p,w)]$$

tal que $I = 0$ e $f[x(p,w)] = y(p,w)$, logo $\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p} = y(p,w)$

Pelo Teorema do Envelope, sabemos que os efeitos indiretos se anulam. Nesse caso, para $\pi(\vec{p}) = \vec{p}.y(\vec{p})$

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial p} = \vec{y}(\vec{p}) + \vec{p}.\frac{\partial y(\cdot)}{\partial p}$$

Logo, $\partial y(\cdot)/\partial p = 0$ e $\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial p} = \vec{y}(\vec{p})$

Scanned by CamScanner

Propriedades da função de oferta de bens $y(p,w)$ e de demanda por fatores $x(p,w)$.

- Homogenea de grau 0 em (p,w)

$$y(tp,tw) = y(p,w),$$
$$x(tp,tw) = x(p,w), \quad \forall\ t>0$$

- A demanda é decrescente e p e oferta crescente em w:

$$\frac{\partial y(p,w)}{\partial p} \geq 0 \qquad \frac{\partial x(p,w)}{\partial w} \leq 0$$

fruto do Lema de Hotteling

$$\frac{\partial y(p,w)}{\partial p} = \frac{\partial^2 \pi(p,w)}{\partial^2 p} \geq 0$$

$$\frac{\partial x(p,w)}{\partial w} = (-1)\frac{\partial^2 \pi(p,w)}{\partial^2 w} \leq 0$$

- Matriz de substituição simétrica e positiva semidefinida:

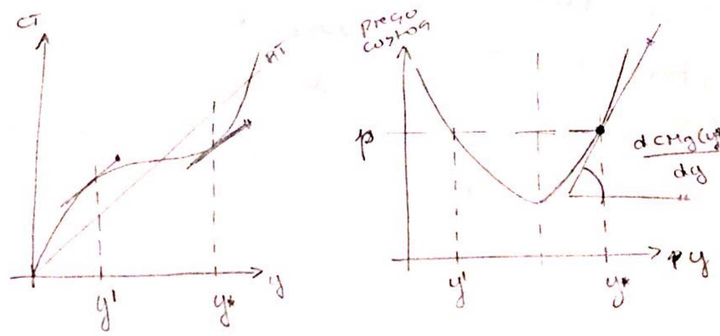
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y(\cdot)}{\partial p} & \frac{\partial y(\cdot)}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial y(\cdot)}{\partial w_n} \\ -\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p} & -\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial x_n(\cdot)}{\partial p} & \cdots & & -\frac{\partial x_n(\cdot)}{\partial w_n} \end{pmatrix} =$$

Hessiano de derivadas parciais de segunda ordem da função de lucros.

simétrica pelo Teorema de Young

Positiva semidefinida pela convexidade da função lucro.

Outra forma de ver o problema da firma é considerando a função de custos, tal que $\pi(p,w) = \max_{y \geq 0} py - c(w,y)$. Para $y^* > 0$ sendo o ótimo, teremos a FOC $p - \frac{\partial c(w,y^*)}{\partial y} = 0$. Assim, a produção ótima se dará quando o preço for igual ao custo marginal. Alem disso, a condição de segunda ordem será $\partial^2 c(w,y^*)/\partial^2 y \geq 0$.



$$\frac{d\,CMg(y^*)}{dy} = \frac{\partial^2 c(w,y^*)}{\partial^2 y} > 0$$

Prova do Lema de Hotteling pelo Teorema do envelope:

Considerando o caso de 1 fator e 1 produto,

$$\pi(p,w) = \max_x \; p.f(x) - wx$$

logo $$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p} = f(x)\Big|_{x=x(p,w)} = f[x(p,w)] = y(p,w)$$

assim como $$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w} = -x\Big|_{x=x(p,w)} = -x(p,w)$$

Função de lucros restrita x sem restição

Na teoria da firma, podemos dizer que uma função com restrição, seja a função de lucros $\pi(\vec{p},\vec{w})$ ou custos $c(w,y)$, representa o curto prazo. No caso da função de lucros, para o caso irrestrito, temos o problema de maximização:

$$\pi(p,w) = \max_{\vec{x}} \; p.y - \vec{w}\vec{x}$$
$$\text{s.a.} \quad y = f(\vec{x}),$$

enquanto na função com restição $\bar{x}$,

$$\pi(p,w,\bar{x}) = \max_x \; p.y - \vec{w}\vec{x} - \bar{w}\bar{x}$$
$$\text{s.a} \quad y = f(\vec{x},\bar{x}).$$

Assim, $\pi(p,\vec{w},\bar{x}) = \underbrace{p.y(p,\vec{w},\bar{x})}_{\text{I}} - \underbrace{\vec{w}.\vec{x}(\vec{w},p,\bar{x})}_{\text{II}} - \underbrace{\bar{x}.\bar{w}}_{\text{III}}$, onde I é a receita total, II o custo variável e III o custo fixo. Intuitivamente, no curto prazo existem fatores que não podem ser alterados, enquanto no longo prazo a firma tem a possibilidade de alocar os fatores da forma mais eficiente, consequentemente, os lucros de curto prazo não são maiores que os lucros de longo prazo. Ou seja

$$\pi_c(p,w,\bar{x}) \leq \pi_L(p,w),$$ dado que II e III forma $c(w,y,\bar{x})$

Scanned by CamScanner

Convexidade na teoria da firma (2008, 2009, 2010)

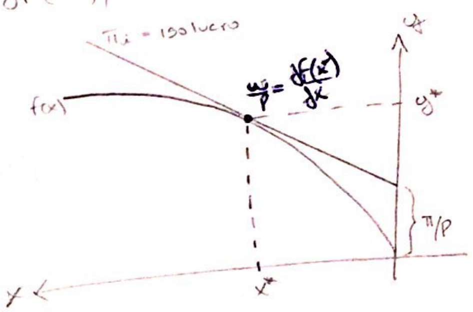
Para a resolução do problema de max lucros, temos que

$$\frac{\partial \Pi(p,w)}{\partial x_i} = 0, \quad p \cdot \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - w_i = 0,$$

$$\underbrace{p \cdot \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = w_i}_{\text{preço do insumo igual ao valor da produtividade marginal}}, \quad \underbrace{\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = \frac{w_i}{p}}_{\text{produto marginal igual ao produto real}}$$

"O conceito de convexidade é fundamental na teoria da firma. A ausência de convexidade pode gerar problemas de indeterminação ou descontinuidade na função de lucro. Para evitar esse problema é necessário abandonar a hipótese de concorrência perfeita" (2008).

Sendo w/p a inclinação do isolucro e $\partial f(x^*)/\partial x_i$ a inclinação da função de produção. Assim, podemos representar graficamente tal relação: para $y = \frac{\Pi}{p} - \frac{wx}{p}$.



Caso ocorra retornos constantes de escala em relação a x, se houver uma escolha ótima para maximização dos lucros elas serão infinitas. Também há a possibilidade de não haver solução, seja por indeterminação ou lucro zero.

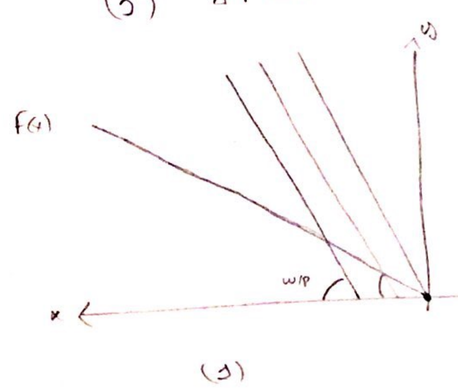
Por exemplo, para $f(x) = x^a$, caso $a = 1$, a condição de primeira ordem será $p = w$, então qualquer valor de x é maximizador de lucros. Graficamente, podemos dividir esses três casos

(1) $\partial f(x)/\partial x < w/p$

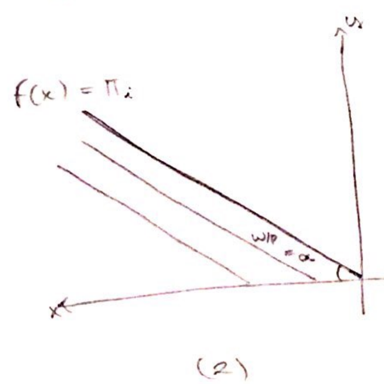
(2) $\partial f(x)/\partial x = w/p$

(3) $\partial f(x)/\partial x > w/p$

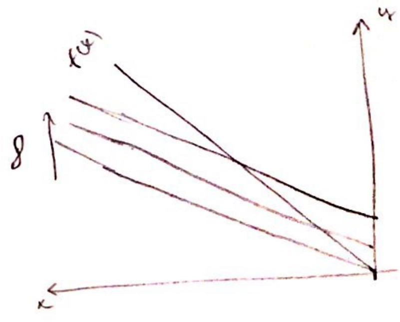
No caso (1), y^* e $x^* = 0$, logo a firma não produz, pois o lucro-máximo possível é 0. No caso (2), qualquer combinação de fatores atende a condição de max. lucro. Por fim, em (3) quanto mais a firma produz, maior o lucro, y^* e $x^* = \infty$.



(1)



(2)



(3)

Para o caso de <u>retornos crescentes de escala</u> teremos um efeito semelhante ao caso (3) dos retornos constantes. Como a função de produção será convexa, a maximização do lucro será irrestrita. Nesses dois casos é necessário abandonar a hipótese de concorrência perfeita, pois a firma pode influenciar os preços pela quantidade produzida, tal como em um modelo de oligopólio, quando, à medida que o x aumenta, o isolucro deixa de ser linear, possibilitando um ponto de tangência.