data / /

S T Q Q S S D

Lucas - Uzawa

Dois setores: Bens finais (Y) e capital humano (H)

[Notação: $k_y \rightarrow$ capital físico no setor Y

$H_y \rightarrow$ capital humano no setor Y

setor Y

$$Y = C + \overset{I_k}{I}$$

Considerando uma fun. de produção Cobb-Douglas,

$$Y = A k_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha}$$

A eq. de movimento do capital:

$$\dot{k} = I_k - \delta k \rightarrow I_k = \dot{k} + \underbrace{\delta k}_{\text{depreciação}}$$

Logo,

$$A k_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} = c + \dot{k} + \delta k$$

$$\dot{k} = A k_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} - c - \delta k \qquad (1)$$

setor H

Para o setor H

$$H = B k_h^{\eta} H_h^{1-\eta}$$

$$\dot{H} = B k_h^{\eta} H_h^{1-\eta} - \delta_h \cdot H_h \qquad (2)$$

Para,

$H = H_y + H_h$ e $u \rightarrow$ Percentual de H usado em Y,

temos que

$$H_y = uH \quad \text{e} \quad H_h = (1-u)H. \qquad (3)$$

substituindo (3) em (1) e (2), e considerando $\eta = 0$, ou seja, produção de H não envolve k, temos

$$\begin{cases} \dot{k} = A k_y^{\alpha} (uH)^{1-\alpha} - C - \delta k & (4) \\ \dot{H} = B(1-u)H - \delta_h \cdot H & (5) \end{cases}$$

Tomando a versão per capita

$$\frac{\dot{k}}{L} = A k_y^{\alpha} (uh)^{1-\alpha} - c - \delta k$$

como $k = \frac{k}{L}$, $\dot{k} = \dot{k}.L + k.\dot{L}$, $\frac{\dot{k}}{L} = \dot{k} + kn$, para $n = \frac{\dot{L}}{L}$,

$\dot{k} + nk = Ak_y^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - \delta k$

$\dot{k} = Ak_y^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (n+\delta_k)k$

$\frac{\dot{H}}{L} = B(1-u)h - \delta_h \cdot h$

como $\frac{H}{L} = h$, $\dot{H} = \dot{h}L + h\dot{L}$, $\frac{\dot{H}}{L} = \dot{h} + nh$, para $n = \frac{\dot{L}}{L}$, então,

$\dot{h} = B(1-u)h - (\delta_h + n)h$

Problema do Agente

$$\max_{c_0} = \int_0^{\infty} U(c_t)\, e^{-\rho t}\, dt$$

s.a. $\dot{k} = Ak_y^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k$

$\dot{h} = B(1-u)h - (\delta_h + n)h$

h_0 e k_0 dados

Para $U(c_t) = \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right)$, temos k e h como variáveis de estado, c e u de controle e λ_h e λ_k de co-estado, considerando o Hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_k\left[Ak_y^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k\right] + \lambda_h\left[B(1-u)h - (\delta_h + n)h\right]$$

CPO

1) $\mathcal{H}_c = 0$ e $\mathcal{H}_u = 0$ $\qquad \rho = p - n$

2) $-\mathcal{H}_k = \dot{\lambda}_k - \rho\lambda_k$ e $-\mathcal{H}_h = \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h$

3) $\lim_{t\to\infty} \lambda_{k,t} k_t = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \lambda_{h,t} h_t = 0$

$\mathcal{H}_c := c_t^{-\theta} - \lambda_{k,t} = 0 \Rightarrow c_t^{-\theta} = \lambda_{k,t}$ (6)

$\mathcal{H}_u := (1-\alpha)\lambda_{k,t} \cdot Ak_y^{\alpha}\underbrace{(uh)^{-\alpha}}_{u^{-\alpha}h^{1-\alpha}} \cdot h - \lambda_h \cdot B \cdot h = 0$

$(1-\alpha)\lambda_{k,t} \cdot Ak_y^{\alpha} u^{-\alpha} h^{1-\alpha} = \lambda_h \cdot B \cdot h$ (7)

data / /

S T Q Q S S D

$$-\mathcal{H}_{k} := -\left[\alpha \cdot \lambda_k \cdot A k_y^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \lambda_k (n+\delta_k)\right] = \dot{\lambda}_k - \rho\lambda_k$$

$$-\lambda_k\left[\alpha A k_y^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - n - \delta_k\right] = \dot{\lambda}_k - \rho\lambda_k \quad (8)$$

$$-\mathcal{H}_h := -\left[\lambda_h\left(B(1-u) - \delta_h - n\right) + (1-\alpha) A k^{\alpha}(uh)^{-\alpha} \cdot u \cdot \lambda_k\right] \quad (9)$$

$$= \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h$$

Em (8),

$$-\left[\alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - n - \delta_k\right] = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} - \rho \quad (10)$$

como em (6) $\lambda_{k,t} = c_t^{-\theta}$, $\dot{\lambda}_{k,t} = -\theta c_t^{-\theta-1} \cdot \dot{c}_t$, subs. em (10)

$$n + \delta_k - \alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} = \underbrace{\frac{-\theta c_t^{-\theta-1} \cdot \dot{c}_t}{c_t^{-\theta}}} - \rho$$

$$\rho + n + \delta_k - \alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} = \frac{-\theta \dot{c}_t}{c_t}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \rho - n - \delta_k\right] \quad (11)$$

$\rho = p - n$

$$\underbrace{\frac{\dot{c}}{c}}_{g_c} = \frac{1}{\theta}\left[\underbrace{\alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha}}_{\text{PMgk em } Y} - \delta_k - p\right] \quad (11a)$$

considerando $\dot{k} = A k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta_k + n)k$, dividindo por k,

$$\frac{\dot{k}}{k} = A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k} - \delta_k + n$$

Definindo $g_c = \frac{\dot{c}}{c}$ e $g_k = \frac{\dot{k}}{k}$, teremos

$$A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta_k = g_k + \frac{c}{k} - n \quad (12)$$

subs. (12) em (11a)

$$g_c = \frac{1}{\theta}\left[g_k + \frac{c}{k} - n - p\right]$$

$$\theta g_c = g_k + \frac{c}{k} + \underbrace{n - p}_{\rho}$$

$$\theta g_c = g_k + \underbrace{\frac{c}{k} + \rho}_{cte}$$

Logo, no SS, $\boxed{g_c^* = g_k^*}$

Para definir g_y^*, consideramos

$Y = Ak^\alpha (uH)^{1-\alpha} \rightarrow y = Ak^\alpha (uh)^{1-\alpha}$,

tomando $\ln$, e considerando $A=1$,

$$\ln(y) = \alpha \ln(k) + (1-\alpha)\ln(h) + (1-\alpha)\ln(u)$$

d/dt

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{h}}{h} + (1-\alpha)\frac{\dot{u}}{u}$$

$$g_y = \alpha g_k + (1-\alpha) g_h + (1-\alpha) g_u \qquad (13)$$

Definindo g_h, partindo de (11.a)

$$\theta g_c + \delta + \rho = \alpha A k^{\alpha-1} u^{1-\alpha} h^{1-\alpha}$$

$$\frac{\theta g_c + \delta + \rho}{\alpha A \underbrace{u^{1-\alpha}}_{cte\ no\ SS}} = k^{\alpha-1} \cdot h^{1-\alpha} \xrightarrow{d/dt} 0 = (\alpha-1)\underbrace{k^{\alpha-2}}_{k^{\alpha-1} \cdot k^{-1}} \cdot \dot{k} \cdot \underbrace{h^{1-\alpha}}_{h^{-1} \cdot h^{1+\alpha}} + (1-\alpha)\underbrace{h^{-\alpha}}_{h^{-1} h^{\alpha}} \dot{h}\, k^{\alpha-1}$$

$$0 = (\alpha-1)\frac{\dot{k}}{k} \cdot k^{\alpha-1} \cdot \frac{h^{\alpha}}{h} + (1-\alpha) h^{\alpha} \cdot \frac{\dot{h}}{h} \cdot k^{\alpha-1}$$

$$\boxed{g_h^* = g_k^*}$$

Em (13), como g_u é cte. no SS,

$$\boxed{g_y^* = g_k^* = g_h^* = g_c^*}$$

Scanned by CamScanner

data / /

Em (9) temos que

$$-\{\lambda_h[B(1-u)-s_h-n]+\lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}(uh)^{-\alpha}u\}=\dot{\lambda}_{ht}-\rho\lambda_{ht},$$

$$\lambda_h[n+s_h-B(1-u)]-\underbrace{\lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}h^{-\alpha}}u^{1-\alpha}=\dot{\lambda}_h-\rho\lambda_h \quad (14)$$

Em (7) temos

$$\lambda_k(1-\alpha)\cdot Ak^{\alpha}(uh)^{-\alpha}\cdot \cancel{h}=\lambda_h\cdot B\cdot \cancel{h}$$

$$\lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}h^{-\alpha}u^{-\alpha}=\lambda_h\cdot B \rightarrow \lambda_k(1-\alpha)Ak^{\alpha}h^{-\alpha}=\lambda_h\cdot B\cdot u^{\alpha} \quad (15)$$

subs (15) em (14),

$$\lambda_h[n+s_h\underbrace{-B(1-u)}_{-B+Bu}-B\cdot\underbrace{u^{\alpha}\cdot u^{1-\alpha}}_{u}]=\dot{\lambda}_h-\rho\lambda_h$$

Dividindo por λ_h,

$$n+s_h-B=\frac{\dot{\lambda}_h}{\lambda_h}-\rho \qquad \rho=p-n$$

$$g_{\lambda h}=s_h-B+\cancel{n}+p-\cancel{n}$$

Para $g_{\lambda h}=g_{\lambda k}$, temos que

$$g^*_{\lambda k}=g^*_y=g^*_k=g^*_c=\frac{1}{\theta}(B-S-n)$$

- Crescimento depende B. A PMgH é pro-growth.
- Acumulação intencional de H é o motor da economia
- g^* dependo do setor H e não do Y (como no Ak)
- Solução é Pareto-Eficiente: $g^{ss}=g^{os}$
- Há transição complexa no modelo