Métodos de Solução em Economia
Perturbação

Filipe Stona

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Novembro de 2019

RBC Básico

Problema do Planejador Central:

$$\max \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{\log c_t + \psi \log(1 - l_t)\}$$
$$c_t + k_{t+1} = k_t^{\alpha}(e^{z_t} l_t)^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t$$
$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Um problema de otimização dinâmica.

Computando um RBC

- O problema anterior não tem uma solução analítica conhecida;
- Precisamos trabalhar com uma aproximação: Método de Perturbação.
- Vamos tomar utilizar uma perturbação de primeira ordem do modelo.
- Outras opções?

Métodos de Solução

- O modelo de Ciclo Reais de Negócios e suas extensões são praticamente lineares com uma calibração padrão.
- Nesses casos, uma aproximação de primeira ou segunda ordem já é suficientemente precisa.
- Inadequado para várias perguntas de interesse da economia.
  - Preferências recursivas;
  - Volatilidade variante no tempo;
  - Restrições ativas ocasionalmente (ZLB e fricções financeiras);
  - Desastres;
  - ...?

Métodos de Solução

1. Linearizarão: nível e logs.
2. Perturbação: nível, logs, diferentes ordens.
3. Projeção: espectral e elementos finitos.
4. Iteração da Função Valor.

Referências

- Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramírez, J., and Schorfheide, F. (2016). Chapter 9 - solution and estimation methods for dsge models. volume 2 of *Handbook of Macroeconomics*, pages 527 – 724. Elsevier
- DeJong, D. N. and Dave, C. (2011). *Structural Macroeconometrics.* Princeton University Press
- Schmitt-Grohé, S. and Uribe, M. (2004). Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(4):755 – 775
- Uhlig, H. (1999). A toolkit for analysing nonlinear dynamic stochastic models easily

Agenda

1. Introdução: o que queremos fazer;
2. O caso genérico;
3. Exemplificando com um Modelo Neoclássico de Crescimento;
4. Exercício Numérico (Dynare e algoritmo de SGU);
5. Próximos passos.

Introdução

- Queremos resolver um problema de equação funcional, isto é, encontrar uma função d tal que

$$\mathcal{H}(d) = \mathbf{0}$$

em que d será uma regra de decisão e o operador $\mathcal{H}$ representa uma função valor, ou um problema de expectativas condicionais, ou um problema de equação de Euler, etc.

Introdução

- O método de perturbação soluciona esse problema determinando uma expansão de Taylor para a função d, com n variáveis de estado do modelo $\mathbf{x}$ e alguns coeficientes θ. Ou seja,

$$d^n(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^i.$$

- Por exemplo, para uma expansão de segunda ordem,

$$d_j^2(\mathbf{x}, \theta) = \theta_{j,0} + \theta_{j,1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\theta_{j,2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)'$$

para j = 1, ..., m, tal que $\theta_{j,0}$ é um escalar, $\theta_{j,1}$ um vetor de n dimensões e $\theta_{j,2}$ uma matriz $n \times n$.

Um exemplo

- Como encontrar $\sqrt{26}$ a mão?
- Note que

$$\sqrt{26} = \sqrt{25 * 1.04} = \sqrt{25}\sqrt{1.04} = 5 * \sqrt{1.04} \approx 5 * 1.02 = 5.1.$$

- Solução exata: 5.09902.
- De forma geral,

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2 * (1 + \epsilon)} = \sqrt{y^2}\sqrt{(1 + \epsilon)} = y * \sqrt{(1 + \epsilon)} \approx y * (1 + \theta).$$

- Precisão depende do tamanho de ϵ.

O caso genérico

- Reescrevendo as condições de equilíbrio do modelo como

$$\mathbb{E}_t \mathcal{H}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0,$$

  tal que $\mathbf{y}$ é um vetor $n_y \times 1$ de variáveis de controle, $\mathbf{x}$ é um vetor $n_x \times 1$ de variáveis de estado, e $n = n_x + x_y$.
- O operador $\mathcal{H}$ empilha todas as condições de equilíbrio, algumas que serão conhecidas e outras que terão um termo de expectativa.
- Definindo um parâmetro auxiliar de perturbação $\sigma \geq 0$, a solução do modelo será dada por um sistema em formato de estado de espaço:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \sigma) && (1) \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \sigma) + \sigma \eta \epsilon', && (2) \end{aligned}$$

  onde ϵ_{t+1} contêm n_ϵ elementos do choque exógenos, tal que $\epsilon_{t+1} \sim iid(0, I)$.
- O parâmetro de perturbação σ escalona a matriz η com dimensão $n_x \times n_\epsilon$.

O caso genérico

- As equações (1) e (2) são conhecidas como equação de obervações e de estados.
- A maioria dos DSGE não tem uma solução fechada e as funções $g(\mathbf{x}, \sigma)$ e $h(\mathbf{x}, \sigma)$ não podem ser encontradas explicitamente.
- Nosso objetivo é encontrar uma expansão de Taylor dessas funções ao redor do *steady state* determinístico, onde $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ e $\sigma = 0$.

Steady State

- Ao suprimir o componente estocástico do modelo, é possível definir o *steady state* determinístico $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ tal que:

$$\mathcal{H}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = 0 \tag{3}$$

- A solução $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ geralmente pode ser encontrada analiticamente.
- Note que no SS, teremos que nas equações (1) e (2),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, 0) \\ \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, 0). \end{aligned}$$

O caso genérico

- Plugando as soluções no operador $\mathcal{H}(\cdot)$,

$$\mathbb{E}_t\mathcal{H}(\underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x},\sigma)}_{\mathbf{y}},\underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x},\sigma)+\sigma\eta\varepsilon',\sigma)}_{\mathbf{y}'},\mathbf{x},\underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x},\sigma)+\sigma\eta\varepsilon'}_{\mathbf{x}'})=0,$$

- Para simplificar, podemos definir um novo operador,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x},\sigma)=\mathbb{E}_t\mathcal{H}(\cdot)=0.$$

- Como $\mathcal{F}(\mathbf{x},\sigma)=0$ para qualquer valor de $\mathbf{x}$ e σ, então qualquer derivada de $\mathcal{F}$ também deve ser zero.

Aproximação de Primeira Ordem

- Uma perturbação de primeira ordem aproxima $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ em torno de $(\mathbf{x}, \sigma) = (\bar{\mathbf{x}}, \sigma)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \sigma) &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, 0) + \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{g}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \sigma) &= \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, 0) + \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{h}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma \end{aligned}$$

  tal que $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ são os gradientes de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$, enquanto $\mathbf{g}_{\sigma}$ e $\mathbf{h}_{\sigma}$ são as derivadas de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ em relação a σ.

- Usando o SS,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \sigma) - \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{g}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \sigma) - \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{h}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma \end{aligned}$$

Aproximação de Primeira Ordem

- Uma perturbação de primeira ordem aproxima $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ em torno de $(\mathbf{x}, \sigma) = (\bar{\mathbf{x}}, \sigma)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{x}, \sigma) &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, 0) + \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{g}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}, \sigma) &= \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, 0) + \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{h}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma
\end{aligned}$$

  tal que $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ são os gradientes de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$, enquanto $\mathbf{g}_{\sigma}$ e $\mathbf{h}_{\sigma}$ são as derivadas de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ em relação a σ.

- Usando o SS, precisamos encontrar,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{x}, \sigma) - \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{g}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}, \sigma) - \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, 0)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + \mathbf{h}_{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, 0)\sigma.
\end{aligned}$$

Aproximação de Primeira Ordem

- Queremos encontrar $n \times (n_x + 1)$ coeficientes:
  - Os $n_x \times n_y$ coeficientes em $\mathbf{g_x}(\bar{\mathbf{x}}, 0)$;
  - Os $n_x \times n_x$ coeficientes em $\mathbf{h_x}(\bar{\mathbf{x}}, 0)$; e
  - O n_y termo em $\mathbf{g}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, 0)$ e o n_x termo em $\mathbf{h}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, 0)$.
- Para encontrar esses coeficientes, utilizamos o fato de que

  $$\mathcal{F}_{\mathbf{x}_i}(\bar{\mathbf{x}}, 0) = 0, \forall i,$$

  que nos fornece $n \times n_x$ equações e

  $$\mathcal{F}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, 0) = 0,$$

  com n equações.
- Com isso, chegaremos a um sistema de $n \times n_x$ equações e $n \times n_x$ coeficientes desconhecidos que formarão um sistema de equações quadráticas.

Modelo de Crescimento Neoclássico Estocástico

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \\
s.t. \quad & c_t + k_{t+1} = e^{z_t} k_t^{\alpha}, \quad \forall t > 0 \\
& z_t = \rho z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}
$$

- Sem trabalho e com depreciação completa.
- Condições de equilíbrio:

$$
\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \alpha e^{z_{t+1}} k_{t+1}^{\alpha-1}, \tag{4}
$$

$$
c_t + k_{t+1} = e^{z_t} k_t^{\alpha}, \tag{5}
$$

$$
z_t = \rho z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t. \tag{6}
$$

Solução e SS

- Solução exata:

$$
\begin{aligned}
c_t &= (1-\alpha\beta)e^{z_t}k_t^{\alpha} \\
k_{t+1} &= \alpha\beta e^{z_t}k_t^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

- Steady state:

$$
\begin{aligned}
k &= (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
c &= (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
z &= 0.
\end{aligned}
$$

O objetivo

- Queremos encontrar uma regra de decisão

$$d = \begin{cases} c_t = c(k_t, z_t) \\ k_{t+1} = k(k_t, z_t) \end{cases}$$

- Substituindo nas condições de equilíbrio,

$$\frac{1}{c_t} = \beta \mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \alpha e^{z_{t+1}} k_{t+1}^{\alpha-1},$$
$$c_t + k_{t+1} = e^{z_t} k_t^{\alpha},$$

- Teremos um sistema de equações funcionais.

O objetivo

- Queremos encontrar uma regra de decisão

$$d = \begin{cases} c_t = c(k_t, z_t) \\ k_{t+1} = k(k_t, z_t) \end{cases}$$

- Substituindo nas condições de equilíbrio,

$$\frac{1}{c(k_t, z_t)} = \beta \mathbb{E}_t \frac{\alpha e^{z_{t+1}} k_{t+1}^{\alpha-1}}{c_{t+1}},$$
$$c(k_t, z_t) + k_{t+1} = e^{z_t} k_t^{\alpha},$$

- Teremos um sistema de equações funcionais.

O objetivo

- Queremos encontrar uma regra de decisão

$$d = \begin{cases} c_t = c(k_t, z_t) \\ k_{t+1} = k(k_t, z_t) \end{cases}$$

- Substituindo nas condições de equilíbrio,

$$\frac{1}{c(k_t, z_t)} = \beta \mathbb{E}_t \frac{\alpha e^{z_{t+1}} k(k_t, z_t)^{\alpha-1}}{c_{t+1}},$$
$$c(k_t, z_t) + k(k_t, z_t) = e^{z_t} k_t^{\alpha},$$

- Teremos um sistema de equações funcionais.

O objetivo

- Queremos encontrar uma regra de decisão

$$d = \begin{cases} c_t = c(k_t, z_t) \\ k_{t+1} = k(k_t, z_t) \end{cases}$$

- Substituindo nas condições de equilíbrio,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c(k_t, z_t)} &= \beta \mathbb{E}_t \frac{\alpha e^{\rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}} k(k_t, z_t)^{\alpha - 1}}{c(k(k_t, z_t), \rho z_t + \sigma \varepsilon_{t+1})}, \\ c(k_t, z_t) + k(k_t, z_t) &= e^{z_t} k_t^{\alpha}, \end{aligned}$$

- Teremos um sistema de equações funcionais.

Perturbação

- Reescrever o problema com um parâmetro de perturbação λ.
- Considere que

$$z_t = \rho z_{t+1} + \lambda \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1),$$

  - Quando $\lambda = 1$, teremos o caso estocástico.
  - Quando $\lambda = 0$, o caso determinístico, com $z_0 = 0$ e $e^{z_t} = 1$.
- Agora queremos encontrar as seguintes regras:

$$\begin{aligned} c_t &= c(k_t, z_t; \lambda) \\ k_{t+1} &= k(k_t, z_t; \lambda). \end{aligned}$$

Teorema de Taylor

- Vamos contruri uma aproximação local em torno de $(k, 0; 0)$.
- Dada as condições de equilíbrio,

$$\mathbb{E}_t\left(\frac{1}{c(k_t, z_t; \lambda)} - \beta\frac{\alpha e^{\rho z_t + \lambda\sigma\varepsilon_{t+1}} k(k_t, z_t; \lambda)^{\alpha-1}}{c(k(k_t, z_t; \lambda), \rho z_t + \lambda\sigma\varepsilon_{t+1})}\right) = 0,$$
$$c(k_t, z_t; \lambda) + k(k_t, z_t; \lambda) - e^{z_t} k_t^{\alpha} = 0,$$

  vamos tomar as derivadas em relação a k_t, z_t e λ para avaliar os pontos em torno de $(k, 0; 0)$.
- Com isso, aplicamos o teorema de Taylor juntamente com o teorema da função implícita para encontrar os coeficientes que solucionam o problema.

Expansão Assintótica

Uma expansão de primeira ordem da regra de decisão de c_t em torno do SS será data por

$$\begin{aligned} c_t =& c(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = c(z, 0; 0) \\ &+ c_k(k, 0; 0)(k_t - k) + c_z(k, 0; 0)z_t + c_\lambda(k, 0; 0) \end{aligned}$$

Expansão Assintótica

Uma expansão de *segunda* ordem da regra de decisão de c_t em torno do SS será data por

$$\begin{aligned}
c_t =& c(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = c(z, 0; 0) \\
&+ c_k(k, 0; 0)(k_t - k) + c_z(k, 0; 0)z_t + c_\lambda(k, 0; 0)\lambda \\
&+ \frac{1}{2}c_{kk}(k, 0; 0)(k_t - k)^2 + \frac{1}{2}c_{kz}(k, 0; 0)(k_t - k)z_t \\
&+ \frac{1}{2}c_{k\lambda}(k, 0; 0)(k_t - k)\lambda + \frac{1}{2}c_{zk}(k, 0; 0)z_t(k_t - k) \\
&+ \frac{1}{2}c_{zz}(k, 0; 0)z_t^2 + \frac{1}{2}c_{z\lambda}(k, 0; 0)z_t\lambda \\
&+ \frac{1}{2}c_{\lambda k}(k, 0; 0)\lambda(k_t - k) + \frac{1}{2}c_{\lambda z}(k, 0; 0)\lambda z_t \\
&+ \frac{1}{2}c_{\lambda^2}(k, 0; 0)\lambda^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Expansão Assintótica

Uma expansão de *segunda* ordem da regra de decisão de c_t em torno do SS será data por

$$
\begin{aligned}
c_t = & c(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = c(z, 0; 0) \\
& + c_k(k, 0; 0)(k_t - k) + c_z(k, 0; 0)z_t + c_\lambda(k, 0; 0)\lambda \\
& + \frac{1}{2}c_{kk}(k, 0; 0)(k_t - k)^2 + \frac{1}{2}c_{kz}(k, 0; 0)(k_t - k)z_t \\
& + \frac{1}{2}c_{k\lambda}(k, 0; 0)(k_t - k)\lambda + \frac{1}{2}c_{zk}(k, 0; 0)z_t(k_t - k) \\
& + \frac{1}{2}c_{zz}(k, 0; 0)z_t^2 + \frac{1}{2}c_{z\lambda}(k, 0; 0)z_t\lambda \\
& + \frac{1}{2}c_{\lambda k}(k, 0; 0)\lambda(k_t - k) + \frac{1}{2}c_{\lambda z}(k, 0; 0)\lambda z_t \\
& + \frac{1}{2}c_{\lambda^2}(k, 0; 0)\lambda^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Expansão Assintótica

Uma expansão de *segunda* ordem da regra de decisão de c_t em torno do SS será data por (removendo os termos simétricos)

$$
\begin{aligned}
c_t =& c(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = c(z, 0; 0) \\
&+ c_k(k, 0; 0)(k_t - k) + c_z(k, 0; 0)z_t + c_\lambda(k, 0; 0)\lambda \\
&+ \frac{1}{2}c_{kk}(k, 0; 0)(k_t - k)^2 + c_{kz}(k, 0; 0)(k_t - k)z_t \\
&+ c_{k\lambda}(k, 0; 0)(k_t - k)\lambda + \frac{1}{2}c_{zz}(k, 0; 0)z_t^2 + c_{z\lambda}(k, 0; 0)\lambda z_t \\
&+ \frac{1}{2}c_{\lambda^2}(k, 0; 0)\lambda^2
\end{aligned}
$$

Expansão Assintótica

Uma expansão de *segunda* ordem da regra de decisão de k_t em torno do SS será data por (removendo os termos simétricos)

$$\begin{aligned} k_{t+1} = & k(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = k + k_k(k_t - k) + k_z z_t + k_\lambda \lambda \\ & + \frac{1}{2} k_{kk}(k_t - k)^2 + k_{kz}(k_t - k) z_t + k_{k\lambda}(k_t - k)\lambda \\ & + \frac{1}{2} k_{zz} z_t^2 + k_{z\lambda} \lambda z_t \\ & + \frac{1}{2} k_{\lambda^2} \lambda^2 \end{aligned}$$

Onde consideramos que todos termos são avaliados em $(k, 0; 0)$.

Expansão Assintótica

Uma expansão de *segunda* ordem da regra de decisão de k_t em torno do SS será data por (removendo os termos simétricos)

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} =& k(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = k + k_k(k_t - k) + k_z z_t + k_\lambda \lambda \\
& + \frac{1}{2} k_{kk}(k_t - k)^2 + k_{kz}(k_t - k) z_t + k_{k\lambda}(k_t - k)\lambda \\
& + \frac{1}{2} c_{zz} z_t^2 + k_{z\lambda} \lambda z_t \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda^2} \lambda^2
\end{aligned}
$$

Onde consideramos que todos termos são avaliados em $(k, 0; 0)$.

Correção pelo risco

- Os termos $\frac{1}{2}c_{\lambda^2}$ e $\frac{1}{2}k_{\lambda^2}$ capturam o comportamento de precaução dos indivíduos.
- Acaba com a equivalente certeza;
- Ou seja, a regra de decisão é afetada pela choque estocástico de forma diferente;
- Em primeira ordem, a regra de decisão ótima é idêntica a de um contexto determinístico.
- Além disso, capturamos uma dinâmica que não pode ser observada em primeira ordem (choques positivos e negativos são iguais);

Expansão Assintótica

Uma expansão de *segunda* ordem da regra de decisão de k_t em torno do SS será data por (removendo os termos simétricos)

$$\begin{aligned} k_{t+1} = & k(k_t, z_t; \lambda)|_{z,0,0} = k + k_k(k_t - k) + k_z z_t + k_\lambda \lambda \\ & + \frac{1}{2} k_{kk}(k_t - k)^2 + k_{kz}(k_t - k) z_t + k_{k\lambda}(k_t - k)\lambda \\ & + \frac{1}{2} k_{zz} z_t^2 + k_{z\lambda} \lambda z_t \\ & + \frac{1}{2} k_{\lambda^2} \lambda^2 \end{aligned}$$

- Enquanto o termo $\frac{1}{2} k_{zz} z_t^2$ sempre será positivo;
- $k_{kz}(k_t - k) z_t$ faz com que o efeito de um choque também dependa de quanto capital tem disponível na economia e t;
- Em primeira ordem o efeito do choque é capturado somente por $k_z z_t$, portanto será simétrico.

Notação

- Precisamos encontrar os coeficientes desconhecidos nas expansões.
- Note que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{x};\sigma) &= \mathbb{E}_t \mathcal{H}(\mathbf{y},\mathbf{y}',\mathbf{x},\mathbf{x}') \\
\mathcal{F}(k_t,z_t;\lambda) &= \mathbb{E}_t \mathcal{H}(c_t,c_{t+1},k_t,k_{t+1}) \\
&= \mathbb{E}_t \mathcal{H}(c(k_t,z_t;\sigma),c(k(k_t,z_t;\lambda),z_{t+1};\lambda),k_t,k(k_t,z_t;\lambda),z_t;\lambda) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

- Portanto, teremos que

$$
\mathcal{F}(k_t,z_t;\lambda) = \mathbb{E}_t \begin{bmatrix} \dfrac{1}{c(k_t,z_t;\lambda)} - \beta \dfrac{\alpha e^{\rho z_t + \lambda\sigma\varepsilon_{t+1}} k(k_t,z_t;\lambda)^{\alpha-1}}{c(k(k_t,z_t;\lambda),\rho z_t + \lambda\sigma\varepsilon_{t+1})} \\ c(k_t,z_t;\lambda) + k(k_t,z_t;\lambda) - e^{z_t}k_t^{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Aproximação de Primeira Ordem

- Como $\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda)$ deve ser igual a zero para todos valores de k_t, z_t e λ, as derivadas de qualquer ordem de $\mathcal{F}$ também devem ser zero.
- Tomamos as derivadas de $\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda)$ em torno de $(k, 0; 0)$:
  - Em relação k_t
    $$\mathcal{F}_k(k, 0; 0) = 0$$
  - Em relação a z_t
    $$\mathcal{F}_z(k, 0; 0) = 0$$
  - Em relação a λ
    $$\mathcal{F}_\lambda(k, 0; 0) = 0$$

Solucionando o Sistema

- Lembrando que

$$\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda) = \\ \mathbb{E}_t \mathcal{H}(c(k_t, z_t; \sigma), c(k(k_t, z_t; \lambda), z_{t+1}; \lambda), k_t, k(k_t, z_t; \lambda), z_t; \lambda) = 0$$

- Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k(k, 0; 0) = & \quad \mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k & = \mathbf{0} \\
\mathcal{F}_z(k, 0; 0) = & \quad \mathcal{H}_1 c_z + \mathcal{H}_2 (c_k k_z + c_z \rho) + \mathcal{H}_4 k_z + \mathcal{H}_5 & = \mathbf{0} \\
\mathcal{F}_\lambda(k, 0; 0) = & \quad \mathcal{H}_1 c_\lambda + \mathcal{H}_2 (c_k k_\lambda + c_\lambda) + \mathcal{H}_4 k_\lambda + \mathcal{H}_6 & = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Solucionando o Sistema

- Perceba que $\mathcal{F}$ tem duas dimensões, portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(k,0;0) &= \mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k &= \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_z(k,0;0) &= \mathcal{H}_1 c_z + \mathcal{H}_2 (c_k k_z + c_z \rho) + \mathcal{H}_4 k_z + \mathcal{H}_5 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

  é um sistema quadrático com quatro equações e quatro coeficientes desconhecidos (c_k, k_k, c_z e k_z).

Um problema quadrático

- As primeiras duas equações em formato de uma matriz quadrática:

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k = \mathbf{0}$$

tal que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_1^1 \\ \mathcal{H}_1^2 \end{pmatrix} c_k + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_2^1 \\ \mathcal{H}_2^2 \end{pmatrix} c_k k_k + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_3^1 \\ \mathcal{H}_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_4^1 \\ \mathcal{H}_4^2 \end{pmatrix} k_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que $\mathcal{H}_i^j$ é a j-ésima dimensão de $\mathcal{H}_i$.

- Perceba que $\mathcal{H}_2^2$ representa a derivada de $\mathcal{H}$ em relação a $c(k(k_t, z_t; \lambda), z_{t+1}; \lambda)$ na segunda sua segunda entrada, equivalente a *policy rule* de k_{t+1}, e portanto será zero.
- Da mesma forma, $\mathcal{H}_3^1 = 0$.

Veja $\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda)$

Um problema quadrático

- Assim,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_1^1 \\ \mathcal{H}_1^2 \end{pmatrix} c_k + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_2^1 \\ 0 \end{pmatrix} c_k k_k + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{H}_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_4^1 \\ \mathcal{H}_4^2 \end{pmatrix} k_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  tal que podemos utilizar a segunda equação para eliminar c_k da primeira equação.
- Reorganizando os termos e chamando $P = k_k$, teremos uma equação quadrática:

$$AP^2 - BP - C = 0.$$

  onde, nesse caso mais simples, A, B e C são escalares.
- Solução de sistemas quadráticos:
  1. Blanchard and Kahn (1980).
  2. Uhlig (1999);
  3. Sims (2000);
  4. Klein (2000).

Um problema quadrático

- Ao solucionar o sistema quadrático, teremos duas soluções. Uma delas indica que $k_k > 1$ e a outra $k_k < 1$.
- A primeira é instável, pois em

$$k_{t+1} = k + k_k(k_t - k) + \cdots$$

quando $k_k > 1$, temos que um desvio de k_t em relação a k significa que um desvio ainda maior ocorrerá em k_{t+1} em relação a k, levando a um comportamento explosivo.

Solucionando o Sistema

- Lembrando que

$$\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda) = \\ \mathbb{E}_t \mathcal{H}(c(k_t, z_t; \sigma), c(k(k_t, z_t; \lambda), z_{t+1}; \lambda), k_t, k(k_t, z_t; \lambda), z_t; \lambda) = 0$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(k, 0; 0) = &\quad \mathcal{H}_1 c_k + \mathcal{H}_2 c_k k_k + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 k_k &= \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_z(k, 0; 0) = &\quad \mathcal{H}_1 c_z + \mathcal{H}_2 (c_k k_z + c_z \rho) + \mathcal{H}_4 k_z + \mathcal{H}_5 &= \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_\lambda(k, 0; 0) = &\quad \mathcal{H}_1 c_\lambda + \mathcal{H}_2 (c_k k_\lambda + c_\lambda) + \mathcal{H}_4 k_\lambda + \mathcal{H}_6 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Um problema quadrático

- Uma vez que tivermos o resultado de c_k e k_k, podemos voltar para $\mathcal{F}_z$ e encontrar o resultado de c_z e k_z.
- Por fim,

$$\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{H}_1 c_\lambda + \mathcal{H}_2(c_k k_\lambda + c_\lambda) + \mathcal{H}_4 k_\lambda + \mathcal{H}_6 = \mathbf{0}$$

  forma um sistema linear e homogêneo em c_λ e k_λ. Portanto, $c_\lambda = k_\lambda = 0$, que representa a existência de equivalente certeza na aproximação de primeira ordem.

Aproximação de Segunda Ordem

- Como $\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda)$ deve ser igual a zero para todos valores de k_t, z_t e λ, as derivadas de qualquer ordem de $\mathcal{F}$ também devem ser zero.
- Tomamos a **segunda** derivada de $\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda)$ em torno de $(k, 0; 0)$:

$$\mathcal{F}_{kk}(k, 0; 0) = 0$$

$$\mathcal{F}_{kz}(k, 0; 0) = 0$$

$$\mathcal{F}_{k\lambda}(k, 0; 0) = 0$$

$$\mathcal{F}_{zz}(k, 0; 0) = 0$$

$$\mathcal{F}_{z\lambda}(k, 0; 0) = 0$$

$$\mathcal{F}_{\lambda\lambda}(k, 0; 0) = 0$$

e seguimos o mesmo processo da aproximação de primeira ordem para encontrar os coeficientes.

Exemplo Numérico

- Relembrando as CPO:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_t} &= \beta \mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \alpha e^{z_{t+1}} k_{t+1}^{\alpha-1}, \\
c_t + k_{t+1} &= e^{z_t} k_t^{\alpha}, \\
z_t &= \rho z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t.
\end{aligned}
$$

- Steady state:

$$
\begin{aligned}
k &= (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
c &= (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
z &= 0.
\end{aligned}
$$

- Considere os seguintes valores para os parâmetros do modelo: $\beta = 0.99$, $\alpha = 0.33$, $\rho = 0.95$ e $\sigma = 0.01$.

Exemplo Numérico

- Aplicar no Dynare.
- Observar coeficientes.
- Apresentar coeficientes na expansão e comparação com resultado exato.
- Discutir *timing* das variáveis de estado.
- Condições de Blanchard-Khan (ver Uhlig).
- Discutir diferenças entre primeira e segunda ordem (coeficientes e simetria).
- Apresentar algorítimo de SGU e derivadas analíticas.

Métodos de Solução em Economia
Perturbação

Filipe Stona

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Novembro de 2019

[Versão atualizada]

Bibliografia

DeJong, D. N. and Dave, C. (2011). *Structural Macroeconometrics*. Princeton University Press.

Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramírez, J., and Schorfheide, F. (2016). Chapter 9 - solution and estimation methods for dsge models. volume 2 of *Handbook of Macroeconomics*, pages 527 – 724. Elsevier.

Schmitt-Grohé, S. and Uribe, M. (2004). Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(4):755 – 775.

Uhlig, H. (1999). A toolkit for analysing nonlinear dynamic stochastic models easily.

Solucionando o Sistema

- Lembrando que

$$\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda) = \\ \mathbb{E}_t \mathcal{H}(c(k_t, z_t; \sigma), c(k(k_t, z_t; \lambda), z_{t+1}; \lambda), k_t, k(k_t, z_t; \lambda), z_t; \lambda) = 0$$

- Portanto,

$$\mathcal{F}(k_t, z_t; \lambda) = \mathbb{E}_t \begin{bmatrix} \frac{1}{c(k_t, z_t; \lambda)} - \beta \frac{\alpha e^{\rho z_t + \lambda \sigma \varepsilon_{t+1}} k(k_t, z_t; \lambda)^{\alpha - 1}}{c(k(k_t, z_t; \lambda), \rho z_t + \lambda \sigma \varepsilon_{t+1})} \\ c(k_t, z_t; \lambda) + k(k_t, z_t; \lambda) - e^{z_t} k_t^{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltar: *Um problema quadrático*