Equilíbrio Geral Walrasiano com produção

Um modelo de equilíbrio geral walrasiano (EGW) involve as firmas, que produzem bens e consomem insumos, e os consumidores, que podem consumir os bens e algum insumo da firma (como água, por examp), além de ofertarem insumos para as firmas (i.e. capital ou trabalho) e terem participação nos lucros desta.

A firmas querem maximizar lucros,

$$\pi_j(\vec{p},\vec{\omega}) = \max_{y \geq 0} \vec{p} \cdot \vec{y}_j - \vec{\omega}\, \vec{h}_j(\vec{p},\vec{\omega})$$

$$\text{s.a.} \quad \vec{y}_j \in Y_j$$

onde $\vec{y}_j$ é a função de produção do conjunto de possibilidade de produção da firma j, Y_j, $\vec{h}_j$ é o vetor de insumos que tem preços $\vec{\omega}$.

A oferta agregada de todas as firmas será

$$\vec{Y}(\vec{p}) = \sum_{j=1}^{J} \vec{y}_j(\vec{p})$$

Os consumidores maximizão utilidade sujeitos à suas restrições orçamentarias:

$$\max_{x_i} U(\vec{x}_i)$$

$$\text{s.a.} \quad \vec{p} \cdot \vec{x}_i = p\, \vec{\omega}_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot \pi_j \quad \leftarrow p y_j(\vec{p})$$

Onde $\vec{\omega}_i$ é o vetor de dotações iniciais, θ_{ij} é a participação do indivíduo i nos lucros π_j da firma j. A demanda agregada será então:

$$\vec{X}(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{I} \vec{p}\, \vec{x}_i(\vec{p})$$

Por fim, o agregado das dotações será

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^{I} \vec{\omega}_i$$

O vetor de excesso de demanda agregado pode então ser definido como:

→ descreve o sistema de mercado

$$\vec{Z}(\vec{p}) = \vec{X}(\vec{p}) - \vec{Y}(\vec{p}) - \vec{W}$$

Onde $\vec{p}^*$ será o vetor de preços que equilibra o mercado, fazendo com que $\vec{Z}(\vec{p}^*) = \vec{0}$ ou, caso existam bens livres, $\vec{Z}(\vec{p}^*) \leq 0$, havendo excesso de oferta do bem livre.

Propriedades

1) Homogêneo de grau 0
2) Contínuo em $\vec{p} \gg 0$
3) $\vec{p} \cdot \vec{Z}(\vec{p}) \equiv 0$ ("Lei de Walras"). O valor do excesso de demanda sempre será zero. Toda demanda será saciada.

se aplica mesmo fora do equi. Walrasiano.

↳ Na teoria do consumidor, a lei de walras diz que toda renda é gasta

Demonstração:

$$\vec{p}\left\{\vec{x}(\vec{p}) - \vec{y}(\vec{p}) - \vec{w}\right\} = 0$$

$$\vec{p}\left\{\sum_{i=1}^{I} \vec{x}_i(\vec{p}) - \sum_{j=1}^{J} \vec{y}_j(\vec{p}) - \sum_{i=1}^{I} \vec{\omega}_i\right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{I}\left(\vec{p}\,\vec{x}_i(\vec{p}) - \vec{\omega}_i\right) - \sum_{j=1}^{J} \vec{p}\,\vec{y}_j(\vec{p}) = 0 \qquad (A)$$

Dada a r.o. do consumidor: $\vec{p}\,\vec{x}_i(\vec{p}) = \vec{p}\,\vec{\omega}_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\,\vec{p}\,\vec{y}_j(\vec{p})$,

$$\vec{p}\,\vec{x}_i(\vec{p}) - \vec{\omega}_i = \sum_{j=1}^{J} \vec{p}\,y_j(\vec{p}) \qquad (B)$$

Subs. (A) em (B):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}\,\vec{p}\,y_j(\vec{p})\right)}_{\text{I}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \vec{p}\,y_j(\vec{p})}_{\text{II}} = 0$$

tal que I é o lucro total de todos os indivíduos com participação em todas as firmas, e II é o lucro máximo e total de todas as firmas. Logo, $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} = 1$, confirmando que $\vec{p} \cdot \vec{Z}(\vec{p}) \equiv 0$.

Teorema da Existência do Equilíbrio Walrasiano

Para tal, normalizamos $\vec{p}$ por $\Sigma_{k=1}^{n} p_k$, fazendo com que $\Sigma_{i=1}^{n} \left[p_i / \Sigma_{k=1}^{n} p_k\right] = 1$. Define-se então o simplex unitário como:

$$S^{n-1} = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \Sigma_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\},$$

reduzindo o espaço de busca pelo vetor de preços de equilíbrio.

Podemos então considerar o teorema do ponto fixo de Brower: "Todo mapa contínuo do simplex sobre ele mesmo tem um ponto fixo. Se $f(x)$ é uma função contínua $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$, existe um vetor $x \in S^{n-1}$, tal que $f(x) = x$".

Teorema da Existência

Se $Z: S^{n-1} \to S^{n-1}$ é contínua e satisfaz a lei de Walras, então existe um vetor $\vec{p}^* \in S^{n-1}$ tal que $Z(p^*)$ é o equilíbrio Walrasiano.

Prova: Considere a função $g: S^{k-1} \to S^{k-1}$:

$$g_i(p^*) = \frac{p_i^* + \max[0, Z_i(p^*)]}{1 + \Sigma_{j=1}^{k} \max[0, Z_j(p^*)]} \quad \forall \; i = 1, \dots, k$$

tal que $g_i(\,)$ é um ponto no simplex unitário, pois $\Sigma_{i=1}^{k} g_i(p) = 1$. Além disso, $g_i(\cdot)$ é contínua e se $Z_i(p) \geq 0$, há excesso de demanda e o preço relativo do bem aumenta. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, há um p^* tal que $g(p^*) = p^*$:

$$p_i^* = \frac{p_i^* + \max[0, Z_i(p^*)]}{1 + \Sigma_{j=1}^{k} \max[0, Z_j(p^*)]} \quad \forall \; i = 1, \dots, k$$

onde p_i^* é o equilíbrio Walrasiano.

1. $g_i(p^*)$ para $g: S^{k-1} \to S^{k-1}$
2. $g_i(p^*) = p^*$ (Brower)
3. mutiplica cruzado
4. multiplica por $Z(p)$
5. somatorio
6. Lei de Walras $= 0$
7. só possível se $Z_i(p) \leq 0$.

$$\cancel{p_i^*} + p_i^* \sum_{j=1}^{k} \max\left[0, z_j(p^*)\right] = \cancel{p_i^*} + \max\left[0, z_i(p^*)\right]$$

Multiplicando por $z_i(p^*)$; e somando as k equações

$$\sum_{j=1}^{k} \max\left[0, z_j(p^*)\right] \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p^* z_i(p^*)}_{\equiv 0 \text{ pela lei de walras}} = \sum_{i=1}^{k} z_i(p^*) \max\left[0, z_i(p^*)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{k} z_i(p^*) \max\left[0, z_i(p^*)\right] = 0$$

Essa igualdade não seria possível se $z_i(p^*) > 0$, logo:

$$z_i(p^*) \leq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k. \quad ■$$

Unicidade

Hipóteses

i) Desejabilidade $\rightarrow z(p^*) = 0$

ii) $Z(p)$ diferenciável

iii) i e j são substitutos brutos:

$$\frac{\partial z_i(p)}{\partial p_j} > 0$$

O aumento no preço de j, aumenta o excesso de demanda por i, pois as pessoas consomem mais i.

Teorema (unicidade): Supondo que os bens são desejáveis e substitutos brutos, se p^* é o equilíbrio walrasiano, então p^* é único.

se $p^* \rightarrow z(p^*) = 0$,

$p' \rightarrow z(p') = 0$ é impossível.

Prova: supondo que p' é possível.

Lembrando que $Z(p)$ é λ^0:

$$z(m p^*) = z(p^*) = 0$$
$$z(m p') = z(p') = 0$$

Definindo $m = \left\{\frac{p_i'}{p_i^*}, i = 1, \dots, n\right\}$,

$$m\vec{p}^* \geq \vec{p}',$$

logo:

$$z(p') < 0 \quad ■$$

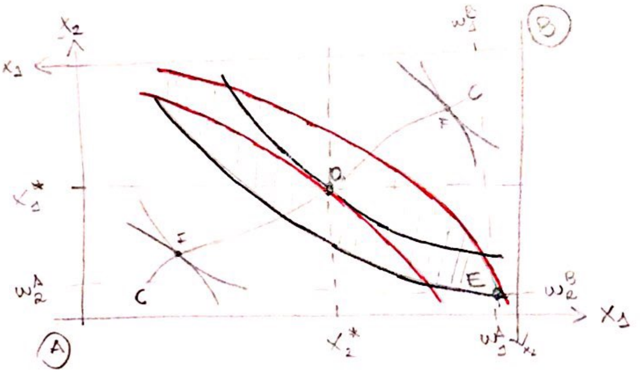
Prova 2015

4) Economia de Trocas, Equilíbrio Walrasiano e Ditador benevolente.

a)

Uma das formas mais simples de apresentar o problema de alocação de equilíbrio dos bens entre os indivíduos é através de uma economia de trocas, onde não há mercado organizado. Nesse modelo, ocorre um processo de troca voluntária entre os agentes. Não há produção, os bens simplesmente existem e cada indivíduo nasce com uma dotação inicial de bens consumíveis. Cada consumidor tem preferências de consumo que não necessariamente respeitam sua dotação inicial, e será através da troca/escambo que eles irão aumentar sua utilidade.

Nesse formato de economia pode ser demonstrado a partir da caixa de Edgeworth:



tal que os eixos horizontais indicam a quantidade de x_1 e os verticais a quantidade de x_2. Nota-se que, na figura apresentada, considera-se o caso de dois bens e dois consumidores (A e B). O ponto E indica a dotação inicial de cada um dos consumidores para os bens x_1 e x_2.

A partir das curvas de indiferença dos dois indivíduos, seria possível alcançar o maior nível de utilidade quando as curvas estivessem no ponto D. Este seria o equilíbrio. Outros pontos em que as curvas de indiferença são tangentes são representados pela reta CC, chamada de curva de contrato, todavia, os pontos fora do core (área entre as curvas de dotação inicial) são considerados como "bloqueados", pois o indivíduo tem mais satisfação em apenas consumir sua dotação inicial. Finalmente, podemos dizer que no ponto D os indivíduos alcançaram a alocação eficiente no sentido de Pareto, ou seja, não há outra alocação possível que não piore a situação de um dos indivíduos em benefício do outro.

Uma das principais fraquezas do modelo de trocas é que os indivíduos precisam ter o maior e mais detalhado nível de informação possível das preferências do restante dos consumidores daquela sociedade.

Essa fraqueza é potencializada no modelo com um ditador benevolente e onisciente. Neste, ao invés dos indivíduos terem uma dotação inicial e promoverem o escambo conforme suas preferências, um ditador aloca os recursos conforme ele entende ser melhor para a sociedade e da preferência dos indivíduos; por isso ele necessita ser onisciente. Mais que isso, o ditador deve ser benevolente para não alocar os indivíduos de forma desigual, nos pontos F da figura anterior. Dessa forma, esse modelo dependería também do caráter e preceitos morais e éticos do ditador, sendo mais frágil que uma economia de escambo.

Finalmente, dentre as três opções, o modelo de equilíbrio walrasiano é o mais crível, pois traz a ideia de que os bens tem preços e que há um vetor de preços que colocaria todos os mercados em equilíbrio. Também, aparece a figura da firma, que buscará maximizar seus lucros, assim como os consumidores que buscam maximizar sua utilidade. Os consumidores não precisam considerar as preferências dos demais membros da sociedade, nem as firmas com os outros produtores. Assim, haverá um vetor de preços que colocará todos os mercados em equilíbrio, fazendo com que toda oferta encontre sua demanda. Podendo definir um vetor de equilíbrio walrasiano $\vec{p}^*$ aquele que torna o vetor de excesso de demanda $\vec{z}(\vec{p})$ seja zero, $\vec{z}(\vec{p}^*) = 0$, ou seja, não há excesso de oferta $(\vec{z}(\vec{p}) < 0)$ nem de demanda $(\vec{z}(\vec{p}^*) > 0)$.

Diante das possibilidades, o modelo de equilíbrio walrasiano é o mais adequado à resolução do problema de equilíbrio, pois diminui a necessidade de informações dos agentes (necessitando apenas dos preços), em um sistema de transações mediado por um mercado impessoal.