UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Programa de Pós-Graduação em Economia (Teoria Microeconômica I)
Prof. Marcelo S. Portugal
PROVA – 1° trimestre/2011 Tempo de prova 4 horas

1. Mostre que a função de custos $C(w,y)=y\left(w_1+\sqrt{w_1w_2}+w_2\right)$ é côncava e homogênea de grau 1 nos preços dos insumos (1 ponto). Obtenha a função de produção associada a essa função e custos (1,5 ponto).

2. Considere dois consumidores com, respectivamente, as seguintes características em termos de funções de utilidade e de dotações iniciais:

$$u^1(x_1,x_2)=e^{x_1}x_2 \quad \text{e} \quad \vec{w}_1=(1,1)$$
$$u^2(x_1,x_2)=e^{x_1}x_2^2 \quad \text{e} \quad \vec{w}_2=(5,5)$$

Encontre a equação da curva de contrato nesta economia e faça seu esboço na Caixa de Edgeworth (1,5 ponto). Obtenha o vetor de preços relativos de equilíbrio (1 ponto)

3. Enuncie e demonstre o primeiro teorema fundamental do bem-estar (2,5 pontos). Quais as implicações desse resultado para a equidade entre os consumidores (0,5 ponto)

4. Defina a função de lucros restrita e não restrita. Qual a relação existente entre elas? (1,0 ponto). Que problemas podem ocorrer na obtenção da função de lucros caso a função de produção possua retornos crescentes ou constantes de escala? (1,0 ponto)

Prova 2: 2011 – Teoria Microeconômica I –

1- $c(w,y) = y\left(w_1 + \sqrt{w_1 w_2} + w_2\right)$ → Função de custos

→ Homogênea de grau 1 em $\vec{w}$. $(\lambda > 0)$

$$c(\lambda w, y) = y\left(\lambda w_1 + \sqrt{\lambda w_1 \lambda w_2} + \lambda w_2\right)$$

$$c(\lambda w, y) = y\left(\lambda w_1 + \sqrt{\lambda^2 w_1 w_2} + \lambda w_2\right)$$

$$c(\lambda w, y) = y \cdot \left(\lambda w_1 + \lambda\sqrt{w_1 w_2} + \lambda w_2\right)$$

$$c(\lambda w, y) = y \cdot \lambda\left(w_1 + \sqrt{w_1 w_2} + w_2\right)$$

$$\boxed{c(\lambda w, y) = \lambda \cdot c(w,y)}$$

→ Côncava em w_1 e w_2

Lema de Shepard

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = y\left(1 + \frac{1}{2} w_1^{-\frac{1}{2}} \cdot w_2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial w_1^2} = -\frac{y}{4} w_1^{-\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial w_2} = y\left(\frac{1}{2} w_1^{\frac{1}{2}} \cdot w_2^{-\frac{1}{2}} + 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial w_2^2} = -\frac{y}{4} w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{3}{2}}$$

(Cont... Pag 2)

As primeiras derivadas são positivas e as segundas derivadas são negativas, o que mostra que $c(w,y)$ é côncava em w_1 e w_2.

→ Função de Produção associada:

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = x_1 = y + \frac{y}{2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial w_2} = x_2 = y + \frac{y}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Isolando $\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ em (1):

$$x_1 = y + \frac{y}{2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$X_1 = Y\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{X_1}{Y} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{X_1}{Y} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\frac{2X_1}{Y} - 2 = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1)'$$

Isolando para $\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ em (2):

$$X_2 = Y + \frac{Y}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{X_2}{Y} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{X_2}{Y} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2X_2}{Y} - 2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{Y}{2X_2 - 2Y}} \quad (2)'$$

Igualando (1)' e (2)':

$$\frac{2X_1}{Y} - 2 = \frac{Y}{2X_2 - 2Y}$$

$$\frac{2X_1 - 2Y}{Y} = \frac{Y}{2X_2 - 2Y}$$

$$Y^2 = 2(X_1 - Y) \cdot 2(X_2 - Y)$$

$$\frac{Y^2}{4} = (X_1 - Y) \cdot (X_2 - Y)$$

$$\frac{Y^2}{4} = X_1X_2 - X_1Y - X_2Y + Y^2$$

$$X_1X_2 - Y(X_1 + X_2) + \frac{3}{4}Y^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}Y^2 - Y(X_1 + X_2) + X_1X_2 = 0$$

$a = \frac{3}{4}$ $\quad b = -(X_1 + X_2)$ $\quad c = X_1X_2$ $\quad$ Equação do 2º grau.

$$Y = \frac{(X_1 + X_2) \pm \sqrt{(X_1 + X_2)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} X_1X_2}}{3/2}$$

$$Y = \frac{(X_1 + X_2) \pm \sqrt{X_1^2 + 2X_1X_2 + X^2 - 3X_1X_2}}{3/2}$$

$$\boxed{Y = \frac{2}{3} \cdot \left[(X_1 + X_2) \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_1X_2}\right]}$$

Podemos ter duas funções de produção possíveis.

Provar que é côncava:

Matriz Hessiana: Tem que ser semidefinida negativa.

$$|H_1| < 0 \quad e \quad |H_2| \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 C}{\partial w_1^2} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial w_1 \partial w_2} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial w_2 \partial w_1} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{Y}{4} w_1^{-\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}} & \dfrac{Y}{4} w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{Y}{4} w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}} & -\dfrac{Y}{4} w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial w_1} = Y + \dfrac{Y}{2} w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial w_1 \partial w_2} = \dfrac{Y}{4} w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial w_2} = Y + \dfrac{Y}{2} w_1^{\frac{1}{2}} \cdot w_2^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial w_2 \partial w_1} = \dfrac{Y}{4} w_1^{-\frac{1}{2}} \cdot w_2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$|H_1| = -\frac{Y}{4} w_1^{-\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}} < 0$$

$$|H_2| = \frac{Y^2}{16} w_1^{-1} w_2^{-1} - \frac{Y^2}{16} w_1^{-1} w_2^{-1} = 0$$

$$|H_1| \leq 0 \quad e \quad |H_2| \geq 0 \rightarrow \text{Semidefinida negativa}$$

Portanto a função é côncava (não é estritamente côncava.

(2) $U^1(x_1, x_2) = e^{x_1} x_2$ e $\bar{w}_1 = (1,1)$ → Consumidor 1

$U^2(x_1, x_2) = e^{x_1} x_2^2$ e $\bar{w}_2 = (5,5)$ → Consumidor 2

↓

$\ln U^1 = x_1 + \ln x_2$

$\ln U^2 = x_1 + 2\ln x_2$

• Equação da curva de contrato:

Calculando as TMS (com as utilidades em log)

$\frac{\partial U^1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial U^1}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$ → $TMS^1_{12} = \frac{1}{1/x_2}$ → $\boxed{TMS_{12} = x_2}$ Consumidor 1

$\frac{\partial U^2}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial U^2}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2}$ → $TMS^2_{12} = \frac{1}{2/x_2}$ → $\boxed{TMS^2_{12} = \frac{x_2}{2}}$ Consumidor 2

• Curva de contrato:

$TMS^1_{12} = TMS^2_{12}$ (igual para os dois consumidores).

$x_2^1 = \frac{x_2^2}{2}$ (I)

• Pelas dotações podemos verificar que:

$x_2^1 + x_2^2 = 6$

$x_2^1 = 6 - x_2^2$ (II)

Igualando (I) e (II):

$6 - x_2^2 = \frac{x_2^2}{2}$

$\frac{x_2^2}{2} + x_2^2 = 6$

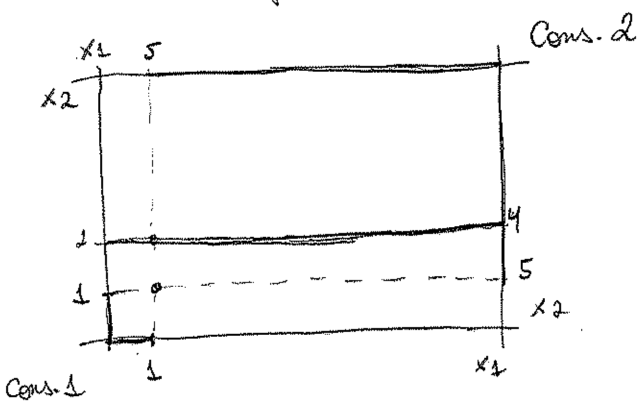
$\frac{x_2^2 + 2x_2^2}{2} = 6$

$3x_2^2 = 12$

$\boxed{x_2^2 = 4}$ ← Bem x_2 para os consumidores 1 e 2.

$x_2^1 = 6 - x_2^2$ → $x_2^1 = 6 - 4$ → $\boxed{x_2^1 = 2}$

• Caixa de Edgeworth



• Vetor de preços de equilíbrio:

<u>Consumidor 1</u>:
$$\begin{cases} \max \ x_1 + \ln x_2 \\ s.a.: \ p_1x_1 + p_2x_2 = p_1 + p_2 \end{cases}$$

$$L = x_1 + \ln x_2 + \lambda (p_1 + p_2 - p_1x_1 - p_2x_2)$$

<u>C.P.O.</u>:

$$L_1 = 1 - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$L_2 = \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = p_1 + p_2 - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

Dividindo (1) por (2):

$$\frac{1}{1/x_2} = \frac{\cancel{\lambda} p_1}{\cancel{\lambda} p_2} \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{p_1}{p_2}} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$p_1x_1 + \cancel{p_2} \cdot \frac{p_1}{\cancel{p_2}} = p_1 + p_2$$

$$p_1x_1 + p_1 = p_1 + p_2$$

$$p_1x_1 = \cancel{p_1} + p_2 - \cancel{p_1}$$

$$\boxed{x_1^* = \frac{p_2}{p_1}}$$

Consumidor 2: $\begin{cases} \max \; x_1 + 2\ln x_2 \\ \text{s.a. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = 5p_1 + 5p_2 \end{cases}$

$$L = x_1 + 2\ln x_2 + \lambda\,(5p_1 + 5p_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

C.P.O.:

$$L_1 = 1 - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$L_2 = \frac{2}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = 5p_1 + 5p_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (3)$$

Dividindo (1) por (2):

$$\frac{1}{2/x_2} = \frac{\cancel{\lambda} p_1}{\cancel{\lambda} p_2} \Rightarrow \frac{x_2}{2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{2p_1}{p_2}} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$p_1 x_1 + \cancel{p_2} \cdot \frac{2p_1}{\cancel{p_2}} = 5p_1 + 5p_2$$

$$p_1 x_1 = 5p_1 + 5p_2 - 2p_1$$

$$\boxed{x_1^* = \frac{3p_1 + 5p_2}{p_1}}$$

$$z_1(p) = (x_1^1, x_1^2) - (w_1^1, w_1^2) \quad (\text{Para o bem } 1.)$$

$$x_1^1 + x_1^2 = w_1^1 + w_1^2$$

$$\frac{p_2}{p_1} + \frac{3p_1 + 5p_2}{p_1} = 1 + 5$$

$$6p_2 + 3p_1 = 6p_1$$

$$6p_2 = 3p_1$$

$$\boxed{p_2 = \frac{p_1}{2}}$$

ou $p_1 = 2p_2$

$$\hat{p} = \left[p_1, \frac{p_1}{2}\right] \rightarrow \text{vetor de preços relativos de equilíbrio}$$

(3-) Primeiro Teorema Fundamental do bem-estar

O primeiro Teorema do bem-estar afirma que todo o equilíbrio Walrasiano é um ótimo de pareto. uma alocação ótima no sentido de Pareto se dá quando não há possibilidade de melhorar a situação de um indivíduo sem perda de bem-estar para um outro indivíduo.

O equilíbrio Walrasiano é um ótimo de Pareto, pois existe um vetor de preços (P) que zera os excessos em todos os mercados e permite que os consumidores maximizem utilidade e as firmas maximizem lucros.

Este resultado retrata uma alocação eficiente e não igualitária. Suponha que haja um planejador central benevolente e este deseje redistribuir as dotações de forma a maximizar uma função de bem-estar social. Isso só será possível se esse planejador conhecer o vetor de preços relativos, o que raramente acontece. Portanto, esse papel geralmente é atribuído ao "leiloeiro Walrasiano", que altera o vetor de preços relativos na busca do equilíbrio.

Portanto, o primeiro teorema do bem estar implica que nem sempre uma alocação "mais igual" é a mais eficiente, dado que são levados em conta as dotações iniciais e os preços relativos. Ajustar uma alocação para chegar ao equilíbrio pode implicar em não equidade e tentar tornar uma distribuição mais equitativa pode implicar em perda de bem-estar para alguns indivíduos.

(4-) A função de lucros restrita tem um dos insumos fixos, dado que no curto prazo não é possível ajustar a quantidade ótima de todos os insumos. Já a função de lucro não restrita é a de longo prazo, onde todos os insumos são variáveis e no ponto de lucro máximo estão sendo demandados no ótimo

Podemos escrever a função lucro restrita da seguinte forma:

$$\pi = P \cdot Y - C(Y, \vec{w}, x_2 = \bar{x}_2)$$

onde o insumo x_2 é demandado a uma quantidade fixa.

Assim, dado que na função de lucros não restrita sempre é possível variar a quantidade dos fatores, o lucro não restrito deve ser sempre maior ou igual ao lucro restrito, ou de outro modo, o lucro de longo prazo deve ser sempre maior ou igual ao lucro de curto prazo.

$$\pi_{LP} - \pi_{CP} = \pi_{NR} - \pi_R \geq 0$$

$\pi_{LP} \rightarrow$ lucro de longo prazo.

$\pi_{CP} \rightarrow$ lucro de curto prazo.

$\pi_{NR} \rightarrow$ lucro não restrito.

$\pi_R \rightarrow$ lucro restrito.

A igualdade será satisfeita quando a quantidade ótima de x_2 for justamente a quantidade racionada do fator $\bar{x}_2$ na função de lucros restrita. Se $\bar{x}_2$ não for a quantidade ótima, é sempre possível adquirir uma quantidade diferente desta quando se está maximizando lucros irrestritos (longo prazo).

Se a função de produção da firma que busca maximizar lucros possuir retornos crescentes ou constantes de escala, isso implica que a função de custos possui retornos decrescentes ou constantes, respectivamente. A função lucro é côncava, mas dados os custos decrescentes é sempre possível aumentar a produção e aumentar o lucro indefinidamente, ou dado os custos constantes é possível sempre replicar a produção anterior.

Nos dois casos não chegaremos a um ponto de lucro máximo.

Prova de 2012 - Teoria Microeconômica I -

1. Função de custos translog

$$\ln\left[C(w,Y)\right] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(w_i) + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln(w_i)\ln(w_j)\right] + \ln(Y)$$

onde: w é $(n \times 1)$ vetor de preços dos fatores.

Y é o nível de produto.

$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad \forall i,j = 1,\dots,n.$

$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,n.$

i) Demandas condicionais por fatores: $\vec{x}_i(\vec{w},\bar{Y})$

Podemos reescrever a função:

$$C(w,\bar{Y}) = \exp\left\{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(w_i) + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln(w_i)\ln(w_j)\right] + \ln(Y)\right\}$$

Lema de Shepard: $\dfrac{\partial C(\vec{w},\bar{Y})}{\partial w_i} = \vec{x}_i(\vec{w},\bar{Y})$

p/ $i=\beta$

$$\frac{\partial C}{\partial w_\beta} = C(w,\bar{Y})\cdot\left[\frac{\alpha_\beta}{w_\beta} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_{i\beta}\ln(w_i)}{w_\beta}}_{j=\beta} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{\beta j}\ln(w_j)}{w_\beta}}_{i=\beta}\right]$$

$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, logo:

$$\frac{\partial C}{\partial w_\beta} = C(w,\bar{Y})\cdot\left[\frac{\alpha_\beta}{w_\beta} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(\cancel{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_{i\beta}\ln(w_i)}{w_\beta}\right)\right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_\beta} = C(w,\bar{Y})\cdot\left[\frac{\alpha_\beta}{w_\beta} + \frac{1}{w_\beta}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} w_i^{\gamma_{i\beta}}\right)\right]$$

$$\boxed{x_\beta = \exp\cdot\left\{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln(w_i) + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\ln(w_i)\ln(w_j)\right] + \ln(\bar{Y})\right\}\cdot\left[\frac{\alpha_\beta}{w_\beta} + \frac{1}{w_\beta}\ln\prod_{i=1}^{n}\left(w_i^{\gamma_{i\beta}}\right)\right]}$$

//

iii) $c(w,\bar{y})$ é homogênea de grau 1.

Se $c(w,\bar{y})$ é homogênea de grau 1, $c(\lambda w,\bar{y}) = \lambda c(w,\bar{y})$

Portanto basta fazer $\ln[c(\lambda w,\bar{y})] = \ln \lambda \ln c(w,y)$

$$\ln c(\lambda w, y) = \alpha_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(\lambda w_i)}_{(1)} + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln(\lambda w_i)\ln(\lambda w_j)\right]}_{(2)} + \ln y_0$$

Resolvendo (1):

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(\lambda w_i) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \ln \lambda + \alpha_i \ln w_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln w_i$$

$$\boxed{= \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln w_i} \,//$$

Resolvendo (2):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln(\lambda w_i)\ln(\lambda w_j) = \sum_i \sum_j \gamma_{ij}(\ln \lambda + \ln w_i)(\ln \lambda + \ln w_j)$$

$$= \sum_i \sum_j \gamma_{ij}\left[(\ln\lambda)^2 + \ln\lambda \ln w_j + \ln w_i \ln \lambda + \ln w_i \ln w_j\right]$$

$$= \sum_i \sum_j \gamma_{ij}(\ln\lambda)^2 + \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln\lambda \ln w_j + \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln w_i \ln\lambda + \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j$$

$$= \underbrace{(\ln\lambda)^2 \cancelto{0}{\sum_i \sum_j \gamma_{ij}}} + \underbrace{\ln\lambda \cancelto{0}{\sum_i \gamma_{ij} \sum_j \ln w_j}} + \underbrace{\ln\lambda \cancelto{0}{\sum_i \ln w_i \sum_j \gamma_{ij}}} + \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j$$

dado que $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0$ $\quad = 0 + 0 + 0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j} \,//$$

Assim, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln(\lambda w_i)\ln(\lambda w_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j$

$$\ln c(\lambda w,\bar{y}) = \alpha_0 + \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(w_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j + \ln y$$

$\boxed{\ln c(\lambda w,\bar{y}) = \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \ln c(w,y)}\,// \rightarrow$ Assim $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1}\,//$

(2-) A e B ⇒ indivíduos

x_1 e x_2 ⇒ bens

$$U^A(x_1,x_2) = (x_1x_2)^2 \qquad w^A = (18,4)$$

$$U^B(x_1,x_2) = \ln x_1 + 2\ln x_2 \qquad w^B = (3,6)$$

i) $\begin{cases} \max\ U^A = (x_1x_2)^2 \\ \text{s.a.}\quad p_1x_1 + p_2x_2 = 18p_1 + 4p_2 \end{cases}$

$$L = (x_1x_2)^2 + \lambda(18p_1 + 4p_2 - p_1x_1 - p_2x_2)$$

C.P.O.:

$$L_1 = 2x_1x_2^2 - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$L_2 = 2x_1^2x_2 - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = 18p_1 + 4p_2 - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

Divide (1) por (2):

$$\frac{\cancel{2}\cancel{x_1}x_2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}x_1^{\cancel{2}}\cancel{x_2}} = \frac{\cancel{\lambda}p_1}{\cancel{\lambda}p_2} \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{p_1}{p_2}\cdot x_1} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$p_1x_1 + \cancel{p_2}\cdot\frac{p_1}{\cancel{p_2}}x_1 = 18p_1 + 4p_2$$

$$2p_1x_1 = 18p_1 + 4p_2$$

$$x_1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_1}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{9p_1 + 2p_2}{p_1}}$$

$$x_2 = \frac{\cancel{p_1}}{p_2}\cdot\frac{9p_1 + 2p_2}{\cancel{p_1}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{9p_1 + 2p_2}{p_2}}$$

$\begin{cases} \max\ U^B = \ln(x_1) + 2\ln(x_2) \\ \text{s.a.}\quad p_1x_1 + p_2x_2 = 3p_1 + 6p_2 \end{cases}$

$$L = \ln x_1 + 2\ln x_2 + \lambda(3p_1 + 6p_2 - p_1x_1 - p_2x_2)$$

C.P.O.:

$$L_1 = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$L_2 = \frac{2}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$L\lambda = 3P_1 + 6P_2 - P_1X_1 - P_2X_2 = 0 \quad (3)$

Divide (1) por (2):

$$\frac{1/X_1}{2/X_2} = \frac{\cancel{\lambda} P_1}{\cancel{\lambda} P_2} \rightarrow \frac{X_2}{2X_1} = \frac{P_1}{P_2} \rightarrow \boxed{X_2 = \frac{P_1}{P_2} \cdot 2X_1} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$P_1X_1 + \cancel{P_2} \cdot \frac{P_1}{\cancel{P_2}} 2X_1 = 3P_1 + 6P_2$$

$$3P_1X_1 = 3P_1 + 6P_2$$

$$X_1 = \frac{3P_1 + 6P_2}{3P_1}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{P_1 + 2P_2}{P_1}}$$

$$X_2 = \frac{\cancel{P_1}}{P_2} \cdot 2 \cdot \frac{P_1 + 2P_2}{\cancel{P_1}}$$

$$\boxed{X_2 = \frac{2P_1 + 4P_2}{P_2}}$$

No equilíbrio, o excesso de demanda, $Z_1(\vec{P})$ pelo bem 1 é zero, dado que temos apenas 2 bens e se um dos mercados estiver em equilíbrio o outro também estará.

$$Z_1(\vec{P}) = X_1(\vec{P}) - W_1 = 0$$

$$\frac{9P_1 + 2P_2}{P_1} + \frac{P_1 + 2P_2}{P_1} - (18+3) = 0$$

$$\frac{10P_1 + 4P_2}{P_1} = 21$$

$$10P_1 + 4P_2 = 21P_1$$

$$10P_1 - 21P_1 = -4P_2$$

$$-11P_1 = -4P_2$$

$$\boxed{P_1^* = \frac{4}{11} P_2}$$

vetor de preços de equilíbrio

$$\boxed{\vec{P}^* = \left(\frac{4}{11} P_2 \; , P_2\right)}$$

Normalizando $P_2 = 1$

$$\boxed{\vec{P}^* = \left(\frac{4}{11} , 1\right)}$$

ii) Curva de contrato ③

A condição necessária para uma alocação pareto eficiente é que as taxas marginais de substituição dos consumidores sejam iguais.

Assim: $TMSA = TMSB$

$$TMSA = \frac{\partial U^A/\partial X_1}{\partial U^A/\partial X_2} \qquad \frac{\cancel{2}\cancel{X_1}\, X_2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}X_1^2\, \cancel{X_2}} = \frac{1/X_1}{2/X_2}$$

$$TMSB = \frac{\partial U^B/\partial X_1}{\partial U^B/\partial X_2} \qquad \frac{X_2^A}{X_1^A} = \frac{X_2^B}{2X_1^B}$$

Se X_1 e X_2 são factíveis

$$X_1^A + X_1^B = 18 + 3 = 21$$

$$X_2^A + X_2^B = 4 + 6 = 10$$

Expresse X_1^B e X_2^B em termos de X_1^A e X_2^A respectivamente:

$$X_1^B = 21 - X_1^A$$

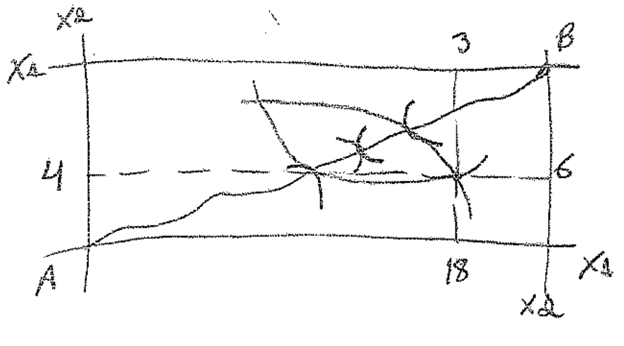
$$X_2^B = 10 - X_2^A$$

Assim, as TMS serão:

$$\frac{X_2^A}{X_1^A} = \frac{10 - X_2^A}{2(21 - X_1^A)}$$

O domínio da equação é $0 \leq X_1^A \leq 21$ e o facto de as alocações serem factíveis caracterizam o conjunto das alocações pareto-eficiente A. (curva de contrato). Isto é:

$$A = \left(X_1^A, X_2^A, X_1^B, X_2^B\right) : \frac{X_2^A}{X_1^A} = \frac{10 - X_2^A}{2(21 - X_1^A)} \quad \begin{cases} 0 \leq X_1^A \leq 21 \\ X_1^A + X_1^B = 21 \\ X_2^A + X_2^B = 10 \end{cases}$$



3- Eficiência × equidade e alocação centralizada × descentralizada de recursos.

Os modelos de equilíbrio geral tratam de fornecer uma explicação global do comportamento do consumo, da produção e da formação de preços em uma economia. Saindo do comportamento maximizador individual, o modelo estuda as interações no mercado, resultando em alocações direcionadas por um vetor de preços.

O equilíbrio do modelo resulta em uma alocação eficiente no sentido de Pareto (não é possível melhorar a situação de algum indivíduo sem piorar a de outros, ou seja, as possibilidades de ganhos para todos foram exauridas. Este é o 1º teorema fundamental do bem-estar. É importante salientar que a questão relevante no modelo é o critério de eficiência e não questões distributivas.

No que diz respeito a equidade, o anseio por uma distribuição mais equitativa nem sempre corresponde a uma "maior eficiência". Além disso, alguns problemas de alocação podem surgir pela dificuldade de encontrar um critério de distribuição adequado.

Essas questões se tornam ainda mais latentes quando se trata de uma economia centralizada por um planejador central. É possível que essa forma de alocação alcance o resultado de equilíbrio da interação via mercado. Para isso, o planejador deverá mapear corretamente os gastos e preferências dos indivíduos, o que dificilmente ele consegue. Assim, uma economia descentralizada tende a atender melhor os objetivos de eficiência e equidade.

4- A função de custo é o valor mínimo do custo, ou seja, o custo avaliado nas escolhas ótimas $C(\vec{w},\bar{y}) = \vec{w} \cdot \vec{x}(\vec{w},\bar{y})$. No longo prazo, todos os fatores são variáveis, de modo que o produtor pode maximizar seu lucro escolhendo livremente a quantidade de insumos. Já no curto prazo, alguns fatores são fixos (não podem ser alterados) gerando custos fixos que independem da produção. (4)

Desse modo, cria-se uma restrição semelhante ao problema com racionamento de bens da Teoria do Consumidor. O custo de produção é restrito pelo fator fixo, originando a função de custo restrita $C(\vec{w},\bar{y},x_1) = \underbrace{w_1 \cdot x_1}_{CF} + w_v \cdot \bar{x}_v(\vec{w},\bar{y},x_1)$

uma das propriedades da função de custo é que ela é côncava em w:

$$c(\theta w + (1-\theta)w', y) \geq \theta c(w,y) + (1-\theta) c(w',y)$$

Defina $w'' = \theta w + (1-\theta) w'$

$$c(w'',y) = w'' \cdot x(w'',\bar{y})$$

$$c(w'',y) = \theta w + (1-\theta) w' \cdot x''$$

$$c(w'',y) = \theta w x'' + (1-\theta) w' \cdot x''$$

Sabemos que $w' \cdot x'' \geq w' \cdot x' \quad (I)$

$w \cdot x'' \geq w \cdot X \quad (II)$

Multiplicando (I) por θ e (II) por $(1-\theta)$ e somando as duas expressões.

$$\theta w' \cdot x'' \geq w' \cdot x' \theta$$

$$(1-\theta) w \cdot x'' \geq w \cdot x \ (1-\theta)$$

$$\underbrace{\theta w' \cdot x'' + (1-\theta) w \cdot x''}_{} \geq \theta w x + (1-\theta) w' \cdot x'$$

$$\boxed{c(w'',y) \geq \theta c(w,y) + (1-\theta) c(w',y)}$$ //

Tanto a função despesa quanto a função custo representam gastos com quantidade demandada. A primeira com a demanda por produtos pelo consumidor e a segunda com a a demanda por fatores pela firma. Ambas representam a mesma coisa e possuem as mesmas propriedades, dentre elas a concavidade nos preços provada acima

02/06/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
ECOP 24 - TEORIA MICROECONOMICA I
PROF.: MARCELO S. PORTUGAL
I TRIMESTRE DE 2014
2^0 PROVA (com um ponto de bônus)

Wallace Patrick Santos de Farias Souza.
PPGE - UFRGS

Tempo de prova: 4 horas e 30 minutos.

1) Considere uma firma com a seguinte função de produção CES que utiliza apenas dois fatores de produção (capital e trabalho) cujos preços são, respectivamente, $r > 0$ e $w > 0$:

$$y = \gamma\{\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\}^{\frac{-V}{\rho}} + 100\varepsilon, \text{ onde } \gamma > 0, V > 0, \rho \geq -1, \text{e } 0 < \delta < 1.$$

a) Determine o valor do parâmetro ε e justifique a sua resposta. (0,5 ponto)
b) Determine a função custo gerada por essa função de produção. (1,5 ponto)

2) Considere as demandas condicionais de fatores x_1 e x_2 como função dos preços ($w's$) e do nível de produção (y) na forma:

$$x_1(w_1, w_2, y) = y\left[1 + 3w_1^{-\frac{1}{2}}w_2^{\alpha}\right]$$

$$x_2(w_1, w_2, y) = y\left[1 + \beta w_1^{\frac{1}{2}}w_2^{\gamma}\right]$$

a) Considere que o produto seja igual a 1. Quais devem ser os valores dos parâmetros α, β e γ ? (2 pontos)
b) Assumindo, agora, um valor qualquer para o produto (y), determine a função de produção associada a essas demandas condicionais por fatores. (1 ponto)

3) Considere uma economia com duas firmas e dois consumidores. Denote V como a quantidade de vodkas, C como a quantidade de cervejas e A como a quantidade de água (todos em litros). A função de utilidade dos consumidores é dada por:

$$U_1(V, C) = V^{0,4}C^{0,6} \qquad U_2(V, C) = 10 + 0,5\ln V + 0,5\ln C$$

Cada consumidor possui, inicialmente, 10 litros de água. O consumidor 1 é dono da firma 1 (que produz vodka) e o consumidor 2 é proprietário da firma 2 (que produz cerveja). As funções de produção de inspiração bíblica das firmas 1 e 2, que transformam água em vodka e cerveja, são dadas, respectivamente, por: $V = 2A_1$ e $C = 3A_2$. Encontre o equilíbrio competitivo. Isso é, os preços de equilíbrio e as quantidades ótimas (os valores de $A_1^*, A_2^*, V_1^*, V_2^*, C_1^*, C_2^*, P_V^*$ e P_C^*). Dica: considere que $P_A = 1$. (2 pontos)

4) Relacione a teoria da produção com o modelo de escolha do consumidor com racionamento de quantidades. (1,5 ponto)

5) Enuncie os dois teoremas fundamentais do Bem-Estar e demonstre um deles (1 ponto). Quais as implicações desses teoremas na discussão sobre equidade e eficiência do equilíbrio walrasiano (1,5 ponto).

1º Teorema – Eficiência
2º Teorema – Equidade

10,6 (1)

(1) $Y = \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{-\frac{\nu}{\rho}} + 100\,\varepsilon$

0,5

a) $\varepsilon = 0$, dado que para produzir é necessário usar capital e/ou trabalho e o termo 100ε não apresenta nenhum dos dois. Um valor positivo para ε indicaria que mesmo com zero de insumos K e L teríamos produção (o que não é possível) e um valor negativo para ε indicaria que sem insumos teríamos produção negativa, o que também não é possível.

b) Função Custo.

$$\begin{cases} \min \; w_K . K + w_L L \\ \text{s.a.} \; \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{-\frac{\nu}{\rho}} = \bar{Y} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = w_K . K + w_L . L + \lambda \left(\bar{Y} - \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{-\frac{\nu}{\rho}} \right)$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = w_K - \lambda \left(\frac{-\nu}{\rho} \right) . \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{\frac{-(\nu+\rho)}{\rho}} . (-\rho)\, \delta K^{-\rho-1} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w_L - \lambda . \left(\frac{-\nu}{\rho} \right) . \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{\frac{-(\nu+\rho)}{\rho}} . (-\rho)(1-\delta) L^{-\rho-1} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{Y} - \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{-\frac{\nu}{\rho}} = 0 \quad (3)$$

Divide (1) por (2)

$$\frac{w_K}{w_L} = \frac{\cancel{\lambda(-\nu/\rho)} . \cancel{\gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{\frac{-(\nu+\rho)}{\rho}}} . \cancel{(-\rho)}\, \delta K^{-\rho-1}}{\cancel{\lambda(-\nu/\rho)}\, \cancel{\gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{\frac{-(\nu+\rho)}{\rho}}} . \cancel{(-\rho)}(1-\delta) L^{-\rho-1}}$$

$$\frac{w_K}{w_L} = \frac{\delta}{(1-\delta)} . \left(\frac{K}{L} \right)^{-(\rho+1)} \Rightarrow \boxed{K = \left[\frac{w_K}{w_L} . \frac{1-\delta}{\delta} \right]^{-\frac{1}{\rho+1}} . L} \quad (4)$$

Substitui (4) em (3):

$$\gamma\left\{\delta\left(\left[\frac{w_K}{w_L}\cdot\frac{1-\delta}{\delta}\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}\cdot L^{-\rho}\right)+(1-\delta)L^{-\rho}\right\}^{-\frac{v}{\rho}}=Y$$

$$\gamma\left\{\delta\left[\frac{w_K}{w_L}\cdot\frac{(1-\delta)}{\delta}\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}\cdot L^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right\}=Y^{-\frac{\rho}{v}}$$

$$\frac{\delta\left[w_K(1-\delta)\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}\cdot L^{-\rho}+\left[w_L\,\delta\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}(1-\delta)L^{-\rho}}{\left[w_L\,\delta\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}}=\frac{Y^{-\frac{\rho}{v}}}{\gamma}$$

$$\left[\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)\left[\delta\,w_L\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]\cdot L^{-\rho}=\frac{Y^{-\frac{\rho}{v}}}{\gamma}\cdot(w_L\,\delta)^{\frac{\rho}{\rho+1}}$$

$$L=\left[\frac{Y^{-\frac{\rho}{v}}}{\gamma}\cdot\frac{(w_L\delta)^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)\left[\delta w_L\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

A1

$$\boxed{L=\frac{Y^{\frac{1}{v}}}{\gamma^{-\frac{1}{\rho}}}\cdot\frac{(w_L\,\delta)^{-\frac{1}{\rho+1}}}{\left[\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)(\delta w_L)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}}$$

Demanda condicional por fatores

Substituindo em (4):

$$K=\left[\frac{w_K}{w_L}\cdot\frac{(1-\delta)}{\delta}\right]^{-\frac{1}{\rho+1}}\cdot\frac{Y^{\frac{1}{v}}}{\gamma^{-\frac{1}{\rho}}}\cdot\frac{(w_L\,\delta)^{-\frac{1}{\rho+1}}}{\left[\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)(\delta w_L)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}$$

$$K=\frac{\left[w_K(1-\delta)\right]^{-\frac{1}{\rho+1}}}{\cancel{(w_L\,\delta)^{-\frac{1}{\rho+1}}}}\cdot\frac{Y^{\frac{1}{v}}}{\gamma^{-\frac{1}{\rho}}}\cdot\frac{\cancel{(w_L\,\delta)^{-\frac{1}{\rho+1}}}}{\left[\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)(\delta w_L)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}$$

$$\boxed{K=\frac{Y^{\frac{1}{v}}}{\gamma^{-\frac{1}{\rho}}}\cdot\frac{(w_K\cdot(1-\delta))^{-\frac{1}{\rho+1}}}{\left[\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)(\delta w_L)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}}$$

Função Custo:

$$C(w_K,w_L,Y)=w_K\cdot\left[w_K(1-\delta)\right]^{-\frac{1}{\rho+1}}+w_L\cdot(w_L\,\delta)^{-\frac{1}{\rho+1}}\cdot\left[\frac{Y^{\frac{1}{v}}}{\gamma^{-\frac{1}{\rho}}}\cdot\frac{1}{\left[\delta\left[(1-\delta)w_K\right]^{\frac{\rho}{\rho+1}}+(1-\delta)(\delta w_L)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}\right]$$

Final na Página (5-)

3

2- a) ~~Assumindo~~ $Y = 1$

$x_1(w_1, w_2, Y) = Y\left[1 + 3w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\alpha}\right]$

$x_1(w_1, w_2, Y) = 1 + 3w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\alpha}$

Dado que x_1 é homogênea de grau zero.

$x_1(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = x_1(w_1, w_2, Y)$.

$x_1(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = 1 + 3(\lambda w_1)^{-\frac{1}{2}} (\lambda w_2)^{\alpha}$

$x_1(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = 1 + \lambda^{-\frac{1}{2}+\alpha} 3 w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\alpha}$

$x_1(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = 1 + \lambda^0 3 w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\alpha}$

$x_1(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = x_1(w_1, w_2, Y)$

Portanto $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ //

$x_2(w_1, w_2, Y) = 1 + \beta w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{\gamma}$

$x_2(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = x_2(w_1, w_2, Y)$

x_2 é homogênea de grau zero.

$x_2(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = 1 + \lambda^{\frac{1}{2}+\gamma} \beta w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{\gamma}$

$x_2(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = 1 + \lambda^0 \beta w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{\gamma}$

$x_2(\lambda w_1, \lambda w_2, Y) = x_2(w_1, w_2, Y)$

Portanto: $\boxed{\gamma = -\frac{1}{2}}$ //

2,0

Dado que $x_1 = \frac{\partial c(w, Y)}{\partial w_1}$ e $x_2 = \frac{\partial c(w, Y)}{\partial w_2}$ e dado que os expoentes correspondem ($w_1^{\frac{1}{2}}$ e $w^{\frac{1}{2}}$) então $\boxed{\beta = 3}$ //

7 (4)

(2) b)

$$x_1 = y\left[1 + 3w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$x_1 = y + 3y w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 - y = 3y\, w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x_1 - y}{3y} = w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}$$

$$w_1^{-\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}} = \frac{x_1 - y}{3y}$$

$$\boxed{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x_1 - y}{3y}} \quad (1)$$

$$x_2 = y\left[1 + 3w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$x_2 = y + 3y\, w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x_2 - y}{3y} = w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{x_2 - y}{3y}$$

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x_2 - y}{3y}$$

$$\boxed{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{x_2 - y}} \quad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{x_1 - y}{3y} = \frac{3y}{x_2 - y}$$

$$9y^2 = (x_1 - y)\cdot(x_2 - y)$$

$$9y^2 = x_1x_2 - x_1y - x_2y - y^2$$

$$9y^2 - y^2 = x_1x_2 - (x_1 + x_2)y$$

$$8y^2 + (x_1 + x_2)y - (x_1x_2) = 0$$

$$Y = \frac{-(x_1+x_2) \pm \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-x_1x_2)}}{2 \cdot 8}$$

$$Y = \frac{-(x_1+x_2) \pm \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 32\,x_1x_2}}{16}$$

$$Y = \frac{-(x_1+x_2) \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 34\,x_1x_2}}{16}$$

1,0

$$\boxed{Y = \frac{-(x_1+x_2) + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 34\,x_1x_2}}{16}}$$

Função de Produção associada, dado que não existe produção negativa, pois $(x_1+x_2) < \sqrt{(x_1+x_2)^2 + 32\,x_1x_2}$, em valor absoluto, sendo o primeiro termo negativo e o segundo termo positivo.

Final da (1)

Função Custo

$$\boxed{C(w_K, w_L, Y) = w_K^{\frac{\rho}{\rho+1}} \cdot (1-\delta)^{\frac{-1}{\rho+1}} + w_L^{\frac{\rho}{\rho+1}} \cdot \delta^{\frac{-1}{\rho+1}} \cdot \left[\frac{Y^{\frac{1}{\nu}}}{\gamma^{-\frac{1}{\rho}}} \cdot \frac{1}{\left[\delta[(1-\delta) \cdot w_K]^{\frac{\rho}{\rho+1}} + (1-\delta)(\delta\, w_L)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}\right]}$$

A

(6)

(3-) $V \Rightarrow$ vodkas } bens $A \Rightarrow$ água (insumo)
$C \Rightarrow$ cervejas

$$\begin{cases} \text{Consumidor 1} & U_1(V,C) = V^{0,4} C^{0,6} & W = 10 \\ \text{Consumidor 2} & U_2(V,C) = 10 + 0,5 \ln V + 0,5 \ln C & W = 10 \end{cases}$$

Firma 1 (Produz vodka) $V = 2A_1$
Firma 2 (Produz cerveja) $C = 3A_2$

* Firma:

Firma 1:

$$\begin{cases} \max \pi_1 = P_V \cdot V - P_A \cdot A_1 & \underline{P_A = 1} \\ \text{s.a. } V = 2A_1 \end{cases}$$

$\max \pi_1 = P_V \cdot 2A_1 - A_1$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_1} = 2P_V - 1 = 0 \rightarrow \boxed{P_V^* = \frac{1}{2}}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \cdot 2A_1 - A_1$$

$\boxed{\pi_1 = 0}$ Lucro da Firma 1.

Firma 2:

$$\begin{cases} \max \pi_2 = P_C \cdot C - P_A \cdot A_2 & \underline{P_A = 1} \\ \text{s.a. } C = 3A_2 \end{cases}$$

$\max \pi_2 = P_C \cdot 3A_2 - A_2$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_2} = 3P_C - 1 = 0 \rightarrow \boxed{P_C^* = \frac{1}{3}}$$

$\pi_2 = \frac{1}{3} \cdot 3A_2 - A_2 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = 0}$ Lucro da Firma 2.

* Consumidor:

Consumidor 1:

$$\max \quad U_1(v,c) = v^{0,4} c^{0,6}$$

$$\text{s.a} \begin{cases} P_C \cdot C + P_V \cdot V = \underbrace{P_A \cdot A}_{\text{dotação}} + \underbrace{1 \cdot (\pi_1)}_{\text{Proprietário (100\%) da firma 1}} \\ \frac{1}{3}C + \frac{1}{2}V = 10 + 0 \end{cases}$$

$$L = v^{0,4} c^{0,6} + \lambda \left(10 - \tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{2}v\right)$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial L}{\partial V} = 0{,}4\, V^{-0,6} c^{0,6} - \frac{1}{2}\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = 0{,}6 \cdot V^{0,4} \cdot C^{-0,4} - \frac{1}{3}\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - \frac{1}{3}C - \frac{1}{2}V = 0 \qquad (3)$$

Divido (1) e (2):

$$\frac{0{,}4\, V^{-0,6} C^{0,6}}{0{,}6\, V^{0,4} C^{-0,4}} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{\lambda}}{\frac{1}{3}\cancel{\lambda}} \rightarrow \frac{2}{3}\frac{C}{V} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{C}{V} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{C = \frac{9}{4}V} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$\frac{1}{3}C + \frac{1}{2}V = 10$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}V + \frac{1}{2}V = 10$$

$$\frac{9}{12}V + \frac{1}{2}V = 10$$

$$\frac{9+6}{12}V = 10$$

$$V = \frac{10 \cdot 12}{15}$$

$$\boxed{V_1^* = 8}$$ 8 litros de vodka

$$C = \frac{9}{4} \cdot 8$$

$$\boxed{C_1^* = 18}$$

18 litros de cerveja.

* Consumidor 2:

$$\max \; U_2(V,C) = 10 + 0{,}5 \ln V + 0{,}5 \ln C$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} P_C \cdot C + P_V \cdot V = \underbrace{P_A \cdot A}_{\text{dotação}} + \underbrace{1 \cdot \Pi_2}_{\text{proprietário (100\%) da firma 2.}} \\ \frac{1}{3} C + \frac{1}{2} V = 10 + 0 \end{cases}$$

$$L = 10 + 0{,}5 \ln V + 0{,}5 \ln C + \lambda \left(10 - \tfrac{1}{3} C - \tfrac{1}{2} V\right)$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \frac{0{,}5}{V} - \frac{1}{2}\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = \frac{0{,}5}{C} - \frac{1}{3}\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - \frac{1}{3} C - \frac{1}{2} V = 0 \qquad (3)$$

Divide (1) por (2):

$$\frac{0{,}5/V}{0{,}5/C} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{\lambda}}{\frac{1}{3}\cancel{\lambda}} \Rightarrow \frac{C}{V} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{2} V} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$\frac{1}{3} C + \frac{1}{2} V = 10$$

$$\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} V + \frac{1}{2} V = 10$$

$$\frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V = 10$$

$$\boxed{V_2^* = 10}$$

10 litros de vodka

$$C = \frac{3}{2} \cdot 10$$

$$\boxed{C_2^* = 15}$$

15 litros de cerveja.

Substituindo para encontrar A_1 e A_2:

$V = V_1^* + V_2^*$ | $C = C_1^* + C_2^*$
$V = 8 + 10$ | $C = 18 + 15$
$V = 18$ | $C = 33$

A_1:

$V = 2A_1$ | ou $\pi_1 = P_V \cdot V - P_A \cdot A_1 = 0$
$18 = 2A_1$ | $\frac{1}{2} \cdot 18 - 1 A_1 = 0$
$\boxed{A_1^* = 9}$ // | $9 - A_1 = 0$
$\boxed{A_1^* = 9}$ //

A_2:

$C = 3 \cdot A_2$ | ou $\pi_2 = P_C \cdot C - P_A \cdot A_2 = 0$
$33 = 3 \cdot A_2$ | $\frac{1}{3} \cdot 33 - 1 \cdot A_2 = 0$
$\boxed{A_2^* = 11}$ // | $11 - A_2 = 0$
$\boxed{A_2^* = 11}$ //

$A_1^* + A_2^* = A$
$9 + 11 = 20 \Rightarrow$ dotação inicial (10 litros de água cada indivíduo tinha).

2,0

10

4- A Teoria da produção pode ser analisada de forma análoga a Teoria do Consumidor. Na produção, as firmas buscam maximizar lucros para uma dada tecnologia e quantidade de insumos (que corresponde ao custo) ou busca minimizar o custo de produção para uma determinada quantidade de produto (sujeita a tecnologia disponível).

Assim:

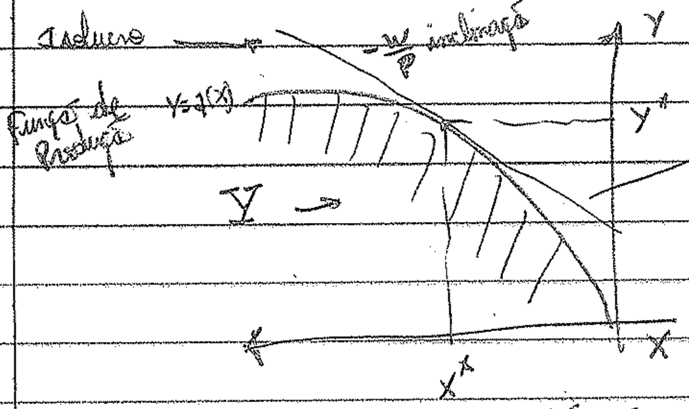
$$\max \pi = \vec{P}.\vec{Y} + \vec{W}.\vec{X}$$
$$s.a.\ Y = f(x)$$

$Y \to$ produto $\quad P \to$ preço do produto
$X \to$ insumo $\quad W \to$ preço do insumo.

ou

$$\min C(w,Y) = \vec{W}.\vec{X}$$
$$s.a.\ f(x) = \bar{Y}$$

1,5



$$\boxed{Y = \frac{\pi}{p} - \frac{w}{p} X}$$

O lucro máximo (consequentemente o custo mínimo de produzir Y) é dado no ponto de tangência do conjunto de possibilidades de produção (Y) com a reta isolucro, sendo que Y exibe retornos decrescentes de escala (competição perfeita).

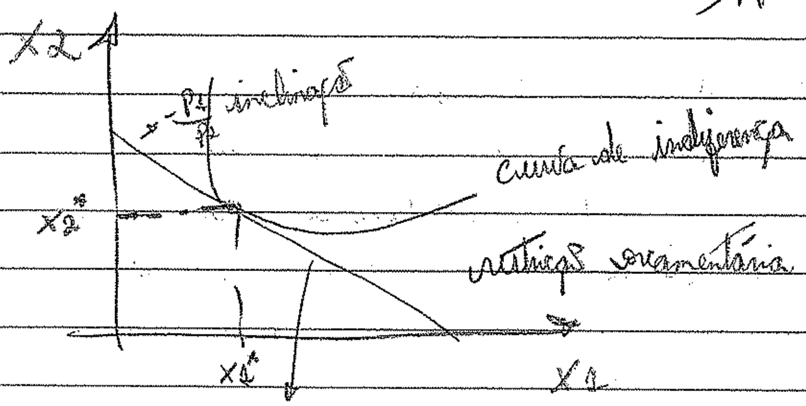
Analogamente, os consumidores buscam maximizar a sua utilidade dada a sua restrição orçamentária ou buscam minimizar o gasto (despesa) para obter um determinado nível fixo de utilidade.

$$\max U(\vec{x})$$
$$s.a\ \vec{p}.\vec{x} = R$$

$x \to$ bens $\quad P \to$ preço dos bens
$U \to$ utilidade
$R \to$ renda

ou $\min \vec{p}.\vec{x}$
$$s.a\ U(\vec{x}) = \bar{U}$$

(11)



Para 2 bens $P_1X_1 + P_2X_2 = b$

$$\boxed{X_2 = \frac{b}{P_2} - \frac{P_1}{P_2}X_1}$$

A utilidade máxima (consequentemente o gasto mínimo de obter um determinado ($\bar{U}$)) é dado no ponto de tangência da curva de indiferença com a restrição orçamentária do consumidor. Nesse ponto, o consumidor consegue o máximo de utilidade (bem-estar) que o seu orçamento permite.

Voltando a Teoria da firma, alguns insumos podem ser fixos no curto prazo, tal que a firma não tem como escolher a quantidade demandada desse insumo. Isso gera uma função de custo de curto prazo, que é maior ou igual ao custo de longo prazo e consequentemente uma função lucro de curto prazo (restrita), sendo menor ou igual a função lucro de longo prazo (irrestrita).

$$C(w,y) \leq C(w,y,\bar{x}_f) \qquad \bar{x}_f \Rightarrow \text{insumo fixo (quantidade)}$$

$$\pi(w,p) \geq \pi(w,p,\bar{x}_f)$$

A igualdade só é válida se a quantidade fixa do insumo for exatamente a quantidade ótima que a firma queira demandar. Se não for o caso, no longo prazo a firma sempre pode ajustar a quantidade de insumos utilizados de modo a reduzir o custo e/ou aumentar o lucro em relação a situação em que $\bar{x}_f$.

Isso também é análogo ao modelo de escolha do consumidor com

(12)

racionamento de quantidade, onde o consumidor tem de consumir uma quantidade fixa de determinado bem, de modo que a minimização da despesa para um nível de utilidade que o consumidor deseja, deve levar em conta a parcela da renda a ser gasta com esse bem.
No ponto onde a quantidade racionada é igual a quantidade ótima que o consumidor deseja consumir a função despesa com racionamento é igual a função despesa sem racionamento, de modo que o consumidor maximiza tal como se o racionamento não existisse.
Em suma, a função custo na teoria da firma e a função despesa na teoria do consumidor é um exemplo de que as análises podem ser feitas de forma análoga, em termos algébricos e intuitivos.

(5-)

1º Teorema Fundamental do Bem-Estar – Todo equilíbrio walrasiano é uma alocação eficiente no sentido de Pareto (não pode melhorar a situação de um indivíduo sem piorar a situação dos outros).

2º Teorema Fundamental do Bem-Estar – Toda alocação eficiente no sentido de Pareto (ótima de pareto) pode ser conseguida através de um equilíbrio walrasiano, desde que sejam feitas as redistribuições apropriadas na dotação inicial dos indivíduos.

Demonstração do 1º Teorema Fundamental do Bem-Estar:

Suponha $x^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o equilíbrio walrasiano.

Por contradição, suponha que x^* não é ótima de Pareto, ou seja:
Existe outra alocação x' tal que:

$U_i(x_i') \geq U_i(x_i^*) \quad \forall i$

$U_i(x_i') > U_i(x^*)$ para pelo menos um indivíduo i.

1º Dado que a alocação deve ser factível:

$$\sum_{i=1}^{I} P \cdot x_i' = \sum_{i=1}^{I} P \cdot w_i \quad (1)$$

Sendo x^* o equilíbrio walrasiano:

$U_i(x^*) \geq U_i(w_i) \quad \forall i$

$U_i(x^*) > U_i(w_i)$ para pelo menos um indivíduo i.

Dado que x^* também é factível

$$\sum_{i=1}^{I} P \cdot x_i^* = \sum_{i=1}^{I} P \cdot w_i \quad (2)$$

Como x_i' é ótima de Pareto

$P \cdot x_i' \geq P \cdot x_i^*$ $\quad \forall i$

$P \cdot x_i' > P \cdot x_i^*$ para pelo menos um i

$\sum_{i=1}^{I} P \cdot x_i' > \sum_{i=1}^{I} P \cdot x_i^*$ (somando)

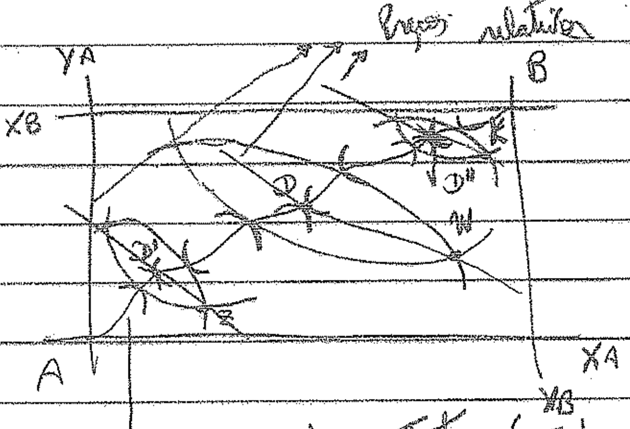
$\boxed{\sum_{i=1}^{I} P \cdot x_i' > \sum_{i=1}^{I} P \cdot w_i}$ Substituindo (2), o que contradiz (1), o fato de x_i' ser factível. Portanto o equilíbrio Walrasiano é ótimo de Pareto (Pertence ao Core da economia - alocações não bloqueadas).

É importante salientar que os Teoremas dizem respeito a alocações eficientes no sentido de Pareto, que não necessariamente são alocações equitativas.

A alocação ótima de Pareto, é um equilíbrio onde todos os ganhos com as trocas feitas pelos consumidores já foram exauridos, sendo que este equilíbrio depende da dotação inicial dos consumidores assim como do poder de barganha de cada um deles nas negociações das trocas entre as quantidades dos bens.

Assim, o equilíbrio pode se dar em um ponto onde um dos indivíduos tem uma quantidade maior (ou bem maior) que outro, sendo portanto uma alocação eficiente de Pareto, mas não igualitária.

15 Para exemplificar, desenhamos a Caixa de EdgeWorth para uma Economia de Trocas com dois indivíduos e dois bens.



Indivíduos A e B

bens X e Y

$X_A + X_B = \bar{X}$

$Y_A + Y_B = \bar{Y}$

→ curva de contrato (todos os pontos eficientes de Pareto)

Supondo que a dotação inicial seja o ponto Z, as trocas levam o equilíbrio Walrasiano no ponto D' (tangência entre as curvas de indiferença do indivíduo A e do indivíduo B), sendo um ponto ótimo de pareto (sob a curva de contrato) onde o indivíduo B tem uma maior quantidade de bem do que A. Se a dotação inicial for o ponto K acontece o inverso, ou seja, o ótimo de Pareto é o ponto D'' onde o indivíduo A tem uma quantidade maior de bens que B.

Quando a dotação inicial é o ponto W, o equilíbrio Walrasiano é o ponto D, onde a redistribuição de bens chega a um resultado bem mais equitativo que em D' e D''.

Portanto, dado que o equilíbrio Walrasiano é eficiente no sentido de Pareto, ele depende da dotação inicial ("ponto de partida") e do poder de barganha dos indivíduos, o que nem sempre resulta em uma redistribuição equitativa dos bens entre os indivíduos. Dito de outra forma, é sempre possível chegar a uma alocação eficiente no sentido de Pareto através do equilíbrio walrasiano, o que não garante que está alocação será equitativa.

O "ideal" seria que tivéssemos uma alocação eficiente e equitativa, onde os indivíduos tivessem um nível de bem-estar aproximado. Para isso, junto com a eficiência (geralmente alcançada de forma descentralizada pelo leiloeiro Walrasiano, dado que o planejador central não conhece as preferências nem os preços relativos) políticas que visam a equidade deveriam ser aplicadas, estas sim por um planejador central.