S T Q Q S S D Macro I - 2016.02 DATA / /

(1) $y_{dt} = 20k_t^{25/100}$ $y_{dt} = \frac{Y_t}{T_t N_t}$, $T_t \rightarrow$ progresso téc.

$n = 1,5\%$, $\delta = 3\%$

$\gamma = 2\%$, $s = 16\%$

a) produto, capital-trabalho e consumo em unidades de trabalho-eficiência no SS.

b) Taxa de poupança que satisfaz a GR.

c) Quais as taxas de crescimento da renda per capita em cada caso (pq!)

d) O SS satisfaz os fatos estilizados de Kaldor?

e) Quanto tempo leva para que a economia percorra 50% do percurso de ajustamento se ela mudar sua taxa de poupança para a taxa de golden rule?

---

a) Considerando uma função de produção Harrod Neutra, $Y_t = F(k_t, T_t N_t)$, teremos, em termos de trabalho-eficiência, dado as características da função de RCE e homogeneidade de grau 1,

$$Y_t = T_t N_t F\Big(\underbrace{\frac{k_t}{T_t N_t}}_{k_t}, 1\Big)$$

$$y_{dt} = f(k_t)$$

Para $\dot{k}_t = I_t - \delta k_t$, o produto da economia será,

$$Y_t = C + I = C + \dot{k}_t + \delta k_t$$

$$\frac{\dot{k}_t}{T_t N_t} = f(k_t) - c_t - \delta k_t, \qquad (1)$$

S T Q Q S S D   DATA / /

Percebe-se que:

$$k_t = \frac{k_t}{T_t N_t} \rightarrow \dot{k}_t = \frac{dk_t}{dt} = \frac{\dot{k}_t T_t N_t - k_t(\dot{T}_t N_t + T_t \dot{N}_t)}{(T_t N_t)^2}$$

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{k}_t}{T_t N_t} - \frac{k_t \dot{T}_t \cancel{N_t}}{(T_t N_t)(T_t \cancel{N_t})} - \frac{k_t \cancel{T_t} \dot{N}_t}{(T_t N_t)(\cancel{T_t} N_t)}$$

k_t k_t

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{k}_t}{T_t N_t} - k_t(\gamma + n), \quad \gamma \rightarrow \text{tx. cresc. prod.} \quad (2)$$

$n \rightarrow$ tx cresc. população trabalho

(2) → (1)

$$\dot{k}_t + k_t(\gamma+n) = f(k_t) - c_t - k_t \delta$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - k_t(\gamma + n + \delta)$$

Para $C_t = Y_t(1-s)$, $s \rightarrow$ tx cresc. poupança, $c_t = f(k_t)(1-s)$,

$$\dot{k}_t = s f(k_t) - k_t(\gamma + n + \delta) \quad (3)$$

No ss, $\dot{k}_t = 0$, logo

$$s.\, f(k_{ss}) = k_{ss}(\gamma + n + \delta)$$

$\gamma = 2\%$

para $s = \frac{16}{100}$, $\delta = \frac{3}{100}$, $n = \frac{1,5}{100}$, $f(k_{ss}) = y_t = 20 k_t^{25/100}$

$$k_{ss} = \frac{s \cdot 20 k_{ss}^{25/100}}{(\gamma + n + \delta)} \rightarrow \frac{k_{ss}}{k_{ss}^{\frac{25}{100}}} = \frac{\frac{16}{100} \cdot 20}{\left(\frac{6,5}{100}\right)}$$

$$1 - \frac{25}{100} = \frac{100-25}{100} = \frac{75}{100} \rightarrow k_{ss}^{3/4} = \frac{0,16 \cdot 20}{0,065}$$

$$\boxed{k_{ss} = \left(\frac{3,2}{0,065}\right)^{4/3} \simeq 180}$$

$$\boxed{y_t = 20(180)^{1/4} \simeq 73,25}$$

$$\boxed{c_{ss} = y_{ss}(1-s) = 73,25(1-0,16) = 61,53}$$

b) s_{gr} é a taxa que maximiza o consumo.

Para $\dot{k}_t = sf(k_t) - k_t(\delta + n + \gamma)$, sabemos que no SS $\dot{k}_t = 0$ e $sf(k_{ss}) = k_{ss}(\gamma + n + \delta)$. O consumo se dá por:

$$c_t = f(k_t) - sf(k_t), \text{ logo}$$
$$sf(k_t) = f(k_t) - c_t$$

substituindo e isolando para c_t,

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(\gamma + n + \delta)$$

O consumo de SS será máximo quando $\partial c_{ss} / \partial k_{ss} = 0$,

$$\frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} : f'(k_{ss}) - (\gamma + n + \delta) = 0$$

No exercício, $f(k_t) = 20k_t^{1/4}$, logo, $f'(k_t) = 5k_t^{-3/4}$.

Assim,

$$5.k_{gr}^{-3/4} = 0{,}065 \rightarrow k_{gr} = \left(\frac{5}{0{,}065}\right)^{4/3}$$

$$k_{gr} = (76{,}9)^{4/3}$$

$$y_{gr} = 20\left[(76{,}9)^{4/3}\right]^{1/4} = 20(76{,}9)^{1/3}$$

substituindo em $s \cdot f(k_{ss}) = k_{ss}(\gamma + n + \delta)$,

$$s \cdot 20(76{,}9)^{1/3} = (76{,}9)^{4/3}(0{,}065)$$

$$s_{gr} = \frac{(76{,}9)^{4/3}}{(76{,}9)^{1/3}} \cdot \frac{0{,}065}{20} \qquad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$s_{gr} = 76{,}9 \cdot \frac{0{,}065}{20} = \boxed{0{,}25 = s_{gr}}$$

c) tx. de crescimento da renda per capta.

Sabemos que a tx. de crescimento do capital é $\dot{k}_t / k_t = g_k$. Assim, para a renda, temos

$$g_y = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{dy_t}{dt} \cdot \frac{1}{y_t} = f'(k_t) \cdot \frac{dk_t}{dt} \cdot \frac{1}{f(k_t)} = \frac{f'(k_t)\dot{k}_t}{f(k_t)}$$

S T Q Q S S D DATA / /

como $g_k = \frac{\dot{k}_t}{k_t} \rightarrow \dot{k}_t = g_k \cdot k_t$, logo

$$g_y = \underbrace{\frac{f'(k_t) \cdot k_t}{f(k_t)}}_{\alpha_k \rightarrow \text{ elasticidade de produção.}} \cdot g_k$$

$$g_y = \alpha_k \cdot g_k$$

Para $s = 0{,}16$,

$$g_k = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s \cdot f(k_t)}{k_t} - (\gamma + n + \delta)$$

$$g_k = \frac{0{,}16 \cdot 73{,}25}{180} - 0{,}065 \cong 0$$

$g_y = g_k = 0$, pois estamos no SS

$$g_k = \frac{0{,}25 \cdot 20 \cdot (76{,}9)^{1/3}}{(76{,}9)^{4/3}} - 0{,}065$$

$$g_k = 5 \cdot (76{,}9)^{-1} - 0{,}065 \cong 0 .$$

$$g_y = g_k = 0$$

Logo, em ambos os casos a taxa de crescimento da renda per capita é zero, pois são situações de steady-stade. A diferença é que no equilíbrio de golden rule o agente atingo o consumo máximo de steady-state, sendo o equilíbrio preferido.

d) O SS satisfaz os fatos de kaldor?

Os fatos de kaldor:

- y_t e g_y não tendem a diminuir
  - ↳ No SS, y_t e g_y são constantes
- k_t cresce ao longo do tempo $(g_k > 0)$
  - ↳ No SS é cte, todavia, para $g_k \geq 0$,

Jandaia

S T Q Q S S D DATA / /

cont (d) fatos de kaldor...

para $g_k \gtrless 0$, depende do estoque inicial de capital k_0. Lembrando que:

$$g_k = \frac{sf(k_t)}{k_t} - \underbrace{(n+\gamma+\delta)}_{cte}$$

No ss, $sf(k_{ss})/k_{ss} = (n+\gamma+\delta)$. Se $k_0 > k_{ss}$, então $g_k < 0$, pois $sf(k_0)/k_0 < (n+\gamma+\delta)$.

- Tx de retorno do capital é praticamente cte
  ↳ ?

- k_t/y_t é praticamente cte
  ↳ No ss sim
- g_y difere entre países
  ↳ sim, pois depende do estoque inicial de capital

e) Meia Vida $(MV) = \frac{\ln(2)}{\mu}$ $\qquad 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$\mu = (1-\alpha_k)(\delta + n + \gamma)$$

$$\alpha_k = \frac{k_t \cdot f'(k_t)}{f(k_t)} = \frac{180^1 \cdot 5 \cdot (180)^{-3/4}}{73{,}25} = \frac{(180)^{1/4} \cdot 5}{73{,}25}$$

$$\mu = \left(\frac{73{,}25 - (180)^{1/4} \cdot 5}{73{,}25}\right)\left(0{,}065\right) = 0{,}049$$

$$MV = \frac{\ln(2)}{0{,}049} \cong 14 \text{ anos}$$

Jandaia