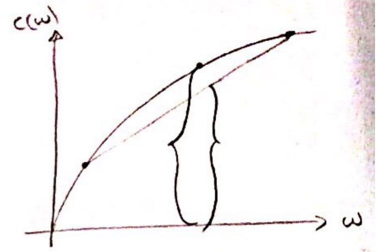
Prova que $C(w,y)$ é côncava em $\vec{w}$.

Considerando w' e w dois vetores positivos, $t \in [0,1]$ e $w'' = tw + (1-t)w'$ a combinação convexa de w e w', então a função de custos será côncava em w se

$$t \cdot C(w,y) + (1-t)C(w',y) \leq C(w'',y).$$



caso $w.x \leq wx^{\gamma}$, ou seja,

com w minimiza os custos p/ quantidades de insumo x, não pode haver um vetor x^{γ} que seja menor que $w.x$. Juntamente, caso $w'x' \leq w'x$ p/ qualquer x^{γ}, essa relação se mantém, para x^*:

$$w\,x \leq w\,x^* \quad (1)$$
$$w'\,x \leq w'\,x^* \quad (2)$$

multiplicando wx por $t(\geq 0)$ e $w'x'$ por $(1-t)$, e somando-as junto com a definição de de w'':

$$\underbrace{t\,w\,x + (1-t)\,w'x'}_{\text{combinação convexa do custo mínimo p/ preços } w \text{ e } w'} \leq \underbrace{w''x^*}_{\text{custo mínimo necessário p/ atingir o ótimo a preços } w \text{ e } w'}$$

Assim:

$$t\,C(w,y) + (1-t)\,C(w',y) \leq C(w'',y).$$

Observar a função restrita e teoria do racionamento

A função de custos é equivalente a função de despesas introduzida na teoria do consumidor. De forma análoga ao consumidor, que busca minimizar suas despesas $[E(p,\bar{U})]$, a firma busca minimizar custos:

Problema da firma $\begin{cases} \min & \vec{x}_i \vec{w}_i \\ \text{s.a} & f(x) = y \end{cases}$

$\begin{cases} \min & \vec{p}_i \vec{x}_i^c \\ \text{s.a.} & U(\vec{x}) = \bar{U} \end{cases}$ ← Problema do consumidor

$x(w,y)$

$x_i^c(p,\bar{U})$

As duas funções $E(\vec{p},\bar{U})$ e $C(\vec{w},y)$ são identicas matematicamente, e, consequentemente, ou seja, compartilham dos mesmos teorema e propriedades das mesmas provas.

- continua em w / p
- Homogenea de grau 1 em w / p
- Não decrescente em $\vec{w}$ / $\vec{p}$
- Côncava em w / p

- Lema de Shephard

$$\frac{\partial C(w,y)}{\partial w_i} = x_i(\vec{w},y)$$

$$\frac{\partial E(p,\bar{U})}{\partial p_i} = x_i^c(\vec{p},\bar{U})$$

Custo restrito e sem restrição → Relação com a teoria do consumidor com racionamento

→ Relação com a função despesa

→ Prove concavidade em $\vec{\omega}$

Função de custos sem restrição

$$c(\vec{\omega}, y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i(\vec{\omega}, y)$$

$$\begin{cases} \min & \vec{\omega} \cdot \vec{x} \\ s.a & y = f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\lambda, \vec{x}) = \vec{\omega}\vec{x} - \lambda(f(x) - y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda, \vec{x})}{\partial x_i} &= \omega_i - \lambda \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda, \vec{x})}{\partial x_j} &= \omega_j - \lambda \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}\right] - \underbrace{\frac{\omega_i}{\omega_j}}_{\text{taxa economica de substituição}} = \underbrace{\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}}}_{\text{Taxa Marginal de substituição técnica (TMST)}}$$

Propriedades

- Não decrescente em $\vec{\omega}$

  $\frac{\partial C(\cdot)}{\partial \omega_i} \geq 0$ ou $\omega' \geq \omega$, então $c(\omega', y) \geq c(\omega, y)$.

  Considerando x e x' as cestas que min custos associadas a ω e ω', então $\omega x \leq \omega x'$ por minimização, e $\omega x' \leq \omega' x'$, pois $\omega' \geq \omega$.

  Logo, $\omega x \leq \omega' x'$.

- Homogênea de grau 1 e ω: $c(\lambda\omega, y) = \lambda c(\omega, y)$, para $\lambda > 0$.
- Continua em ω $\forall$ $\omega >> 0$
- Côncava em ω: $c(\lambda\omega + (1-\lambda)\omega', y) \geq \lambda c(\omega, y) + (1-\lambda) c(\omega', y)$

  $\forall \lambda \in [0, 1]$

- Lema de Shephard: $\frac{\partial c(\omega, y)}{\partial \omega_i} = x_i(\omega, y)$

Função de custo Restrita e sem Restrição e comparar com a teoria do consumidor (com racionamento)

Filipe

Enquanto o problema de minimização dos custos irrestrito, ou de longo prazo, é dado por

$$\begin{cases} c(w,y) = \min\limits_{x} \vec{w}\,\vec{x}(\vec{w},y) \\ \quad s.a.\ f(\vec{x}) = y, \end{cases}$$

tal que todos insumos/fatores de produção são variáveis, no problema com restrição, ou de curto prazo, haverá um vetor $\vec{\bar{x}}$ de fatores fixos, associado ao vetor de preços $\vec{\bar{w}}$, tal que

$$c(\vec{w}, y, \vec{\bar{x}}) = \min_{x} \vec{w}\,\vec{x}(\vec{w}, y, \bar{x}) + \vec{\bar{w}}.\vec{\bar{x}}, \quad s.a.\ f(\vec{x}, \vec{\bar{x}}) = y$$

Assim, $\vec{\bar{x}}$ será considerado um parâmetro, ao invés de uma variável de escolha. Podemos ainda definir $\vec{\bar{w}}.\vec{\bar{x}}$ como o vetor de custo fixo total, enquanto $\vec{w}.\vec{x}(\vec{w},y,\vec{\bar{x}})$ será o de custo variável.

Além disso, é importante ter claro que o custo restrito jamais será maior que o custo de longo prazo, quando todos insumos podem ser escolhidos livremente e de forma ótima. Supondo que exista um vetor $\bar{x}(y)$ que minimize os custos de curto prazo dados preços e a produção y, tal que

$$c(w, \bar{w}, y) \equiv c(w, \bar{w}, y, \bar{x}(y)). \qquad (1)$$

Dado que escolhemos os fatores fixos que minimizam os custos de CP, $\bar{x}(y)$ deve satisfazer a cpo:

$$\frac{\partial c(w, \bar{w}, y, \bar{x}(y))}{\partial \bar{x}_i} \equiv 0 \qquad (2)$$

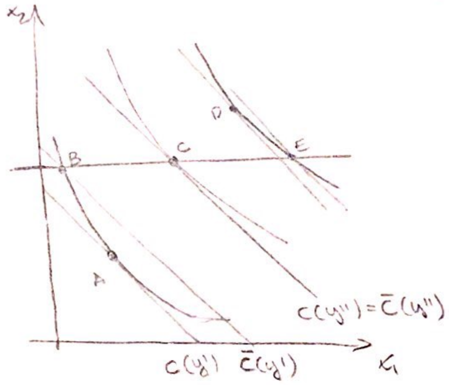
para todos insumos i. Diferenciando (1) em relação a y:

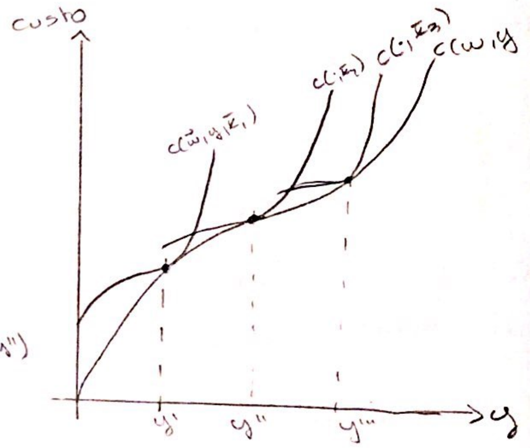
$$\frac{dc(w,\bar{w},y)}{dy} = \frac{\partial c(w,\bar{w},y,\bar{x}(y))}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial c(w,\bar{w},y,\bar{x}(y))}{\partial x_i}}_{=0} \cdot \frac{\partial \bar{x}_i(y)}{dy} = \frac{\partial c(w,\bar{w},y,\bar{x}(y))}{\partial y} \qquad (3)$$

Analisando esse resultado, a eq (1) nos diz que para todo nível de produção, os custos de CP e LP serão iguais para algum nível de fatores fixos, para os demais vetores de fatores fixos, o custo será maior para o caso com restrição, logo:

$$c(\omega, \bar{\omega}, y, \bar{x}) \geq C(\omega, y).$$

Finalmente, o resultado da equação (3) nos mostra que haverá um ponto em que a inclinação do $C_{LP} = C_{CP}$, além de ser um exemplo do teorema do envelope. Assim, podemos dizer que o custo total de longo prazo é a envoltória (ou lower envelope) do custo de curto prazo.





Tendo em vista que a função de custos é análoga a função despesa, é possível analisar a teoria da produção com restrição comparada a teoria de racionamento do consumidor.

$$\begin{cases} \tilde{E}(\vec{p}, \bar{U}, \bar{x}) = \min\ p_1 \tilde{x}_1^c(p_1, p_2, \bar{U}, \bar{x}) + p_2 \bar{x}_2 \\ \text{s.a.}\quad U[x, \bar{x}] = \bar{U} \end{cases}$$

considerando $\bar{p}_2$ o preço virtual que faz o indivíduo consumir $\bar{x}_2$, $\tilde{x}_1^c(p_1, p_2, \bar{U}, \bar{x}) = x_1^c(p_1, \bar{p}_2, \bar{U})$

$$\tilde{E}(p_1, \bar{p}_2, \bar{U}, \bar{x}) = p_1 \cdot x_1^c(p, \bar{q}, \bar{U}) + \bar{p}_2 \cdot x_2^c(p, \bar{q}, \bar{U}) - \bar{p}_2 x_2^c(p, \bar{q}, \bar{U})$$
$$= E(p_1, \bar{p}_2, \bar{U}) + \bar{x}_2 (p_2 - \bar{p}_2).$$

Da mesma forma feita com os custos, podemos diferenciar em relação ao bem racionado, e pelo teorema do envelope sabemos que

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x_1} = \frac{\partial E(p_1, p_2, \bar{U})}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \bar{y}} = p_2 - \bar{p}_2 \quad \therefore$$

$\begin{cases} p_2 > \bar{p}_2 \\ p_2 < \bar{p}_2 \end{cases}$

$p_2 > \bar{p}_2$ consumidor adquire mais que o desejado. $\uparrow \bar{y} \uparrow \tilde{E}$

$p_2 < \bar{p}_2$ consumidor adquire menos que o desejado. $\uparrow \bar{y} \downarrow E$, pois o consumidor diminui a despesa com outros bens p/ adquirir $\bar{y}$.