Lista Macro

(1) $Y = 20k^{25/100}$

$n = 1,5/100$ Prod. do trab. $\gamma_t = 2/100$

$\delta = 3/100$ $s = 18/100$

a) valores do produto, rel. capital-trab. consumo em unidades de trabalho, no ss.

solow: $\dot{k}_t = s f(k_t) - (n + \delta + \gamma)k_t$

No ss, $\dot{k} = 0$, logo

$$s f(k_t) = (n + \delta + \gamma)k_t$$

$$\frac{18}{100}\cdot 20k^{25/100} = \left(\frac{1,5}{100} + \frac{3}{100} + \frac{2}{100}\right)k_t$$

$$k^{25/100} = \frac{6,5}{\cancel{100}} k_t \cdot \frac{\cancel{100}}{18}\cdot\frac{1}{20}$$

$$\frac{k^{25/100}}{k} = \frac{6,5}{360} \qquad \frac{25}{100} - \frac{100}{100}$$

$$k^{-75/100} = \frac{6,5}{360} \qquad -\frac{75}{100}\left(-\frac{100}{75}\right)$$

$$k = \left(\frac{6,5}{360}\right)^{-\frac{100}{75}} \cong 208,31$$

$$Y = 20(208,31)^{25/100} \cong 75,98$$

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(\gamma + n + \delta)$$

$$c_{ss} \cong 71,27$$

b) $c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(\gamma + n + \delta)$

$$\frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} = f'(k_{ss}) - (\gamma + n + \delta) = 0$$

$$f'(k_{ss}) = Y' = \frac{25}{100}\cdot 20k^{-75/100} = \frac{25}{100}\cdot\frac{20}{k^{75/100}}$$

$$f'(k_{ss}) = \gamma + n + \delta$$

$$\frac{5}{k^{3/4}} = \frac{6,5}{100}, \quad k = (76,92)^{4/3} \cong 322,44$$

$$s f(k_{ss}) = (n + \delta + \gamma)k_{ss} \qquad Y_{ss} = 84,75$$

$$s = \frac{20,96}{84,75} = 0,25 \qquad S_{gr} = 25\%$$

$$c_{ss} = 63,56$$

c) $\gamma_{yt} = g_{yt} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta$

No ss, a taxa de crescimento da renda per capita é 0, logo $\gamma_{yt}^{ss} = 0$.

d)

e) $\alpha_k = \frac{k_t \cdot f'(k_t)}{f(k_t)} = \frac{19,00}{75,98} = 0,25$

$\mu = (1 - \alpha_k)(\delta + n + \gamma) \cong 0,05 = 5\%$

ou seja, a distância entre k_t e k_{ss} diminui 5% a cada período.

A meia vida: $\frac{\ln(2)}{\mu}$ será, aprox. 13,86 anos.

② Modelo RCK → efeito de aumento de gastos públicos permanente sobre o ss e a transição.

a) Orçamento equilibrado

Lembrando que, no modelo sem governo, o problema do planejador central era:

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} U(c_t)\, e^{-\theta t}\, dt$$

$$\text{s.a. } \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t$$

enquanto na econ. descentralizada, o problema do agente era:

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} U(c_t)\, e^{-\theta t}\, dt$$

$$\text{s.a. } \dot{a}_t + c_t = w_t + (r_t - n)a_t \quad (1)$$

com governo e orçamento equilibrado ($\tau_t = g_t$), a restrição será:

$$\dot{a}_t + c_t = w_t + (r_t - n)a_t - \tau_t \quad (2)$$

Resolvendo o problema com (1):

$$\mathcal{H} = U(c_t) + \mu\left[w_t + (r_t - n)a_t - c_t\right]$$

CPO

$$\mathcal{H}_c = 0$$

$$U'(c_t) = \mu$$

$$-\mathcal{H}_a = \dot{\mu} - \theta\mu$$

$$-\left[\mu(r_t - n)\right] = \dot{\mu} - \theta\mu, \quad \dot{\mu} = \mu(\theta + n - r_t)$$

$$\mu = U'(c_t), \quad \dot{\mu} = U''(c_t)\cdot \dot{c}_t$$

$$\frac{U''(c_t)\cdot \dot{c}_t}{U'(c_t)} = \theta + n - r_t \quad (3)$$

com $a_t = k_t - b_{pt}$ para b_{pt} = dívida familiar, no ss $a_t = k_t$, logo,

$$\dot{k}_t + c_t = w_t + (r_t - n)k_t$$

para $r_t = f'(k_t)$ e $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

a eq. (3) fica:

$$\frac{U''(c_t)\,\dot{c}_t}{U'(c_t)} = \theta + n - f'(k_t)$$

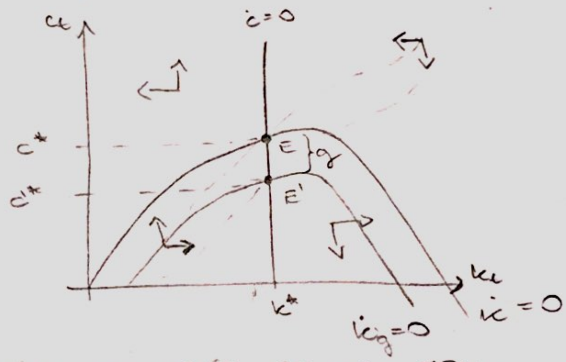
para $\dot{c}_t = 0$ e $\dot{k}_t = 0$,

$$\dot{c} = 0 \Rightarrow f'(k_t) = \theta + n$$

$$c_t = f(k_t) - \cancel{k_t f'(k_t)} + \cancel{k_t f'(k_t)} - nk_t$$

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow c_t = f(k_t) - nk_t$$

Diagrama de fases:



para o caso com gov.

$$\mathcal{H} = U(c_t) + \mu\left[w_t + (r_t - n)a_t - c_t - \tau_t\right]$$

A eq. de Euler será igual, logo $\dot{c} = 0$ será o mesmo, porém $\dot{k} = 0$ será:

$$\dot{k}_t + c_t = w_t + (r_t - n)k_t - \tau_t$$

$$\underset{0}{\dot{k}_t} + c_t = f(k_t) - \cancel{k_t f'(k_t)} + \cancel{k_t f'(k_t)} - nk_t - \tau_t$$

$$c_t = f(k_t) - nk_t - \tau_t$$

com isso o equilíbrio $E \to E'$ no diagrama de fases, ou seja, o produto disponível no setor privado é menor em g unidades. O consumo de equilíbrio é menor ($c'^* < c^*$) enquanto o nível de capital de equilíbrio é o mesmo (k^*).

② b) Endividamento

Supondo que o governo toma empréstimo do setor privado, sua r.o. deixa de ser $g_t = \tau_t$ para ser:

$$\dot{b}_t + nb_t = g_t - \tau_t + r_t b_t$$

afetando a r.o. das famílias pois $a_t \equiv k_t - b_{pt} + b_t$. Para a análise do efeito, cabe calcular a ROI das famílias nas duas situações.

A ROI no caso (a) se daria via:

$$\dot{a}_t - (r_t - n)a_t = w_t - c_t$$

resolvendo a eq. diferencial, o fator integrante será: $\exp[-\int_t^T (r_v - n)\,dv]$

$$a_t \cdot \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)\,dv\right] =$$

$$a_0 + \int_0^T \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)dv\right] \cdot (w_t - c_t)\,dt$$

com $t \to \infty$ e considerando a condição de no-ponzi:

$$a_t \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)\,dv\right] = 0$$

Definindo

$$\exp\left[-\int_t^T (r_v - n)\right] \int_0^\infty (w_t)\,dt \equiv h_0$$

A ROI das famílias s/gov. será:

$$\exp\left[\int_t^T (r_v - n)dv\right] \int_0^\infty c_t\,dt = a_0 + h_0$$

Agora, para a ROI da família no caso (b), calculamos a ROI do gov. com

$$b_t \cdot \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)\,dv\right] = b_0 + \int_t^T \exp\left[-\int_t^T (r_v - n) dv\right] (g_t - \tau_t)\,dt$$

Para $t \to \infty$, considerando no-ponzi e definindo $R(t) = \exp\left[-\int_t^T (r_v - n)\,dv\right]$,

$$\int_0^\infty R_t \tau_t\,dt = b_0 + \int_0^\infty R_t g_t\,dt$$

é a ROI do gov.

A ROI das famílias no caso (a):

$$\int_0^\infty (c_t R_t)\,dt = a_0 + h_0 - g_0$$

para $g_0 \equiv \int_0^\infty R_t \tau_t\,dt$. Dado que $a_0 = k_0 - b_{p0}$,

$$\int_0^\infty R_t c_t\,dt = k_0 - b_{p0} + h_0 - g_0$$

No caso (b), $a_0 = k_0 - b_{p0} + b_0$, A ROI das famílias será:

$$\int_0^\infty R_t c_t\,dt = k_0 - b_{p0} + b_0 + \underbrace{\int_0^\infty w_t R_t\,dt}_{h_0} \underbrace{- \int_0^\infty \tau_t R_t\,dt}_{\text{ROI gov.}}$$

$$\int_0^\infty R_t c_t\,dt = k_0 - b_{p0} + \cancel{b_0} + h_0 - \cancel{b_0} - g_0$$

$$\int_0^\infty R_t c_t\,dt = k_0 - b_{p0} + h_0 - g_0$$

Que é igual a ROI do caso (a). Assim, a forma de financ. do gov não altera o resultado na economia. Em ambos casos há crowd-out do consumo privado.

2) c) Tributação distorcida.

Nesse caso, o governo tributa o retorno do capital (τ_k), alterando a RO das famílias:

antes

$$\dot{a}_t = w_t + (r_t - n)a_t - c_t$$

agora

$$\dot{a}_t = w_t + (1-\tau_k)r_t a_t - n a_t - c_t$$

considerando a nova RO, o Hamiltoniano será:

$$\mathcal{H} = u(c_t) + \mu[w_t + (1-\tau_k)r_t a_t - n a_t - c_t]$$

CPO:

$$\mathcal{H}_c = 0 : u'(c_t) = \mu \qquad (1)$$

$$-\mathcal{H}_a = \dot{\mu} - \theta\mu :$$

$$-\mu[(1-\tau_k)r_t - n] = \dot{\mu} - \theta\mu \qquad (2)$$

em (1) $\dot{\mu} = u''(c_t)\cdot\dot{c}$, subs μ e $\dot{\mu}$ em (2):

$$-u'(c_t)[(1-\tau_k)r_t - n] = u''(c_t)\dot{c} - \theta\cdot u'(c_t)$$

$$n - (1-\tau_k)r_t = \frac{u''(c_t)\dot{c}}{u'(c_t)} - \theta$$

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}}{u'(c_t)} = \theta + n - (1-\tau_k)r_t$$

lembrando que: $r_t = f'(k_t)$, p/ $\dot{c} = 0$,

$$f'(k_t) = (\theta + n)/(1-\tau_k)$$

Pelo teorema da função inversa,

$$k_t^* = f'^{-1}\left[\frac{\theta+n}{1-\tau_k}\right]$$

ou seja, $\dot{c}$ irá ser diferente para o caso descentralizado e com tributação distorcida.

Lembrando que $a_t = k_t$ no ss,

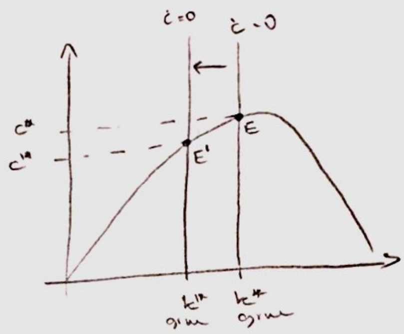
$$\dot{k}_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) + (1-\tau_k) f'(k_t) k_t - n k_t - c_t$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - \tau_k k_t f'(k_t) - n k_t - c$$

$$\dot{k}_t = 0$$

$$c_t = f(k_t) - \tau_k k_t f'(k_t) - n k_t$$

A principal mudança será em k^*. Antes do imposto, $k^* = \theta + n$, pós, $k'^* = f'^{-1}\left[\frac{\theta+n}{1-\tau_k}\right]$. Graficamente:



Ou seja, haverá uma queda no nível de consumo e de estoque de capital de equilíbrio

⑥ Romer (86, 87 e 90)

Romer 86

Utiliza a função de produção de Frankel:

$$Y = \bar{A}k^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$\bar{A} = A_0 \left(\frac{k}{L}\right)^{\beta}$$

então:

$$Y = A_0\left(\frac{k}{L}\right)^{\beta} \cdot k^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad \alpha - 1 - \beta$$

$$= A_0 k^{\beta+\alpha} \cdot L^{1-\alpha-\beta} \qquad (1-\alpha-\beta)(-1) \quad \alpha+\beta-1$$

$$Y = Ak^{\beta+\alpha} \qquad \text{para } A = A_0 L^{1-\alpha-\beta}$$

$\alpha+\beta=1$ para RCE, $Y = Ak$; $A = A_0$

- Viola Inada, $F'(k_t \to \infty) \to 0$.
- Há aumento em k e Y mesmo no pleno emprego (A aumenta qeto)

O problema do agente:

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} U(c_t) e^{-\theta t}\, dt$$

s.a. $\dot{k}_t = \bar{A}k^{\alpha} - c_t$

$\dot{k}_t > 0$

$$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\rho} - 1}{1-\rho}$$

$$\mathcal{H} = \frac{c_t^{1-\rho} - 1}{1-\rho} + \mu\left[\bar{A}k^{\alpha} - c_t\right]$$

CPO

$\mathcal{H}_c = 0, \quad c_t^{-\rho} = \mu \Rightarrow \dot{\mu} = -\rho c_t^{-\rho-1}\dot{c}_t \quad (1)$

$-\mathcal{H}_k = \dot{\mu} - \theta\mu, \quad -\left[\mu\, \alpha \bar{A} k^{\alpha-1}\right] = \dot{\mu} - \theta\mu \quad (2)$

subs. (1) em (2):

$$-c_t^{-\rho}\left(\alpha \bar{A} k^{\alpha-1}\right) = -\rho c_t^{-\rho-1}\dot{c}_t - \theta c_t^{-\rho}$$

$$\mu\alpha\bar{A}k^{\alpha-1} = \rho \cdot \frac{\dot{c}}{c} + \theta$$

$$\rho\frac{\dot{c}}{c} = \alpha\bar{A}k^{\alpha-1} - \theta$$

para $\bar{A} = Ak^{\beta}$ e $\alpha+\beta=1$,

$$\rho\frac{\dot{c}}{c} = \alpha A - \theta,$$

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\alpha A - \theta}{\rho}$$

} Quanto menor $1/\rho$ (tx desc. intertemporal) ou menor θ, menor a tx. de crescimento no ss.

caso houvessem L firmas,

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{L^{1-\alpha}\alpha A - \theta}{\rho},$$

tal que o aumento de L gera aumento em g_c (abertura econômica pró-growth).

- $PMg_k = \frac{\partial Y}{\partial k} = A$ (cte), não há ineficiência dinâmica.
- $g_{ss} < g_{os}$, ineficiente.
- ñ há convergência condicional

Romer 87

3 setores
- Bens finais
- Intermediários
- P&D

Em uma econ. descentralizada, a R.O. do agente será:

$$\underbrace{P_y(t)C(t)}_{\text{consumo}} + \underbrace{P_N(t)\dot{N}(t)}_{\text{investimentos}} = \underbrace{W(t)L}_{\substack{\text{renda}\\ \text{c/trab.}}} + \underbrace{N(t)\bar{\pi}(t)}_{\substack{\text{lucro com}\\ \text{investimentos}}}$$

Normalizando $P_y(t) = 1$, a R.O. será

$$\dot{N}(t) = \frac{W(t)L + N(t)\pi(t) - C(t)}{P_N(t)}$$

Dada a função utilizada:

$$U(c_t) = \frac{c(t)^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - 1/\sigma}$$

teremos

$$\mathcal{H} = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - 1/\sigma} + \mu_N\left[\frac{W_tL + N_t\pi_t - C_t}{P_N(t)}\right]$$

CPO

$$\mathcal{H}_c = 0, \quad c^{-1/\sigma} = -\mu_N/P_N(t) \qquad (1)$$

$$-\mathcal{H}_N = \dot{\mu}_N - \rho\mu,$$

$$-\mu_N \cdot \frac{\pi_t}{P_N(t)} = \dot{\mu}_N - \rho\mu$$

$$\frac{\dot{\mu}_N}{\mu_N} = \rho - \frac{\pi}{P_N} \qquad (2)$$

Em (1), $\mu_N = -c^{-1/\sigma}P_N$,

$\dot{\mu}_N = \frac{1}{\sigma}c^{-1/\sigma-1}\dot{c}\,P_N + c^{-1/\sigma}\dot{P}_N$, subs. em (2):

$$-\frac{\frac{1}{\sigma}c^{-1/\sigma-1}\dot{c}\,P_N}{c^{-1/\sigma}P_N} + \frac{\dot{P}_N}{P_N} = \rho - \frac{\pi}{P_N}$$

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\dot{c}}{c} = \underbrace{\frac{\pi + \dot{P}_N}{P_N}}_{r(t)} - \rho \Rightarrow \underbrace{\frac{\dot{c}}{c} = \sigma\left[r(t) - \rho\right]}_{\text{Euler}}$$

A segunda condição de equilíbrio do modelo diz que o mercado de bens finais estará em equilíbrio quando

$$y(t) = c(t)$$

e

$$\underbrace{L}_{\substack{\text{Equilíbrio}\\ \text{no mercado}\\ \text{de trabalho}}} = \underbrace{L_x(t)}_{\substack{\text{demanda}\\ \text{do setor}\\ x\text{ (interme-}\\ \text{diário)}}} + \underbrace{L_R(t)}_{\substack{\text{demanda do}\\ \text{setor de P\&D.}}}$$

Dado que:

$$L_x(t) = N(t)\bar{x}(t)k_x$$

$$L_R(t) = k_R \cdot \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$$

$$L = N(t)\bar{x}(t)k_x + k_R\cdot\frac{\dot{N}}{N}$$

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{L + k_xN(t)\bar{x}(t)}{k_R}$$

O crescimento se dará por

$$g_N^{ss} = \frac{\sigma(\mu-1)(L/k_R) - \sigma\rho}{\sigma\mu + (1-\sigma)(\eta-1)} > 0$$

$$g_c^{ss} = (\eta-1)g_N^{ss} = g_y^{ss}$$

com planejador central

$$g_N^{os} = \sigma(L/k_R) - \frac{\sigma\rho}{\eta-1}$$

$$g_c^{os} = (\eta-1)g_N^{os} = g_y^{os}$$

ou seja, não é possível dizer que o modelo é ineficiente, pois é possível $g_N^{ss} > g_N^{os}$ e $g_N^{ss} < g_N^{os}$, sendo ineficiente, mas existe a possibilidade de $g_N^{ss} = g_N^{os}$, sendo eficiente.

⑥ Romer 90

Busca intencional por mudanças tecnológicas. Tecnologia com propriedades pública e privada: não-rival e parcialmente excludente. O conhecimento tem dois componentes: H (capital humano, rival) e A (técnologia, não rival).

Para S ⇒ Trabalhador especializado (skilled worker),

Modelo
- 2 setores: Y (bens finais) e A (tec).

$$S_0 = S_Y + S_A \Rightarrow S_Y = S_0 - S_A \quad (1)$$

$$\dot{A} = \sigma S_A \cdot A \Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = \sigma S_A \quad (2)$$

$\sigma \to$ parâmetro de sucesso na pesquisa.

A função de produção no setor de bens finais é:

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} \left(x_1^{1-\alpha-\beta} + x_2^{1-\alpha-\beta} + \dots \right)$$

$x_i \to$ todos os designs

Para x_i sendo aditiva e separável,

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} \int_0^A x_i^{1-\alpha-\beta}\, di$$

Para todo x_i entrando simetricamente na função de produção, teremos

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta}\, \bar{X}^{1-\alpha-\beta} \int_0^A di$$

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} A \bar{X}^{1-\alpha-\beta} \quad (3)$$

Considerando $k = \gamma A \bar{x}$, $\bar{x} = \frac{k}{\gamma A}$,

subs em (3):

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} A \left(\frac{k}{\gamma A} \right)^{1-\alpha-\beta} \qquad 1-1+\alpha+\beta$$

$$Y = S_Y^{\alpha} L_0^{\beta} A^{\alpha+\beta} k^{1-\alpha-\beta} \gamma^{-1+\alpha+\beta}.$$

logo,

$$Y = \underbrace{(S_Y A)^{\alpha}}_{\text{técnologia capital aumentada}} \underbrace{(L_0 A)^{\beta}}_{\text{tecnologia trabalho aumentada}} k^{1-\alpha-\beta} \gamma^{\alpha+\beta-1} \quad (4)$$

Considerando

$$Y = C + \dot{k} \quad \text{e} \quad S_Y = S_0 - S_A$$

$$(S_Y A)^{\alpha} (L_0 A)^{\beta} k^{1-\alpha-\beta} \gamma^{\alpha+\beta-1} = C + \dot{k}$$

$$\dot{k} = \underbrace{(S_0 - S_A)^{\alpha} A^{\alpha+\beta} L_0^{\beta} k^{1-\alpha-\beta} \gamma^{\alpha+\beta-1}}_{\equiv \Delta} - C$$

Controle ótimo

$$\max_{c_t, S_A} \; U_0 = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}}_{u(c_t)} e^{-\rho t}\, dt$$

$$\text{s.a.} \quad \dot{k} = \Delta - C$$

$$\dot{A} = \sigma S_A A$$

$$\mathcal{H} = u(c_t) + \lambda_A (\sigma S_A A) + \lambda_k (\Delta - c)$$

CPO

a) $\mathcal{H}_c = 0$,

$$c_t^{-\theta} = \lambda_k$$

b) $\mathcal{H}_{S_A} = 0$,

$$\lambda_A \sigma A - \lambda_k \alpha (S_0 - S_A)^{-1} \cdot \Delta = 0$$

$$\Delta = \frac{+\lambda_A \sigma A}{\lambda_k \alpha} \cdot (S_0 - S_A)$$

c) $-\mathcal{H}_A = \dot{\lambda}_A - \rho \lambda_A$

$$-\left[\lambda_A \sigma S_A + \lambda_k (\alpha+\beta) A^{-1} \Delta \right] = \dot{\lambda}_A - \rho \lambda_A$$

d) $-\mathcal{H}_k = \dot{\lambda}_k - \rho \lambda_k$

$$-\left[\lambda_k (1-\alpha-\beta) k^{-1} \cdot \Delta \right] = \dot{\lambda}_k - \rho \lambda_k$$

Para resolver, consideramos em (a): $C_t^{-\theta} = \lambda_k$, $\dot{\lambda}_k = -\theta C_t^{-\theta-1} \dot{C}_t$

Reorganizando (d):

$$(1-\alpha-\beta) k^{-1} \Delta = \rho - \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k}$$

subs. λ_k e $\dot{\lambda}_k$

$$\frac{-\theta C_t^{-\theta-1} \dot{C}_t}{C_t^{-\theta}} = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k}$$

$$-\theta \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k}$$

Dado que no ss:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{A}}{A} = \sigma s_A$$

$$-\theta \sigma s_A = \rho - (1-\alpha-\beta) k^{-1} \Delta$$

$$s_A = \frac{(1-\alpha-\beta) k^{-1} \Delta - \rho}{\theta \sigma}$$

Por outro lado, subs. (b) em (c):

$$\Delta = \frac{\lambda_A \sigma A}{\lambda_k \alpha} (s_0 - s_A)$$

$$-\left[\lambda_A \sigma s_A + \lambda_k (\alpha+\beta) A^{-1} \Delta\right] = \dot{\lambda}_A - \rho \lambda_A$$

$$-\left[\lambda_A \sigma s_A + \cancel{\lambda_k} (\alpha+\beta) \cancel{A^{-1}} \left(\frac{\lambda_A \sigma \cancel{A}}{\cancel{\lambda_k} \alpha}\right) (s_0 - s_A)\right] = \dot{\lambda}_A - \rho \lambda_A$$

$$-\lambda_A \left[\sigma s_A + (\alpha+\beta)(s_0 - s_A) \sigma (\alpha)^{-1}\right] = \dot{\lambda}_A - \rho \lambda_A$$

$$-\sigma \left[s_A + (\alpha+\beta)(s_0 - s_A) \alpha^{-1}\right] = \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} - \rho$$

$$\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \rho - \sigma \left[s_A + \frac{(\alpha+\beta)(s_0 - s_A)}{\alpha}\right]$$

$\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k}$ no ss, logo

$$-\theta \sigma s_A = \rho - \sigma \left[s_A + \frac{(s_0 - s_A)(\alpha+\beta)}{\alpha}\right]$$

$$s_A = \frac{-\alpha \rho + \alpha \sigma \cancel{s_A} (s_0 - s_A)(\alpha+\beta)}{\alpha \sigma \theta}$$

$$s_A = \frac{\sigma(\alpha+\beta) s_0 - \alpha \rho}{\sigma(\alpha \theta + \beta)}$$

e $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\sigma(\alpha+\beta) - \alpha \rho}{\sigma(\alpha \theta + \beta)}$

$\uparrow g_{ss} \rightarrow \uparrow s_0, \uparrow \sigma, \downarrow \rho$

são os fatores pró-crescimento.

7) Lucas 88

Dois setores: Bens Finais (Y) e capital Humano (H).

Notação:
k_y: capital físico no setor y
H_y: capital humano no setor y

$$Y = C + I$$

A mudança no estoque de capital (eq. de movimento) se dá por:

$$\dot{k} = I_k - \delta k, \quad I_k = \dot{k} + \delta k$$

Considerando uma função de produção tipo Cobb-Douglas,

$$Y = A k_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha}$$

Logo,

$$A k_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} = C + \dot{k} + \delta k$$

$$\dot{k} = A k_y^{\alpha} H_y^{1-\alpha} - C - \delta k \quad (1)$$

Para o setor de capital humano, a eq. de movimento é

$$\dot{H} = I_H - \delta H \Rightarrow I_H = \dot{H} + \delta H$$

$$H = B k_h^{\eta} H_h^{1-\eta}$$

$$\dot{H} = B k_h^{\eta} H_h^{1-\eta} - \delta_h H \quad (2)$$

considerando,

$$H = H_y + H_h$$

e $u \rightarrow$ percentual de H utilizado na produção de Y,

$$H_y = uH \quad e \quad H_h = (1-u)H \quad (3)$$

Em (2), $\eta = 0$, pois produção de H não envolve k. Subs (3) em (1)-(2):

$$\begin{cases} \dot{k} = A k_y^{\alpha} (uH)^{1-\alpha} - c - \delta_k k & (4) \\ \dot{H} = B(1-u)H - \delta_h H & (5) \end{cases}$$

Dividindo (4)-(5) por L teremos a versão per-capita:

$$\frac{\dot{k}}{L} = A k_y^{\alpha} (uH)^{1-\alpha} - c - \delta_k k$$

$$k = \frac{K}{L}, \quad K = kL, \quad \dot{K} = L\dot{k} + k\dot{L}, \quad \frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + \frac{k\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \text{ logo } \boxed{\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk}$$

$$\dot{k} + nk = A k_y^{\alpha} (uh)^{1-\alpha} - c - \delta_k k \quad (6)$$

Da mesma forma,

$$\frac{H}{L} = h, \quad H = hL, \quad \dot{H} = \dot{h}L + \dot{L}h, \quad \frac{\dot{H}}{L} = \dot{h} + nh$$

$$\dot{h} + nh = B(1-u)h - \delta_h h \quad (7)$$

Problema do Agente

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) e^{-\rho t} \, dt$$

s.a.
$$\dot{h} = B(1-u)h - \delta_h h - nh$$
$$\dot{k} = A k^{\alpha} (uh)^{1-\alpha} - c - \delta_k k - nk$$
h_0 e k_0 dados

$$\mathcal{H} = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_h \left(B(1-u)h - \delta_h - nh \right) + \lambda_k (\dots)$$

CPO

$$\mathcal{H}_c = c_t^{-\theta} = \lambda_k \rightarrow \dot{\lambda}_k = -\theta c_t^{-\theta-1} \dot{c}_t \quad (8)$$

$$-\mathcal{H}_k = \dot{\lambda}_k - \rho \lambda_k$$

$$-\left[\lambda_k \left(\alpha A k^{\alpha-1} (uh)^{1-\alpha} - \delta_k - n \right) \right] = \dot{\lambda}_k - \rho \lambda_k \quad (9)$$

$$-\mathcal{H}_h = \dot{\lambda}_h - \rho \lambda_h$$

$$-\left[\lambda_h \left(B(1-u) - \delta_h - n \right) + \overbrace{A k^{\alpha} (uh)^{-\alpha} (1-\alpha) u \lambda_k}^{\lambda_k} \right] \quad (10)$$
$$= \dot{\lambda}_h - \rho \lambda_h$$

$$\mathcal{H}_u = 0, \; -\lambda_h B h + \lambda_k (1-\alpha) A k^{\alpha} (uh)^{-\alpha} \cdot h = 0 \quad (11)$$

Dividindo (9) por λ_k:

$$-\left(\alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta_k - n\right) = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} - \rho$$

considerando $\delta_k = \delta_h = \delta$, e subs. (8):

$$\rho - \alpha A k^{\alpha-1}(uh^{1-\alpha}) + \delta + n) = -\theta \frac{\dot{c}}{c}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta - n - \rho\right]$$

para $\rho = p - n$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\underbrace{\alpha A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta}_{\text{PMgk em } Y} - p\right]$$

$$\dot{k} = A k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - (\delta + n)k$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k} - \delta - n$$

$$A k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \delta = g_k + \frac{c}{k} + n$$

$$g_c = \frac{1}{\theta}\left[g_k + \frac{c}{k} + n - p\right]$$

$$\underbrace{\theta g_c + \rho - \frac{c}{k}}_{\text{cte}} = g_k \Rightarrow \boxed{g_c^* = g_k^*}$$

Tx. crescimento de Y (g_y):

$$Y = A k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha}$$

en $\{$

$$\ln(y) = \alpha \ln(k) + (1-\alpha)\ln(h) + (1-\alpha)\ln(u)$$

d/dt $\{$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\alpha \dot{k}}{k} + \frac{(1-\alpha)\dot{h}}{h} + \frac{(1-\alpha)\dot{u}}{u}$$

$$g_y^* = \alpha g_k + (1-\alpha) g_h + (1-\alpha)\underbrace{g_u}_{\text{cte}}$$

$$g_h^* = g_k^* = g_c^* = g_y^*$$

Considerando (10)

$$-\left[\lambda_h\left(B(1-u) - \delta - n\right) + \lambda_k\left(A k^{\alpha}(uh)^{-\alpha} u^{(1-\alpha)}\right)\right]$$

$$= \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h$$

$$\lambda_h\left[\delta + n - B(1-u)\right] - \lambda_k\left[A k^{\alpha} h^{-\alpha} u^{1-\alpha}\right]$$

$$= \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h$$

Dado que (11).

$$\lambda_h \cdot B\cancel{h} = \lambda_k (1-\alpha) A k^{\alpha} (uh)^{-\alpha} \cancel{h}$$

$$B\lambda_h u^{\alpha} = \lambda_k(1-\alpha) A k^{\alpha} h^{-\alpha}$$

subs.

$$\lambda_h\left[\delta + n - B(1-u)\right] - B\lambda_h u^{\alpha} \cdot u^{1-\alpha} = \dot{\lambda}_h - \rho\lambda_h$$

$$= \frac{\dot{\lambda}_h}{\lambda_h} - \rho$$

$$\delta + n - B + \cancel{Bu} - \cancel{Bu}$$

$$\frac{\dot{\lambda}_h}{\lambda_h} = \delta + n - B + \underset{p-n}{\rho}$$

$$\frac{\dot{\lambda}_h}{\lambda_h} = \delta + p - B \quad \times \rightarrow \frac{\dot{\lambda}_h}{\lambda_h} = B - \delta - n$$

Dado que $g_{\lambda h} = g_{\lambda k}$

$$g_k^* = g_y^* = g_h^* = g_c = \frac{1}{\theta}\left[B - \delta - n\right]$$

- Crescimento depende de B, logo, a PMg do capital humano (H) é pró-growth. Acumulação intencional de H é o motor do crescimento.
- Diferente do Ak: g^* depende do setor H e não Y.
- Solução Pareto-eficiente: $g^{ss} = g^{os}$
- Há transição complexa no modelo

(8) $Y = 10K^{0,3}L^{0,7}$

$Y = 10K^{\alpha}L^{1-\alpha}$

$n = 2\%$
$s = 20\%$
$A = 10$

a) consumo por capita no ss?

$\alpha = 0,3$
$1-\alpha = 0,7$

$y_t = Ak_t^{\alpha}$

$y_t = 10k_t^{0,3}$ $\qquad y_t = f(k_t)$

$c_t = (1-s)\, f(k_t)$

$c_t = 0,8 \cdot 10\, k_t^{0,3} = 8k_t^{0,3}$

b) c_t^{gr}? $\qquad$ c) c_t^{gr} para $n = 1\%$

$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(s+n)$

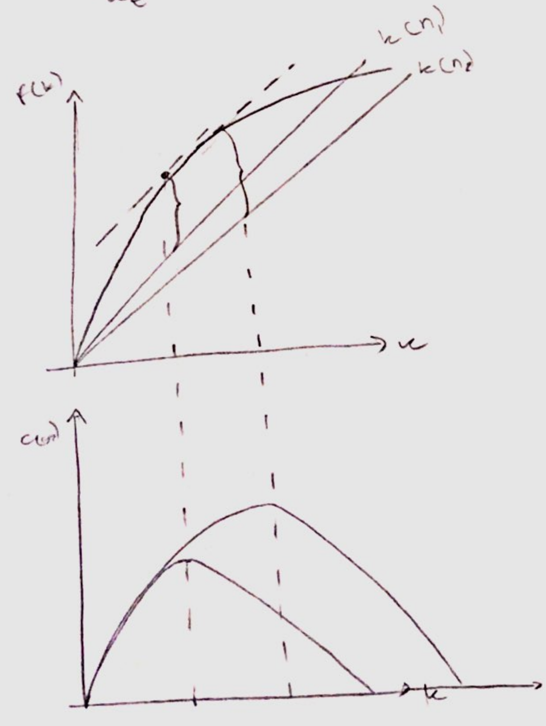
$c_{ss} = 10k_t^{0,3} - 0,02k_t$

$3k_t^{-0,7} = 0,02$

$k_t = \left(\frac{0,02}{3}\right)^{-\frac{10}{7}} = \left(\frac{3}{0,02}\right)^{10/7} = 1.293$

$n = 0,01$

$k_t = 3.485$



e) Fatos estilizados de kaldor:

- y_t e g_y ñ tendem a cair
- $\frac{K}{L}$ cresce ao longo do tempo
- Tx retorno do capital é praticamente cte ($r_t \to$ cte)
- $\frac{K}{Y} \to$ cte
- K e L em Y (renda nacional) praticamente cte
- g_y difere entre países

---

(12) $y_t = 6k_t^{2/3}$

$s = 0,1$
$n = 0,1$

$S_t = 0,1Y_t$ $\qquad s = 0,1$

a) Qual k_t^{ss}?

$k_{ss} = \left(\frac{sA}{n+s+\gamma}\right)^{1/(1-\alpha)}$

$= \left(\frac{0,1 \cdot 6}{0,2}\right)^{1/(1-\frac{2}{3})}$ $\qquad \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

$k_{ss} = (3)^3 = 27$

b) y_t^{ss}?

$s\underbrace{f(k_{ss})}_{y_{ss}} = (n+s+\gamma)k_{ss}$

$y_{ss} = \frac{0,2 \cdot 27}{0,1} = 54$

(12) c) c_{ss}?

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(\delta + n + \gamma)$$

$$= 54 - 27(0,2) = 48,6$$

d) Convergência? Absoluta ou condicional?

No modelo solow-swan, se a economia não está no ss ela irá convergir para ele, pois há estabilidade condicional.

O modelo propõe convergência condicional, tal que cada país converge para o seu ss, não impondo que economias pobres iriam convergir para o mesmo nível de renda que países ricos. A velocidade de crescimento depende da distância de cada país em relação ao seu ponto de equilíbrio (ss)

---

(16) Regra keynes-Ramsey

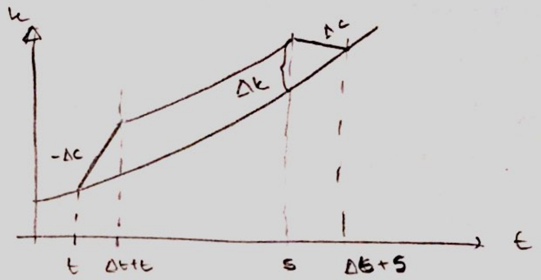
A regra keynes-Ramsey diz que se o planejador alocar menos recursos para o consumo no tempo t, diminuindo a utilidade do agente e $u'(c_t)dc_t$, levará a uma acumulação de capital e consequente aumento de consumo per capital de $\frac{[1+f'(k_t)]\,u'(c_{t+1})\,dc_t}{(1+n)}$.

A perda de utilidade em t_t será igual ao ganho em t+1, logo:

$$u'(c_t) = (1+\theta)^{-1}(1+n)^{-1}[1+f'(k_t)]\,u'(c_{t+1})$$

O seja, a taxa marginal de substituição do consumo para t e t+1 será igual a taxa marginal de transformação para a firma em t e t+1,

graficamente, a regra keynes Ramsey pode ser representada:



9 Ramsey – cass – koopmans ($\beta = \theta$)

a) apresente e resolva o problema do planejador central (condições de ótimo e transversalidade).

• Hipóteses
- RCE, homogeneidade de grau 1,
- Inada
- concorrência perfeita
- T infinito

• Tecnologia

$$Y_t = F(k_t, N_t)$$

$$Y_t = F\left(\frac{k_t}{N_t}, 1\right)$$

$$\frac{k_t}{N_t} = k_t$$

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t \\ I_t = \dot{k}_t + \delta k \\ \text{para } \delta = 0 \\ I_t = \dot{k}_t \end{cases}$$

$$Y_t = C_t + \dot{k}_t$$

$$\frac{Y_t}{N_t} = \frac{C_t}{N_t} + \frac{\dot{k}_t}{N_t}$$

$$f(k_t) = c_t + \dot{k}_t / N_t$$

$$\frac{k_t}{N_t} = k_t \rightarrow k_t = N_t k_t$$

$$\dot{k}_t = \dot{k}_t N_t + k_t \cdot \dot{N}_t$$

$$\frac{\dot{k}_t}{N_t} = \dot{k}_t + n k_t \qquad n = \frac{\dot{N}}{N}$$

logo,

$$f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + n k_t$$

como $f(k_t) = F(k_t/N_t, 1)$, assumimos que é crescente e estritamente côncava, portanto $f'(k_t) > 0$ e $f''(k_t) < 0$.

Ainda, a tecnologia respeita Inada:

$F(0) = 0$, $\lim_{k \to 0} f(k_t) = \infty$ e $\lim_{k \to \infty} f(k_t) = 0$.

O problema do agente central é maximizar a utilidade das famílias sujeito a restrição:

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^\infty u(c_t) e^{-\theta t} dt$$

s.a.

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - n k_t$$

$$k_t, c_t > 0$$

$$k_0 > 0 \text{ (dado)}$$

$$\mathcal{H} = u(c_t) + \lambda[f(k_t) - c_t - n k_t]$$

CPO

$$\mathcal{H}_c = 0$$

$$-\mathcal{H}_k = \dot{\lambda} - \theta\lambda$$

$$\lim_{t \to \infty} k_t u'(c_t) e^{\theta t} = 0 \quad \leftarrow \text{transversalidade}$$

$$\mathcal{H}_c : u'(c_t) = \lambda_t \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_k : -\lambda[f'(k_t) - n] = \dot{\lambda} - \theta\lambda \quad (2)$$

Em (1), $\dot{\lambda}_t = u''(c_t) \cdot \dot{c}_t$. Subs. λ_t e $\dot{\lambda}_t$ em (2):

$$-[f'(k_t) - n] = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \theta$$

$$\boxed{\frac{u''(c_t)\,\dot{c}_t}{u'(c_t)} = \theta - f'(k_t) + n}$$

mult. por c_t:

$$\frac{c_t}{c_t} \cdot \frac{u''(c_t)\,\dot{c}_t}{u'(c_t)} = \theta - f'(k_t) + n$$

Elasticidade de subs. intertemporal (δ):

$$\boxed{-\frac{1}{\delta} = \frac{u''(c_t) \cdot c_t}{u'(c_t)}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \delta[f'(k_t) - \theta - n]} \quad (3)$$

Scanned by CamScanner

b) Eq. de mov. p/ k e c, condições de equilíbrio no ss.

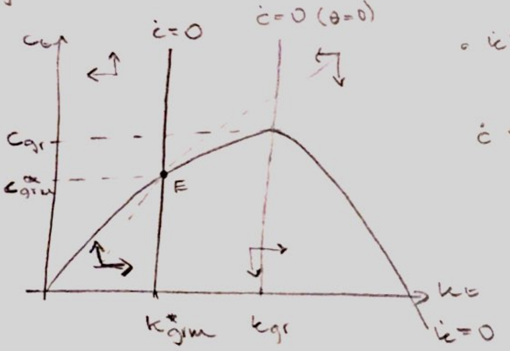
Para $\dot{c}=0$ e $\dot{k}=0$ encontramos o ss.

$$\begin{cases} \dot{c}=0 \Rightarrow f'(k_t) = \theta + n \\ \dot{k}=0 \Rightarrow c_t = f(k_t) - nk_t \end{cases}$$

c) Diagrama de fases e gr.

$f'(k_t^*) = \theta + n$ é a golden rule modificada. Caso $\theta = 0$, $f'(k_t) = n$ é a golden rule. θ representa a impaciência do agente.

Considerando $\dot{c}=0$ e $\dot{k}=0$, o diagrama de fases será:



∘ $\dot{k}>0$, $c_t > f(k_t) - nk_t$, $k_t < 0$

$\dot{c} < 0$, $f'(k_t) < \theta + n$
$c_t > 0$

O ponto E é o equilíbrio, quando não há mais movimento. O k_{gr} fica a direita do g_{rm}, e está associado ao pico de $\dot{k}=0$, quando $f'(k_t) = n$.

A solução é Pareto-ótima.

Percebe-se que E é um ponto de sela, e que existe um "caminho ótimo" que leva a economia ao Equilíbrio.

d) Caso θ diminua, o indivíduo será mais paciente, deslocando $\dot{c}=0$ em direção ao k_{gr}, quando esse parâmetro será 0.

e) Caso θ diminua, a economia alcançará um nível de consumo e estoque de capital maior, pois $c_{gr} > c_{grm}$ e $k_{gr} > k_{grm}$.

(1n) Solow-Swan

a) Hipóteses

- Tecnologia:
  - RCE
  - Homogeneidade de grau 1
  - Condição de Inada
- Pleno emprego $(\underbrace{L_t}_{\text{dem. por emprego}} = \underbrace{N_t}_{\text{população}})$
- Economia fechada, sem gov.
- $S_t = I_t$ ← poupança = Investimento
- $S_t = sY_t$ ← s: tx de poupança
- População cresce a taxa n
  ↳ $N_t = N_0 e^{nt}$

b) Descrição algébrica do modelo

Função de produção neoclássica:

$$Y = F(k, N)$$
$$\partial F/\partial k > 0 \quad , \quad \partial^2 F/\partial k^2 < 0$$
$$\partial F/\partial N > 0 \quad , \quad \partial^2 F/\partial N^2 < 0$$
(F é crescente e côncava)

Inada:

$$F(k,0) = F(0,N) = 0$$
$$\lim_{k \to 0} \frac{\partial F}{\partial k} = \infty \; ; \; \lim_{N \to 0} \frac{\partial F}{\partial N} = \infty$$
$$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial F}{\partial k} = 0 \; ; \; \lim_{N \to \infty} \frac{\partial F}{\partial N} = 0$$

RCE e λ^1:

$$Y = NF\left(\frac{k}{N}, 1\right) \leftarrow \frac{k}{N} = k_t$$
$$Y = N f(k_t) \longrightarrow \underbrace{y_t = f(k_t)}_{\text{Função de produção per-capita}}$$
$$f(k_t) = F(k_t, 1)$$

Uma Cobb-Douglas satisfaz essas características. Então,

$$Y = A k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$
$$y_t = \underbrace{A k_t^{\alpha}}_{f(k_t)} \leftarrow \text{per capita}$$

c) Dinâmica da economia
(sem progresso tecnológico)

$$Y_t = C_t + I_t \quad \leftarrow \text{produto da economia}$$

Investimento líquido:

$$\dot{k}_t = I_t - \delta k_t \rightarrow I_t = \dot{k}_t + \delta k_t$$

Substituindo

$$Y_t = C_t + \dot{k}_t + \delta k_t$$
$$F(k, N) = C_t + \dot{k}_t + \delta k_t$$

versão per capita $(1/N_t)$

$$f(k_t) = c_t + \frac{\dot{k}}{N} + \delta k_t$$

$$\frac{k}{N} = k \; , \; k = kN \; , \; \dot{k} = \dot{k}N + k\dot{N}$$
$$\frac{\dot{k}}{N} = \dot{k}_t + nk_t$$

$$\boxed{f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t}$$

Lembrando que $C_t = (1-s)Y_t$, e $c_t = (1-s) f(k_t)$,

$$\cancel{f(k_t)} = \cancel{f(k_t)} - sf(k_t) + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

$$\boxed{\dot{k}_t = sf(k_t) - (n+\delta)k_t}$$

Lei de movimento da economia

(Incluindo progresso tecnológico)

Progresso tecnológico exógeno:

$$g_T = \frac{\dot{T}}{T} = \gamma \text{ (cte)}$$

Progresso tipo "Harrod Neutro" (afeta a produtividade do trabalhador):

$$Y_t = F(K, \underbrace{TN}_{\text{trabalho efetivo/aumentado.}})$$

Essa função obedece RCE, homogeneidade de grau 1, Inada e é crescente e côncava.

$$Y_t = TNF\left(\frac{K}{TN}, 1\right) \leftarrow \frac{k_t}{T_t N_t} = k_t$$

$$y_t = f(k_t)$$

Dado que $Y = C + I$ e $I = \dot{k} + \delta k$

$$Y_t = C_t + \dot{k}_t + \delta k$$

Dividindo por $T_t N_t$:

$$f(k_t) = c_t + \underbrace{\frac{\dot{k}_t}{T_t N_t}}_{\dot{k}_t + (n+\gamma)k_t} + \delta k_t$$

$$\boxed{f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + (n+\gamma+\delta)k_t}$$

Para $c_t = (1-s)Y_t$, $c_t = (1-s)f(k_t)$

$$\boxed{\dot{k}_t = sf(k_t) - (n+\gamma+\delta)k_t} \quad (1)$$

Lei de movimento.

d) Steady-state e transição

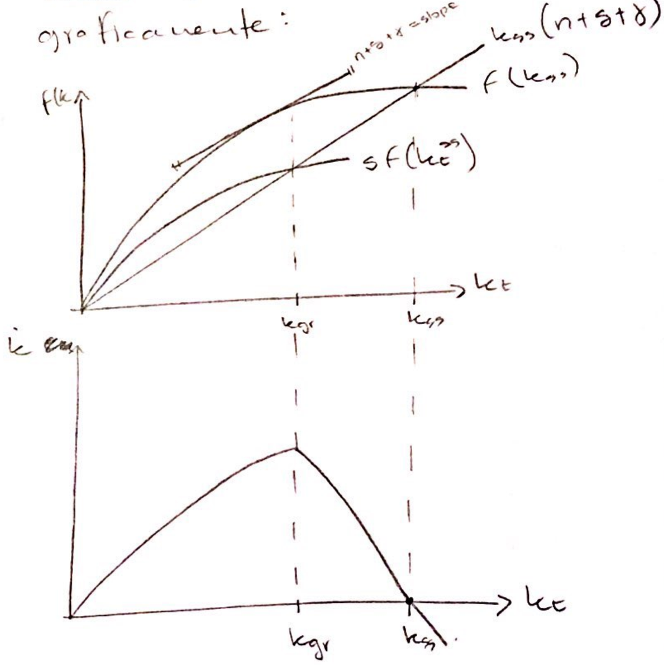
A partir de (1) podemos dizer que a taxa de crescimento do capital (g_k) é:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (n+\delta+\gamma) \quad (2)$$

No ss, $g_k = 0$, logo

$$\boxed{sf(k_t^{ss}) = k_{ss}(n+\delta+\gamma)} \quad (3)$$

O steady state em solow pode ser representado graficamente:



Lembrando que $c_t = (1-s)f(k_t)$, e $c_t = f(k_t) - sf(k_t)$, subs. $sf(k_t)$ em (3):

$$f(k_t) - c_t = k_{ss}(n+\delta+\gamma)$$

$$c_{ss} = f(k_t^{ss}) - k_t^{ss}(n+\delta+\gamma)$$

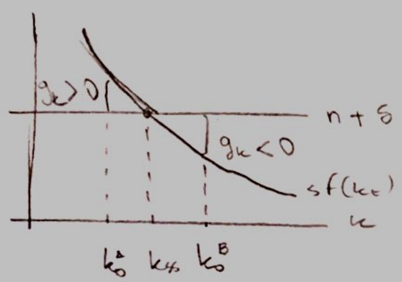
será o nível de consumo no ss.

Para maximizar, $\frac{\partial c_{ss}}{\partial k_{ss}} = 0$, logo

$$f'(k_{gr}) = n+\delta+\gamma \leftarrow \text{nível máx de consumo}$$

(14) d (cont...)

Transição para o ss. No ss, sabemos que g_k é cte (basta considerar $sf(k_t)/k_t$ em (2) e derivar em relação ao tempo), porém, fora do ss g_k se comporta conforme (2). Assim, quando $\frac{sf(k_{ss})}{k_{ss}} = n+\gamma+\delta$, $g_k = 0$. Se $k_0 > k_{ss}$, $g_k < 0$ e se $k_0 < k_{ss}$, $g_k > 0$.



e) taxas de crescimento de y_t, c_t e k_t $\left(\underbrace{\frac{K_t}{T^t N_t} = k_t}_{\text{estoque de capital trabalho eficiente}}\right)$.

Já vimos que $g_k = \frac{\dot k}{k}$ em (2).

A taxa de crescimento do produto será: $g_y = \frac{\dot y}{y}$. com $y_t = f(k_t)$,

$\dot y_t = f'(k_t)\cdot \dot k_t$, então:

$$g_y = \frac{f'(k_t)\dot k_t}{f(k_t)}.$$

subs. $\dot k_t = g_k \cdot k$:

$$g_y = \frac{f'(k_t)}{f(k_t)}\cdot g_k \cdot k$$

Definindo elasticidade de produção em relação a k_t como $\alpha_k(k_t)$:

$$\alpha_k(k_t) = \frac{k_t f'(k_t)}{f(k_t)},$$

tal que $\alpha_k(k_t) = \alpha$ (cte) para uma função Cobb-Douglas,

$$g_y = \alpha_k(k_t)\, g_k$$

subs. g_k em (2).

$$\frac{g_y}{\alpha_k} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (n+\delta+\gamma)$$

$$g_y = \frac{\cancel{k_t} f'(k_t)}{\cancel{f(k_t)}}\cdot\frac{s\cancel{f(k_t)}}{\cancel{k_t}} - \alpha(k_t)(n+\delta+\gamma)$$

$$g_y = sf'(k_t) - (n+\delta+\gamma)\alpha_k(k_t) \qquad (4)$$

$$c_t = f(k_t) - k_t(n+\gamma+\delta)$$

$$\dot c_t = f'(k_t)\cdot \dot k_t - \dot k_t(n+\gamma+\delta)$$

$$g_c = \frac{\dot c}{c} = \underbrace{\frac{f'(k_t)\cdot \dot k_t}{f(k_t)}}_{g_y} - \underbrace{\frac{\dot k_t}{k_t}}_{g_k}$$

$$g_c = g_y - g_k$$

$$g_c = (\alpha_k(k_t) - 1)\, g_k.$$

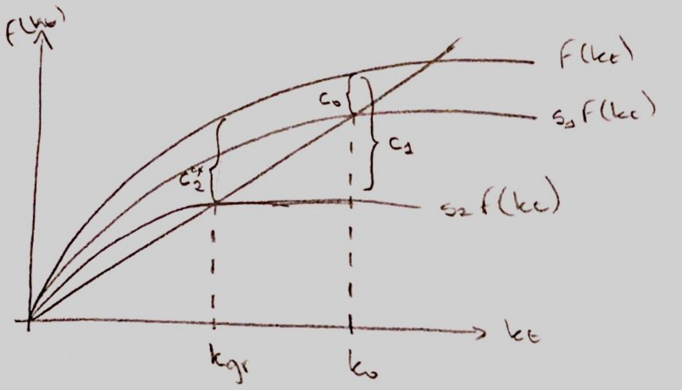
(15) a) ver $\boxed{14\ d}$

b) Do ponto de vista normativo, o GR é o ss que permite o maior nível possível de consumo, sendo ótimo de bem-estar. Todavia, na prática depende de k_0^{ss} e da transição $k_0^{ss} \to k_{gr}^{ss}$. Se k_0 for distante, pode não valer a pena.

(15) c) Ineficiência Dinâmica

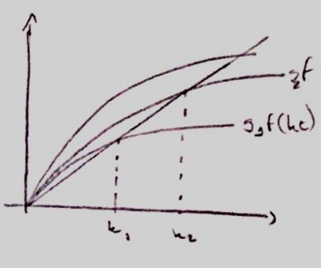
Quando é melhor migrar para s_{gr} e ficar lá para sempre.

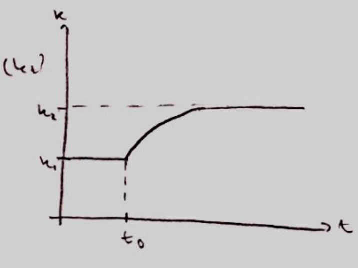
Há possibilidade de ineficiência dinâmica quando $k_0^{ss} > k_{gr}^{ss}$.



Em t_1, $s_1 \to s_2$, $s_2 < s_1$. Aumenta c_t em t_1 temporariamente, até $k_0 \to k_{gr}$, diminui o estoque de capital até alcançar o nível de consumo máximo no ss, o c_2^{gr}.

d) supondo uma alteração na taxa de poupança $s_1 \to s_2$ ($s_1 < s_2$).





Essa alteração gera um aumento gradual no estoque de capital até alcançar o novo ss, k_2.

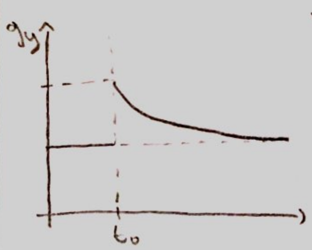
A renda per capita cresce a taxa g_y, conforme (4).

$$g_y = s f'(k_t) - (n+\delta+\gamma)\,\alpha_k(k_t)$$

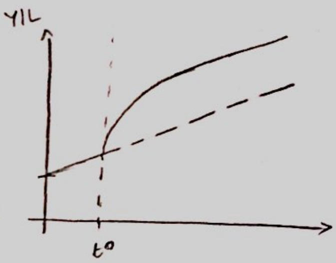
ou

$$g_y = \frac{f'(k_t)}{f(k_t)} \cdot k_t \cdot g_k$$

Uma alteração em s gera um salto na taxa de crescimento, que se ajusta após k_t atingir o novo nível.



g_y



Y/L

Quanto ao consumo, podemos observar os efeitos derivando c_{ss} em relação a s:

$$c_{ss} = f(k_{ss}) - k_{ss}(n+\gamma+\delta)$$

$$\frac{\partial c}{\partial s} = f'(k_{ss}) \cdot \frac{\partial k}{\partial s} - \frac{\partial k}{\partial s}(n+\gamma+\delta)$$

$$= \frac{\partial k}{\partial s}\left[f'(k_{ss}) - (n+\gamma+\delta)\right]$$

e lembrando que $c_t = f(k_t)(1-s)$. Com $s_1 \to s_2$, c_t cai imediatamente, mas com o aumento de k_t, aos poucos vai subindo. Usamos $\partial c/\partial s$ para saber se o novo nível de consumo será maior ou menor. Se $f'(k_{ss}) > (n+\gamma+\delta)$, o nível será maior.