Eql geral - Ótimo global 2x2x2

· 2 indivíduos (A,B), 2 insumos (K,L), 2 produtos (X,Y)
(firma)

· Problema: MAX $U_A(X_A, X_B)$ SA
· $U_B(X_B Y_B) = \bar{U}_B$
· $f_X[K_X, L_X] = X_A + X_B$
· $f_Y[K_Y, L_Y] = Y_A + Y_B$
$\bar{K} = K_X + K_Y$
$L = L_X + L_Y$

$$L = U_A(\overset{1}{X_A}, \overset{2}{Y_A}) + \lambda\left[U_B(\overset{3}{X_B}, \overset{4}{Y_B}) - \bar{U}_B\right] + \gamma_X\left[f_X(\overset{5}{K_X}, \overset{6}{L_X}) - X_A - X_B\right] + \gamma_K\left[\bar{K} - K_X - K_Y\right]$$
$$+ \gamma_Y\left[f_Y(\overset{7}{K_Y}, \overset{8}{L_Y}) - Y_A - Y_B\right] + \gamma_L\left[\bar{L} - L_X - L_Y\right].$$

1. $L_{X_A} = \partial U_A/\partial X_A = \gamma_X$
2. $L_{Y_A} = \partial U_A/\partial Y_A = \gamma_Y$
3. $L_{X_B} = \lambda \partial U_B/\partial X_B = \gamma_X$
4. $L_{Y_B} = \lambda \partial U_B/\partial Y_B = \gamma_Y$
5. $L_{K_X} = \gamma_X \cdot \partial f_X/\partial K_X = \gamma_K$
6. $L_{L_X} = \gamma_X \cdot \partial f_X/\partial L_X = \gamma_L$
7. $L_{K_Y} = \gamma_Y \cdot \partial f_Y/\partial K_Y = \gamma_K$
8. $L_{L_Y} = \gamma_Y \cdot \partial f_Y/\partial L_Y = \gamma_L$

I: TMS devem ser iguais entre A e B.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow \left[\frac{\partial U_A/\partial X_A}{\partial U_A/\partial Y_A} = \frac{\gamma_X}{\gamma_Y} = \frac{\partial U_B/\partial X_B}{\partial U_B/\partial Y_B}\right]$ I

II: TMS técnica deve ser igual

$\frac{5}{6} = \frac{7}{8} \rightarrow \left[\frac{\partial f_X/\partial K_X}{\partial f_X/\partial L_X} = \frac{\gamma_K}{\gamma_L} = \frac{\partial f_Y/\partial K_Y}{\partial f_Y/\partial L_Y}\right]$ II

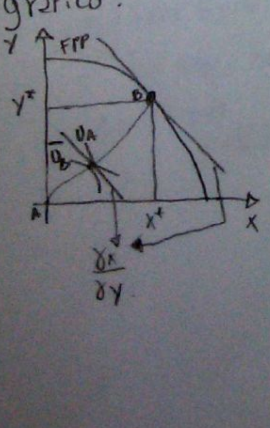
III: Taxa de transformação (y em x, variando capital) = (y em x, variando trabalho)

$\frac{5}{7} \rightarrow \frac{\gamma_X \cdot \partial f_X/\partial K_X}{\gamma_Y \cdot \partial f_Y/\partial K_Y} = \frac{\gamma_K}{\gamma_K} \rightarrow \frac{\gamma_X}{\gamma_Y} = \frac{\partial f_Y/\partial K_Y}{\partial f_X/\partial K_X}$

$\frac{6}{8} \rightarrow \frac{\gamma_X}{\gamma_Y} \cdot \frac{\partial f_X/\partial L_X}{\partial f_Y/\partial L_Y} = \frac{\gamma_L}{\gamma_L} \rightarrow \frac{\gamma_X}{\gamma_Y} = \frac{\partial f_Y/\partial L_Y}{\partial f_X/\partial L_Y}$

$\therefore \left[\frac{\partial f_Y/\partial K_Y}{\partial f_X/\partial K_X} = \frac{\gamma_X}{\gamma_Y} = \frac{\partial f_Y/\partial L_Y}{\partial f_X/\partial L_X}\right]$ III

gráfico:



· Esse ótimo global ocorre naturalmente na economia descentralizada, dados os comportamentos MAX de ut. dos indivíduos, MAX π das firmas e concorrência perfeita.

· $\gamma_X, \gamma_Y, \gamma_L, \gamma_K$: Preços sombra, que deveriam vigorar p/ que o ótimo global seja atingido

. Não se discute equidade. É eficiente.

Eql Geral: X, Y, Z, Lei de Walras

Base: $i=1,\dots,I$ consumidores, $j=1,\dots,J$ firmas, n bens, θ: part. lucros

• Consumidor i: MAX $U_i[X_i]$ SA $\vec{p}X_i = \underbrace{pW_i}_{\text{valor dotação}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{J}\theta_{ij}\Pi_j(\vec{p})}_{\text{part. lucros}}$, $\Pi_j(\vec{p}) = \vec{p}y_j$.

↳ Solução: $\vec{X}_i(\vec{p}) \xrightarrow{\text{Agregando}} \sum_{i=1}^{I} X_i(\vec{p}) = X(\vec{p})$ $\rightarrow \begin{bmatrix} \sum^{I} X_{i1}(\vec{p}) \\ \vdots \\ \sum X_{in}(\vec{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$

• Firma j: MAX $\Pi_j = \vec{p}\cdot y_j$ SA $\vec{y}_j \in F_j$

↳ Solução: $\underbrace{\vec{y}_j(\vec{p})}_{\text{fx oferta}} \xrightarrow{\text{Agregando}} \sum_{j=1}^{J} y_j(\vec{p}) = Y(\vec{p})$ $\rightarrow \begin{bmatrix} \sum^{J} y_{j1} \\ \vdots \\ \sum y_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$

• Excesso de demanda: $Z(\vec{p}) = X(\vec{p}) - W - Y(\vec{p})$

• Contínuo em $\vec{p}$

• Homogeneo de grau 0 em $\vec{p}$ (pois $X(\vec{p})$ e $Y(\vec{p})$ são hom. de grau 0)

• [Lei de Walras: $\vec{p}\cdot Z(\vec{p}) = 0$] Σ valor dos excessos de demanda $=0$

Prova:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}\,[X(\vec{p}) - W - Y] = 0 \\ \vec{p}\,[\sum^{I} X_i(\vec{p}) - \sum^{I} W_i - \sum^{J} y_j(\vec{p})] = 0 \end{array}\right\} \text{abre } Z(p)$$

$$\sum^{I} p(X_i - W_i) - \sum^{J} p y_j(\vec{p}) = 0 \quad [\text{distrib } \vec{p}]$$

$$\sum^{I}\sum^{J} \theta_{ij}\Pi_j - \sum^{J} p y_j(\vec{p}) = 0 \quad [\text{Usando RO: } pX_i - pW_i = \sum^{J}\theta_{ij}\Pi_j]$$

$$\sum^{J} p y_j - \sum^{J} p y_j(\vec{p}) = 0 \;//\; , \text{pois } \sum^{I}\theta_{ij} = 1$$

2 Corolários da lei de Walras

1) As n equações de $p\,Z(\vec{p})$ não são independente. Se há eql em $n-1$ mercados, então o enésimo mercado estará em equilíbrio

$$\vec{p}Z(\vec{p}) = \underbrace{p_1 Z_1(\vec{p}) + \dots}_{=0} + p_n Z_n(\vec{p}) = 0 \leftrightarrow p_n Z_n(\vec{p}) = 0 \leftrightarrow Z_n(\vec{p}) = 0 \quad (\text{pois } p_n > 0)$$

2) Bens livres: se p^* é o eql walrasiano e $Z_n(\vec{p}^*) < 0$, então $P_n^* = 0$

Ou seja, se há um bem em excesso de oferta em um eql walrasiano, esse bem tem que ser livre.

$$p\,Z(\vec{p}) = p_1 Z_1(p) + \dots + \underset{=0}{p_H} \cdot \underset{<0}{Z_H(\vec{p})} = 0$$

EQL Geral Walrasiano

. $Z(p^*) = 0$, com desejabilidade mínima. Ou seja, sem bens livres

. $Z(p^*) \leq 0$ (c/ bens livres)

. Existência.

Se $Z: S^{n-1} \to S^{n-1}$ é contínuo e satisfaz a lei de Walras, então existe um preço de equilíbrio p^*, tal que $Z(p^*)$ é um eql Walrasiano.

. Dado o mapa contínuo do simplex unitário sobre ele mesmo abaixo:

$$g_K(p^*) = \frac{P_K^* + MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)]}{1 + \sum_K MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)]} \quad ; K = 1, 2, \ldots, n.$$

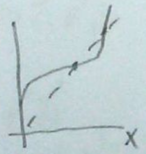
obs
. Denominador é o Σ do numerador

. Leiloeiro Walrasiano: Se $Z_K > 0 \to \uparrow P_K$.
excesso de demanda

Tem-se
1) $0 \leq g_K(p^*) \leq 1$:

2) $g_K(p^*)$ é contínuo pois $Z(p^*)$ é contínuo (ora que X e Y são contínuos).

Logo, pode-se usar o teorema do pto fixo. (todo mapa contínuo do simplex unitário tem pelo menos 1 pto fixo),



, $f(x) = x$.

Logo, $g_K(p^*) = P_K^*$. Abrindo:

$P_K^* + MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)] = P_K^* + P_K^* \sum^K MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)]$; Mult por denominador.

$Z_K(p^*) MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)] = Z_K(p^*) P_K^* \sum^K MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)]$; $-P_K^*$, Mult por $Z_K(p^*)$; $\forall K = 1, \ldots, n$.

$$\sum_{K=1}^{n} Z_K(p^*) MAX[0, Z_K(\vec{p}^*)] = \underbrace{\sum_{K=1}^{n} P_K^* Z_K(p^*)}_{=0 \text{ por lei de Walras}} \cdot \sum^K MAX[0, Z_K(p^*)].$$

$$\sum_{K=1}^{n} Z_K(p^*) MAX[0, Z_K(p^*)] = 0$$

$\therefore Z_K(p^*) \leq 0$. Qualquer $Z_K(p^*) > 0 \to MAX[0, Z_K(p)] > 0$, não valendo a igualdade acima.

eql geral walrasiano (c/ bens livres).

Se $\vec{p}^* \gg 0$; $p^* Z(p^*) = 0 \leftrightarrow Z_K(p^*) = 0$. (eql geral Walrasiano sem bens livres)

Scanned by CamScanner

Teoremas fundamentais do bem-estar

1) 1º Teorema

Se $x(p^*)$ e $y(p^*)$ são o resultado do equilíbrio Walrasiano, então são ótimos de pareto factível $(\sum^I x_i' = \sum^I w_i + \sum^J y_j)$.

Ou seja, não existe outro par x' e y' tal que

$U_i(x_i') \geq U_i(x_i^*)$, $\forall i$ [todos os indivíduos estão tão bem em x_i' qto x_i^*]

$U_i(x_i') > U_i(x_i^*)$ p/ um i qqer. [pelo menos 1 estritamente prefere uma alocação x_i'].

Prova por contradição:

Existe x_i', e é "melhor" que x_i^*. (pois U(.) é crescente em X, e mult. por p^*)

$$p^* x_i' \geq p^* x_i^*$$
$$p^* x_i' > p^* x_i^*$$
$$\sum^I p^* x_i' > \sum^I p^* x_i^*$$
$$p^*\left[\sum^I w_i + \sum^J y_j'\right] > \sum^I p^* w_i + \sum^J p^* y_j^*$$
$$\sum^J p^* y_j' > \sum^J p^* y_j^*$$
$$\Updownarrow$$
$$p^* \cdot y_j' > p^* y_j^*$$

Usando:

1) x_i' é factível, logo $\sum^I x_i' = \sum^I w_i + \sum^J y_j$

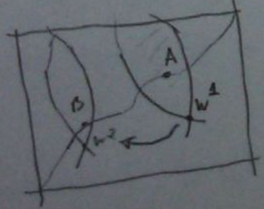
2) Lei de Walras: $p^* z(p^*) = 0$

$$p^* \sum^I x_i - p^* \sum^I w_i - p^* \sum^J y_j^* = 0$$
$$\sum^I p^* \sum_i x_i = \sum^I p^* w_i + \sum^J p^* y_j^*$$

Isso mostra que a firma ñ estava maximizando lucros em y_j^*, logo, não é eql walrasiano.

2º Teorema) equidade

Qualquer Alocação ótima de pareto pode ser o resultado do ~~eq~~ equilíbrio Walrasiano, desde que sejam feitas transferencias de dotações iniciais.



Formas de realocar recursos escassos
1) Mercado
2) Regras burocráticas estatais
3) Loteria
4) Violência

EQL Geral: Edgeworth

Edgeworth abordou o equilibrio geral através de uma economia de trocas, sem preços
A intuição é que os indivíduos vão realizar contratos contingentes e que, dadas certas condições,
a alocação de equilíbrio é o equilíbrio Walrasiano.

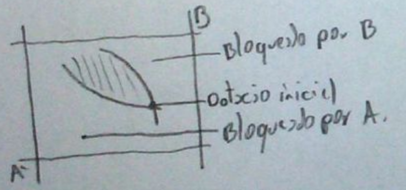
Dados gerais: 2 tipos de indivíduos, A e B
n° de indivíduos $i=1,\dots,I$.
W_i: dotação inicial
X_i: consumo

Def^n Alocação bloqueada

Uma alocação de bens $X_1,\dots,X_I$ é bloqueada por um conjunto S de indivíduos se existir uma alocação alternativa $X_1',\dots,X_I'$, tal que seja factível e

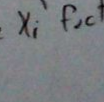
$U_i(X_i') \geq U_i(X_i)\ \forall i \in S$ e $\sum^I X_i' = \sum^I W_i$
$U_i(X_i') > U_i(X_i)$ p/ um $i \in S$
(~ ótim. pareto)

Def^n Core É o conjunto de alocações que não pode ser bloqueado por nenhum conjunto S.



Proposição 1: Se uma alocação $X_i, i=1,\dots I$, está no Core, então $U_i(X_i) \geq U_i(W_i)\ \forall i$
$U_i(X_i) > U_i(W_i)$ p/ pelo menos 1 i.
ou seja, é preferível a dotação inicial W_i.

Proposição 2: Se a alocação está no Core, então é ótima de pareto.



Proposição 3: O eql Walrasiano está no Core
X^* é eql Walrasiano e está no Core (ñ pode ser bloqueado).
Contradição: Suponha que X^* ñ está no CORE, podendo ser bloqueado por X_i' factível.

Logo: $U_i(X_i') \geq U_i(X_i^*)\ \forall i \in S$ e $\sum^I X_i' = \sum^I W_i = \sum^I X_i^*$. ($X_i^*$ e X_i' factíveis)
$U_i(X_i') > U_i(X_i^*)$ p/ pelo menos $1\ i \in S$

Como $U(\cdot)$ é crescente em X, temos

$X_i' \geq X_i^*$
$X_i > X_i^*$

Soma: $\sum^I X_i' > \sum^I X_i^* \rightarrow \sum^I X_i' > \sum^I W_i$ (X_i' ñ é factível)
ou
$\sum^I W_i > \sum^I W_i$ (Absurdo)

Proposição 4: Lema do tratamento igualitário. (A e B replicados)

Uma alocação que está no CORE fornece a mesma cesta de bens para indivíduos do mesmo tipo.

$x_{A1} = \dots = x_{AR}$, W_A 2 indivíduos replicados
$x_{B1} = \dots = x_{BR}$, W_B.

Prova: Por contradição. Alocação no core é desigual. Poderá ser bloqueada pela cesta média.

1: Cesta médias: $\bar{X}_A = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} X_{Ai}$; $\bar{X}_B = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} X_{Bi}$

2: Conjunto S que tenha 1 indivíduo A e B, e que esteja abaixo da média.
Se S conseguir obter a cesta média a partir da dotação inicial, pode bloquear as alocações desiguais.

Logo, é preciso provar que $\bar{X}_A + \bar{X}_B = W_A + W_B$.

Como $\sum X_i = \sum W_i \to \frac{1}{R}\sum X_i = \frac{1}{R}\sum W_i \to \bar{X}_A + \bar{X}_B = \bar{W}_A + \bar{W}_B$.
(Factível)

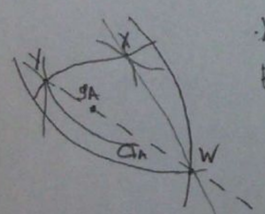
$$\bar{X}_A + \bar{X}_B = \frac{1}{R}\sum^{R} W_{Ai} + \frac{1}{R}\sum^{R} W_{Bi}$$

$$\bar{X}_A + \bar{X}_B = \frac{1}{R}.R\cdot W_A + \frac{1}{R}R.W_B$$ (pois a dotação W_{Ai} é a mesma p/ cada i) e W_{Bi}

$$\therefore \bar{X}_A + \bar{X}_B = W_A + W_B.$$

Como é possível obter a cesta média a partir da dotação inicial, qualquer cesta pior a ela será (desigual) bloqueada.

Proposição 5: Em uma economia replicada, a única alocação que pertence ao Core, $\forall r$, é o eql Walrasiano.



.X é eql walrasiano. Supor que existe outro ponto (Y) pareto otimo (sob a curva)
É possível criar cestas preferiveis a Y até que o eql possível colapse em X.

1) $g_A = \frac{T}{r} W_A + \left(1 - \frac{T}{r}\right) Y_A$ (Comb linear que gera cesta acima de CI_A)

"p/ grandes economias"

.b continua em Yb.

2) Coalisão: r tipo A e (r-T) tipo b.

3) Factível: $r\cdot g_A + (r-T)y_b = r\cdot W_A + (r-T)W_b$

$r\left[\frac{T}{r}W_A + \left(1-\frac{T}{r}\right)Y_A\right] + (r-T)y_b = \dots$ [subst g_A]

$TW_A + rY_a - TY_a + (r-T)y_b = \dots$

$TW_a + (r-T)y_a + (r-T)y_b = \dots$

$TW_a + (r-T)(y_a + y_b) = \dots$

$TW_a + (r-T)(W_a + y_b) = \dots$ [$y_a + y_b = W_a + W_b$, factível]

$TW_a + rW_a - TW_a + (r-T)y_b$

$TW_a + (r-T)y_b = \dots$

Como é factível, eventualmente chega-se a X.