第29讲 罗尔定理与拉格朗日中值定理

一位驾驶员在某高速公路出口处领到一张超速行驶罚单. 理由是从七点进入高速到九点到达出口行驶了240km，而该路段的限速为110km/h. 试问该罚单是否合理？

平均速度 $\bar{v} = \dfrac{240}{9-7} = 120\ (\mathrm{km/h})$

问题：是否存在某一时刻的瞬时速度恰好是平均速度？

北京某过街天桥上的公式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

路程函数 $s=f(t)$

$$f'(\xi)=\frac{f(9)-f(7)}{9-7}$$

$$=\frac{240}{2}=120$$

罗尔定理

拉格朗日中值定理

微分中值定理应用

定理1 (罗尔定理)

如果函数$f(x)$ 满足下列条件:

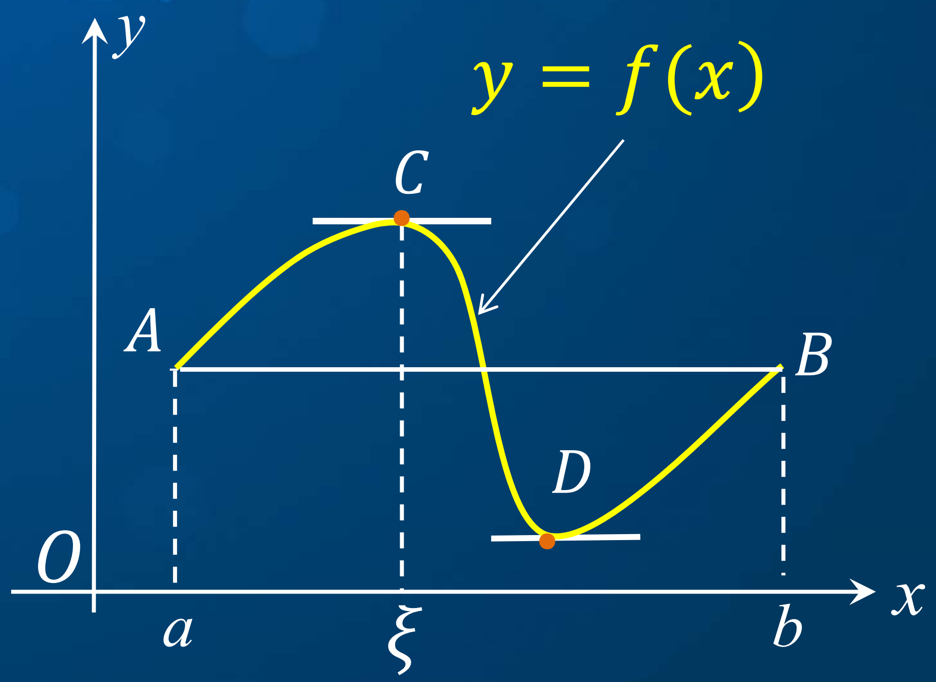
(1) 在$[a,b]$上连续；

(2) 在(a,b)内可导；

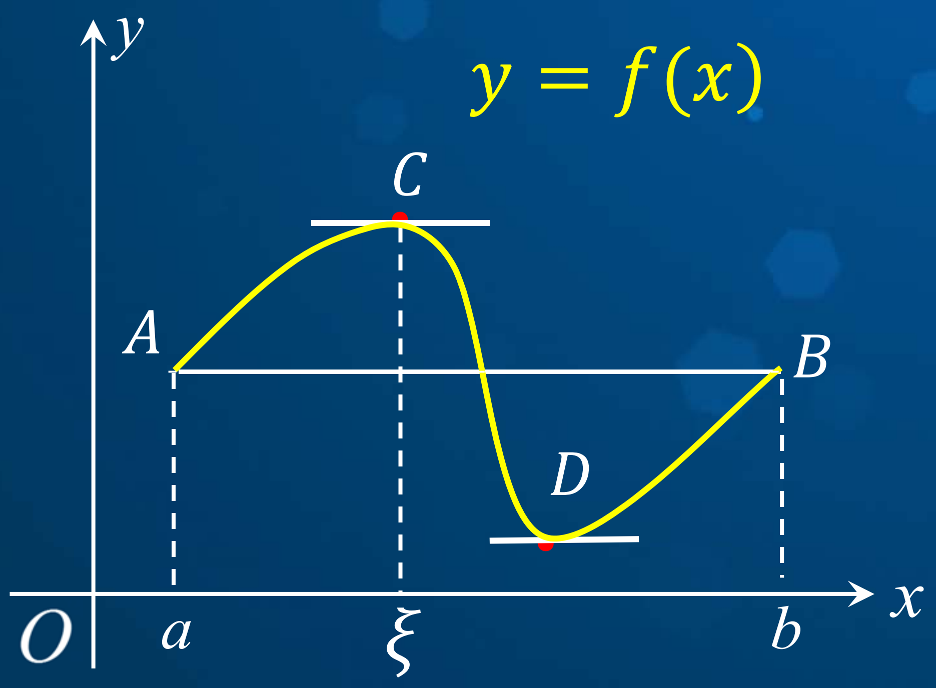
(3) $f(a)=f(b)$，

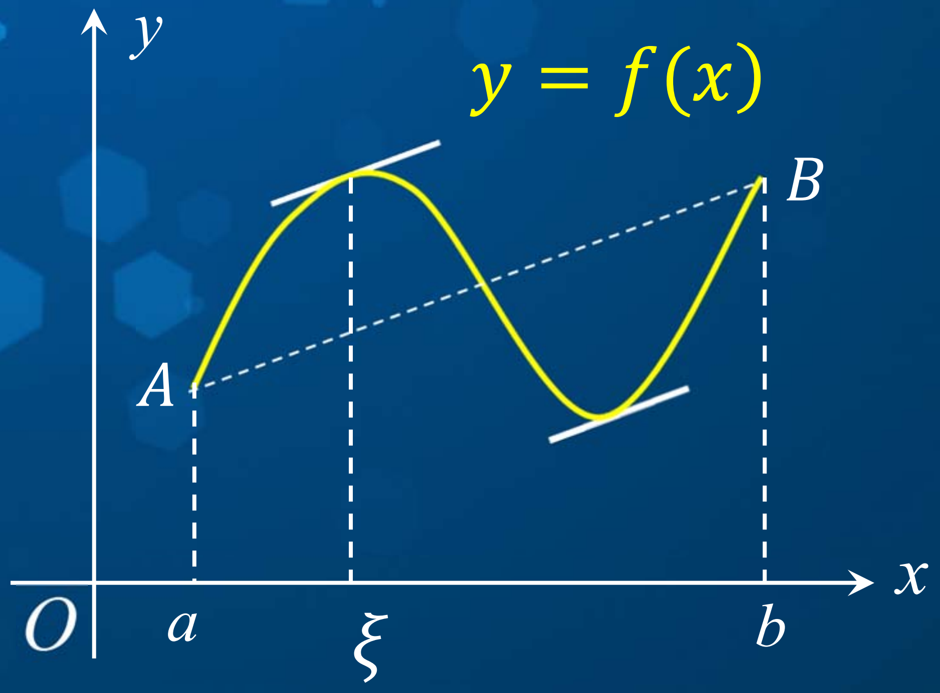
那么至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$



注: 定理条件只是充分的， 罗尔定理的三个假设条件缺一不可.





罗尔定理

拉格朗日中值定理

O

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

定理2 (拉格朗日中值定理)

如果函数$f(x)$ 满足下列条件：

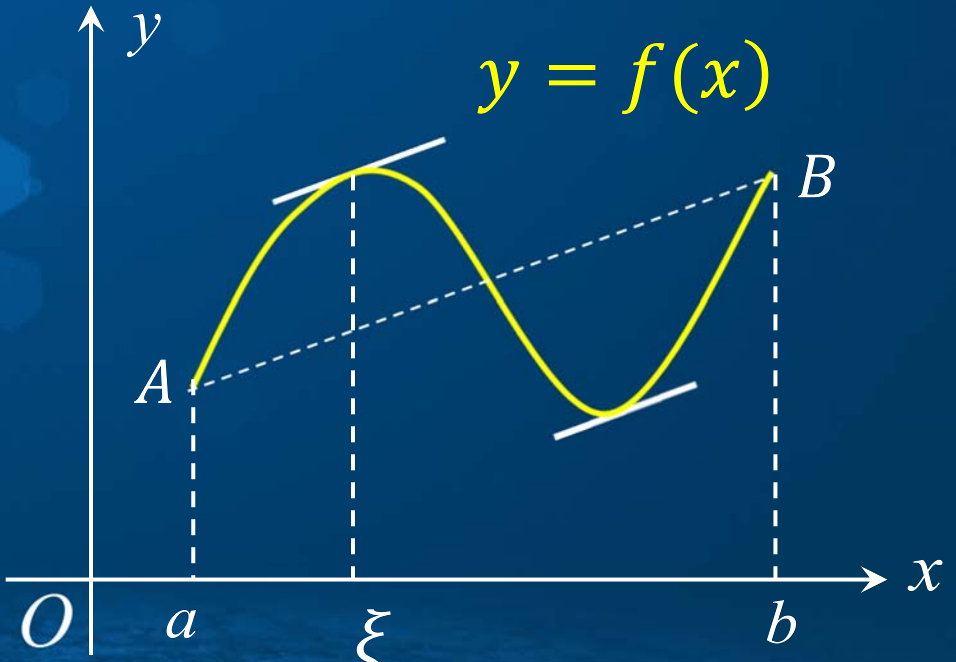
(1) 在$[a,b]$上连续；

(2) 在(a,b)内可导；

那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

x

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



拉格朗日中值定理的其他形式

(1) 拉格朗日中值公式等价于

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b.$$

(2) 在$[x, x+\Delta x]\subseteq[a,b](\Delta x>0)$或$[x+\Delta x, x]\subseteq[a,b](\Delta x<0)$

上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

上式等价于

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

注: $\boxed{\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta<1,}$ 有限增量公式

函数微分的定义

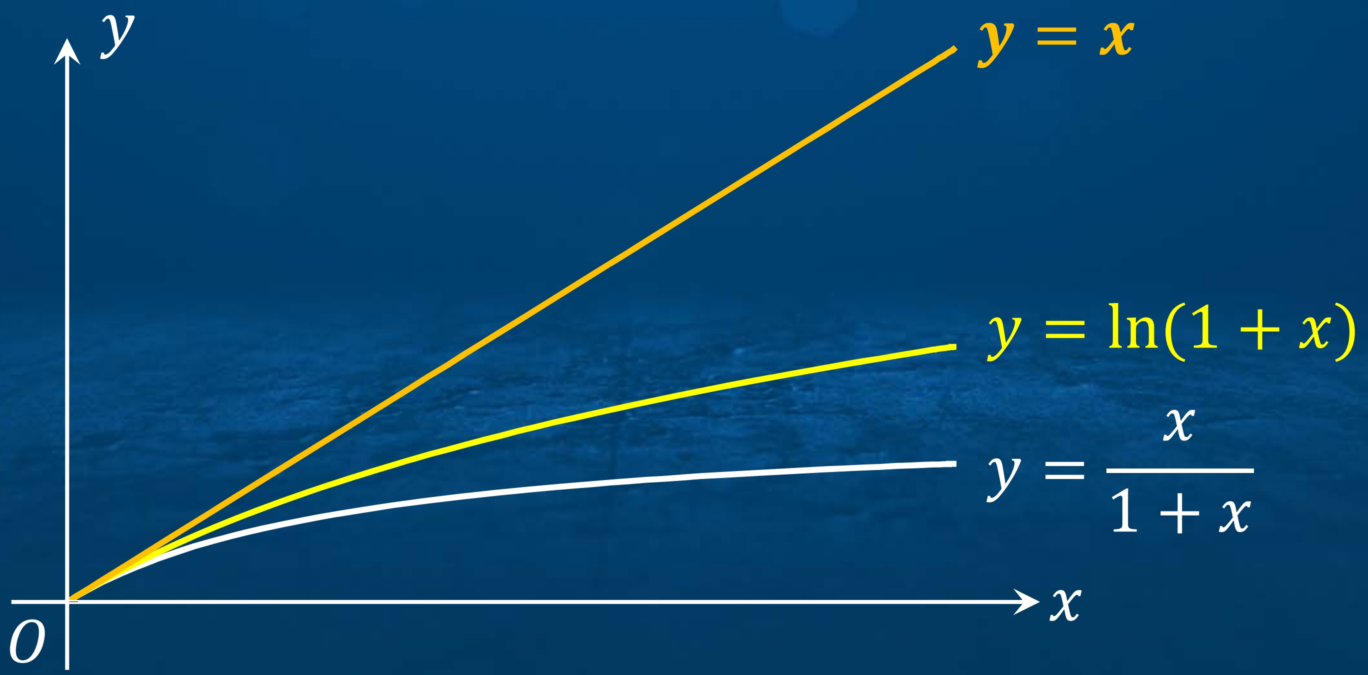
$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x)\Delta x.$$

公式$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$给出了自变量取得有限增量$\Delta x$时，函数增量的准确表达式.

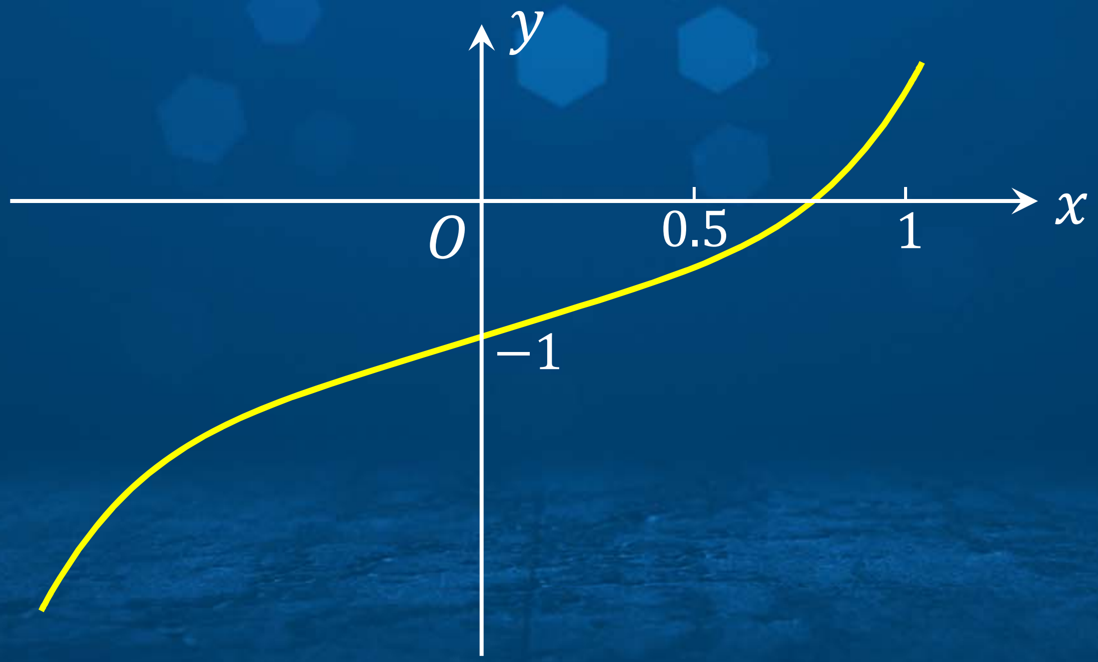
拉格朗日中值定理也叫做有限增量定理.

例1 设 $f(x)$ 在 (a,b)内可导，且$f'(x)$恒为零，证明 $f(x)$ 在 (a,b)内恒为常数.

例2 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ x > 0.$



例3　证明方程$x^5+x-1=0$只有惟一实根.



例4　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，又若$f(x)$的图形与联结 $A\big(a,f(a)\big),B\big(b,f(b)\big)$ 两点的弦交于点$C(c,f(c))$ $(a<c<b)$. 证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.