第33讲 泰勒公式的应用

- 为什么等价无穷小代换会出现错误？

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\sin x\sim x}{\cancel{=}} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

正确结果：$\frac{1}{6}$

- 如何控制近似计算的精度？

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0.05+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}0.05^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}0.05^3$$

$$=1.02469531\cdots$$

精确值：$\sqrt{1.05}=1.02469507\cdots$

- 如何解决与函数多阶导数相关的问题？

近似计算

极限计算

问题证明

第33讲 泰勒公式的应用——主要内容

如果 $f(x)$在包含x_0的某个开区间 (a,b)内具 $n+1$阶导数，则对任一$x\in(a,b)$，至少存在介于x_0和x之间的一点ξ，使得

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}+R_n(x),\qquad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

近似计算

$$=o\left[(x-x_0)^n\right](x\to x_0)$$

如果 $f^{(n+1)}(x)$在 (a,b)内有界，即存在正数 M，对一切$x\in(a,b)$，有$|f^{(n+1)}(x)|\le M$, 从而有

$$\boxed{|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}}$$

误差估计

例1 计算无理数 e(自然常数)的近似值，使误差不超过10^{-5}.

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=2.718281828459\cdots$$

n	e的近似值
0	1.
1	2.
2	2.5
3	2.66666666666666
4	2.70833333333333
5	2.71666666666666
6	2.71805555555555
7	2.71825396825396
8	2.71827876984127

例2（爱因斯坦相对论的质能转换）

爱因斯坦相对论认为物体的质量随速度的增加而增加，质量公式为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

其中，m_0为静止质量，表示没有运动时的物体质量；v 为物体的运动速度；c为光速，大约为3×10^8m/s.

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

利用泰勒近似公式：$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\approx 1+\frac{x^2}{2}$.

当v和c相比很小时，$\frac{v^2}{c^2}$接近于零，有

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

于是

$$m\approx m_0+\boxed{\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\Rightarrow \frac{1}{2}m_0v^2\approx (m-m_0)c^2$$

表示物体从静止达到速度v时增加的质量

$$\Rightarrow \Delta E_k\approx \Delta m\cdot c^2$$

$\boxed{c\approx 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}}$

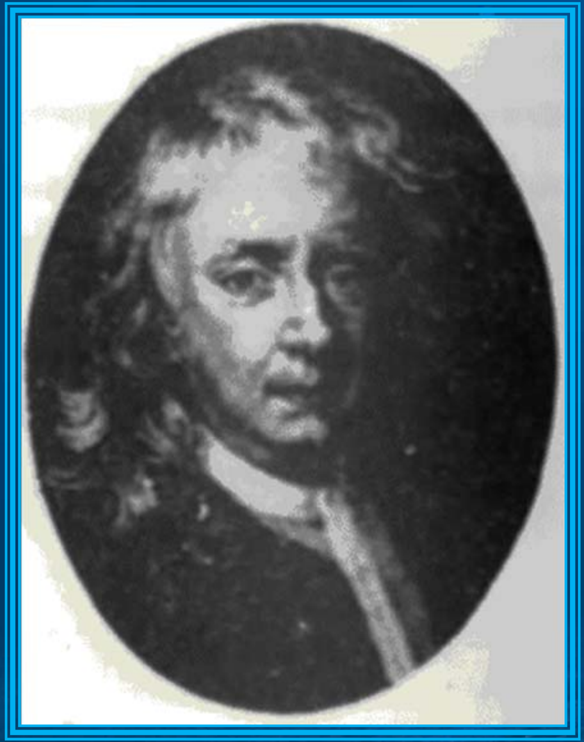
例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

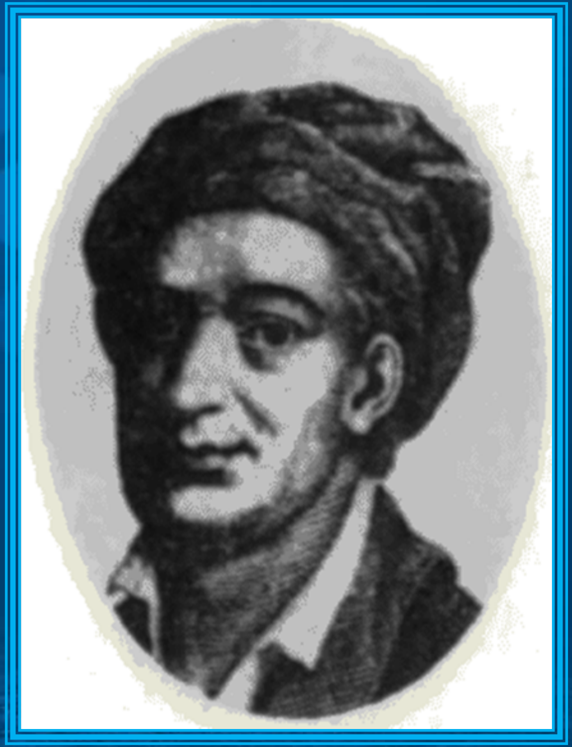
例4 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

例5 证明：当$x > 0$时，$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

例6 设函数 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f(x)$，$f''(x)$在$(a,+\infty)$有界，证明$f'(x)$ 在$(a,+\infty)$内有界.

例7 设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1) = 0$，$f(1) = 1$，$f'(0) = 0$． 证明：在开区间 $(-1,1)$，内至少存在一点ξ，使$f'''(\xi) = 3$.





微积分理论创始人：牛顿与莱布尼兹