国防科学技术大学
National University of Defense Technology

高等数学（二）综合练习

练习二： 微分中值定理与洛必达法则

理学院 朱健民教授

高等数学（二）综合练习——微分中值定理与洛必达法则

主要内容

- 微分中值定理

名 称	条　　件	结　论
Fermat 费马	$f(x)$ 在x_0处可导并取极值	$f'(x_0)=0$

主要内容

- 微分中值定理

<table>
<tr><th>名 称</th><th colspan="2">条　　件</th><th>结　论</th></tr>
<tr><td>Fermat
费马</td><td colspan="2">$f(x)$ 在x_0处可导并取极值</td><td>$f'(x_0)=0$</td></tr>
<tr><td>Rolle
洛尔</td><td rowspan="3">$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，</td><td>$f(a)=f(b)$</td><td>$f'(c)=0$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

主要内容

- 微分中值定理

<table>
<tr><th>名 称</th><th colspan="2">条　　件</th><th colspan="2">结　论</th></tr>
<tr><td>Fermat
费马</td><td colspan="2">$f(x)$ 在x_0处可导并取极值</td><td colspan="2">$f'(x_0)=0$</td></tr>
<tr><td>Rolle
洛尔</td><td rowspan="3">$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，</td><td>$f(a)=f(b)$</td><td colspan="2">$f'(c)=0$</td></tr>
<tr><td>Lagrange
拉格朗日</td><td colspan="3">$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

主要内容

- 微分中值定理

<table>
<tr><th>名 称</th><th colspan="2">条　　件</th><th>结　论</th></tr>
<tr><td>Fermat
费马</td><td colspan="2">$f(x)$ 在x_0处可导并取极值</td><td>$f'(x_0)=0$</td></tr>
<tr><td>Rolle
洛尔</td><td rowspan="3">$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，</td><td>$f(a)=f(b)$</td><td>$f'(c)=0$</td></tr>
<tr><td>Lagrange
拉格朗日</td><td colspan="2">$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$</td></tr>
<tr><td>Cauchy
柯西</td><td>$g'(x)\neq 0$</td><td>$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$</td></tr>
</table>

主要内容

- 洛必达法则

定理1 （$\frac{0}{0}$）设

（1）$f(x)$, $g(x)$在$(a, \ a+\eta)$ $(\eta>0)$内可微，且$g'(x)\neq 0$ ；

（2）$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ ；

（3）$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ $(|l|<\infty$ or $l=\infty)$ ，则

$$\boxed{\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .}$$

主要内容

- 洛必达法则

定理2 （$\frac{\infty}{\infty}$）设

（1）$f(x)$, $g(x)$在$(a,\ a+\eta)$ $(\eta>0)$内可微，且$g'(x)\neq 0$ ；

（2）$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$;

（3）$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ $(|l|<\infty \text{ or } l=\infty)$ ，则

$$\boxed{\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .}$$

例题讲解

1．已知$f''(x_0)$存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0)$$

上述计算过程对吗？

2．计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)$

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

（3）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\left(e^{\sin x}-1\right)^{2}}{\tan^{2}x}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^{4}}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x^{3}}$

3. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\phi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$，其中$\phi(x)$具有二阶导数，且$\phi(0)=1$，$\phi'(0)=0$，$f'(0)$存在，求$f'(0)$．

4．设$f(x)$具有二阶导数，在$x=0$的某邻域内有$f(x)\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\ f''(0)=4$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$．

5．设$f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在 $(0,1)$内可导，且

$$f(0)=f(1)=0,\ \ f(1/2)=1.$$

证明：存在$\xi\in(0,1)$ 使得$f'(\xi)=1$．

6．设$f(x)$ 可导，证明：在$f(x)$的两个零点之间一定有$\lambda f(x)+f'(x)$的零点，其中λ为任意常数．

7．设$f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且$f(0)=f(1)=0$ ．证明：存在$\xi\in(0,1)$ ，使得$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$．