第58讲 空间曲面

曲面及其方程

旋转曲面与柱面

二次曲面及其标准方程

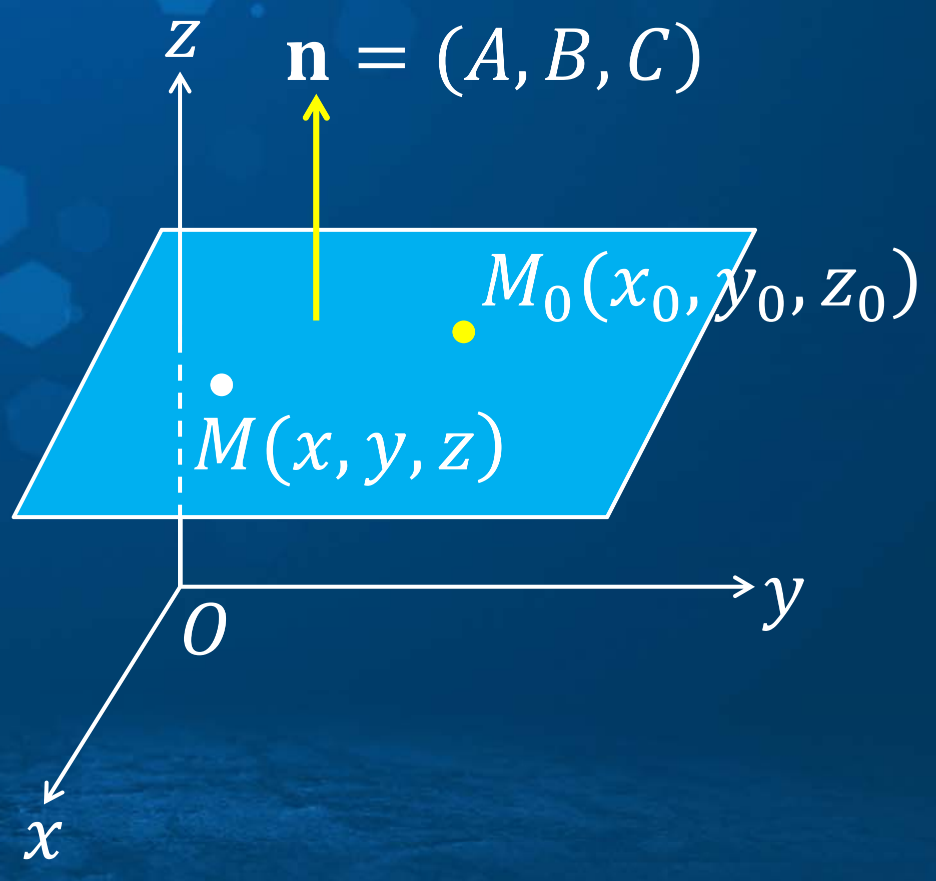
平面的方程：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

可以用这个方程来描述平面上所有点的共同性质．

(1) 满足方程的点都在平面上；

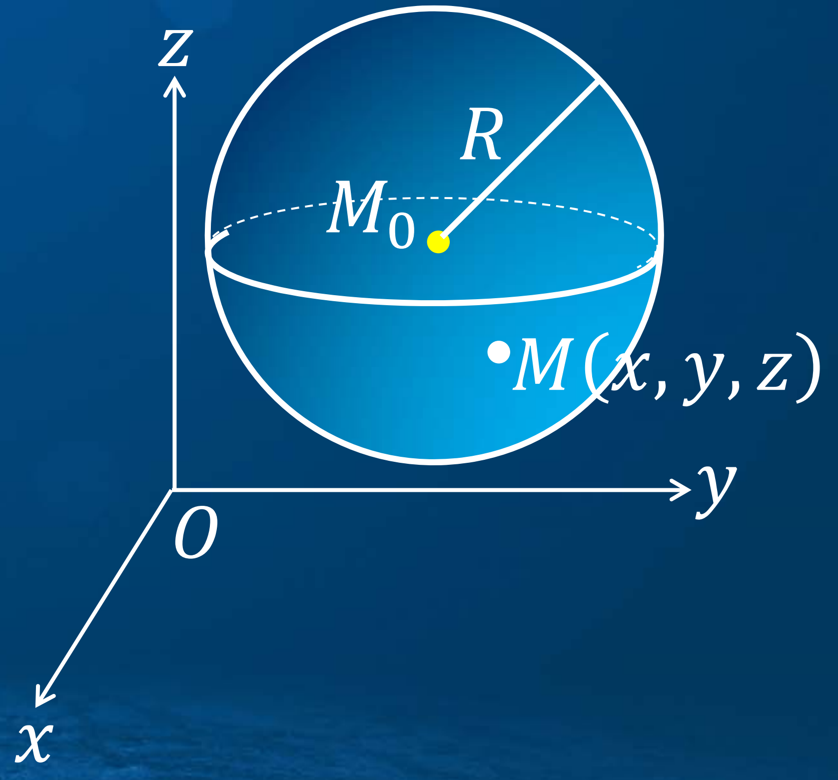
(2) 平面上的点坐标满足方程.



平面表示为点的集合：

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz + D = 0\}$$

例1 到一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离等于常数$R\ (R>0)$ 的动点的轨迹是球面，求该球面方程．



【例1解】

设$M(x,y,z)$为球面上任一点，

则有$|\overrightarrow{M_0M}|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

球面方面为：

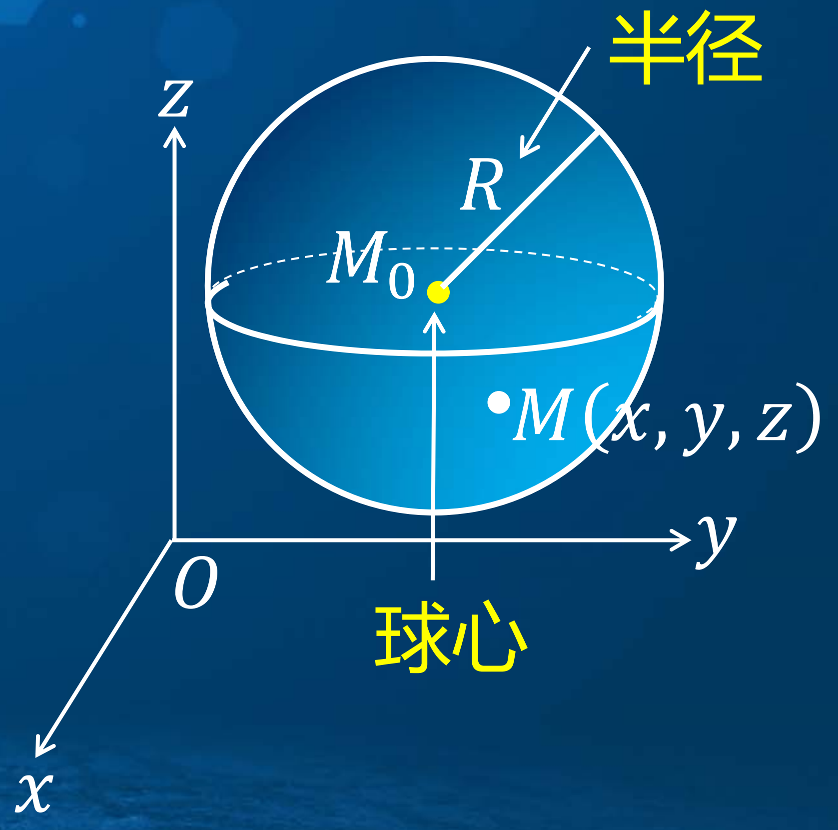
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

单位球面方程为：

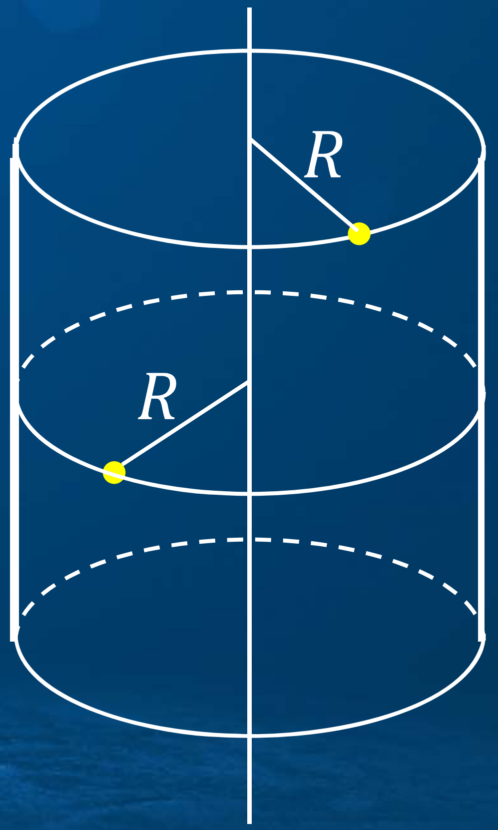
$$x^2+y^2+z^2=1$$

单位球面表示为点的集合：

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$



例2 圆柱面可视为由直线L绕一条与它平行的定直线旋转一周所成的旋转曲面，也可视为动点到定直线的距离等于常数的轨迹．求该圆柱面方程．

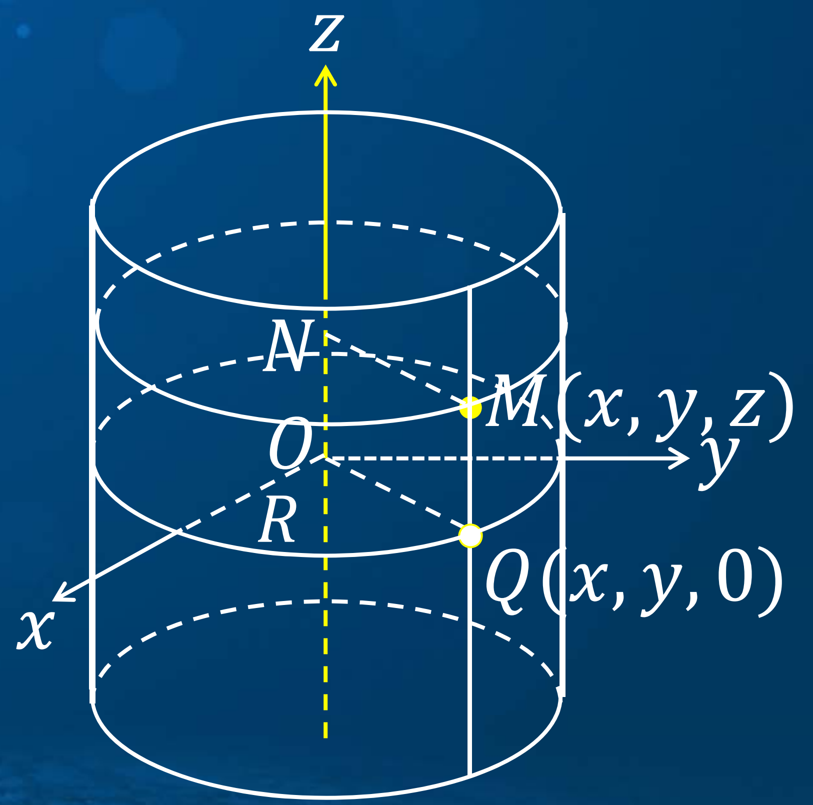


例2 圆柱面可视为由直线L绕一条与它平行的定直线旋转一周所成的旋转曲面，也可视为动点到定直线的距离等于常数的轨迹．求该圆柱面方程．

直线L为z轴：$x^2+y^2=R^2$

直线L为x轴：$y^2+z^2=R^2$

直线L为y轴：$x^2+z^2=R^2$



$$x^2+y^2=R^2$$

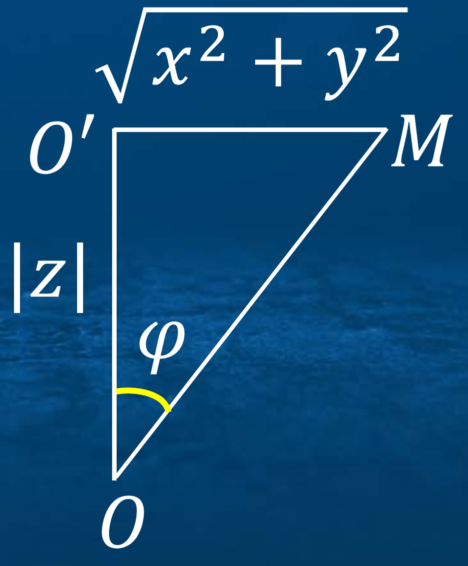
例3　由一直线L绕一条与它相交的定直线旋转一周而成的曲面是圆锥面．圆锥面也可视为动点与定直线上一定点的连线与该定直线成等角的轨迹.

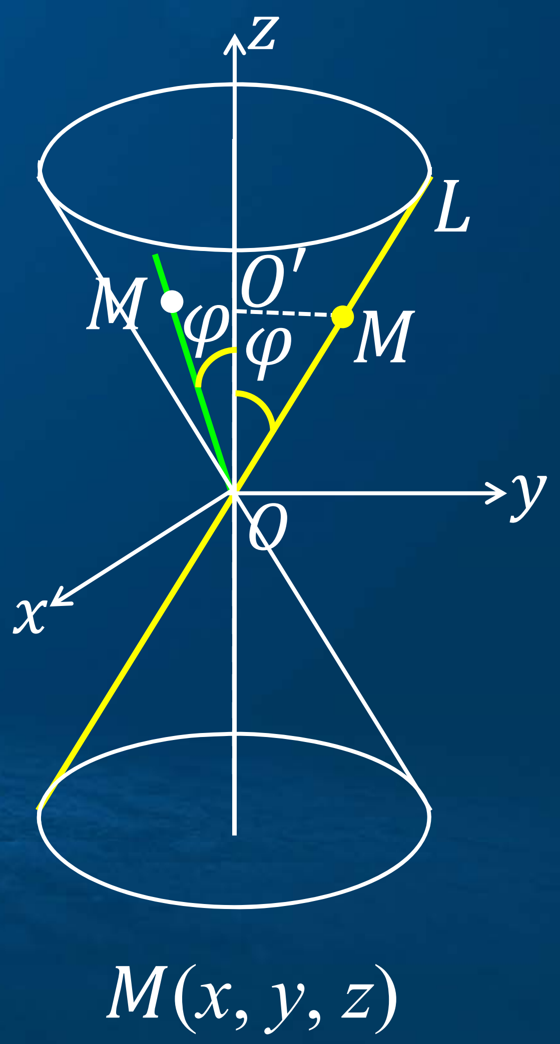
求这圆锥面上动点的轨迹方程．

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|}=\tan\varphi$$

$$(x^2+y^2)=z^2\tan^2\varphi$$

当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时，$z^2=x^2+y^2.$





平面	$Ax+By+Cz+D=0$ $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid Ax+By+Cz+D=0\}$
单位球面	$x^2+y^2+z^2=1$ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$
圆柱面	$x^2+y^2=R^2$ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=R^2\}$
圆锥面	$z^2=x^2+y^2.$ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2\}$

对于方程$F(x,y,z)=0$与曲面S，称$F(x,y,z)=0$为曲面S的方程（曲面S为$F(x,y,z)=0$的几何图形），若

(1) 凡是曲面S上的点的坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$；

(2) 凡是不在曲面S上的点的坐标不满足这个方程,

关于曲面的研究的两个基本问题:

(1) 已知曲面作为点的几何轨迹时, 建立曲面的方程;

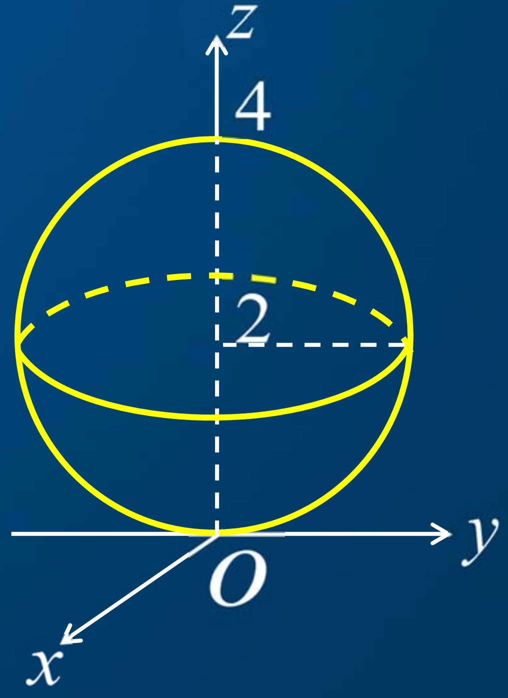
(2) 已知方程$F(x,y,z)=0$，研究方程所表示的曲面的几何形状.

例4 方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$表示什么曲面？

【例4解】 将原方程配方得

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4.$$

方程表示球心在$(0,0,2)$，半径为$R=2$的球面.



说明: 如下形式的三元二次方程$(A\neq 0)$

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

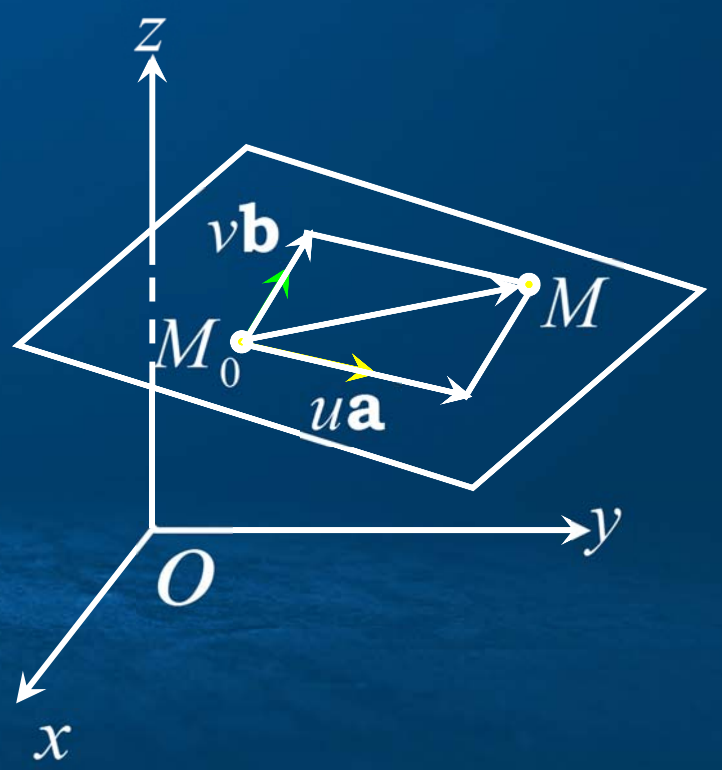
球面 、点 或 虚球面

设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$是平面内两个已知不平行的非零向量，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面内的已知点.

平面的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1\,, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2\,, \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3\,. \end{cases}$$

$$(-\infty < u,\ v < +\infty)$$



一般地, 曲面可以用两个参数的方程表示:

$$x = x(u,v)\,, y = y(u,v)\,,\ z = z(u,v)\,.$$

给定参数 $(u\,,v)$ 的一组值，就确定曲面上一个点的位置.

曲面就是这些点的集合：

$$S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}\,.$$

或

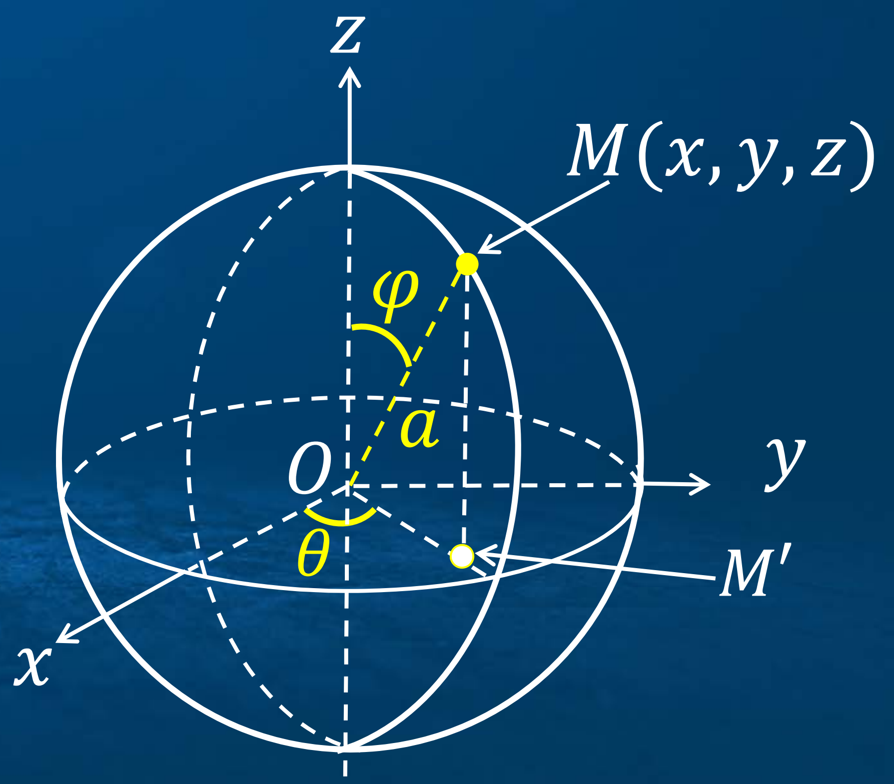
$$S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|(u,v) \in D\}\,,$$

其中，D 是 $\mathbb{R}^2$的一个区域，它是参数 $(u\,,v)$ 的取值范围.

例5 (1)写出$\mathbb{R}^3$中的球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的参数方程；

球面参数方程：

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta, \\ y = a\sin\varphi\sin\theta, \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{pmatrix}$$

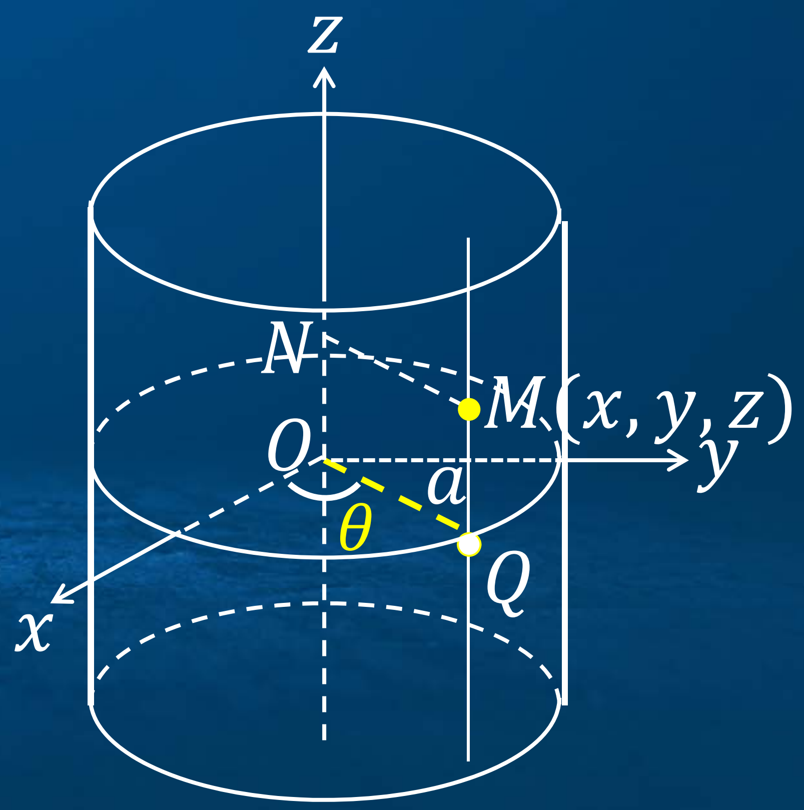


例5 (1)写出$\mathbb{R}^3$中的球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的参数方程；

(2)写出$\mathbb{R}^3$中的圆柱面$x^2+y^2=a^2$的参数方程．

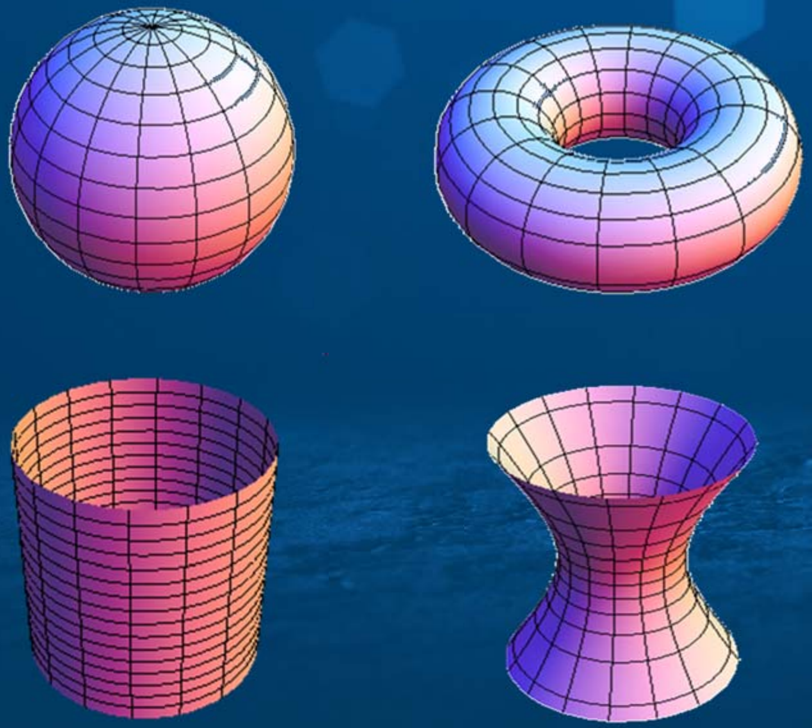
圆柱面参数方程：

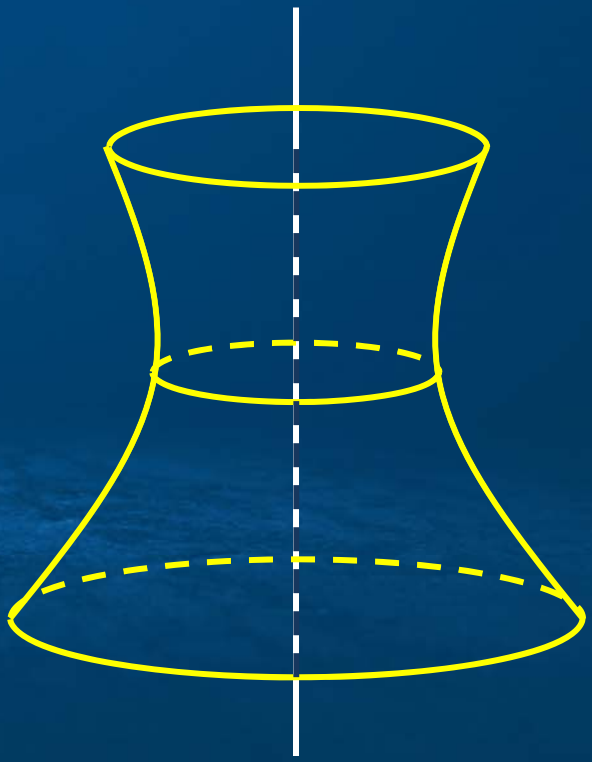
$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{pmatrix}$$



一条曲线绕其平面上一定直线旋转一周所得的曲面称为**旋转曲面**. 定直线称为**旋转曲面的轴**.

例如：





设S为yOz平面上的曲线$C: f(y,z)=0$绕z轴旋转得到旋转曲面.

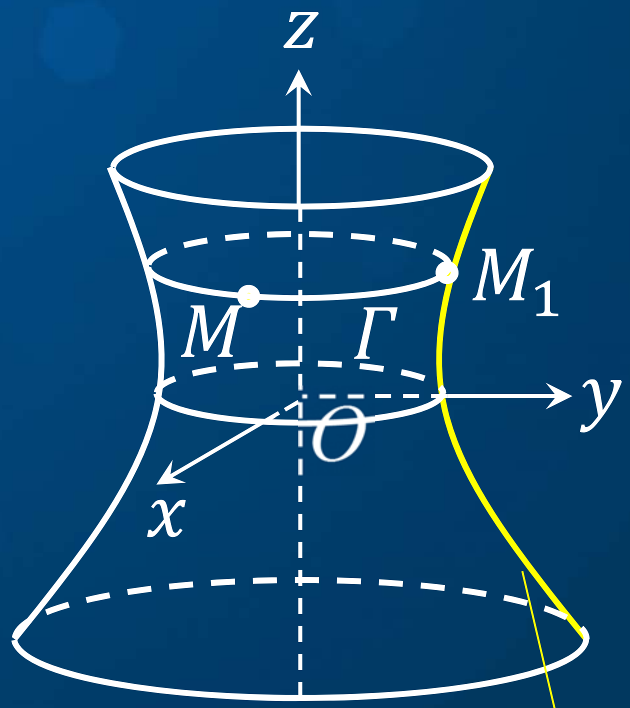
设$M(x,y,z)$为Σ上任一点，过M作与z轴垂直的平面，则该平面与S的交线为圆Γ，它与C的交点为

$$M_1(0,\ y_1,\ z_1) \quad f(y_1,z_1)=0$$

M与z轴的距离和M_1与z轴的距离相等

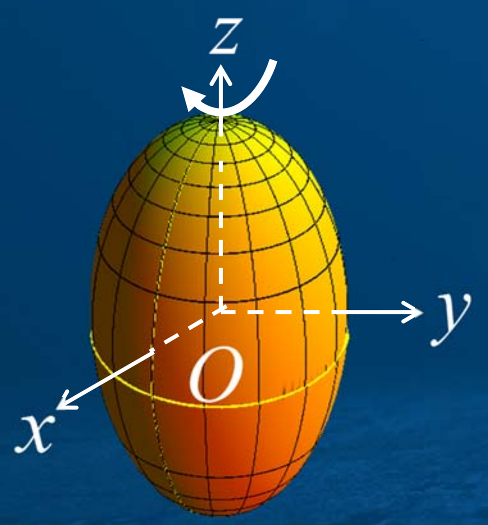
$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2} \ \Rightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$$z_1=z \ \Rightarrow S: f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$ 旋转曲面S的方程

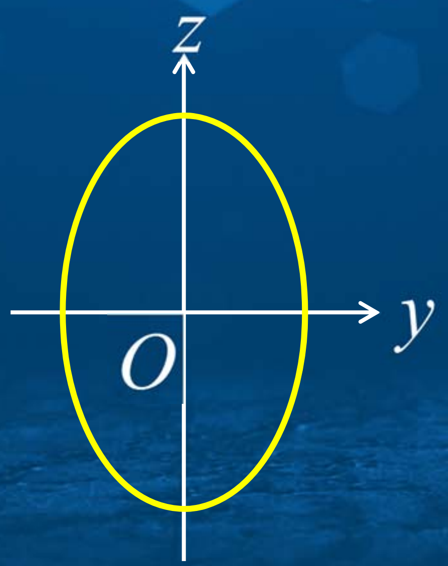


例6 将yOz平面上的椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴与 y 轴旋转一周，求旋转曲面的方程．

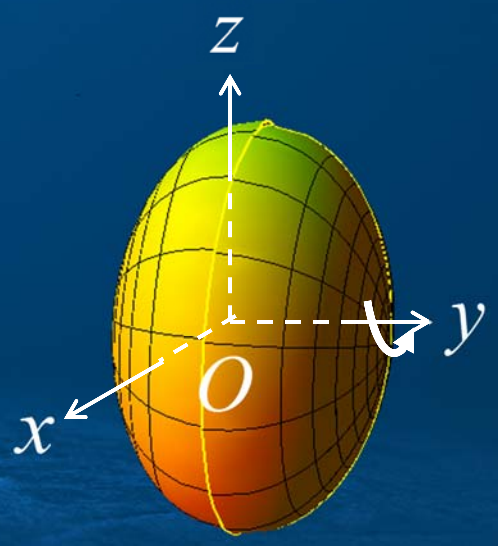
旋转椭球面.



$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



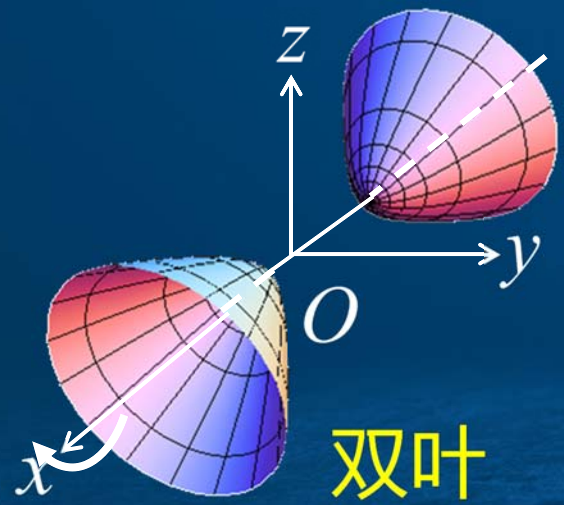
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



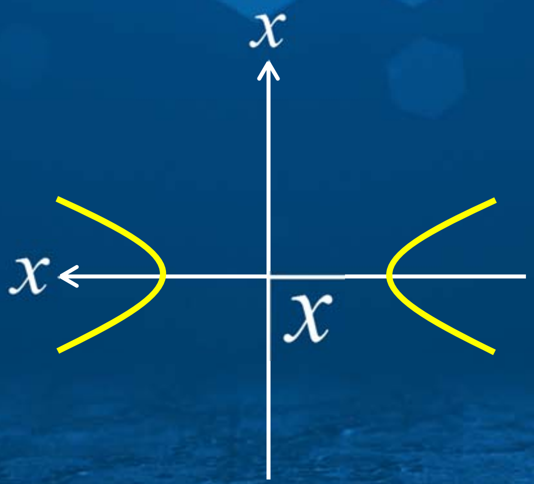
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

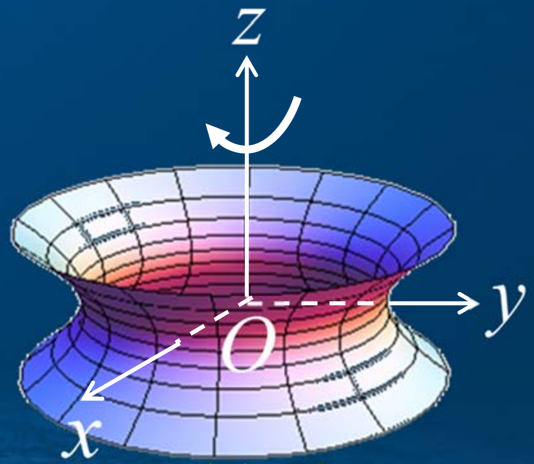
例7 将xOz平面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$分别绕 x 轴与 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程．

旋转双曲面.



双叶



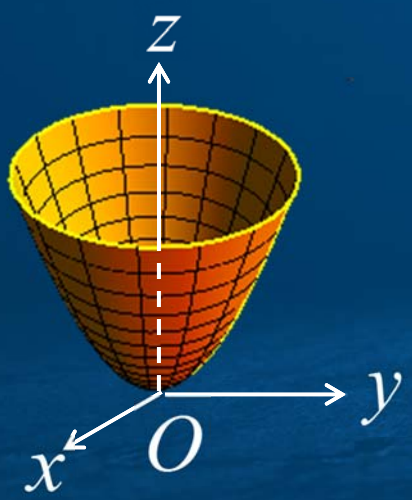


单叶

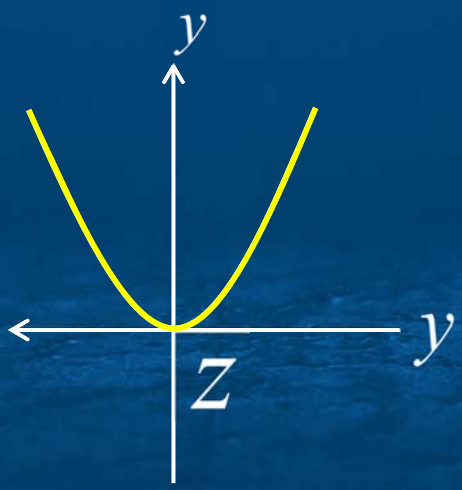
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

例8 将yOz平面上的抛物线$z=y^2$分别绕 z 轴与 y 轴旋转一周，求旋转曲面的方程 .

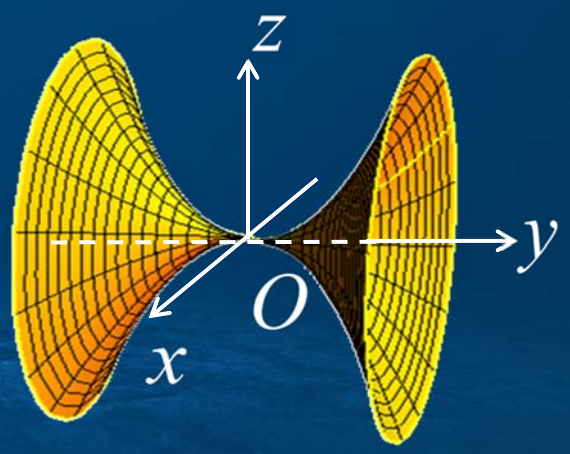
旋转抛物面.



$z=x^2+y^2$



$z=y^2$



$x^2+z^2=y^4$

$$F(x,y)=0$$

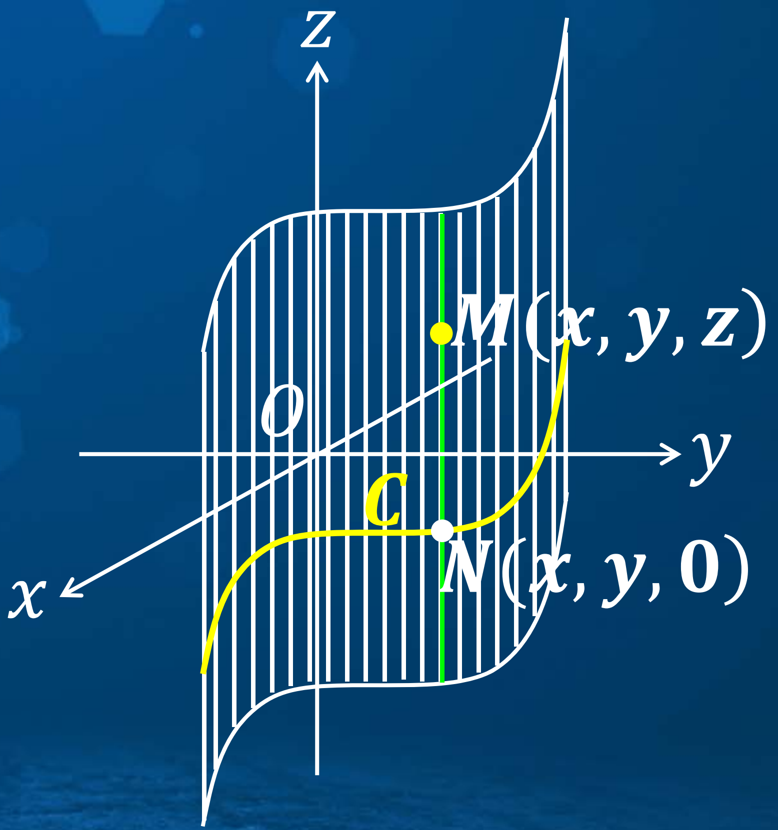
在xOy面上看, 表示平面曲线；

在$Oxyz$ 空间看, 它表示曲面.

由平行于z轴的直线L沿曲线C

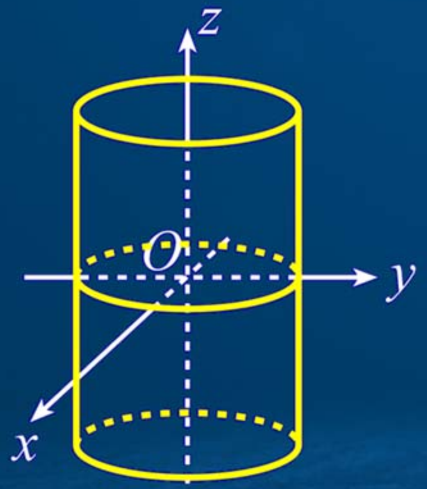
移动时所形成的曲面．

称该曲面为柱面．

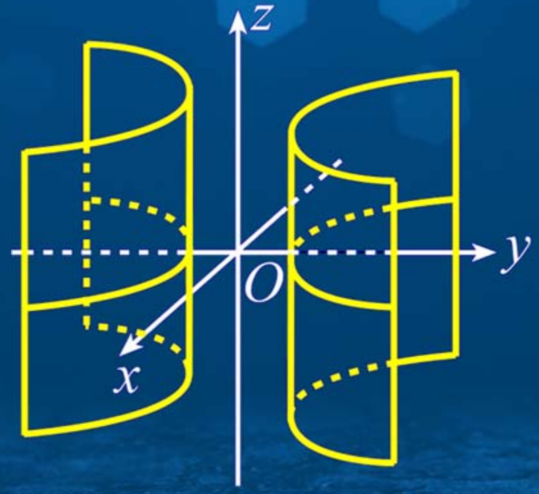


定义 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹称为**柱面**. 曲线 C称为**准线**, 直线 L称为**母线**.

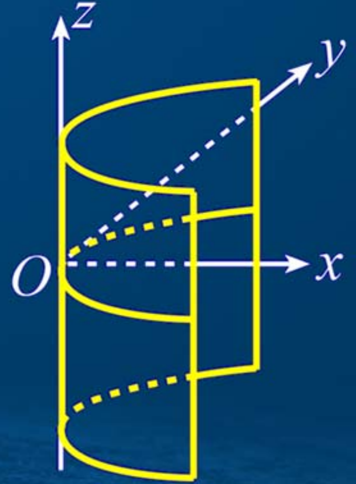
例如：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad y^2=2px\ (p>0)$



椭圆柱面



双曲柱面



抛物柱面

一般地，方程$\boldsymbol{F(x,y)=0}$表示母线平行于z轴的柱面，准线为$F(x,y)=0$在xOy面上确定的曲线;

方程$\boldsymbol{G(y,z)=0}$表示母线平行于x轴的柱面，准线为$G(y,z)=0$在yOz面上确定的曲线;

方程$\boldsymbol{H(z,x)=0}$表示母线平行于y轴的柱面，准线为$H(z,x)=0$在zOx面上确定的曲线.

在空间直角坐标系中，若表示曲面的方程$F(x,y,z)=0$的左端是关于x,y,z的多项式，这个多项式的次数称为曲面的次数．

三元二次方程

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2yx+b_3zx$$
$$+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$$

(二次项系数不全为 0)

所确定的曲面为二次曲面. 其基本类型有:

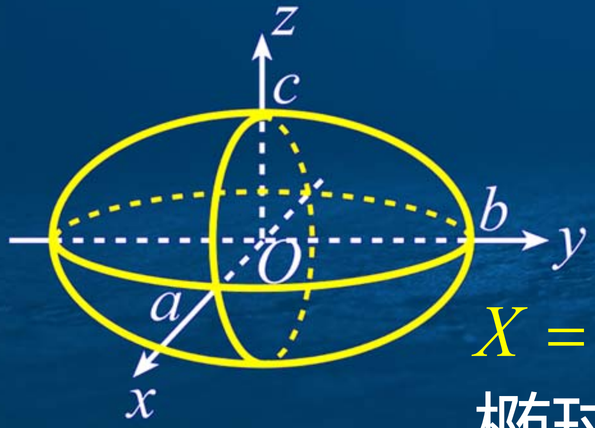
椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、

椭圆抛物面、双曲抛物面、锥面等

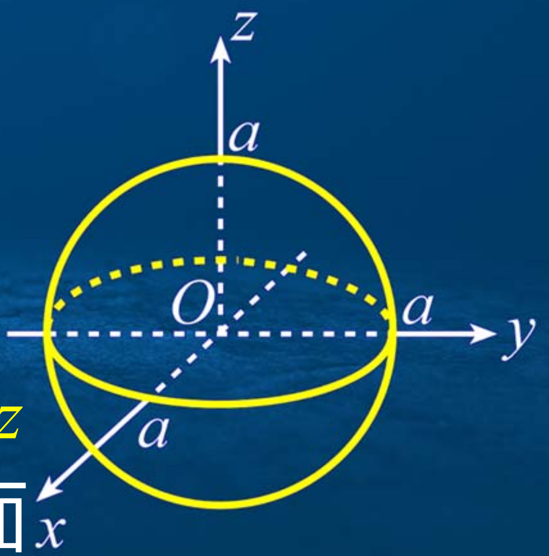
椭球面

旋转椭球面： $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

一般椭球面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $\quad(a,b,c$为正数$)$



坐标伸缩



$X=ax\,,Y=by\,,Z=cz$

椭球面 → 单位球面

椭球面

如果 $a=b=c$, 得到半径为a，球心在原点的**球面方程**

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

将椭球面中心平移到$M(x_0,y_0,z_0)$，椭球面形状不变，方程为

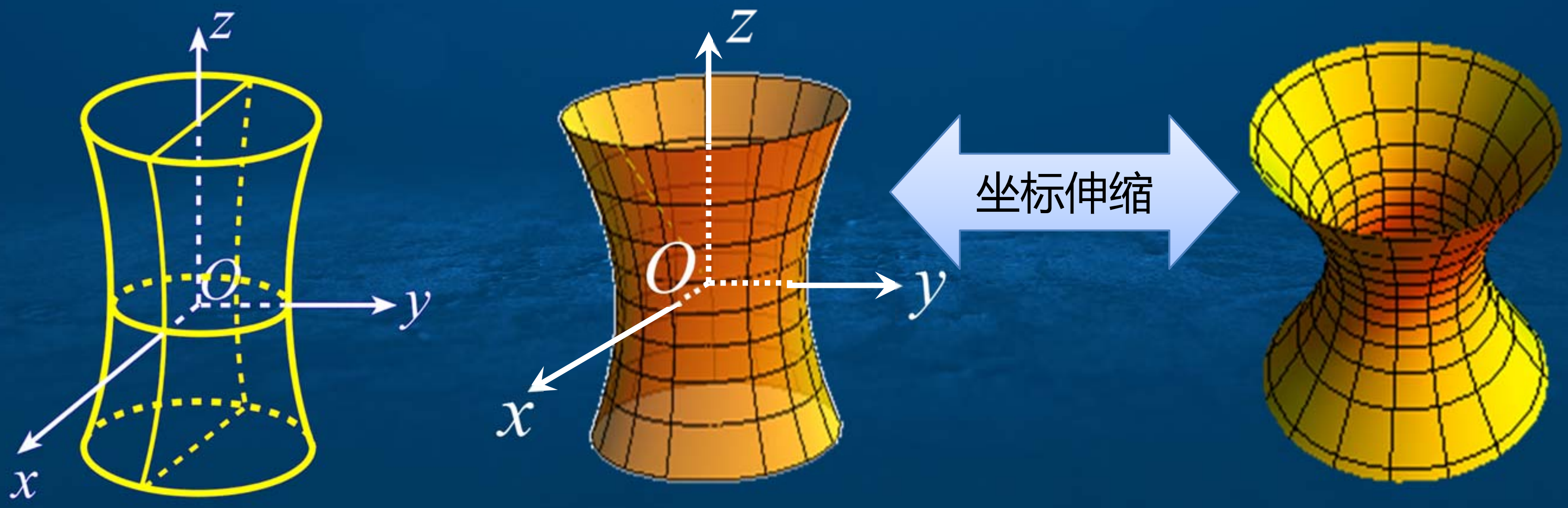
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

椭球面的参数方程为：
$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta, \\ y=b\sin\varphi\sin\theta, \\ z=c\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}.$$

单叶双曲面

旋转单叶双曲面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

一般单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c$为正数$)$



单叶双曲面

单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$($a,b,c$为正数) 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = a\sec\varphi\cos\theta, \\ y = b\sec\varphi\sin\theta, \\ z = c\tan\varphi \end{cases} \quad \left(0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

方程

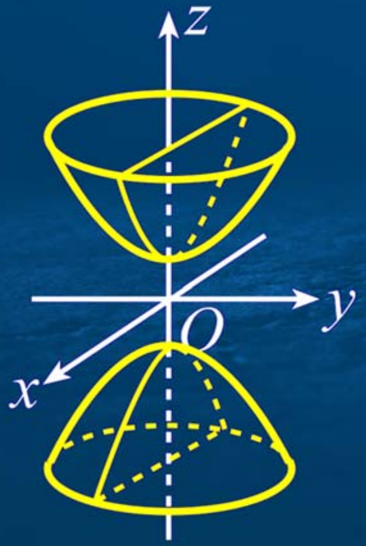
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

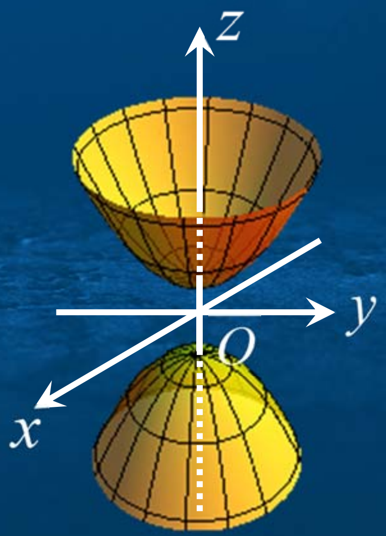
表示的曲面都是单叶双曲面, 其中心轴分别为 y 轴与x 轴.

双叶双曲面

旋转双叶双曲面：$-\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

一般双叶双曲面：$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　$(a,b,c$为正数$)$





双叶双曲面

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c\text{为正数})$$

双叶双曲面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=a\tan\varphi\cos\theta, \\ y=b\tan\varphi\sin\theta, \\ z=c\sec\varphi \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} 0\le\theta\le 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

中心轴为 y 轴

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

中心轴为 x 轴

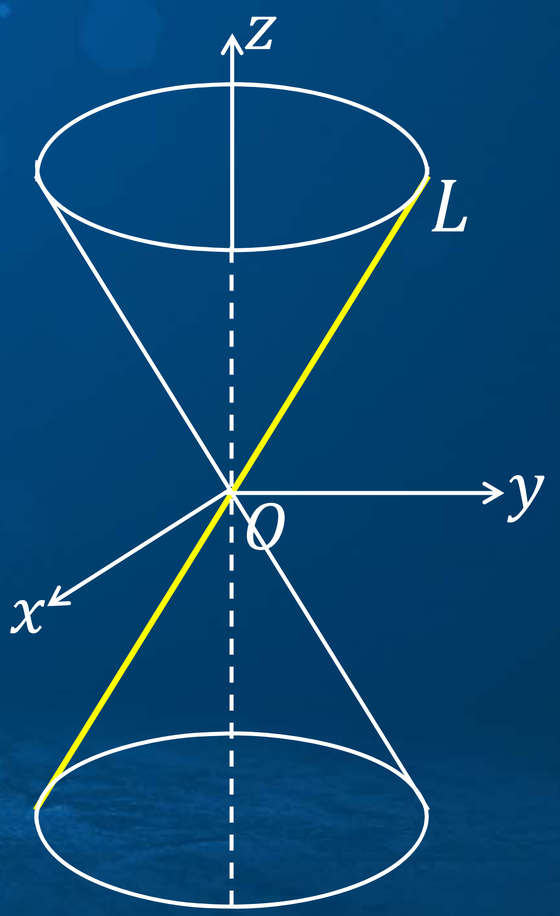
椭圆锥面

圆锥面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}=z^2$

椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$ （a，b 为正数）

椭圆锥面的参数方程为：

$$\begin{cases} x = au\cos\theta, \\ y = bu\sin\theta, \\ z = u \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty < u < +\infty \end{pmatrix}$$



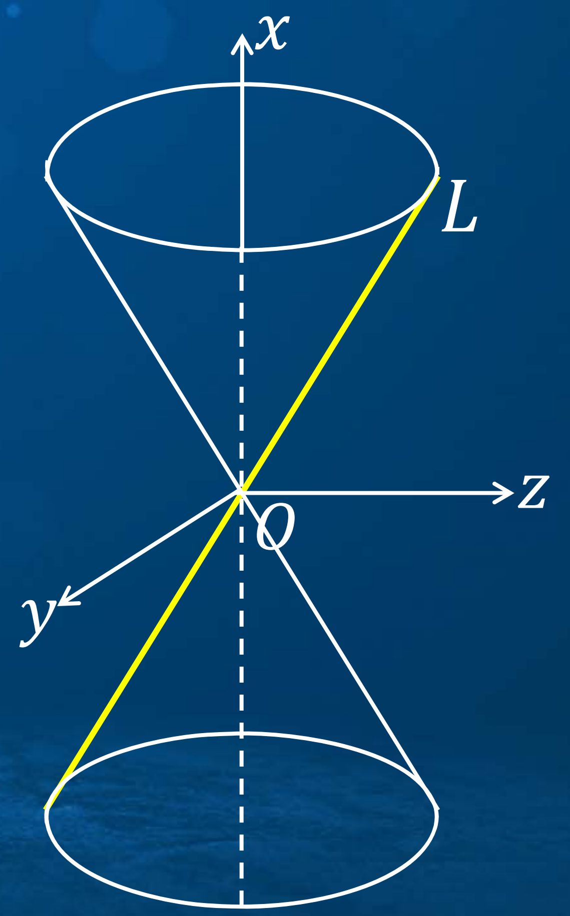
中心轴为 z 轴

椭圆锥面

中心轴为z轴 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

中心轴为x轴 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=x^2$

中心轴为y轴 $\dfrac{z^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=y^2$

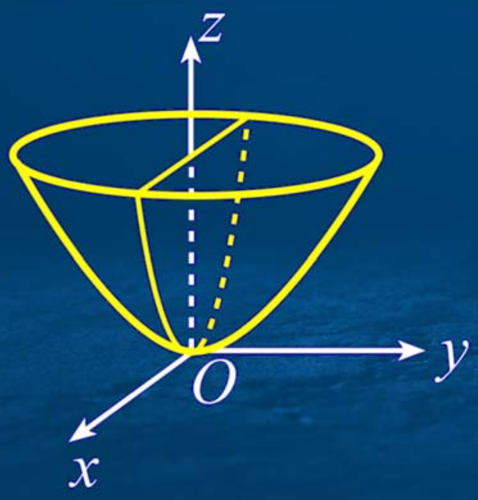


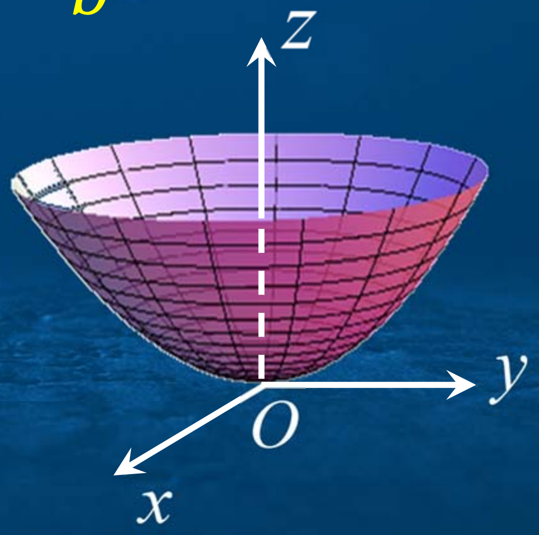
中心轴为 x 轴

椭圆抛物面

旋转椭圆抛物面： $z=\dfrac{x^2+y^2}{a^2}$

一般椭圆抛物面： $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ （a , b 为正数)





中心轴为 z 轴，开口朝上

椭圆抛物面

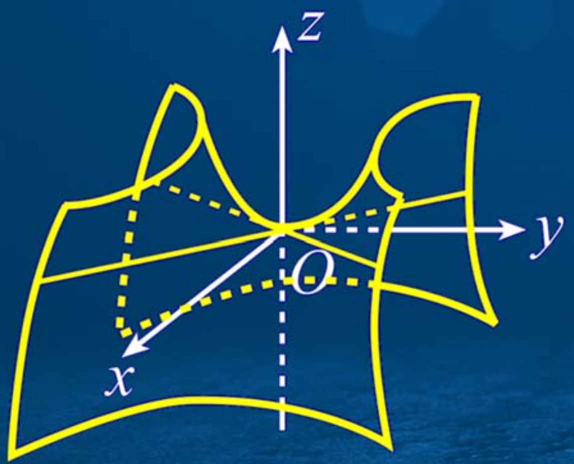
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ (a\,,b\text{ 为正数})$$

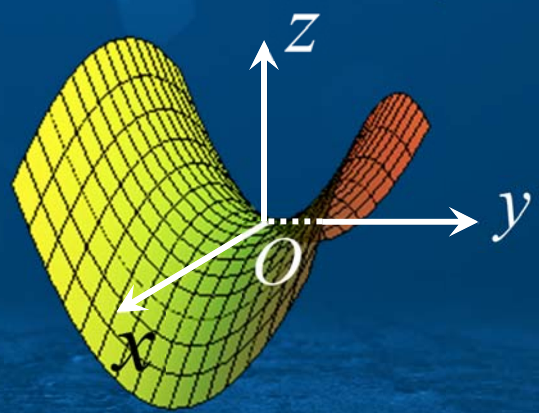
椭圆抛物面的参数方程为：

$$\begin{cases}x=au\cos\theta,\\ y=bu\sin\theta,\\ z=u^2\end{cases}\quad \begin{pmatrix}0\le\theta\le 2\pi\\ u\ge 0\end{pmatrix}$$

双曲抛物面(马鞍面)

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\ (\,a\,,b\text{ 为正数})$$





其对称轴为 z 轴

双曲抛物面(马鞍面)

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\ (a,b\text{ 为正数})$$

双曲抛物面的参数方程为：

$$\begin{cases}x=au\sec\theta,\\ y=bu\tan\theta,\\ z=u^2\end{cases}\quad \begin{pmatrix}0\le\theta\le 2\pi\\ u\ge 0\end{pmatrix}$$