国防科学技术大学
National University of Defense Technology

高等数学（二）综合练习

练习四： 定积分性质与微积分基本定理

理学院 朱健民教授

主要内容

- 定积分概念

实际背景：曲边梯形的面积，变速直线运动的路程

解决方法：分割取近似，做和求极限

定义 设函数$f(x)$在 $[a,b]$上有定义， 作$[a,b]$的任意划分

T： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$， $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

记$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$，$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $f(x)$在区间 $[a,b]$上的定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

定积分性质

性质1（线性运算）

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2（对积分区间的可加性）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质3（保号性）

（1）若$f(x)\geq 0, x\in[a,b]$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$;

（2）若 $f(x)\leq g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

（3）若$m\leq f(x)\leq M, x\in[a,b]$, 则$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

积分中值定理与变上限函数

积分中值定理 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则存在$\xi \in [a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，定义变上限函数

$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

则$g(x)$在$[a,b]$上可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = f(x).$$

牛顿—莱布尼兹公式（微积分基本定理）

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$F(x)$为$f(x)$在区间$[a,b]$上的原函数，即$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

例题讲解

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{1}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2. 设$f(x)=\begin{cases}2x+1, & |x|\le 2,\\ 1+x^2, & 2<x\le 4\end{cases}$，试求$k$的值，使$\int_k^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}$.

3. 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$上满足：对于$[a,b]$ 中任意两点x_1,x_2 ，总有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le |x_1-x_2|,$$

证明$f(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(a)(b-a)\right|\le\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

4. 设$f(x), g(x)$在$[a, b]$ 上连续，证明柯西-许瓦兹不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ .$$

应用：证明不等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin 2x}\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. 设函数$f(x)$在$[0,1]$ 上可导，且$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在$\xi \in (0,1)$ 使得$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

6. 计算极限

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{0}\tan^2 t\mathrm{d}t}{\tan^6 x},\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}.$$

7. 设函数$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 上连续，且$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$ ，证明：若$f(x)$ 不增，则$F(x)$不减.

8. 设函数$f(x)$在 $[0,1]$上有连续的导数，且

$$f(0)=f(1)=0,\ \ M=\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|\ ,$$

证明：$|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x|\le\frac{M}{4}$.