孙 蕾　　谷德峰

一. 引言

自古以来，飞蛾扑火的现象就引起了人们的注意。早在唐代，诗人张祜就曾在《赠内人》一诗中提到“斜拔玉钗灯影畔，剔开红焰救飞蛾。”描述的是灯火旁，一名宫女拔下玉钗，剔开火焰，试图解救扑火的飞蛾。图 1 是近代著名国画大师齐白石先生的一幅写意小品，描述的也是飞蛾扑火的情形。人们不禁要问：飞蛾扑火，明明是自取灭亡，为什么这个习性延续了这么久呢？图 2 是 2010 年美国《国家地理》杂志摄影竞赛的入围作品，它描述的是灯光下蛾子飞行的轨迹。更让人疑惑的是既然蛾子喜欢扑向灯火，为什么不沿直线直接扑过去，而要按照螺旋线的轨迹飞行呢？

图 1 齐白石笔下的“飞蛾扑火”

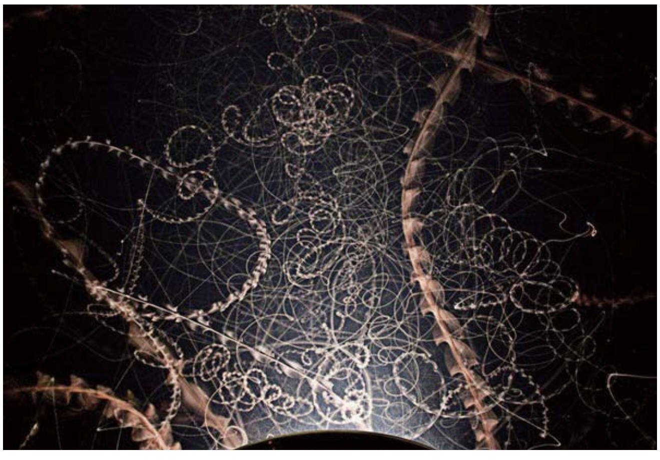


图 2 2010 年美国《国家地理》摄影竞赛作品

为了解释蛾子这些古怪的习性，本文从一道有趣的数学题入手，运用几何知识建立常微分方程，通过分析方程解的几何特征，从数学建模的角度来探索飞蛾扑火之谜。

二．“四虫爬行”问题

James Stewed 撰写的美国著名微积分教程 *Calculus* 中有一道附加题：

例 1 四只小虫放在边长为 α 的正方形的四个顶点上。小虫同时沿着逆时针的方向以相同的速度爬行，而且每只小虫爬行的方向都时刻正对着下一只小虫。小虫将会沿着螺旋线接近正方形的中心，如图 3 所示。以正方形的中心为极点，求小虫爬行轨迹的极坐标方程。

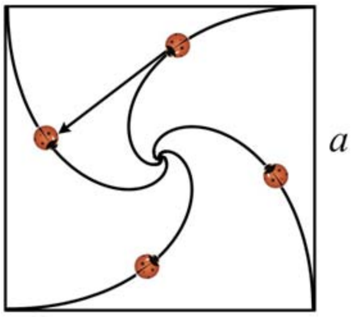


图 3 “四虫爬行”问题

我们将这个问题简称为“四虫爬行”问题。当然也有人把四只小虫换成四只小狗或者四只乌龟，但问题本质是一样的。首先我们来分析一下小虫运动轨迹的几何特征：

如图 4 所示，以正方形的中心 O 为极点，小虫的初始位置分别位于为正方形的四个顶点 A, B, C, D 处。在某一时刻，四只小虫分别位于点 A_1, B_1, C_1, D_1 处。由小虫爬行的一致性和图形的对称性，可知四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是一个正方形，并且这个正方形的中心就是极点 O。由于位于 A_1 处的小虫正对着位于 B_1 处的小虫，因此 A_1 处的小虫的速度方向与向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 一致，它也是小虫的爬行轨迹在 A_1 处的切向量。向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 平分正方形的一个直角，于是 $\angle OA_1B_1$ 等于 $\frac{\pi}{4}$，这也意味着向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 成定角 $\frac{3\pi}{4}$。

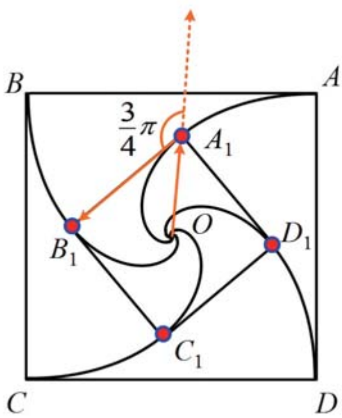


图 4 “四虫爬行”问题的几何图形

由小虫始终以同样的方式爬行，在任意时刻，小虫的速度方向都与极点 O 至小虫的位置形成的向量成定角 $3\pi/4$。于是这个问题就可以归结为求一曲线的极坐标方程，该曲线上任意点 A_1 处的切向量都与极点 O 至此点 A_1 所成的向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 成定角 $3\pi/4$。我们可以把问题推广为更一般的情形，如图 5 所示：求一曲线的极坐标方程，该曲线上任意点 P 所对应的切向量都与极点 O 至此点 P 成的向量 $\overrightarrow{OP}$ 成定角 α，$0<\alpha<\pi$。其中，向量 $\overrightarrow{OP}$ 定义为点 P 关于极点 O 的向径。

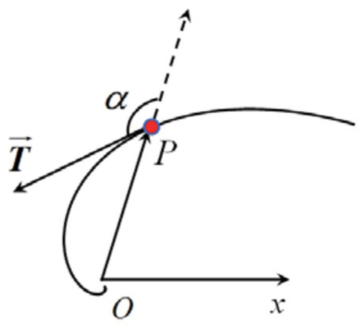


图 5 极坐标下切向量与向径成定角的曲线

于是可以利用切向量与向径成定角的关系来建立常微分方程。设该曲线的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$。把它化成参数方程的形式，

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$

于是点 $P(x, y)$ 关于极点 O 的向径就是向量 $\overrightarrow{OP}$，且

$$\overrightarrow{OP}=\{\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta\}.$$

设过点 $P(x, y)$ 的切向量为 $\vec{T}$，则

$$\vec{T}=\{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta,\ \rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta\}.$$

再利用向径与切向量成定角的关系，由向量的夹角公式有，

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{T}}{|\overrightarrow{OP}||\vec{T}|}\\&=\frac{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)\rho(\theta)\cos\theta+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)\rho(\theta)\sin\theta}{\rho(\theta)\sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)^2+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)^2}}\\&=\frac{\rho'(\theta)}{\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}}.\end{aligned}$$

由于 0< α<π，利用上面的结果就可以得到

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\rho(\theta)}{\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}}.$$

于是有

$$\cos\alpha=\rho'(\theta)/\rho(\theta).$$

解这个常微分方程，可得

$$\rho(\theta)=Ce^{\theta\cot\alpha}.$$

其中 C 是任意正常数。

再回到例 1 中，由于小虫爬行轨迹中任意一点的切向量与向径始终是成 $3\pi/4$ 的定角的，小虫的爬行轨迹也会满足 $\rho(\theta)=Ce^{\theta\cot\frac{3\pi}{4}}$ 。

四只小虫在初始位置的极坐标分别为

$$A(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}),\quad B(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}),\quad C(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{5\pi}{4}),\quad D(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{7\pi}{4})。$$

将这些初值条件带入常微分方程解的表达式，就可以求得四只小虫爬行轨迹的极坐标方程如下：

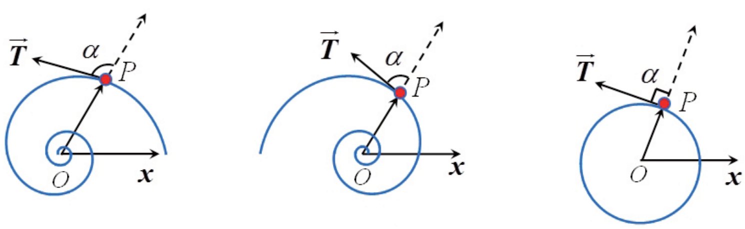
$$\rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}-\theta},\ \rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}-\theta},\ \rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}-\theta},\ \rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}-\theta}$$

三. 对数螺线及其性质

观察小虫爬行轨迹的特点，由上节 $\rho(\theta)$ 的表达式，我们可以发现当 θ 趋向于正无穷的时候，ρ 趋向于 0。这也就意味着四只小虫明明彼此相望，却殊途同归地爬向了极点 O。那么飞蛾扑向灯火会不会和这个爬行轨迹有所关联呢？

接下来我们就看一看切向量与向径成定角 α 的曲线的几何特征。

在极坐标方程 $\rho(\theta)=Ce^{\theta\cot\alpha}$ 中，当 $\alpha\in(\pi/2,\pi)$ 时，切向量与向径成钝角，$\cot\alpha<0$，极径 ρ 随着 θ 的增加而减小，曲线随着 θ 角的增大成螺旋线状接近极点 O。当 $\alpha\in(0,\pi/2)$ 时，切向量与向径成锐角，$\cot\alpha>0$，ρ 随着 θ 的增加而增加，



$\pi/2<\alpha<\pi$ $\quad$ $0<\alpha<\pi/2$ $\quad$ $\alpha=\pi/2$

图 6 对数螺线的几何特征

曲线就随着 θ 角的增大远离极点。若 $\alpha=\pi/2$，曲线退化成一个圆。从图 6 看出，当 $\alpha\neq\pi/2$ 时，解的图形酷似海螺壳旋转的曲线，而且在方程的推导中涉及到了对数运算，因此把这样的曲线称为对数螺线。

自然界中，除了海螺纹路满足对数螺线，小至花瓣、叶片的排列，大至洋流蜗旋、星云分布，对数螺线无处不在。如图 7 所示。

图 7 自然界中的对数螺线

数学家雅格布•伯努利曾对数螺线进行了深入的探讨，发现对数螺线有如下几何性质：

（1）对数螺线具有自相似性，即将对数螺线放大后可与原图完全相同；
（2）对数螺线的渐屈线、渐伸线仍是对数螺线；
（3）从极点引切线的垂线，垂足的轨迹仍是对数螺线。

雅格布•伯努利由衷地赞叹对数螺线经过多种变换后仍是对数螺线这种奇妙的几何性质，在遗嘱中要求把对数螺线刻在他的墓碑上，并题颂词“虽经沧海，依然故我”（Eadem Mutata Resurgo）。

四．对数螺线与飞蛾扑火之谜

那么对数螺线和飞蛾扑火之谜有什么关系呢？上世纪七十年代，英国生物学家 S. Sotthibandhu 和 R. R. Baker 曾经通过实验得到这样一个结论：黑夜中，当蛾子看不清四周，找不到合适的参照物的情况下，它们是靠月光来导航的。基于这个理论，利用对数螺线的几何特征，可以合理的解释飞蛾扑火的原因。

由于月光是极远光源，当它到达地球的时候，光线可以近似看成平行线。如果蛾子想沿着直线飞到目的地，只要保持与光线成固定夹角飞行就可以了，

如图 8 所示。可是蜡烛灯光这些人造光源发出的光线是呈放射状分布的。蛾子以为只要与光线保持固定夹角飞行就可以飞成一条直线。于是在点光源下，蛾子飞行的轨迹出现了以下三种情况。

（1）以灯火的位置为极点 O，如果蛾子飞行轨迹的切向量与向径成定角 α 成钝角，极径 ρ 随着 θ 的增加而减小，曲线随着 θ 角的增大沿对数螺线接近极点 O。这些蛾子将密密麻麻的扑向灯火。这就是我们观察到的飞蛾扑火的现象，如图 9 所示。

（2）如果蛾子飞行轨迹的切向量与向径成定角 α 成锐角，极径 ρ 随着 θ 的增加而增加，曲线就随着 θ 角的增大沿对数螺线远离极点 O。此时，不仅蛾子们分散开来，灯光也越来越暗。这种情况虽然发生，但是很难被人密集的观察到。

（3）如果蛾子飞行轨迹的切向量与向径成定角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，蛾子会沿着一个标准的圆飞行。如果圆的半径小，我们仍观察到蛾子聚集在灯火前打转，如果圆的半径大，黑暗中，我们将很难看清它们。

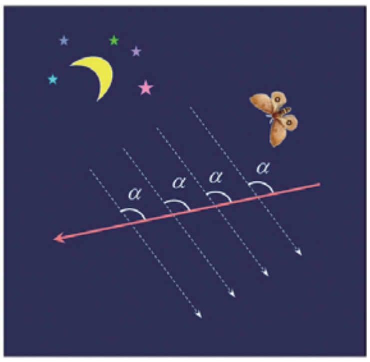


图 8 平行光源下蛾子的飞行轨迹

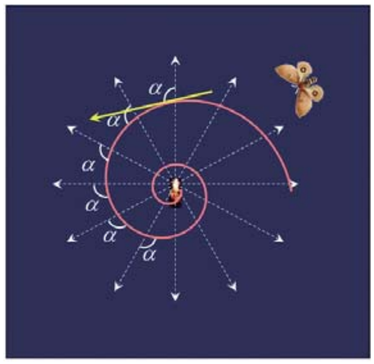


图 9 放射状光源下蛾子的飞行轨迹

用对数螺线解释飞蛾扑火，是目前包括维基百科在内，被大家最为广泛接受的解释。但是由于有的生物学家质疑月光导航理论这一前提假设，飞蛾扑火的原因至今仍没有定论。

不管飞蛾扑火与对数螺线有没有确切的关系，发明了指南针的人类倒是真正把自己陷入了对数螺线的窘境。根据指南针的导航原理，以及地球磁力线的分布情况，我们可以发现，在远离南北极的地区，磁力线几乎平行分布，按照地图指

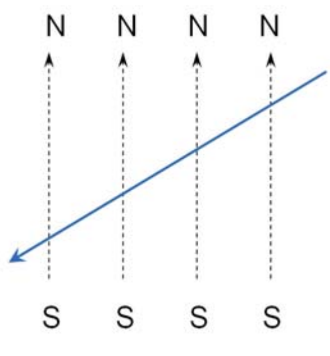


图 10 远离南北极的地区指南针导航路线

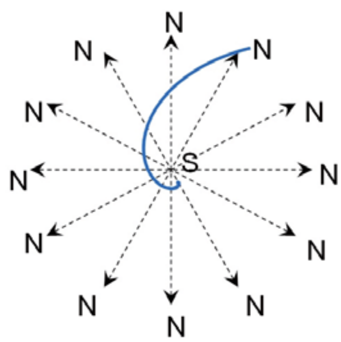


图 11 南北极的地区指南针导航路线

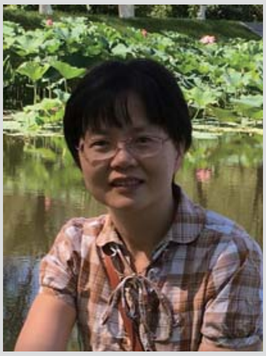
示，只要搞清楚目的地的方位，保持行走方向与指南针的方向成固定夹角就可以到达，如图 10 所示。如果在南北极地区，磁力线呈放射状分布，如果还按照指南针的指示行走，就会按照对数螺线或者圆的轨迹偏离目的地，如图 11 所示。

除南北极地区外，有些地区由于磁矿的影响，指南针导航也会失灵。这也是有些神秘地带经常发生人员迷路失踪事件的原因。

五. 结束语

由于对数螺线具有良好的几何、力学和美学性质，它在几何计算、工业造型、计算机辅助设计等方面取得了广泛的应用。这条古老的曲线始终以其迷人的魅力散发着现代气息之美。

作者简介：



孙蕾，国防科学技术大学理学院数学与系统科学系讲师。

谷德峰，国防科学技术大学理学院数学与系统科学系副教授。