

高等数学 (二) 综合练习

练习五：不定积分与定积分计算

理学院 朱健民教授



主要内容

● 基本积分公式

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$



高等数学（二）综合练习——定积分性质与微积分基本定理

● 积分基本计算方法

➤ 变量替换法（换元法）

$$(1) \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

$$(2) \int f(x)dx \stackrel{x=\varphi(t)}{=} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ = G(t) + C \stackrel{t=\varphi^{-1}(x)}{=} G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

➤ 分部积分法

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$



● 特殊函数的积分性质

性质1 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x)dx & \text{if } f(x) \text{ is even} \\ 0 & \text{if } f(x) \text{ is odd} \end{cases}$$

性质2 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，则

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$



高等数学（二）综合练习——定积分性质与微积分基本定理

性质3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且以 T 为周期，
则对任何实数 a 有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

性质4 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，则

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$



例题讲解

1. 计算下列不定积分

$$(1) \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2}{(2+x^3)^{\frac{5}{3}}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sin x \sqrt{1+\cos x}} dx$$

$$(4) \int \frac{1+x}{x(1+x e^x)} dx$$

2. 计算下列不定积分

$$(1) \int x \tan x \sec^4 x dx$$

$$(2) \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$$



高等数学（二）综合练习——定积分性质与微积分基本定理

3. 求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx$ ($n = 1, 2, \dots$) 的递推公式.

4. 求下列定积分

$$(1) \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx \quad (2) \int_{-2}^2 \min\left(\frac{1}{|x|}, x^2\right) dx$$

5. 求积分 $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$ (其中 n 为正整数).

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 试证明
 $f(x) \leq 1 + x, x \in [0, 1]$.



高等数学（二）综合练习——定积分性质与微积分基本定理

7. 计算反常积分 $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.