《高等数学》全程教学视频课

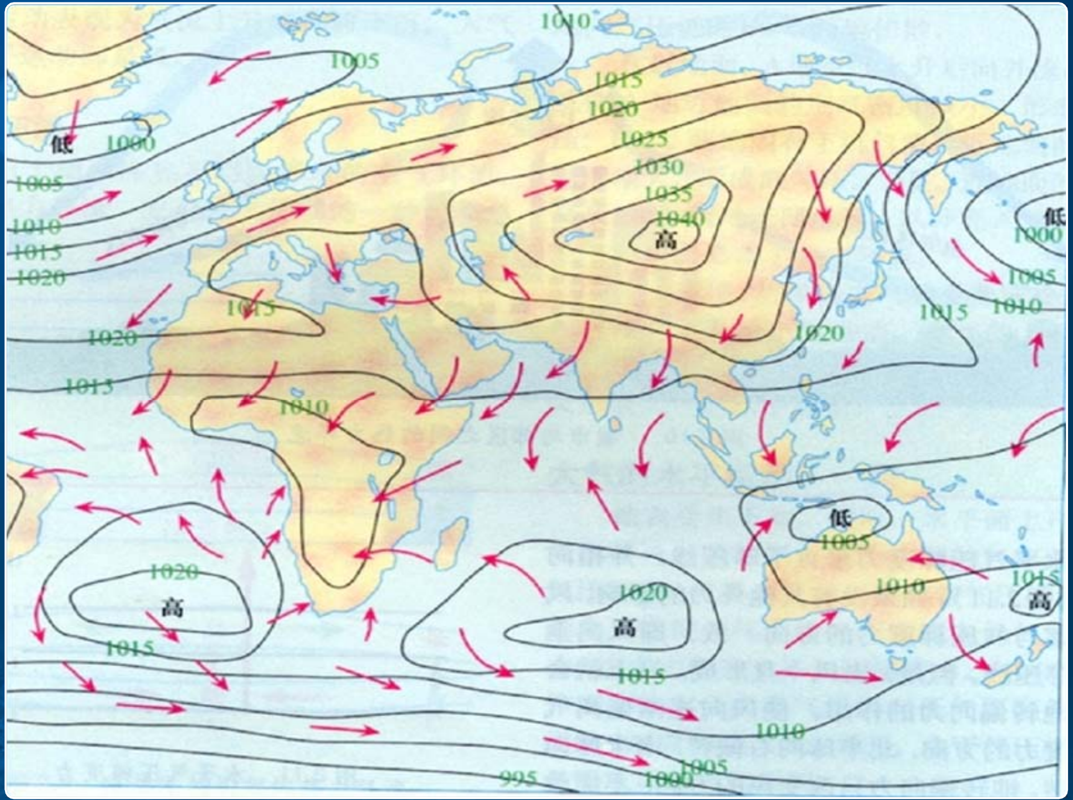
第70讲 方向导数与梯度

天气预报

天气预报

天气预报

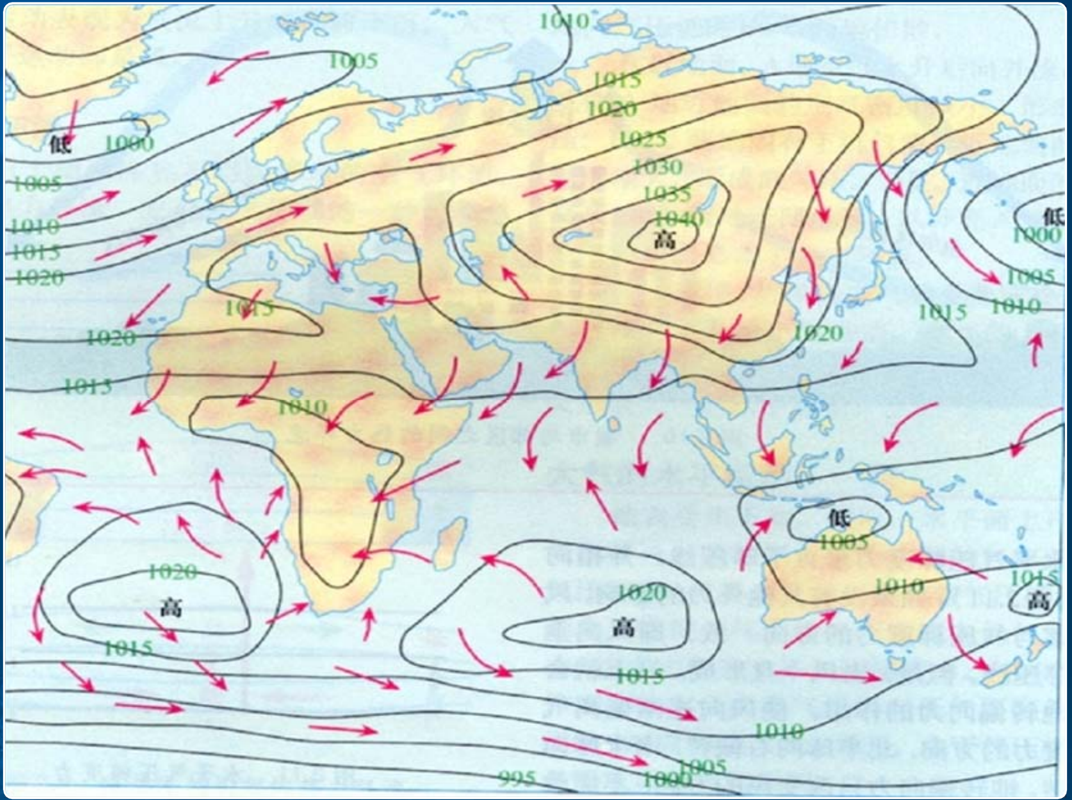
天气预报



局部地区等压线

二元函数$z = f(x, y)$

- 如何刻画二元函数沿不同方向的变化？
- 函数沿什么方向变化最快？



局部地区等压线

方向导数的概念

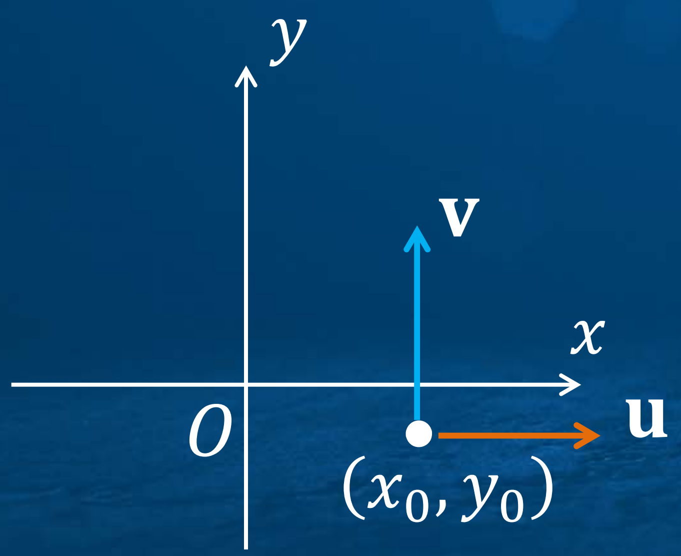
方向导数的计算

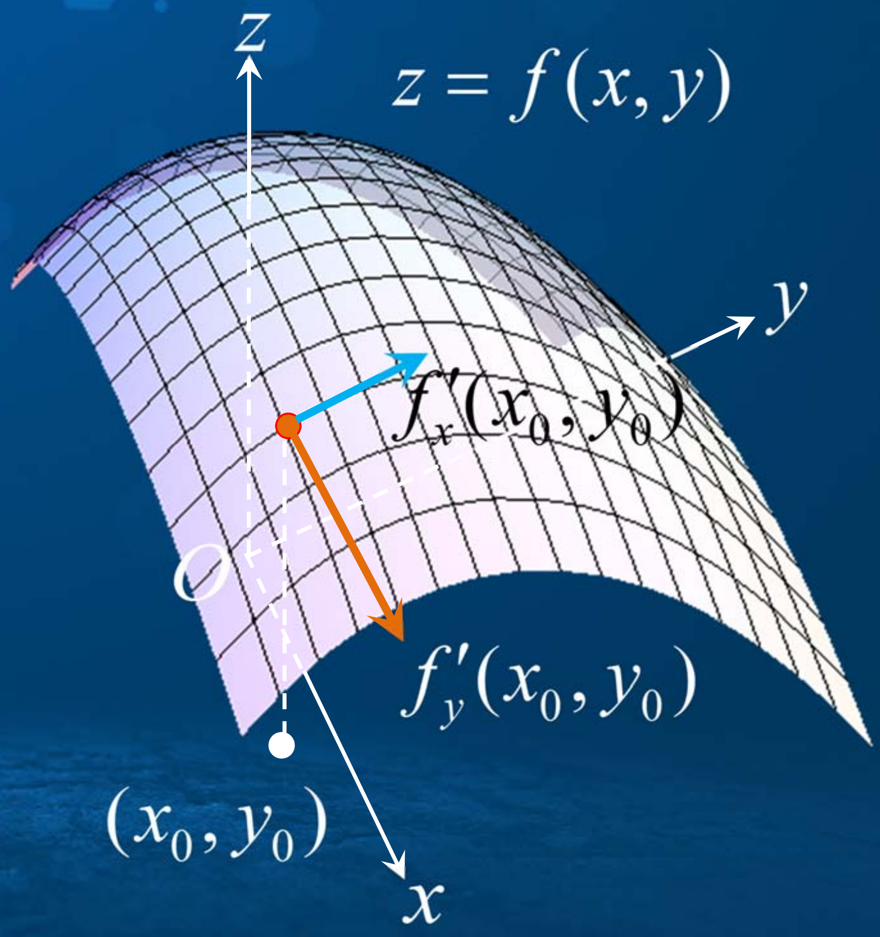
梯度及其几何意义

第70讲 方向导数与梯度——主要内容

二元函数的偏导数反映了函数

沿平行于坐标轴方向的变化率.



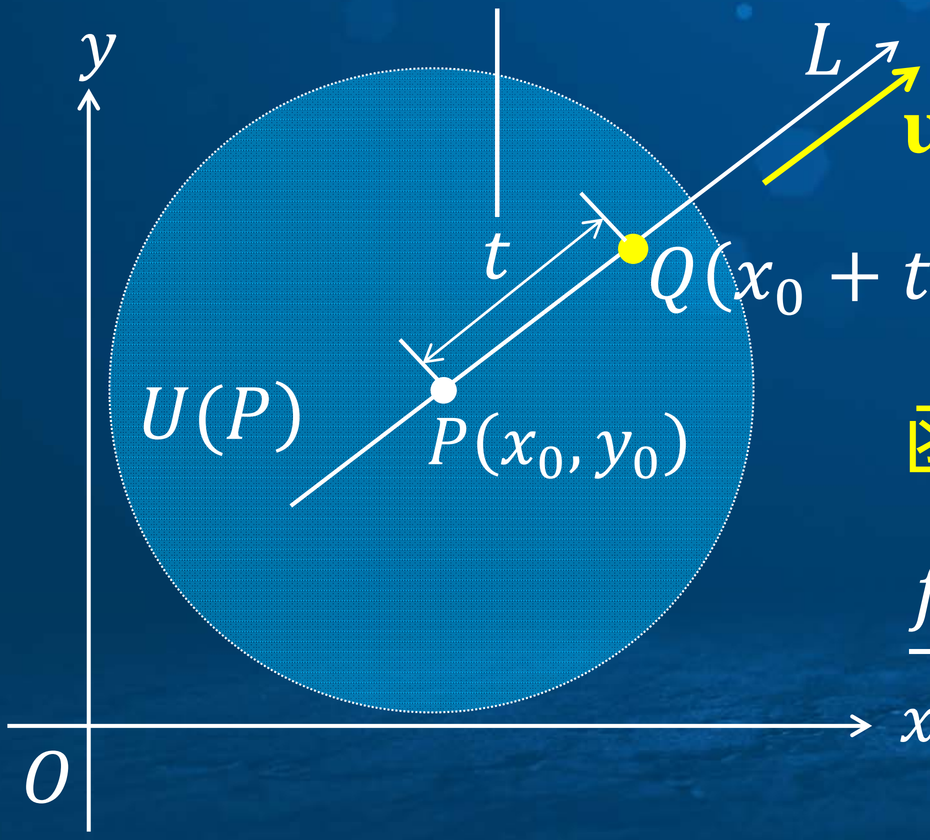


二元函数的偏导数——函数沿平行于坐标轴方向的变化率

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$L: x = x_0 + t\cos\alpha, y = y_0 + t\cos\beta$



$\mathbf{u}: \mathbf{e}_{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

函数在PQ段的平均变化率

$$\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$z = f(x, y), (x, y) \in U(P)$

定义 如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

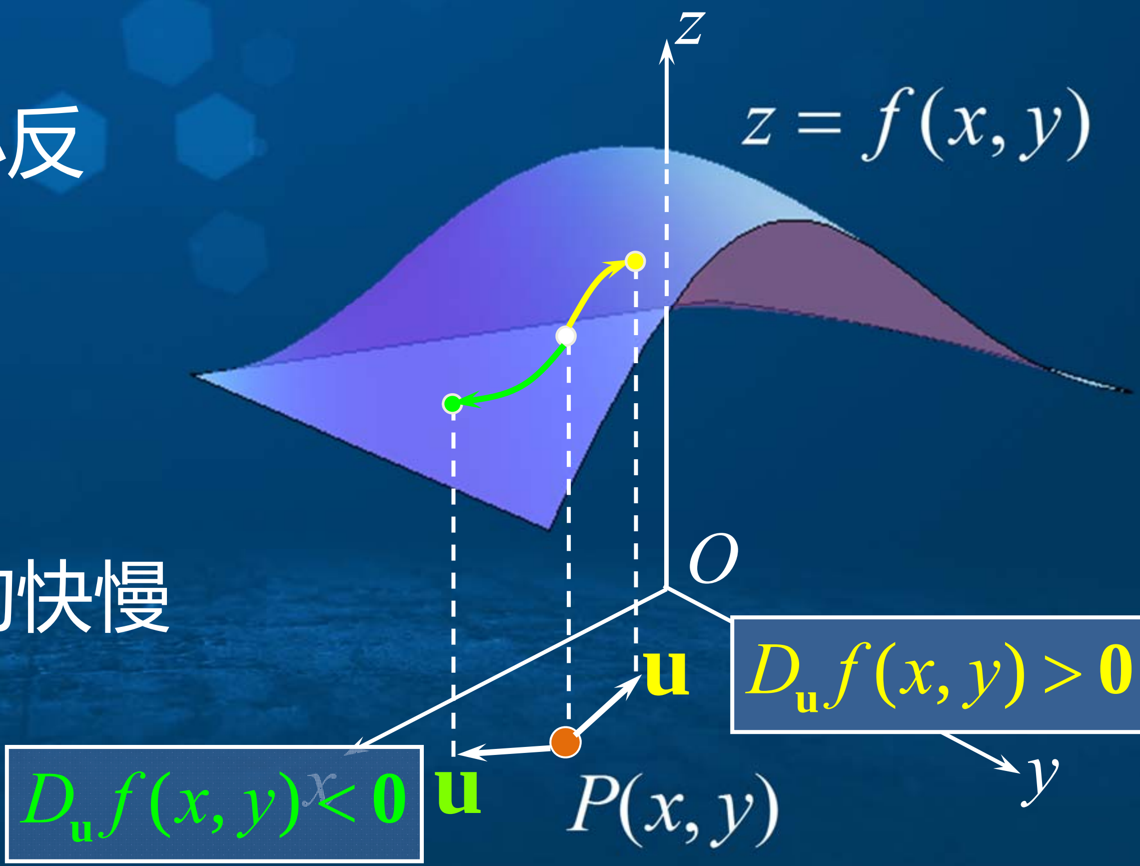
存在，则称极限值为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)沿方向$\mathbf{u}$的**方向导数**，并且记作$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$或 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}}$$

方向导数反映了函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿方向$\mathbf{u}$的变化率.

思考：方向导数的符号、大小反映了函数怎样的变化情况？

- $D_{\mathbf{u}}f(x,y)$符号反映增减性
- $|D_{\mathbf{u}}f(x,y)|$大小反映变化的快慢



$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

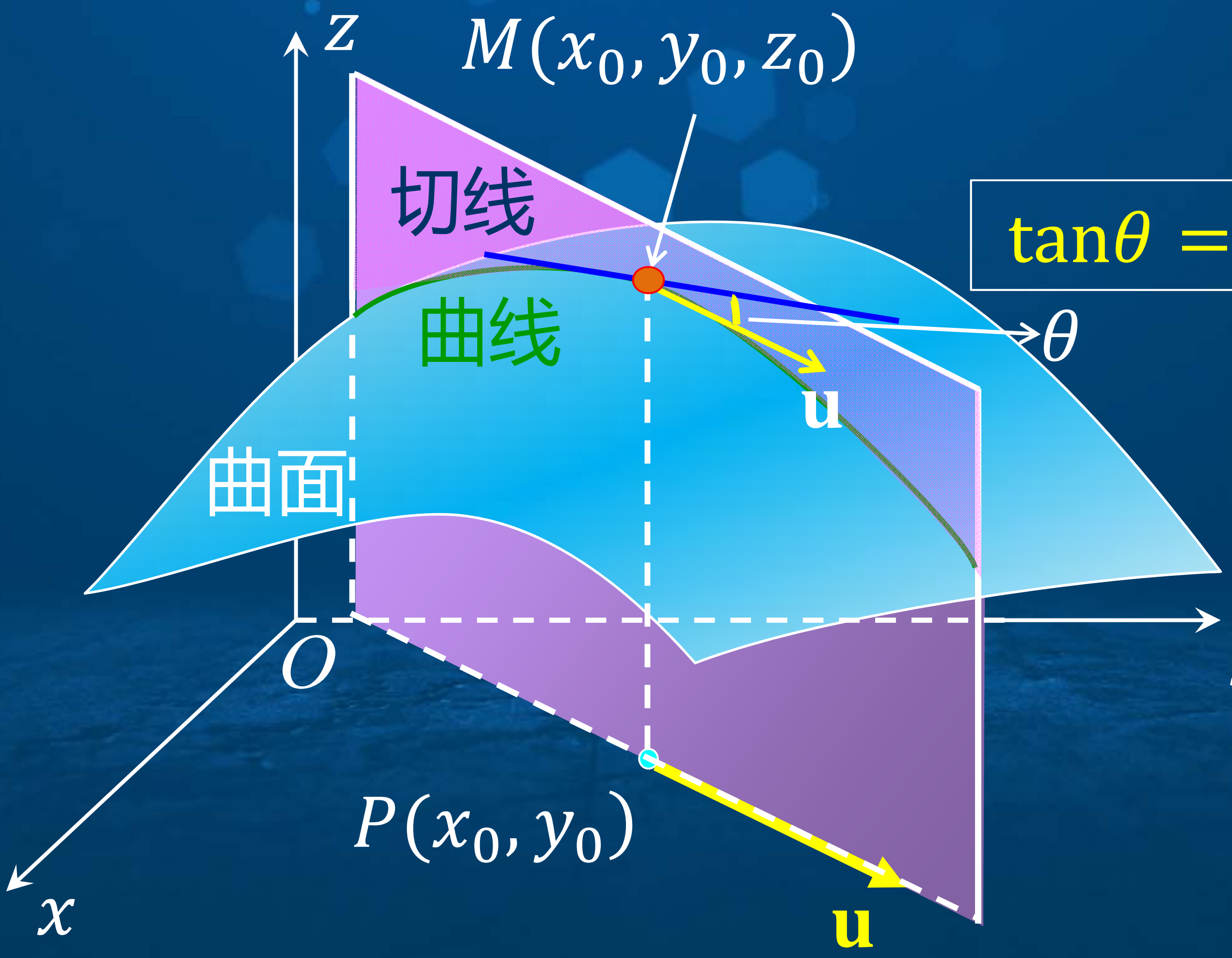
如果方向$\mathbf{u}=(1,0)$，即与x轴平行的方向，则有

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f'_x(x_0,y_0)$$

如果方向$\mathbf{u}=(0,1)$，即与y轴平行的方向，则有

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=f'_y(x_0,y_0)$$

方向导数的几何意义



$$\tan\theta = D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

定理1 设函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，那么函数在该点沿任意向量$\mathbf{u}$方向的方向导数都存在，且有

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$为向量$\mathbf{u}$的方向余弦．

一般地，当函数$f(x,y)$可微时，有

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

三元函数$f(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$沿方向$\mathbf{u}$（对应的单位向量为$\mathbf{u}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$）的方向导数定义为

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

同样，当函数$f(x,y,z)$在点$f(x,y,z)$可微时，函数在该点沿方向$\mathbf{u}$的方向导数

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例1 求函数$f(x,y)=xe^{2y}+\cos(xy)$在点$(1,0)$沿方向$\mathbf{u}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$的方向导数 .

例2 求函数$f(x,y,z)=x^2\cos y+e^{-y}\ln(x+z)$在点$(-1,0,2)$处沿从该点到$(1,2,1)$的方向的方向导数 .

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)=\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)}\cdot\mathbf{u}^0,$$

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}\cdot\mathbf{u}^0.$$

梯度向量
简称梯度

$\mathbf{grad}\, f$ ∇f

如果函数$f(x,y)$ 在点$P(x,y)$可微

梯度：　$\operatorname{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}^0 = |\nabla f| \cos(\widehat{\nabla f, \mathbf{u}})$$

- 方向导数是梯度向量在u方向上的投影
- 梯度方向是函数增加最快的方向
- 负梯度方向是函数减小最快的方向
- 与梯度正交的方向函数的变化率为零

二元函数$f(x,y)$的梯度：

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j},$$

$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\mathbf{u}^0}$$

三元函数$f(x,y,z)$的梯度：

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

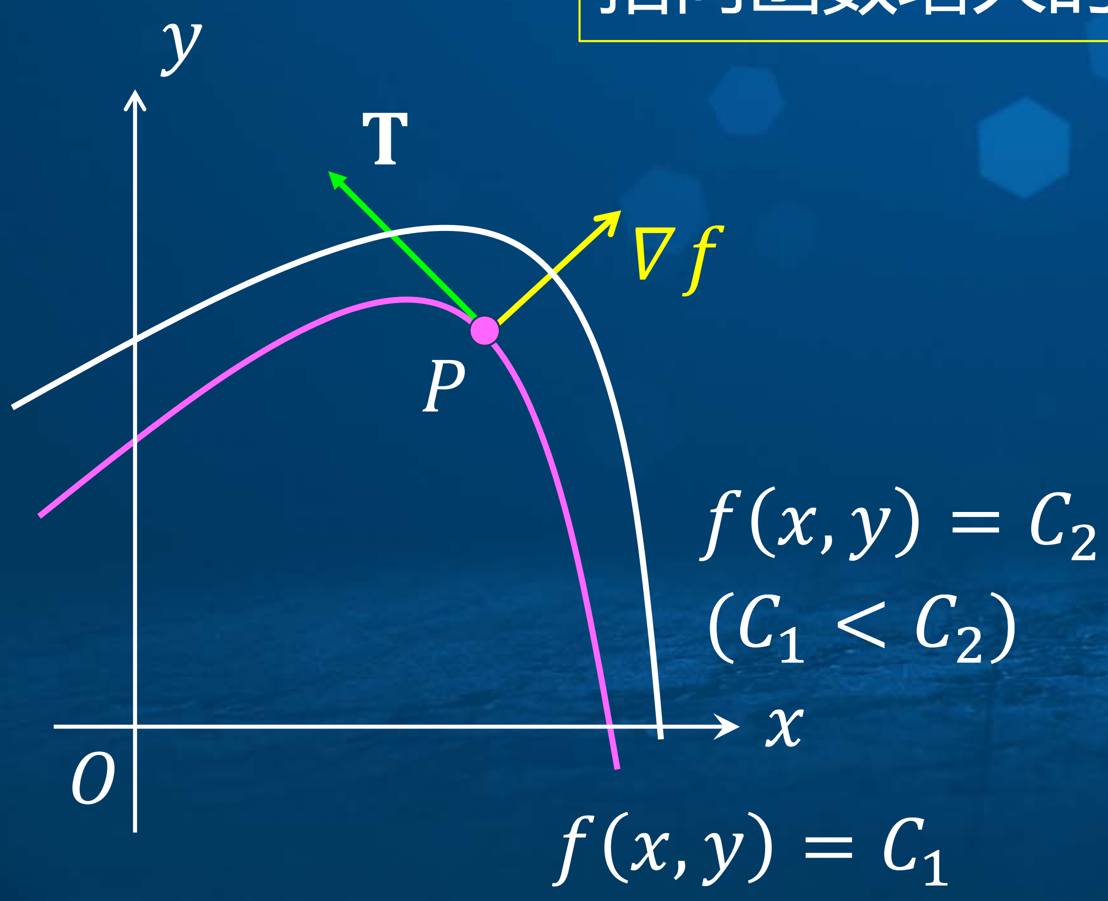
$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\mathbf{u}^0}$$

例3 求函数$f(x,y)=x^2y+2y$在点$(2,-1)$处的梯度以及函数在该点处沿梯度方向的方向导数．

例4 设一座山的高度由函数$z=15-3x^2-2y^2$给出，如果登山者在山坡上的点$P(1,-2,4)$处，问：此时登山者往何方向攀登时坡度最大？

梯度的几何意义

函数在一点的梯度垂直于通过该点的等值线，指向函数增大的方向.



切向量

$$\mathbf{T}=\left(1,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(1,\ -\frac{f_x'}{f_y'}\right)$$

$$\mathbf{T}=(f_y',-f_x')$$

梯度向量

$$\nabla f=(f_x',f_y')\perp\mathbf{T}$$

- 河流的流向
- 行进路线的选择
- 丘壑的形成
- 风向的确定
- …