第64讲 偏导数

弦的振动问题

设在t时刻，x位置弦离开轴的距离为 $y = f(x, t)$

二元函数的偏导数

偏导数的计算

高阶偏导数

对于二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处，令$y=y_0$，则称

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

为函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处关于x的偏导数，记作$f_x'(x_0,y_0)$，即

$$f_x'(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

类似定义函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处关于y的偏导数为

$$f_y'(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$$

例1 设 $f(x,y)=x^2+(y^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{3+x}}$，求$f_x'(1,-1)$及$f_y'(1,-1)$.

【例1解】 因为 $f(x,-1)=x^2$, 所以

$$f_x'(x,-1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,-1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2=2x$$

因此 $f_x'(1,-1)=2.$

又因为 $f(1,y)=1+(y^3+1)\frac{1}{2}$, 所以

$$f_y'(1,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1+\frac{y^3+1}{2})=\frac{3}{2}y^2$$

因此 $f_y'(1,-1)=\frac{3}{2}.$

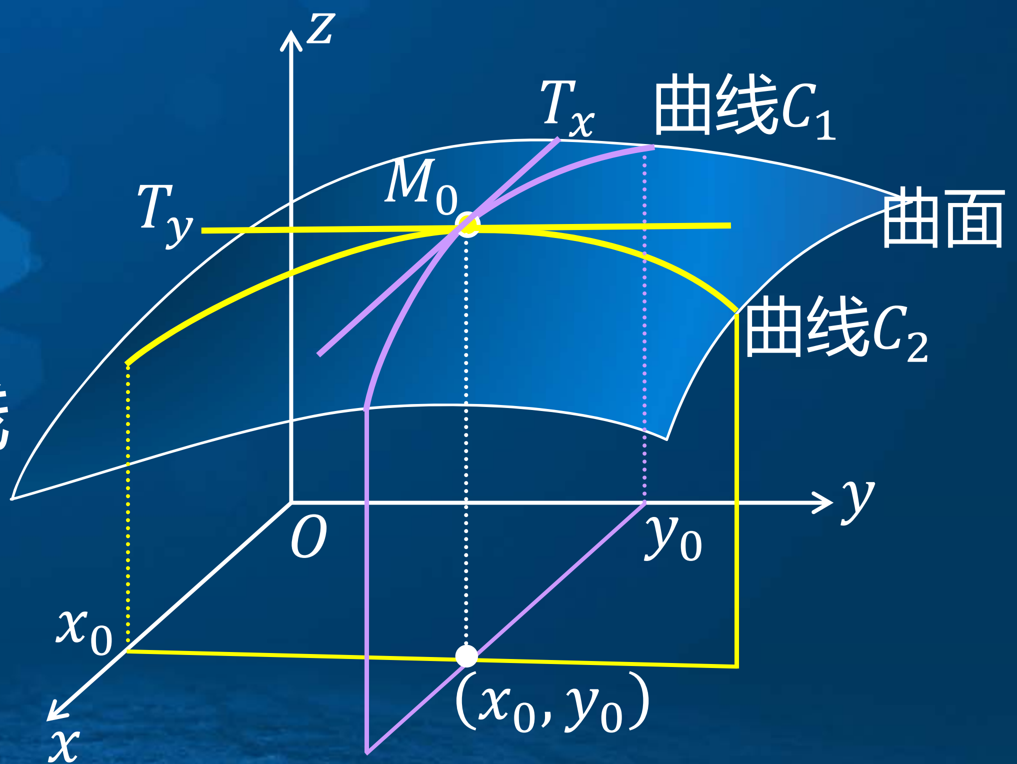
二元函数偏导数的几何意义

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

是曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$在点 M_0 处的切线 M_0T_x对 x 轴的斜率.

$$f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$$

是曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$在点 M_0 处的切线M_0T_y对 y 轴的斜率.



偏导数定义的极限形式

定义1 设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0，而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有关于x的**偏增量**

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于自变量 x 的**偏导数**，记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $z'_x(x_0,y_0),f'_x(x_0,y_0)$.

类似地，当x固定在x_0，而y在y_0处有增量Δy时，称极限

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

为函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处关于自变量 y的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } z'_y(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0).$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 或 y 偏导数存在 ,则该偏导数称为偏导函数，也简称为偏导数 , 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},f'_x(x,y),f'_1(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},f'_y(x,y),f'_2(x,y)$$

视为常数

即 $f'_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y)$

视为常数

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)$$

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x'(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y,z)$$

视为常数

例2 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$.

例3 求函数$z=x^3+3xy+4y-1$在点$(1,2)$处的偏导数 .

- 求多元函数在一点的偏导数的方法：

(1) 先求后代 (2) 先代后求

(3) 利用偏导数的定义，多用于考察分段函数在分段点处的导数.

例4 求$z = x^y$的偏导数 .

例5 已知理想气体的状态方程$PV = RT$(R为常数），证明：

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

说明: 此例表明，偏导数记号是一个整体记号, 与一元函数的导数记号$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$不同，不能看作分子与分母的商.

二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数仍是x,y的函数，可以再求偏导数.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$ 关于 x 的二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$ 关于x , y 的二阶混合偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$ 关于 y , x 的二阶混合偏导数

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$ 关于 y 的二阶偏导数

类似可以定义更高阶的偏导数 .

例如，$z = f(x,y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z = f(x,y)$ 关于x的$n-1$阶偏导数, 再关于y的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

- 求高阶偏导数的方法—— 逐次求导法

例6 求函数$z=x^3y^2-2xy^2+3xy-4x+5y-6$的二阶偏导数．

【例6解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-2y^2+3y-4 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-4xy+3x+5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-4y+3 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-4y+3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

定理1 如果函数$z=f(x,y)$的两个混合偏导数$f''_{xy}(x,y)$和$f''_{yx}(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

定理1证明思路： 记$\varphi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$

$$\Delta=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)$$

$$=[f(x_0+\Delta x,\underline{y_0+\Delta y})-f(x_0,\underline{y_0+\Delta y})]-[f(x_0+\Delta x,\underline{y_0})-f(x_0,\underline{y_0})]$$

$$=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)\ =\varphi'(y_0+\Delta y\theta_1)\Delta y$$ 微分中值定理

$$=f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\theta_1)-f'_y(x_0,y_0+\Delta y\theta_1)$$ 微分中值定理

$$=f''_{yx}(x_0+\Delta x\theta_2,y_0+\Delta y\theta_1)\Delta x\Delta y$$

【说明】 因为初等函数的偏导数仍为初等函数，而初等函数在其定义区域内是连续的，所以求初等函数的二阶混合偏导数可以选择方便的求导顺序.

例7 验证函数$u(x,t)=\sin(x-at)$满足方程(其中a为常数)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ 波动方程

含有多元函数偏导数的方程称为偏微分方程.

$u(x,t)=\sin(x-at)$

正弦波$y=\sin x$以速度为a向x轴正向传播 —— 行波