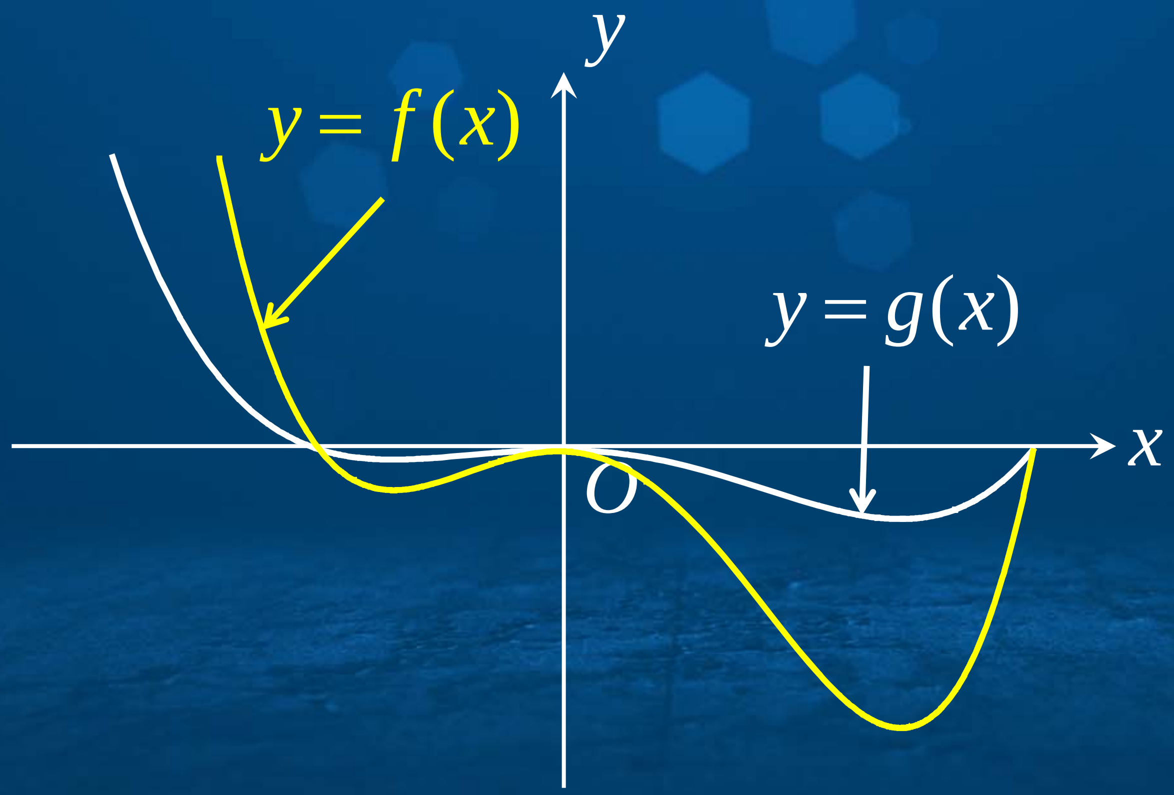
第36讲 曲率

过山车

过山车

高 铁

如何刻画一条平面曲线的几何特征？



弧微分

曲率的概念及计算

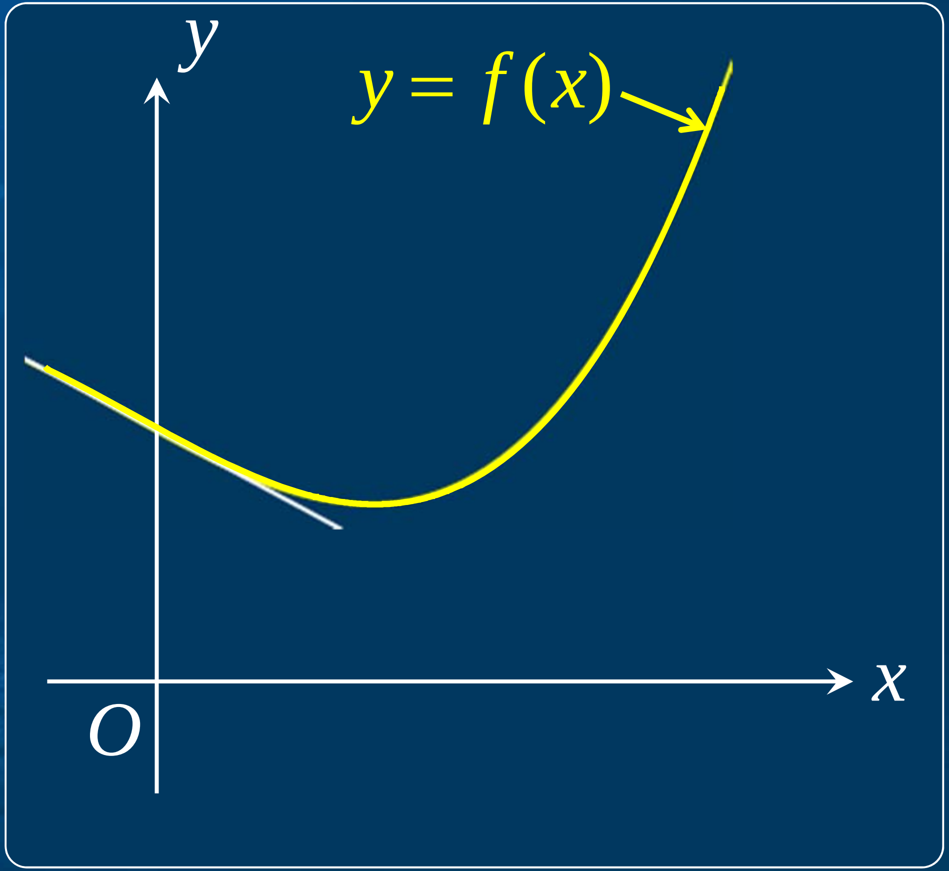
曲率半径与曲率圆

光滑曲线

若函数$f(x)$在 $[a,b]$上有连续导数，则称曲线

$$\Gamma : y = f(x) \ (a \le x \le b)$$

为光滑曲线.



光滑曲线 上任一点的切线均可由其在某一点的切线连续变化得到.

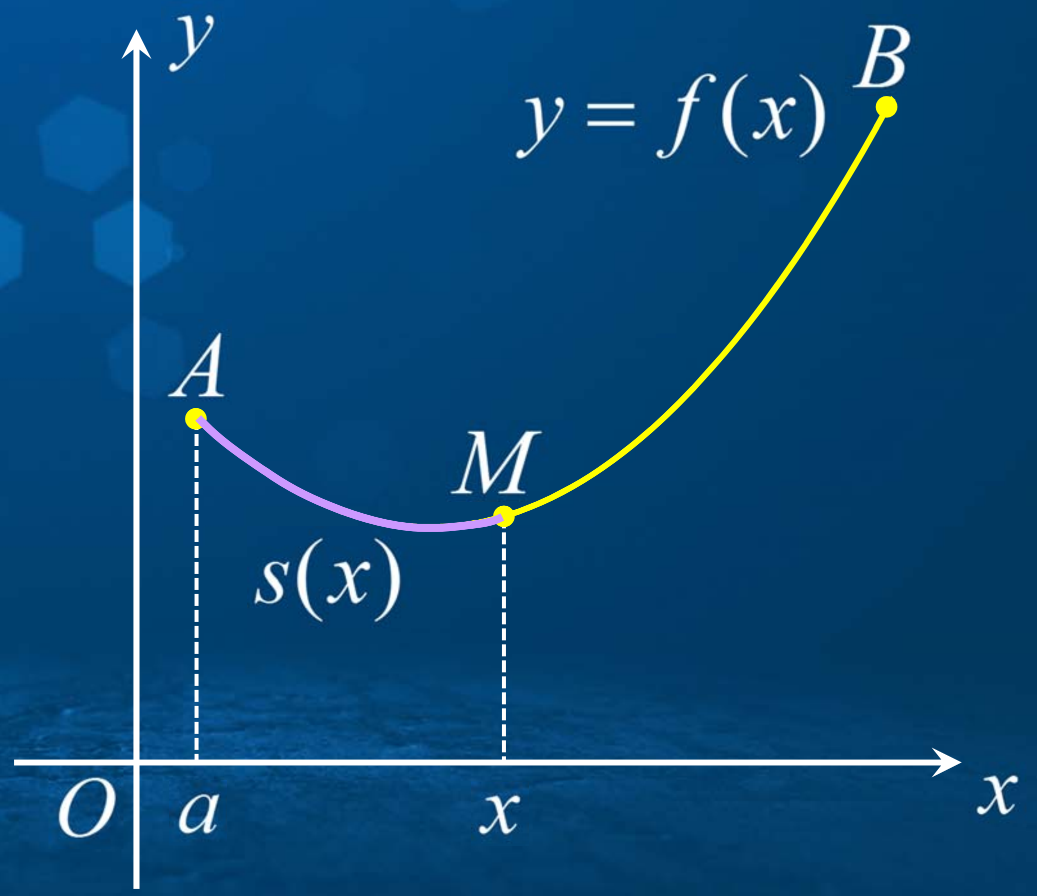
弧长函数

设

$\Gamma = \overset{\frown}{AB} : y = f(x)(a \le x \le b)$

为光滑曲线，$M(x,y)$为曲线上任一点，定义弧长函数

$$s(x) = \left| \overset{\frown}{AM} \right| (a < x < b).$$



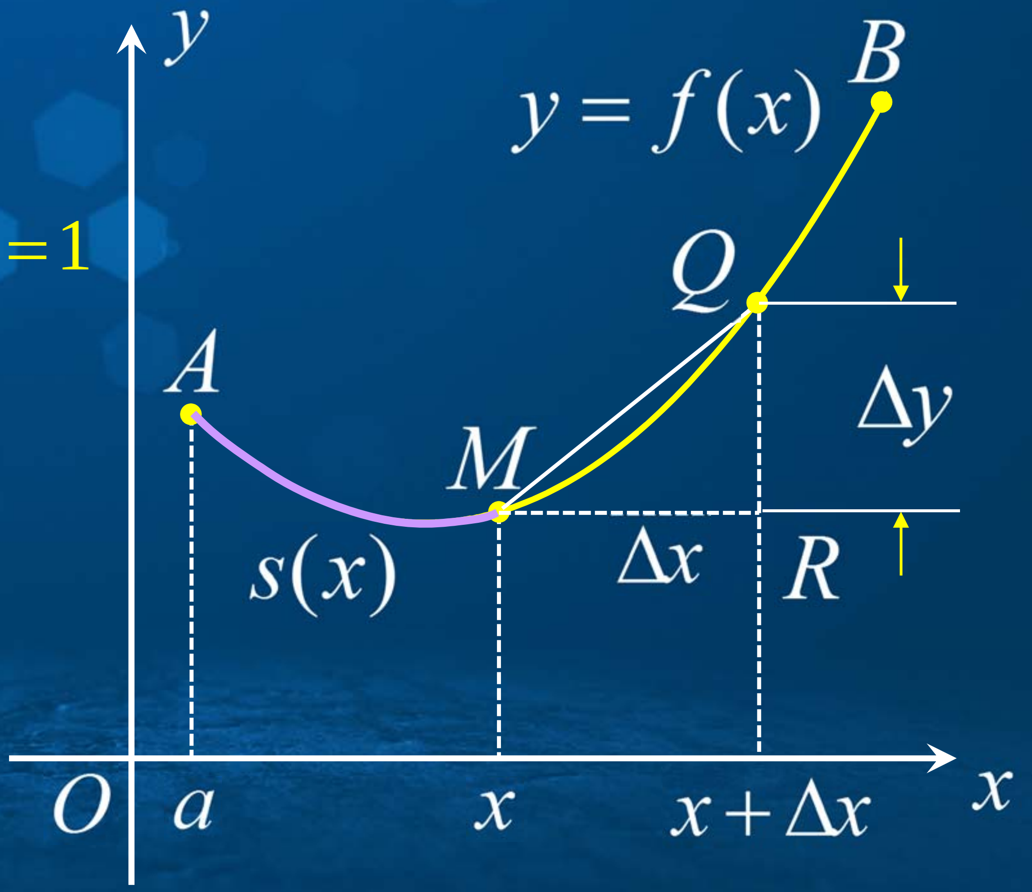
弧微分

$$\Delta s = s(x+\Delta x) - s(x) = \left|\overset{\frown}{MQ}\right|$$

$$\left|\overline{MQ}\right|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|\overset{\frown}{MQ}\right|}{\left|\overline{MQ}\right|} = 1$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \frac{\left|\overset{\frown}{MQ}\right|^2}{\left|\overline{MQ}\right|^2} \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{\left|\overset{\frown}{MQ}\right|^2}{\left|\overline{MQ}\right|^2}} \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$



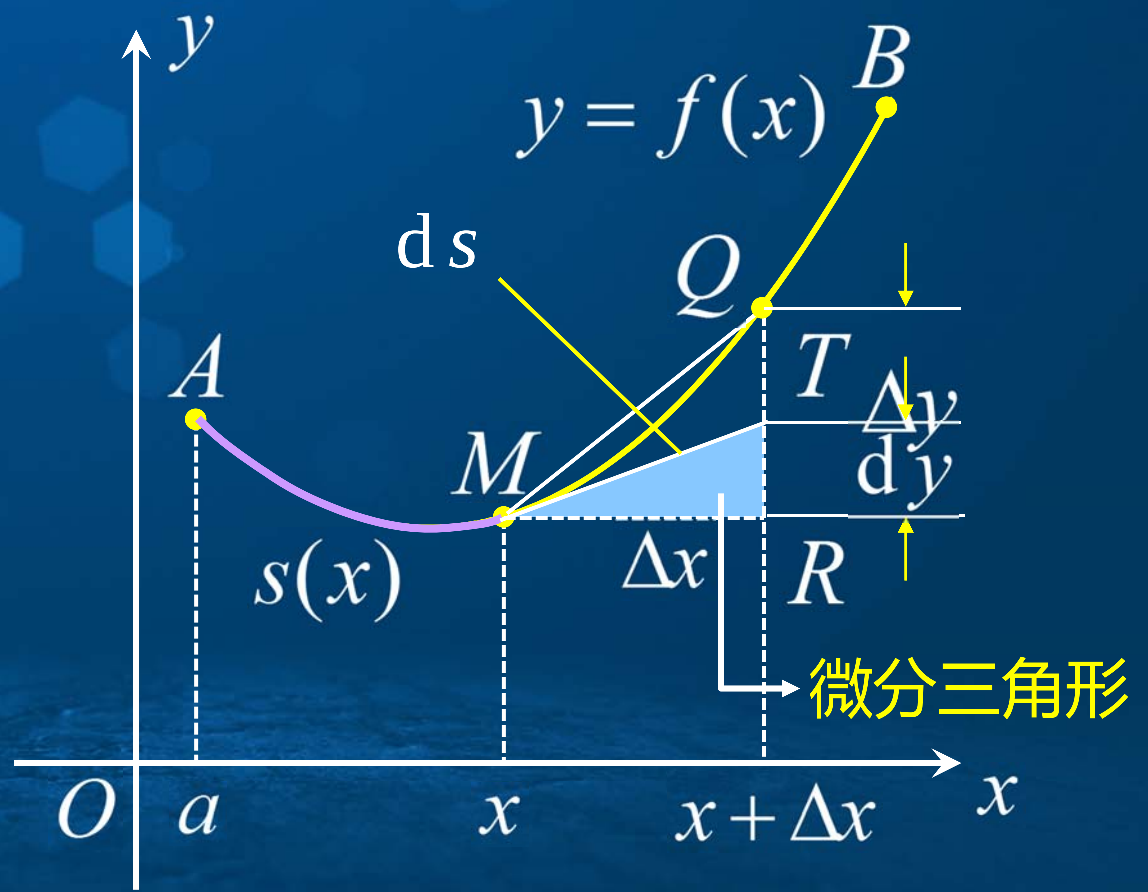
弧微分

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + y'^2$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+y'^2}$$

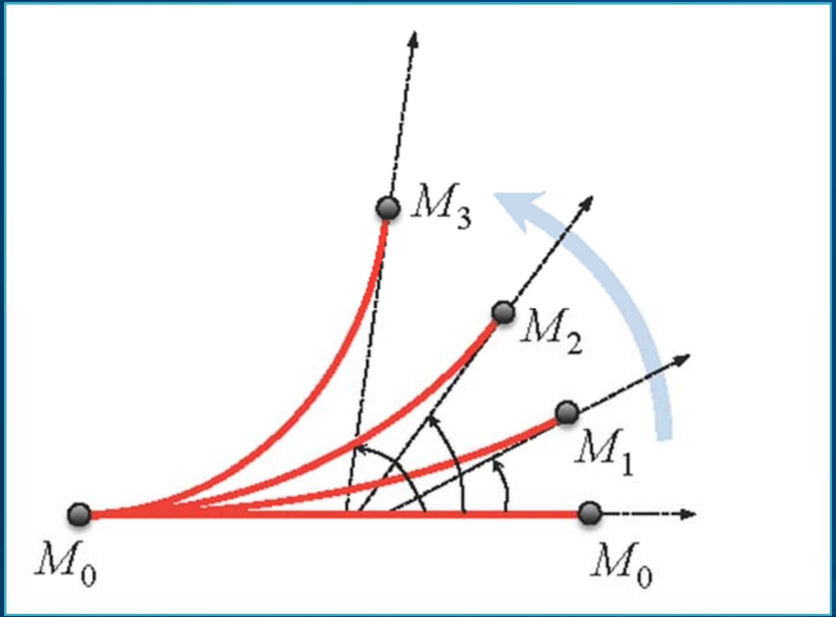
$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \quad (\mathrm{d}x > 0)$$



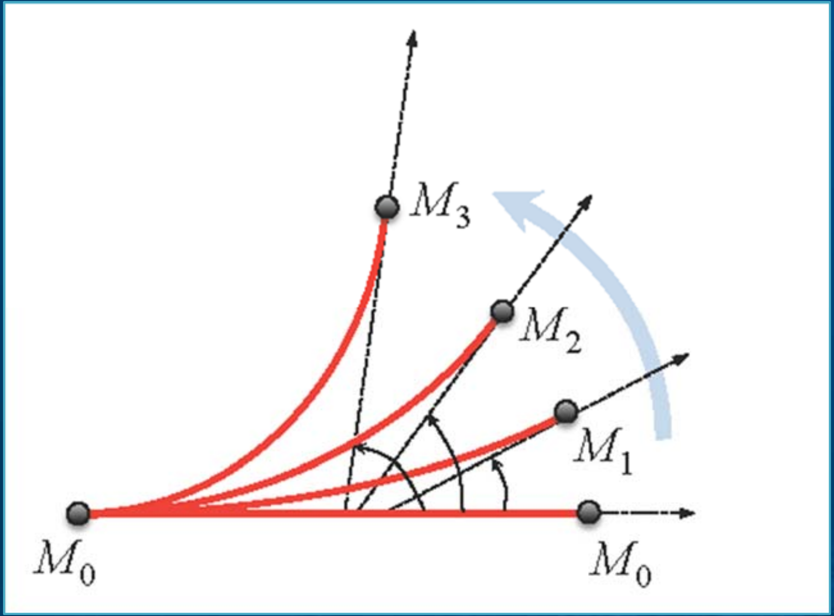
弧微分公式

如何刻画曲线的弯曲程度？

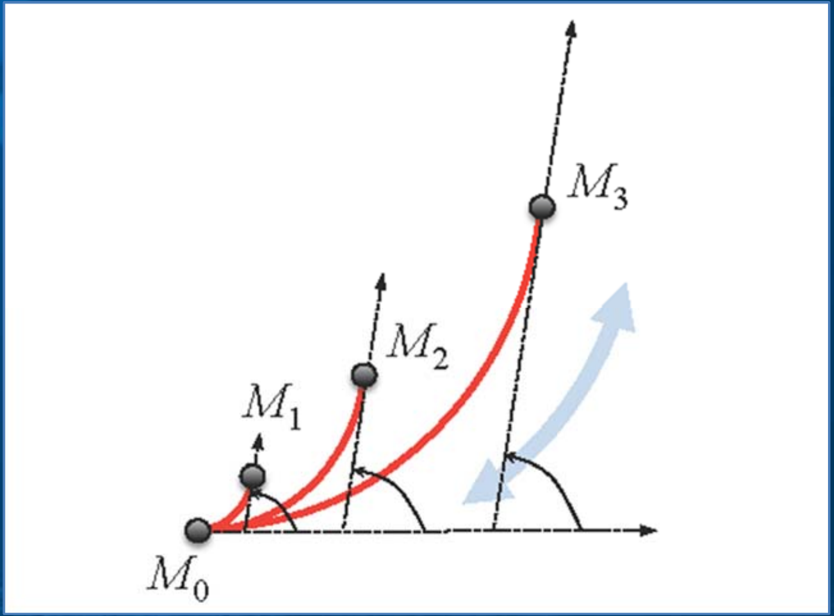


长度相同的曲线，切线
转角越大弯曲程度越大

如何刻画曲线的弯曲程度？



长度相同的曲线，切线转角越大弯曲程度越大

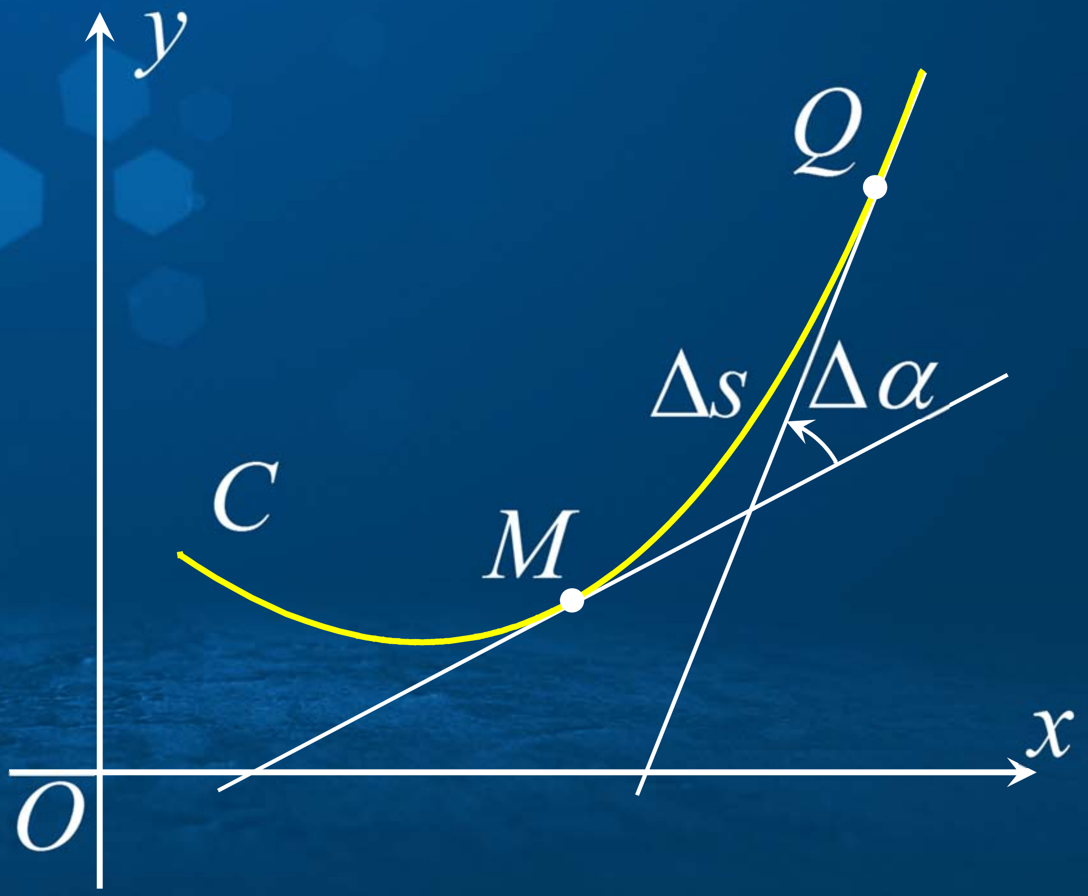


切线转角相同的曲线，弧长越短弯曲程度越大

曲率的定义

弧段 $\overset{\frown}{MQ}$ 的**平均曲率**

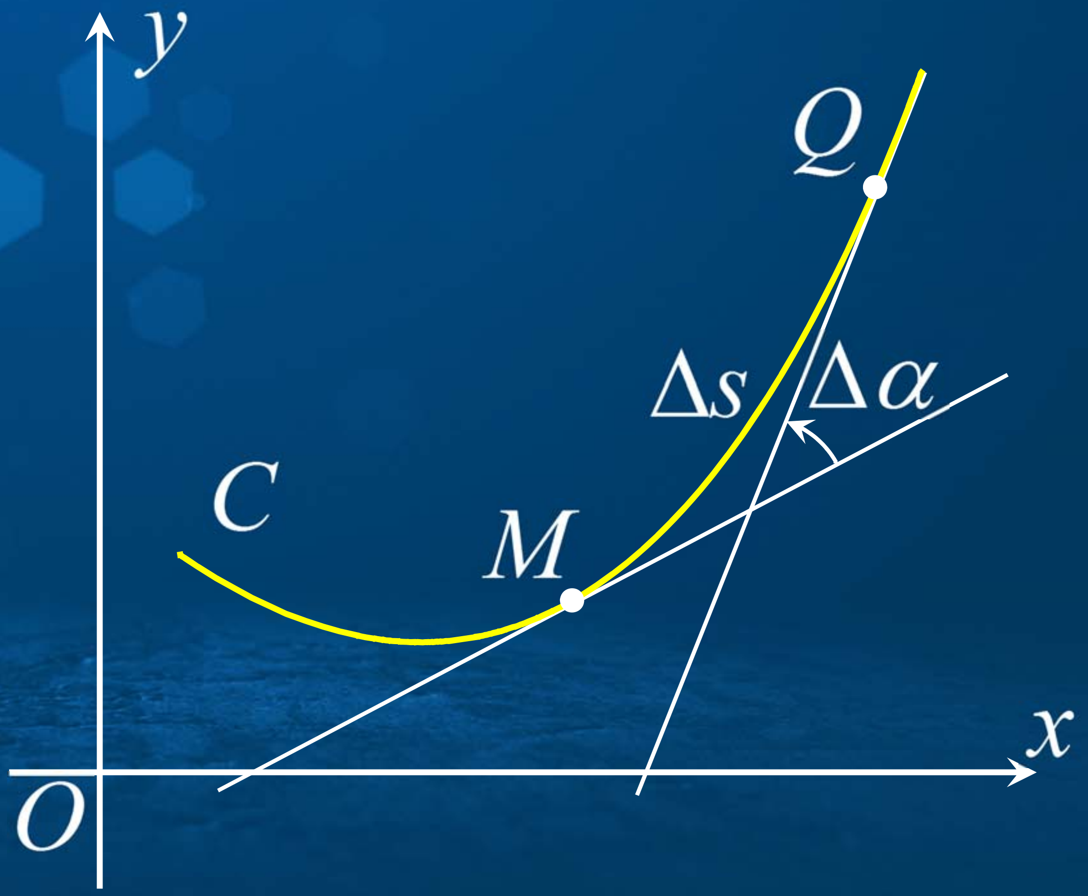
$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$



曲率的定义

定义1 光滑曲线 C 在点 M 处的曲率为

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

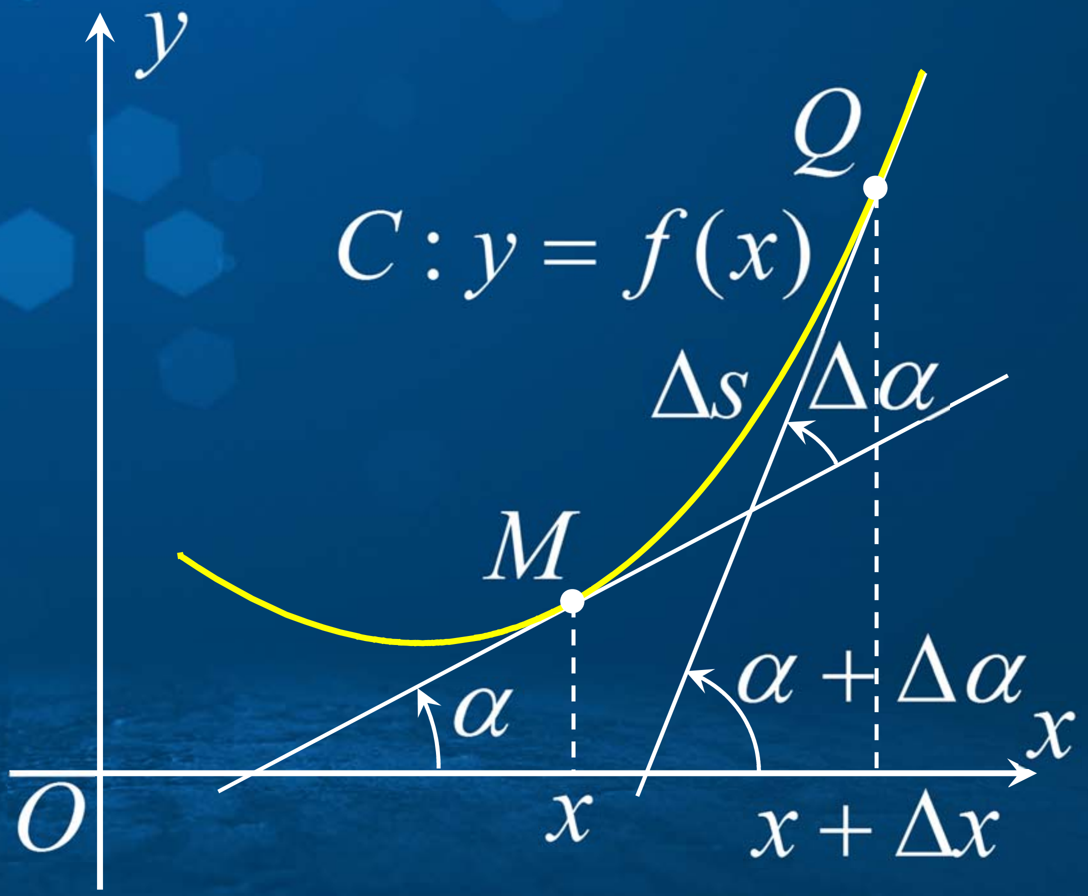


例1 求直线和圆的曲率.

曲率的计算

设曲线 C 的直角坐标方程为 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数.

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$



例2 计算曲线 $y=\ln x$ 在点 (1, 0) 处的曲率.

例3 求圆滚线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 在点 $(\pi a, 2a)$处的曲率.

思考与练习

试给出曲线用参数方程和极坐标描述时曲率计算的一般公式.

注：曲率计算公式

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

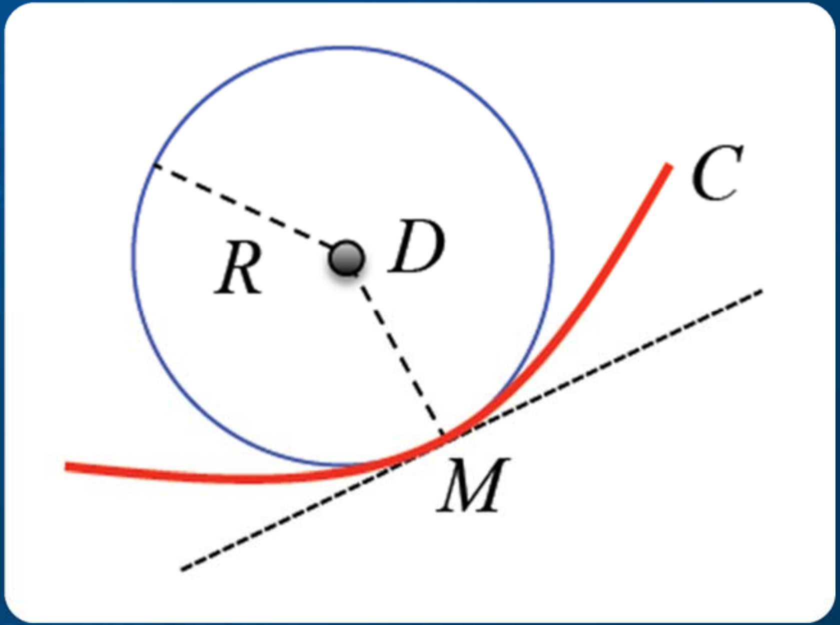
如果 $|y'|\ll 1$，则 $1+y'^2\approx 1$，因此有曲率的近似计算公式

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\approx|y''|.$$

即当 $|y'|\ll 1$ 时，曲率 K 近似于 $|y''|$，说明二阶导数 y'' 的大小对曲线的弯曲程度起着决定性的影响.

曲率圆

设曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K\neq 0(y''\neq 0)$. 在曲线的凹侧，与曲线在 M 点相切，半径 $R=\dfrac{1}{K}$ 的圆称为曲线在点 M 处的**曲率圆**.



R 称为**曲率半径**，曲率圆的圆心称为**曲率中心**.

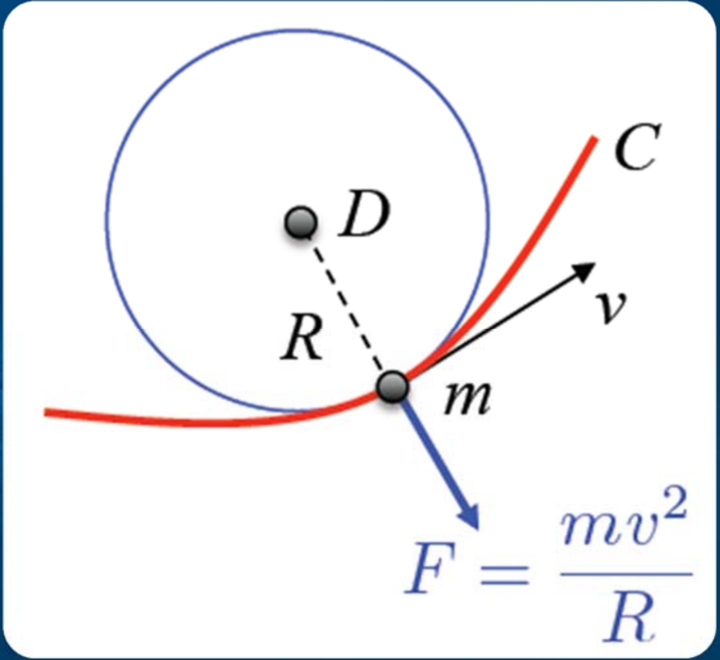
铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化.

质量为m的质点以速度v通过光滑曲线上一点，所受离心力为

$$F=\frac{mv^2}{R}$$

其中R为曲线在该点处的曲率半径.

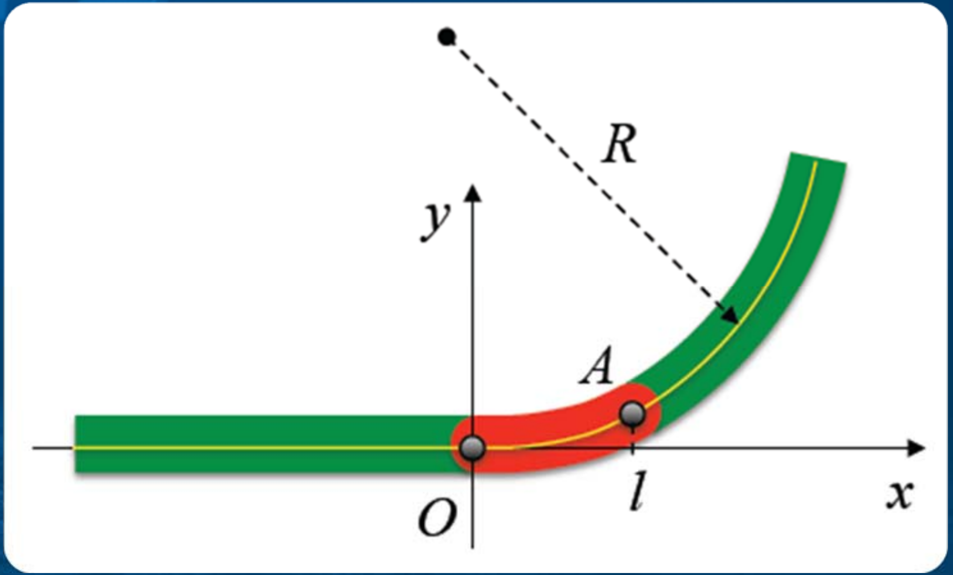


铁路中的缓和曲线

为了确保列车行驶安全，尽可能保证列车运行时所受离心力的平稳变化.

常用的缓和曲线：

- 三次多项式
- 渐开螺旋线
- 双扭线
- ……



缓和曲线：$y = \dfrac{x^3}{6Rl}\,(l \ll R)$