哈爾濱工業大學

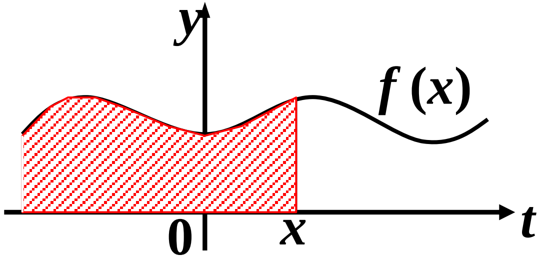
第15讲 连续型随机变量

连续型随机变量

定义 设随机变量X的分布函数为$F(x)$，若存在一个非负的函数$f(x)$，对任何实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

称X为连续型随机变量，称$f(x)$为X的概率密度函数，简称概率密度. 也可记为 $f_X(x)$.



连续型随机变量

- 由定义，可得下面两个结论

(1) 连续型随机变量的分布函数一定是连续的；

(2) 对$f(x)$的连续点，有

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = f(x) \\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{array}\right\} F(x)\text{与}f(x)\text{可以互推.}$$

概率密度的性质

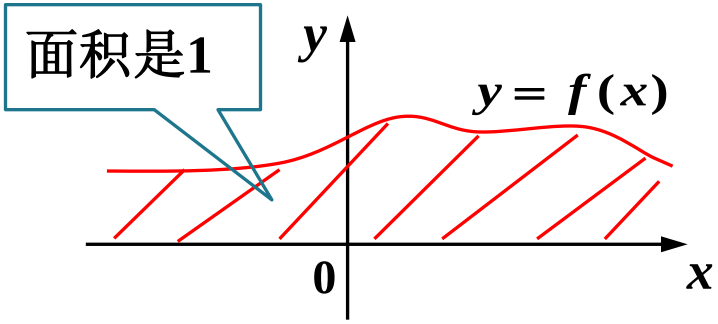
(i) $f(x) \geq 0,$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

这两条是判定函数 $f(x)$ 是否为概率密度函数的充要条件.

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

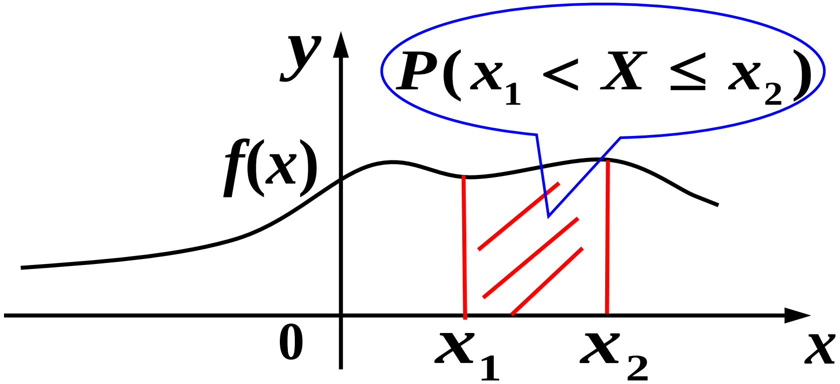
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$



概率密度的性质

(iii) $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$



连续型随机变量

- 连续型随机变量取任一指定值的概率为0，

即 $P(X=a)=0.$

这是因为

$$0 \le P(X=a) \le P(a-\Delta x < X \le a)$$

$$= F(a)-F(a-\Delta x), \qquad \Delta x > 0.$$

由$F(x)$连续得

$$\lim_{\Delta x \to 0}(F(a)-F(a-\Delta x))=0 \Rightarrow P(X=a)=0.$$

连续型随机变量

$$P(X=a)=0 \nRightarrow (X=a)=\varnothing.$$

同理 $P(A)=0$不能推出$A=\varnothing$,

$P(B)=1$不能推出$B=S$.

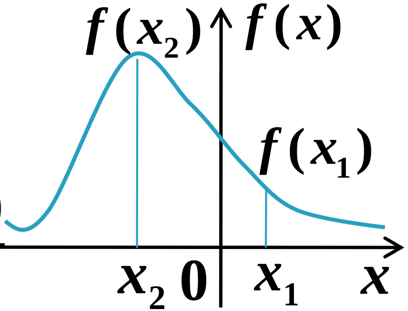
$$\boxed{\begin{aligned}&P(a<X\le b)=P(a\le X<b)\\&=P(a\le X\le b)=P(a<X<b).\end{aligned}}$$

连续型随机变量

- $f(x)$的值是如何反应概率呢？

若x是$f(x)$的连续点，则

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}.$$

$f(x_2)>f(x_1)$

$$\boxed{P\{x<X\le x+\Delta x\}\approx f(x)\Delta x.}$$

表明X落在x附近领域$(x,x+\Delta x)$的概率

约等于$f(x)\Delta x$.

例1 设连续型随机变量X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} cx^2+x, & 0\le x\le 0.5, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求(1) 系数c；(2) X的分布函数$F(x)$；

(3) $P(-0.5< X <0.3)$.

解 $\underline{1}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\underline{\int_0^{0.5}(cx^2+x)dx}=\left(\frac{c}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{0.5}$

$=\frac{c}{24}+\frac{1}{8}, \Rightarrow c=21.$

$$\boxed{P(0\le X\le 0.5)=1.}$$

$$(2)F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad f(x)=\begin{cases}21x^2+x, 0\le x\le 0.5,\\ 0, \qquad\qquad 其它.\end{cases}$$

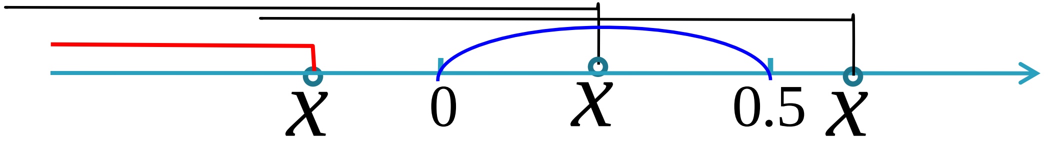
由$P(0\le X\le 0.5)=1.$

1^0当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$

2^0当$x\ge 0.5$时, $F(x)=P(X\le x)=1.$

3^0当$0\le x<0.5$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}(21t^2+t)dt$

$$=7x^3+x^2/2;$$



即， $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 7x^3+x^2/2, & 0\le x<0.5,\\ 1, & x\ge 0.5.\end{cases}$

$$(3)P(-0.5<X<0.3)=\int_{-0.5}^{0.3}f(x)dx=\int_0^{0.3}(21x^2+x)dx$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}21x^2+x, & 0\le x\le 0.5,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}}\quad =(7x^3+x^2/2)_0^{0.3}=0.234.$$

$$\text{或}P(-0.5<X<0.3)=F(0.3)-F(-0.5)$$

$$=7\cdot(0.3)^3+(0.3)^2/2-0=0.234.$$

例2 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$ 求X的概率密度.

解

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$

几种重要的连续型随机变量

均匀分布(Uniform)

定义 若随机变量X的概率密度为

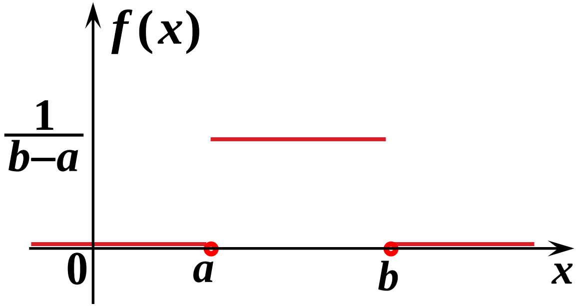
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad (a<b).$$

称X在区间$[a,b]$上服从均匀分布，记为$X\sim U[a,b]$.

$$f(x)\ge 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1.$$

满足概率密度性质.



均匀分布

➢ 均匀的含义是等可能

若$X \sim U[a, b]$, (x_1, x_2)为$[a, b]$中的任一子区间,

则

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1).$$

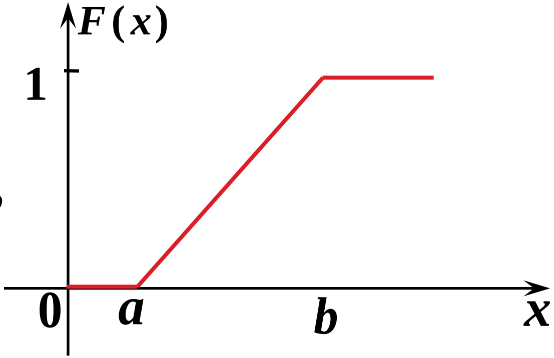
说明：X落在长度相等的各个子区间的可能性是相等的. 属于几何概率.

若$X \sim U[a,b]$,则$P(a \le X \le b) = 1.$

概率密度的性质

若$X \sim U[a, b]$，则X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$



$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.}$$

均匀分布的用途

- 设通过某站的汽车10分钟一辆， 则乘客候车时间X在$[0, 10]$上服从均匀分布；
- 某电台每隔20分钟发一个信号, 我们随手打开收音机, 等待时间X在$[0, 20]$上服从均匀分布；
- 随机投一根针于坐标纸上, 它和坐标轴的夹角X在$[0, \pi]$上服从均匀分布.

例3 设随机变量$X \sim U(1,6)$, 求方程$x^2 + Xx + 1 = 0$有实根的概率.

解 由$X \sim U(1,6)$得X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 1 < x < 6, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

方程有实根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow X^2 - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow X \geq 2$或$X \leq -2$,

故, 方程有实根的概率为

$$P(X \geq 2) + P(X \leq -2) = \int_2^6 \frac{1}{5} dx + 0 = \frac{4}{5}.$$

指数分布(Exponential)

- **定义** 若连续型随机变量X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad (\lambda>0).$$

称X服从参数为 λ 的指数分布. 记为$X\sim E(\lambda)$.

满足：$f(x)\ge 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1.$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad \lambda>0.$$

指数分布常用来近似地表示各种寿命的分布.

指数分布的无记忆性

$$X \sim E(\lambda),\quad \forall s>0, t>0,$$

$$P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t).$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

因为

$$P\{X>s+t|X>s\}=\frac{P\{X>s+t, X>s\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$=P(X>t).$$

例4 设机器相邻两次故障的时间间隔(小时)X服从参数为1/5的指数分布，求在机器已经无故障工作了8小时的情况下，再无故障工作10小时的概率.

解 已知 $X \sim E(1/5)$. $F(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

$$P(X>18 \mid X>8)=P(X>10)=1-P(X\le 10)$$

$$=1-F(10)=1-(1-\mathrm{e}^{-10/5})=\mathrm{e}^{-10/5}=\mathrm{e}^{-2}.$$

谢　　谢！