n阶行列式的定义

n 阶行列式的定义

几个特殊行列式的计算

n阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式定义，先来看三阶行列式的结构和特点.

根据定义，3 阶行列式展开式中的每一项都是取自不同行、不同列的三个元素之积；

通过交换乘积因子的次序，每一项都可写为形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式，即行指标排成自然排列 $1,2,3$，列指标的排列 $j_1j_2j_3$ 是 $1,2,3$ 的某个排列，这样的排列共有 $6=3!$ 种，恰好对应展开式中的 6 项；

每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前的正负号由列指标排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性确定，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，带负号，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，带正号.

总之，三阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3 \in P_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

定义：n阶行列式是由 n^2个数$a_{ij}(1\le i\le n,1\le j\le n)$排成的一个$n$行、$n$列的正方形数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

该数表表示一个数，称为由n^2个数a_{ij}构成的n阶行列式

记为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinant

下标n表示阶数

a_{ij} 的下角标表示元素的位置，如 a_{2n}表明它位于第2行第n列

n阶行列式D_n按下面规则确定

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{1i_2} \cdots a_{ni_n}$$

其中 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n}$ 表示对$1, 2, \cdots, n$所有的排列求和式，等号右边的和式称为行列式的展开式

行列式的展开式有如下三个特点

1、对所有的排列求和，展开式是$n!$项的代数和；

2、每一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 行指标依自然顺序排列，

而列指标$i_1,i_2,\cdots,i_n$也够成一个排列，所以每一项

的n个元素取自不同行和不同列；

3、当行指标成自然排列时，$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的列指标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 所成排列的奇偶性决定该项正负号.

例、$a_{32}a_{24}a_{33}a_{41}$ 的行指标 $3,2,3,4$ 不构成排列，即有两个元素取自第三行，$a_{32}a_{24}a_{33}a_{41}$ 不是四阶行列式展开式中的项.

例、$a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$ 的行指标和列指标分别构成排列 $1,2,4,3$ 和 $2,4,3,1$，所以 $a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$ 出现在四阶行列式展开式中；　因 $a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，列指标 $2,4,1,3$ 的逆序数 $\tau(2,4,1,3)=3$，$a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$ 前面的符号为负.

几个特殊行列式

按照定义，5阶行列式是5!=120项的代数和，根据定义计算高阶行列式相当繁琐！

下面根据行列式定义，给出几个特殊行列式的计算公式，这也是后面计算行列式的重要根据.

例、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cancel{a_{n1}} & \cancel{a_{n2}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad a_{1i_1}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

n!项

(n-1)!项

$$= \sum_{1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(1 i_2 \cdots i_n)} a_{11} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

(n-2)!项

$$= \sum_{12 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(12 \cdots i_n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{ni_n} \quad = \cdots$$

$$=(-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例、上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cdots & \cancel{a_{1,n-1}} & \cancel{a_{1n}} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & \cancel{a_{n-1,n}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

n! 项

a_{ni_n}

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_{n-1} n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{n-1,i_{n-1}} a_{nn}$$

(n−1)!项

$$= \sum_{i_1,\cdots,n-1,n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1,\cdots,n-1,n)} a_{1i_1} \cdots a_{n\text{-}1,n\text{-}1} a_{nn} = \cdots$$

(n−2)!项

$$=(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例、对角行列

作为特例，对角行列式既是上三角，也是下三角行列式，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$