哈爾濱工業大學

两个正态总体参数的显著性检验

t 检验

- 设$X_1,\cdots,X_{n_1}$来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本,
- $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$来自总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本,

两个样本相互独立;

$\bar{X},S_1^2$和$\bar{Y},S_2^2$分别为样本均值和样本方差.

1. $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知，考虑$\mu_1,\mu_2$的三类检验问题

(1). H_0: $\mu_1=\mu_2$,

(2). H_0: $\mu_1\le\mu_2$,

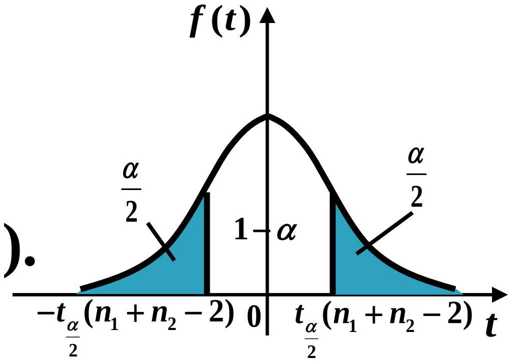
(3). H_0: $\mu_1\ge\mu_2$.

t 检验

(1). 检验 H_0: $\mu_1 = \mu_2$

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t(n_1 + n_2 - 2).$$

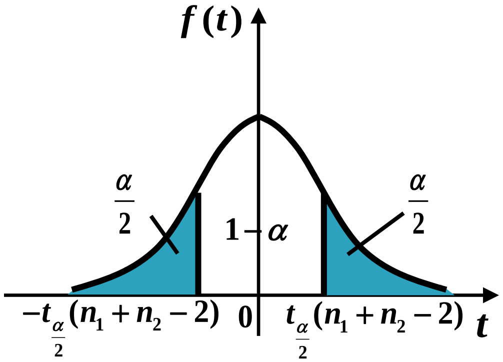


$$S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$ 是 σ^2 的无偏估计量.

t 检验

对给定的α，查临界值$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-1)$,使得

$$P\left(|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)=\alpha,$$



检验的拒绝域为

$$W=\left(|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right).$$

t 检验

p值：$\mathrm{p}=P\left(|t|\geq|t_0|\right)=2P\left(t(n_1+n_2-2)\geq|t_0|\right)$，

其中，$t_0=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$.

当$\mathrm{p}\leq\alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p}>\alpha$时，接受H_0.

双侧检验.

t 检验

(2). 检验 H_0：$\mu_1 \le \mu_2$

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad S_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

检验的拒绝域为 $W = \left(t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\right).$

p值：$\mathrm{p} = P\left(t(n_1 + n_2 - 2) \ge t_0\right),$

当$\mathrm{p} \le \alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p} > \alpha$时，接受H_0.

t 检验

在假设检验中

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2$$

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2,\ H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2,\ H_1: \mu_1 > \mu_2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

t 检验

(3). 检验 H_0: $\mu_1 \ge \mu_2$

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},\quad S_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

检验的拒绝域为 $W = \left(t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\right)$.

p值：$\mathrm{p} = P\left(t(n_1 + n_2 - 2) \le t_0\right)$,

当$\mathrm{p} \le \alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p} > \alpha$时，接受H_0.

t 检验

在假设检验中

$$H_0: \mu_1 \ge \mu_2$$

$$H_0: \mu_1 \ge \mu_2, \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

例1 为了研究一种新化肥对种植小麦的效力，
选13块条件相同面积相等的土地进行试验，
各块产量(kg)如下：
施肥的：　　34，35，30，33，34，32.
未施肥的：29，27，32，28，32，31，31.
问这种化肥对小麦产量是否有显著影响？

解 用X与Y分别表示在一块土地上施肥与不施肥下小麦的产量, 设

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

若已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,

检验: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 (\alpha = 0.05)$.

已知 $n_1 = 6,\ n_2 = 7,\ \bar{x} = 33,\ (n_1 - 1)s_1^2 = 16,$

$\bar{y} = 30,\ (n_2 - 1)s_2^2 = 24,$

查表得：$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(11)=2.201$，

拒绝域 $W=(|t|\geq t_{0.025}(11)=2.201).$

$$t=\frac{33-30}{\sqrt{\frac{16+24}{6+7-2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}}=2.828>2.201,$$

拒绝H_0，新化肥对小麦产量的影响是显著的.

p值：$\mathrm{p}=2P(t(11)\geq 2.828)=0.018<0.05,$

同样拒绝原假设H_0.

成对数据 t 检验

2. σ_1^2,σ_2^2未知，$n_1 = n_2 = n$,检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$

配对的t检验法

令 $Z = X_i - Y_i (i = 1,2,\cdots,n)$,

则$Z_1,\cdots,Z_n$独立同分布于$N(d,\sigma^2)$,

其中$d = \mu_1 - \mu_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

检验$H_0: \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow H_0: d = 0.(\sigma$未知$)$

成对数据 t 检验

选检验统计量 $t=\dfrac{\bar{Z}}{S}\sqrt{n}\overset{H_0}{\sim}t(n-1),$

其中 $Z=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i, S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2},$

拒绝域为$W=\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}.$

p值：$\mathrm{p}=P\left(|t|\geq|t_0|\right)=2P\left(t(n-1)\geq|t_0|\right),$

其中 $t_0=\dfrac{\bar{z}}{s}\sqrt{n},$

当$\mathrm{p}\leq\alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p}>\alpha$时，接受H_0.

类似方法可得 $H_0: \mu_1 \le \mu_2$

$H_0: \mu_1 \ge \mu_2$

的检验法则.

例2 为判断两种工艺方法对产品的某性能指标有无显著差异，将9批材料用两种工艺方法进行生产，得到该指标的9对数据(下表). 问：由数据，能否说明在两种不同工艺方法下产品的该性能指标有显著性差异($\alpha = 0.05$)?

x_i	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.1	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89

解 检验 $H_0: d=0(\sigma$未知)

将9对数据作差 $z_i = x_i - y_i$，计算 $\bar{z}=0.06,$

$s^2 = 0.015,$ 故 $t_0 = \frac{\bar{z}}{s}\sqrt{n}$=1.467,

拒绝域为 $W = \{|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306\}$

t_0=1.467<2.306,接受H_0,

p值：$p = 2P\left(t(8) \geq 1.467\right)$=0.18>0.05，接受$H_0$,

两种方法无差异.

F检验

- 设$X_1,\cdots,X_{n_1}$来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本,
- $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$来自总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本,

两个样本相互独立;

$\bar{X},S_1^2$和$\bar{Y},S_2^2$分别为样本均值和样本方差.

μ_1,μ_2未知，考虑σ_1^2,σ_2^2的三类检验问题

$$(1).\ H_0:\ \ \sigma_1^2=\sigma_2^2,$$

$$(2).\ H_0:\ \ \sigma_1^2\le\sigma_2^2,$$

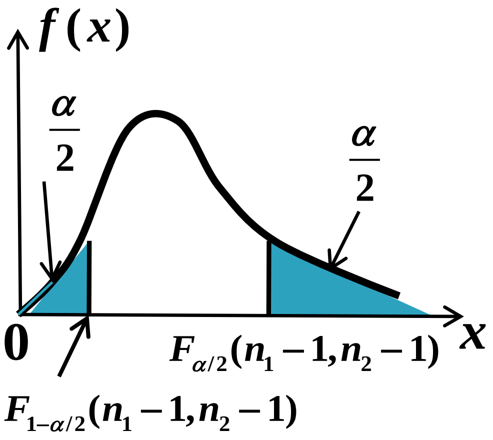
$$(3).\ H_0:\ \ \sigma_1^2\ge\sigma_2^2.$$

F检验

(1). 检验 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

选检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\overset{H_0}{\sim}F(n_1-1,n_2-1).$$



检验的拒绝域为

$$W=\left(F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right).$$

F检验

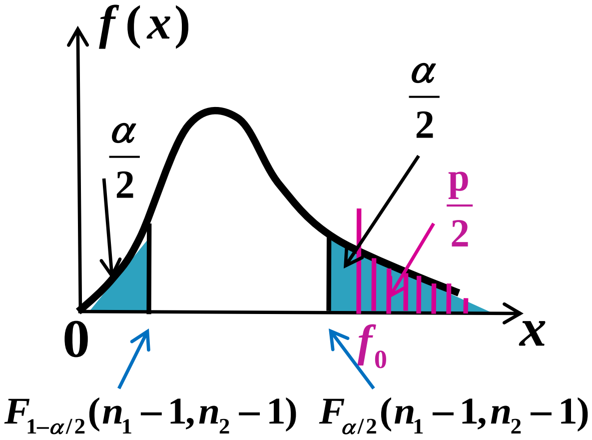
p值：$\mathrm{p} = 2\min P\left(F \ge f_0, F \le f_0\right)$

其中，$f_0 = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$.

当$\mathrm{p} \le \alpha$时，拒绝H_0，

当$\mathrm{p} > \alpha$时，接受H_0.

双侧检验.



$\boxed{\text{当}\mathrm{p} < \alpha\text{时，拒绝}H_0.}$

F检验

(2). 检验 H_0： $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$

选检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$,

检验的拒绝域为

$$W = \left(F \ge F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)\right).$$

p值： $\mathrm{p} = P\left(F(n_1 - 1, n_2 - 1) \ge f_0\right)$,

其中， $f_0 = s_1^2 / s_2^2$.

当 $\mathrm{p} \le \alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p} > \alpha$时，接受H_0.

F检验

在假设检验中

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$$

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

F检验

(2). 检验 H_0： $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$

选检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$,

检验的拒绝域为

$$W = \left(F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right).$$

p值：$\mathrm{p} = P\left(F(n_1 - 1, n_2 - 1) \leq f_0\right)$,

其中，$f_0 = s_1^2 / s_2^2$.

当$\mathrm{p} \leq \alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p} > \alpha$时，接受H_0.

F检验

在假设检验中

$$H_0:\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$$

$$H_0:\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$H_0:\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

例1 为了研究一种新化肥对种植小麦的效力，
选13块条件相同面积相等的土地进行试验，
各块产量(kg)如下：
施肥的：　　34，35，30，33，34，32.
未施肥的：29，27，32，28，32，31，31.
问这种化肥对小麦产量是否有显著影响？

解 用X与Y分别表示在一块土地上施肥与不施肥下小麦的产量, 设

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

检验: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 (\alpha = 0.05).$

已知 $n_1 = 6,\ n_2 = 7,\ s_1^2 = 16/5,\ s_2^2 = 24/6,$

查表得：$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(5,6)=5.99$，

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(5,6)=\frac{1}{F_{0.025}(6.5)}=0.143,$$

拒绝域 $W=(F\ge 5.99$或$F\le 0.143)$.

$$0.143< f_0=\frac{16/5}{24/6}=0.8<5.99,$$ 接受H_0.

p值：$\text{p}=2P(F(5,6)\le 0.8)\approx 0.7>0.05$,

同样接受H_0.

谢　　谢！