第53讲 点与向量的坐标表示

初等数学 → 高等数学

解析几何

“数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学，有了变数，辨证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了.”

笛卡尔就是数学的坐标！

笛卡尔 [法]

1596～1650

在三维空间中:

空间形式 — 点, 线, 面

↓↑

数量关系 — 坐标, 方程（组）

基本方法 — 坐标法; 向量法

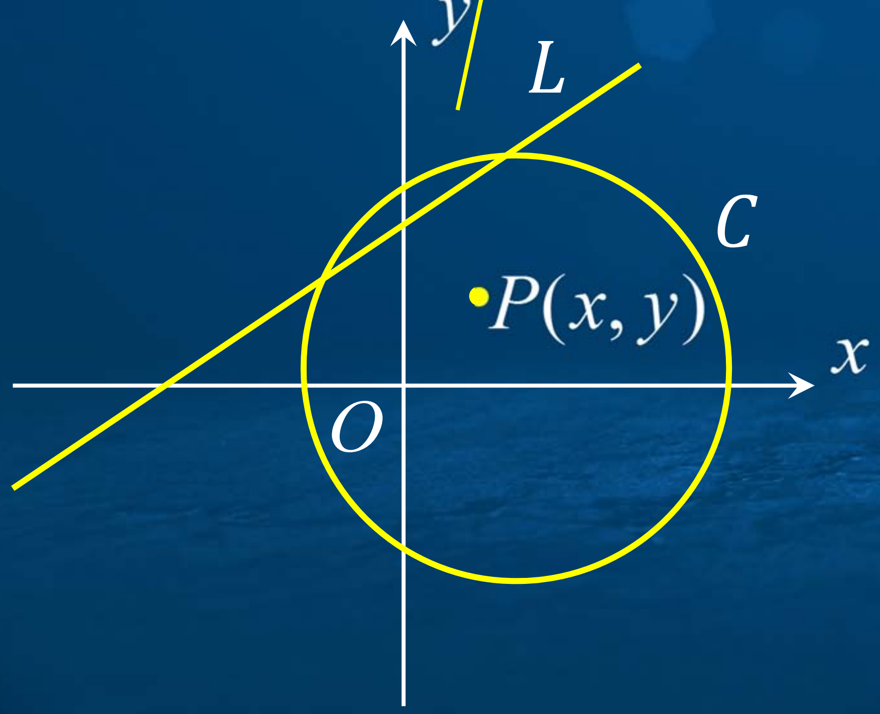
空间直角坐标系

向量及其线性运算

平面解析几何 ——— 用代数关系来研究平面几何图形

平面上的点P $\rightleftarrows$ 二元有序数组(x, y)

平面直角坐标系



平面上全体点的集合

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

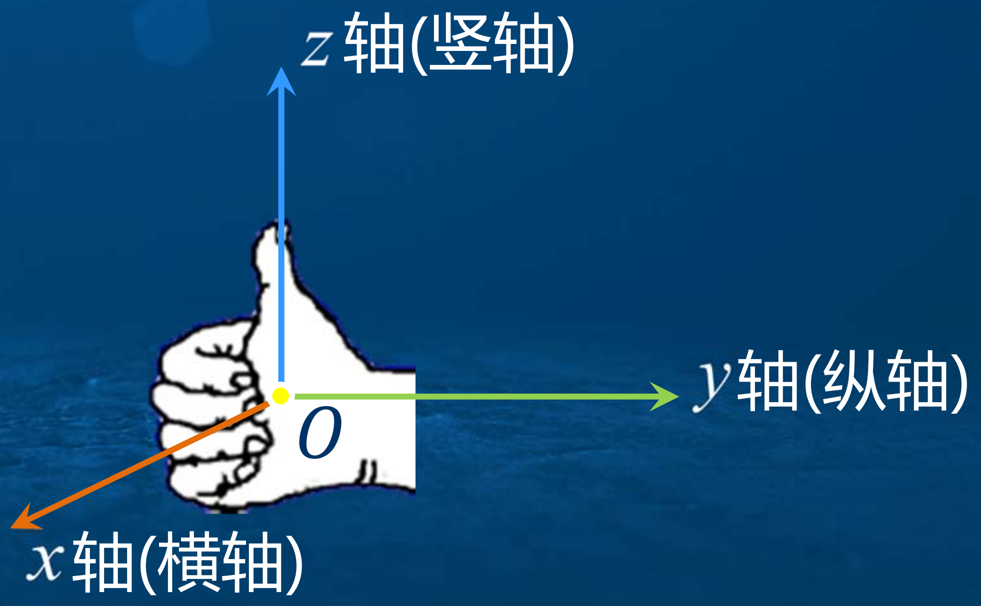
$$L: ax + by + c = 0$$

$$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

空间直角坐标系

过空间中一定点O, 作三条互相垂直的数轴构成的坐标系称为**空间直角坐标系.**

- 坐标原点
- 坐标轴
- 右手坐标系



空间直角坐标系

- 坐标面

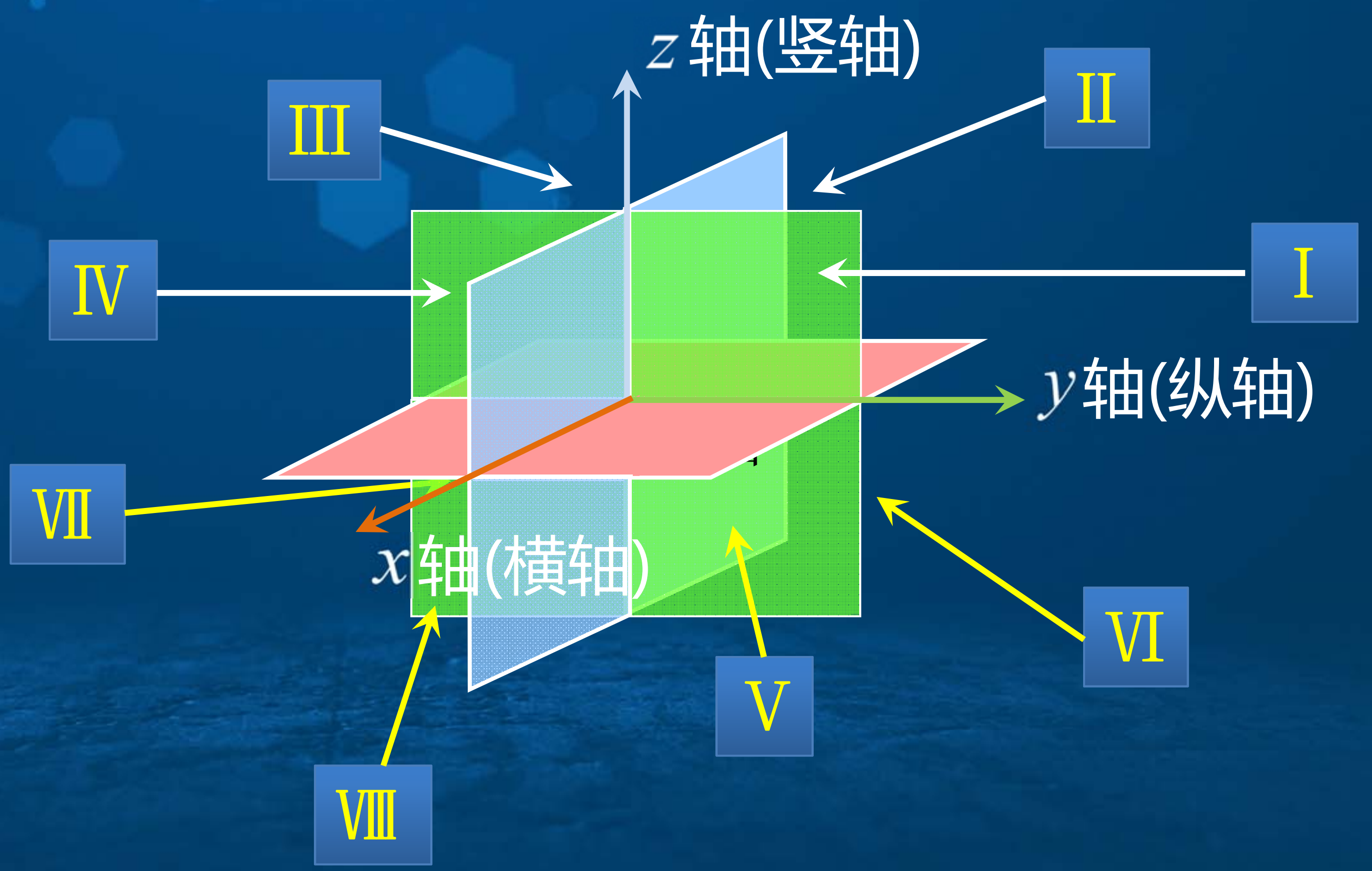
  xOy平面

  yOz平面

  xOz平面

- 卦限

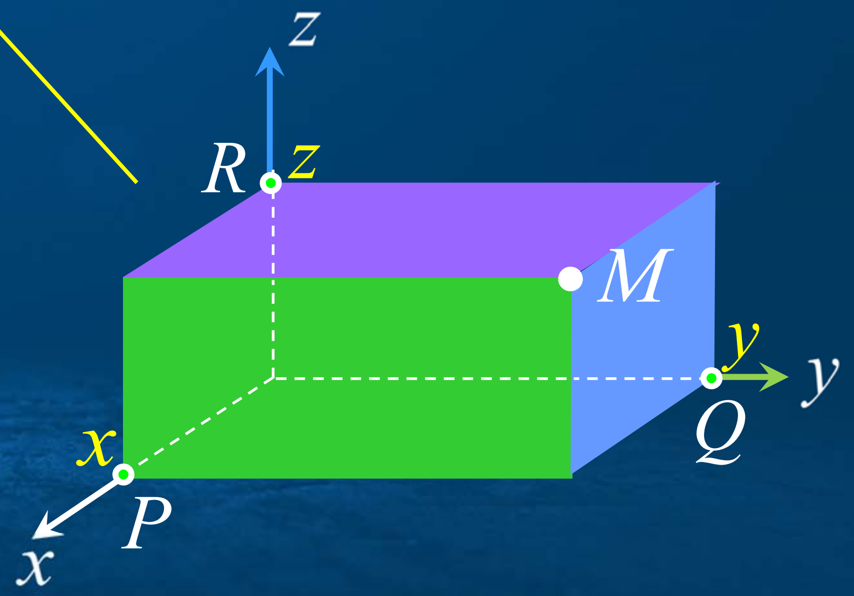
  八个卦限



空间中点的坐标

点 M $\longleftrightarrow$ 有序三元数组(x, y, z)

空间直角坐标系



有序三元数组(x, y, z)称为**点 M 的坐标.**

x-横坐标；y-纵坐标；z-竖坐标

点 M 也记为：$M(x, y, z)$.

所有有序三元数组的集合记作:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

空间中点的坐标

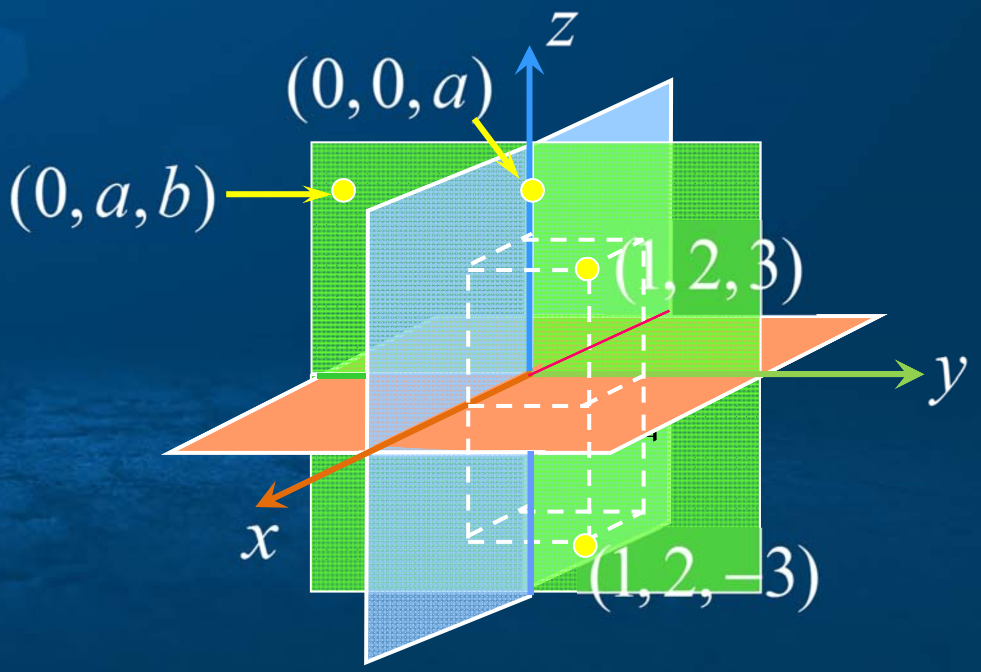
根据空间中点的坐标表示，能容易地确定该点空间位置的某些特征．

例如：

坐标轴：x 轴 $\leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

y 轴 $\leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

z 轴 $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



空间中点的坐标

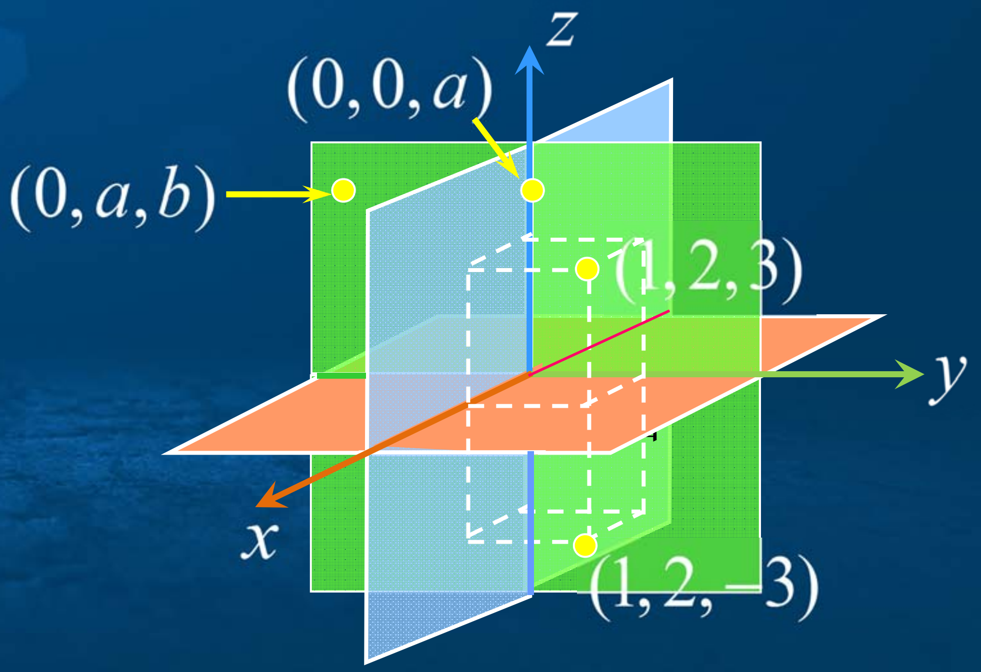
根据空间中点的坐标表示，能容易地确定该点空间位置的某些特征．

例如：

坐标面：xOy 面 $\leftrightarrow z=0$

yOz 面 $\leftrightarrow x=0$

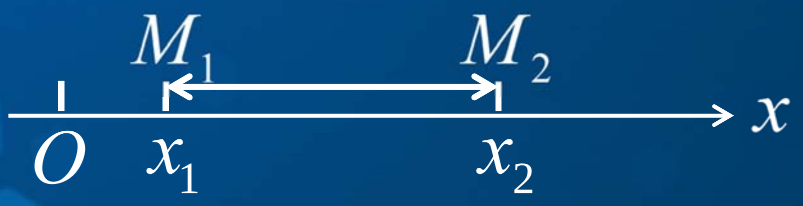
zOx 面 $\leftrightarrow y=0$



空间两点的距离

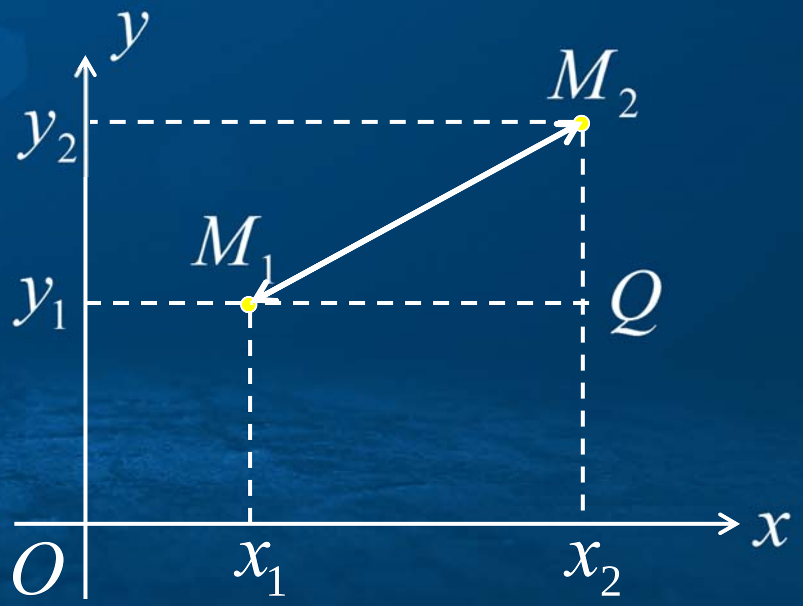
数轴上两点的距离：

$$\left|M_1M_2\right| = \left|x_2 - x_1\right|$$



平面上两点的距离：

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



空间两点的距离

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$

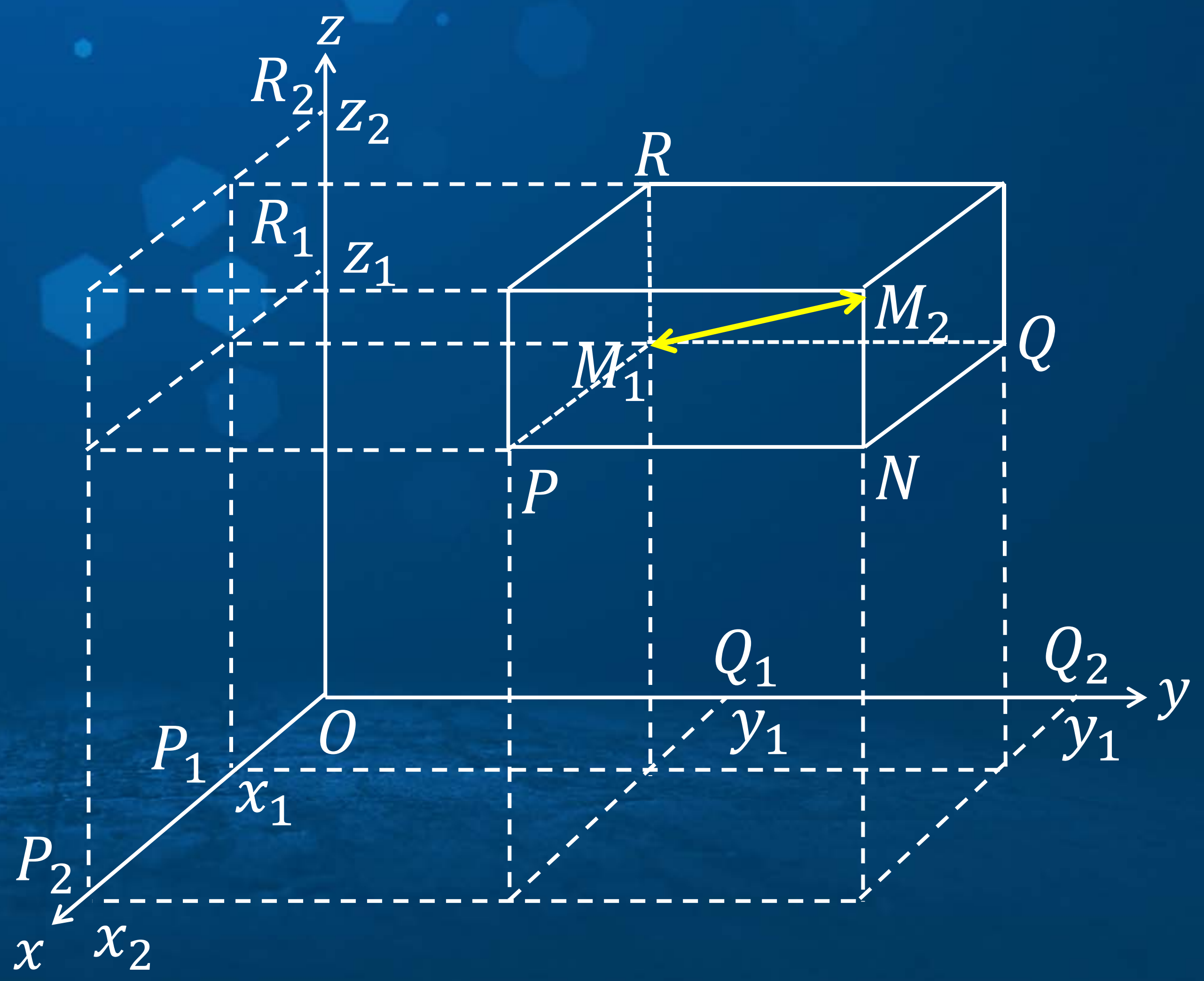
$$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$$

$$\boxed{|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2}$$

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$$

$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$$

$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$$



空间两点的距离

空间中的两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、 $M_2(x_2,y_2,z_2)$间距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点$M(x,y,z)$到坐标原点$O(0,0,0)$的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例1 在z轴上求与两点$A(3,1,-4)$和$B(5,3,2)$等距离的点．

【例1解】设z轴上点为$M(0,0,z)$，由题意$|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2+(-4-z)^2}$$
$$=\sqrt{(5-0)^2+(3-0)^2+(2-z)^2}$$

解得$z=1$，所求的点为$M(0,0,1)$．

例2 求点$A(a,b,c)$到yOz面以及x轴的距离.

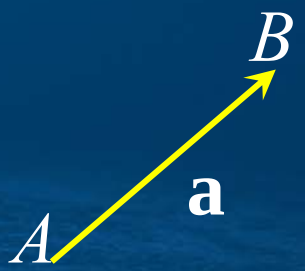
向量的基本概念

向量: 既有大小, 又有方向的量.

数量: 只有大小, 没有方向的量.

向量表示法: 用一条带箭头的线段（即有向线段）表示

例如: $\overrightarrow{AB}$　A称为起点，B称为终点

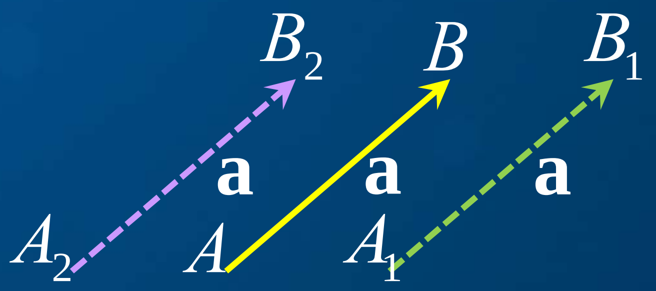


还可以粗体字母或带箭头的字母表示向量

例如 **v**、**a**、**F**　或 $\vec{v}$、$\vec{a}$、$\vec{F}$

向量的基本概念

对于自由向量，如果向量**a**与**b**大小相等且方向相同，则称**a**与**b**相等，记作 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.



向量的模: 向量的大小. 表示方法：$|\overrightarrow{AB}|$或$|\mathbf{a}|$或$|\vec{a}|$.

单位向量: 模为1的向量.

零向量: 模为零的向量，记作$\mathbf{0}$或$\vec{0}$.

零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的 .

向量的基本概念

向量平行. 两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行. 如果向量**a**和**b**平行, 记作**a**//**b** .

零向量与任何向量平行

负向量. 与**a**的模相同，但方向相反的向量， 记作−**a**.

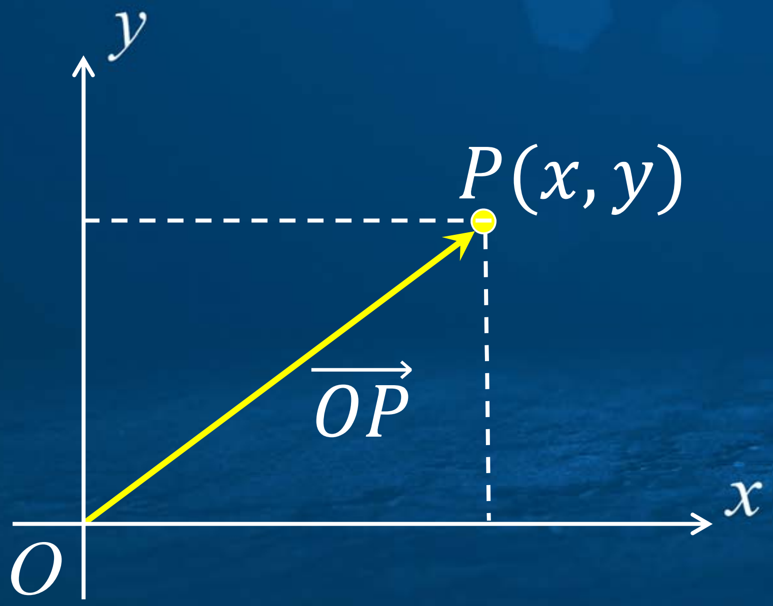
向量共线. 即两向量平行.

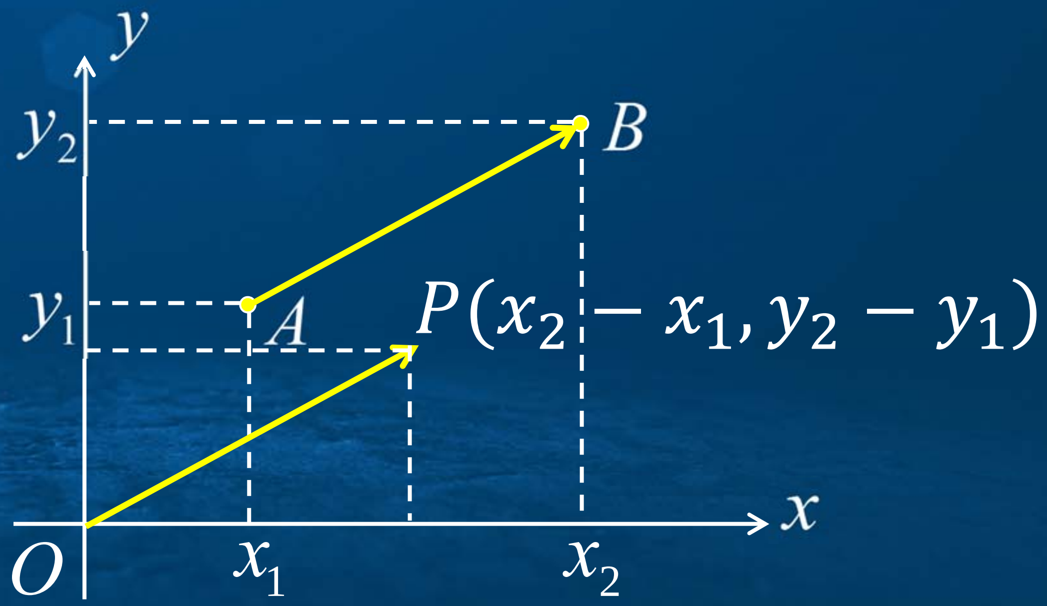
向量共面. 向量经平移可移到同一平面上.

空间向量的坐标表示

平面上点$P(x,y)$ ⇄ 向量$\overrightarrow{OP}$（称为**径向量**）

对平面上两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，有向线段$\overrightarrow{AB}$的坐标表示





$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

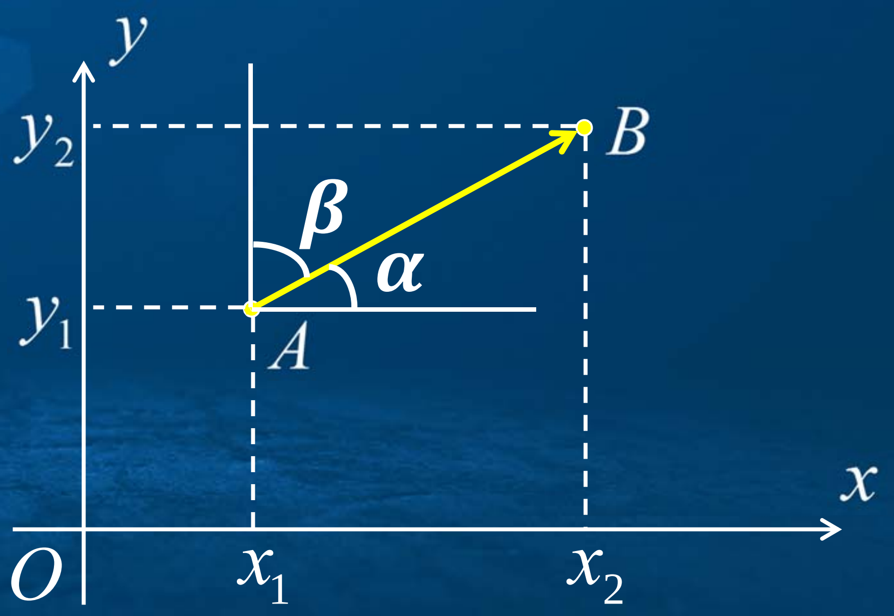
空间向量的坐标表示

向量$\overrightarrow{AB}$与x轴和y轴正向的夹角α和β称为**方向角**

$$0 \le \alpha,\ \beta \le \pi$$

方向余弦
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{|AB|} \\ \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{|AB|} \end{cases}$$

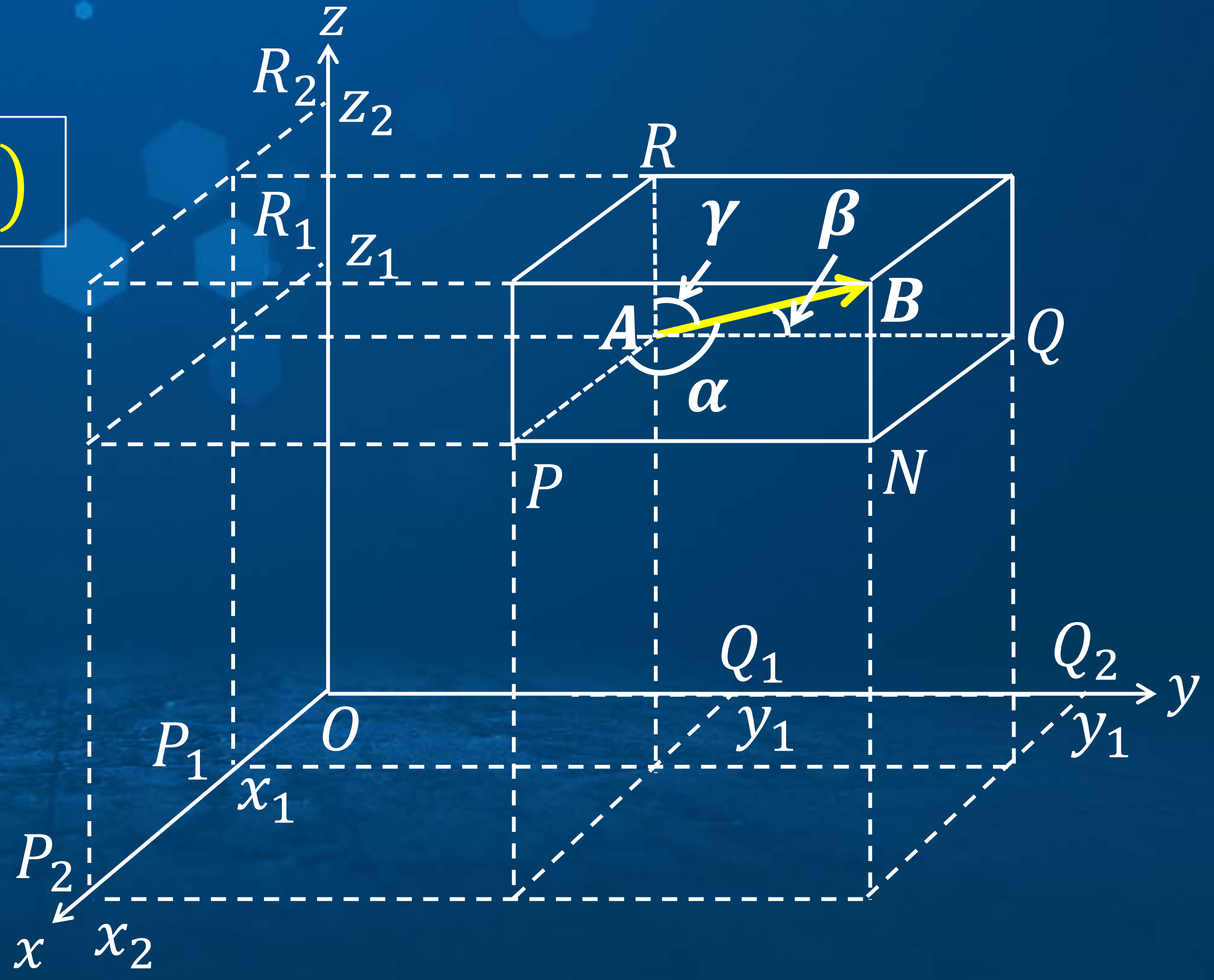
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$



空间向量的坐标表示

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)}$$

其中 x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1 分别称为$\overrightarrow{AB}$的x，y，z 轴方向的分量.



方向角：$0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi$

方向余弦：$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$

空间向量的坐标表示

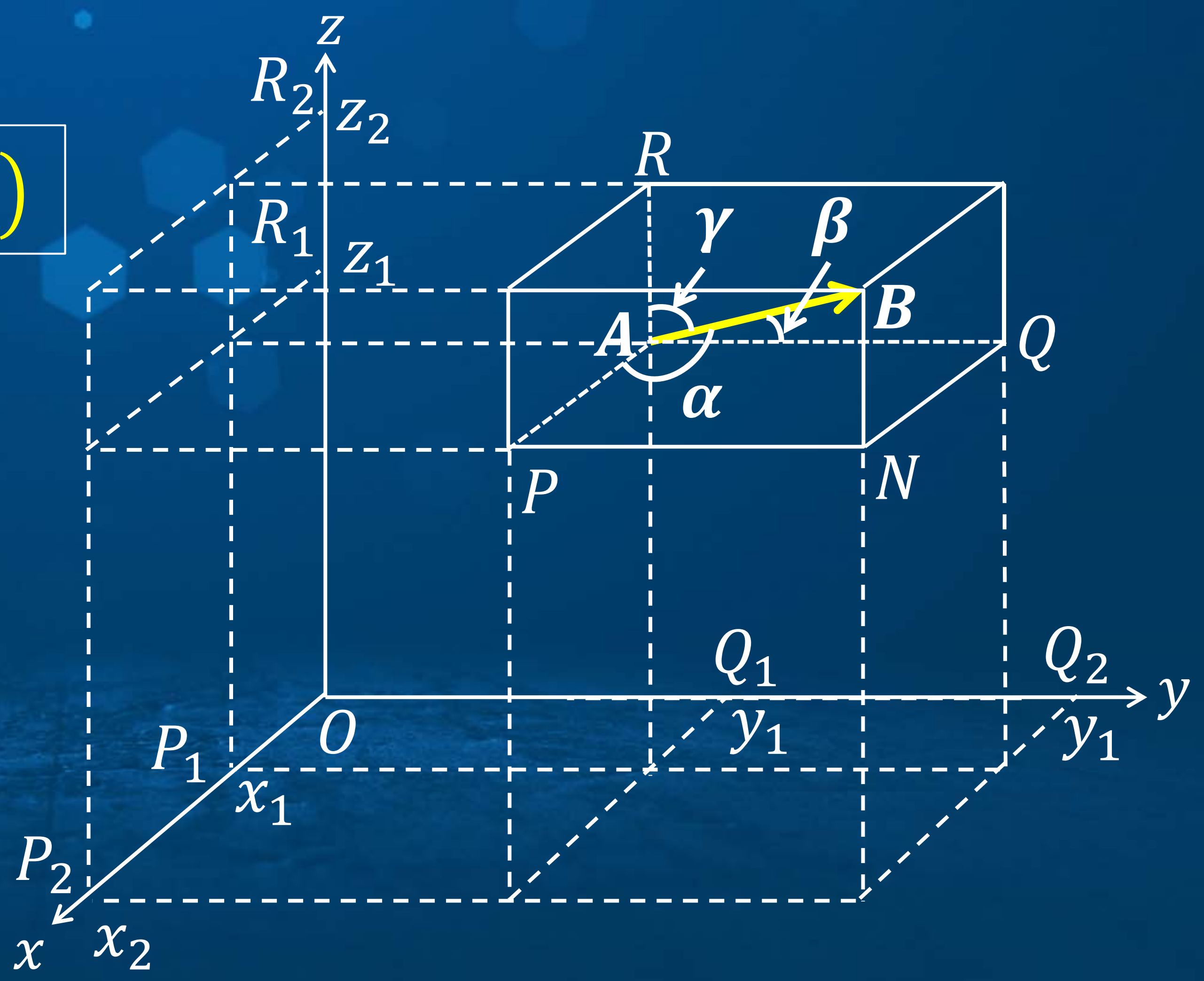
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$



空间向量的坐标表示

空间中的向量也由它的分量唯一确定.因此，一个空间的向量通常表示为

$$\mathrm{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

并称它为一个三维向量，且有

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \qquad \cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

例3 求从原点到点$M(1,1,1)$的向量$\overrightarrow{OM}$的模，方向余弦与方向角.

【例3解】 $\overrightarrow{OM}=(1-0,1-0,1-0)=(1,1,1)$

模 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

方向角 $\alpha=\beta=\gamma=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0.955317$

在空间直角坐标系下，任意向量**a**可用向径$\overrightarrow{OM}$表示.

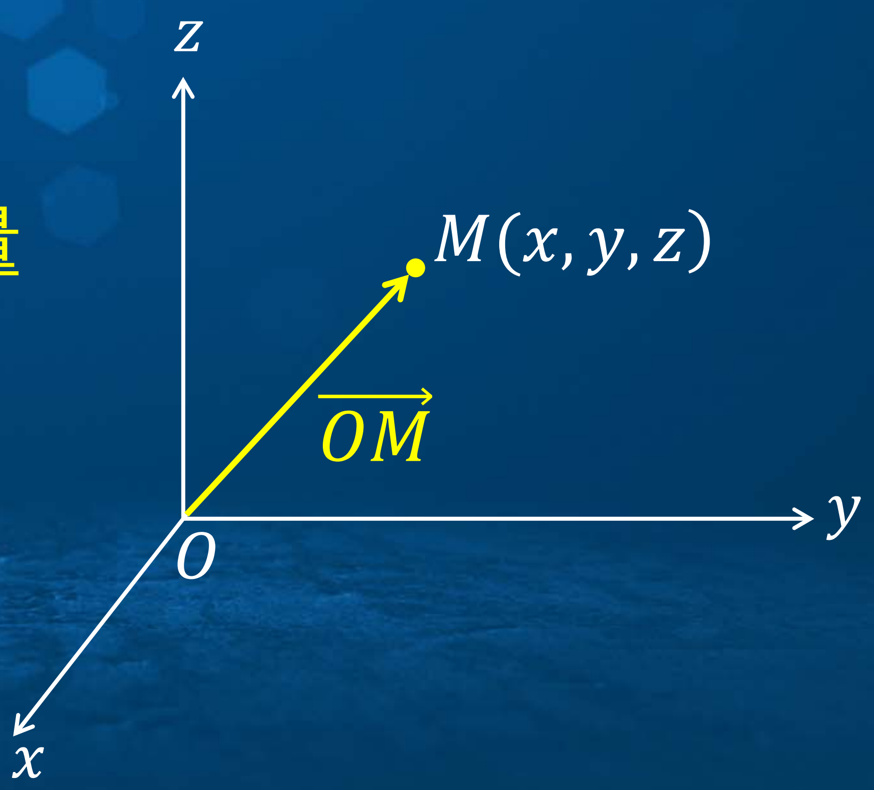
向径$\overrightarrow{OM}$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 点$M(x,y,z)$

所有三维向量的集合叫做三维向量空间. 记作$\mathbb{R}^3$.

三元数组的集合$\mathbb{R}^3$

$\updownarrow$ 一一对应

三维向量空间



n 维向量

一般地，一个 n 元数组的集合记作$\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$中任意两点 $M_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$M_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的距离定义为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

点M_1到M_2的向量定义为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(y_1-x_1,y_2-x_2,\cdots,y_n-x_n)$$

称它为一个n维向量，它的模由以上距离公式确定.

n 维向量

方向余弦为

$$\cos\alpha_i = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}}, i=1,2,\cdots,n.$$

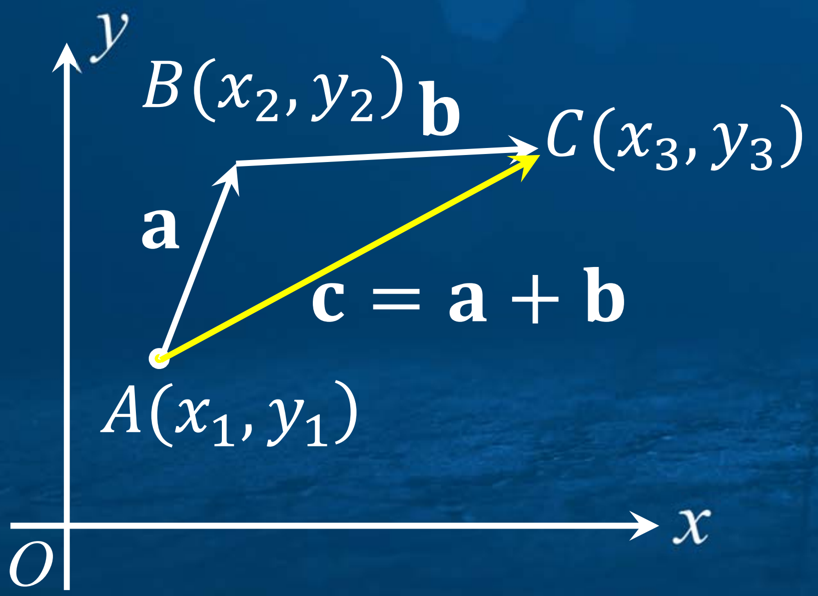
所有n维向量的集合称为n 维向量空间. 记作$\mathbb{R}^n$.

n维向量空间的一个向量说成是$\mathbb{R}^n$中的一个点.

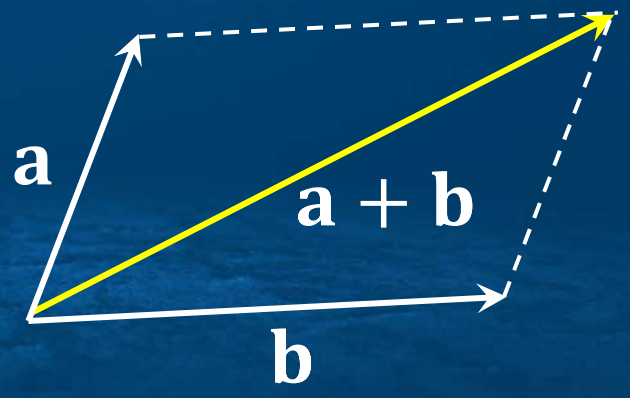
设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 当且仅当它们对应分量相等，即$a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$时，有$\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

向量的加法运算

定义1 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2)$是二维向量空间$\mathbb{R}^2$中两个向量，定义它们的加法为$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$．



向量加法的三角形法则



平行四边形法则

向量的加法运算

定义2 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$是三维向量空间$\mathbb{R}^3$中两个向量，定义它们的加法为

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3).$$

一般地，设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是 n 维向量空间$\mathbb{R}^n$中两个向量，定义它们的加法为

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

向量的加法运算

运算规律：

(1) 交换律: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

(2) 结合律: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

三角不等式: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

向量的数乘运算

定义3 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2)$是二维向量空间$\mathbb{R}^2$中一个向量，λ是实数，定义λ与$\mathbf{a}$的数乘为

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2)\ .$$

设$\mathbf{a}$是非零向量，λ是非零实数，记 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$，则有

$$|\mathbf{b}|=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2}=|\lambda|\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}=|\lambda||\mathbf{a}|.$$

向量的数乘运算

向量$\mathbf{a}$与数λ相乘具有如下性质：

模：　$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$

方向：　$\lambda > 0$时，$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$同向，$\lambda < 0$时，$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$反向；

$\lambda = 0$时，$\lambda\mathbf{a}$为零向量，方向任意.

运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ ；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

向量的数乘运算

定义4 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$是三维向量空间$\mathbb{R}^3$中的一个向量，λ是实数，定义λ与$\mathbf{a}$的数乘为

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)\ .$$

一般地，设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是$n$维向量空间$\mathbb{R}^n$中的一个向量，$\lambda$是实数，定义$\lambda$与$\mathbf{a}$的数乘为

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n).$$

向量的数乘运算

利用向量的加法与数乘运算，容易得出量向量的减法

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}.$$

设$\mathbf{e}_\mathbf{a}$表示非零向量$\mathbf{a}$同向的单位向量，则有

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{e}_\mathbf{a} \text{ 或 } \mathbf{e}_\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

称$\mathbf{e}_\mathbf{a}$为$\mathbf{a}$的单位方向向量.

对于三维向量$\mathbf{a}$, 有

$$\mathbf{e}_\mathbf{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\text{，}\quad \mathbf{a}=|\mathbf{a}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

向量的数乘运算

向量平行等价说法：

(1) $\mathbf{a}//\mathbf{b}$ ；

(2) 存在实数λ, 使$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$;

(3) $\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$对应分量成比例.

例如, $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ $\Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

(4) 存在不全为零的常数k_1,k_2 , 使得$k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

例4 设$\mathbf{a}=(2,1)$，$\mathbf{b}=(-3,1)$，求$\mathbf{c}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ 的单位向量.

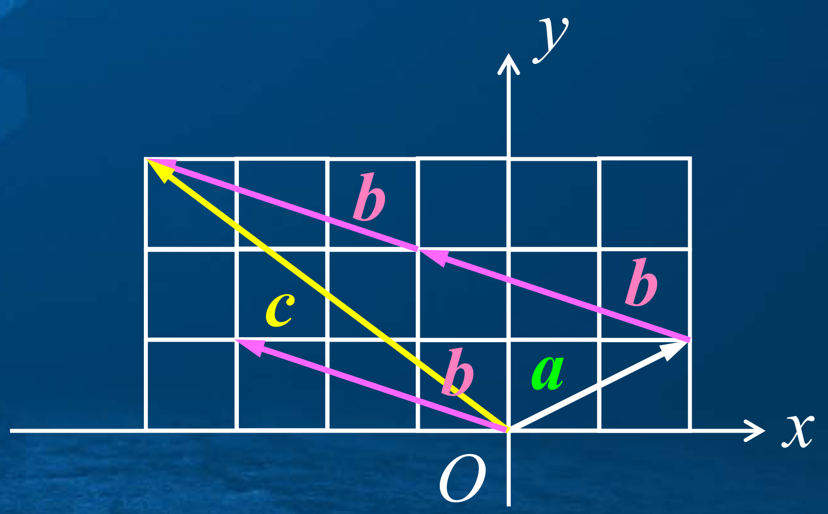
【例4解】$\mathbf{c}=\mathbf{a}+2\,\mathbf{b}$

$$=(2,1)+2\,(-3,1)$$

$$=(-4,3)$$

$$|\mathbf{c}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$$

$$\mathbf{c}^0=\frac{1}{5}(-4,3)=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$$



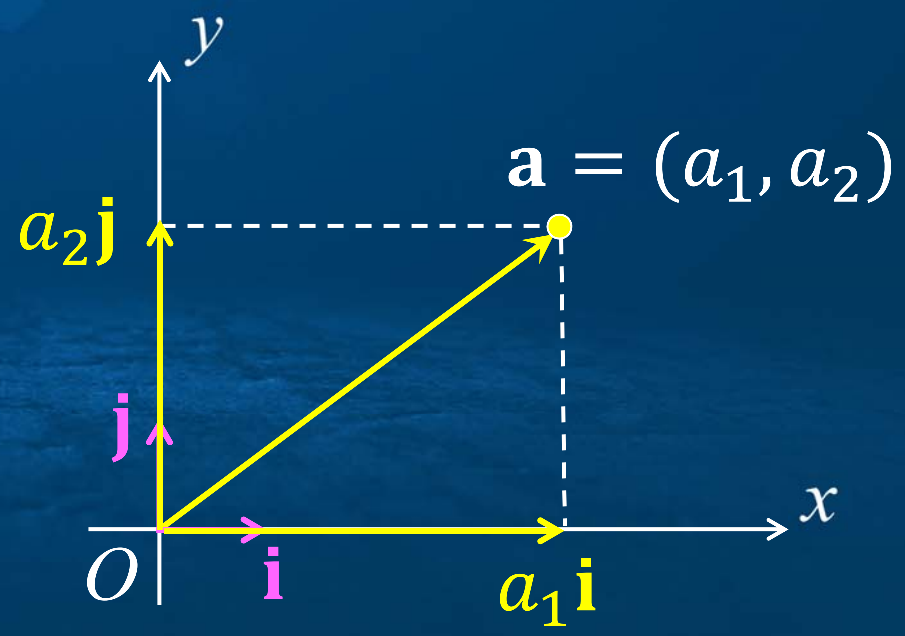
向量的基表示

在二维向量空间，记 $\mathbf{i}=(1,0),\mathbf{j}=(0,1)$, 则$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$分别是与$x$轴、$y$ 轴同向的单位方向向量，称之为二维空间中的基向量.

向量$\mathbf{a}=(a_1,a_2)$可表示为

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}.$$

上式称为二维向量a的基表示或基向量分解式.



向量的基表示

在三维向量空间，记 $\mathbf{i}=(1,0,0)$，$\mathbf{j}=(0,1,0)$，$\mathbf{k}=(0,0,1)$，则 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$是与$x$轴、 y轴、 z轴同向的单位方向向量，称之为三维向量空间中的基向量.

向量$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$可表示为

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}.$$

上式称为三维向量$\mathbf{a}$的基表示或基向量分解式.

一般地，n 维向量有类似的基表达式.

例5 设$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$为已知两点，而在AB直线上的点M分有向线段$\overrightarrow{AB}$为两个有向线段$\overrightarrow{AM}$和$\overrightarrow{MB}$，并 使

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}\ (\lambda\neq-1\text{为常数}),$$

求分点M的坐标．

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$