

《高等数学》全程教学视频课

第42讲 积分的分部积分法

问题1：试计算 $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \stackrel{x=a\tan x}{=} \int a \sec \cdot a \sec^2 x dx = a^2 \int \sec^3 x dx = ?$$

问题2：试计算 $\int e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} 2 \int t e^t dt = ?$

$$\int x \sin x dx = ?$$

$$\int x \ln x dx = ?$$

$$\int e^x \sin x dx = ?$$



不定积分的分部积分法

定积分的分部积分法



$$\int \underline{u(x) v'(x)} dx = u(x)v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

不定积分的分部积分公式

解决目标： $\int f(x) dx$

要 求：(1) $v(x)$ 容易求得;
(2) $\int u'(x) v(x) dx$ 比 $\int u(x) v'(x) dx$ 好求.

$$\int u dv = uv - \int v du$$



例1 求下列不定积分：

$$(1) \int x e^x dx;$$

$$(2) \int x \sin 2x dx.$$

例2 求下列不定积分：

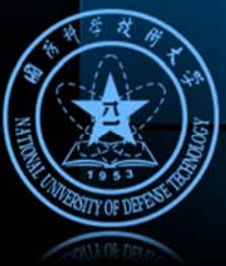
$$(1) \int e^{\sqrt{2x-1}} dx.$$

$$(2) \int \arcsin x dx.$$

例3 求下列不定积分：

$$(1) \int e^x \sin x dx;$$

$$(2) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$



例4 求下列不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(a+x^2)^n}$, 其中 n 为正整数且 $a > 0$.

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$



定理2 设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

定积分分部积分公式

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

例5 求下列不定积分：

$$(1) \int_{-1}^0 x e^{-x} dx;$$

$$(2) \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx.$$



例6 设 n 为正整数，计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot 1, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

华莱士公式

其中 $n!!$ 读作 n 的双阶乘. 当 n 为奇数时，它是从1到 n 的所有奇数相乘；当 n 是偶数时，它是从2到 n 的所有偶数相乘.

$$5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1, \quad 6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

