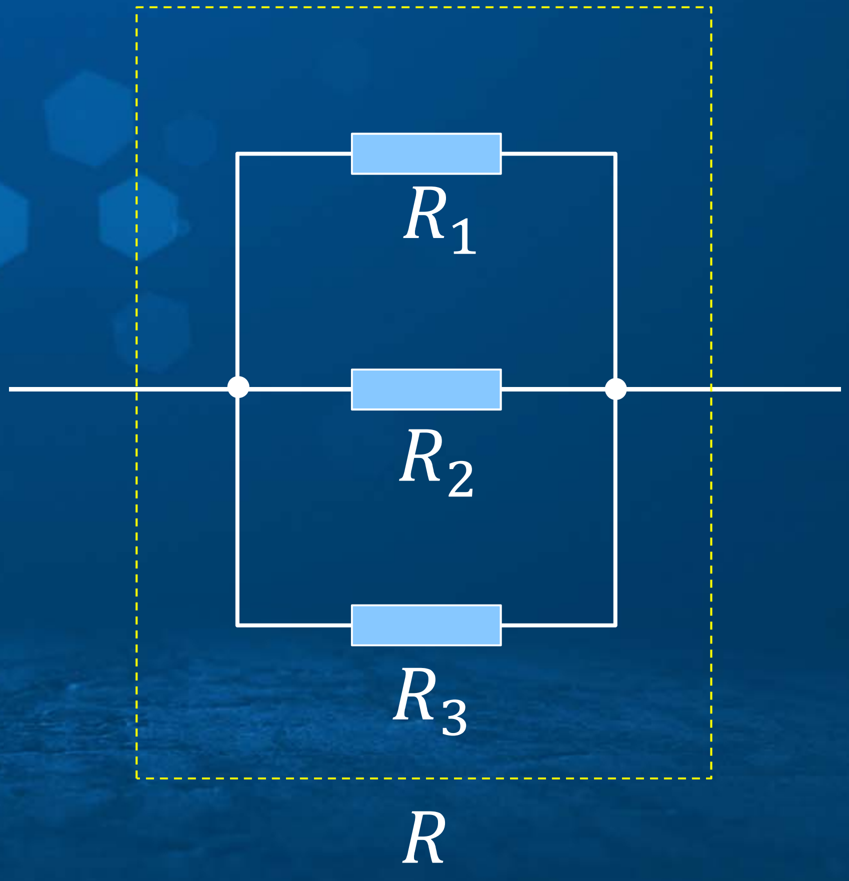
第66讲 函数的可微性与近似计算

并联电阻问题

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

$$R_1>R_2>R_3$$

问：在三个电阻中，哪个电阻的变化对R的影响最大？



- 函数可微的必要条件与充分条件
- 微分法则
- 全微分在近似计算中的应用

定理1 设函数$z=f(x,y)$在点 (x,y)处可微，则函数在该点处必连续．

如果函数$z=f(x,y)$在点 (x,y)可微，那么该函数在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，且函数$z=f(x,y)$在点 (x,y)的全微分为

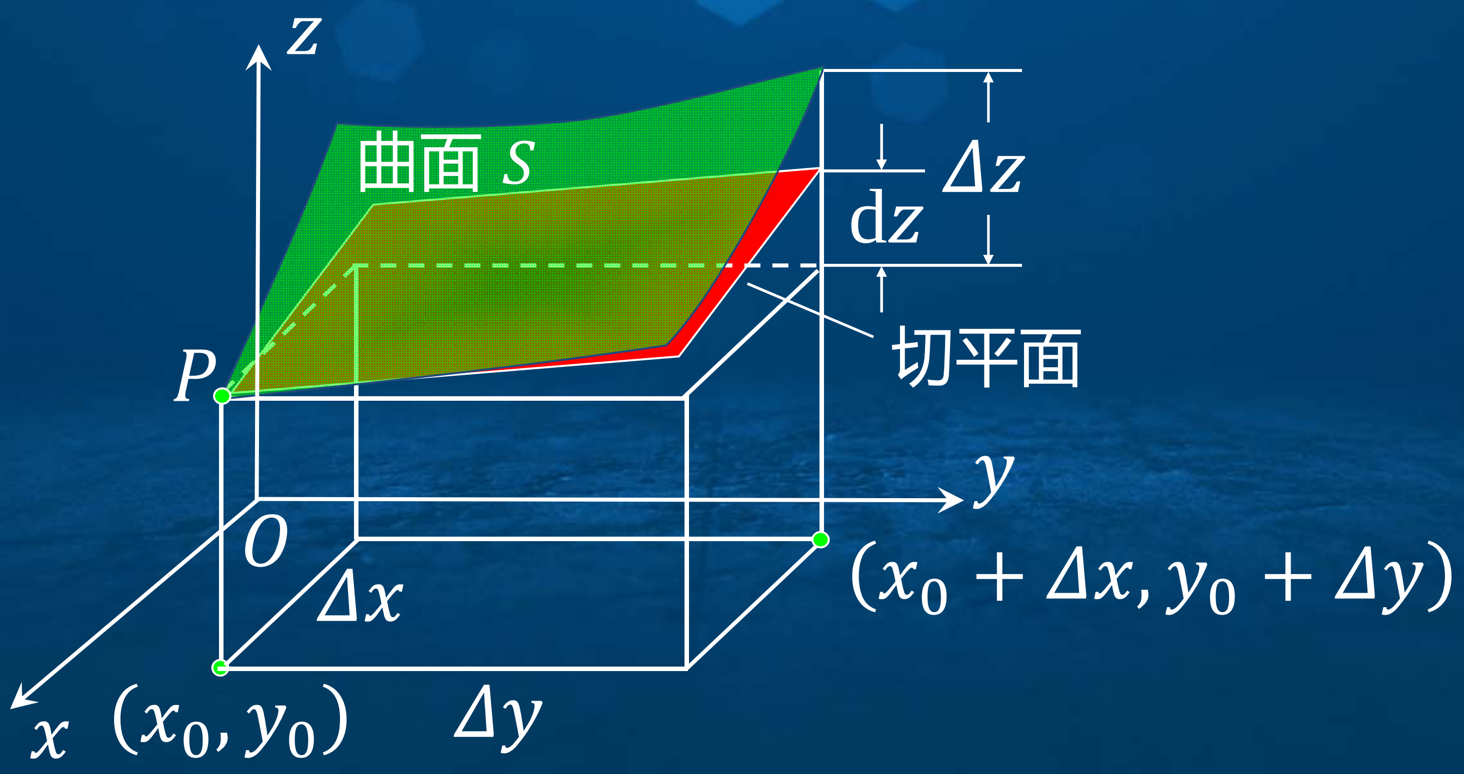
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

例如： 函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & ,(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$在$(0,0)$处偏导数存在但不可微.

全微分的几何意义 —— 切平面上对应竖坐标的增量

曲面 $S: z = f(x,y)$，切平面方程为

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$



定理2(可微的充分条件) 如果函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续，那么函数在该点可微．

例如，函数$z=e^x\sin(x+y)$是初等函数，其对应的两个偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\sin(x+y)+\cos(x+y)),\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos(x+y)$$

也都是初等函数，它们在xOy平面内连续．因此，依据定理知，函数在全平面内可微．

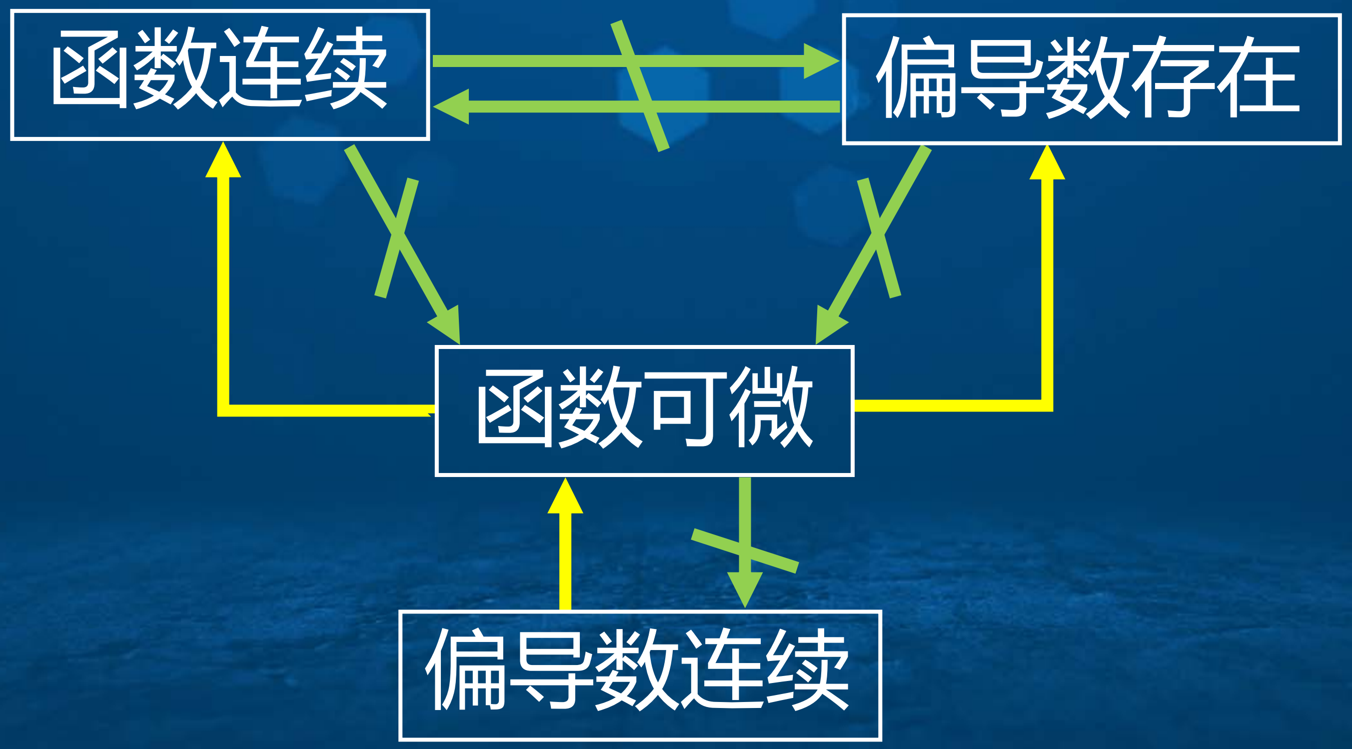
例1 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在，且$f(x,y)$在点 (0,0) 可微.

- 可以验证：函数$f(x,y)$的偏导数在点 (0,0) 不连续.

$$\boxed{\text{偏导数连续} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{函数可微}}$$

多元函数连续、可偏导、可微的关系



习惯上，将自变量x,y的增量$\Delta x,\Delta y$分别记作$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$，并分别称为自变量x,y的微分．这样，$z=f(x,y)$的全微分可写作

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

二元函数的微分符合叠加原理

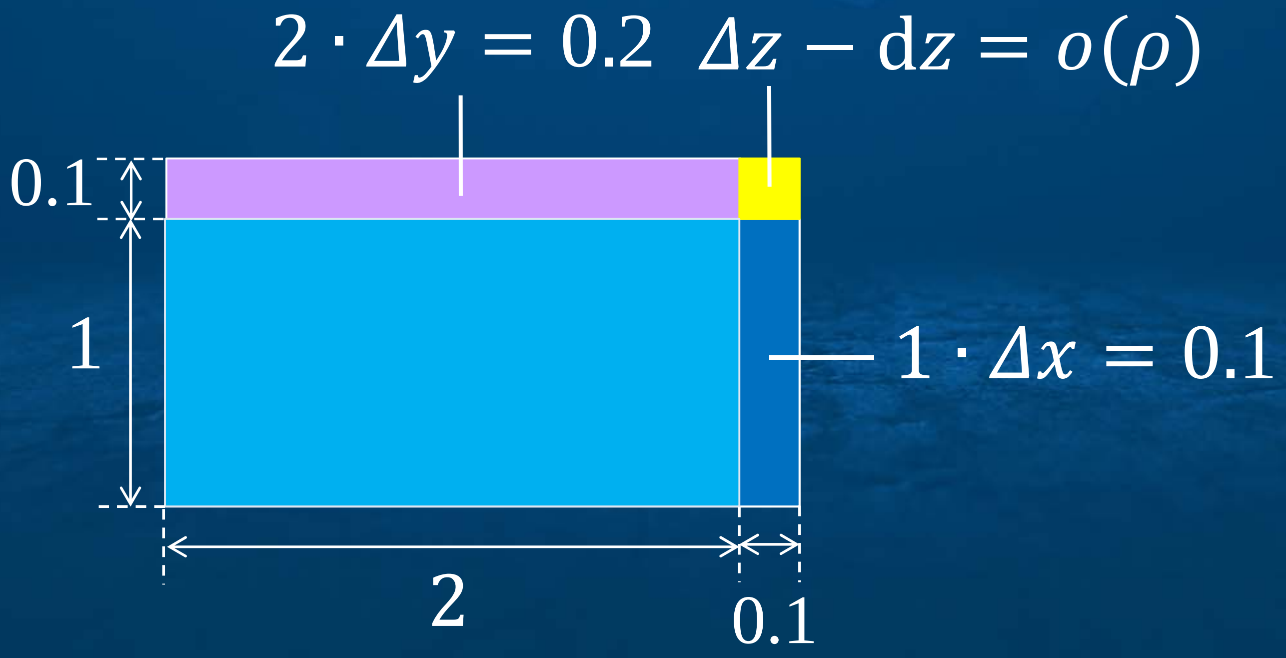
如果三元函数$u=f(x,y,z)$可微，那么它的全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

例2 求函数$z = x^2 + 3xy$的全微分．

例3 求函数$u = e^{x-y} + \sin z$在点(2,1,0)处的全微分．

例4 求函数$z = xy$在点(2,1)处，当$\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1$时的全微分．



定理3 设$u(x,y),v(x,y)$为可微的二元函数，λ为实数，则有

(1) $\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$；

(2) $\mathrm{d}(\lambda u)=\lambda\mathrm{d}u$；

(3) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$；

(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0).$

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y}_{\mathrm{d}z} + o(\rho) \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

可知当$|\Delta x|$及$|\Delta y|$较小时,有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y$$

即

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

误差（绝对误差） $\delta = |\Delta z| \approx |\mathrm{d}z|$

例5 计算$(1.02)^{2.05}$的近似值．

【例5解】令$f(x,y)=x^y$, 在点(1,2) 处有

$$f'_x(1,2)=yx^{y-1}|_{x=1,\,y=2}=2$$

$$f'_y(1,2)=x^y\ln x|_{x=1,\,y=2}=0$$

$$(1.02)^{2.05}=f(1.02,2.05)$$

$$\approx f(1,2)+f'_x(1,2)\,0.02+f'_y(1,2)0.05$$

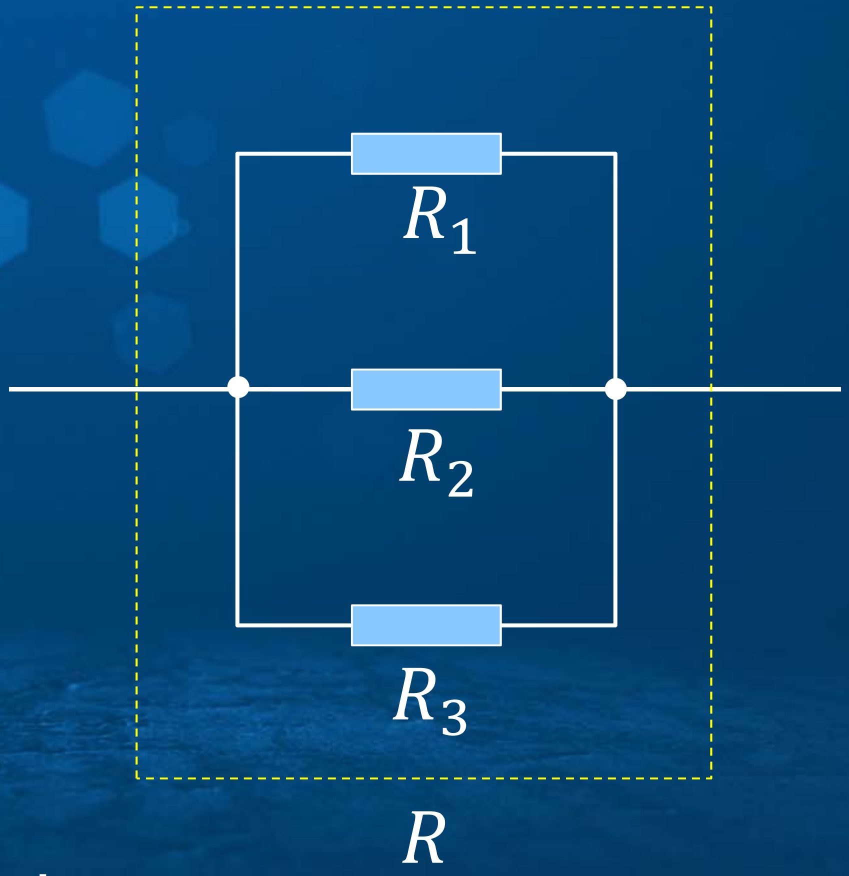
$$=1+2\cdot 0.02+0\cdot 0.05=1.04$$

$$1.02^{2.05}=1.0414306428236\cdots$$

并联电阻问题

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

$$R_1>R_2>R_3$$



问题：在三个电阻中，哪个电阻的变化对R的影响最大？

结论：R_3的变化对R的影响最大.