《高等数学》全程教学视频课

第42讲 积分的分部积分法

问题1：试计算 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\tan x}{=} \int a\sec \cdot a\sec^2 x\,\mathrm{d}x = a^2 \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = ?$$

问题2：试计算 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\sqrt{x}=t}{=} 2\int t\,e^t\,\mathrm{d}t = ?$

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int x\ln x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = ?$$

- 不定积分的分部积分法
- 定积分的分部积分法

第42讲 积分的分部积分法——主要内容

$$\int u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

不定积分的分部积分公式

解决目标：$\int f(x)\mathrm{d}x$

要　　求：(1) $v(x)$容易求得;

(2) $\int u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x$比$\int u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x$好求.

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

例1 求下列不定积分：

(1) $\int xe^{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int x\sin 2x\mathrm{d}x$.

例2 求下列不定积分：

(1) $\int e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$. (2) $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

例3 求下列不定积分：

(1) $\int e^{x}\sin x\,\mathrm{d}x$； (2) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

例4 求下列不定积分 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^n}$，其中$n$为正整数且$a > 0.$

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \ (n \geq 1)$$

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^2} I_1$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C$$

定理2 设函数$u(x)$与$v(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x\,.$$

定积分分部积分公式

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u\,.$$

例5 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x}\mathrm{d}x\,;$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$

例6 设n为正整数，计算$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 1, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

华莱士公式

其中$n!!$读作n的双阶乘. 当n为奇数时，它是从1到n的所有奇数相乘；当n是偶数时，它是从2到n的所有偶数相乘.

$$5!!=5\cdot 3\cdot 1,\ \ 6!!=6\cdot 4\cdot 2.$$