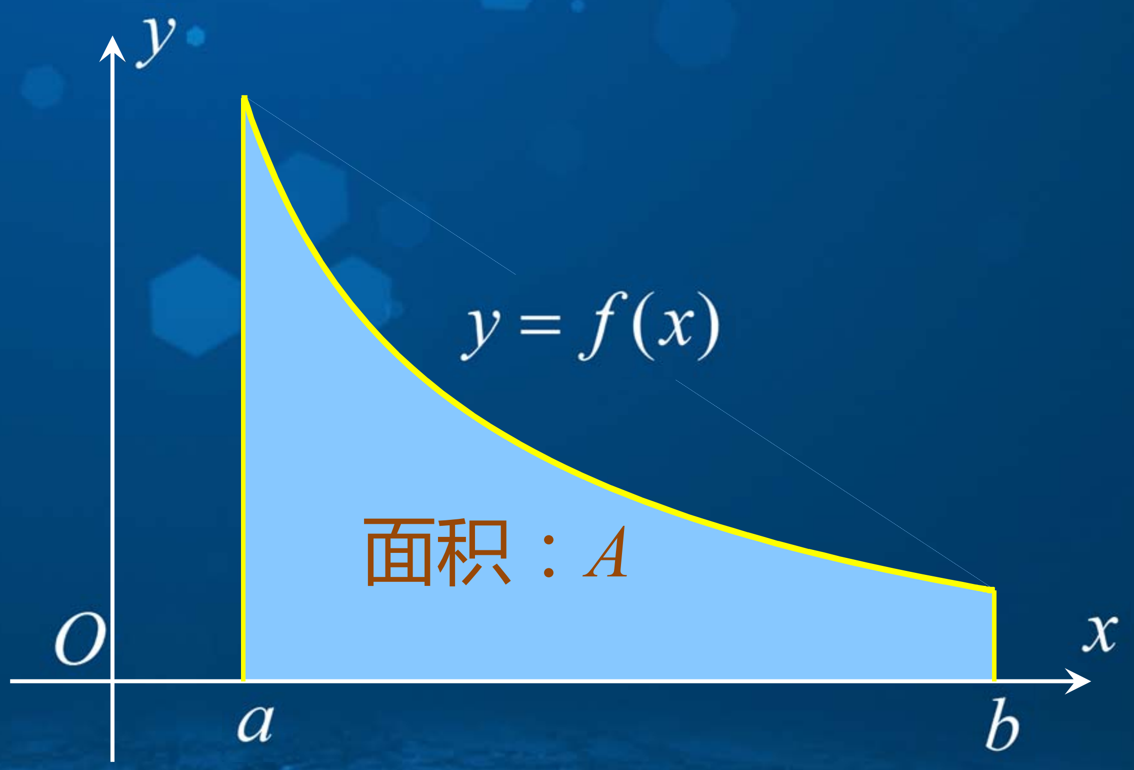
第46讲 反常积分

$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$



定(常义)积分 $\begin{cases} \text{积分区间有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ 反常积分

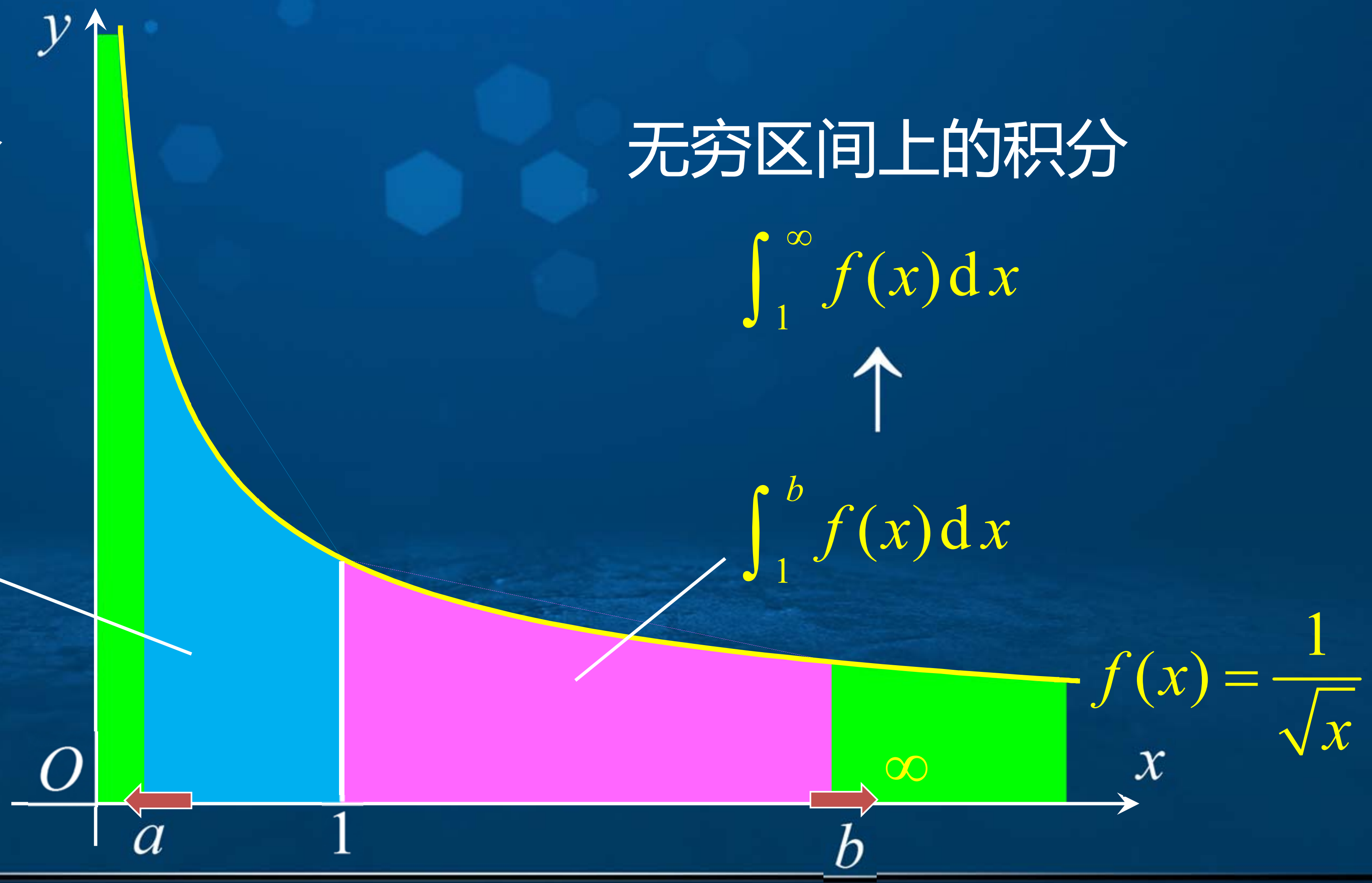
问题：如何计算无界平面图形的面积？

无界函数的积分

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\uparrow$$

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$



无穷区间上的积分

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\uparrow$$

$$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

无穷区间的反常积分

无界函数的反常积分

反常积分的敛散性

定义1 (1) 设$f(x) \in C[a,+\infty)$，$t \geq a$，若$\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$存在，则称无穷区间反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

如果上述极限不存在, 就称无穷区间反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 设 $f(x) \in C(-\infty, b]$，类似定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

(3) 设$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称无穷区间反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

若上式右端至少有一个反常积分为发散，则称无穷区间反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注意：当反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，其值与 a 的选取无关.

上述三种形式的反常积分统称为无穷区间反常积分.

定理1（1）设$f(x)\in C[a,+\infty)$，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，若极限 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$存在，则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a);$$

（2）设$f(x)\in C(-\infty,b]$, $F(x)$是$f(x)$的一个原函数, 若极限 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$存在, 则反常积分 $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty).$$

例1 证明反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当$p>1$时收敛, 当$p\le 1$时发散.

- 通常称无穷区间反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$为 p –积分.
- 称无穷级数 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 为 p –级数.

重要方法：设 $p>0$为常数, 则有

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}<1+\int_1^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$$

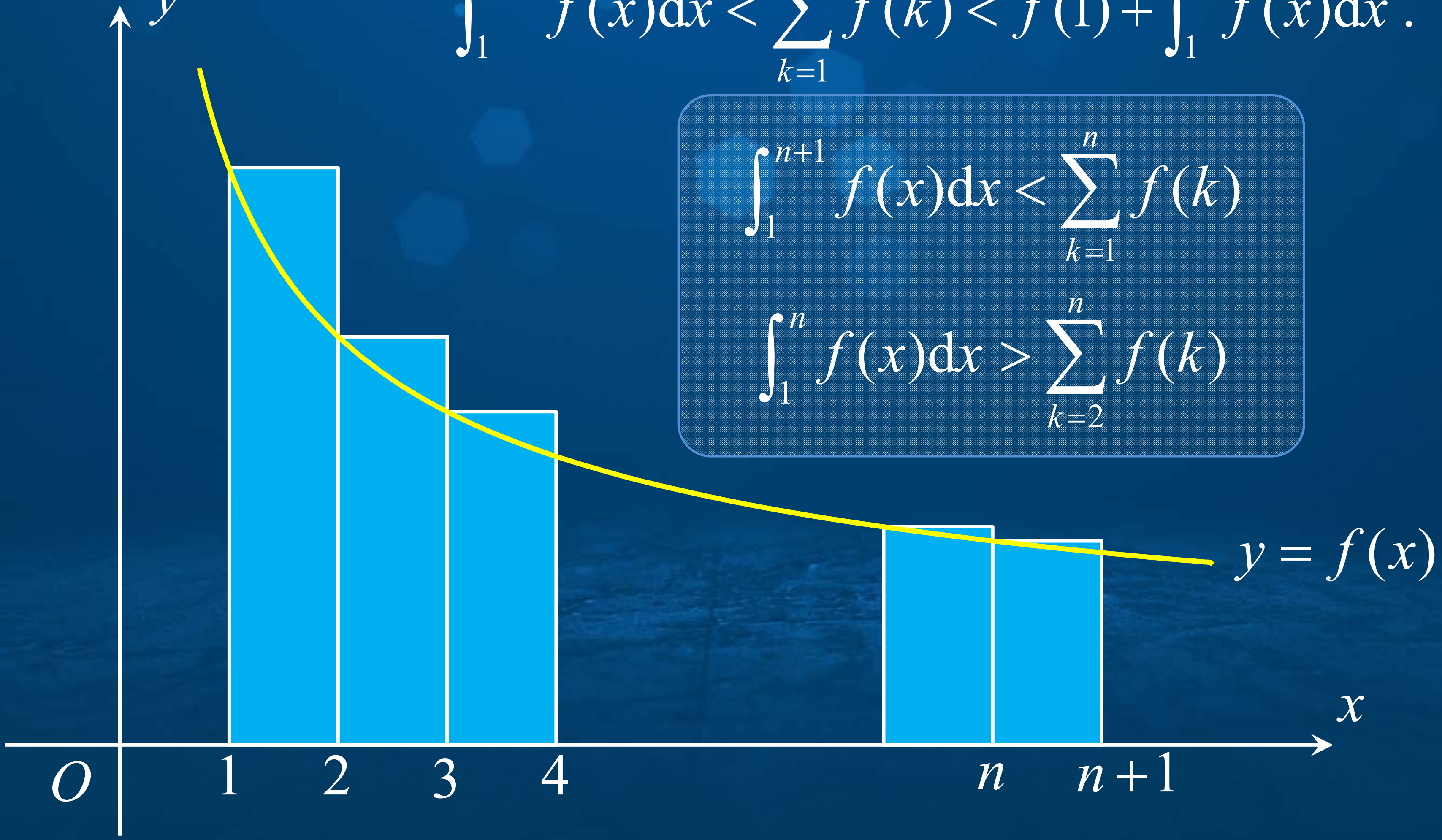
$$\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}f(k)<f(1)+\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

将函数 $\frac{1}{x^p}$ 推广到在$[1,+\infty)$上单调下降、非负连续函数$f(x)$

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x > \sum_{k=2}^{n} f(k)$$



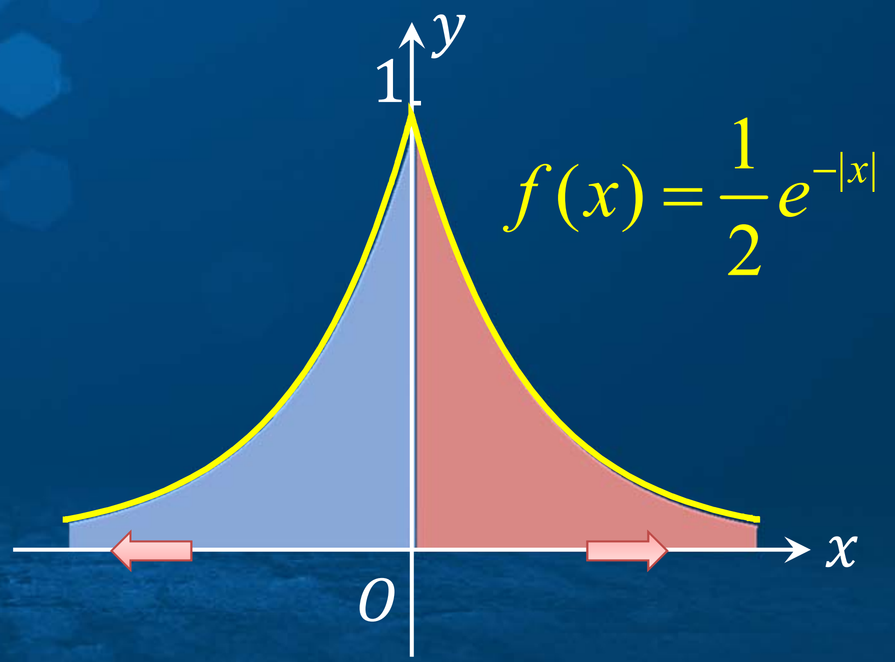
例2 设$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$, 计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

注意: 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零”的性质.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x\cancel{=}0$$



定义2 (1) 设 $f(x) \in C(a,b]$，$x=a$ 为$f(x)$的无穷间断点，$a<t<b$，若极限 $\lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称**无界函数反常积分** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果上述极限不存在, 就称**无界函数反常积分** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**.

(2) 若 $f(x) \in C[a,b)$，$x=b$为$f(x)$的无穷间断点, 则类似定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上除点$c(a<c<b)$外连续，$x=c$ 为的无穷间断点，若无界函数反常积分 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，则称无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若上式右端两个反常积分至少有一个发散, 则称无界函数反常积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

- 无穷间断点又称为瑕点, 无界函数的反常积分也称为瑕积分.

定理2 (1) 设$f(x)$在$(a,b]$上连续，$x=a$是$f(x)$的瑕点, $F(x)$为$f(x)$在$(a,b]$上的一个原函数，若$F(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$存在，则反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a+0).$$

(2) 设$f(x)$在$[a,b)$上连续，$x=b$是$f(x)$的瑕点, $F(x)$为$f(x)$在$[a,b)$上的一个原函数，若$F(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$存在，则反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a).$$

例3 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

例4 证明反常积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $0<p<1$时收敛，当 $p\geq 1$时发散 .

典型反常积分收敛性	$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$	$p=1$	$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$
无穷区间反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$	发散	发散	收敛
无界函数反常积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$	收敛	发散	发散

无界函数的积分

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

↑

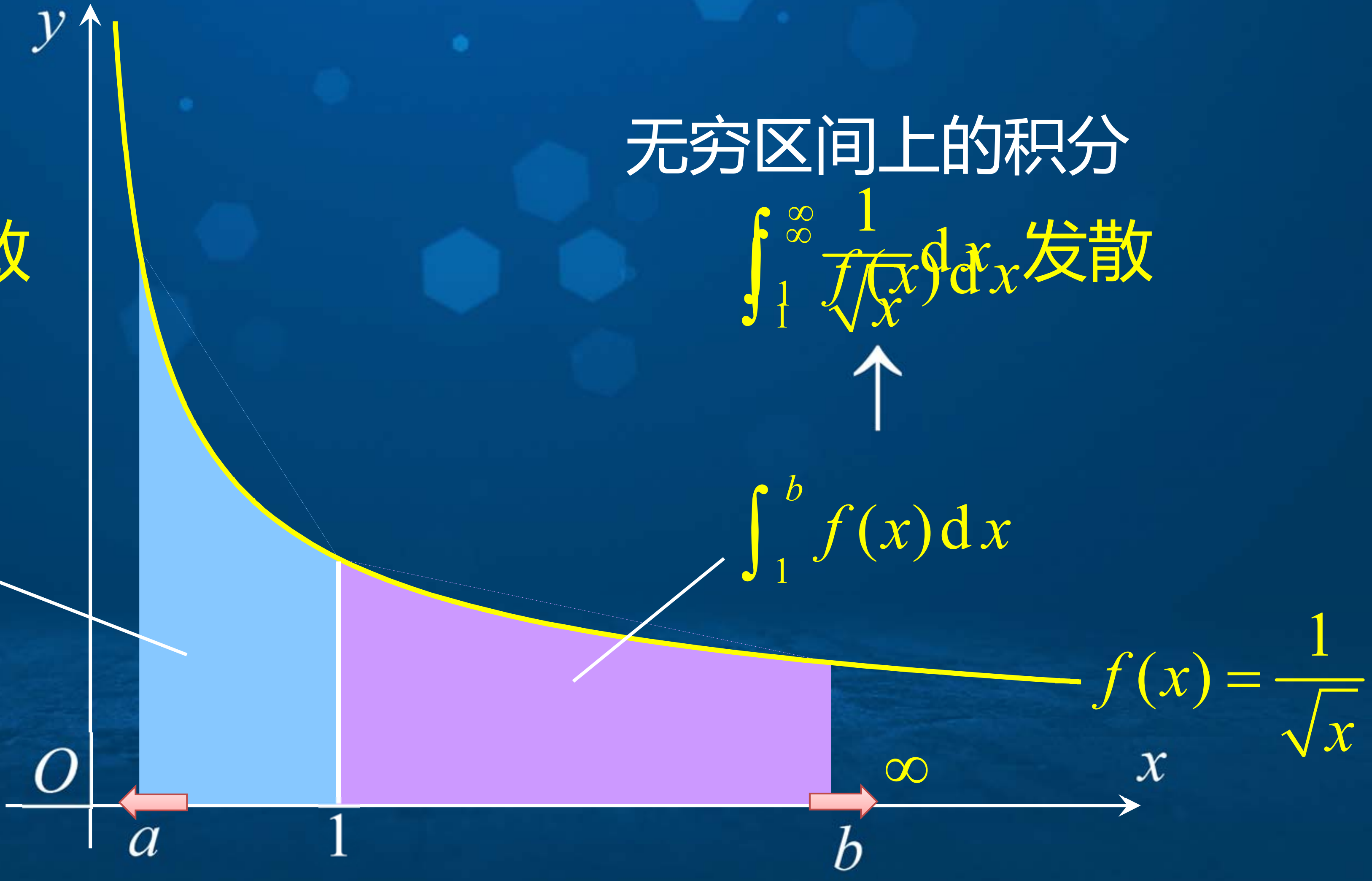
$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

无穷区间上的积分

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 发散

↑

$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$



定理3 (比较判别法) 设$f(x), g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且

$$0 \le f(x) \le g(x),\ x \in [a,+\infty),$$

则 (1) 当$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

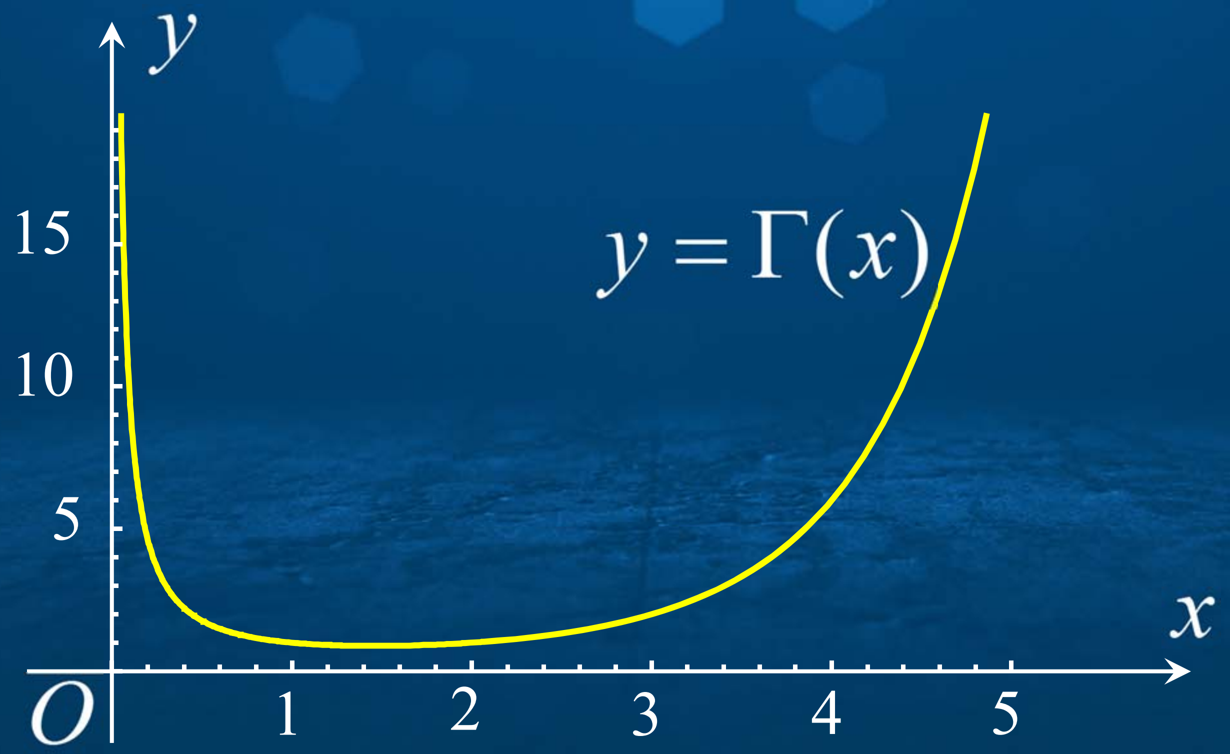
(2) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散.

注1: 应用中常取$g(x)=\dfrac{1}{x^p}$ 或 $g(x)=e^{-x}$ 作为比较的标准.

注2: 对无界函数的反常积分也有相应的比较判别法.

例6 证明积分$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha > 0$ 时收敛.

- 称 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$ 为Γ函数.



- 称 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x\ \ (\alpha>0)$ 为Γ函数.
- 递推公式 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\ \ (\alpha>0)$.

Γ 函数特殊值 $\Gamma(1)=1$ ，$\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n!\ \ (n=1,2,\ldots)$

利用Γ函数可以推广阶乘

$$\alpha!\overset{\text{def.}}{=}\Gamma(\alpha+1)\,(\alpha>0)$$