

《高等数学》全程教学视频课

# 第43讲 积分计算综合

问题1 计算积分  $\int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x}{3 + x^2} dx$  .

$$\int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x}{3 + x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3 + x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{3 + x^2} dx$$

奇函数

问题2 计算积分  $\int_0^{2013\pi} \frac{|\sin x|}{1 + \cos^2 x} dx$  .

周期函数

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\arctan \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$



几类积分计算总结

奇偶函数的定积分

周期函数的定积分



## ● 三角函数积分

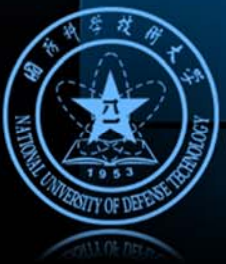
凑微分法 + 利用三角恒等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$





### 例1 计算下列不定积分

$$(1) \int \sin^3 x \, dx ;$$

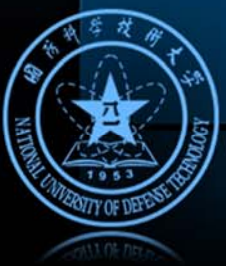
$$(2) \int \tan^5 x \sec^7 x \, dx ;$$

$$(3) \int \tan^3 x \, dx ;$$

$$(4) \int \sin x \cos 2x \, dx ;$$

$$(5) \int \csc x \, dx ;$$

$$(6) \int \sec^3 x \, dx .$$



## ● 根式函数积分

根式表达式	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$	代换表达式
	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$	
	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$	

**例2** 计算下列不定积分  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx$  .



- 有理函数积分

例3 计算下列不定积分

$$(1) \int \frac{x^2 + x}{x - 1} dx ;$$

$$(2) \int \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx .$$

例4 计算不定积分  $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$  .



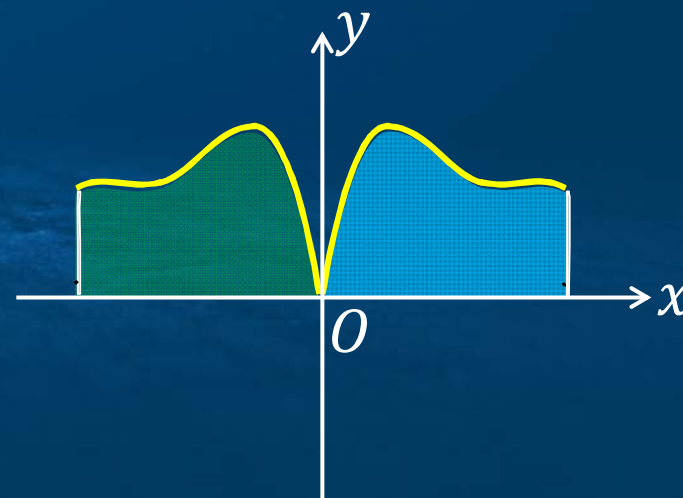
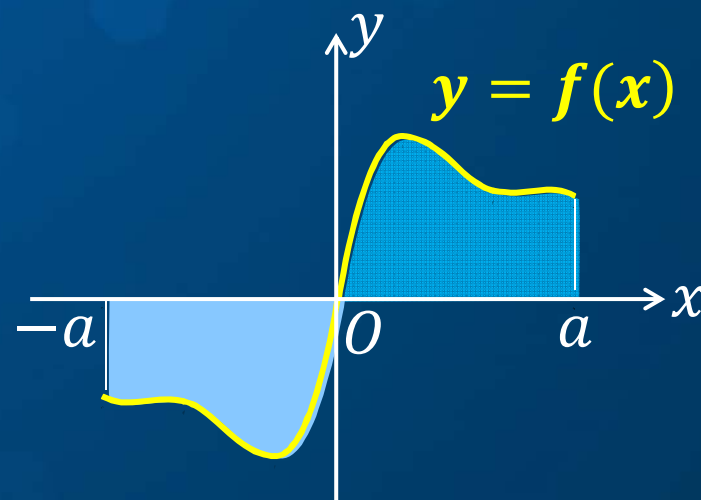
**定理1** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

(1) 如果 $f(x)$ 为奇函数, 那么

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0;$$

(2) 如果 $f(x)$ 为偶函数, 那么

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$





## 定积分中奇偶函数的处理方法:

(1) **直接法**：如果被积函数就是奇函数或者偶函数，直接按照奇偶函数的定积分公式计算，但要注意**积分区间的对称性**;

**例5** 计算定积分：

$$(1) \int_{-1}^1 \sin^9 x \, dx; \quad (2) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$



## 定积分中奇偶函数的处理方法:

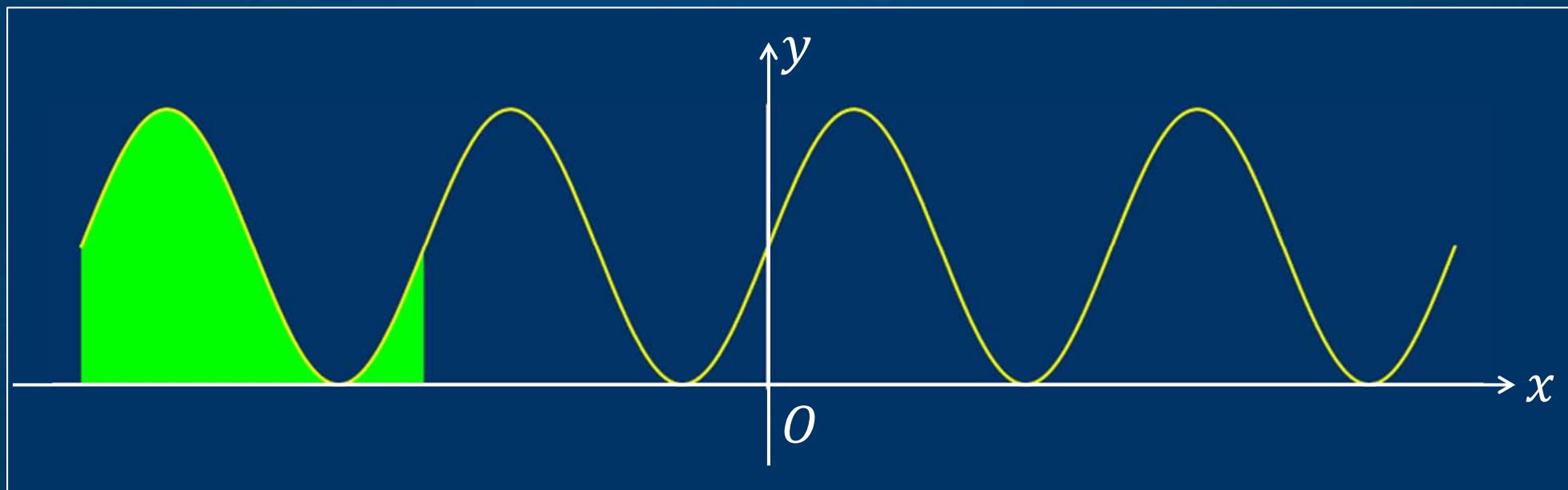
(2) **拆项法**: 将被积函数拆成奇偶函数和的形式, 在对称区间上对具有奇偶性质的被积函数使用奇偶函数的定积分公式计算;

**例6** 计算定积分  $\int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x}{3 + x^2} dx$ .



**定理2** 设 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数，则对任意实数 $a$ ，有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$$



例7 计算定积分  $\int_{-2}^3 (x - [x]) dx$ .

例8 设  $f(x)$  是以  $\pi$  为周期的周期函数, 证明

$$\int_0^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx = \int_0^{\pi} (2x + \pi) f(x) dx.$$

