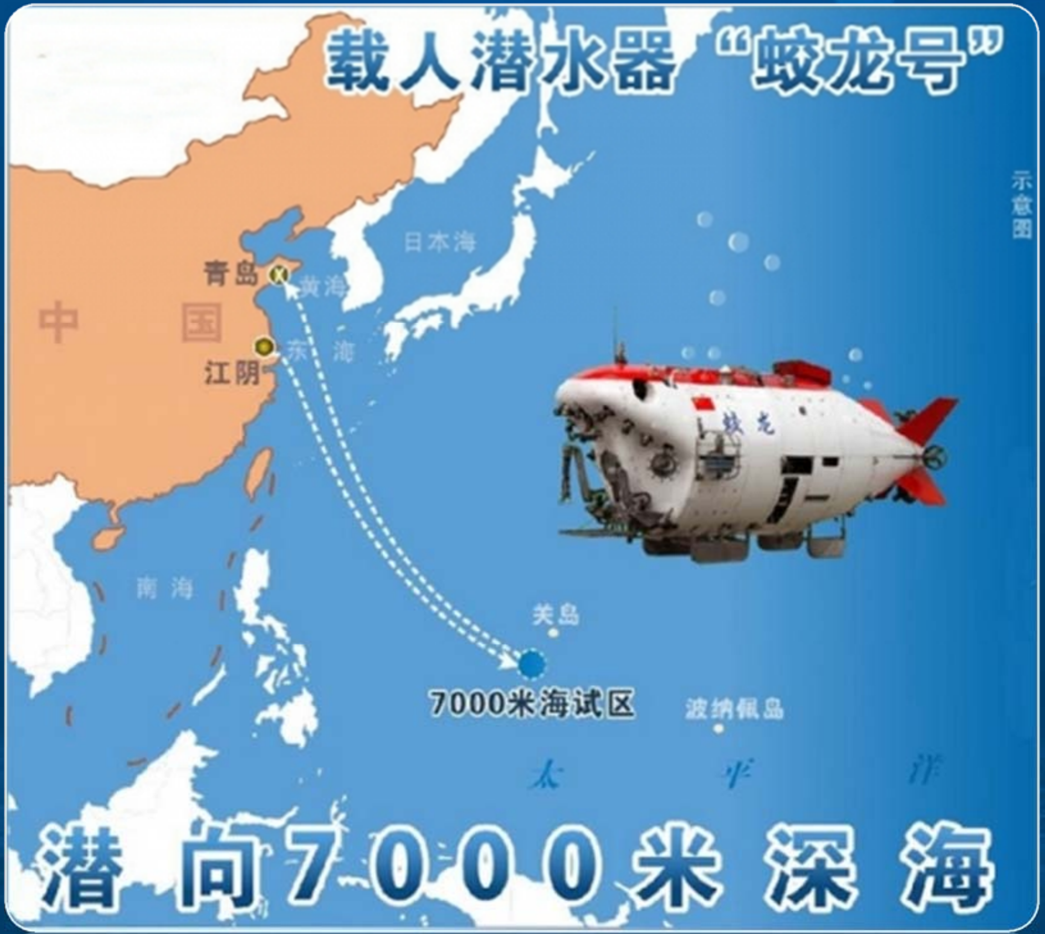
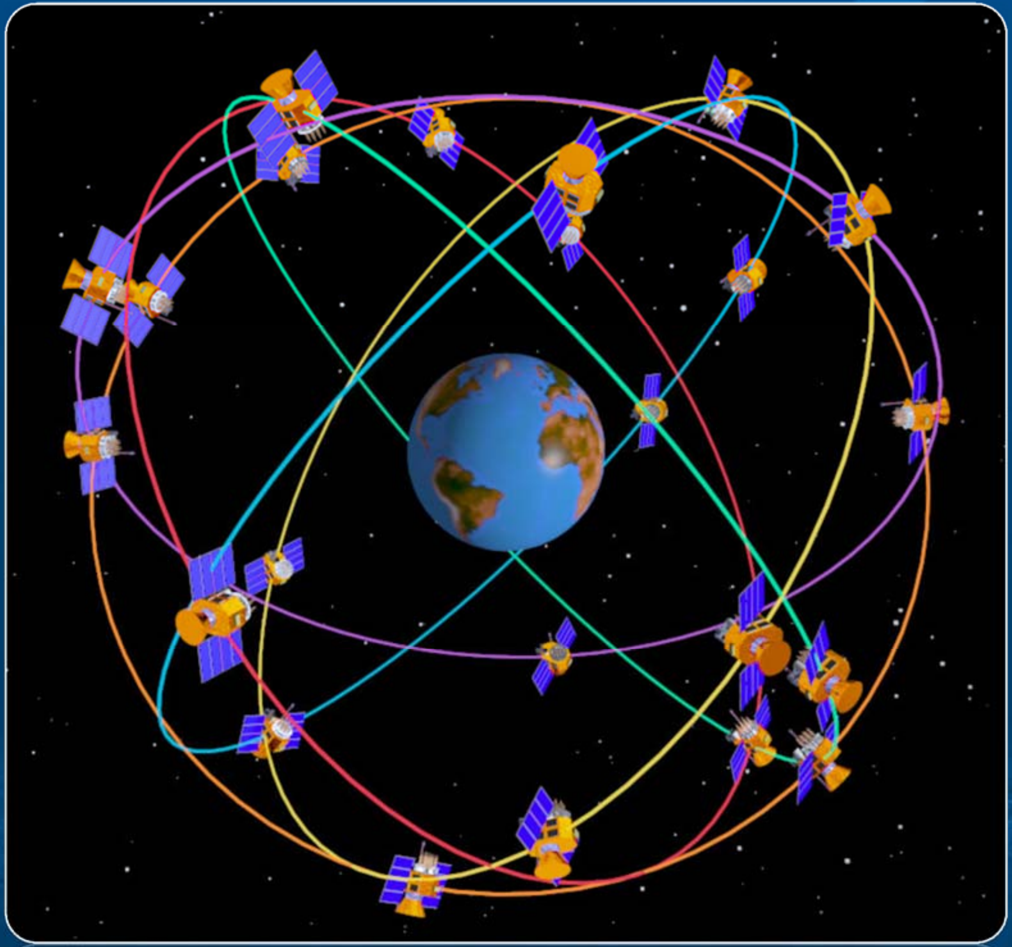
第45讲 定积分的物理应用

运载火箭


载人潜水器"蛟龙号"
示意图
日本海
青岛
黄海
中国
江阴
东海
南海
关岛
7000米海试区
波纳佩岛
太平洋
潜向7000米深海

潜水器



北斗卫星

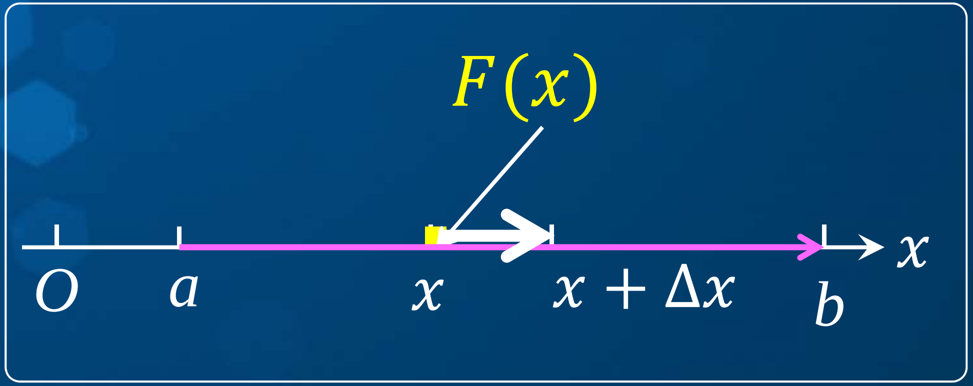
功

静压力

引力

变力沿直线做功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从$x = a$移动到$x = b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功.

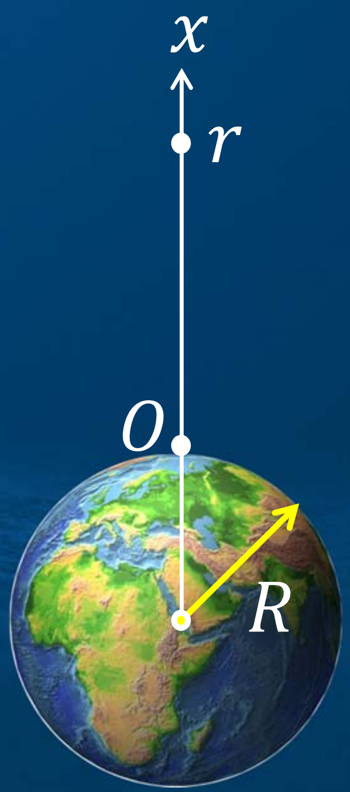


$$\mathbf{d}W = F(x)\,\mathbf{d}x$$

因此变力$F(x)$在区间$[a, b]$上所做的功为

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathbf{d}x$$

例1 从地面垂直向上发射质量为 m 的火箭，当火箭距离地面 r 时，求克服地球引力做的功. 如果火箭要脱离地球引力范围，火箭应具备多大的初速度?



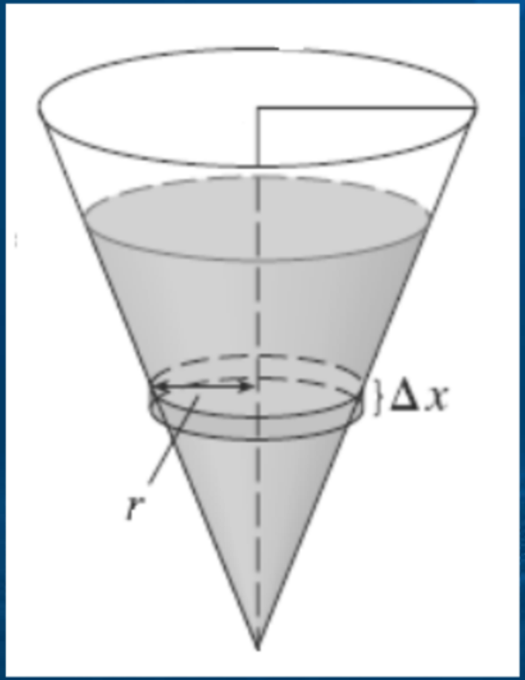
质点距离地球表面高度为 x 时对地球引力为 $$F=\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

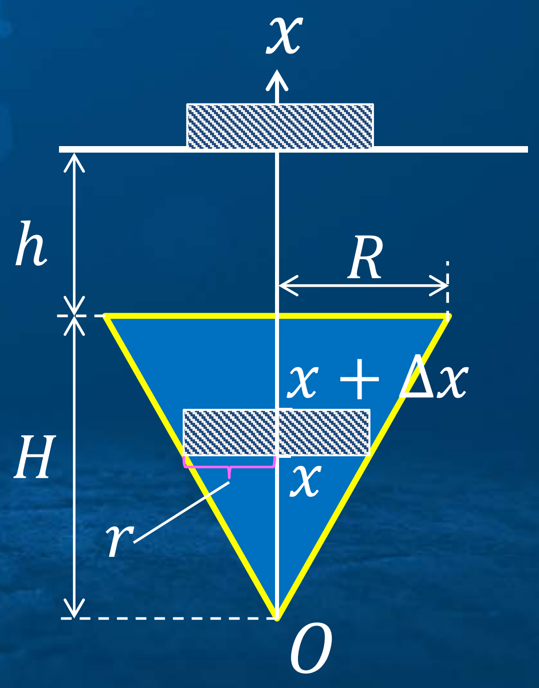
$$mgR=\frac{1}{2}mv_0^2 \longrightarrow v_0=\sqrt{2gR}$$

$$v_0=\sqrt{2\times 9.8\times 10^{-3}\times 6400}=11.2\ (km/s)$$

第二宇宙速度

例2 在一个底半径为R, 高为H, 开口朝上的圆锥形容器中盛满了水，问：将水全部提升到高出容器顶面h处时，需做功多少？





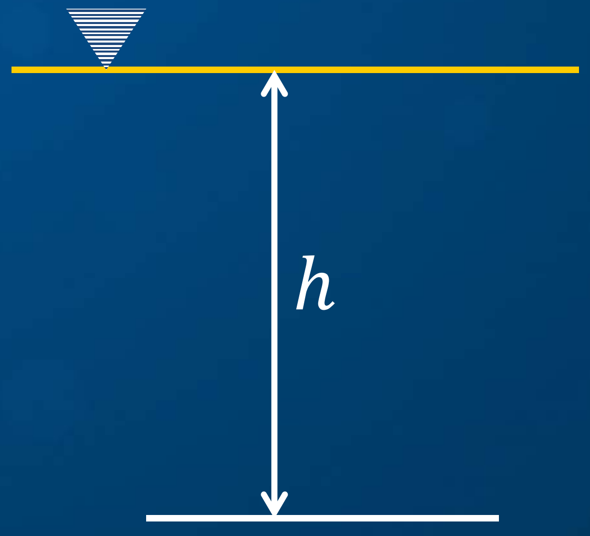
液体静压力

设液体密度为ρ，深为 h 处的压强:

$$P = \rho g h$$

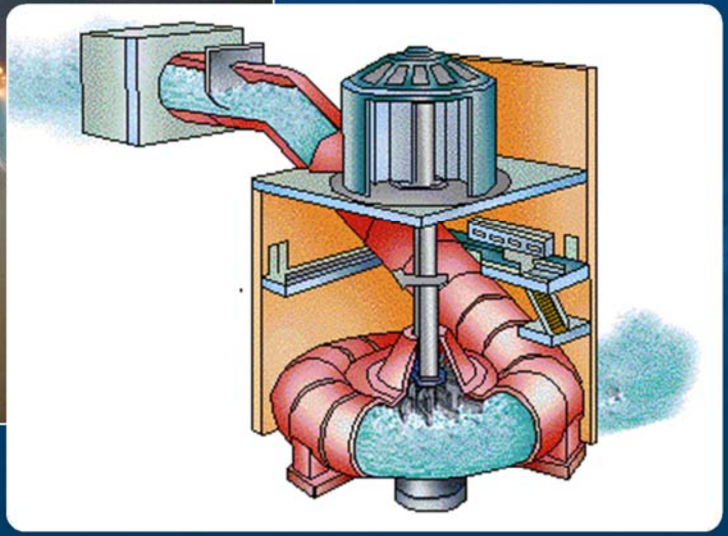
- 当平板与水面平行时，平板一侧所受的液体静压力为

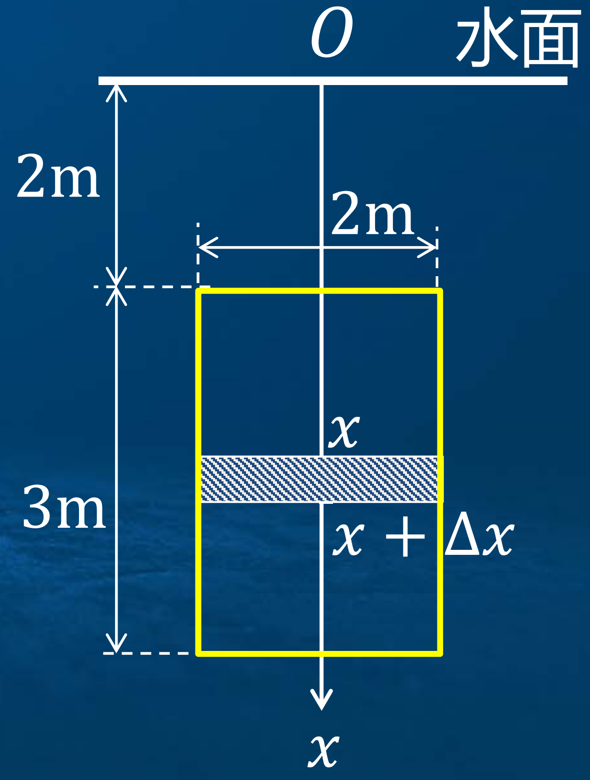
$$F = P A.$$



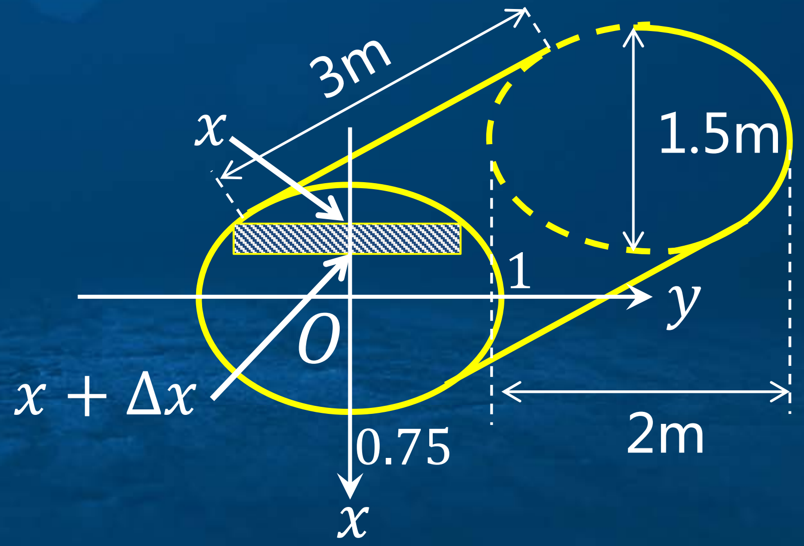
- 当平板不与水面平行时，所受液体压力问题就需用积分解决 .

例3 如图，有一个宽2m，高3m的长方形平板闸门，其顶边离水面2m，求闸门所受的水压力.

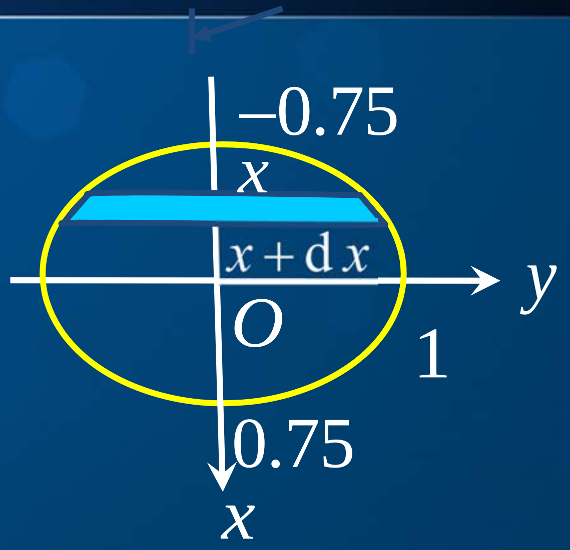




例4 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，底面长、短轴分别为2m和1.5m，长3m，当水箱装满水时,水箱的一个端面所受的压力.



例4解: 如图所示建立坐标系，任取 $[x, x+dx] \subset [-0.75, 0.75]$，则这一窄条所受的水压力微元为



$$\frac{x^2}{0.75^2} + y^2 = 1$$

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{0.75^2}}$$

$$\mathrm{d}F = \rho g(x+0.75)\cdot 2y\,\mathrm{d}x \quad (y>0)$$

$$= 2\rho g(x+0.75)\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}x$$

故 $$F = \int_{-0.75}^{0.75} 2\rho g(x+0.75)\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 0 + 3\rho g\int_0^{0.75}\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}x = 17.3(kN)$$

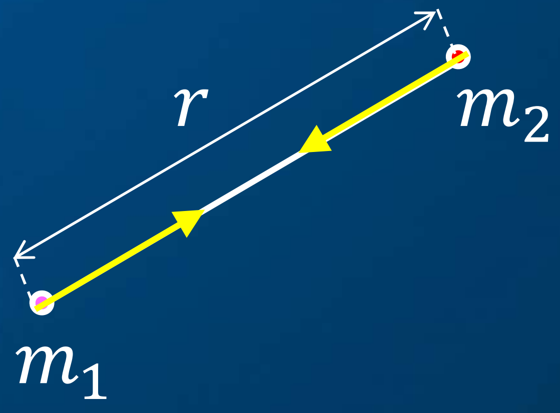
引力

质量分别为的m_1, m_2 质点，相距 r.

二者间的引力：

大小: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向: 沿两质点的连线

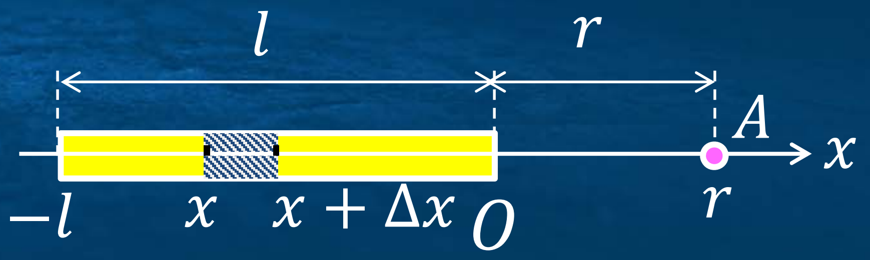


若考虑物体对质点的引力, 则需用积分解决 .

例5 一个水平放置的线密度为 μ 的长度为 l 的均匀细直棒，在其延长线上放置一个质量为 m 的质点，该质点距细直棒最近端点的距离为 r .

(1) 求细直棒对质点的引力大小；

(2) 如果将质点从距细直棒最近端点为 A 处移到无穷远处，求质点克服细直棒引力所做的功.



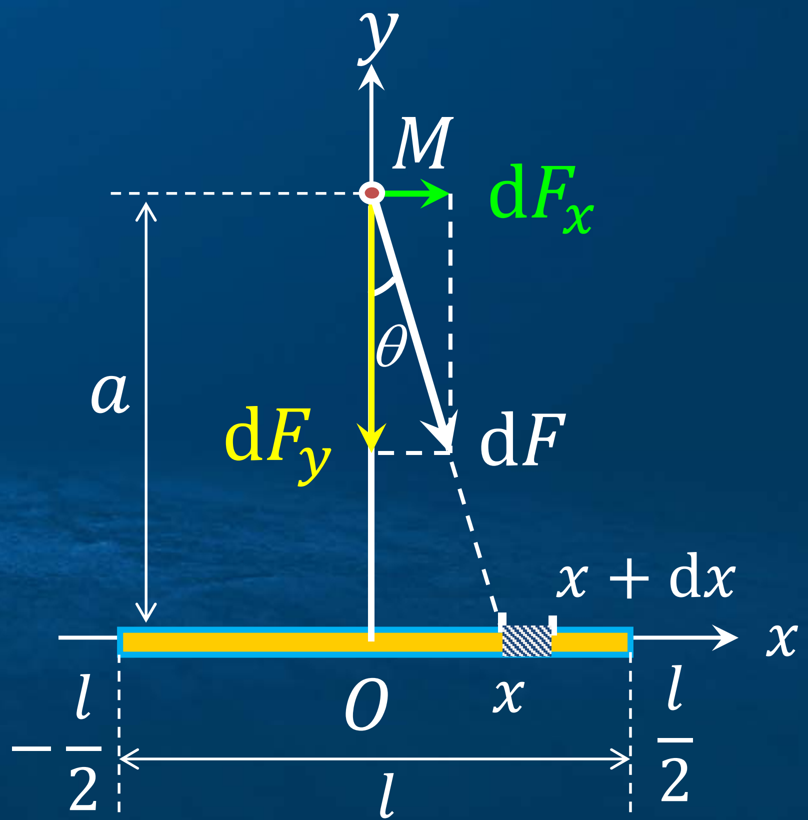
例6 设有一长度为 l, 线密度为 μ 的均匀细直棒，在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点M，试计算该棒对质点的引力.

例6解 如图建立坐标系. 细棒上小段 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

垂直分量为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cos\theta = -G\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$



例6 设有一长度为 l, 线密度为 μ 的均匀细直棒，在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点M，试计算该棒对质点的引力.

$$\mathrm{d}F_y = -Gm\mu a \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的垂直分力为

$$F_y = -2Gm\mu a \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{2Gm\mu l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}} \to \frac{2Gm\mu}{a}(l\to\infty)$$