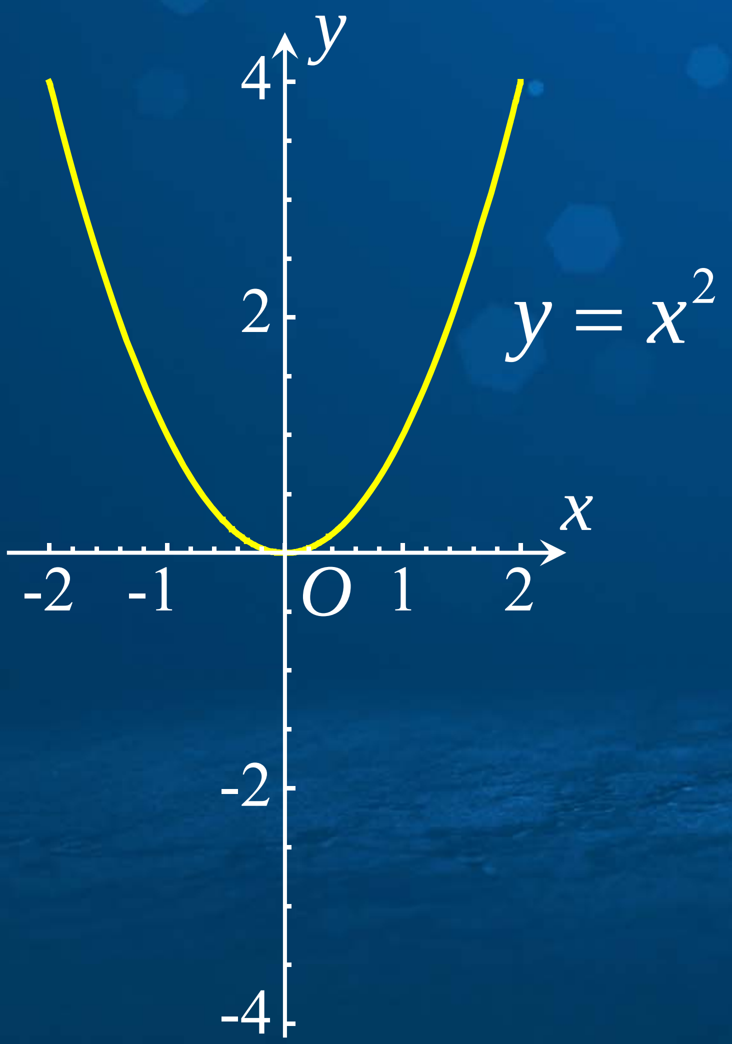
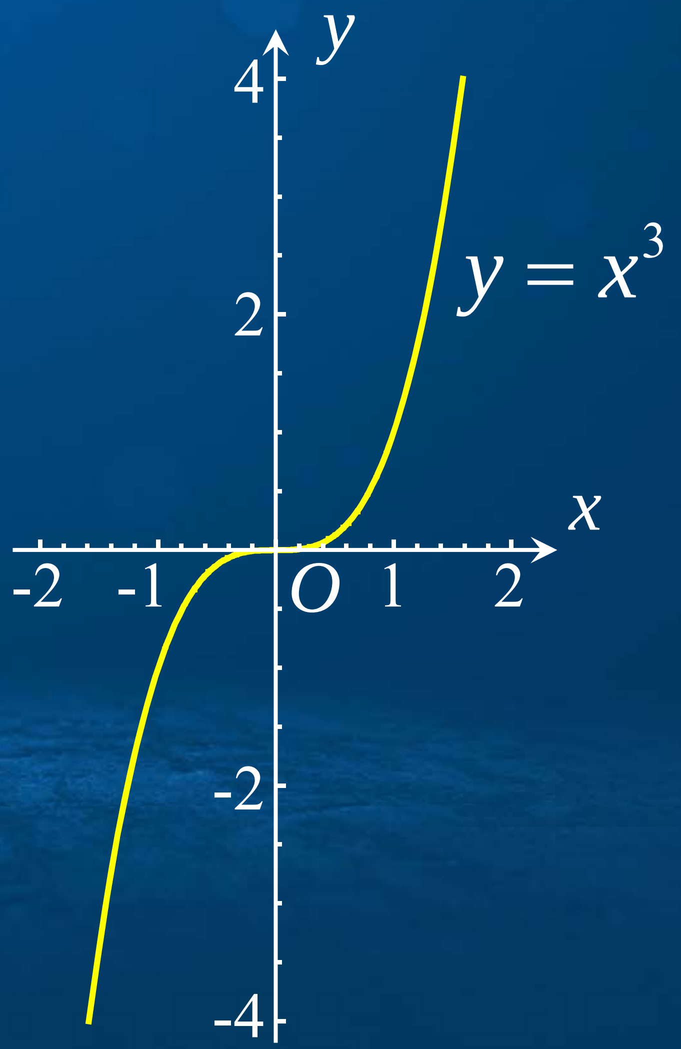
第34讲 函数的单调性与凹凸性

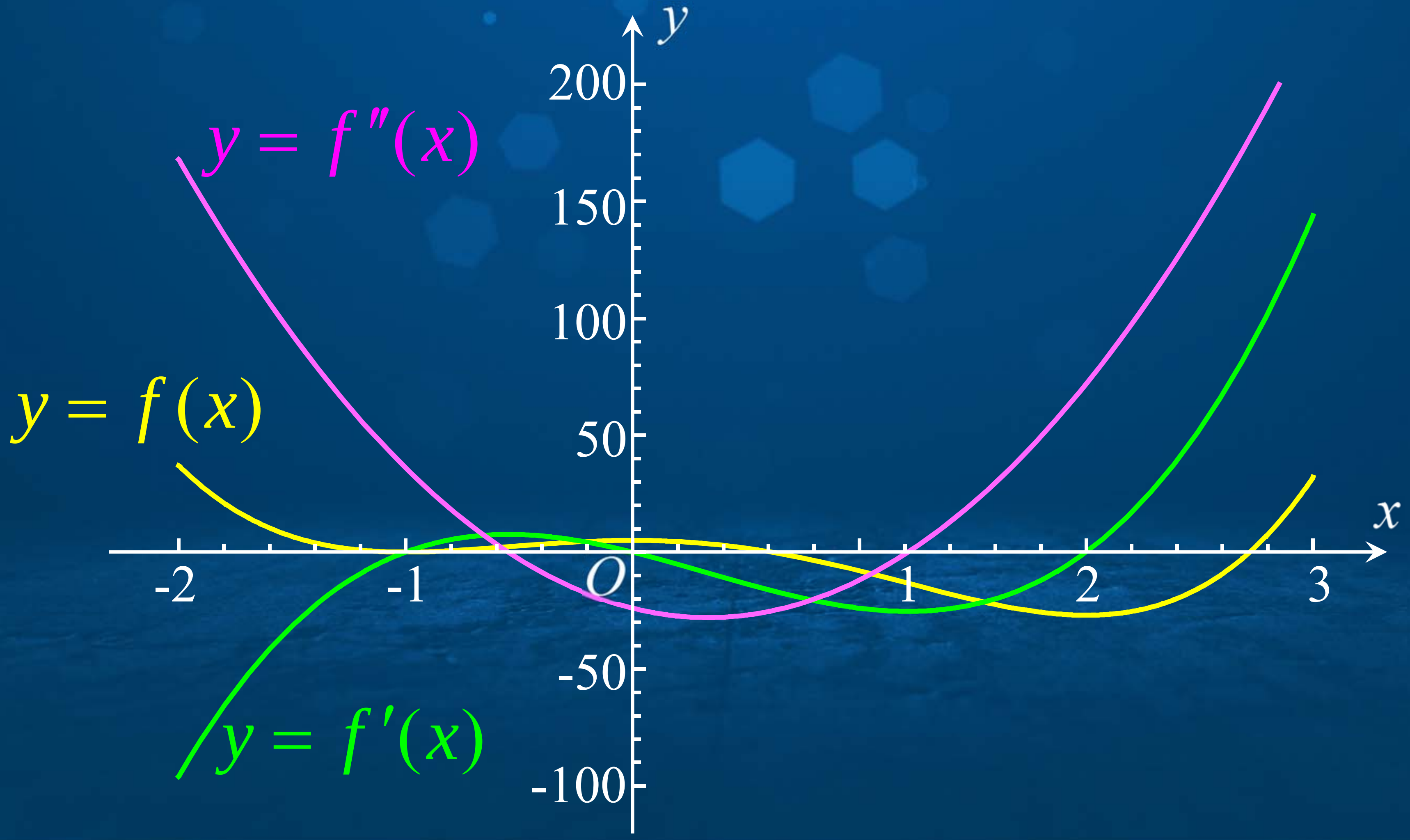


y
x
O
$y = x^2$
4
2
-2
-4
-2
-1
1
2



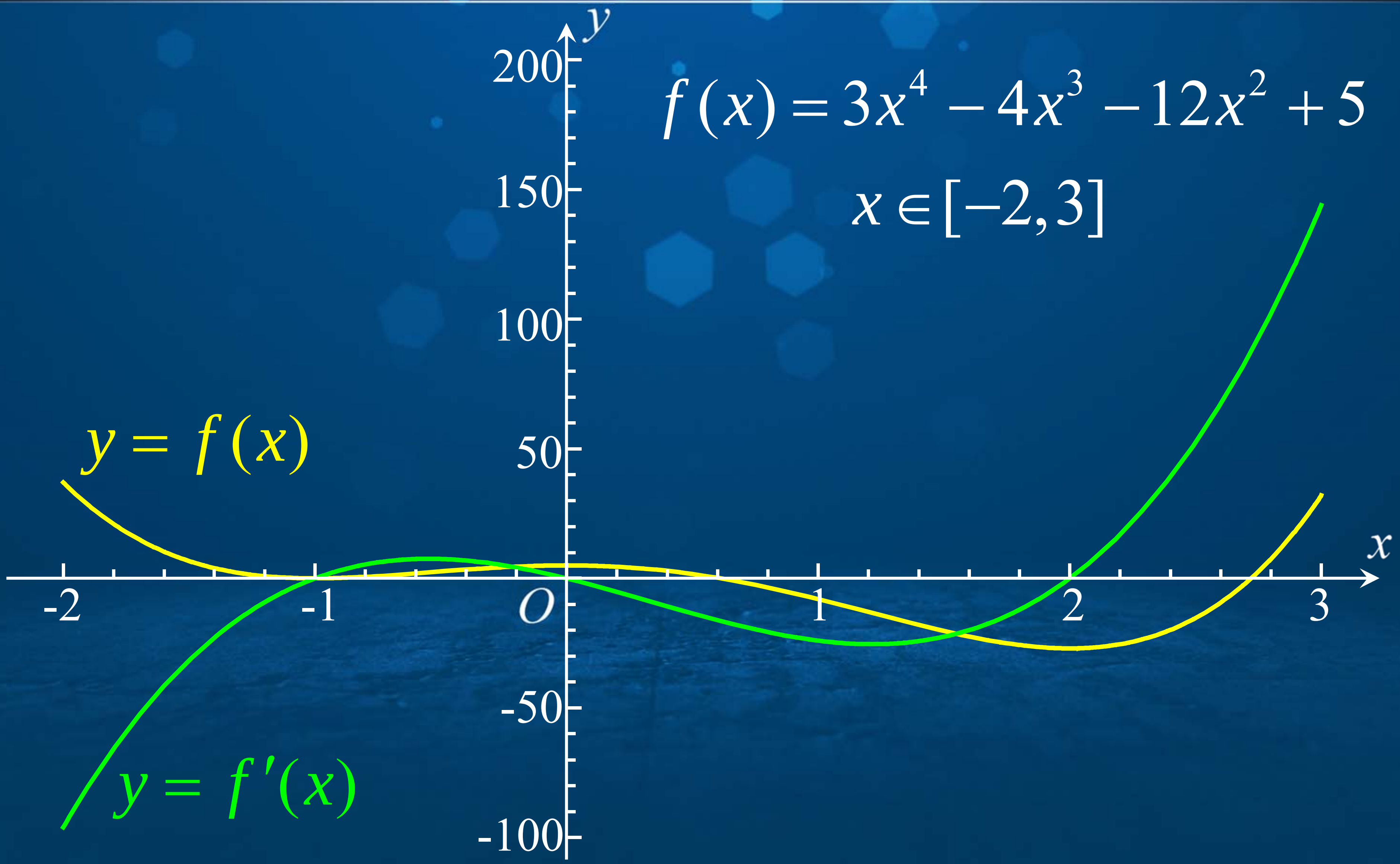
y
x
O
$y = x^3$
4
2
-2
-4
-2
-1
1
2

研究多项式函数的图形 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5,\ x\in[-2,3]$



$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$$

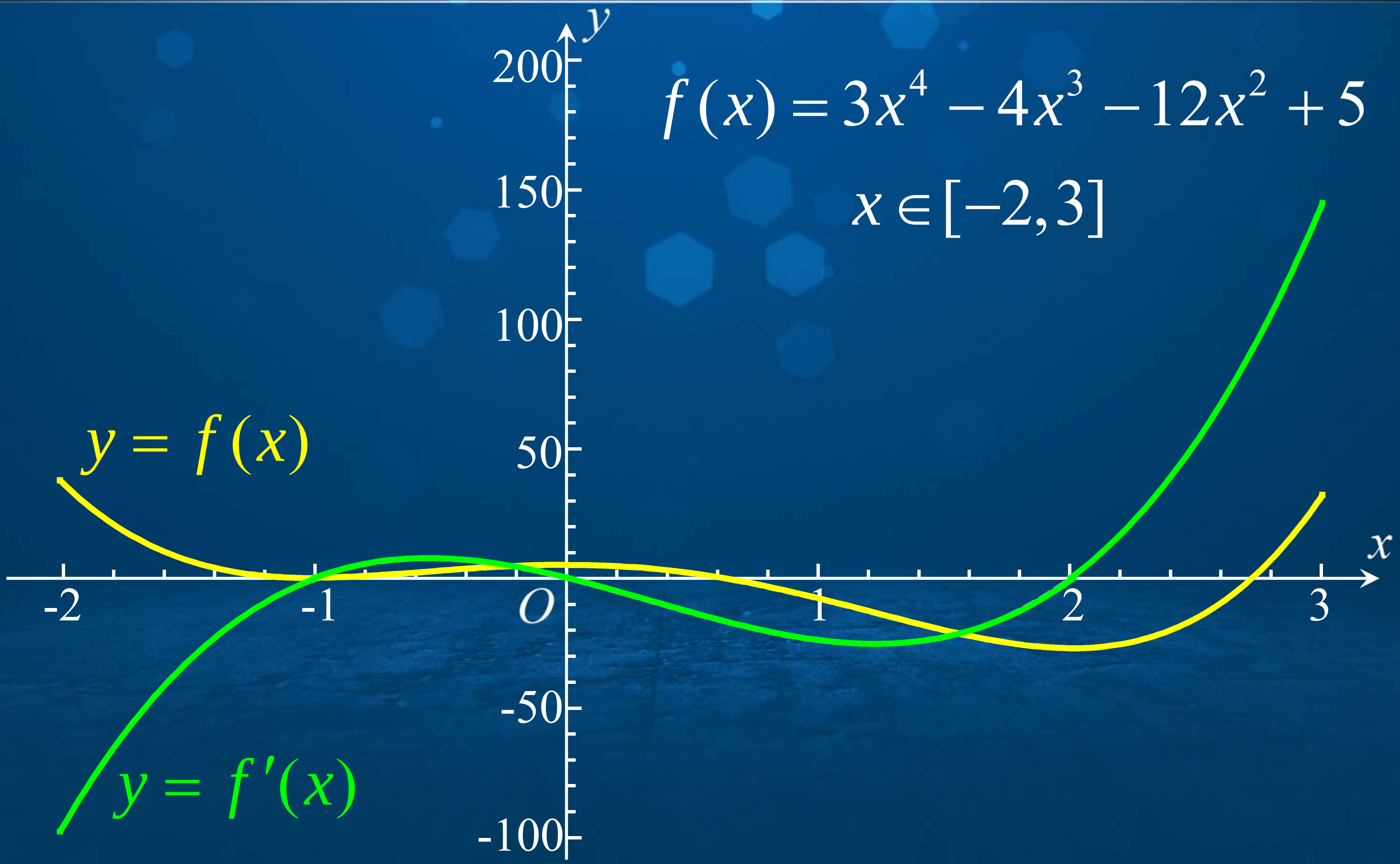
$$x\in[-2,3]$$

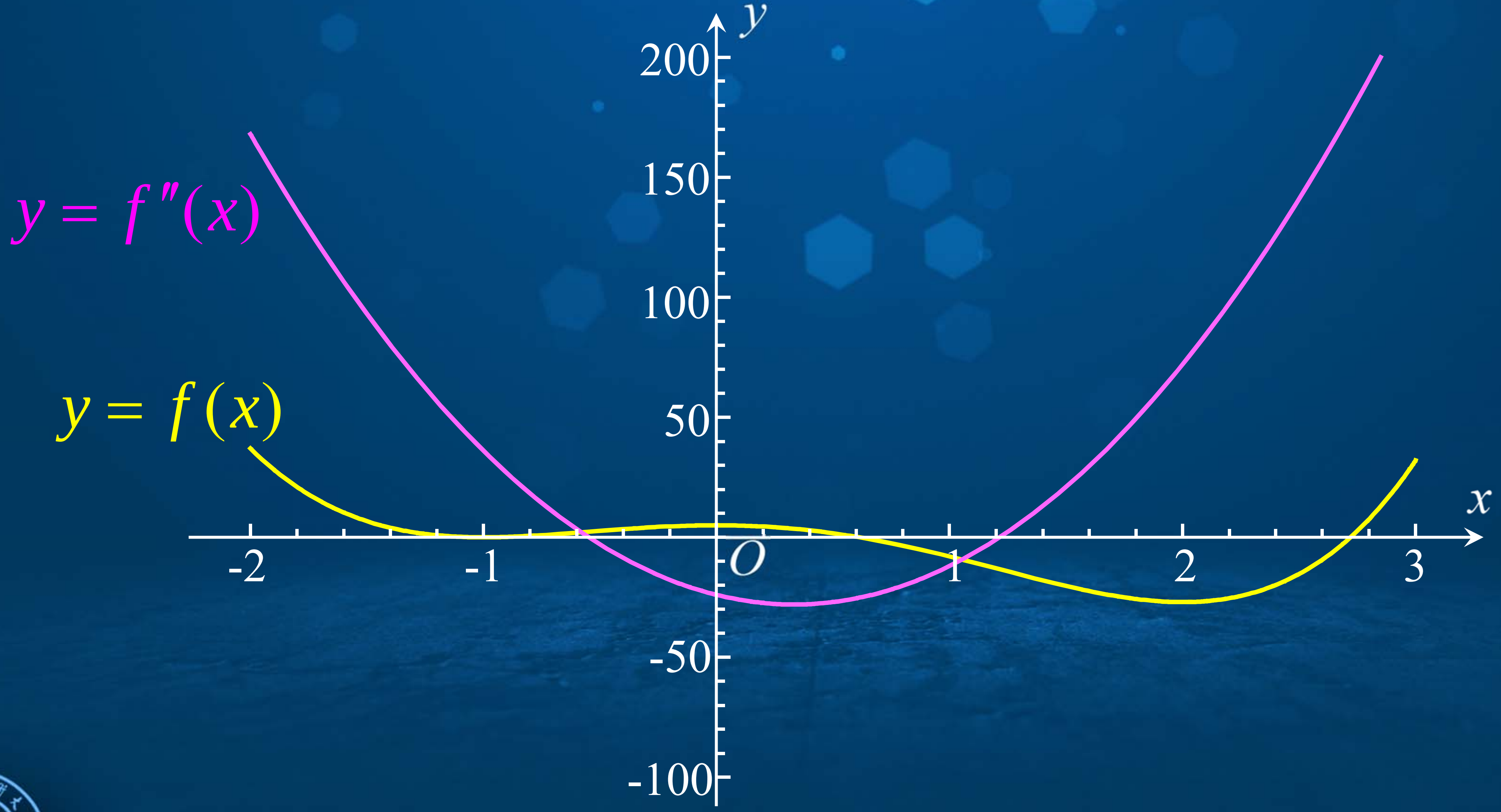


第34讲函数的单调性与凹凸性——问题的引入

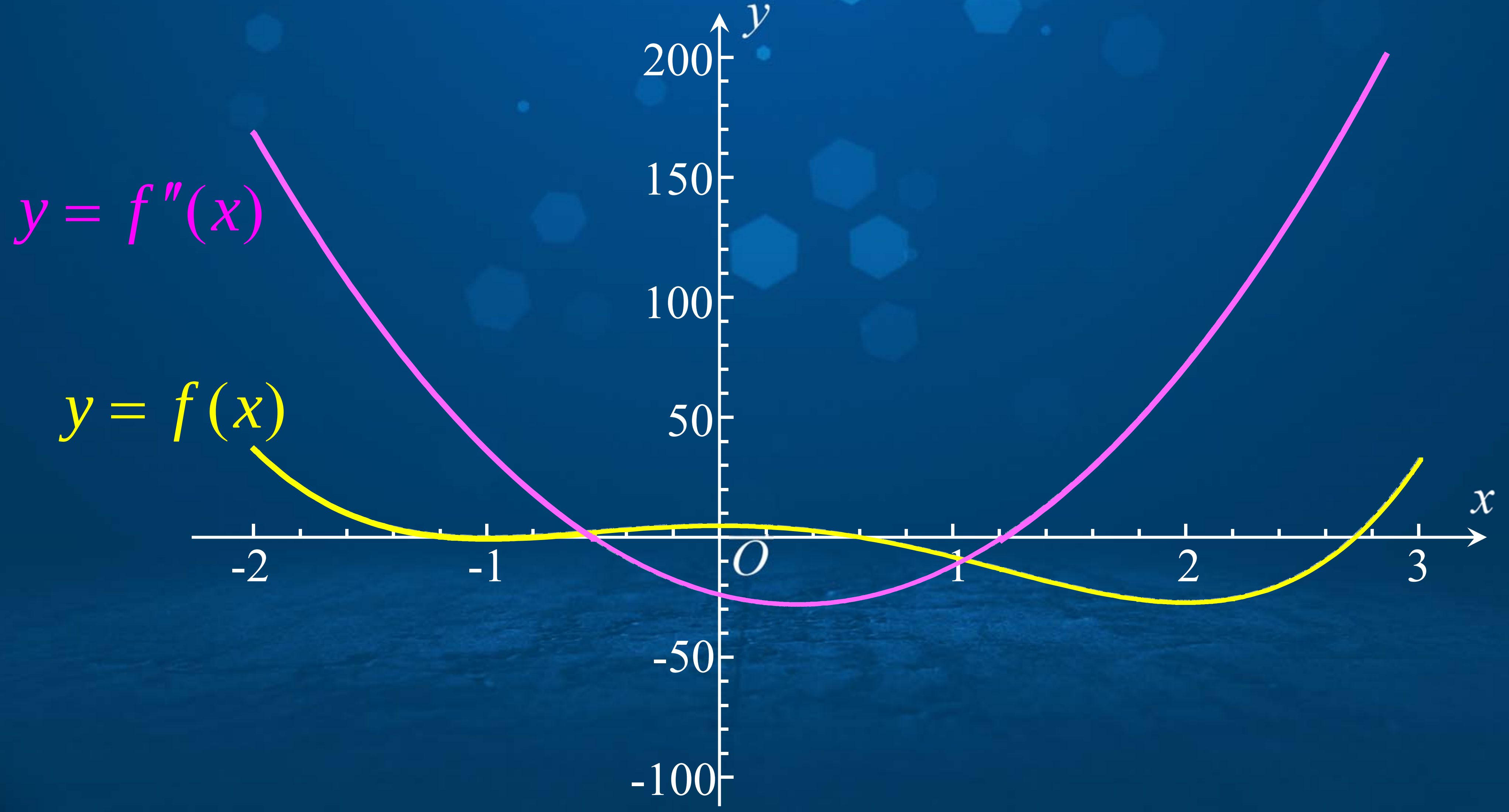
$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$$

$$x\in[-2,3]$$





$y = f''(x)$
$y = f(x)$
y
x
200
150
100
50
-50
-100
O
-2
-1
1
2
3



$y = f''(x)$
$y = f(x)$
y
200
150
100
50
-50
-100
x
-2
-1
O
1
2
3

函数单调性的判定

函数的凹凸性及其判定

函数单调性的判定

定理1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加;

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少.

注意：定理1对于开区间也成立.

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

（1*）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$, 那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加;

（2*）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调减少.

注（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$, 那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加;

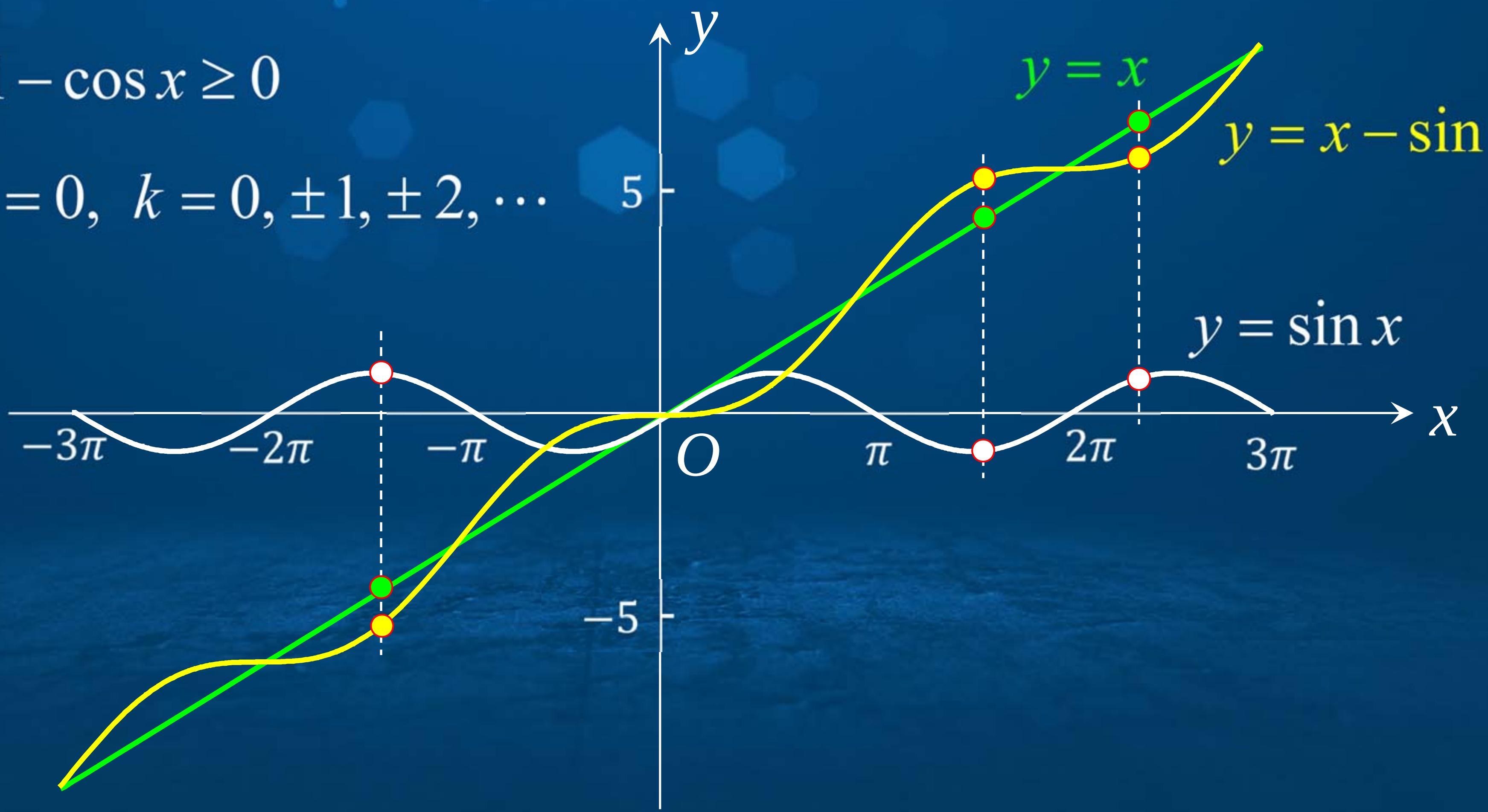
如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$, 那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少.

（2）如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\geq 0$（ $f'(x)\leq 0$ ），若 $f'(x)$在 (a,b) 内的任何子区间均不恒等于零，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加（严格单调减少）.

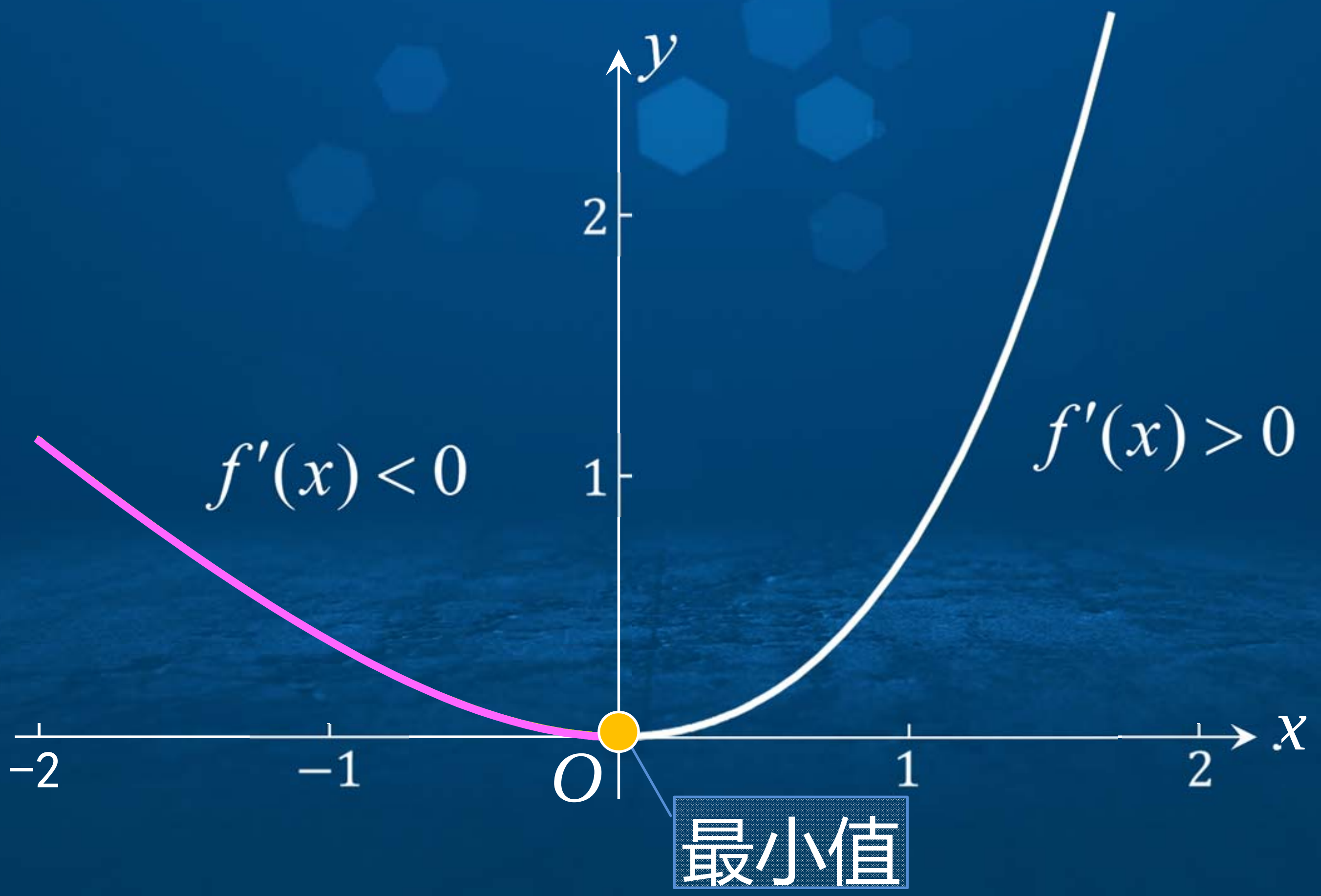
例1 讨论函数 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内的单调性.

$$f'(x)=1-\cos x\geq 0$$

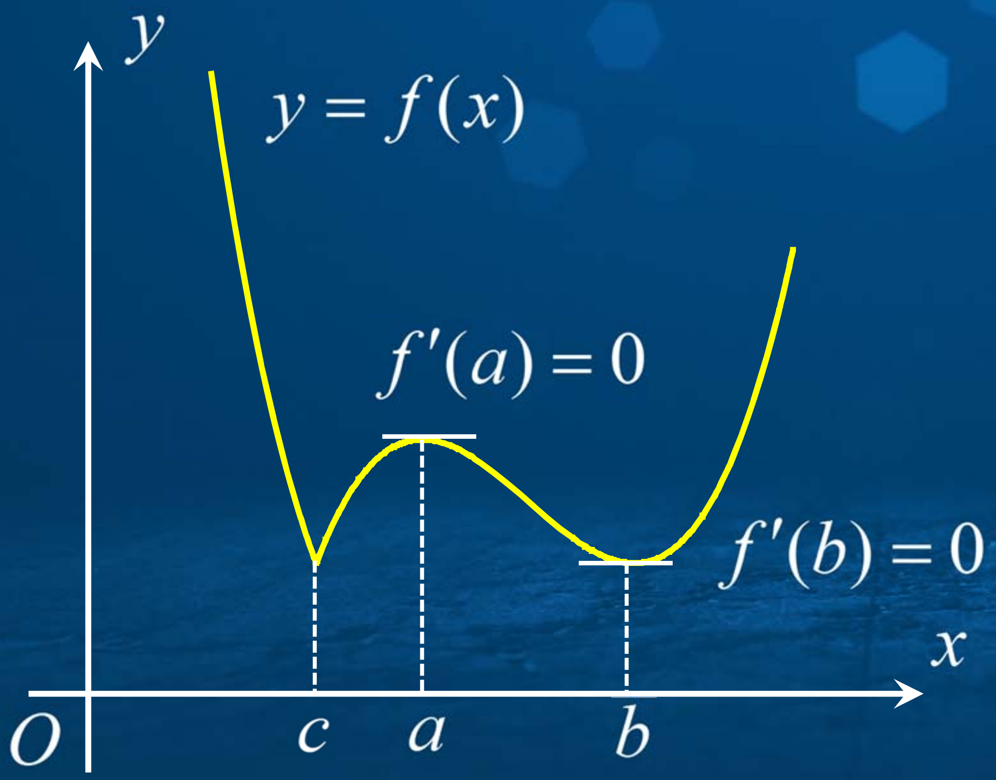
$$f'(2k\pi)=0,\ \ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$



例2 讨论函数 $f(x)=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内的单调性.



函数极值的判定



函数的可能极值点

- 驻点
- 不可导点

定理2（极值第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 x_0 的某个去心 δ 邻域内可导.

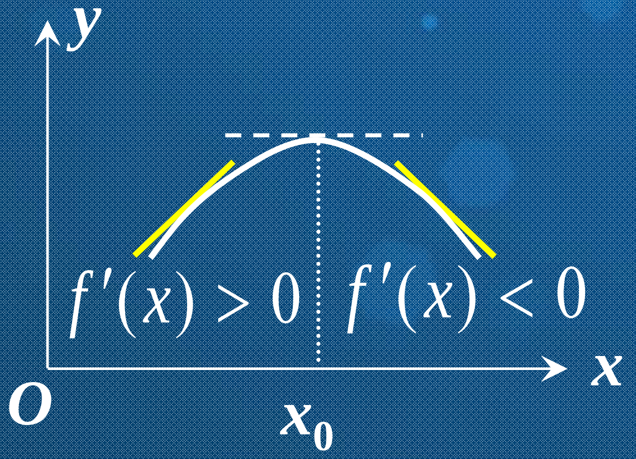
（1）如果当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$ ；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

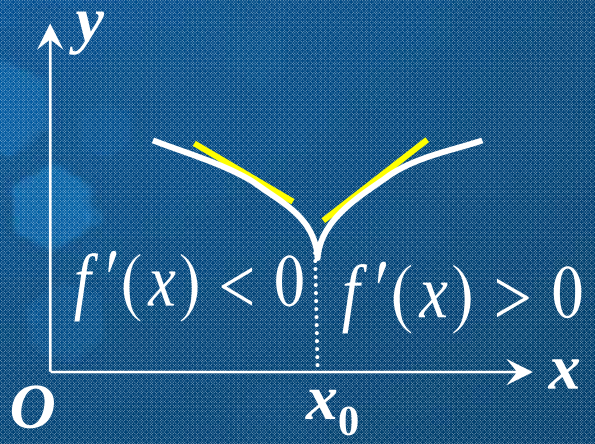
（2）如果当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$ ；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

（3）如果 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 内符号相同，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不取极值.

定理2的直观含义：

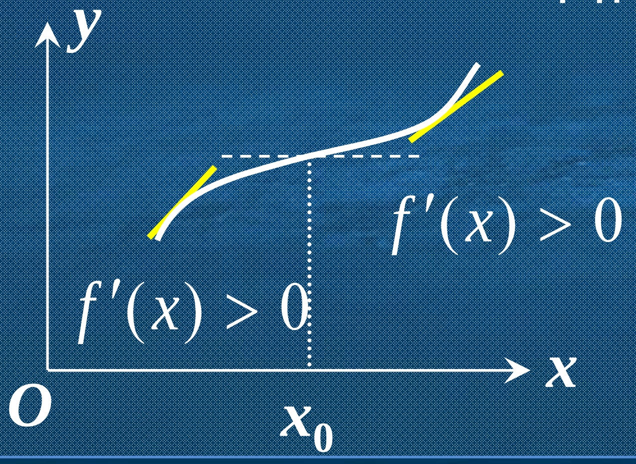
左正右负取极大

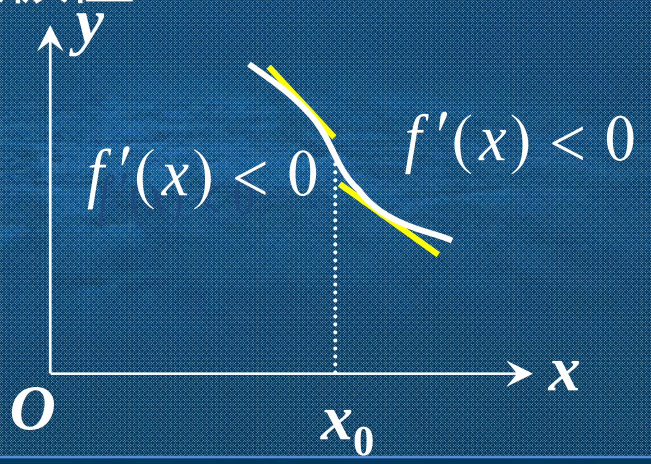




左负右正取极小

左右同号不取极值





例3 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的单调区间和极值.

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}{3(x-1)(x-2)}(3x-4) \qquad \frac{+}{+}(+)$$

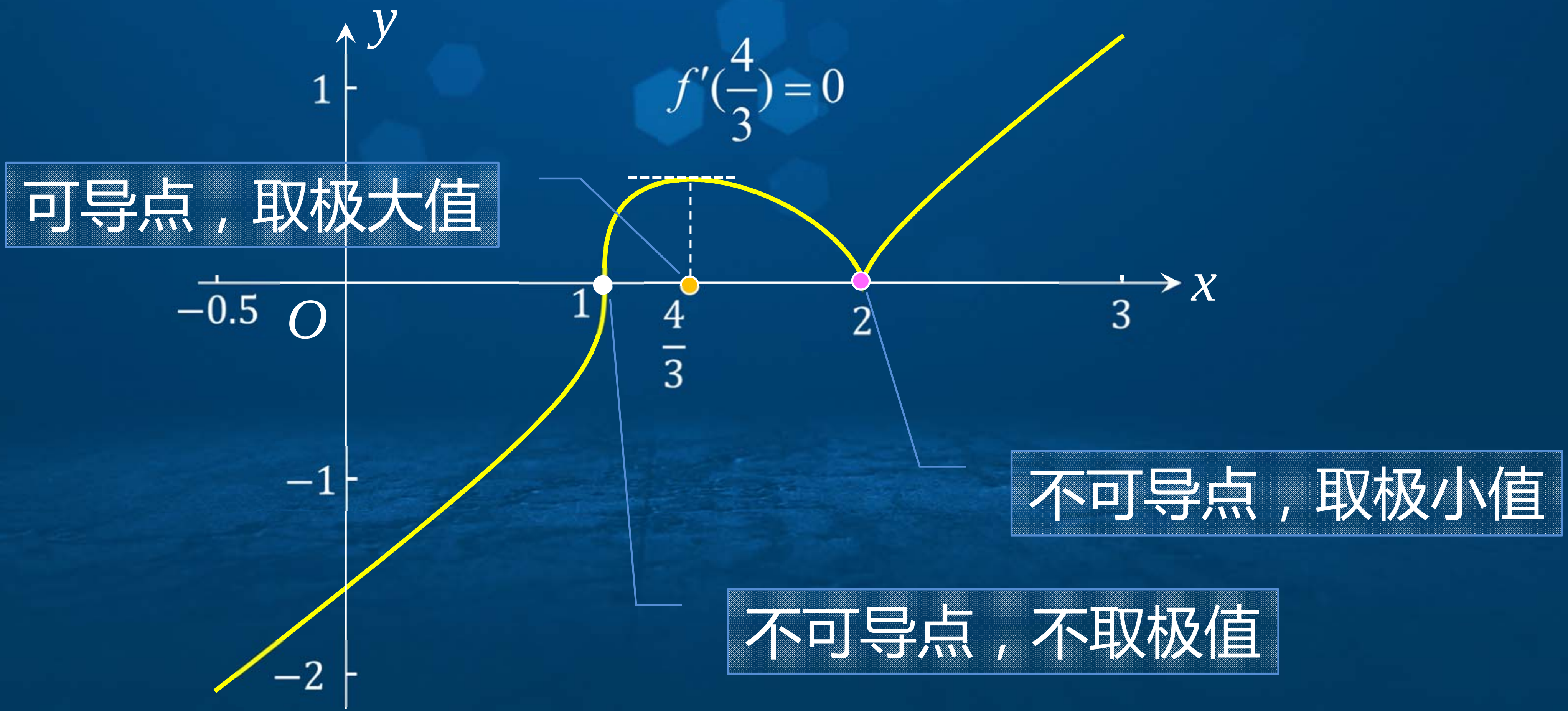
x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	$\nearrow$	非极值点	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$

例3 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的单调区间和极值.

极大值 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$　　极小值 $f(2)=0$

x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$	$\dfrac{4}{3}$	$\left(\dfrac{4}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	$\nearrow$	非极值点	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$

例3 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的单调区间和极值.



求函数单调区间与极值的一般步骤

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求函数 $f'(x)$ 的表达式，并求得 $f(x)$ 的驻点及不可导点，它们是 $f(x)$ 所有可能的极值点；

（3）以这些点为分点将函数的定义域划分为若干区间，在各划分区间上，依据 $f'(x)$ 的符号确定函数的单调区间，并判定这些点是否取极值.

定理3 (极值第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$, 那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(3) 当 $f''(x_0)=0$ 时，无法确定函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否取得极值.

例如： $f(x)=x^3$ ，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值.

$f(x)=x^4$ ，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

$$f'(0)=f''(0)=0$$

例4 求函数 $f(x)=x^3-6x^2+5$ 的极值.

$$f'(x)=3x^2-12x=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$$

$$f''(x)\big|_{x=0}=(6x-12)\big|_{x=0}=-12<0$$

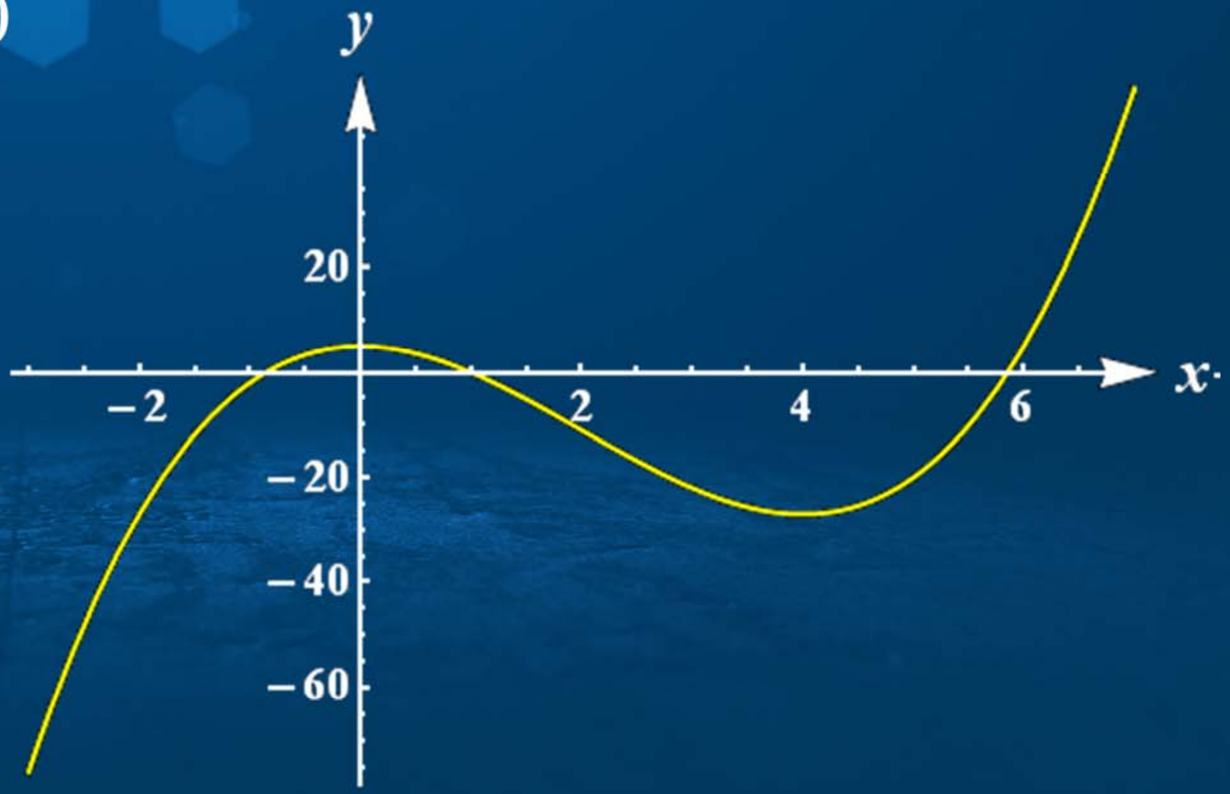
函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值

$$f(0)=5$$

$$f''(x)\big|_{x=4}=(6x-12)\big|_{x=4}=12>0$$

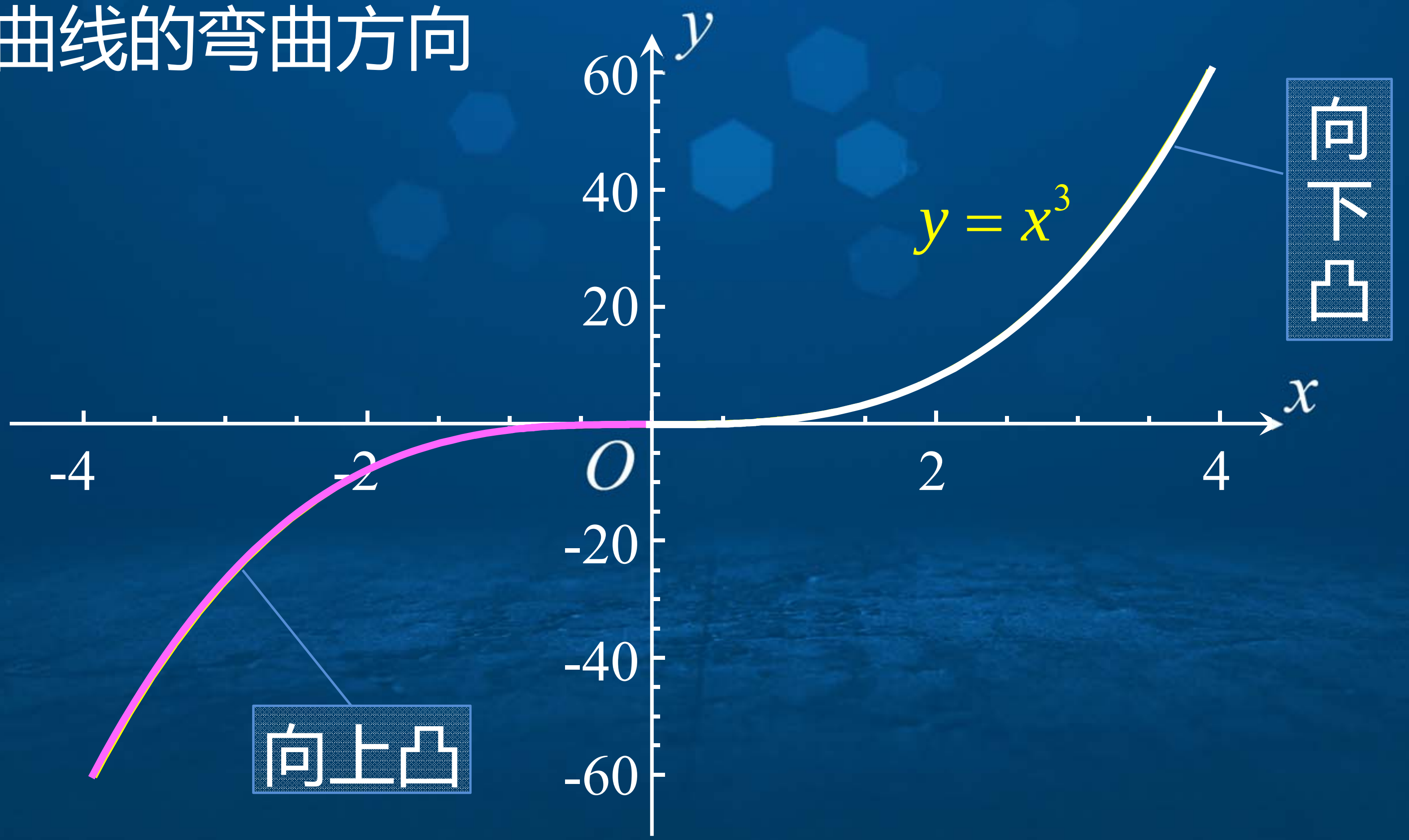
函数 $f(x)$ 在 $x=4$ 取极小值

$$f(4)=-27$$



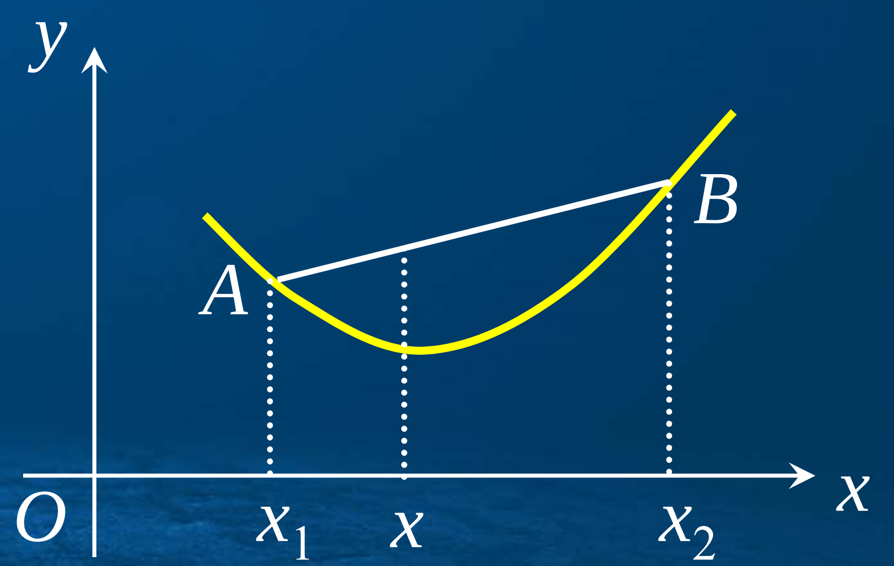
凸函数

考虑曲线的弯曲方向



凸曲线的几何特征分析

特点: 连接图形上任意两点的弦总位于这两点间弧段的上方.



弦 AB 的方程：
$$y=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的曲线弧位于弦 AB 的下方可表示为

$$\boxed{f(x)} \le \boxed{f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)} \quad x_1 \le x \le x_2.$$

整理得

$$f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

弦 AB 的方程：$y = f(x_1)+\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，及任意实数 $\lambda \in [0, 1]$，恒有

$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**向下凸函数**（简称**凸函数**）.

如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 \neq x_2$，及任意实数 $\lambda \in (0, 1)$，恒有

$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]< \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**严格向下凸函数**（简称**严格凸函数**）.

定义1* 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，及任意实数 $\lambda \in [0, 1]$，恒有

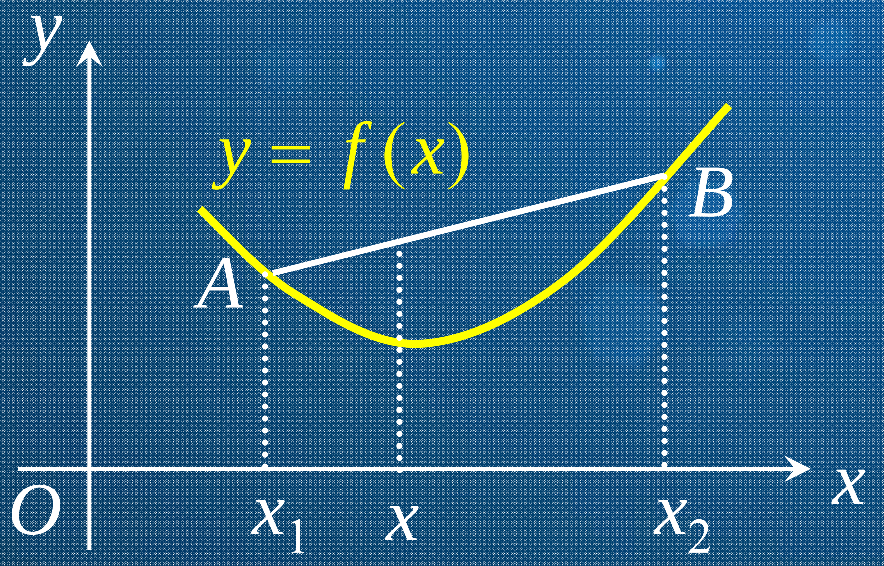
$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right] \geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**向上凸函数**.

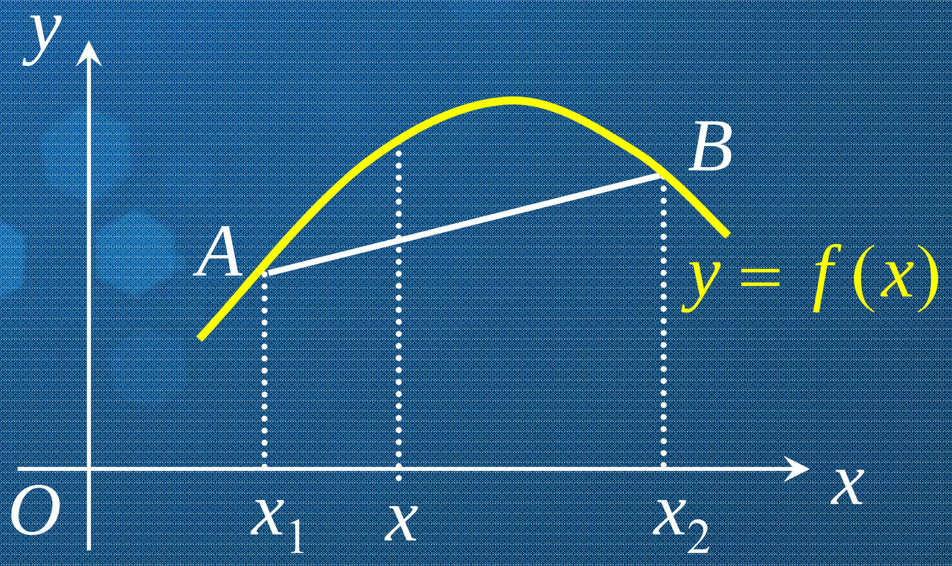
如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 \neq x_2$，及任意实数 $\lambda \in (0, 1)$，恒有

$$f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right] > \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**严格向上凸函数**.



向下凸函数（凸函数）

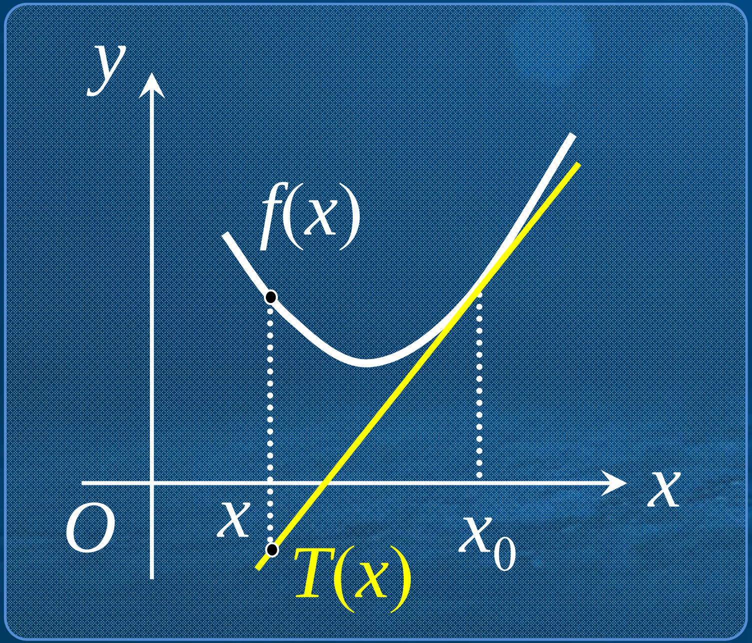


向上凸函数

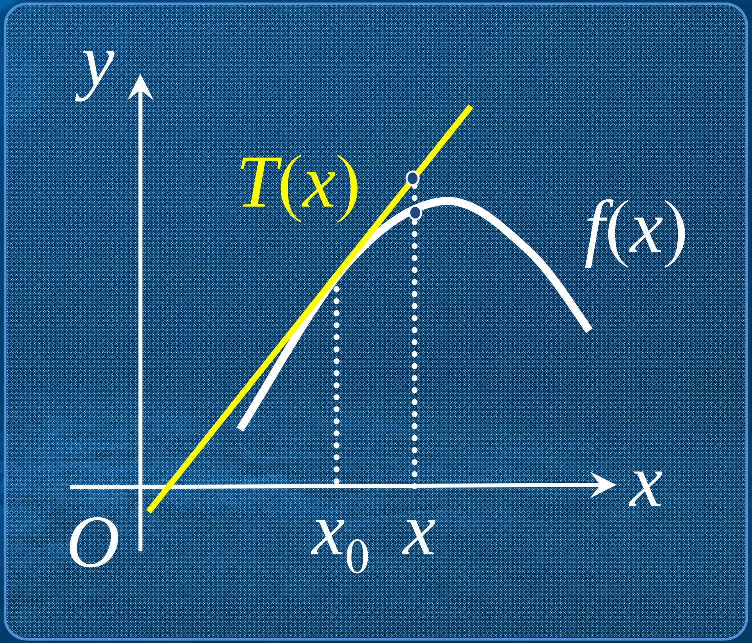
注：直观上，我们将向下凸函数的图形称为凹曲线（或者凹弧），而向上凸函数的图形称为凸曲线（或者凸弧）.

凸曲线与其切线的位置关系

向下凸函数的图形（凹曲线）位于切线上方，向上凸函数的图形（凸曲线）位于切线下方．



$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

定理4 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，则

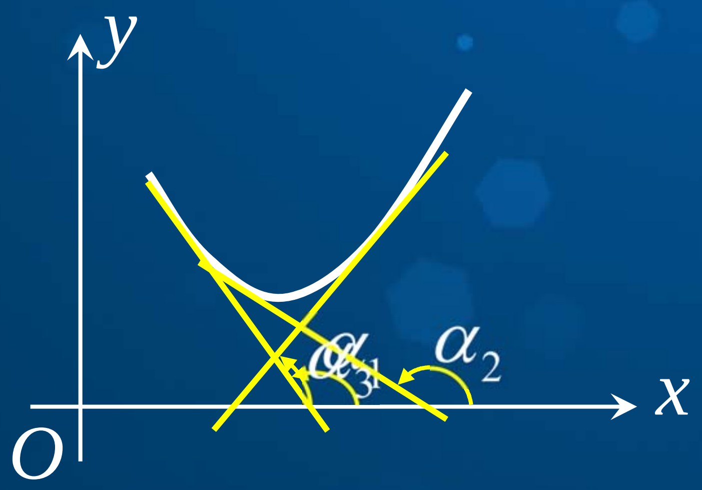
（1）函数 $f(x)$ 为 (a, b) 内的向下凸函数的充分必要条件是：对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 都有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

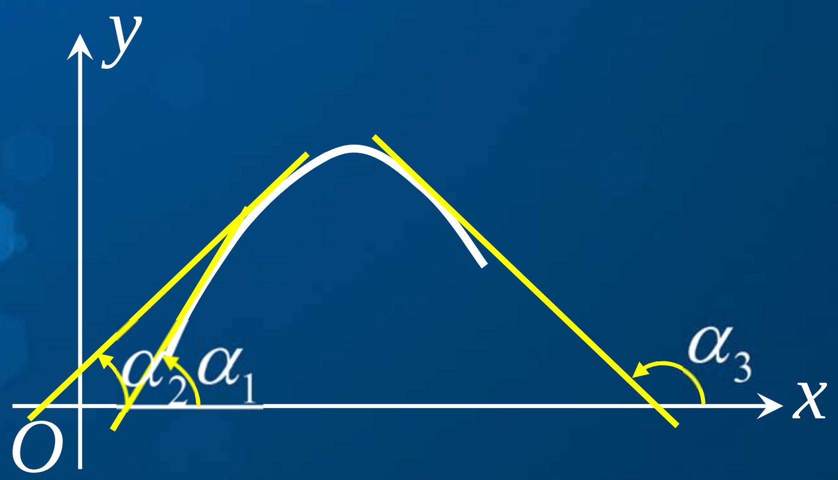
（2）函数 $f(x)$ 为 (a, b) 内的严格向下凸函数的充分必要条件是对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, 都有

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

凸函数的判定



$\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2 < \tan\alpha_3$



$\tan\alpha_1 > \tan\alpha_2 > \tan\alpha_3$

向下凸函数　随着 x 增大，向下凸函数图形的切线斜率增大，其导函数 $f'(x)$ 单调增加；

向上凸函数　随着 x 增大，向上凸函数图形的切线斜率减少，其导函数 $f'(x)$ 单调减少.

定理5 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数,

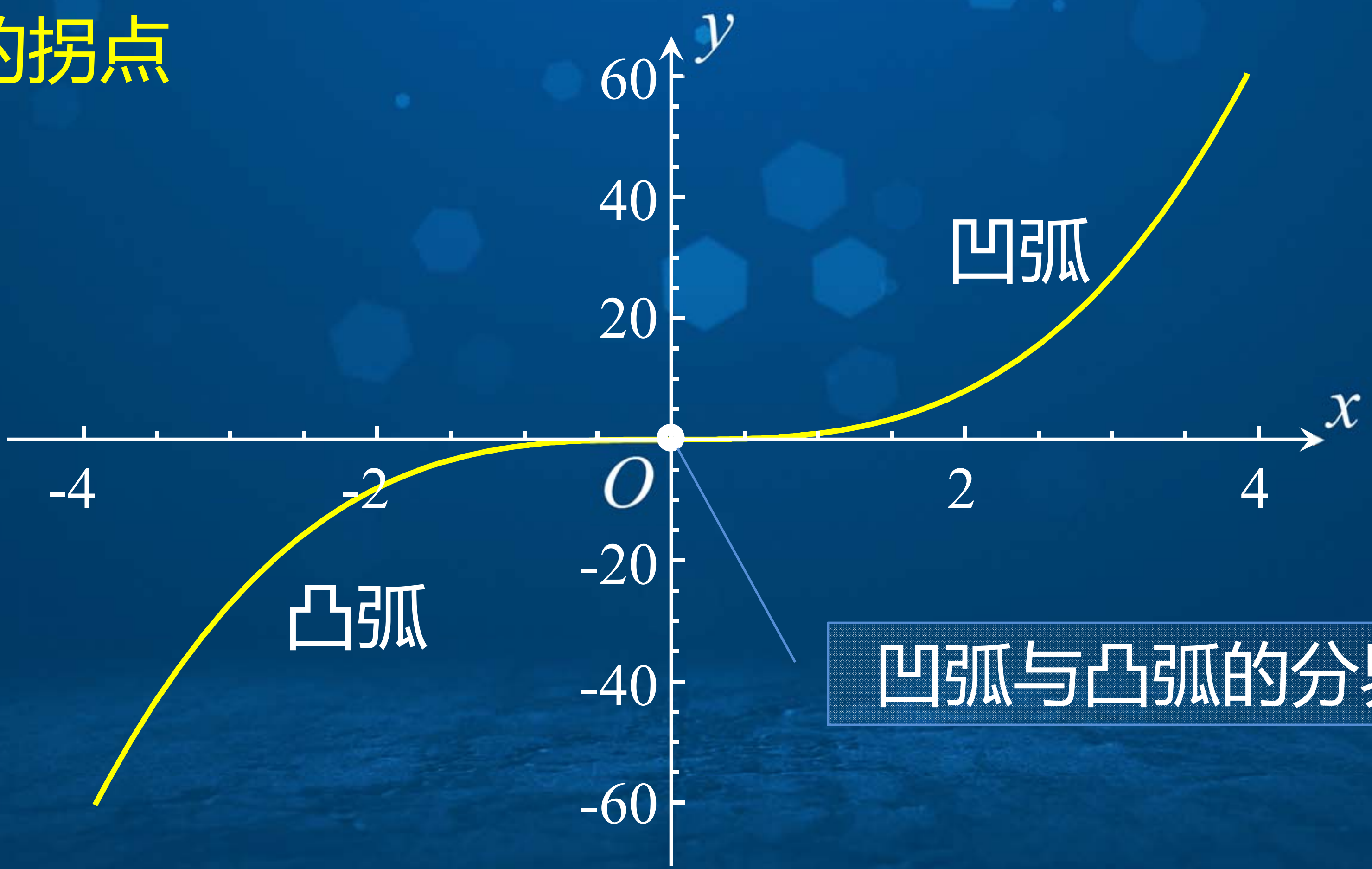
(1) 如果 (a, b) 内 $f''(x) > 0$， 则 $f(x)$ 为严格向下凸函数;

(2) 如果 (a, b) 内 $f''(x) < 0$， 则 $f(x)$ 为严格向上凸函数.

注： 一般地，如果 (a, b) 内 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 为向下凸函数;

如果 (a, b) 内 $f''(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 为向上凸函数.

曲线的拐点



连续曲线凹弧和凸弧的分界点称为曲线的**拐点**.

定理6 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，$x_0\in(a,b)$，若 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点且 $f''(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f''(x_0)=0$.

定理7（拐点第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数. 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧附近异号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

定理8（拐点第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有三阶导数，且 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$，则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例5 求曲线 $y = xe^x$ 的凹凸区间和拐点.