# 第55讲 平面及其方程


第55讲 平面及其方程——问题的引入



通过网格精确描述和生成大飞机复杂外形

平面的点法式方程

平面的一般方程

平面的参数方程

点到平面的距离

设平面$\pi$通过已知点$M_0(x_0, y_0, z_0)$

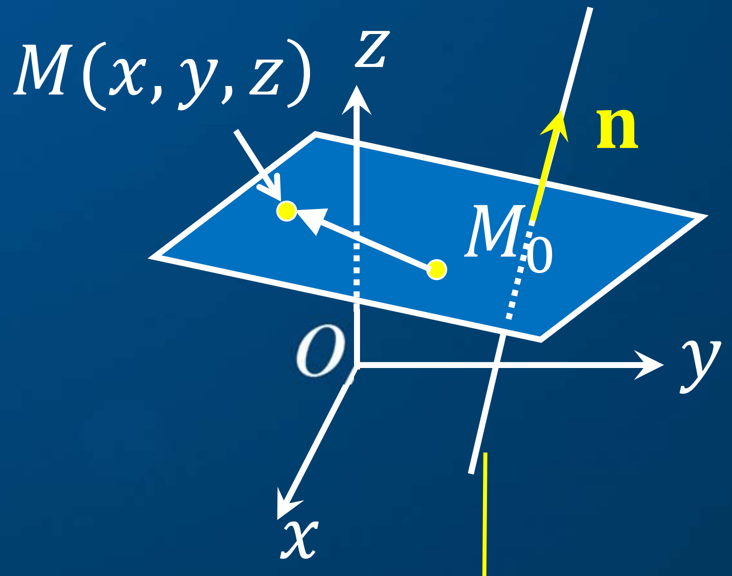
且垂直于非零向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$,

设$M(x, y, z)$为平面$\pi$上任一点

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n} \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0. z - z_0)$$

$$\mathbf{n} = (A, B, C)$$




平面的法线

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

— 平面$\pi$的点法式方程　　　$\mathbf{n}$ — 平面的法向量

例1 求过点$M_0(2,0,-1)$, 法向量为$\mathbf{n}=(4,2,-3)$的平面方程.

【例1解】 $4(x-2)+2(y-0)+(-3)(z+1)=0$

即 $4x+2y-3z-11=0$

例2 求过不在同一直线上的三点$A(x_1,y_1,z_1)$ , $B(x_2,y_2,z_2)$及$C(x_3,y_3,z_3)$的平面方程.

平面的三点式方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

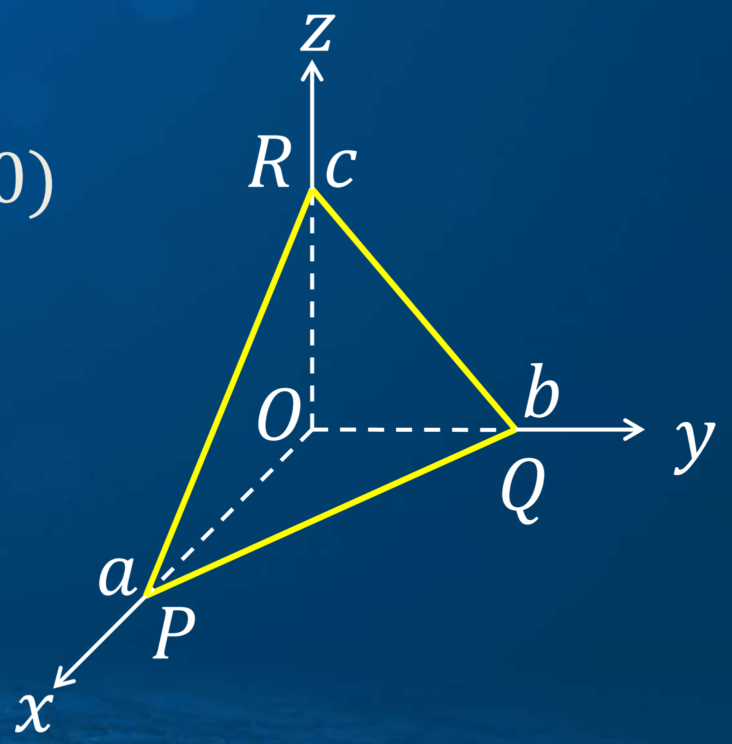
特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)(a\,,\,b\,,\,c\neq 0)$

时，平面方程为

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.}$$

平面的截距式方程




其中$a\,,b\,,c$ 分别称为在三个坐标轴上的截距.

点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面的三点式方程 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

平面的截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

$\Downarrow$

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0\ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$ 平面一般方程

任取一组满足上述方程的数$x_0, y_0, z_0$，则

$$A x_0 + B y_0 + C z_0 + D = 0$$

以上两式相减，得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

满足三元方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的点所构成的图形表示一个法向量为$\mathbf{n} = (A, B, C)$的平面.

$$Ax + By + Cz + D = 0\,(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

特殊情形：

- 当 $D = 0$ 时，$Ax + By + Cz = 0$ 表示通过原点的平面;
- 当 $A = 0$ 时, $By + Cz + D = 0$ 的法向量

$$\mathbf{n} = (0, B, C) \perp \mathbf{i},$$ 平面平行于 $x$ 轴;

- $Ax + Cz + D = 0$ 表示平行于 $y$ 轴的平面;
- $Ax + By + D = 0$ 表示平行于 $z$ 轴的平面;

$$Ax + By + Cz + D = 0 \, (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

特殊情形：

- 当 $A = B = 0$ 时, $Cz + D = 0$ 的法向量垂直于 **i** 和 **j**，表示平行于 $xoy$ 面的平面;
- $Ax + D = 0$ 表示 平行于 $yoz$ 面 的平面；
- $By + D = 0$ 表示 平行于 $zox$ 面 的平面.

例3 求过 $x$ 轴及点$M(4,-3,-1)$的平面方程.

【例3解】设过$x$轴的平面为 $By+Cz=0$

点$M_0(4,-3,-1)$的坐标满足上述方程 $-3B-C=0$

所求平面的方程为 $y-3z=0$ （如取$B=1, C=-3$）

例4 求过点$(1,1,1)$且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

【例4解】法向量 $\mathbf{n}=(1,-1,1)\times(3,2,-12)=(10,15,5)\,//\,(2,3,1)$

所求平面方程 $2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$

$xOy$ 面可以表示为集合:

$$xOy\text{ 面：}\{(x,y,z)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},z=0\}$$

如果以$u$ , $v$为参数，则$xOy$面可以描述为：

$$xOy\text{ 面：}\quad\begin{cases}x=u,\\ y=v,\ (-\infty<u<+\infty,-\infty<v<+\infty)\\ z=0.\end{cases}$$

对一般的平面方程$Ax + By + Cz + D = 0$，可以表示为集合（设$C \neq 0$）

$$\left\{(x, y, z) \middle| x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z = -\frac{1}{C}(Ax + By + D)\right\}.$$

如果以$u$ , $v$ 为参数，平面可以描述为：

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -\dfrac{1}{C}(Au + Bv + D). \end{cases} \quad (-\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty)$$

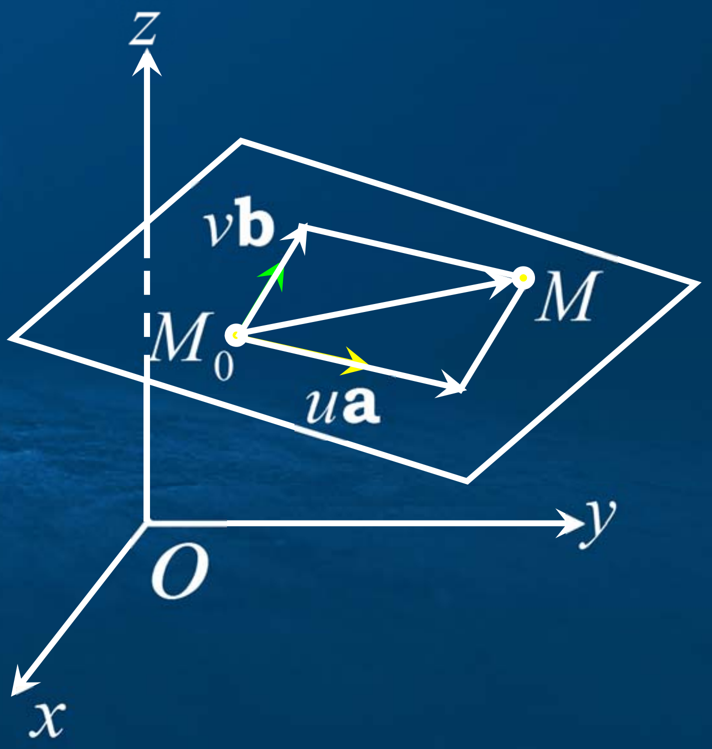
设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$是平面内两个已知不平行的非零向量，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面内的已知点， 那么对平面内的任意一点$M(x,y,z)$，有

$$\overrightarrow{M_0M}=u\mathbf{a}+v\mathbf{b},$$

对应的分量形式为

$$\begin{cases} x=x_0+ua_1+vb_1, \\ y=y_0+ua_2+vb_2, \\ z=z_0+ua_3+vb_3. \end{cases}$$

称上式为平面的参数方程.



$$\overrightarrow{M_0M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}$$

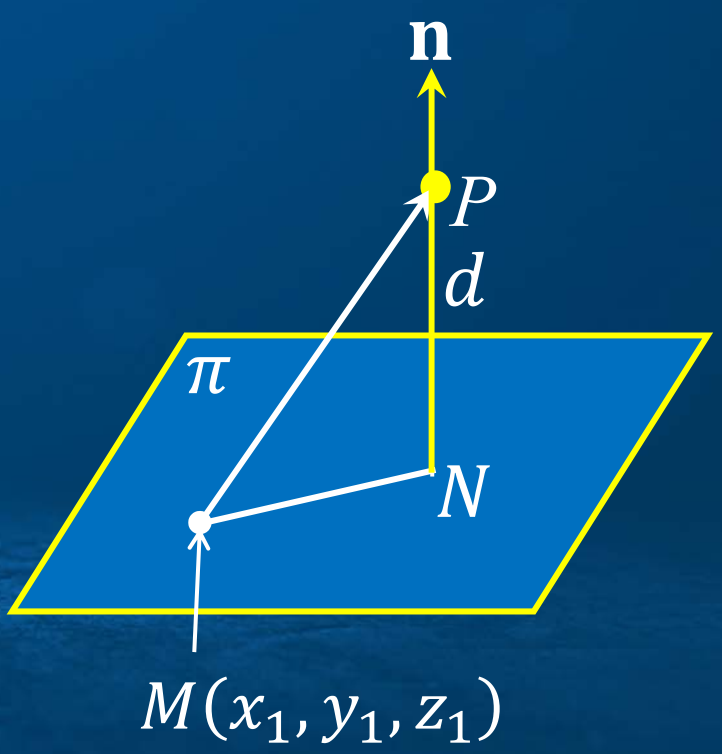
例5 设一平面经过三点$A(1,1,1)$，$B(4,5,6), C(2,3,3)$，试写出该平面的参数方程.

【例5解】 取 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = (3,4,5)$ $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = (1,2,2)$ $M_0(1,1,1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 3u + v \\ y = 1 + 4u + 2v \\ z = 1 + 5u + 2v \end{cases} \quad (-\infty < u < +\infty, \ -\infty < v < +\infty)$$

设点$P(x_0, y_0, z_0)$是平面$\pi: A\ \ x + B\ \ y + C\ \ z + D = 0$外一点，求$P$到平面的距离$d$.

$$d = |NP| = \left|\left(\overrightarrow{MP}\right)_{\mathbf{n}}\right| = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$




点到平面的距离公式

$$\boxed{d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

**例6** 设$a,b,c$为一平面在坐标轴上的截距，$d$是原点到该平面的距离，证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}.$$