第37讲 解非线性方程的牛顿切线法

线性方程：$ax+b=0\ (a\neq 0)$

非线性方程：$f(x)=0$（其中 $f(x)$ 不具有 $ax+b$ 的形式）

若有x^*使得 $f(x^*)=0$ ，则称 x^*为方程$f(x)=0$的**根**，或称为函数$f(x)$ 的**零点**.

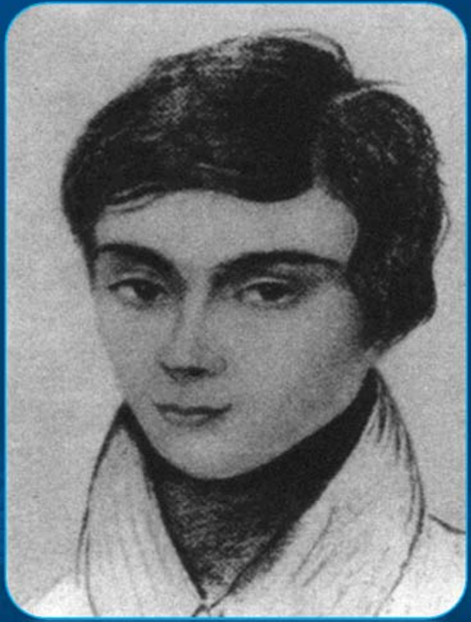
例如，三次方程 $x^3+mx-n=0$

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0\ (a_0 \neq 0)$$

五次及五次以上的代数方程不存在一般形式的根式解！

阿贝尔[挪]
(Niels Henrik Abel)



伽罗瓦[法]
(Évariste Galois)

- 求方程$f(x)=0$实根

两种情形 $\begin{cases} \text{可求精确根（根的形式可能很复杂）} \\ \text{无法求精确根} \longrightarrow \text{求近似根} \end{cases}$

- 求近似根方法

区间收缩法：(1) 确定初始含根区间； (2) 收缩含根区间.

二分法

- 牛顿法思想及迭代公式
- 牛顿法的收敛性

第37讲 解非线性方程的牛顿切线法——主要内容

简单迭代法的基本思想

将方程$f(x)=0$变换为一个等价形式$x=\varphi(x)$，构造迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),$$

其中$\varphi(x)$称为迭代函数, $x=\varphi(x)$也称为不动点方程.

对给定的初值 x_0，由迭代格式得到的序列$\{x_k\}$称为迭代序列.

对于连续函数 $\varphi(x)$，如果迭代序列 $\{x_k\}$收敛于x^*，那么有

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi(x^*)\Longrightarrow f(x^*)=0$$

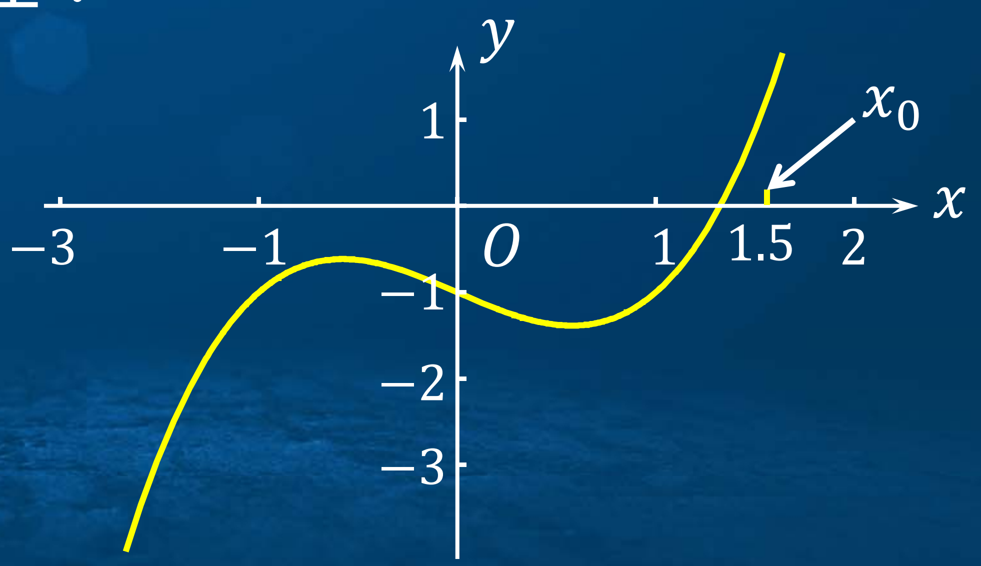
例1 通过变换方程 $x^3 - x - 1 = 0$构造不同迭代格式，通过选取合适的初值，比较不同迭代格式的收敛性．

变换方程，得到三种不动点方程：

$$(1)\ x = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$(2)\ x = \frac{1+x}{x^2}$$

$$(3)\ x = \frac{1}{x^2 - 1}$$



k	(1) $x_{k+1}=(x_k+1)^{\frac{1}{3}}$	(2)$x_{k+1}=\dfrac{1+x_k}{{x_k}^2}$	(3)$x_{k+1}=\dfrac{1}{{x_k}^2-1}$
0	1.5	1.5	1.5
1	1.357209	1.111111	0.8
2	1.330861	1.710000	-2.77777
3	1.325884	0.926781	0.148897
4	1.324939	2.243253	-1.022673
5	1.324760	0.644502	21.805462
6	1.324726	3.959001	0.0021075
7	1.324719	0.316390	-1.000004
8	1.324718	13.150394	112564.02
	收敛	发散	发散

牛顿迭代法的基本思想及迭代公式

原理：将非线性方程线性化

设 $f(x)$在其零点 x^*附近连续可微，x_0 是 $f(x)=0$的近似根，在 x_0 附近用$f(x)$的一阶泰勒多项式近似$f(x)$，有

$$f(x)\approx p_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

当$f'(x_0)\neq 0$时，可以取线性方程 $p_1(x)=0$ 的根

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

作为x^*的第1次近似值.

同理，当$f'(x_1)\neq 0$时, 有 $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ x^*的第2次近似值

依次类推，当$f'(x_k)\neq 0$时，有

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,\cdots.}$$

作为x^*的第 k 次近似值.

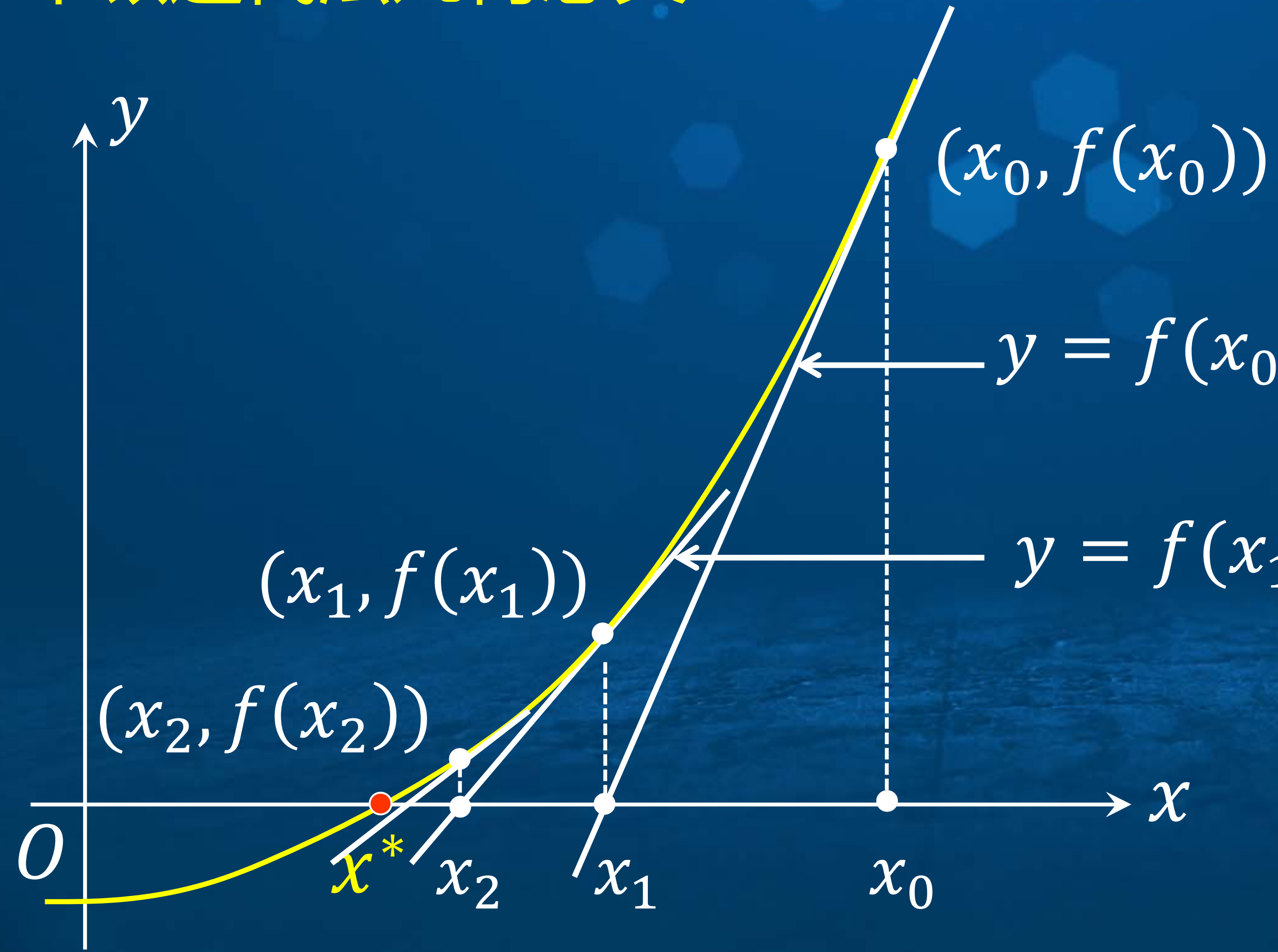
牛顿迭代公式

迭代函数：$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

条件： $f(x)$ 在 x^* 附近连续可微且 $f'(x)\neq 0$.

牛顿迭代法几何意义

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$k = 0,1,2,\cdots.$$



“切线法”

例2 用牛顿法求方程 $x^2-2=0$ 的正根，即求 $\sqrt{2}$ 的近似值.

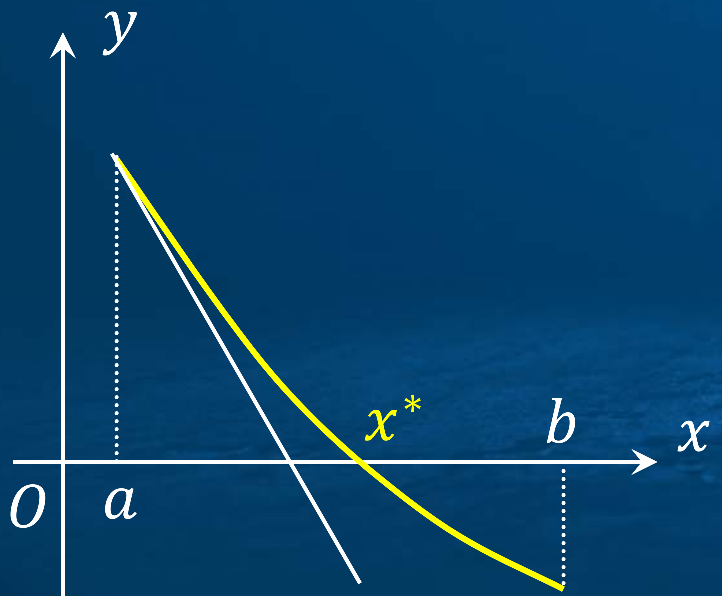
迭代公式为： $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{1}{x_k},k=0,1,2,\cdots$

取初始近似值为$x_0=1$, 迭代1~5次的对$\sqrt{2}$的近似值如下表

迭代次数k	x_k	$\lvert x_k-\sqrt{2}\rvert$	与$\sqrt{2}$对照相同的位数
0	1	0.414213562	1
1	1.5	0.085786437	1
2	1.4166666666667	0.002453104	3
3	1.4142156862745	2.1239×10^{-6}	5
4	1.4142135623747	1.5947×10^{-12}	12

设 $f(x)$ 满足：(1) 在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$; (2) 在$[a,b]$上$f'(x)$及$f''(x)$不变号. ⟶ $f(x)=0$在(a,b)内有唯一的实根x^*.

➢ 称$[a,b]$为根x^*的一个**隔根区间**



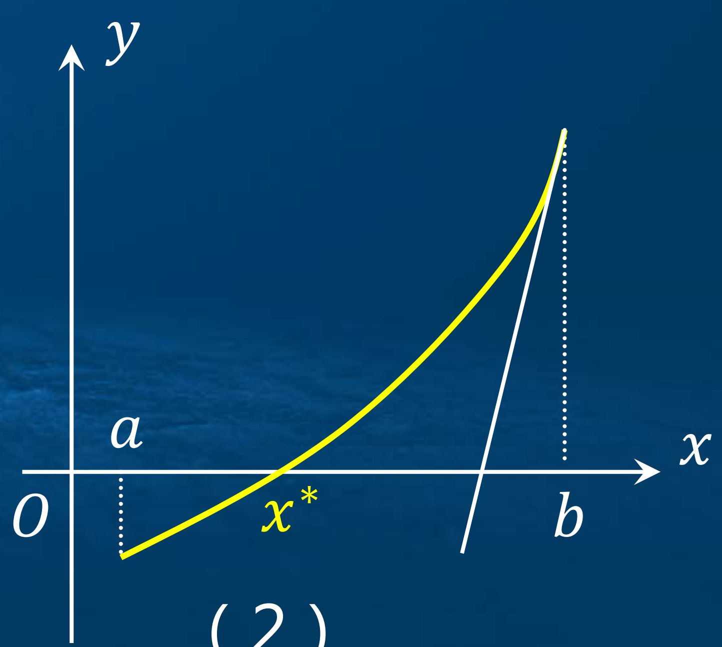
(1)

$f(a)>0,\ f(b)<0$
$f'(x)<0,\ f''(x)>0$

(1)

$f(a)<0,\ f(b)>0$
$f'(x)>0,\ f''(x)>0$

(2)

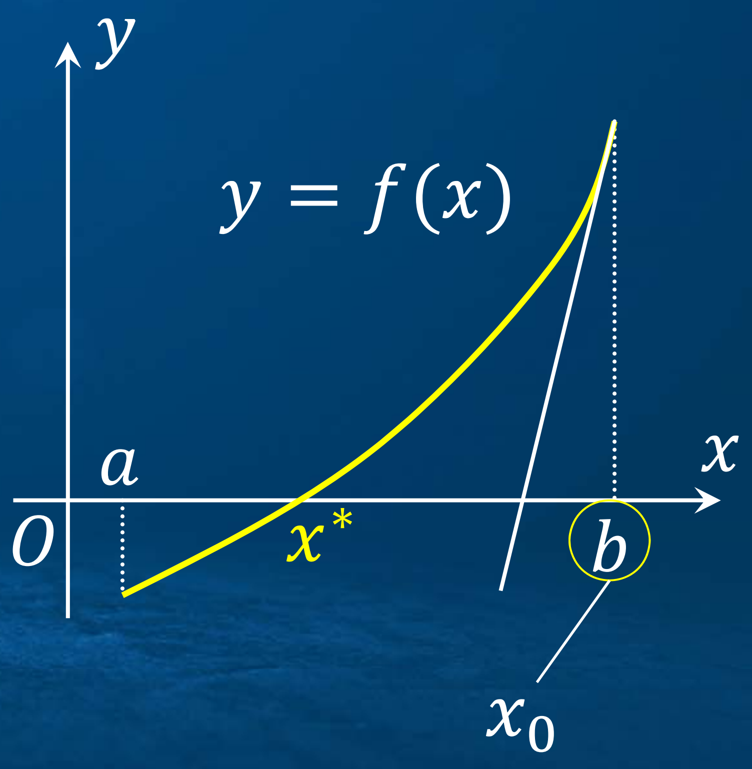


(2)

定理1 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且满足

$$(1)\ f(a)<0,\ f(b)>0\ ;$$
$$(2)\ f'(x)>0,\ x\in[a,b]\ ;$$
$$(3)\ f''(x)>0,\ x\in[a,b]\ .$$

那么，方程 $f(x)=0$在(a,b)内有唯一实数根x^*，且当取$x_0=b$，按牛顿迭代公式给出的点列$\{x_n\}$收敛于 x^* .



牛顿法的误差估计

由微分中值定理得

$$f(x_n)-f(x^*)=f'(\eta)(x_n-x^*)(\eta\text{在}x_n\text{和}x^*\text{之间})$$

因为$f(x^*)=0$, 所以

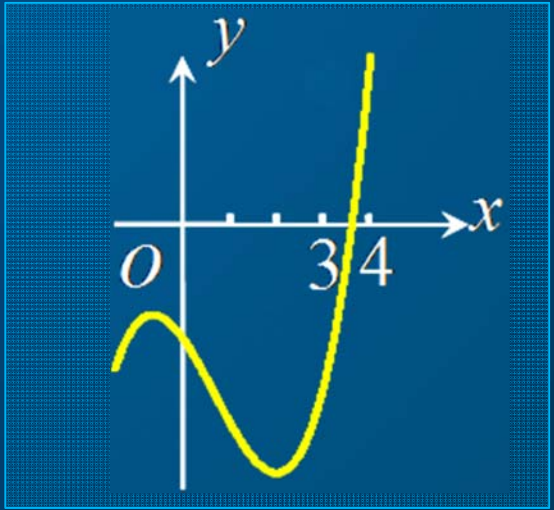
$$x_n-x^*=\frac{f(x_n)}{f'(\eta)}$$

记$m=\min\limits_{[a,b]}|f'(x)|$, 则得

$$|x_n-x^*|\le\frac{|f(x_n)|}{m}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x*}{(x*-x_k)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

例3 用切线法求方程$x^3-2x^2-4x-7=0$的近似解, 使误差不超过 0.01 .



解: 设$f(x)=x^3-2x^2-4x-7$. 由图可见方程有唯一的正实根 x^*，且

$$f(3)=-10，f(4)=9.$$

因为[3,4]为一隔根区间, 在[3,4]上有

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)>0,$$

$$f''(x)=6x-4=2(3x-2)>0,$$

$$m=\min_{[3,4]}|f'(x)|=f'(3)=11.$$

故取$x_0=4$, 得 $x_1=4-\dfrac{f(4)}{f'(4)}=4-\dfrac{9}{28}=3.68,$

$$|x_1-x^*|\le\frac{|f(x_1)|}{m}=\frac{1.03}{11}=0.09.$$

故x_1的精度不够. 再求

$$x_2=3.68-\frac{f(3.68)}{f'(3.68}=3.68-\frac{1.03}{21.9}=3.63,$$

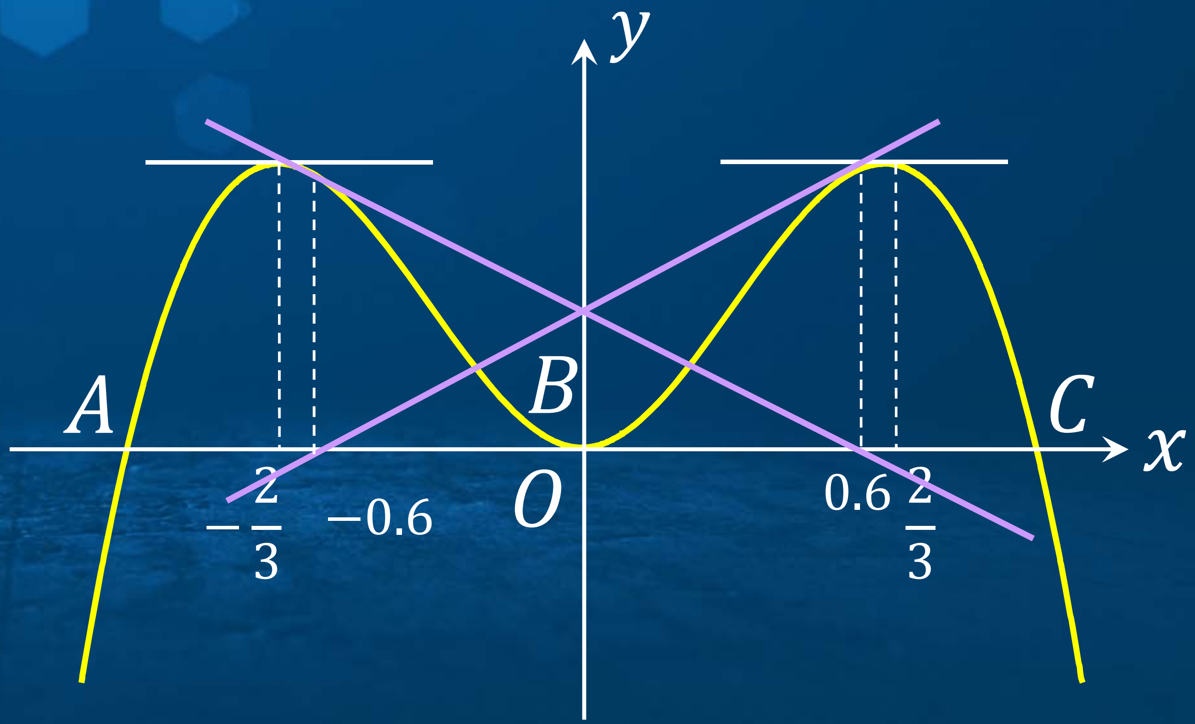
$$|x_2-x^*|\le\frac{|f(x_2)|}{m}=\frac{0.042}{11}<0.004<0.01.$$

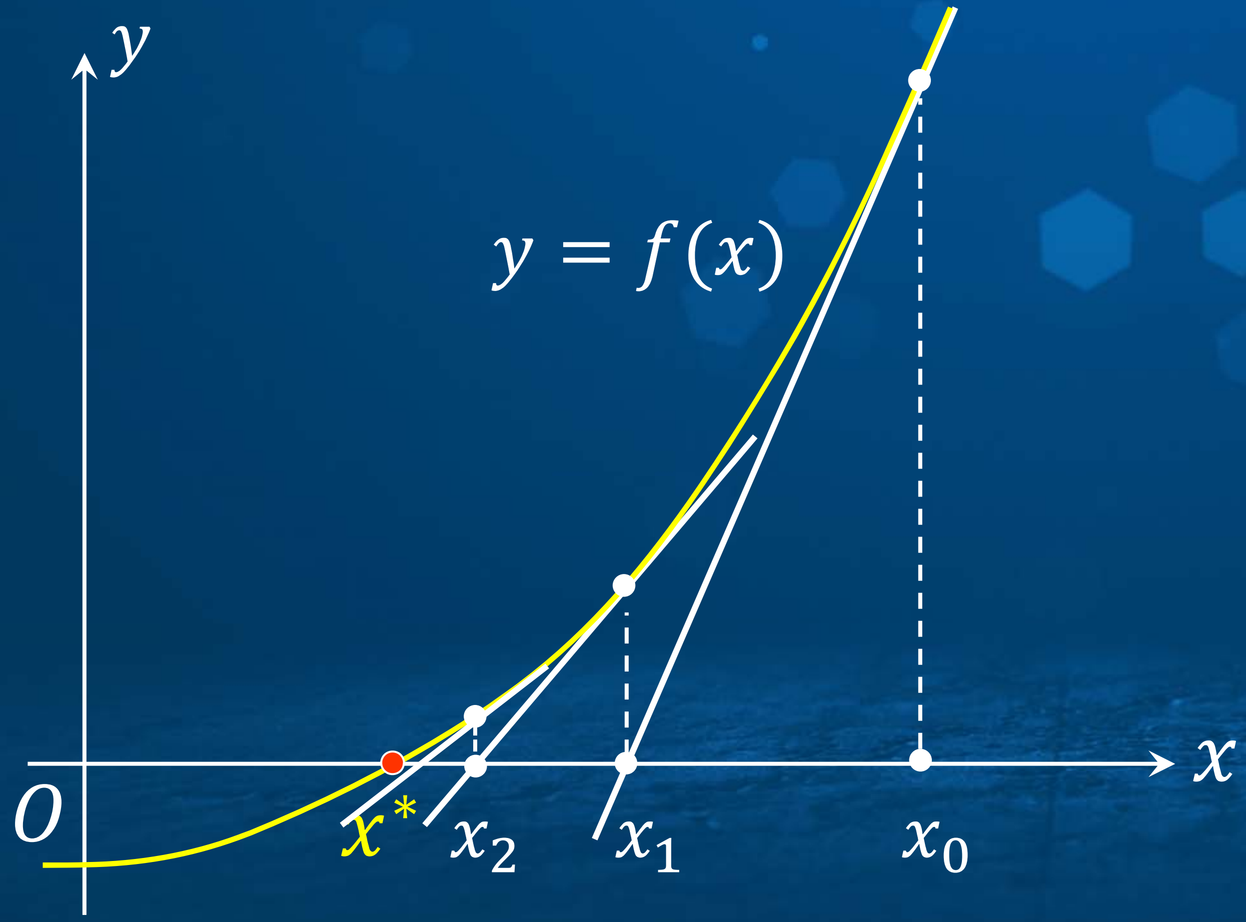
因此得满足精度要求的近似解 $x^*\approx3.63.$

例4 用牛顿法求解方程$f(x)=0$，其中$f(x)=\begin{cases}x^2-x^3, & x\ge 0,\\ x^2+x^3, & x<0.\end{cases}$

分别选取初始点为 $x_0=0.4$ 和 $x_0=0.6$.

k	$x_k(x_0=0.4)$	$x_k(x_0=0.6)$
0	0.40000	0.600
1	0.10000	−0.600
2	0.04706	0.600
3	0.02293	−0.600
4	0.01133	0.600
5	0.00563	−0.600





牛顿迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$k = 0,1,2,\cdots.$$

优点：是收敛速度比较快

缺点：对初始值要求高，并且需要计算导数