哈爾濱工業大學

第22讲 二维随机变量函数的分布

对二维随机变量函数$Z=g(X,Y)$,

已知二维随机变量(X,Y)的分布，

如何求$Z=g(X,Y)$的分布？

离散型随机变量函数的分布

设二维离散型随机变量(X, Y)的分布列为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots$$

则$Z=g(X, Y)$是一维离散型随机变量，用

$z_k=g(x_i, y_j)(k=1,2,\cdots)$表示Z的取值,则Z的分布列

$$P(Z=z_k)=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{g(X,Y)=z_k} P(X=x_i, Y=y_j),$$

$$k=1,2,\cdots$$

例1 设X与Y的联合分布列为

$Y \backslash X$	1	-2
-1	0.1	0.2
2	0.3	0.4

$Z=X+Y, W=XY$，求Z, W的分布列.

解 Z的所有取值为$-3, 0, 3$

$$P(Z=-3)=P(X+Y=-3)=P(X=-2,Y=-1)=0.2,$$

$$P(Z=0)=P(X+Y=0)=P(X=1,Y=-1)+P(X=-2,Y=2)=0.5,$$

$$P(Z=3)=P(X+Y=3)=P(X=1,Y=2)=0.3,$$

Z	-3	0	3
P	0.2	0.5	0.3

W	-4	-1	2
P	0.4	0.5	0.1

例2 设X与Y的联合分布列为

$Y \backslash X$	1	-2
-1	0.1	0.2
2	0.3	0.4

$U=\max(X, Y)$, $V=\min(X, Y)$, 求U与 V的联合分布列.

解 U的所有取值为$-1, 1, 2$,

V的所有取值为$-2, -1, 1$.

$$P(U=-1, V=-2)=P(X=-2, Y=-1)=0.2,$$

$$P(U=-1, V=-1)=0, P(U=-1, V=1)=0,$$

$$P(U=1, V=-2)=0, \quad P(U=V=1)=0,$$

$$P(U=1, V=-1)=P(X=1, Y=-1)=0.1,$$

$$P(U=2, V=-2)=P(X=-2, Y=2)=0.4, \quad P(U=2, V=-1)=0,$$

$$P(U=2, V=1)=P(X=1, Y=2)=0.3.$$

$V \backslash U$	-1	1	2
-2	0.2	0	0.4
-1	0	0.1	0
1	0	0	0.3

例3 设随机变量$Z \sim U[-2,2]$,随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & Z\le -1,\\ 1, & Z>-1,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & Z\le 1,\\ 1, & Z>1.\end{cases}$$

求(X,Y)的分布列.

解 $Z \sim U[-2,2]$

$$f_Z(z)=\begin{cases}1/4, & -2\le z\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y \ X	−1	1
−1	1/4	1/2
1	0	1/4

$$P(X=Y=-1)=P(Z\le -1, Z\le 1)=P(Z\le -1)=\int_{-2}^{-1}1/4\mathrm{dz}=1/4,$$

$$P(X=-1,Y=1)=P(Z\le -1, Z>1)=0,$$

$$P(X=1,Y=-1)=P(-1<Z\le 1)=\int_{-1}^{1}1/4\mathrm{dz}=1/2,$$

$$P(X=Y=1)=P(Z>-1, Z>1)=P(Z>1)=\int_{1}^{2}1/4\mathrm{dz}=1/4.$$

例4 若X和Y相互独立, 它们分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布, 证明$Z=X+Y$服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

证明 由$X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$得

$$P(X=i)=\frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1},\quad i=0,1,2,\cdots$$

$$P(Y=j)=\frac{\lambda_2^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda_2},\quad j=0,1,2,\cdots$$

例4 若X和Y相互独立, 它们分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布, 证明$Z=X+Y$服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

证明 $P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{(k-i)}}{i!(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{(k-i)}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{(k-i)}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\quad(k=0,1,\cdots)$$

结论

1. $X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且$X_i \sim P(\lambda_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$

2. $X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且均服$B(1, p)$,则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n, p).$$

3. $X_1, X_2, \cdots, X_k$独立且$X_i \sim B(n_i, p)(i = 1, 2, \cdots, k)$则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim B(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p).$$

连续型随机变量函数的分布

- 设(X, Y)是二维连续型随机变量，其概率密度为$f(x, y)$, $Z=g(X,Y)$,求Z的概率密度$f_Z(z)$或分布函数$F_Z(z)$?

分布函数法

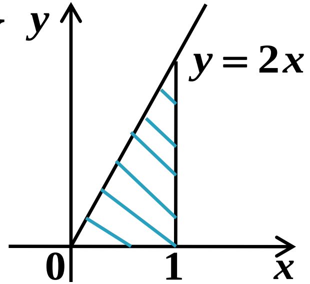
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{g(X,Y)\le z\}$$

$$=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z).$$

例5 二维随机变量(X,Y)的概率密度

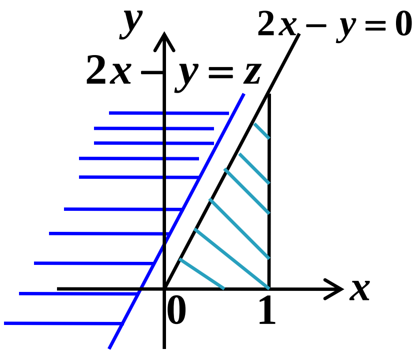
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



求$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)$.

$$=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当$z\le 0$时，画$2x-y\le z$ 的区域图，

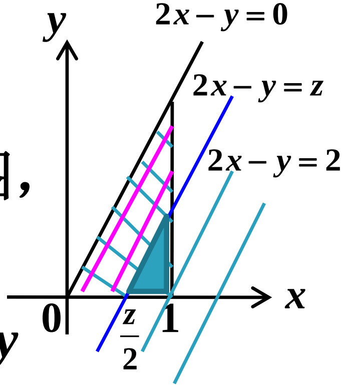
与$f(x,y)$的非零区域无交集，

$f(x,y)=0$，从而$F_Z(z)=0$.

例5 二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.



解 当$0<z<2$时，画$2x-y\le z$的区域图，

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)$.

$$=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint\limits_{2x-y>z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=1-\int_{z/2}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}1\mathrm{d}y=1-(1-z/2)^2=z-z^2/4.$$

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$.

例5 二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z-z^2/4, & 0<z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-z/2, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

连续型随机变量$Z=X+Y$的分布

➢ 设X和Y的联合密度为 $f(x,y)$, 则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le Z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

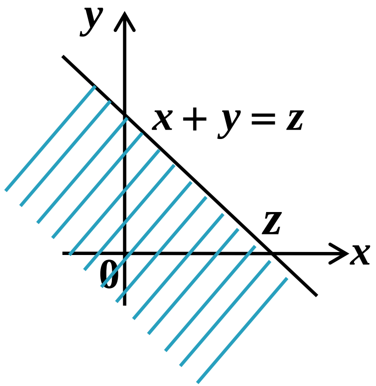
固定z, x,
令$y=u-x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\mathrm{d}u.$$



故Z=X+Y的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

由X和Y的对称性，$f_Z(z)$又可写成

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

卷积公式 当X与Y独立时，称Z=X+Y的概率密度公式为**卷积公式**，即

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x,$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

例6 设$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$,且$X$和$Y$独立,

则$Z = X + Y \sim N(0,2)$.

证明 由卷积公式有 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\frac{z}{2})^2} \mathrm{d}x$$

$x - \frac{z}{2} = \frac{t}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

即 $Z = X + Y \sim N(0,2)$.

推广 设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,且$X$和$Y$独立,

则$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

一般结论 n个独立正态变量的线性组合仍为正态分布，即

设$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,且他们独立，则其线性组合 $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n + a_0 \sim N(\mu, \sigma^2)$.

其中 $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n + a_0$,

$$\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2.$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$是不全为零的常数.

例7 设X与Y独立, X, Y的概率密度分别为

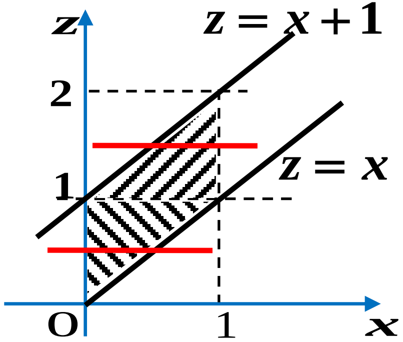
$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解1 由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1, 0\le z-x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z 2x\mathrm{d}x=z^2, & 0\le z<1,\\ \int_{z-1}^1 2x\mathrm{d}x=2z-z^2, & 1\le z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

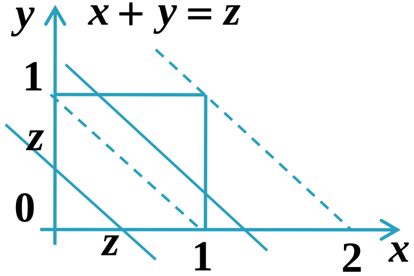


例7 设X与Y独立, X, Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解2 分布函数法



$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

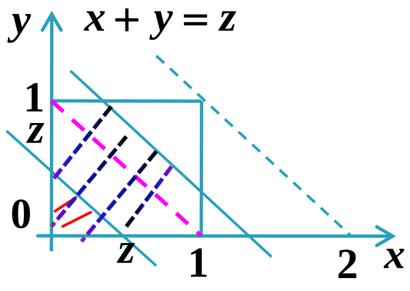
$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解2 分布函数法

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0;$

当$0\le z<1$时，$F_Z(z)=\int_0^z 2x\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{d}y=\dfrac{z^3}{3},$

当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1}2x\mathrm{d}x=z^2-\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{1}{3},$

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1.$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z^3}{3}, & 0\le z<1,\\ z^2-\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{1}{3}, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}z^2, & 0\le z<1,\\ 2z-z^2, & 1\le z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例8 设$P(X=1)=0.3$, $P(X=2)=0.7$, Y的概率密度为$f_Y(y)$, X与Y独立，求$Z=X+Y$ 的概率密度.

解 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=P(X=1, X+Y\le z)+P(X=2, X+Y\le z)$$

$$=P(X=1,Y\le z-1)+P(X=2,Y\le z-2)$$

$$=P(X=1)P(Y\le z-1\mid X=1)+P(X=2)P(Y\le z-2\mid X=2)$$

$$=0.3P(Y\le z-1)+0.7P(Y\le z-2)$$

$$=0.3F_Y(z-1)+0.7F_Y(z-2)$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0.3f_Y(z-1)+0.7f_Y(z-2).$$

瑞利分布

例9 设X与Y独立，且服从同一正态分布$N(0,\sigma^2)$，求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布.

解 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$,

当$z>0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{x=r\cos\theta}{\underset{y=r\sin\theta}{=\!=\!=\!=}}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)rdr=1-\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$

- 此分布称为瑞利分布.

Max(X,Y)及min(X,Y)的分布

- 设X,Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$, 求$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布函数$F_M(z)$和$F_N(z)$.

$M=\max(X,Y)$分布函数为

$$F_M(z) = P(M \le z) = P(\max(X,Y) \le z)$$

$$= P(X \le z, Y \le z) \overset{\text{独立}}{=} P(X \le z)P(Y \le z),$$

$$\boxed{F_M(z) = F_X(z)F_Y(z).}$$

$N=\min(X,Y)$的分布函数为

$$F_N(z)=P(N\le z)=P(\min(X,Y)\le z)$$

$$=1-P(\min(X,Y)>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$\overset{独立}{=}1-P(X>z)P(Y>z),$$

$$\boxed{F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].}$$

n个独立随机变量的最值分布

- 设$X_1,\ldots,X_n$是n个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i),\ i=1,2,\cdots,n.$

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$和$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\max}(z)&=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),\\ F_{\min}(z)&=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].\end{aligned}}$$

若$X_1,\ldots,X_n$独立同分布于相同的分布函数$F(z)$,则

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\max}(z)&=[F(z)]^n,\\ F_{\min}(z)&=1-[1-F(z)]^n.\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned} f_{\max}(z)&=n[F(z)]^{n-1}f(z),\\ f_{\min}(z)&=n[1-F(z)]^{n-1}f(z).\end{aligned}}$$

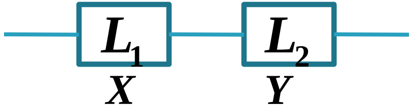
X_i是连续随机变量且有相同概率密度$f(z)$

例10 设电子仪器由两个相互独立的电子装置L_1,L_2组成，组成方式有两种(1) L_1与L_2串联；(2) L_1与L_2并联. 已知 L_1与L_2的寿命分别为X 与Y, 其分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$. 在两种联结方式下，分别求仪器寿命Z的概率密度.

解 (1) L_1与L_2串联；



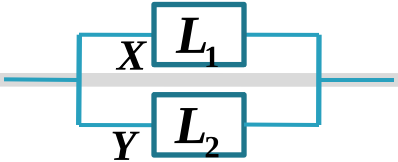
当L_1与L_2有一个损坏时，仪器就停止工作,所以仪器寿命为 $Z=\min(X,Y)$. 已知X, Y的分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则Z的分布函数为

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$



(2) L_1与L_2并联.

当L_1与L_2都损坏时，仪器才停止工作,所以仪器寿命为 $Z=\max(X,Y)$.已知X,Y的分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则Z的分布函数为

$$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z}+\beta\mathrm{e}^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

谢　　谢！