《高等数学》全程教学视频课

第77讲 直角坐标系下三重积分的计算

三重积分的实际背景

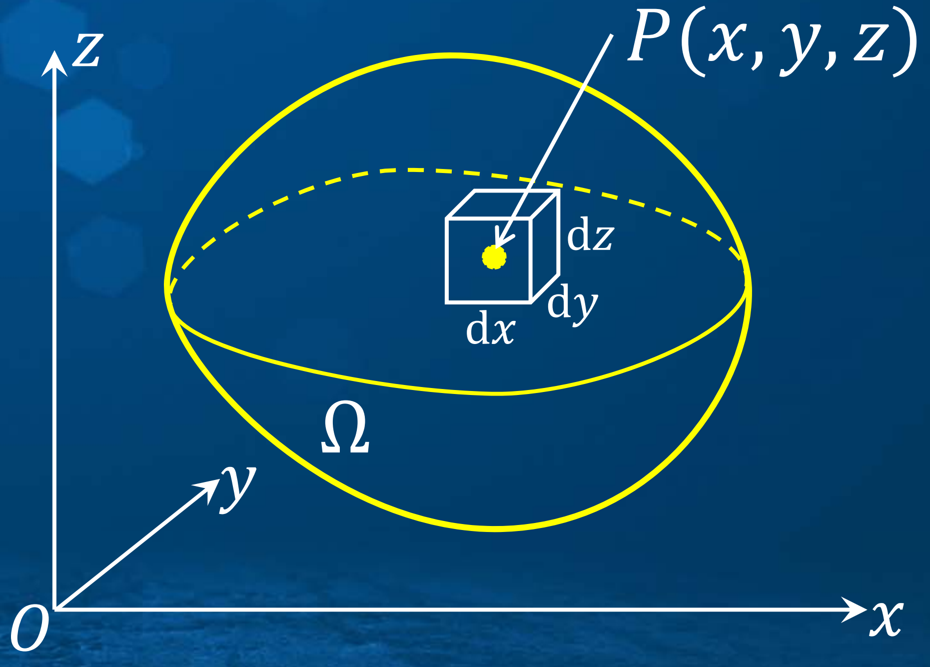
占有空间区域Ω，且体密度为

$$\mu = f(x,y,z),(x,y,z) \in \Omega$$

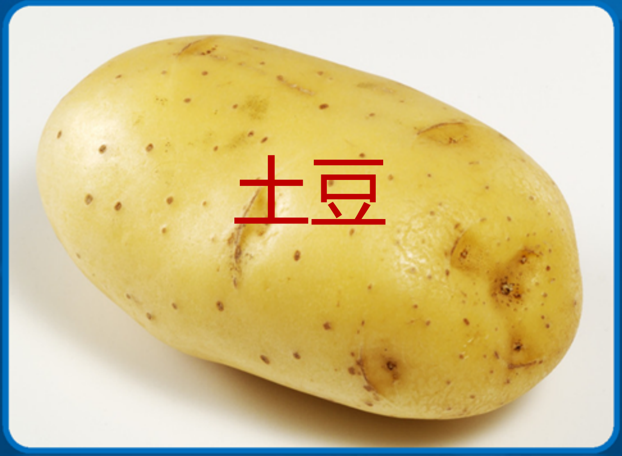
的空间物体的质量

$$M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



体积元素 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$


土豆

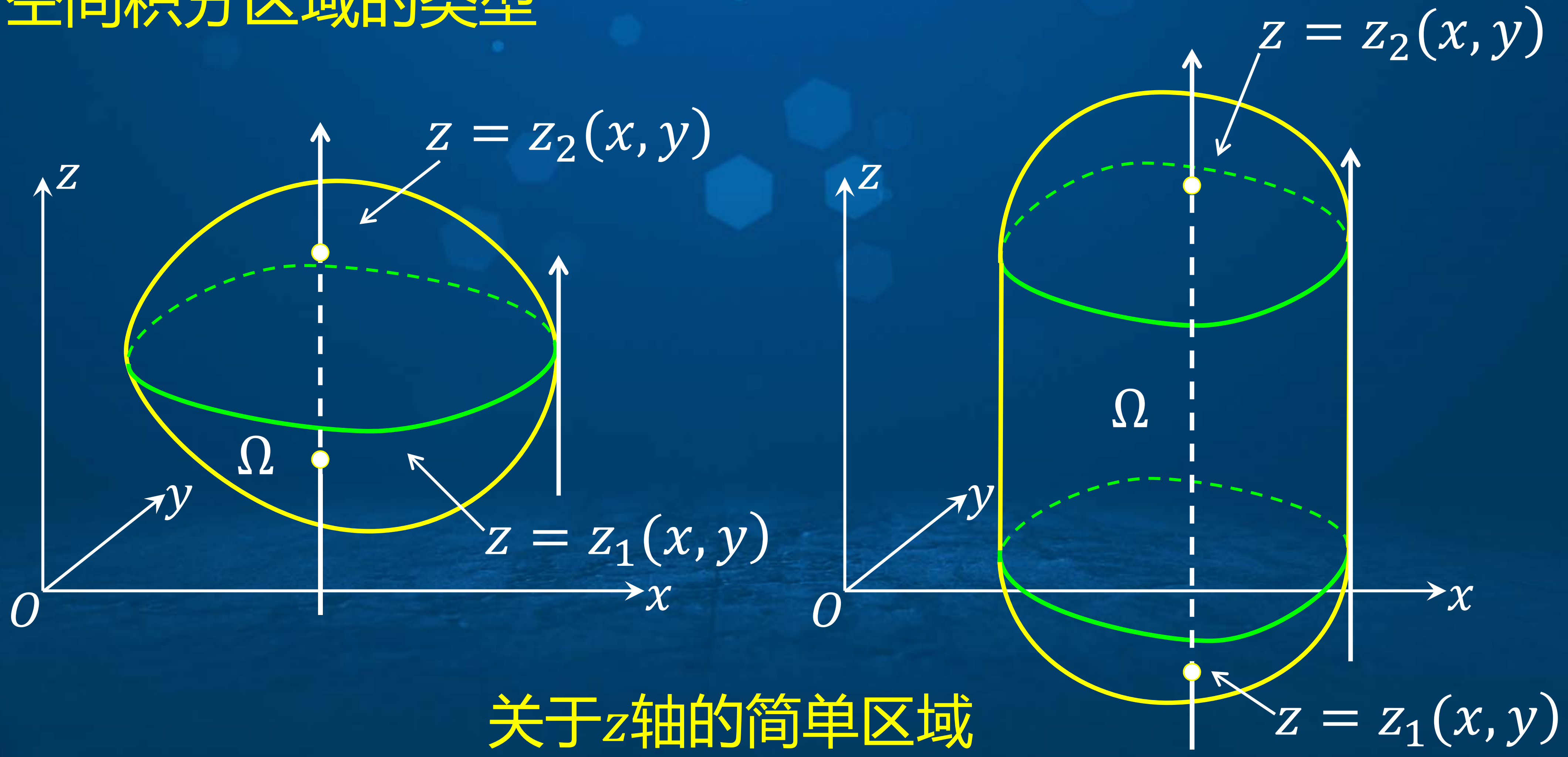

土豆丝


土豆片


土豆丁

- 投影区域积分法
- 截面法
- 对称区域上的三重积分

空间积分区域的类型



关于z轴的简单区域

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$

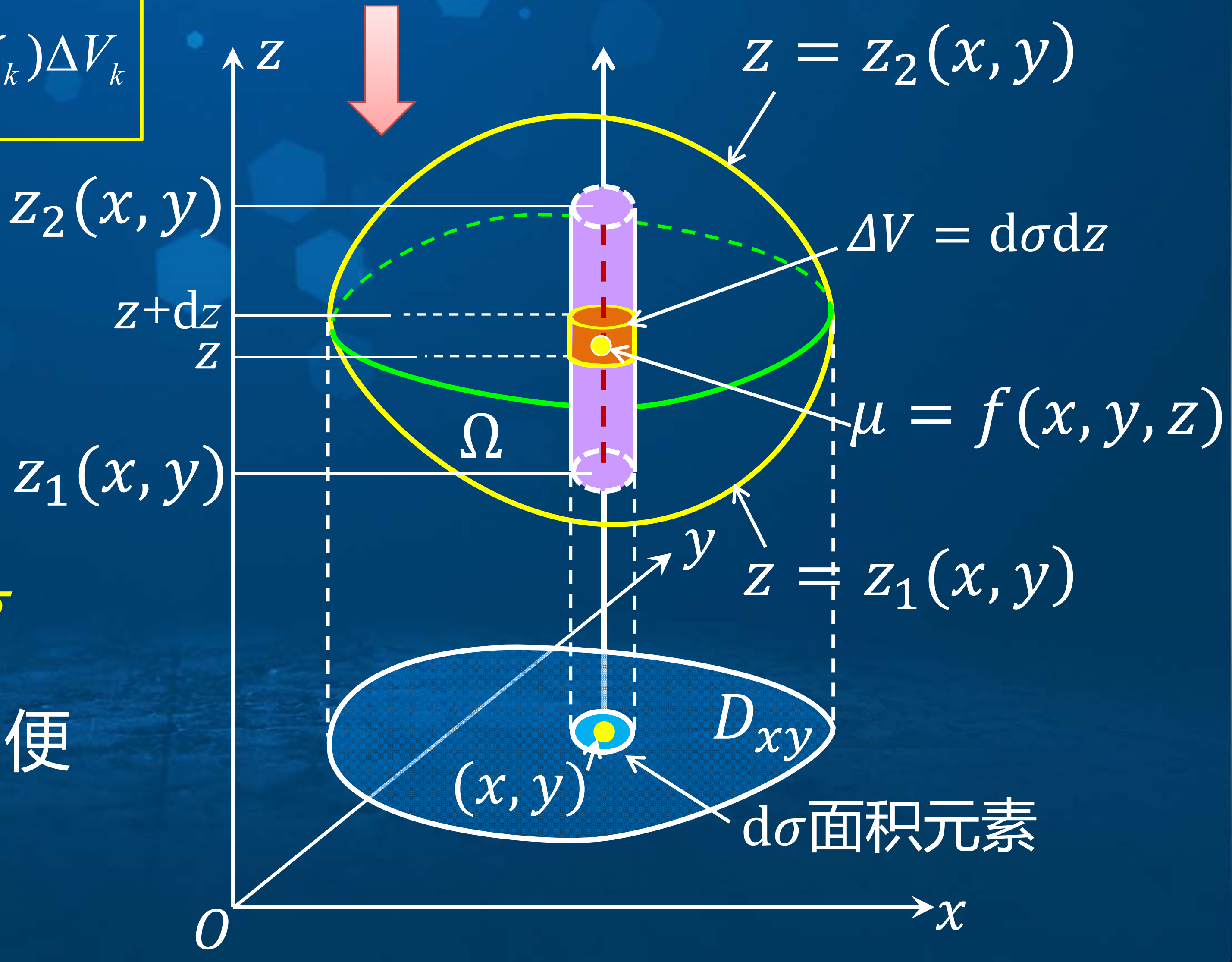
ΔV对应的质量约为

$$f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}z$$

细柱体对应的质量为

$$\mathrm{d}M=\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\sigma$$

将每个小柱体的质量相加，便得所求空间物体的质量.



$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}M=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma.$$

三重积分计算的“先一后二”积分法 —— 投影法

一般记作： $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

如果投影区域D_{xy}为X-型积分区域，则有 累次积分法

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

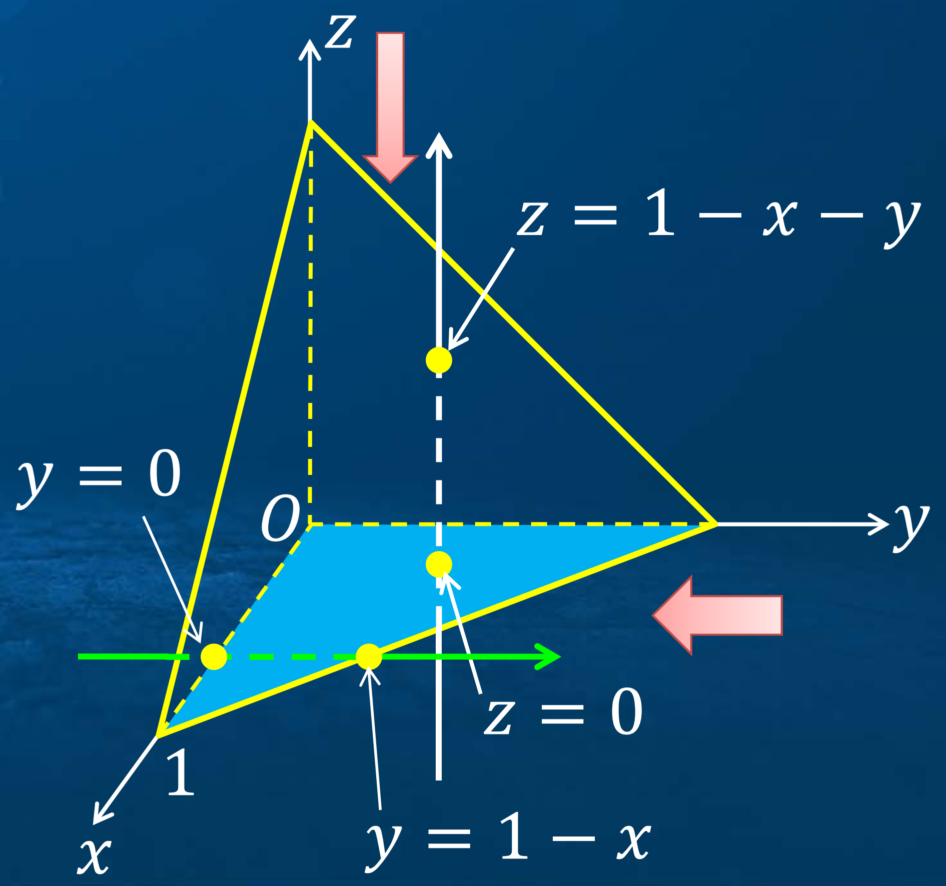
例1 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}V}{(1+x+y+z)^3}$，其中Ω是平面$x+y+z=1$与三个坐标平面围成的空间闭区域．

“先一后二”积分法的基本步骤：

第一步：作图，确定类型和上下曲面函数，得z积分限.

第二步：投影，并确定投影区域类型，确定x、y的积分限.

第三步：写出累次积分，逐次计算定积分得到结果.



例2 计算三重积分$I=\iiint_{\Omega} xyz^2\,\mathrm{d}V$，其中

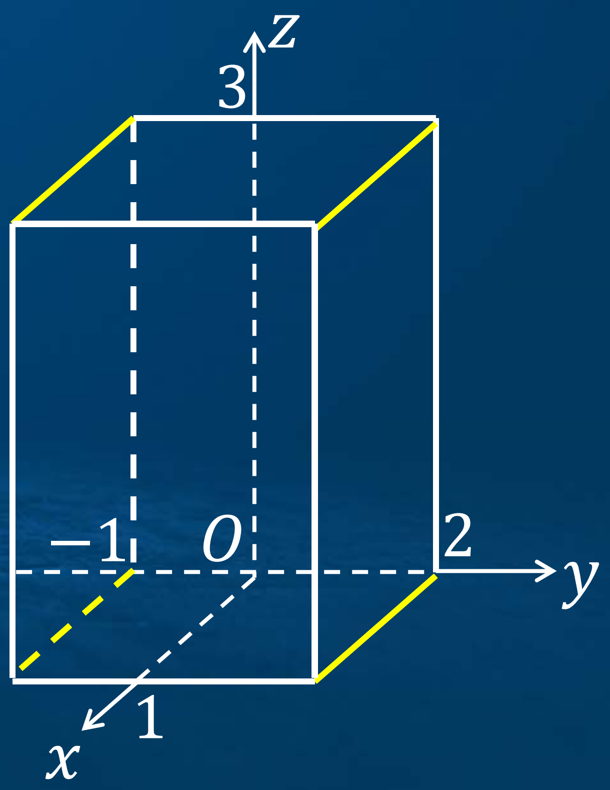
$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\}.$$

特别地，对于立方体积分区域：

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ m\le z\le n\}$$

有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\int_m^n f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$



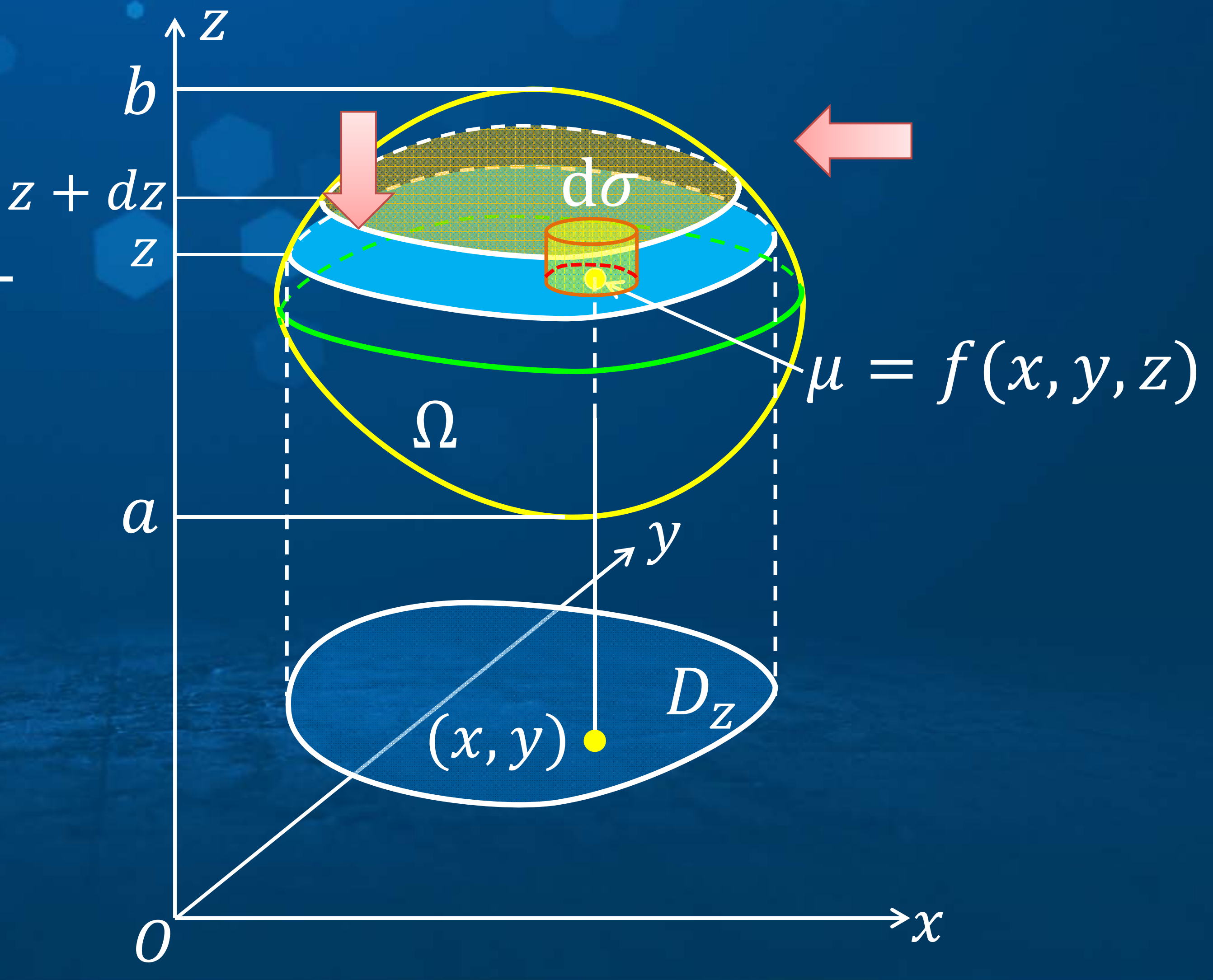
薄片上$d\sigma$对应小块质量为

$$f(x,y,z)\,d\sigma\,dz$$

区间$[z,z+dz]$所对应的薄片的质量

$$\left[\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,d\sigma\right]dz$$

将这些小块薄片的质量相加便得到立体的质量M.



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}M=\int_a^b\left[\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}z.$$

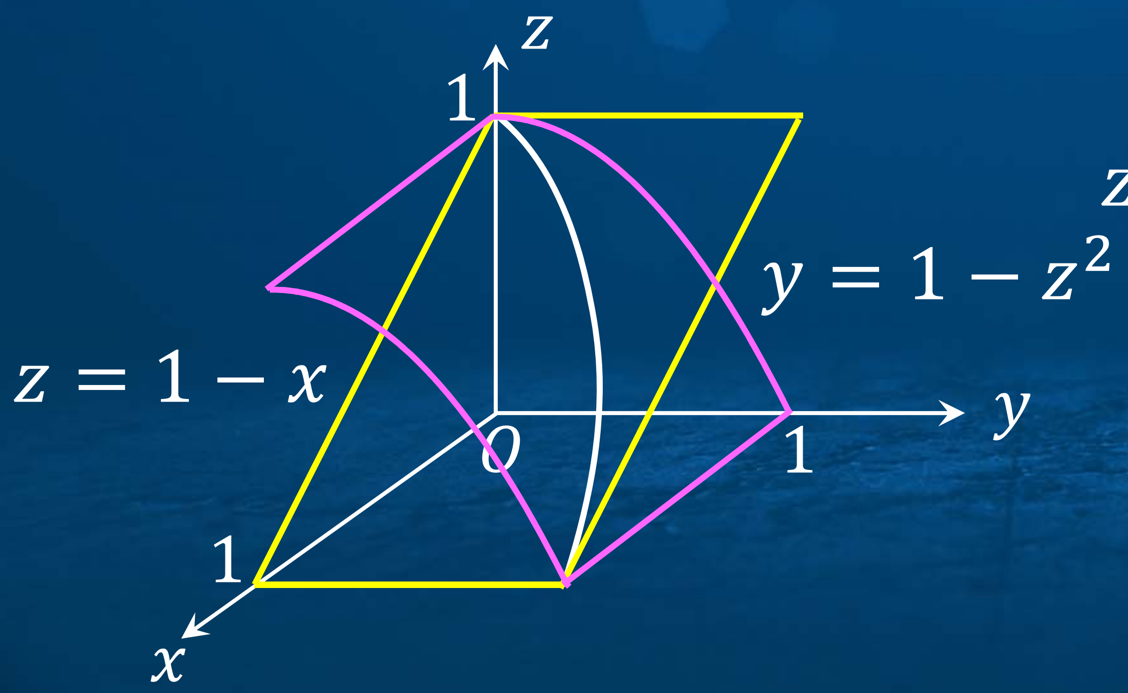
一般记作：$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.$

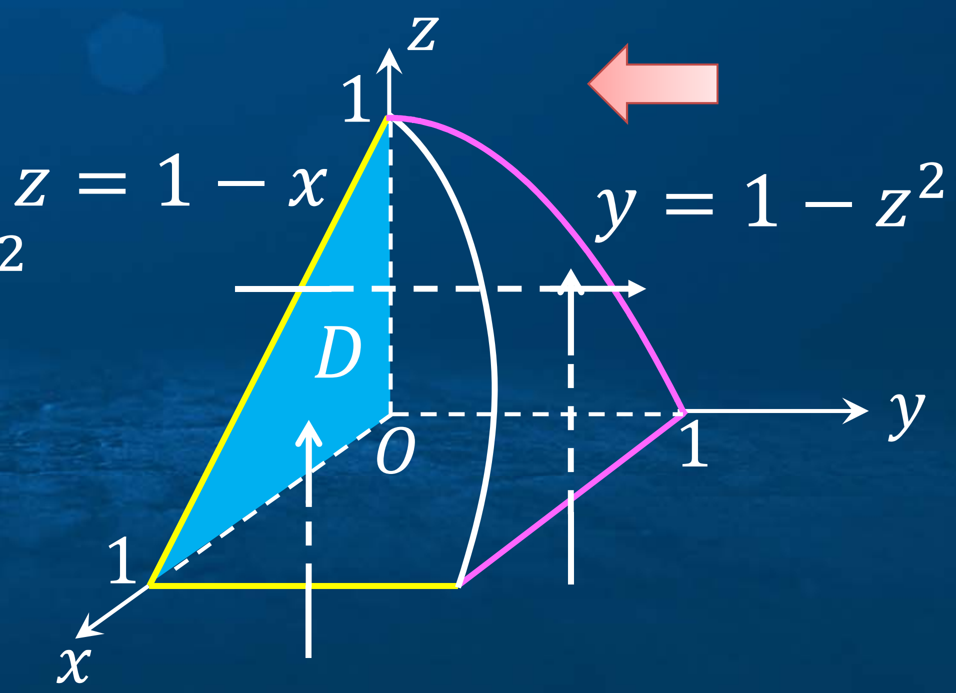
三重积分计算的“先二后一”积分法——截面法

如果投影区域$D(z)$为X-型积分区域，则有

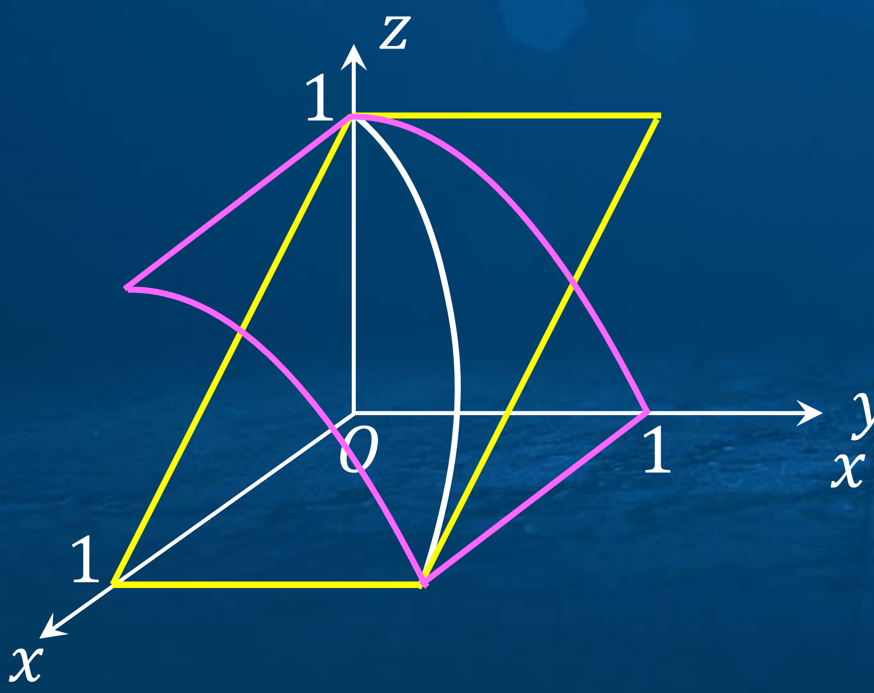
$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left\{\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}\left[\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}z.}$$

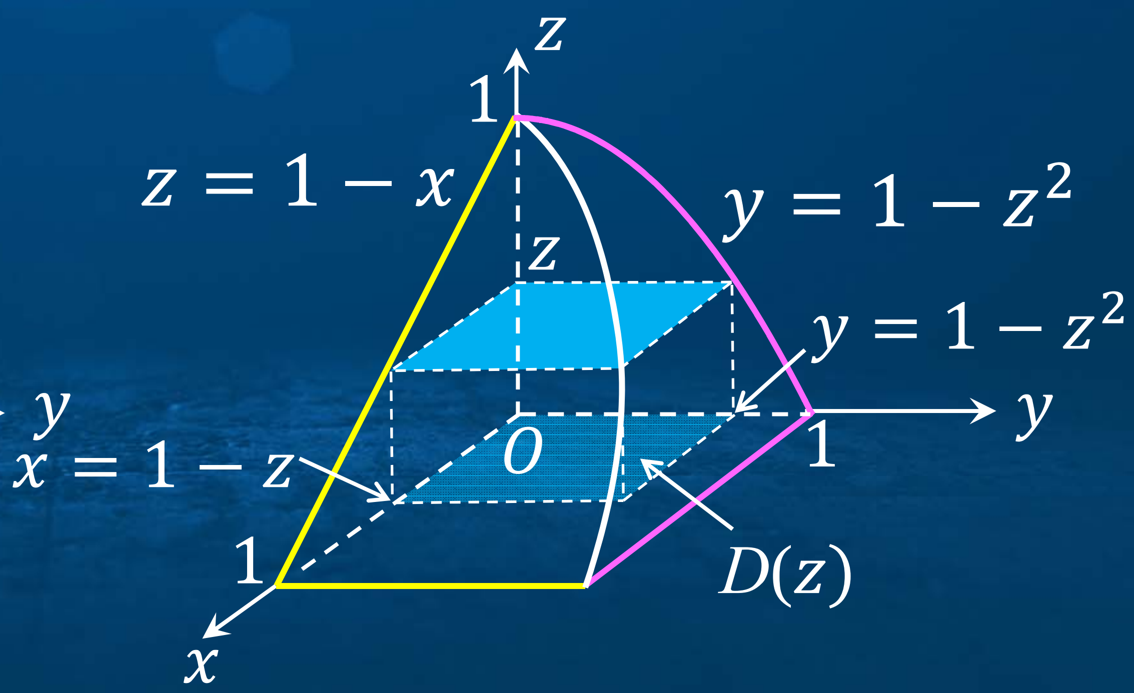
例3 试用两种不同方法将三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$化为累次积分，其中Ω为由平面$z=1-x$、抛物柱面$y=1-z^2$及坐标面$x=0,z=0,y=0$所围成的空间闭区域．





例3 试用两种不同方法将三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$化为累次积分，其中Ω为由平面$z=1-x$、抛物柱面$y=1-z^2$及坐标面$x=0, z=0, y=0$所围成的空间闭区域．





设函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上连续, 积分域关于xOy 坐标面对称，Ω位于xOy 面上方的部分为Ω_1, 在Ω上

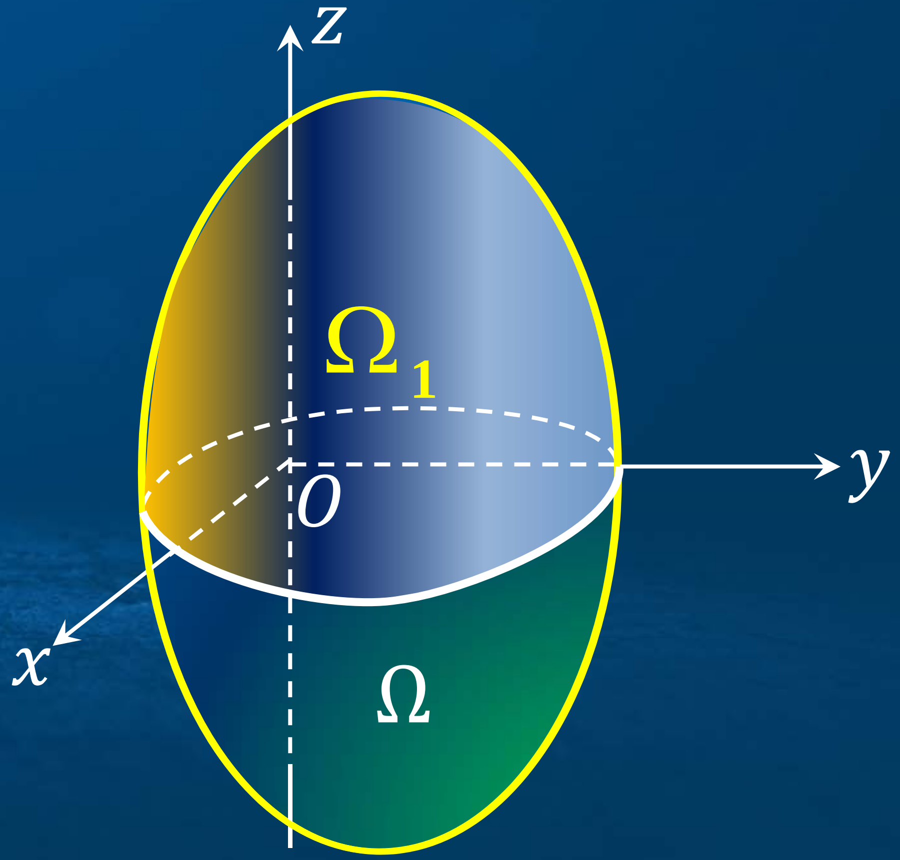
(1) 如果$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V.$$

(2) 如果$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 0.$$

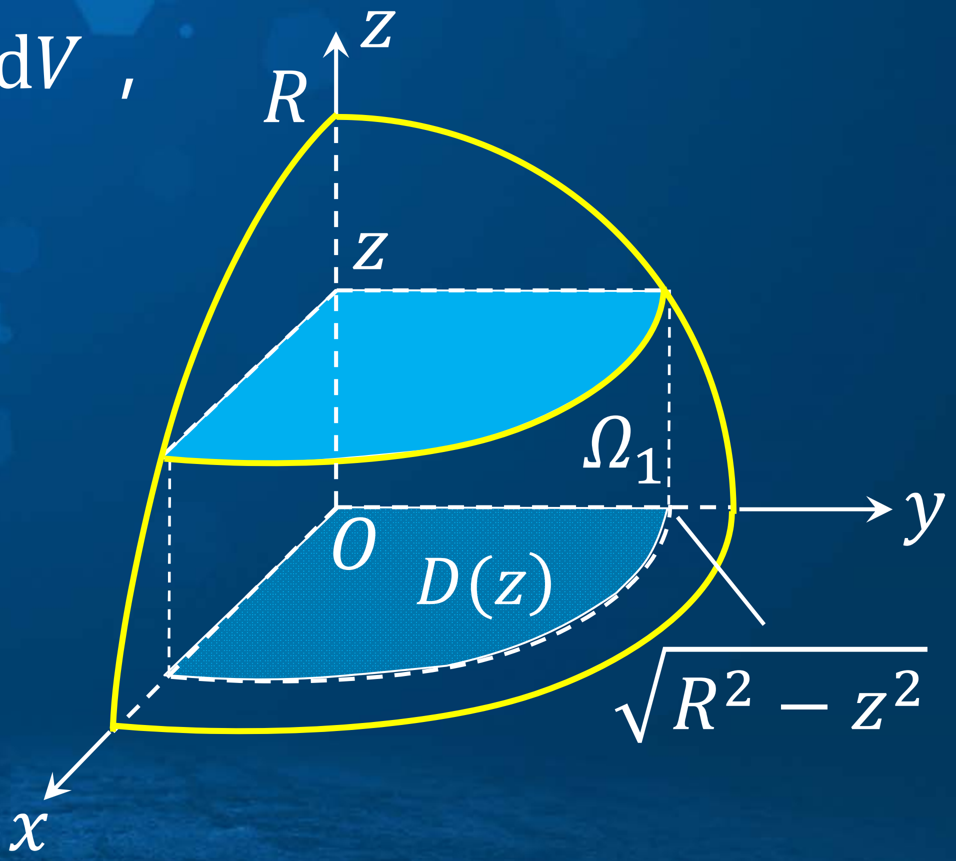
偶倍奇零



例4 计算三重积分$I=\iiint_{\Omega}(x+y+2z)\mathrm{d}V$，

其中Ω为半球体

$$x^2+y^2+z^2\le R^2(z\ge 0).$$



【例4解】 由于Ω关于yOz平面和xOz平面对称，所以

$$\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}y\mathrm{d}V=0.$$

因此 $I=\iiint_{\Omega}2z\mathrm{d}V=4\iiint_{\Omega_1}2z\mathrm{d}V$

$$=4\int_0^R 2z\,\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}\sigma=8\cdot\frac{1}{4}\int_0^R z\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi R^4}{2}.$$