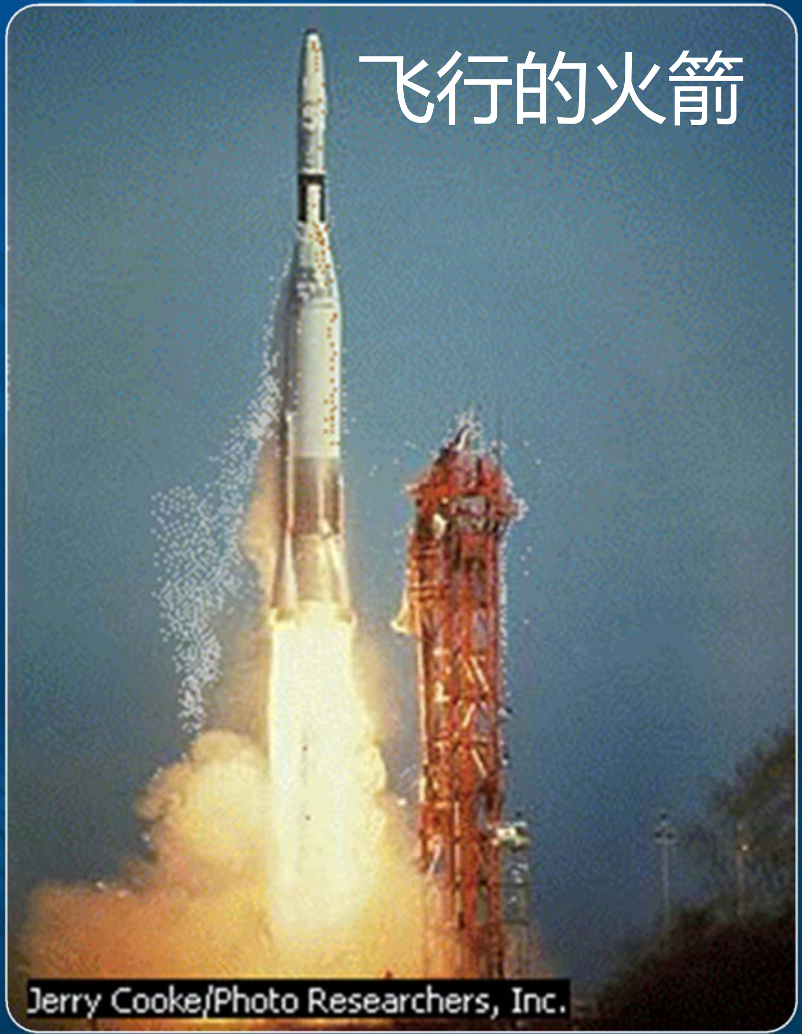
《高等数学》全程教学视频课

第62讲 多元函数的概念


起伏的山峦


飞行的火箭
Jerry Cooke/Photo Researchers, Inc.

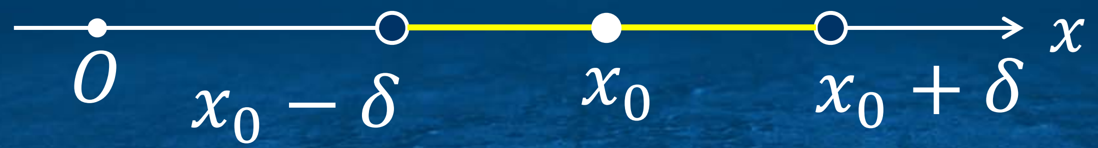
- 点集的基本知识
- 多元函数的定义
- 二元函数的几何表示

一维空间的邻域

数轴上以x_0为心δ为半径的开区间

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$$

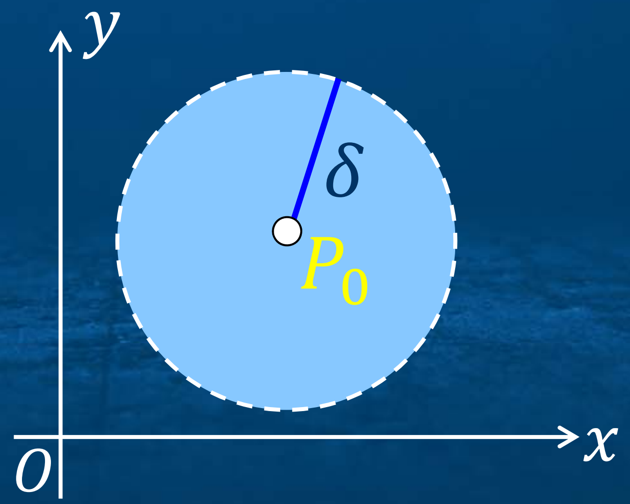
$$=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$（区间邻域）



二维空间的邻域

平面上以$P_0\ (x_0, y_0)$为心δ为半径的开圆盘

$$U(P_0,\ \delta\ ) = \left\{(x, y) \middle| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$ （圆邻域）

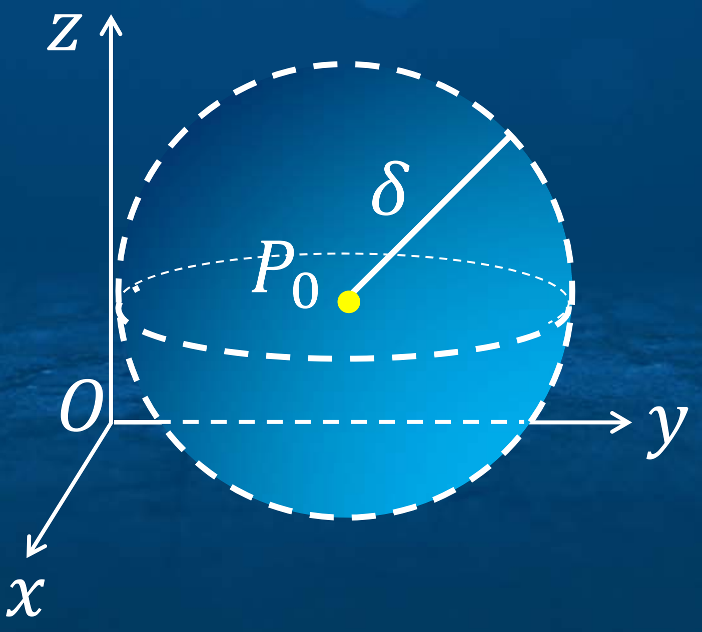


三维空间的邻域

空间上以$P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ 为心δ为半径的开球

$$U(P_0\,,\,\delta) = \left\{(x, y, z\,)\,\middle|\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\right\}$$

（球邻域）



定义1 设$\mathbf{x}_0$是空间$\mathbb{R}^n$中的一点，δ是一个正常数，称空间$\mathbb{R}^n$中的点集

$$U(\mathbf{x}_0,\delta)=\{\mathbf{x}|\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\}$$

为点$\mathbf{x}_0$的一个δ邻域. 点$\mathbf{x}_0$称为该邻域的中心，δ称为半径 .

点$\mathbf{x}_0$的去心δ邻域：

$$U_0(\mathbf{x}_0,\delta)=\{\mathbf{x}|\ 0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\}$$

说明：若不需要强调邻域半径δ, 则分别记为$U(\mathbf{x}_0)$，$U_0(\mathbf{x}_0)$.

n维空间邻域 $U(\mathbf{x}_0,\delta)=\{\mathbf{x}|\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\}$，$\mathbf{x}_0,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$

$n=1,2,3$分别对应于区间邻域、圆邻域和球邻域

- 其他的距离及其的邻域

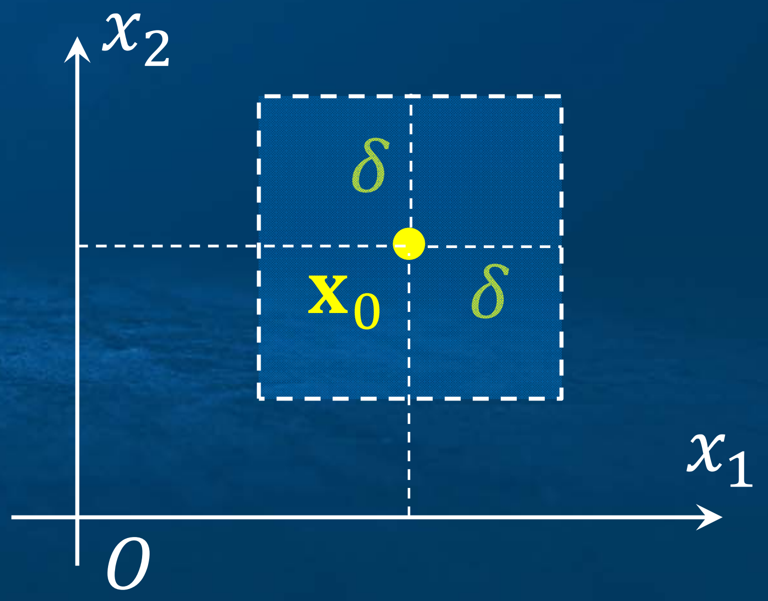
例如，在二维空间可定义距离

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=\max\{|x_1-x_1^{(0)}|,|x_2-x_2^{(0)}|\}$$

其中 $\mathbf{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)}),\mathbf{x}=(x_1,x_2)$

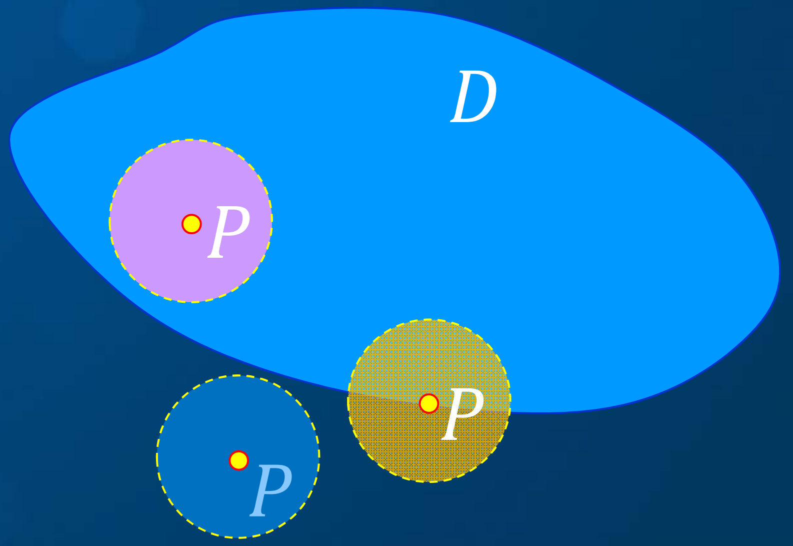
$$U(\mathbf{x}_0,\delta)=\{\mathbf{x}|\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\}$$

所表示的几何图形是什么？



与集合有关的点的概念

(1) 若存在点P的某邻域 $U(P) \subset D$,则称P为D的**内点**；



(2) 若存在点P的某邻域 $U(P) \cap D = \varnothing$,则称P为D的**外点**；

(3) 若点P的任一邻域 $U(P)$ 中既含D的点也含不是D的点，则称P为D的**边界点**.

思考：D的边界点属于D吗？

可能属于D，也可能不属于D.

重要的平面点集

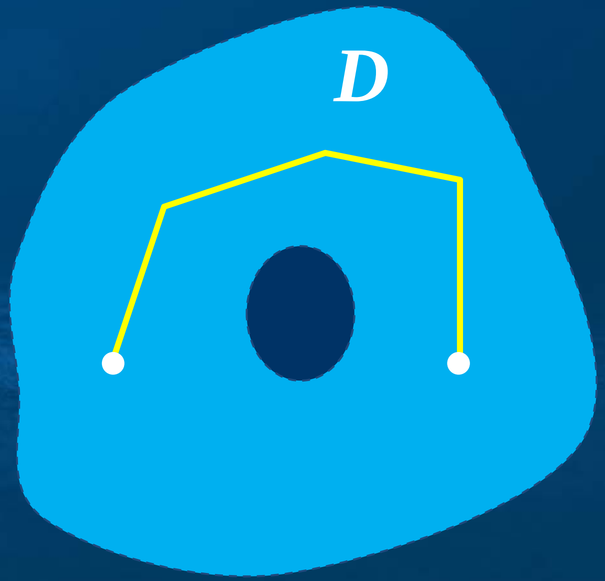
开集：如果点集D的点都是D的内点，则称D为开集；

闭集：如果点集D的余集是开集，则称D为闭集；

连通集：如果点集D内任何两点，

都可以用D中的折线连结起来，

则称D为连通集；



重要的平面点集

开区域：连通的开集称为开区域或区域；

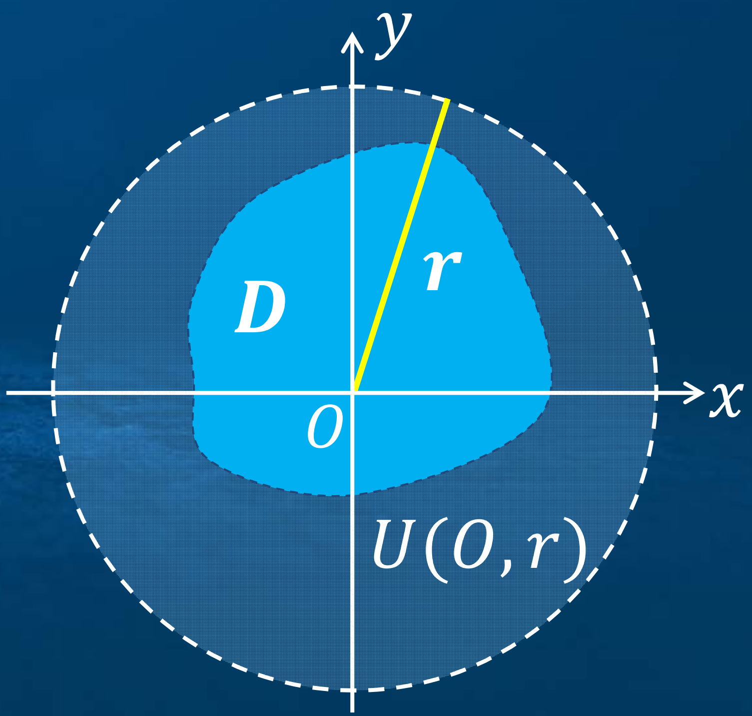
闭区域：开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域；

有界集：对于平面点集D，如果

存在某一正数r，使得

$$D \subset U(O,r),$$

其中O为原点，则称D为有界集．



例1 下述点集中哪些是开区域，哪些是闭区域，哪些不是区域?

（1）$\{(x,y)\mid x+y>0\}$

（2）$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$

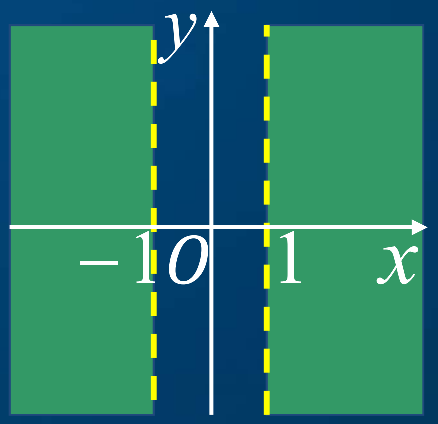
开区域

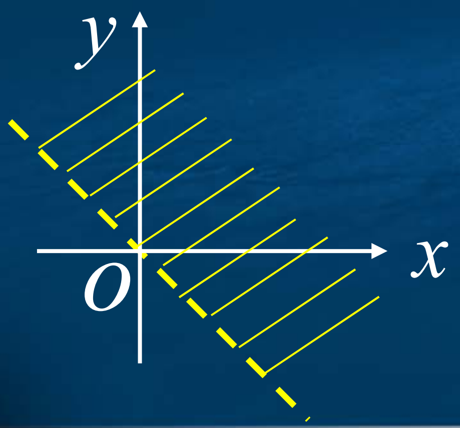
（3）$\{(x,y)\mid x+y\geq 0\}$

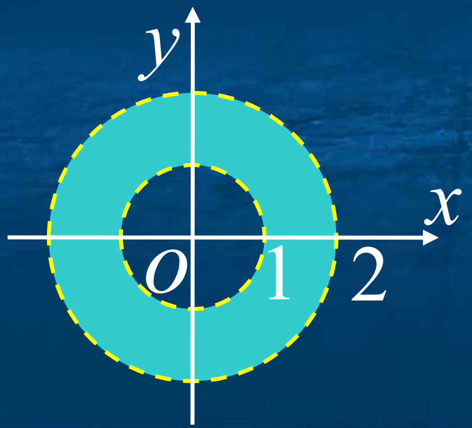
（4）$\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

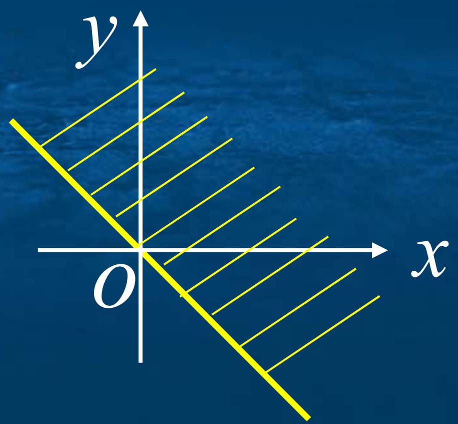
闭区域

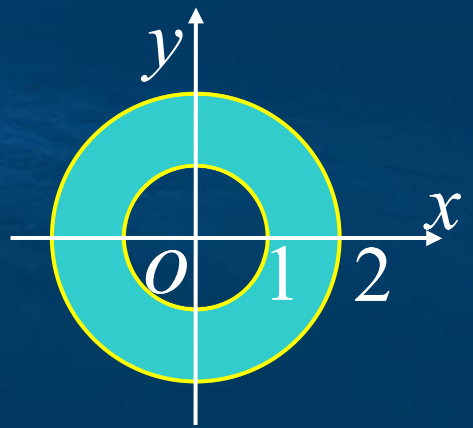
（5）$\{(x,y)\mid |x|>1\}$ 是开集，但非区域







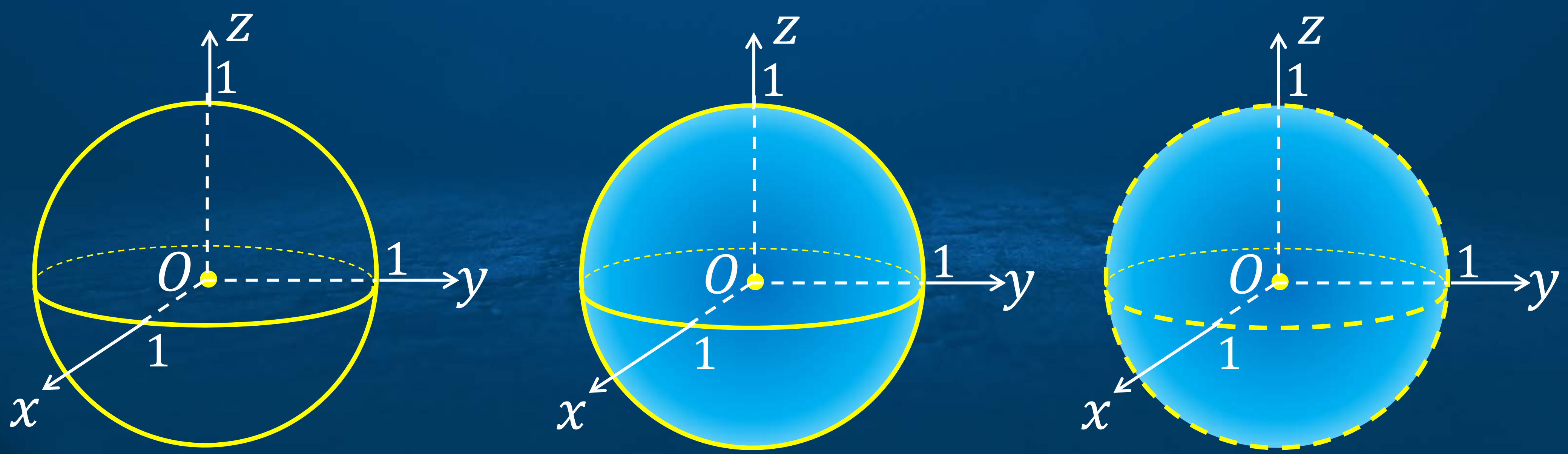




$V_1 = \{ (x,y,z) |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ 有界闭集

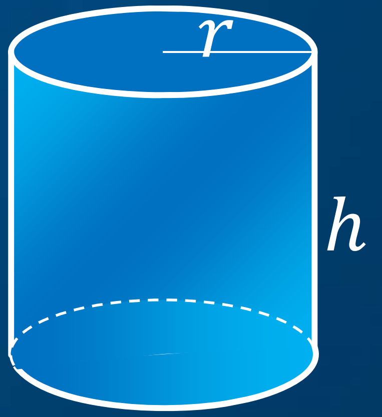
$V_2 = \{ (x,y,z) |\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$ 有界闭区域

$V_3 = \{ (x,y,z) |\, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$ 有界区域



- 圆柱体的体积

$$V=\pi r^2 h,\{(r,h)\,|\,r>0,\ h>0\}$$



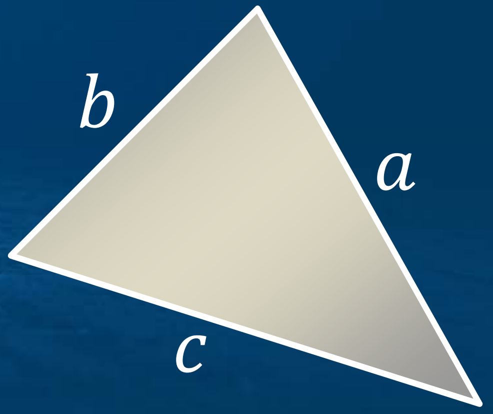
- 定量理想气体的压强（Claperon公式）

$$p=\frac{RT}{V}\quad (R\text{为常数}，\ \{(V,T)\,|\,V>0,T>T_0\})$$

- 三角形面积的海伦公式$\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c)\,|\,a>0,b>0,c>0,a+b>c\}$$



特点: 一个变量存在与其它多个变量的依赖关系!

定义2 设非空点集$D \subset \mathbb{R}^n$，映射$f: D \mapsto R$称为定义在D上的n元函数，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

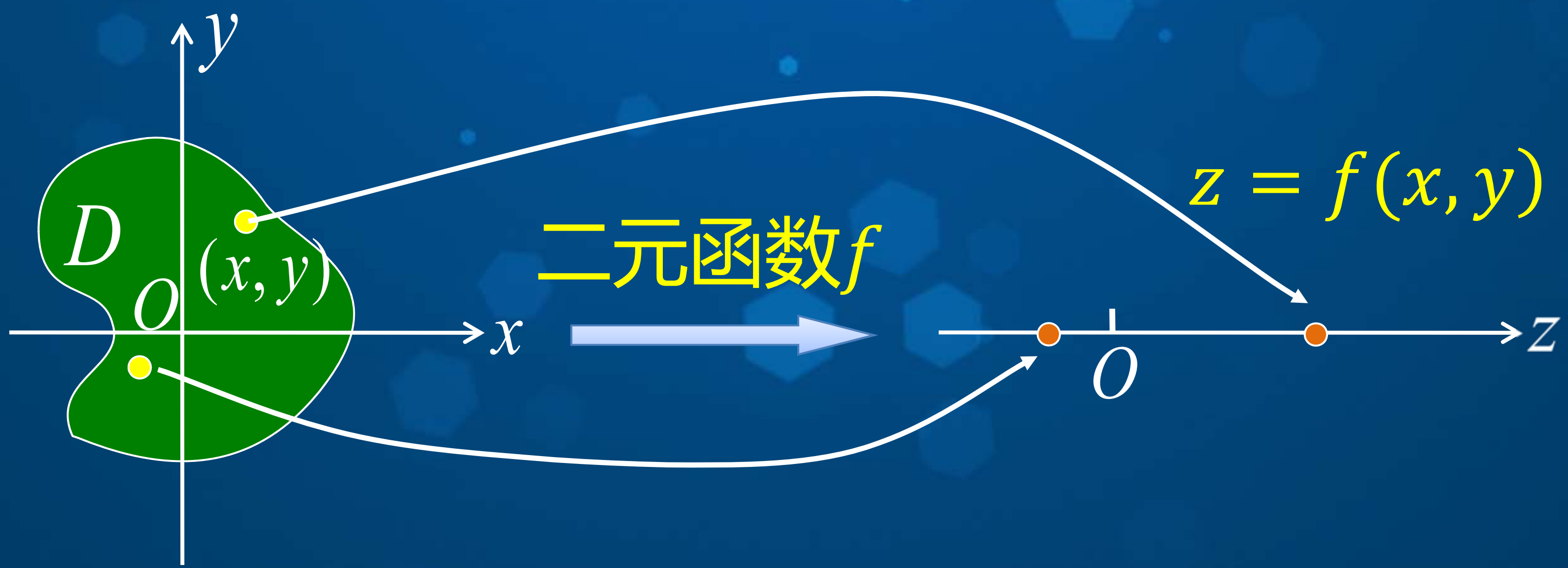
称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为自变量，u 为因变量，D 为定义域.

若记$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$n$元函数则可记为向量形式

$$u = f(\mathbf{x}).$$

思考：多元函数与一元函数有何不同之处？

一元函数 ：$R \xrightarrow{f} R$ 多元函数 ：$R^n \xrightarrow{f} R$



多元函数还可视为多输入单输出的“系统”

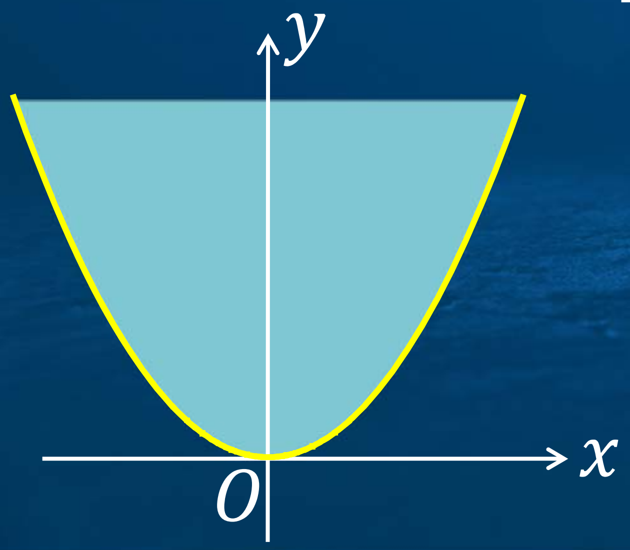
例2 写出下列函数的定义域：

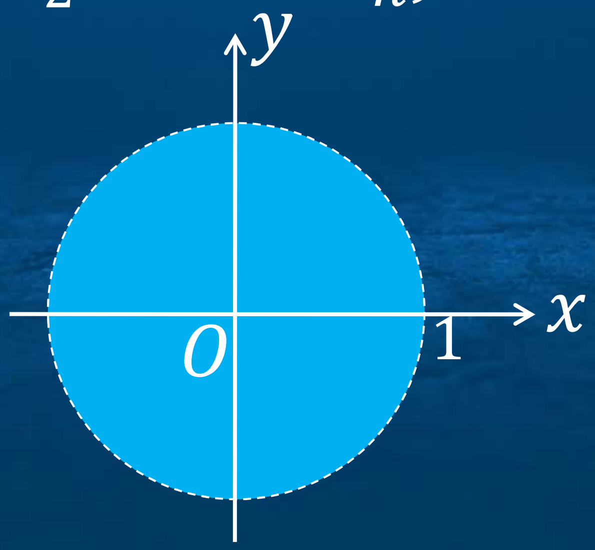
(1) $z=\sqrt{y-x^2}$;

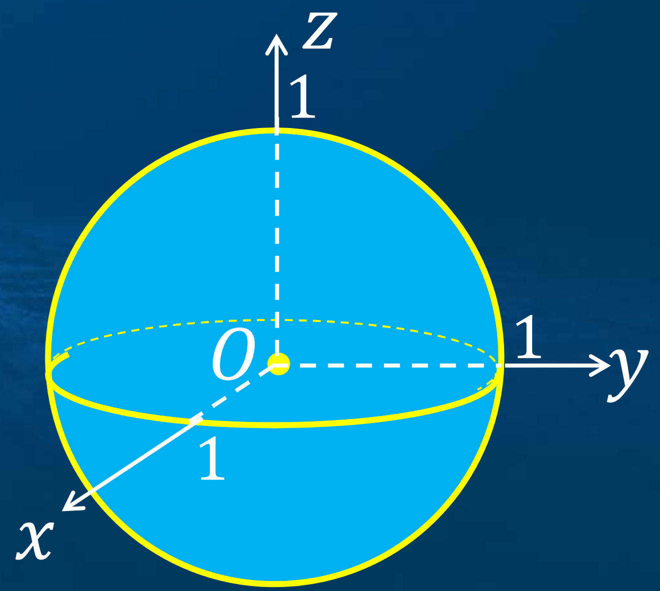
(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(3) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$;

(4) $z=\ln(1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)$.



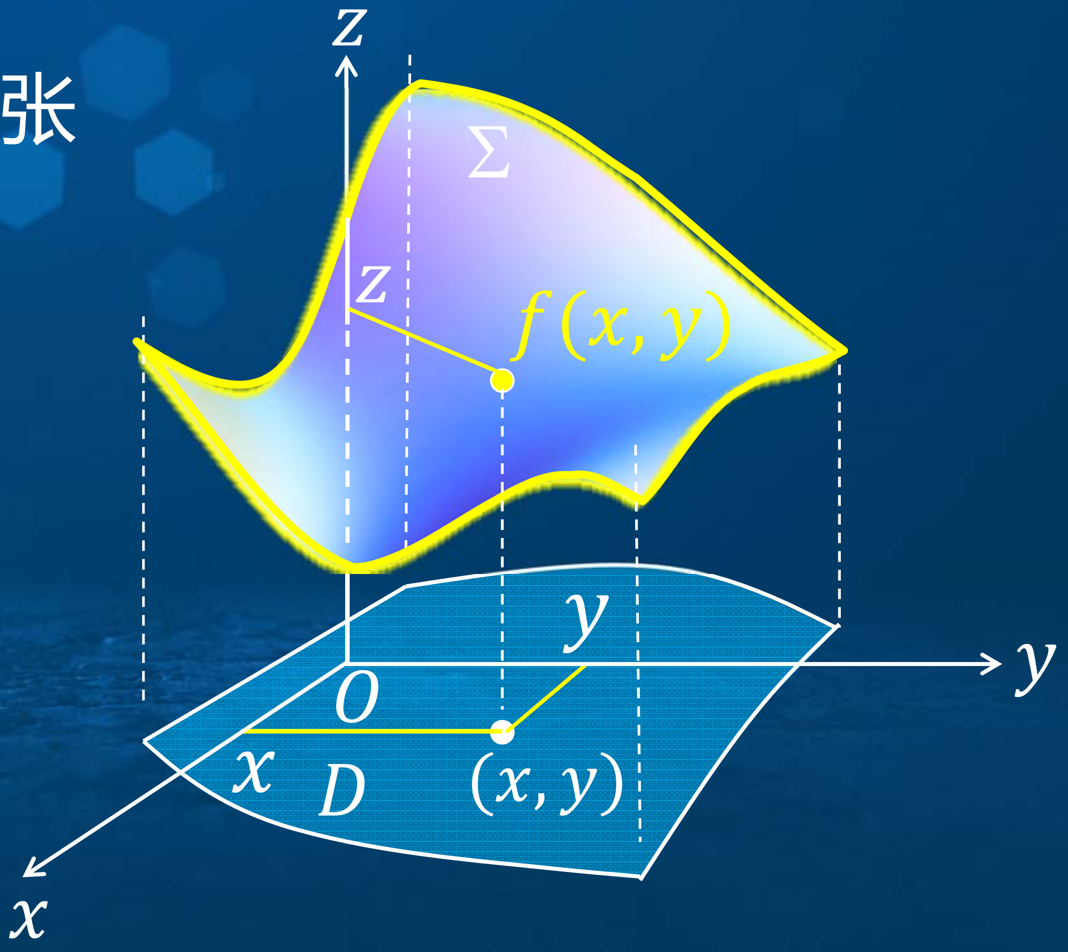


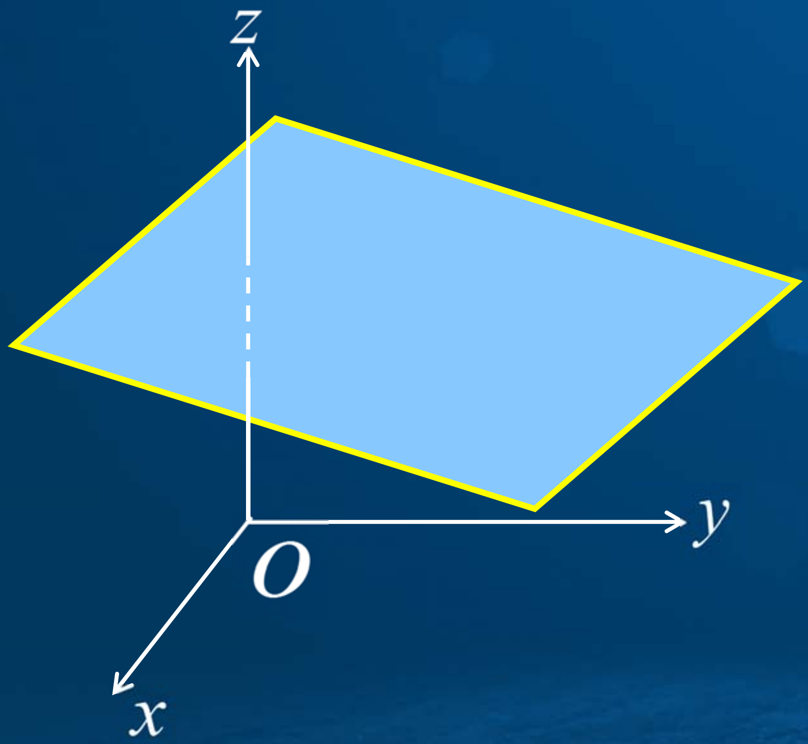


二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$

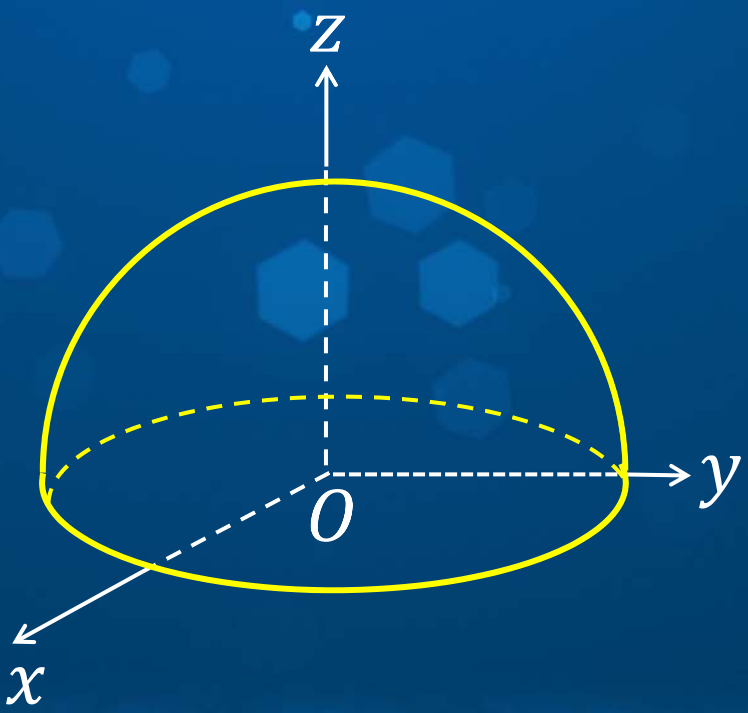
在几何上表示三维空间中的一张

曲面 Σ .

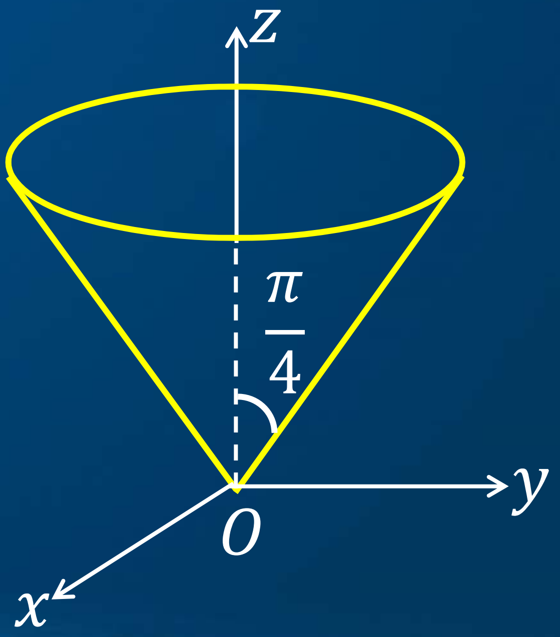




$$z = ax + by + c$$



$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

截痕法： 用平面$z = h_k$

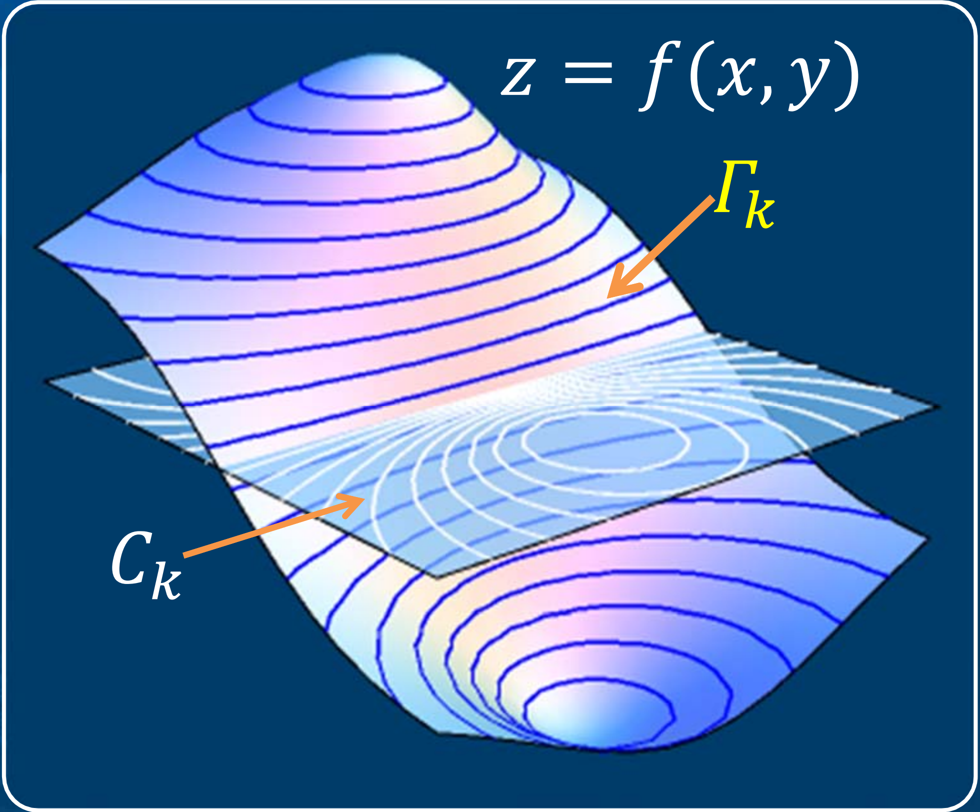
截曲面$z = f(x,y)$

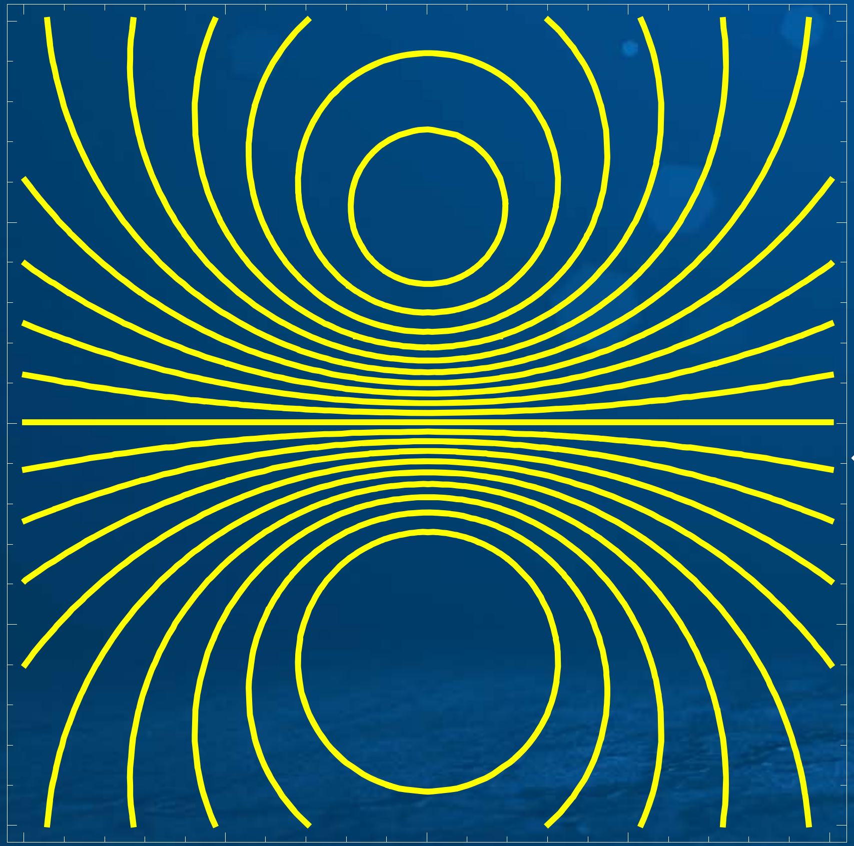
所得截痕曲线方程为

$$\Gamma_k: \begin{cases} z = h_k, \\ z = f(x,y). \end{cases}$$

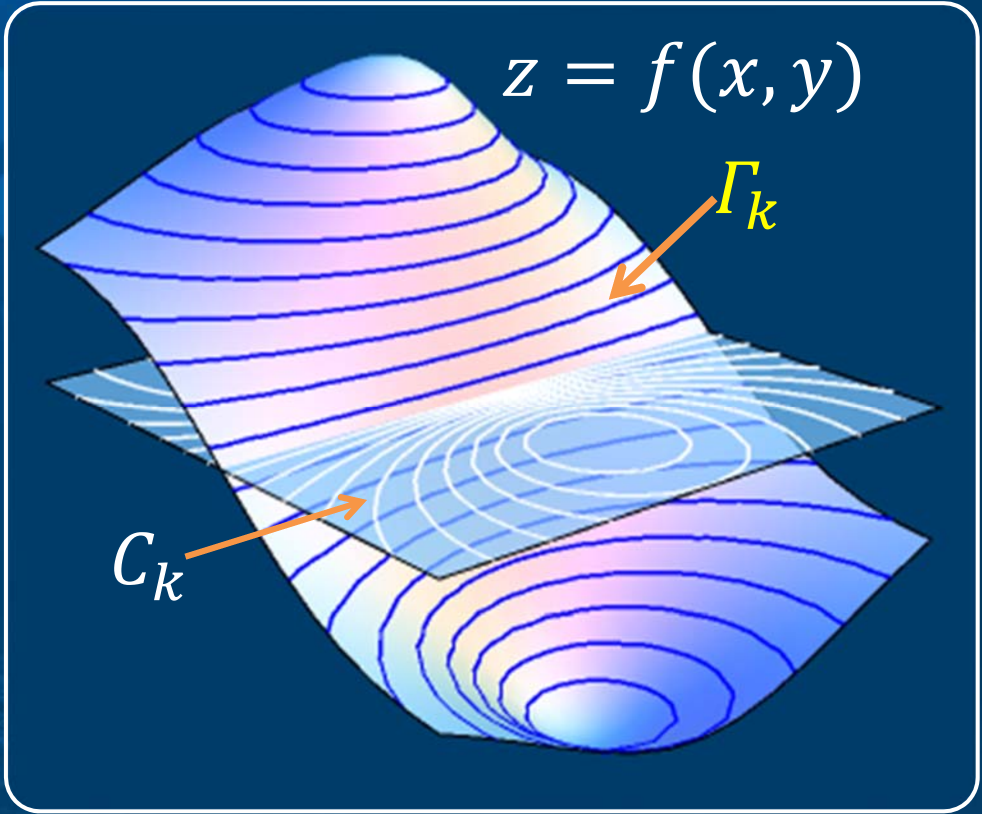
它在 xOy 平面上的投影曲线为

等值线： $C_k: \begin{cases} z = 0, \\ h_k = f(x,y). \end{cases}$

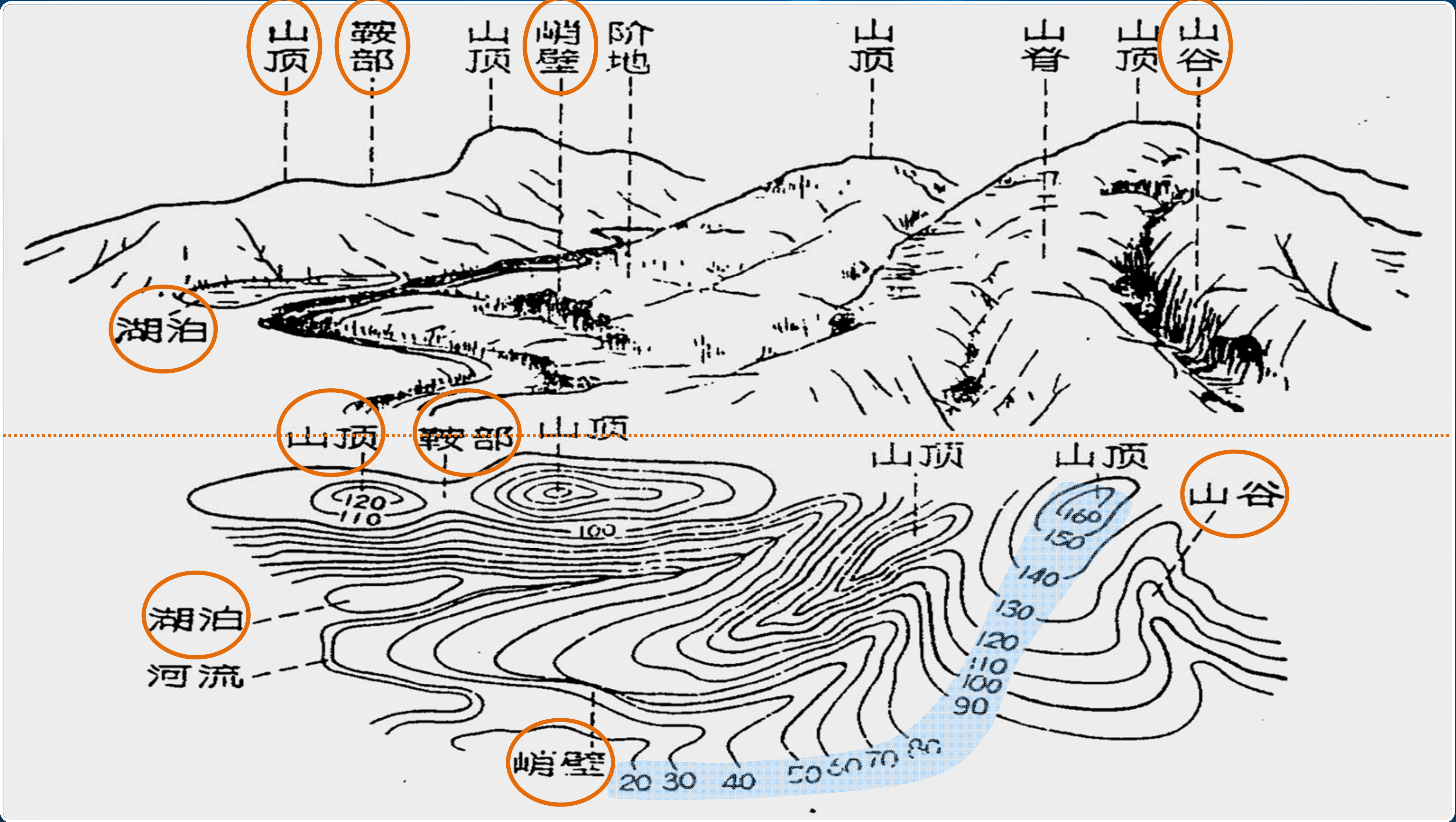




等值线图



曲面图


山顶
鞍部
山顶
峭壁
阶地
山顶
山脊
山顶
山谷
湖泊
山顶
鞍部
山顶
山顶
山顶
山谷
120
110
100
160
150
140
130
120
110
100
90
湖泊
河流
峭壁
20 30 40 50 60 70 80