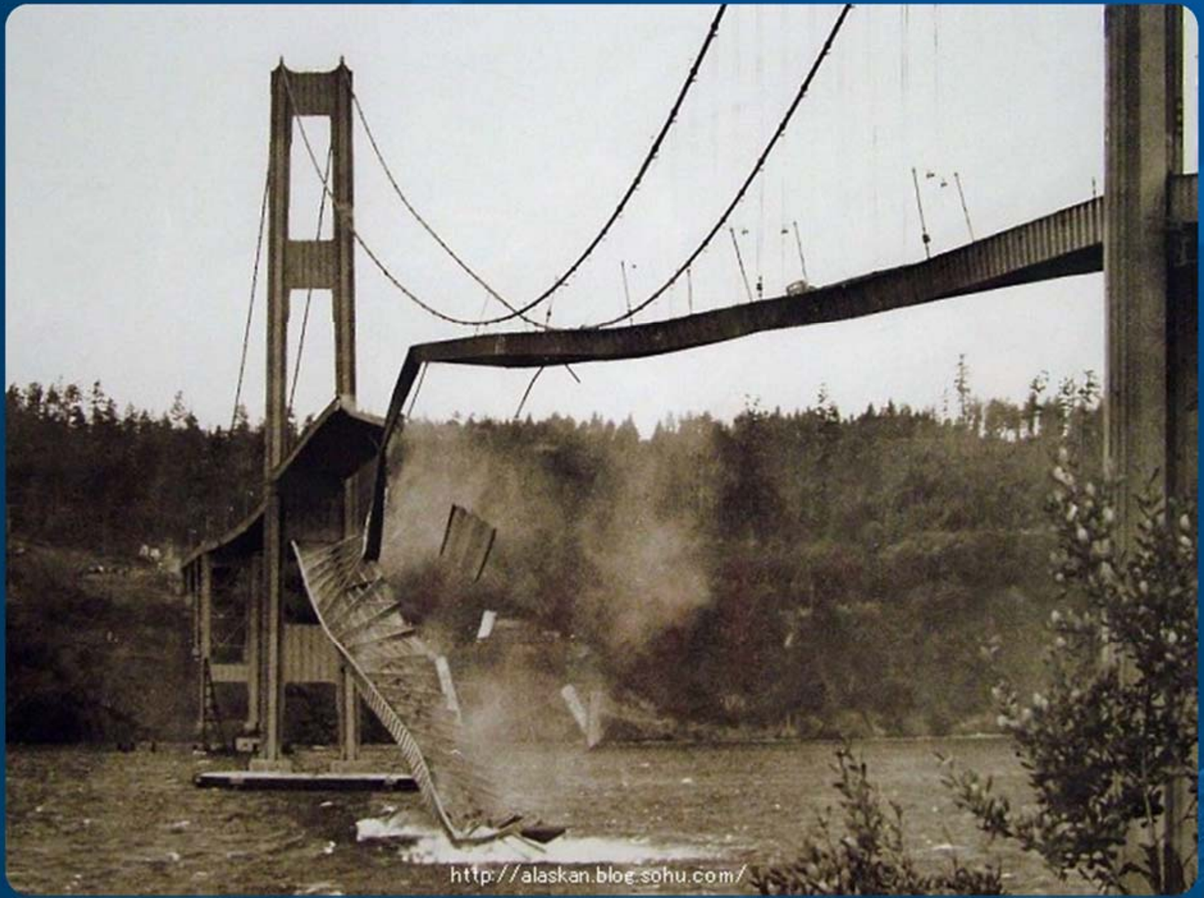
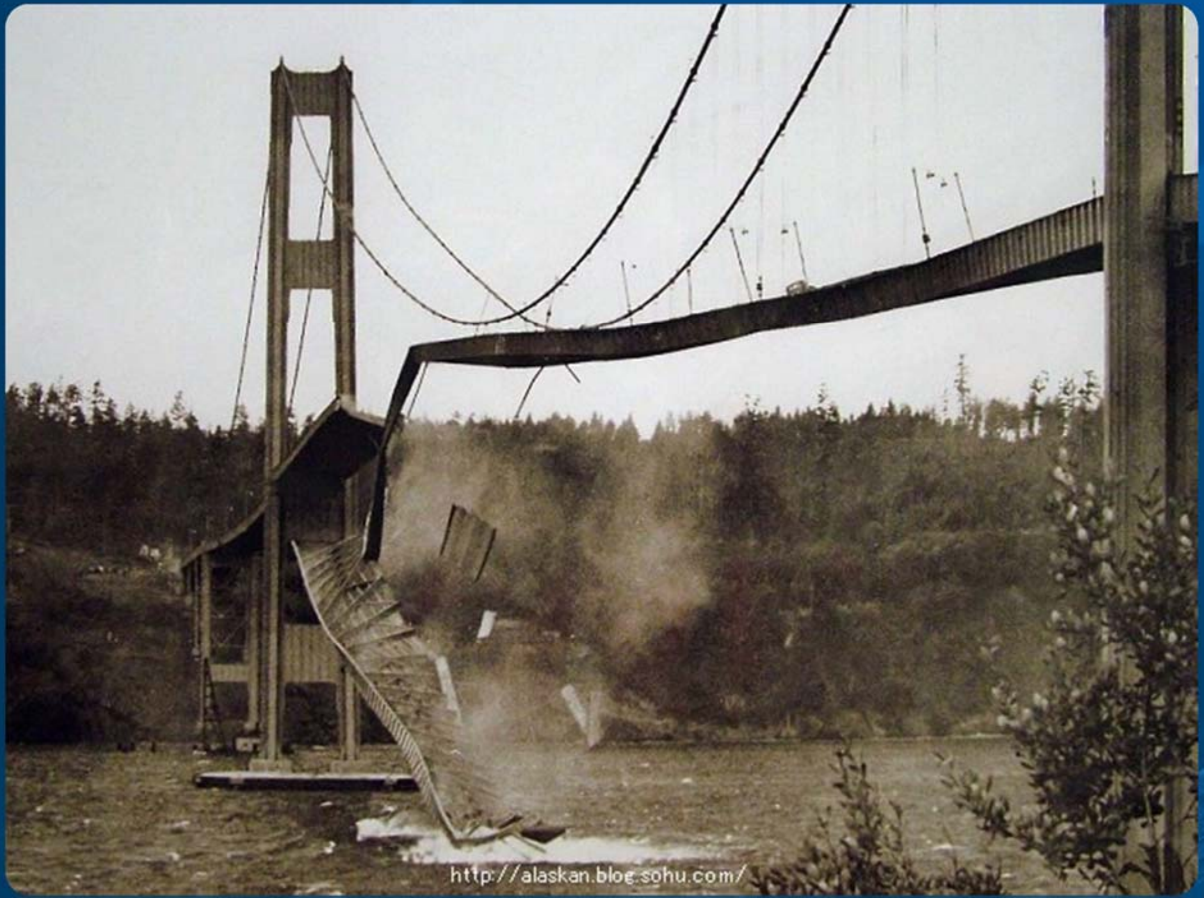
第52讲 常系数非齐次线性微分方程



正在坍塌的塔科马海峡大桥



正在坍塌的塔科马海峡大桥

重建的大桥

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶非齐次方程通解

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

(p,q为常数)

对应齐次方程通解 已经解决！

+

非齐次方程特解

$y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解？

常系数非齐次线性微分方程

欧拉方程

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p,q\text{为常数})$$

考虑$f(x)$的两种特殊情况：

- $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$，其中$\lambda$是常数，$P_m(x)$是$x$的一个$m$次多项式

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

- $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_l(x)\sin\beta x]$, 其中$\alpha$和$\beta$是常数,$P_m(x)$和$P_l(x)$分别为$m$次和 l 次多项式，其中有一个可能为零.

- $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

设$y^*=e^{\lambda x}Q(x)$是$y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解，其中$Q(x)$为待定多项式. 由于

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入原微分方程，并化简，得

$$\boxed{Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)}$$

由此确定多项式$Q(x)$的次数

$$\boxed{Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)}$$

(1) 若λ不是特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$的根, 即

$$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$$

$(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)$决定左端多项式最高次数，于是

$$Q(x)=Q_m(x)\ (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

所以特解形式为

$$\boxed{y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)\ \ (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})}$$

$$\boxed{Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)}$$

(2) 若λ是特征方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$的单根， 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \text{ 但 } 2\lambda + p \neq 0$$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) = P_m(x)$$

$(2\lambda + p)Q'(x)$决定左端多项式最高次数，于是

$$Q(x) = xQ_m(x) \ (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

所以特解形式为

$$\boxed{y^* = xe^{\lambda x}Q_m(x) \ (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})}$$

$$\boxed{Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)}$$

(3) 若λ是特征方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$的重根, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 2\lambda + p = 0$$

$$Q''(x) = P_m(x)$$

于是 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$,所以特解形式为

$$\boxed{y^* = x^2 e^{\lambda x} Q_m(x) \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})}$$

特解一般形式 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) \ (k = 0,1,2)$ 其中k为λ作为特征方程根的重数

特解一般形式 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)\ (k = 0,1,2)$ 其中k为λ作为特征方程根的重数

例1 求微分方程$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$的一个特解 .

例2 求微分方程$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}(1 + x^2)$的通解 .

【例2解】齐次方程的通解为$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

由于$\lambda = 3$ 是特征方程$r^2 - 2r - 3 = 0$的单根，所以$k = 1$

设特解形式为 $y * = xe^{3x} Q_2(x) = e^{3x} x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

代入原方程得 $2a_1 + 4a_0 + (6a_2 + 8a_1)x + 12b_2 x^2 = 1 + x^2$

例2 求微分方程$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}(1 + x^2)$的 .

【例2解】齐次方程的通解为$\boxed{Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}}$

设特解形式为 $y^* = e^{3x} x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

代入原方程得 $2a_1 + 4a_0 + (6a_2 + 8a_1)x + 12b_2 x^2 = 1 + x^2$

比较系数得 $12a_2 = 1, 6a_2 + 8a_1 = 0, 2a_1 + 4a_0 = 1$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{9}{32}, a_1 = -\frac{1}{16}, a_2 = \frac{1}{12}$$

所求的特解为$\boxed{y^* = e^{3x} x\left(\frac{9}{32} - \frac{x}{16} + \frac{1}{12}x^2\right)}$

原方程通解

$y = Y + y*$

- $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_l(x)\sin\beta x]$

欧拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

$$f(x) = \left(\frac{P_m}{2} + \frac{P_l}{2i}\right)e^{(\alpha+i\beta)x} + \left(\frac{P_m}{2} - \frac{P_l}{2i}\right)e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$= \boxed{P(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \bar{P}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}}$$

其中 $P(x) = \frac{P_m}{2} + \frac{P_l}{2i}$, $\bar{P}(x) = \frac{P_m}{2} - \frac{P_l}{2i}$ 互为共轭

可将求微分方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_l(x)\sin\beta x]$$

的特解转化为求两个微分方程

$$\boxed{y'' + py' + qy = P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}} \qquad (1)$$

$$y'' + py' + qy = \bar{P}(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \qquad (2)$$

的特解.

若$\alpha + i\beta$是特征方程的k 重根 (k = 0, 1), 则(1)的特解可设为:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x}\ ,\ (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

如果 $$y_1^* = x^k Q_m(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x}$$

是$y'' + py' + qy = P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$的特解，则

$$y_2^* = \overline{y_1^*} = x^k \bar{Q}_m(x)\, e^{(\alpha-i\beta)x}$$

是$y'' + py' + qy = \bar{P}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}$ 的特解，

因此原微分方程有形如

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \underline{x^k Q_m(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x}} + \underline{x^k \bar{Q}_m(x)\, e^{(\alpha-i\beta)x}}$$

的特解.

$$\boxed{y^* = x^k e^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x + R_n^{(2)}(x)\sin\beta x]}$$

微分方程$y''+py'+qy=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_l(x)\sin\beta x]$的特解可设为

$$\boxed{y^*=x^k e^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x+R_n^{(2)}(x)\sin\beta x]}$$

其中$n=\max(m,l)$，$R_n^{(1)}(x)$和$R_n^{(2)}(x)$均为次数不超过n的多项式，k的值为0 或1．

当$\alpha+i\beta$不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根时，$k=0$；

当$\alpha+i\beta$是特征方程$r^2+pr+q=0$的根时，$k=1$．

例3 求微分方程$y'' + 4y = \cos 2x$的一个特解．

【例3解】 因为$\alpha + i\beta = 2i$是特征方程$r^2 + 4 = 0$的根，

所以有特解形式 $y^* = \underline{x(A\cos 2x + B\sin 2x)}$，由于

$$y^{*\prime} = (A + 2Bx)\cos 2x + (B - 2Ax)\sin 2x$$

$$y^{*\prime\prime} = 4(B - Ax)\cos 2x - 4(A + Bx)\sin 2x$$

代入原方程整理得

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow 4B = 1, -4A = 0 \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{4}$$

得原方程的一个特解 $y^* = \dfrac{x}{4}\sin 2x.$

例4 写出方程 $y''+y'-2y=3e^x-\frac{1}{2}\sin x$ 的一个特解形式.

考虑两个方程

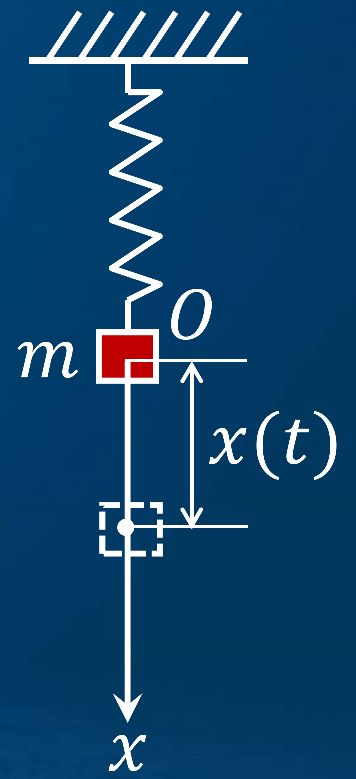
$$y''+y'-2y=3e^x \xrightarrow[r^2+r-2=0\text{单根}]{\lambda=1\text{是特征方程的}} y_1^*=axe^x$$

$$y''+y'-2y=-\frac{1}{2}\sin x \xrightarrow[\text{方程根}]{\alpha+i\beta=i\text{不是特征}} y_2^*=A\cos x+B\sin x$$

原方程的一个特解形式

$$y*=y_1^*+y_2^*=axe^x+A\cos x+B\sin x$$

强迫振动微分方程: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=h\sin pt$



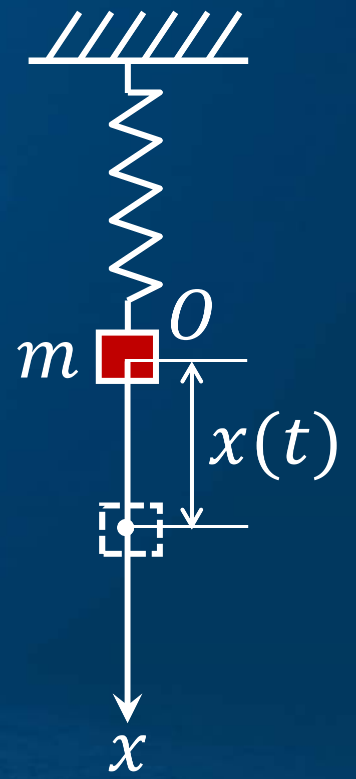
无阻尼强迫振动：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=h\sin pt$$

对应齐次方程$x''+k^2x=0$的通解为

$$X=C_1\cos kt+C_2\sin kt=A\sin(kt+\varphi)$$

无阻尼强迫振动：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=h\sin pt$



方程的右端为$f(x)=h\sin pt$, 与

$$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_l(x)\sin\beta x]$$

比较，有$\alpha=0$，$\beta=p$, $P_m(x)=0$, $P_l(x)=h$. 所以

当$p\neq k$，其特解可设为：

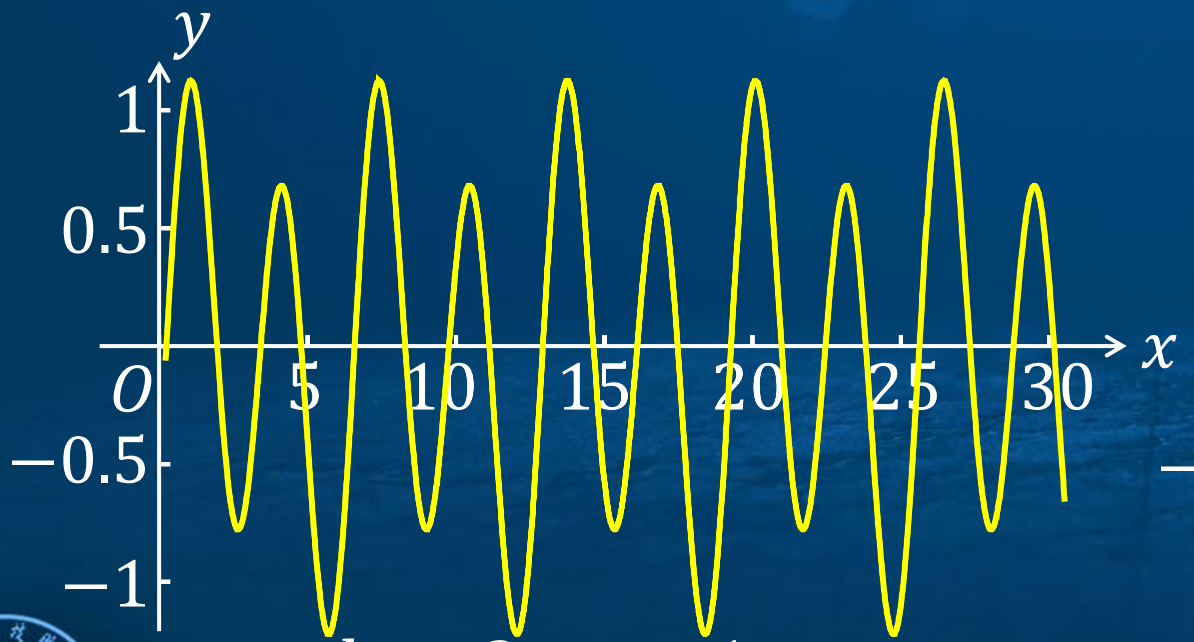
$$x^*=a\cos pt+b\sin pt.$$

得原微分方程通解为：

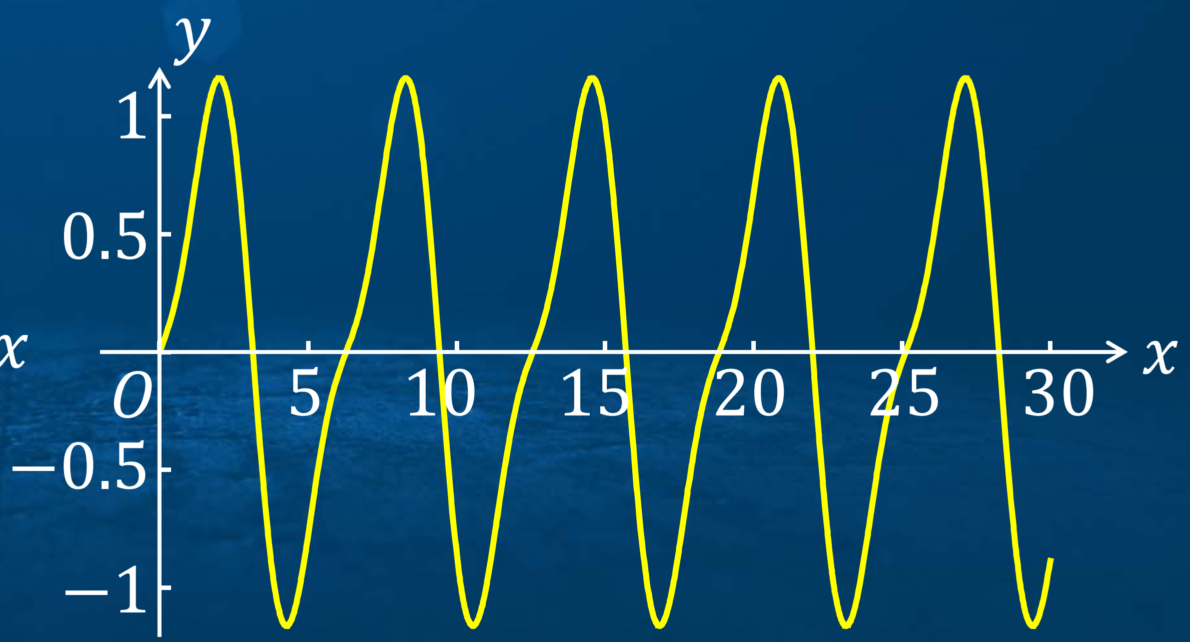
$$x=A\sin(kt+\varphi)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt.$$

无阻尼强迫振动：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\sin pt$

$p\neq k$:　　$x=A\sin(kt+\varphi)+\dfrac{h}{k^2-p^2}\sin pt$

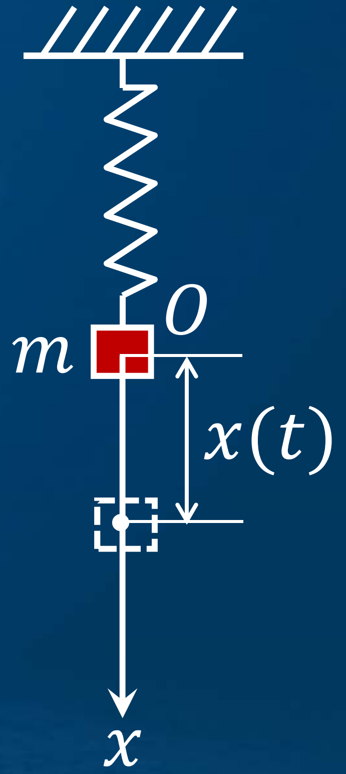


$k=2,\ p=1$



$k=1,\ p=2$

无阻尼强迫振动：$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\sin pt$



方程的右端为$f(x)=h\sin pt$, 与

$$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_l(x)\sin\beta x]$$

比较，有$\alpha=0$，$\beta=p$, $P_m(x)=0$, $P_l(x)=h$. 所以

当 $p=k$，其特解可设为：

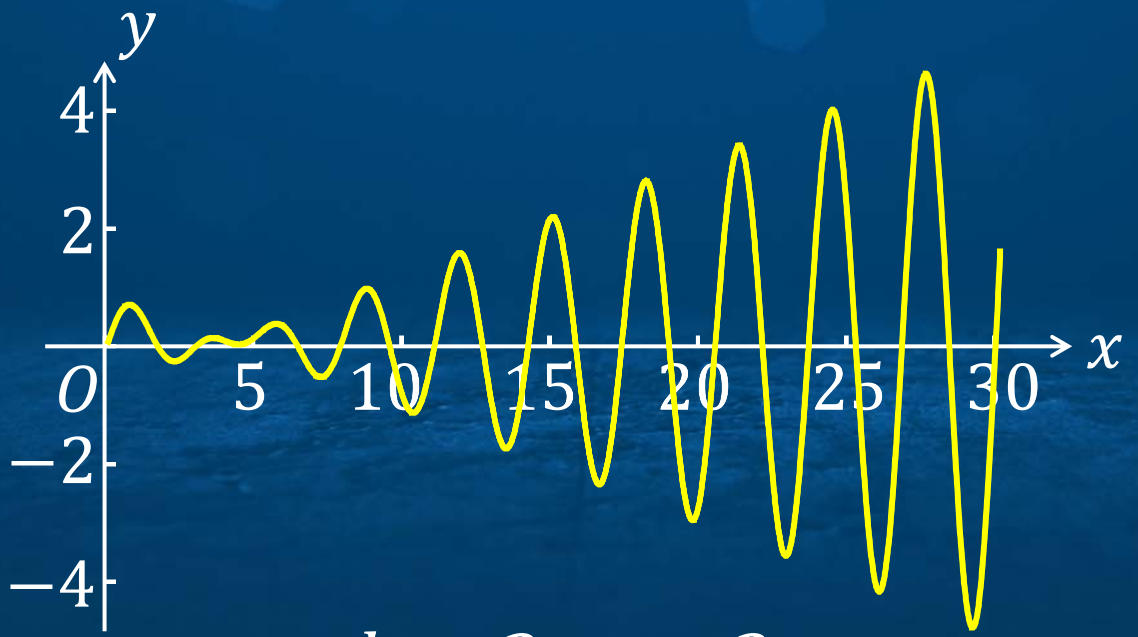
$$x^*=t(a\cos kt+b\sin kt).$$

得原微分方程通解为：

$$x=A\sin(kt+\varphi)-\frac{h}{2k}t\cos kt.$$

无阻尼强迫振动：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=h\sin pt$

$$p=k\text{：}\quad x=A\sin(kt+\varphi)-\frac{h}{2k}t\cos kt.$$



$k=2,\ p=2$

小提琴

小提琴

混凝土振荡器

具有如下形式的微分方程($p_1, p_2, \cdots, p_n$为常数)称为欧拉方程.

$$\boxed{x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)}$$

二阶欧拉方程 $x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$

$$x = e^t$$

$$x = \ln t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + qy = f(e^t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + qy = f(e^t)$$

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$$

$$\Big\downarrow \; x = e^t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + (p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + qy = f(e^t)$$

例5 求方程 $x^2y'' + xy' - y = x$ 的通解 .