第23讲 导数的计算

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \;\Longleftrightarrow\; \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \;\Longleftrightarrow\; \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

两个重要导数公式

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\ln a$$

求导法则

基本初等函数求导公式

导数综合计算

函数运算——四则运算、求反函数运算、复合运算

- 四则运算的求导法则
- 反函数的求导法则
- 复合函数的求导法则

四则运算的求导法则

定理1 设函数 $u(x),v(x)$均在点x处可导，则$u(x)\pm v(x)$、$u(x)v(x)$ 和 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$均在点x处可导，且有

（1） $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$

（2） $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$

（3） $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

四则运算的求导法则

（4）$[Cu(x)]' = Cu'(x)$ （ C为常数 ）；

（5）$[\alpha u(x) \pm \beta v(x)]' = \alpha u'(x) \pm \beta v'(x)$;

（6）$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]' = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$ （ $v(x) \neq 0$ ）;

（7） $[u(x) + v(x) + w(x)]' = u'(x) + v'(x) + w'(x)$

例1 求正切函数 $y = \tan x$ 的导数 .

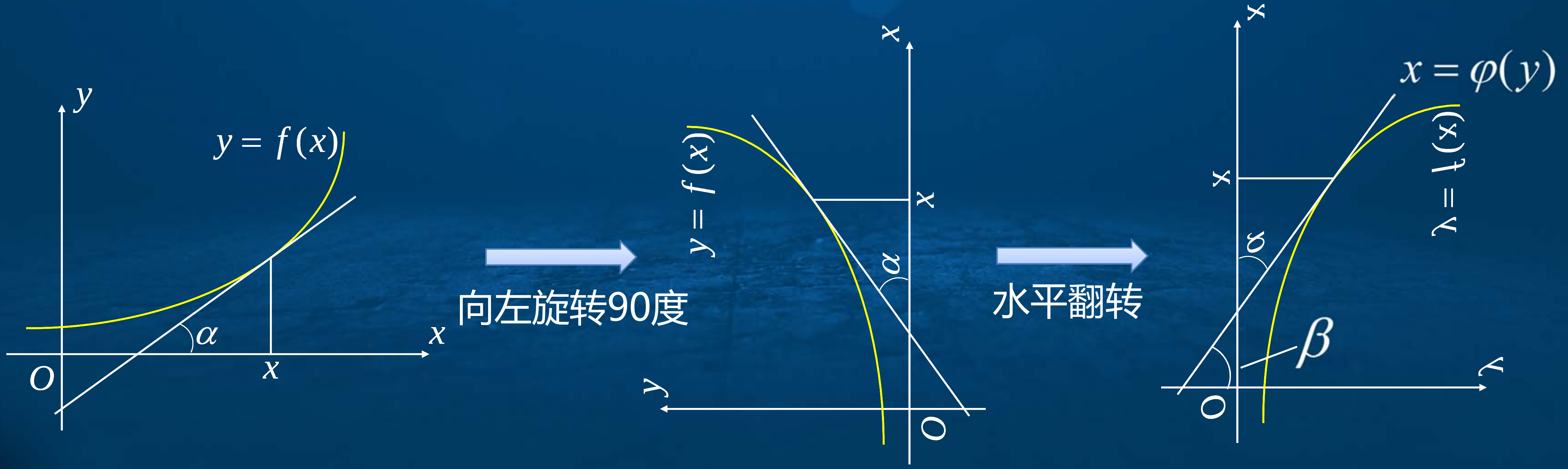
反函数的求导法则

定理2　设函数 $y=f(x)$ 为函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $x=\varphi(y)$ 在点处可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则函数 $f(x)$ 在点 x（这里 $x=\varphi(y)$）处可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\quad \text{或写作}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

反函数求导法则的几何解释

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\alpha &= f'(x)\\ \tan\beta &= \varphi'(y)\end{aligned}}\qquad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta} \longrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}}$$



例2 求反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的导数 .

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

例3 求函数 $y=\log_a x \ (a>0 \text{且} a\neq 1)$ 的导数 .

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

复合函数的求导法则

定理3 设有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，若函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$y'_x=f'(u)\varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

复合函数的导数，等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数. —— **链式法则**

复合函数求导法则可以推广到多重复合的情形.

如三个可导函数 $y=f(u)$, $u=\psi(v)$ 和 $v=\varphi(x)$ 的复合得

复合函数 $y=f\{\psi[\varphi(x)]\}$, 则该复合函数可导，且有

$$y'_x = f'(u)\psi'(v)\varphi'(x)$$

或记作 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$ 链式法则

（沿线相乘）

$$y \xrightarrow{y'_u} u \xrightarrow{u'_v} v \xrightarrow{v'_x} x$$

例4 求函数 $y=e^{x^2}$ 的导数.

例5 求函数 $y=x^a\ (a\in\mathbb{R})$ 的导数.

$$\left(x^a\right)'=a\,x^{a-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\qquad\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\frac{3}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

基本初等函数的求导公式

- 常值函数的导数 $(C)' = 0$
- 幂函数的导数 $(x^{a})' = a\,x^{a-1}$
- 指数函数的导数

$$(a^{x})' = a^{x}\ln a\,(a>0,\,a\neq 1) \qquad (e^{x})' = e^{x}$$

- 对数函数的导数

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 三角函数的导数

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

- 反三角函数的导数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

例6 求下列函数的导数：

(1) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$

(2) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(4) $y=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$

(5) $y=\arctan(1-2x)^2$

(6) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$