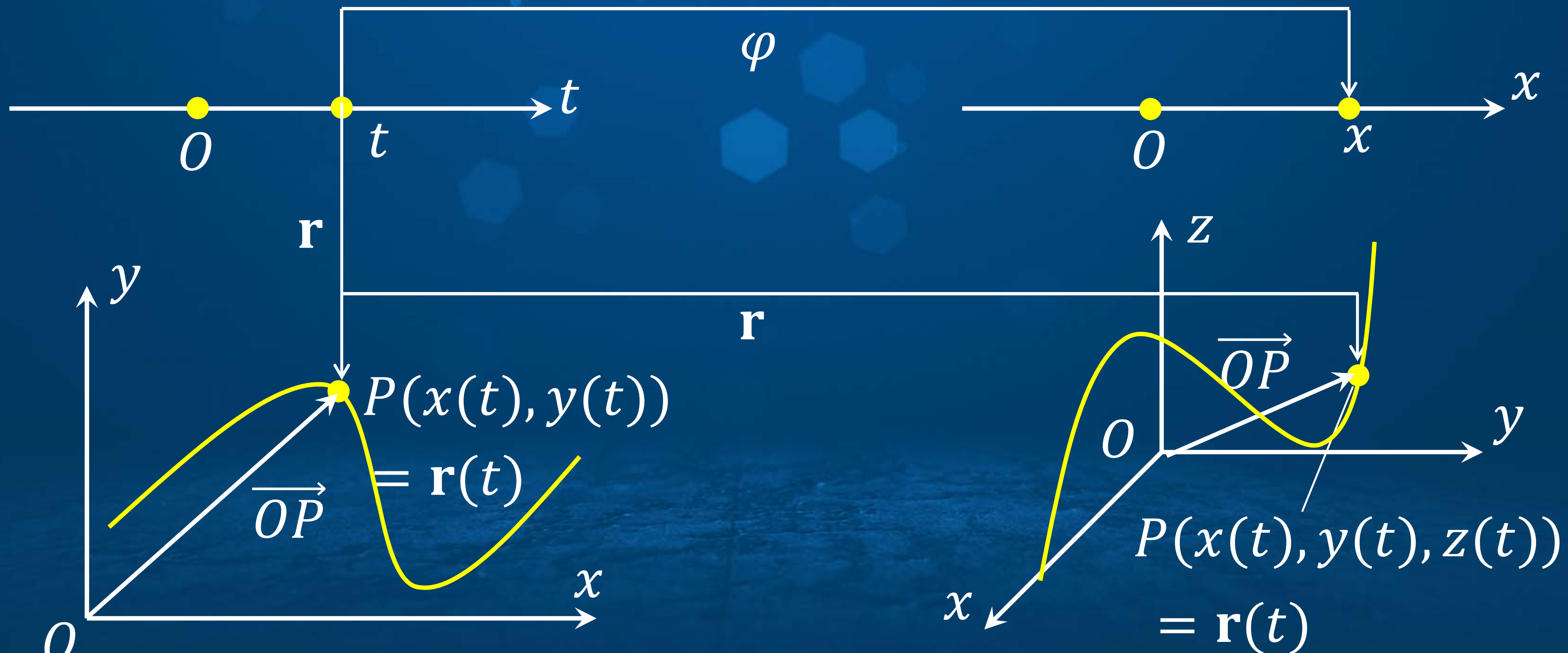
第60讲 向量值函数的导数与积分

一元函数　一元实值函数$x=\varphi(t)$

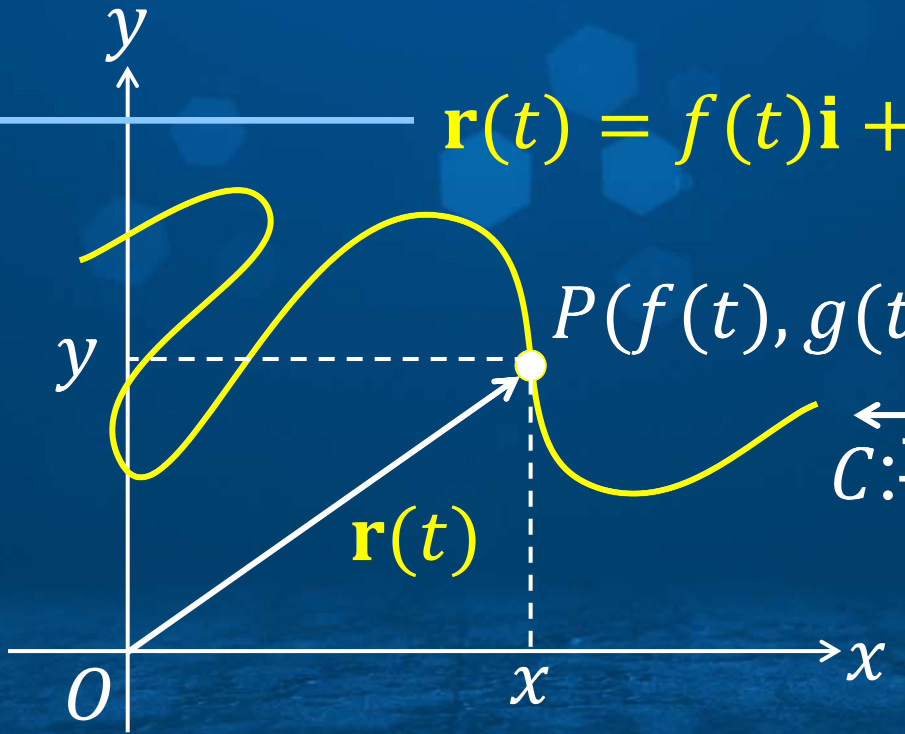


一元函数向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$

- 向量值函数与空间曲线
- 向量值函数极限与连续
- 向量值函数的导数
- 向量值函数的积分

向量值函数：定义域为实数集合值域为向量集合的映射 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$

$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$



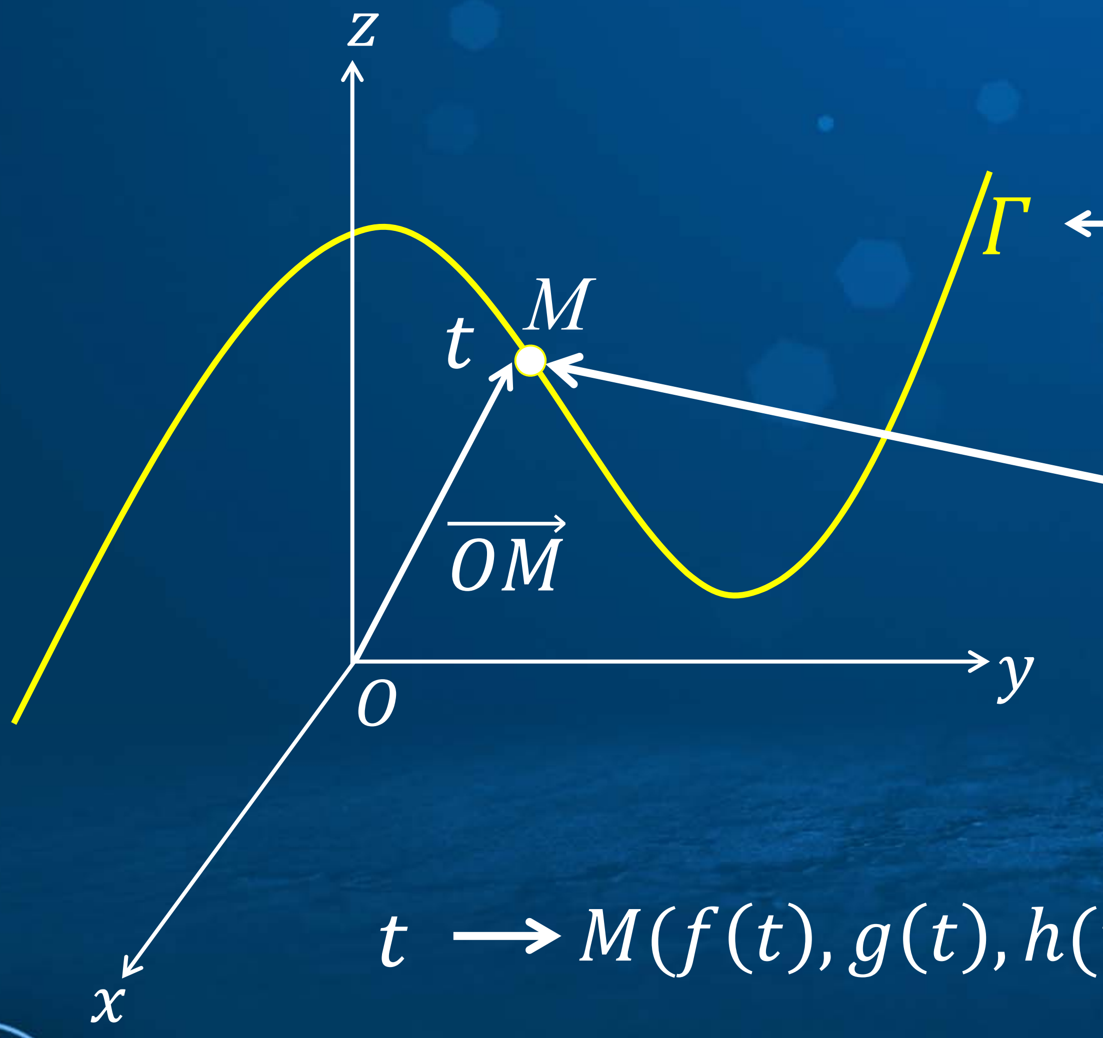
参数方程

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

平面点的运动轨迹

二维向量值函数

$(f(t),g(t))$ $=$ $\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t))$



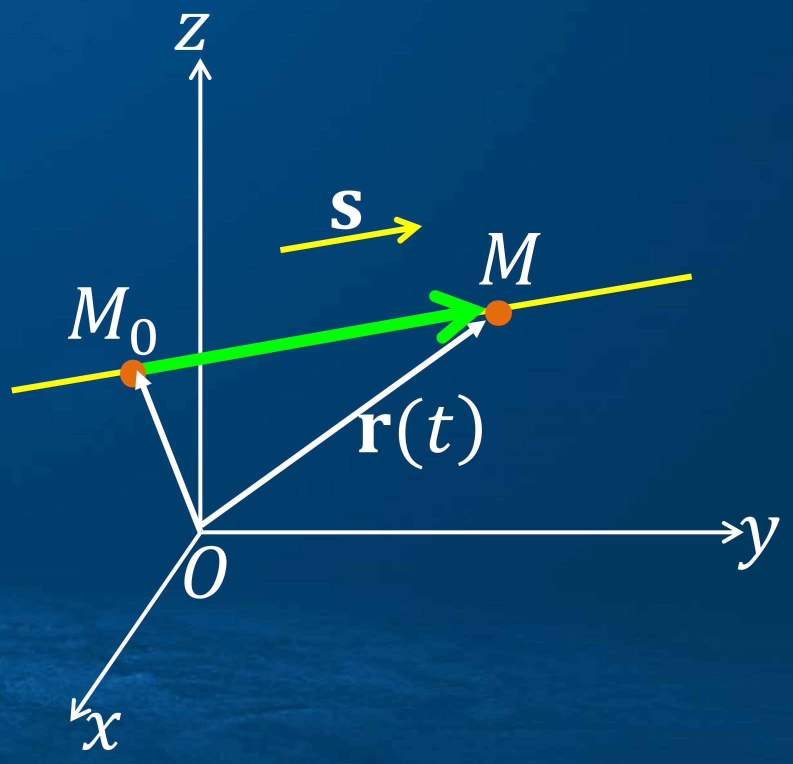
三维向量值函数

$$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$$

$$t \longrightarrow M(f(t),g(t),h(t)) \longrightarrow \overrightarrow{OM}$$

例1 已知直线L过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，其方向向量为$\mathbf{s} = (m, n, p)$，试用向量值函数表示直线.



直线的向量值函数

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + mt,\ y_0 + nt,\ z_0 + pt)$$

或

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + mt)\mathbf{i} + (y_0 + nt)\mathbf{j} + (z_0 + pt)\mathbf{k}$$

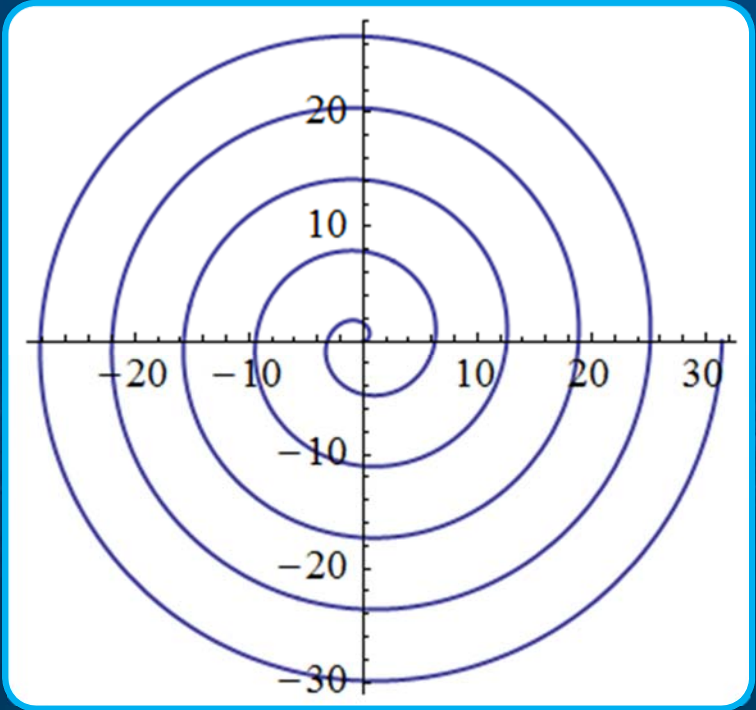
对应的参数方程为：

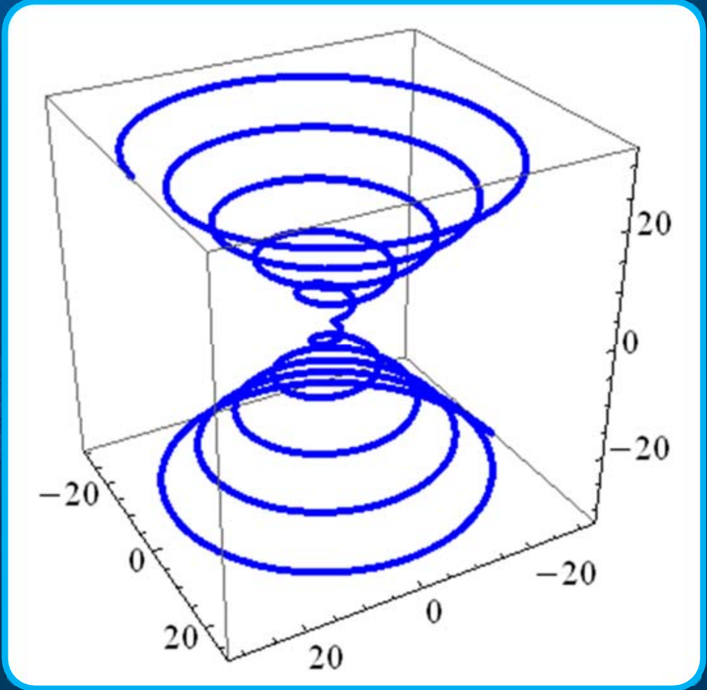
$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt(-\infty < t < +\infty)$$

例2 画出下列向量值函数表示的曲线的图形：

(1) $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j}, t \geq 0$ ；

(2) $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, -\infty < t < +\infty.$





定义1 设向量值函数$\mathbf{r}(t)$在t_0的某去心邻域内有定义，如果存在常向量$\boldsymbol{\alpha}$，使得$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < |t - t_0| < \delta$时恒有

$$|\mathbf{r}(t) - \boldsymbol{\alpha}| < \varepsilon,$$

则称当$t \to t_0$时向量值函数$\mathbf{r}(t)$的极限存在，$\boldsymbol{\alpha}$为其极限.

对二维向量值函数$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \iff \lim_{t\to t_0} f(t) = a, \lim_{t\to t_0} g(t) = b$$

如果二维向量值函数$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$在$t_0$的某邻域内有定义，且$\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$，则称向量值函数$\mathbf{r}(t)$在点$t_0$处连续.

如果$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$在区间 I 的每个点上连续，则称$\mathbf{r}(t)$为区间 I 上连续的向量值函数．

二维向量值函数$\mathbf{r}(t)$在t_0处连续的充分必要条件是其分量函数$f(t)$与$g(t)$在t_0处都连续．

关于二维向量值函数的极限与连续的概念容易推广到三维及三维以上向量值函数．

例3 设 $\mathbf{r}(t)=\dfrac{\sin 2t}{t}\mathbf{i}+\ln(1+t)\mathbf{j}$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$.

【例3解】

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to 0}\ln(1+t)\right)\mathbf{j}=(2,0)$$

例4 设 $\mathbf{r}(t)=e^{-t}\cos 2t\,\mathbf{i}+e^{-t}\sin 2t\,\mathbf{j}+e^{-t}\mathbf{k}$，求 $\lim\limits_{t\to +\infty}\mathbf{r}(t)$.

【例4解】 $\lim\limits_{t\to +\infty}\mathbf{r}(t)$

$$=\left(\lim_{t\to +\infty}e^{-t}\cos 2t\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to +\infty}e^{-t}\sin 2t\right)\mathbf{j}+\left(\lim_{t\to +\infty}e^{-t}\right)\mathbf{k}$$

$$=(0,0,0)$$

定义2 设向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在t的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

存在，则称向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在t处可导，并称极限值为向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在t处的导数，记为$\mathbf{r}'(t)$或者$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$.

定理1 设三维向量值函数$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$，其中各分量函数在点$t$处可导，则$\mathbf{r}(t)$在点$t$处可导，且

$$\mathbf{r}'(t)=f'(t)\mathbf{i}+g'(t)\mathbf{j}+h'(t)\mathbf{k}.$$

同理，可导的二维向量值函数$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$的导数为

$$\mathbf{r}'(t)=f'(t)\mathbf{i}+g'(t)\mathbf{j}$$

二阶导数为 $$\mathbf{r}''(t)=f''(t)\mathbf{i}+g''(t)\mathbf{j}+h''(t)\mathbf{k}.$$

说明：(1) 向量值函数求导数 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 各分量函数求导数

(2) 若向量值函数$\mathbf{r}(t)$在点t处可导，则它在点t处必连续.

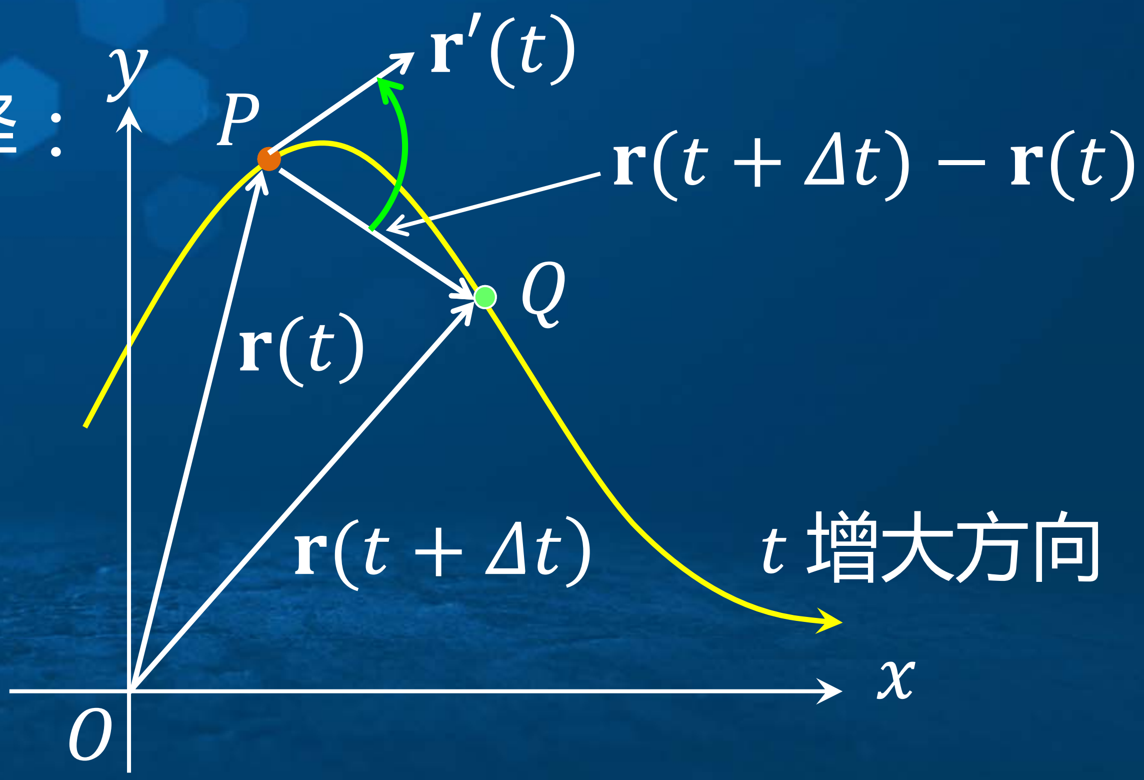
(3) 向量值函数导数的几何解释：

二维向量值函数$\mathbf{r}(t)$

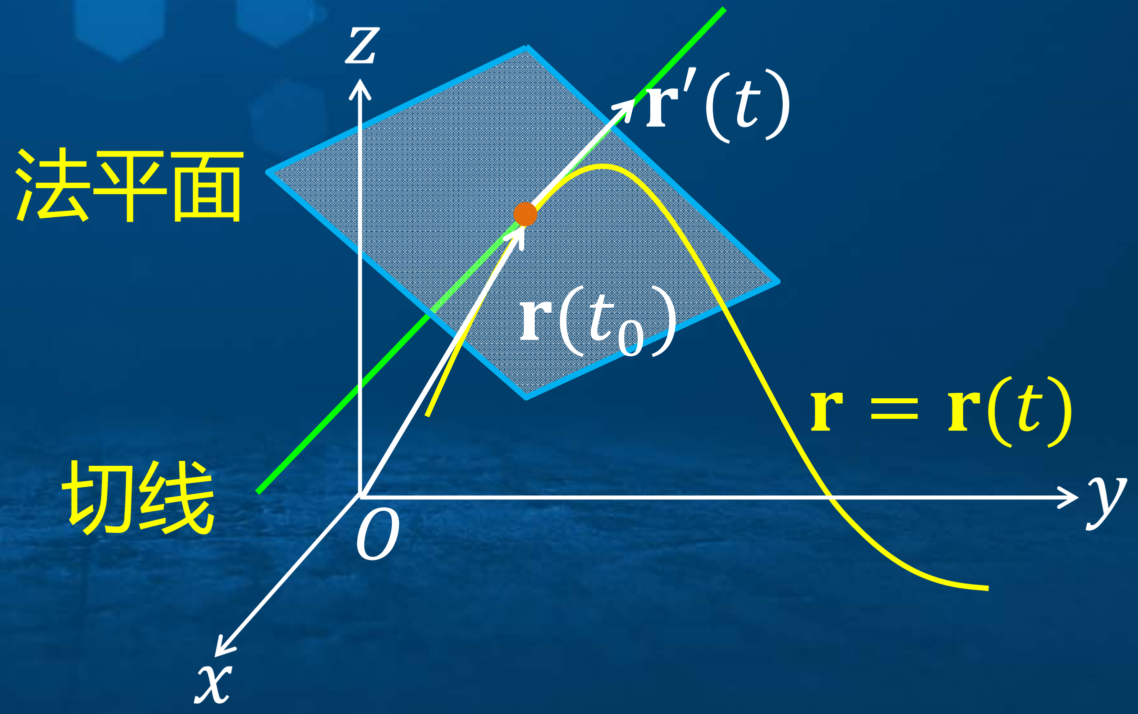
设$\Delta t > 0$，当$\Delta t \to 0$时

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} \to \mathbf{r}'(t)$$

$\mathbf{r}'(t)$为曲线在该点的切向量.



过曲线$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$上一点$\mathbf{r}(t_0)$且平行于切向量$\mathbf{r}'(t_0)$的直线定义为曲线在该点的切线，过该点与切向量垂直的平面为曲线在该点的法平面.



例5 求空间曲线$\Gamma: x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

【例5解】点(1,1,1)对应于 $t=1$，该点处曲线的切向量为

$$\mathbf{T}(1)=(x'(1),y'(1),z'(1))=(1,2t,3t^2)|_{t=1}=(1,2,3)$$

故所求切线方程为 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

法平面方程为 $$x-1+2(y-1)+3(z-1)=0$$

即 $$x+2y+3z-6=0$$

(4) 如果一个向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在区 间 I 上满足$\mathbf{r}'(t)$连续，且在区间 I 内$\mathbf{r}'(t)\neq 0$，则称曲线在该区间上是光滑曲线 .

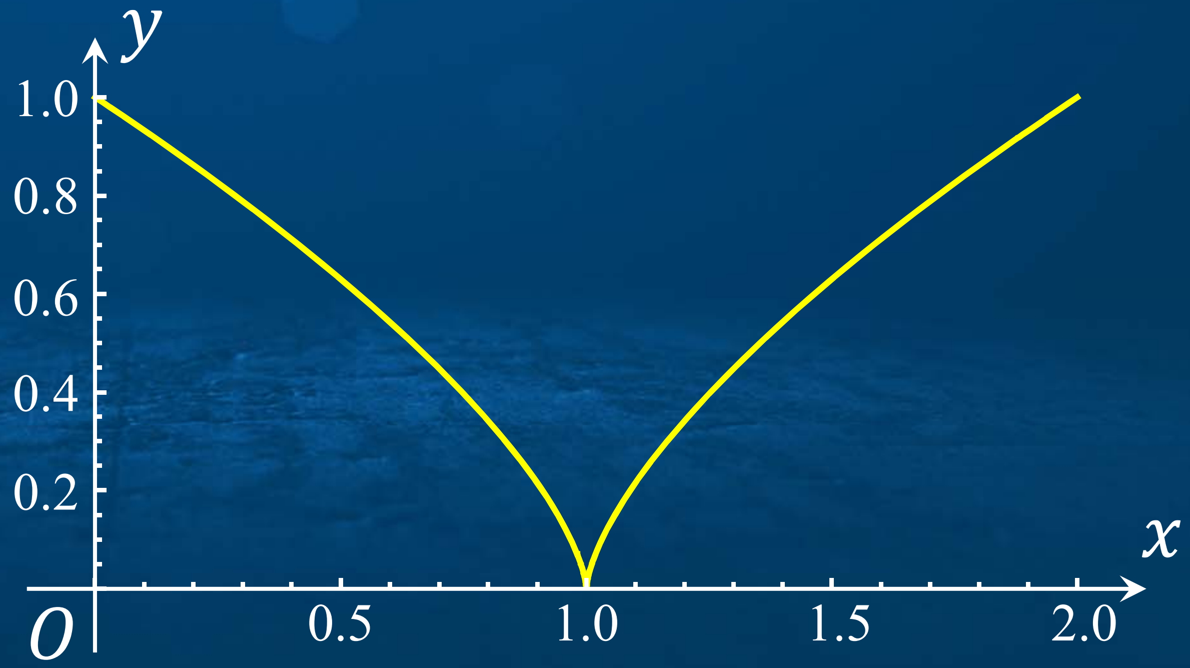
例6 判断曲线 $\mathbf{r}(t)=(1+t^3,t^2)$ 是否为光滑曲线？

$\mathbf{r}'(t)=(3t^2,2t)$ 连续

但 $\mathbf{r}'(0)=(0,0)$

曲线非光滑

分段光滑的



(5) 向量值函数的物理意义

如果向量值函数$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$描述的是做曲线运动的质点的位置，则有

$\mathbf{r}'(t)$：运动速度；

$|\mathbf{r}'(t)|$：速度的大小，即速率；

$\mathbf{r}''(t)$：质点运动的加速度．

例7 一个质点的位置向量为$\mathbf{r}(t)=(t,t^2,\cos 2t)$，求质点的速度、加速度与速率．

【例7解】

速度 $\mathbf{r}'(t)=(1,2t,-2\sin 2t)$

加速度 $\mathbf{r}''(t)=(0,2,-4\cos 2t)$

速率 $|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{1^2+(2t)^2+(-2\sin 2t)^2}$

$$=\sqrt{1+4t^2+4\sin^2 2t}$$

向量值函数的求导法则

向量值函数求导数 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 各分量函数求导数

数量函数求导法则 ⟶ 向量值函数求导法则

定理2 设$\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$为可导的向量值函数，$f(t)$为可导的数值函数，$\mathbf{C}$为常向量（即$\mathbf{C}$的各分量都为常数），k为常数，则有

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{C}=\mathbf{0}$;　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k\mathbf{u}(t)]=k\mathbf{u}'(t)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}(t)\pm\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\pm\mathbf{v}'(t)$;

向量值函数的求导法则

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\mathbf{u}(t)]=f'(t)\mathbf{u}(t)+f(t)\mathbf{u}'(t)$;

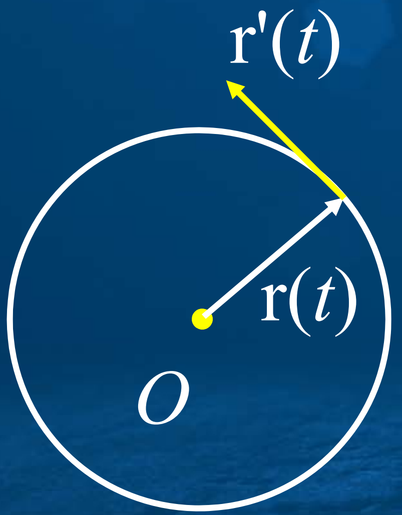
(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$;

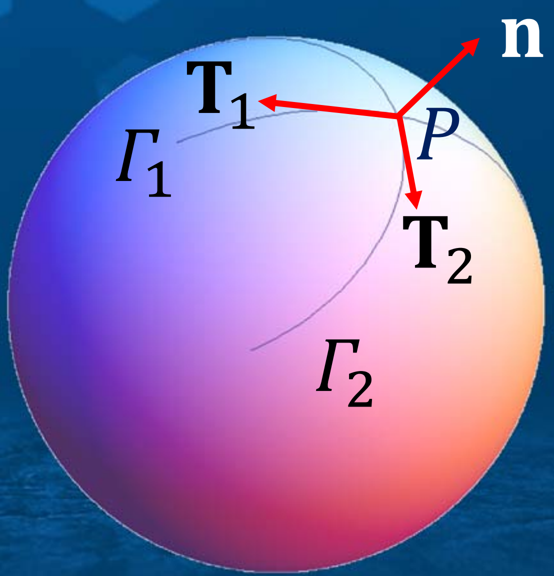
(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$;

(7) 链式法则：设$\mathbf{u}(s)$为可导的向量值函数，$s=f(t)$为可导的数值函数，则

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}(s)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\mathbf{u}'(s)f'(t)=\mathbf{u}'\big(f(t)\big)f'(t).$$

例8 设$\mathbf{r}(t)$是可导的向量值函数，且$\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$．如果$|\mathbf{r}(t)| = C$ (C为常数)，证明：$\mathbf{r}(t)$与$\mathbf{r}'(t)$垂直．





定义3 设向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在区间 I 内有定义，如果存在可导的向量值函数$\mathbf{R}(t)$，使得对于区间 I 内的每一点，都有

$$\mathbf{R}'(t)=\mathbf{r}(t),$$

则称向量值函数$\mathbf{R}(t)$是$\mathbf{r}(t)$在区间 I 内的一个**原函数**.

思考：$\mathbf{R}(t)$的分量函数与$\mathbf{r}(t)$对应的分量函数有何关系？

$\mathbf{R}(t)$的每个分量函数是$\mathbf{r}(t)$ 对应的分量函数的一个原函数.

例如，$\mathbf{R}(t)=(F(t),G(t),H(t))$是$\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$的一个原函数，则有$F'(t)=f(t),G'(t)=g(t),H'(t)=h(t)$.

向量值函数的不定积分

定义4 设向量值函数$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在区间 I 内内连续，则称$\mathbf{r}(t)$在区间 I 内的原函数的全体为它的不定积分，记作$\int \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t$. 若$\mathbf{R}(t)$在区间 I 内的一个原函数，则

$$\int \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t=\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$$

向量值函数的不定积分 ⟶ 各分量函数的不定积分

向量值函数的不定积分

例9 计算 $\int\left(\cos t\,\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}-\dfrac{1}{t+2}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}t.$

【例9解】

$$原式=\left(\int \cos t\mathrm{d}t\right)\mathbf{i}+\left(\int e^{-t}\mathrm{d}t\right)\mathbf{j}-\left(\int \frac{1}{t+2}\mathrm{d}t\right)\mathbf{k}$$

$$=(\sin t+C_1)\mathbf{i}+(-e^{-t}+C_2)\mathbf{j}-(\ln|t+2|+C_3)\mathbf{k}$$

$$=\sin t\,\mathbf{i}-e^{-t}\,\mathbf{j}-\ln|t+2|\mathbf{k}+\mathbf{C}$$

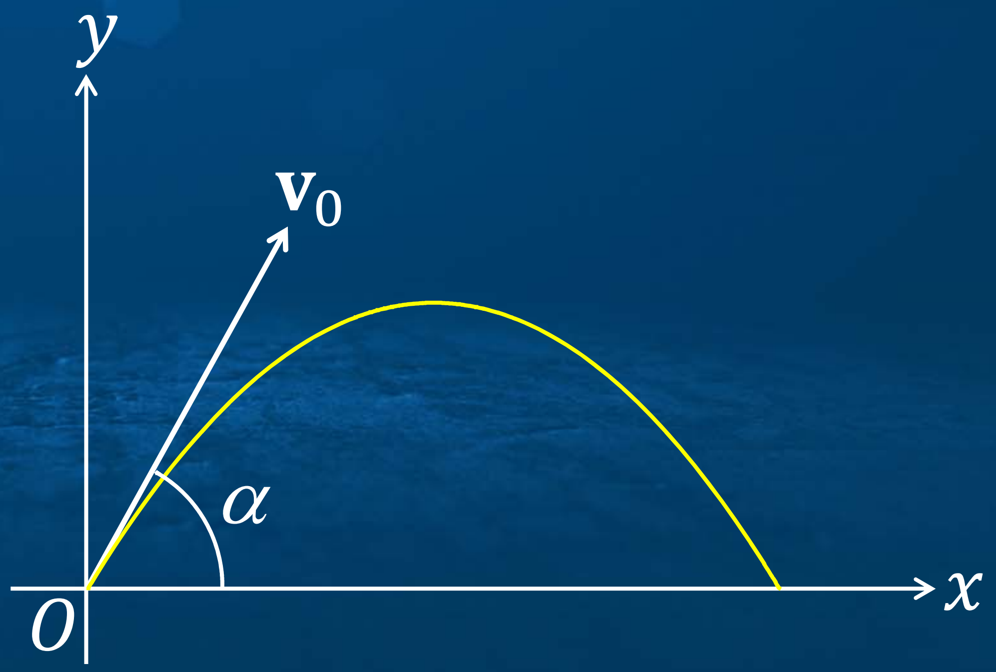
向量值函数的不定积分

例10 一枚导弹以初始速度$\mathbf{v}_0$、仰角α发射，假设导弹只受重力作用，空气阻力可以忽略不记，求这枚导弹的位置函数$\mathbf{r}(t)$，并问α取何值时射程最远？

牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

—向量形式



向量值函数的定积分

定义5 设三维向量值函数$\mathbf{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$在区间$[a,b]$上连续，定义该函数在区间$[a,b]$上的定积分为

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{i}+\left(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{j}+\left(\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{k}.$$

牛顿—莱布尼兹公式

设向量值函数$\mathbf{r}(t)$在区间$[a,b]$上连续，$\mathbf{R}(t)$是它在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt=\mathbf{R}(t)|_a^b=\mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a).$$

向量值函数的定积分

例11 计算 $\int_0^1 \left((1+t)\,\mathbf{i}+te^{t^2}\mathbf{j}\right)\mathrm{d}t$

【例11解一】

$$原式=\left(\int_0^1(1+t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^1 te^{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathbf{j}=\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{e-1}{2}\mathbf{j}$$

【例11解二】由牛顿-莱布尼兹公式，

$$原式=\left[\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)\mathbf{i}+\frac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{j}\right]_0^1=\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{e-1}{2}\mathbf{j}$$