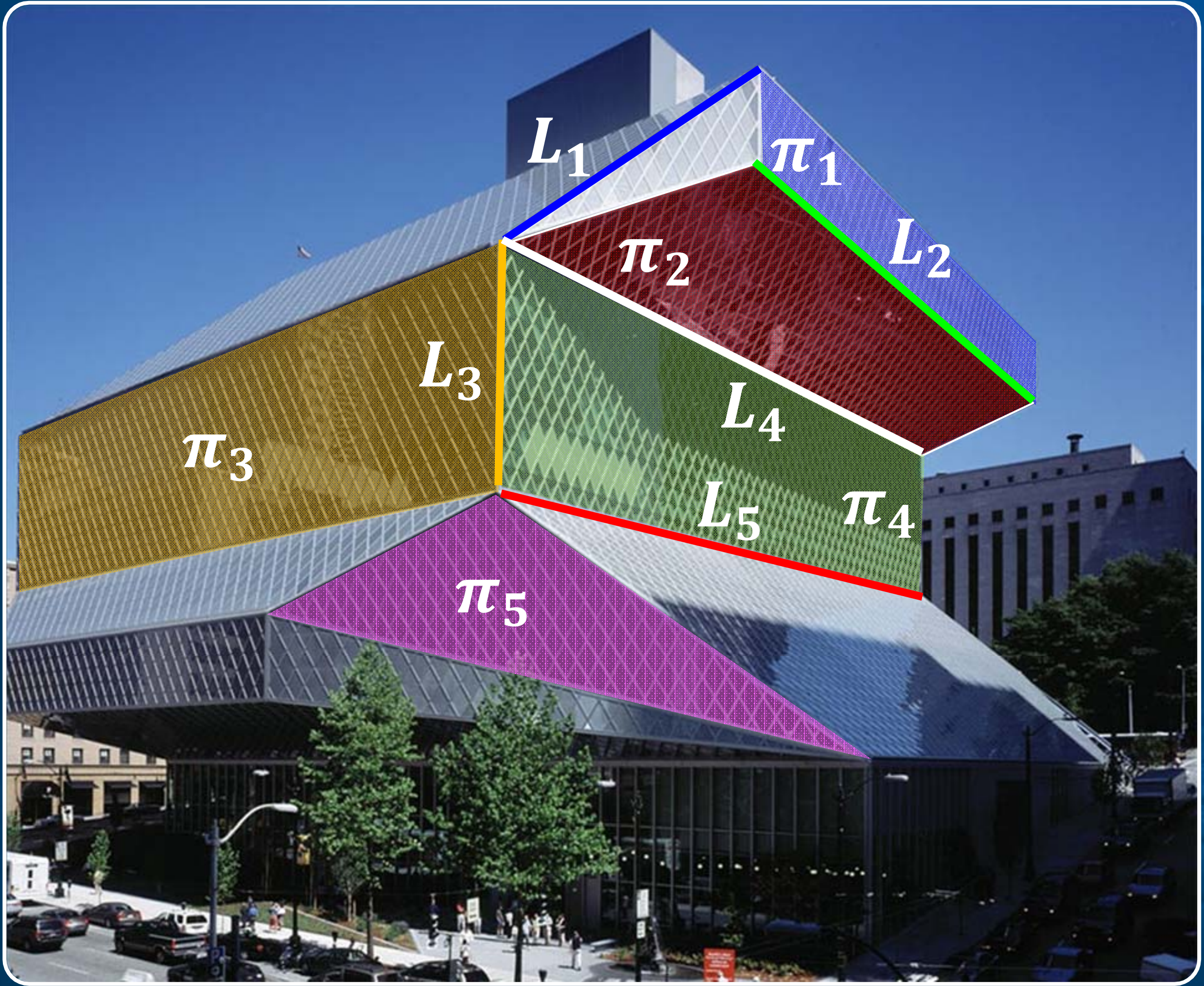
第57讲 平面与直线的位置关系

西雅图中央图书馆

图书馆阅览室一角



平面间的位置关系

平行、相交(垂直)

直线间的位置关系

平行、相交，异面

直线与平面间的位置关系

平行、相交(垂直)、平面内

平面与平面的位置关系

直线与直线的位置关系

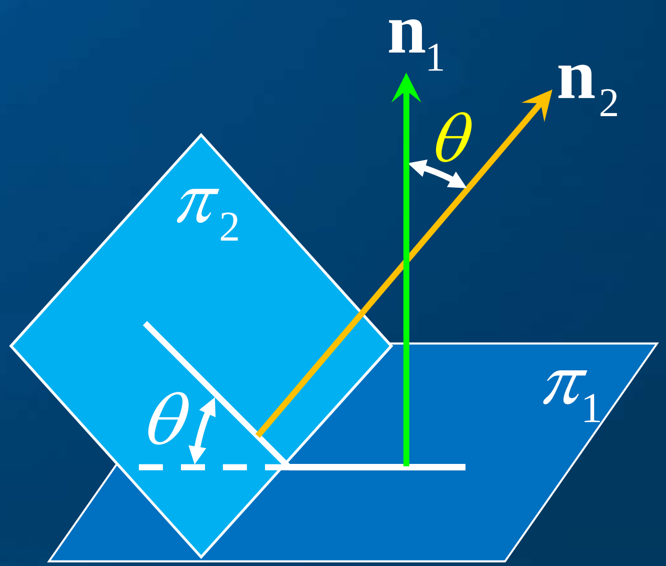
直线与平面的位置关系

两平面的夹角θ是指两平面法向量的夹角(规定$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)

已知两平面的方程为

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



设它们的夹角为θ, 则由定义，有

$$\cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1|\,|n_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

设两个平面π_1和π_2的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

由此容易得到两平面垂直与平行判断的充要条件:

$$(1)\ \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

$$(2)\ \pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

空间两平面恰好两种位置关系: 或者平行, 或者相交成一条直线.

例1 求过点$M(1,0,2)$ 且与平面 $\pi: 2x+y+3z-5=0$平行的平面方程.

【例1解】所求平面法向量 $\mathbf{n}=(2,1,3)$

平面点法式方程 $2(x-1)+(y-0)+3(z-2)=0$

即 $2x+y+3z-8=0$

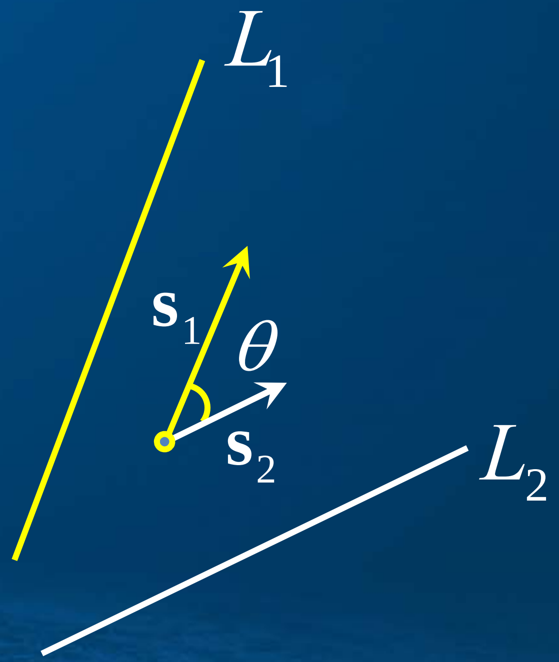
例2 已知一平面通过两点$M_1(1,3,-2)$ 和$M_2(3,0,2)$，且与平面 $\pi: 2x+y+3z+5=0$垂直, 求该平面方程.

两直线的夹角θ指其方向向量间的夹角（规定$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$）

设直线L_1，L_2的方程分别为

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$



设它们的夹角为θ, 则由定义，有

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

设直线L_1, L_2的方程分别为

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

由此容易得到两直线垂直或平行的条件：

(1) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

(2) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \mathbf{s}_1 // \mathbf{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

空间两个不同直线有三种位置关系:　平行、相交、异面

设直线L_1，L_2的方程分别为

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

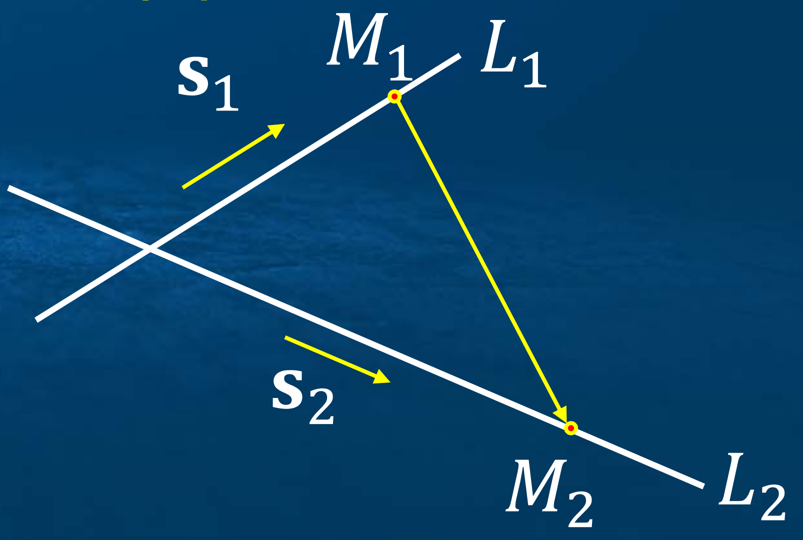
空间两个不同直线有三种位置关系: 平行、相交、异面

共面

L_1与L_2共面的充要条件是：

三向量$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$共面，即

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$$



例3 已知直线L_1、L_2 的方程如下：

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda},L_2:x+1=y-1=z.$$

试求实数 λ 的值来确定它们的空间位置关系. 并问当 λ 为何值时，这两条直线垂直？

例4 一直线通过点$M(0,1,1)$，且和二直线

$$L_1:\ x=y=z \quad 及 \quad L_2:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

相交，求该直线方程.

异面直线的距离

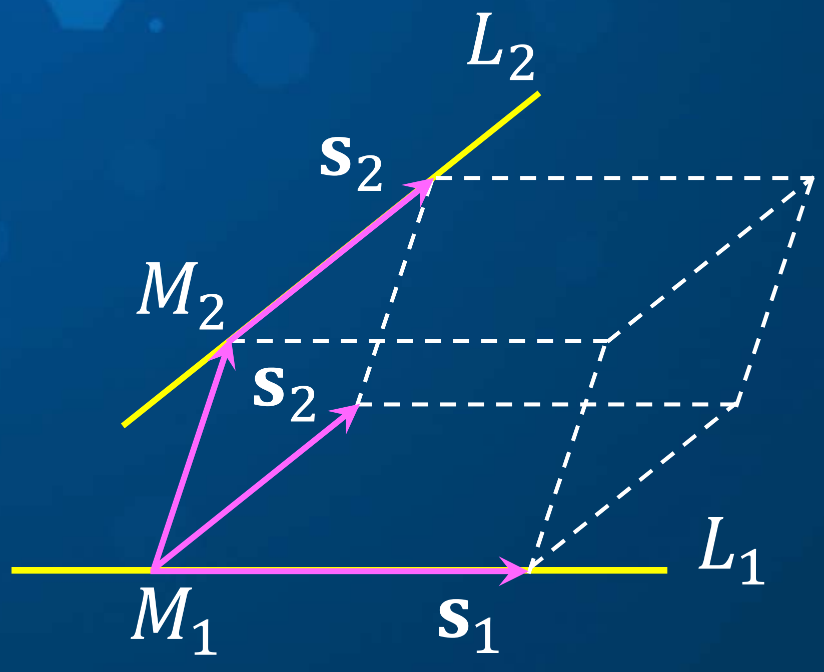
设L_1, L_2为异面直线，其方程为

$$L_j: \frac{x-x_1}{m_j}=\frac{y-y_1}{n_j}=\frac{z-z_j}{p_j}$$

$(j=1,2)$ 求它们之间的距离d.

两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$

两方向向量$s_1=(m_1,n_1,p_1)$，$s_2=(m_2,n_2,p_2)$



$$d=\frac{\left|(\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2|}$$

$$d=\frac{\left|(\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2|}$$

例5 已知两直线

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{2z+3}{2},L_2:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{-1}.$$

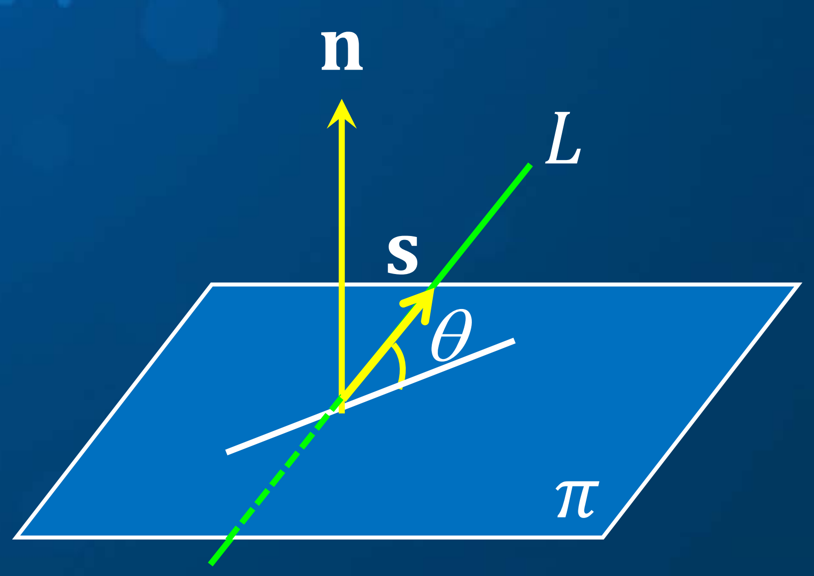
（1）求直线L_1、L_2间的夹角；

（2）证明直线L_1、L_2为异面直线；

（3）求直线L_1、L_2之间的距离.

已知直线: $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

平面: $\pi: Ax+By+Cz+D=0$



直线与平面的夹角满足：

$$\sin\theta=\frac{|\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{s}||\mathbf{n}|}$$

$$=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

直线与平面的夹角是指直线与其在平面上的投影所夹的锐角.

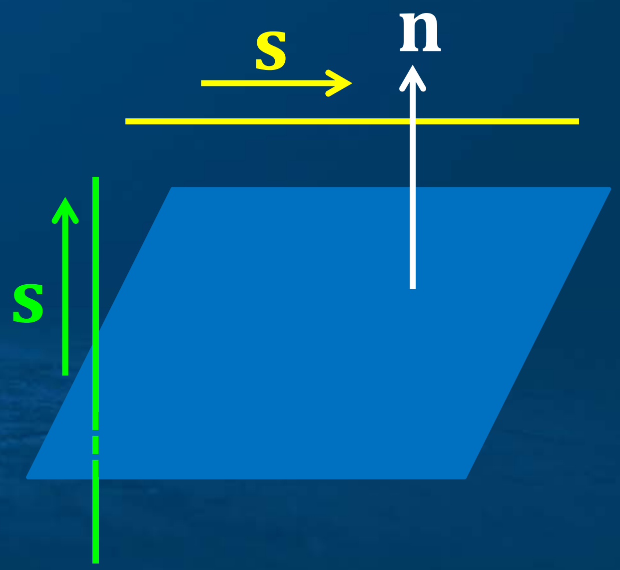
已知直线: $L: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$

平面: $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

则容易得到直线与平面垂直或平行的条件：

(1) $L \perp \pi \Leftrightarrow \mathbf{s} // \mathbf{n} \Leftrightarrow \dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$.

(2) $L // \pi \Leftrightarrow \mathbf{s} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow mA + nB + pC = 0$.



例6 已知平面π过点$M_0(2,1,3)$与直线 $L: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{5}$ 垂直，求平面π的方程.

【例6 解】 所求平面的法向量为 $\mathbf{n} = (3,2,5)$

平面的点法式方程为 $3(x-2) + 2(y-1) + 5(z-3) = 0$

即 $3x + 2y + 5z - 23 = 0$

例7 设$P(1,3,2)$是平面$\pi: x - 2y + z + 9 = 0$外一点，求点P关于平面π的对称点Q的坐标.