第26讲 导数在实际问题中的应用

- 导数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 的实际意义

——因变量 $y=f(x)$ 关于自变量 x 的变化率

- 电流——电量关于时间的变化率
- 化学反应速度——物质浓度关于时间的变化率
- 流量——流体体积（质量）关于时间的变化率
- 种群增长率——种群数量关于时间的变化率
- 边际——经济变量关于产品数量的变化率

变化率

相关变化率

例1 当运动员从10m高台跳水时，运动员跳向空中到进入水面的过程中，不同时刻的速是不同的．设在 ts 时运动员相对水面高度为

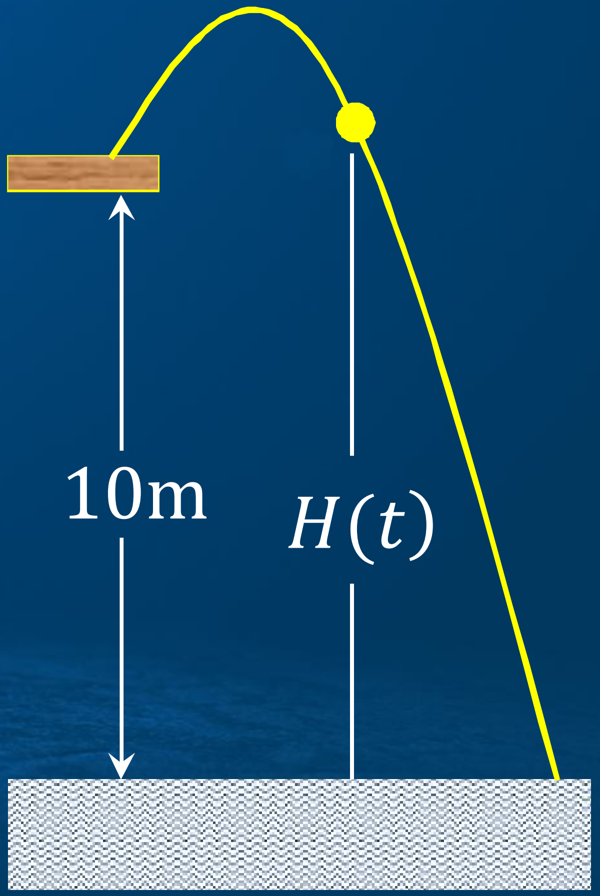
$$H(t) = -4.9t^2 + \frac{19.6}{3}t + 10\ (\mathrm{m})$$

问：

(1) 在2 s 时运动员的下降速度为多少？

(2) 运动员跃起后何时上升的速度为0？

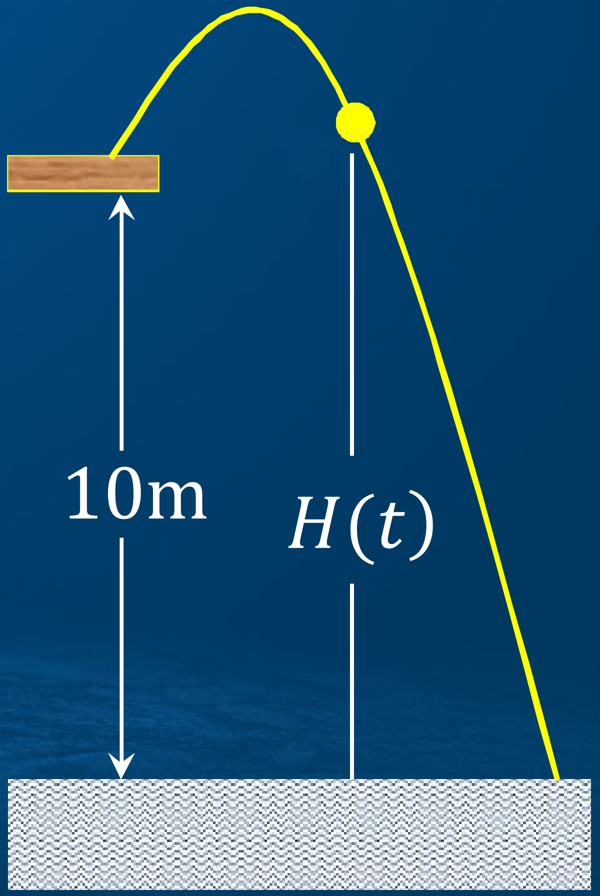
(3) 运动员入水刹那的速度为多少？



$$H(t) = -4.9t^2 + \frac{19.6}{3}t + 10\ (\mathrm{m})$$

问：

(1) 在2 s 时运动员的下降速度为多少？



例1解（1）

$$H'(t) = [-4.9t^2 + \frac{19.6}{3}t + 10]'$$

$$= -9.8t + \frac{19.6}{3}$$

$$H'(2) = (-9.8t + \frac{19.6}{3})|_{t=2}$$

$$= -13.0667\ (m/s)$$

$$H(t) = -4.9t^2 + \frac{19.6}{3}t + 10\ (\mathrm{m})$$

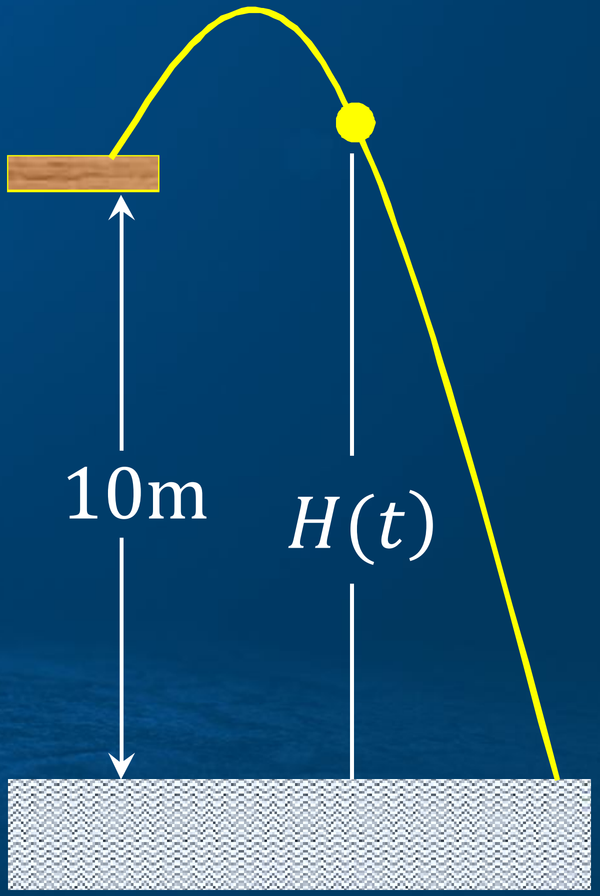
问：

(2) 运动员跃起后何时上升的速度为0？

例1解（2）

$$H'(t) = -9.8t + \frac{19.6}{3} = 0$$

$$t = \frac{2}{3}\ \mathrm{s}$$



$$H(t) = -4.9t^2 + \frac{19.6}{3}t + 10\ (\mathrm{m})$$

问：

(3) 运动员入水刹那的速度为多少？

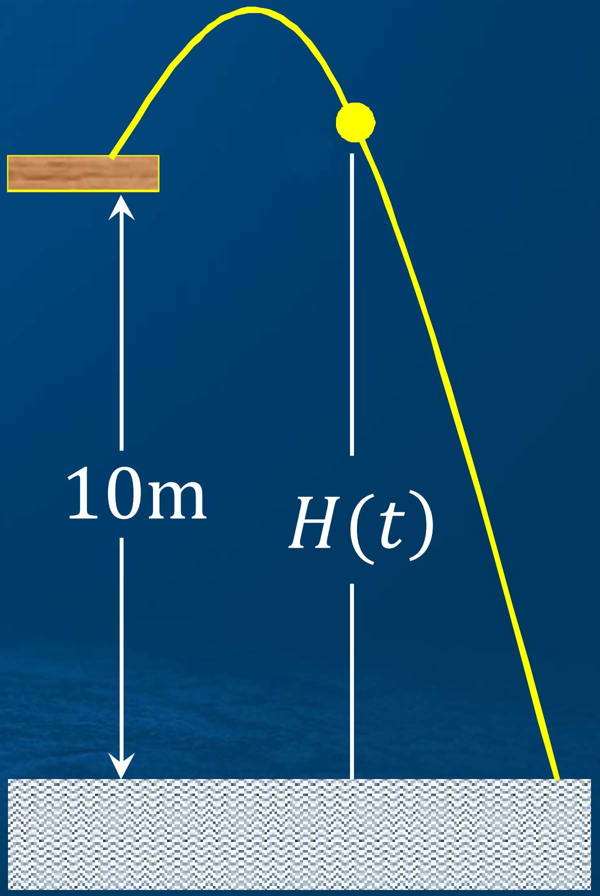
例1解（3）

$$H(t) = -4.9t^2 + \frac{19.6}{3}t + 10 = 0$$

$$t = 2.24314$$

$$H'(2.24314) = \left(-9.8t + \frac{19.6}{3}\right)\Big|_{t=2.24314}$$

$$= -15.4494\ (\mathrm{m/s})$$



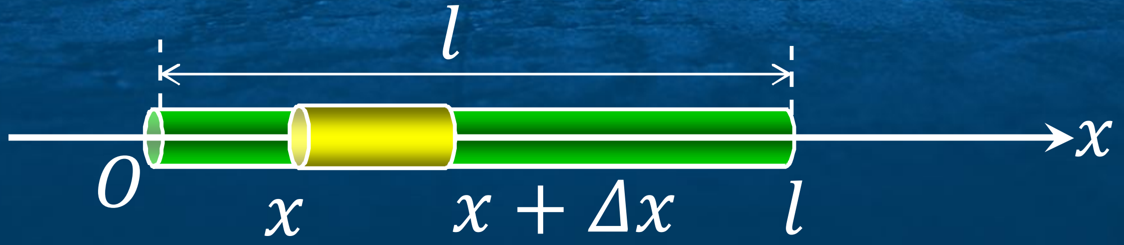
例2 设有一质量分布均匀的直细杆, 若该细杆长度为l (m), 质量为m (kg)，则该细杆的线密度(单位长度上的质量) 为

$$\rho = \frac{m}{l}(\mathrm{kg}/m)$$

今有一长度为l、质量分布非均匀的细杆，其质量分布函数为

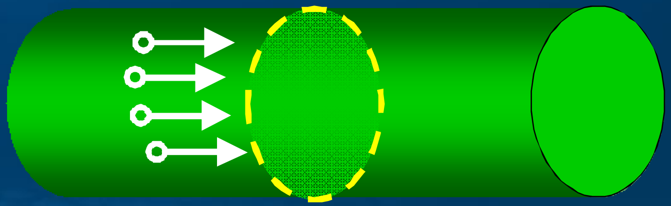
$$f(x) = \sqrt{x}\ (\mathrm{kg}),$$

求其在任一点处的线密度．



例3 导体中电荷的定向流动产生电流，电流的大小就是单位时间内通过导体横截面的电量．如果流经导体横截面的电荷随时发生变化，设在t (s)时通过导体横截面的电量为$Q(t)$ (C)，则在 t 到 $t+\Delta t$时间内通过导体横界面的平均电流为

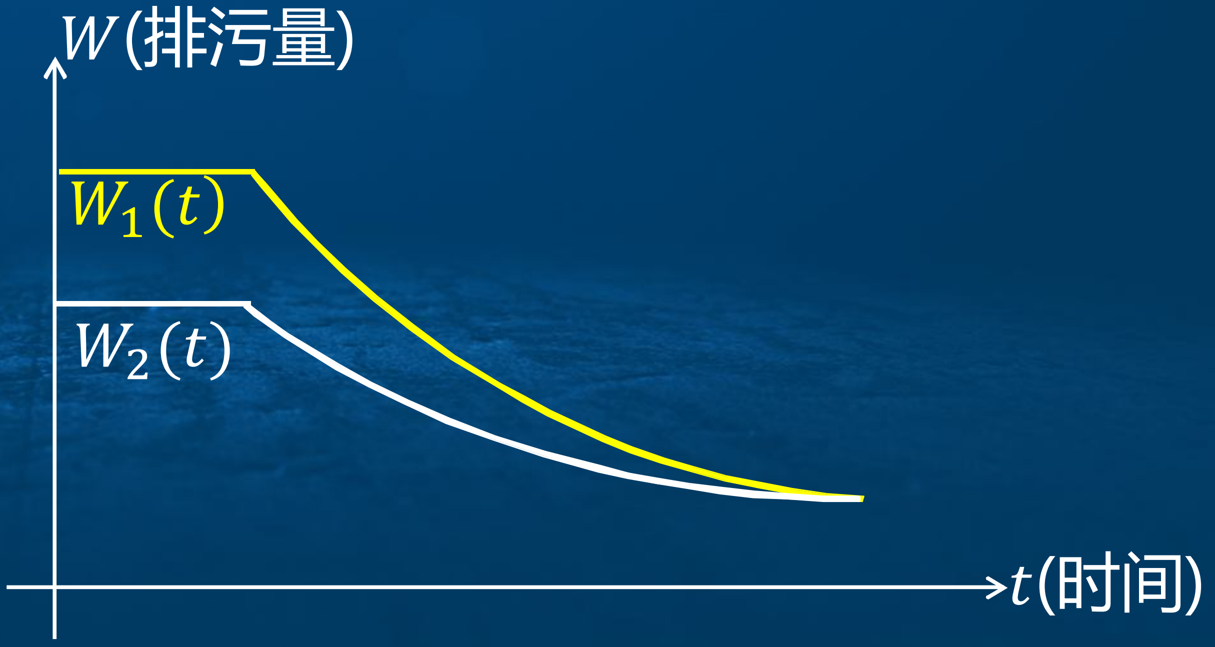
$$\bar{I}=\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}.$$



因此在t (s)时的电流为

$$I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}=Q'(t)\ (\mathrm{C/s}\ 或\ \mathrm{A}).$$

例4 环保部门对企业的污水排放下达了限期达标的通告，为督促企业切实有效地治理污染，在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业进行检查，连续检测结果如图所示，其中$W_1(t)$和$W_2(t)$分别是甲乙两家企业的排污量．



$$\frac{W_1(t_0-\Delta t)-W_1(t_0)}{\Delta t} > \frac{W_2(t_0-\Delta t)-W_2(t_0)}{\Delta t}$$

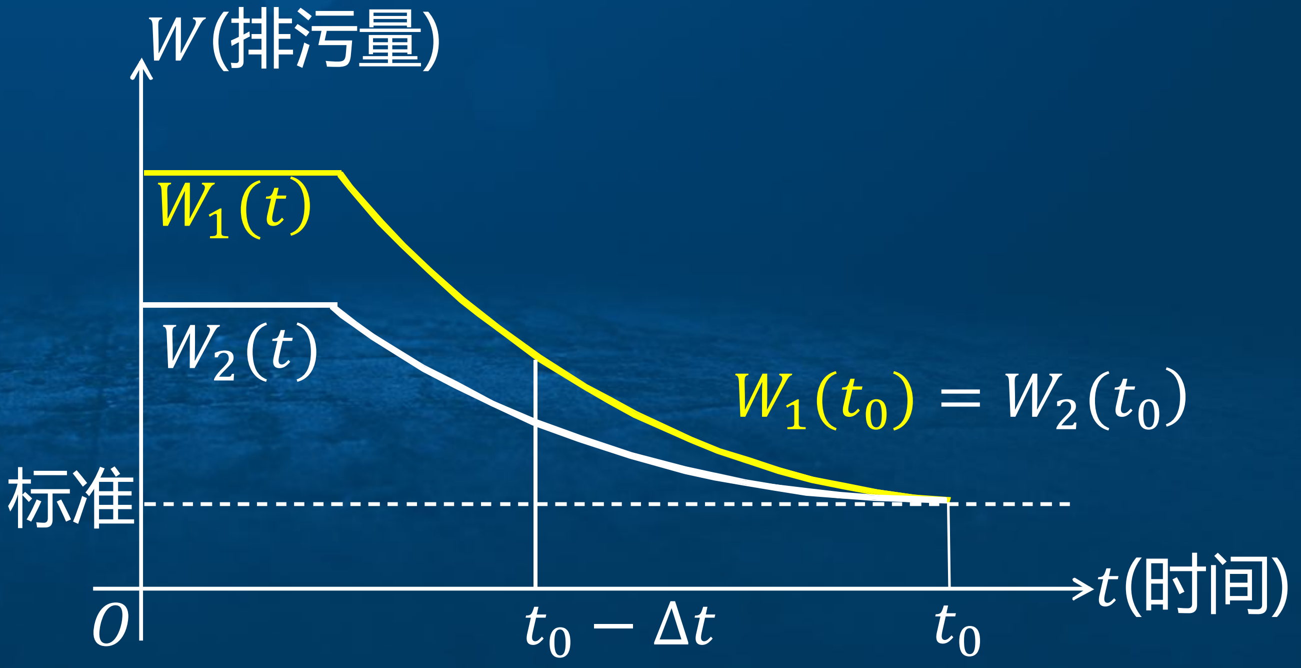
在时间区间 $[t_0-\Delta t,\, t_0]$ 内，企业甲比企业乙的平均减排率大．

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{W(t)-W(t-\Delta t)}{-\Delta t}$$

$$=-\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{W(t-\Delta t)-W(t)}{-\Delta t}$$

$$=-W'(t)$$

该值越大，说明 $W(t)$ 减少得越快，污染治理越有成效．



- 导数在经济学中的应用

边际通常指经济变量的变化率．

边际成本、边际收入和边际利润分别为成本函数$C(x)$、收益函数$R(x)$和利润函数$L(x)$的导数，即

- $C'(x)$——边际成本
- $R'(x)$——边际收入
- $L'(x)$——边际利润

由于需求或供给量多为离散的量，因此所谓的边际成本通常定义为

$$\Delta C = C(x+1) - C(x),$$

对边际收入和边际利润也是如此．

ΔC解释为“当产量为x时，增加一个单位产量所需增加的成本”．由于通常x远大于1，所以由近似公式，有

$$C'(x) \approx \Delta C = C(x+1) - C(x),$$

因此，将$C'(x)$和ΔC同称为边际成本．

例5 某企业生产x件产品的成本为$C(x)=10000+5x+0.01x^2$(元),

则边际成本函数为

$$C'(x)=(10000+5x+0.01x^2)'=5+0.02x\ （元/件）.$$

特别，当生产规模为500件时，边际成本为

$$C'(500)=(5+0.02x)|_{x=500}=15\ （元/件）.$$

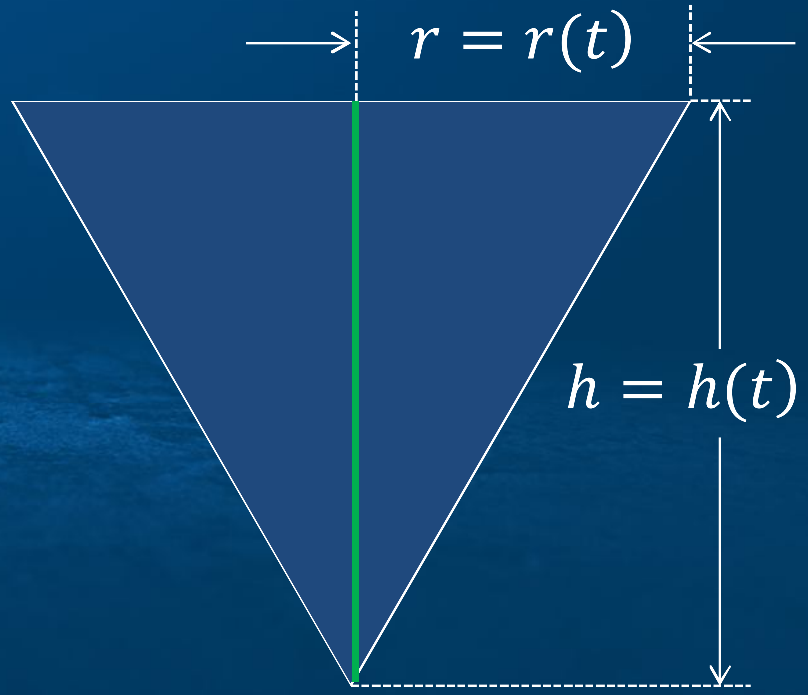
下表给出了$x = 100, 200, 300, 400, 500$时, $C'(x)$与ΔC的比较.

产量	$C'(x)$	$\Delta C = C(x+1) - C(x)$	$C'(x) - \Delta C$
100	7	7.01	-0.01
200	9	9.01	-0.01
300	11	11.01	-0.01
400	13	13.01	-0.01
500	15	15.01	-0.01

例6 设直圆锥的底半径r、高h都是时间t的可微函数，则其体积V也是时间 t 的可微函数，试给出变化率 $\frac{dV}{dt}$、$\frac{dr}{dt}$ 和 $\frac{dh}{dt}$ 的关系．

例6解 圆锥的体积为

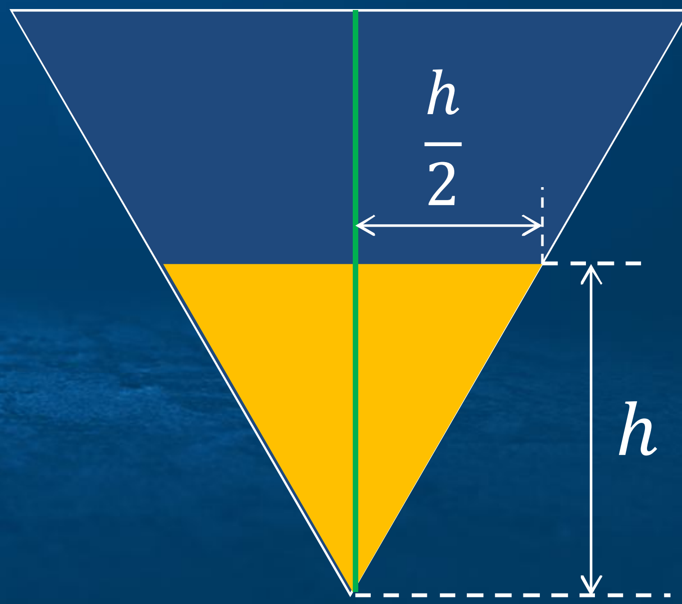
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$



将等式两边同时关于时间 t 求导数，得到

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left(2rh\frac{dr}{dt}+r^2\frac{dh}{dt}\right)$$

例7 有一深度为8米、上底直径为8 米的正圆锥容器，现向该容器以每分钟4立方米的速度注水．问：当容器中水深为5米时，水面上升的速度为多少？



例8 现有甲乙两条正在航行的船只，甲船向正南直线航行，乙船向正东直线航行.开始时甲船恰在乙船正北40km处.

例8 现有甲乙两条正在航行的船只，甲船向正南直线航行，乙船向正东直线航行.开始时甲船恰在乙船正北40km处.

后来在某一时刻测得甲船向南航行了20km，此时速度为15km/h；乙船向东航行了15km，此时速度为25km/h.

问这时两船是在分离还是在接近，该时刻的速度是多少？

解决相关变化率问题的一般步骤为：

1. 画出示意图，为各相关变量命名，并标注在示意图中；
2. 用变量符号写出已知数据，并注意统一量纲；
3. 正确建立各变量之间的关系，这是非常重要的一步；
4. 对所建立的关系式关于时间（或其它属性的变量）求导数，得含有导数的关系式；
5. 根据已知条件，计算出要求的变化率．