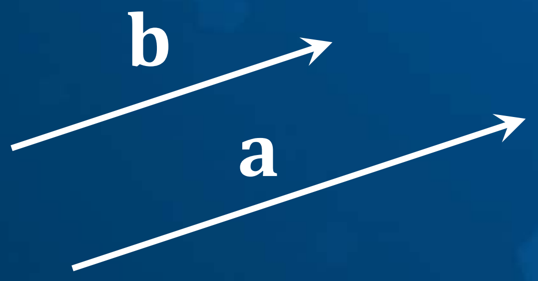
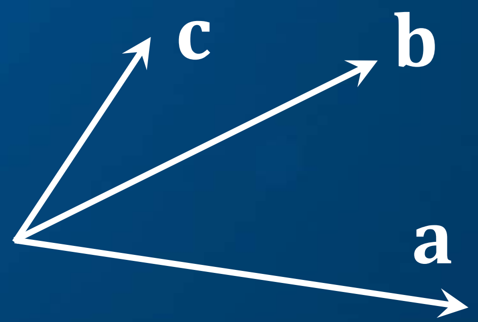
第54讲 向量的数量积、向量积与混合积

- 向量之间的位置关系



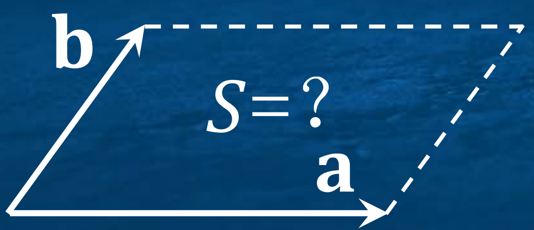
平行

垂直

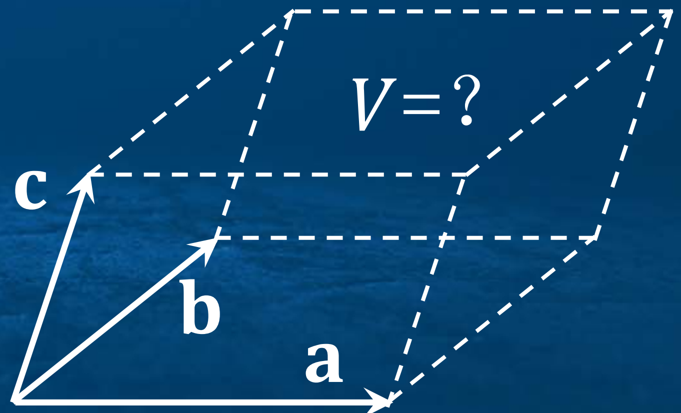


共面

- 面积与体积的计算

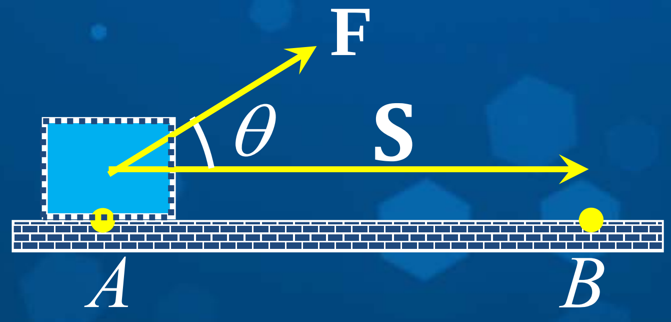


平行四边形的面积

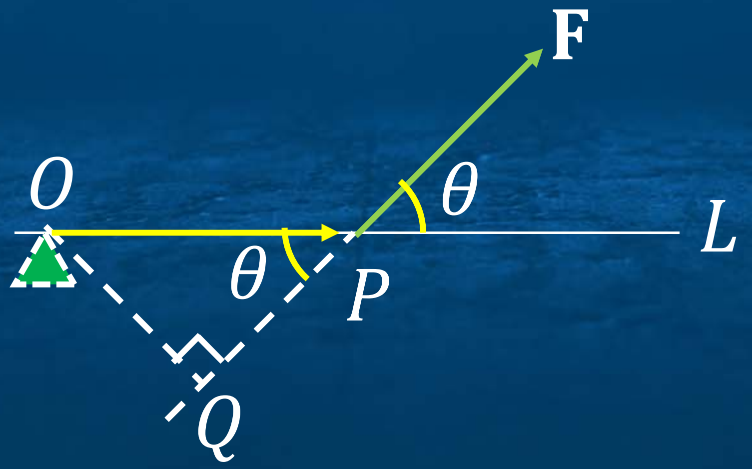


平行六面体的体积

- 常力做功



- 力作用在杠杆上的力矩



- 向量的数量积
- 向量的向量积
- 向量的混合积

第54讲向量的数量积、向量积与混合积——主要内容

定义1 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$是三维向量空间$\mathbb{R}^3$中两个向量, 则称

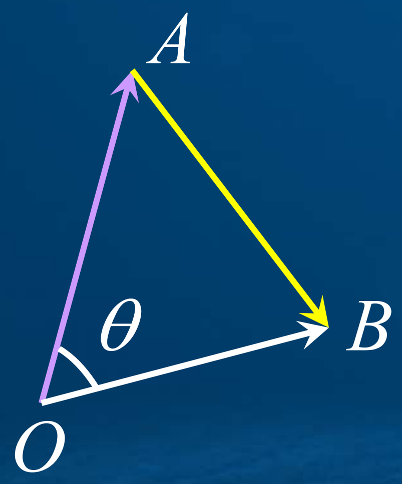
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \xlongequal{\text{记作}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

为向量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的数量积（点积或内积）.

一般地，设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是$n$维向量空间$\mathbb{R}^n$中两个向量, 则$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的数量积定义为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

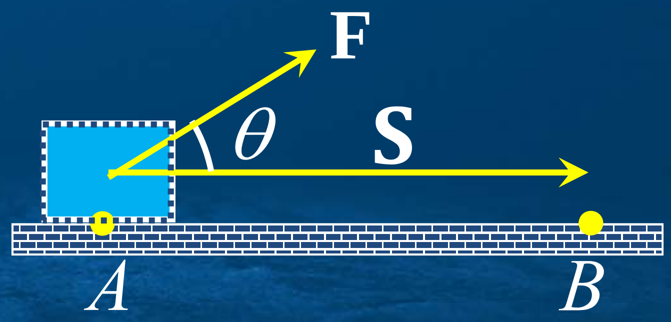
定理1 设$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$为三维向量空间$\mathbb{R}^3$中的向量，且夹角为$\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$，则关于它们的**数量积**有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$.



向量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的夹角θ也记作

$$\theta = \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$$

常力做功问题



$$W = |\mathbf{F}||\mathbf{S}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}.$$

对于三维非零向量**a**，**b**，由定理1可得

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \Rightarrow \boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

对于三维向量, 有坐标形式

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$\boxed{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

柯西-施瓦茨不等式

若向量a与b的夹角为$\frac{\pi}{2}$，则称向量a与b**正交**或**垂直**，并记作$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

特别地，当$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

对于三维空间的基向量, 有

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

数量积运算规律

(1) 交换律 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\,;$

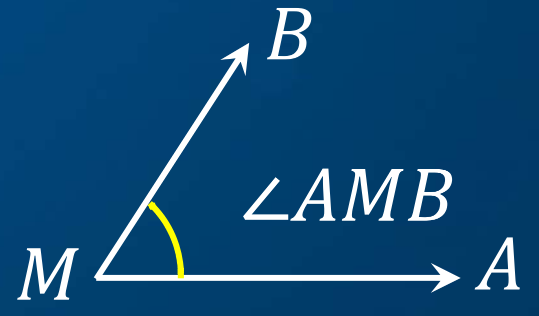
(2) 结合律 $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,;$

(3) 分配律 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\,;$

(4) $\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2\,.}$

例1 已知三点$M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$ ，求$\angle AMB$.

【例1解】 $\angle AMB$即向量$\overrightarrow{MA}$与$\overrightarrow{MB}$的夹角



$$\overrightarrow{MA} = (2-1,2-1,1-1) = (1,1,0)$$

$$\overrightarrow{MB} = (2-1,1-1,2-1) = (1,0,1)$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \quad |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AMB = \frac{\pi}{3}$$

例2 证明三角形的三条高交于一点.

例3 已知向量**a**，**b**的夹角$\theta=\frac{3\pi}{4}$,且$|\mathbf{a}|=\sqrt{2}, |\mathbf{b}|=3$, 求 $|a-b|$.

【例3解】

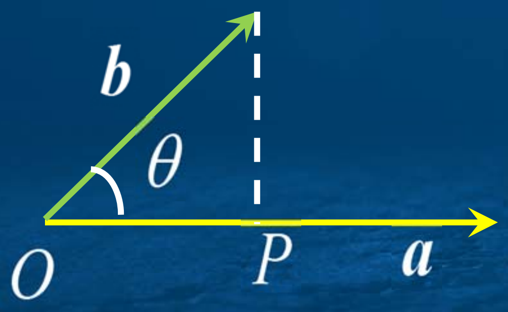
$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\
&= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^2+3^2-2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{3\pi}{4}=17
\end{aligned}
$$

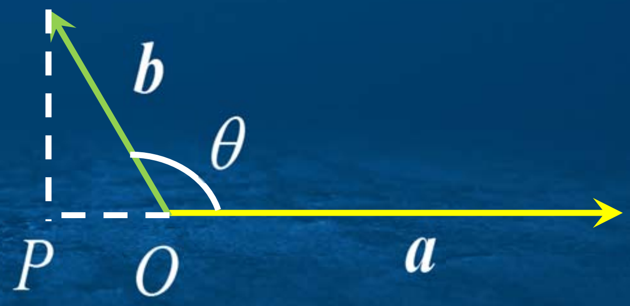
因此 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{17}$

向量的投影

一般地，设**a**为非零向量，θ为向量**a**和**b**的夹角，称$|\mathbf{b}|\cos\theta$为向量**b**在**a**上的投影，记作$(\mathbf{b})_{\mathbf{a}}$或$\mathrm{Prj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$，即：

$$(\mathbf{b})_{\mathbf{a}} = |\mathbf{b}|\cos\theta.$$





向量的投影

一般地，设$\mathbf{a}$为非零向量，θ为向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的夹角，称$|\mathbf{b}|\cos\theta$为向量$\mathbf{b}$在$\mathbf{a}$上的投影，记作$(\mathbf{b})_{\mathbf{a}}$或$\mathrm{Prj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$，即：

$$(\mathbf{b})_{\mathbf{a}} = |\mathbf{b}|\cos\theta.$$

由 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$，有$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|(\mathbf{b})_{\mathbf{a}}$ 且

$$(\mathbf{b})_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{e}_{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}.$$

同理，如果$\mathbf{b}$为非零向量, 则有$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|(\mathbf{a})_{\mathbf{b}}$，即$(\mathbf{a})_{\mathbf{b}} = \mathbf{e}_{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{a}$

例4 设均匀流速为$\mathbf{v}$的流体流过一个面积为 A 的平面域，且$\mathbf{v}$与该平面域的单位垂直向量$\mathbf{n}$的夹角为θ，求单位时间内流过该平面域的流体的质量P (流体密度为 ρ).

【例4解】 单位时间内流过的体积为

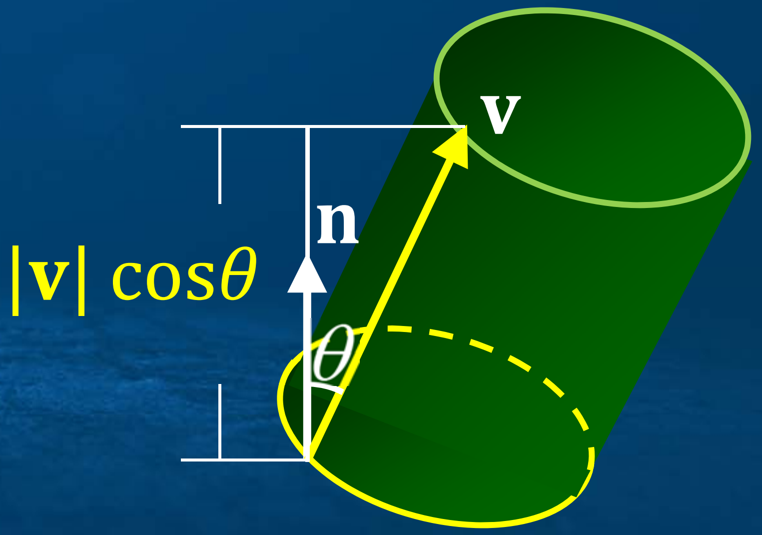
$$V = A|\mathbf{v}|\cos\theta$$

单位时间内流过的质量为

$$P = \rho A|\mathbf{v}|\cos\theta$$

$\mathbf{n}$为单位向量

$$= \rho A\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$$



定义2 设$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$是三维向量空间$\mathbb{R}^3$中两个向量，则称向量

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

为a与b的向量积（亦称叉积或外积）,记作$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，即

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

例5 证明：$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

关于向量积，有

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$分别垂直；

$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}}$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\cdot(a_1,a_2,a_3)$$

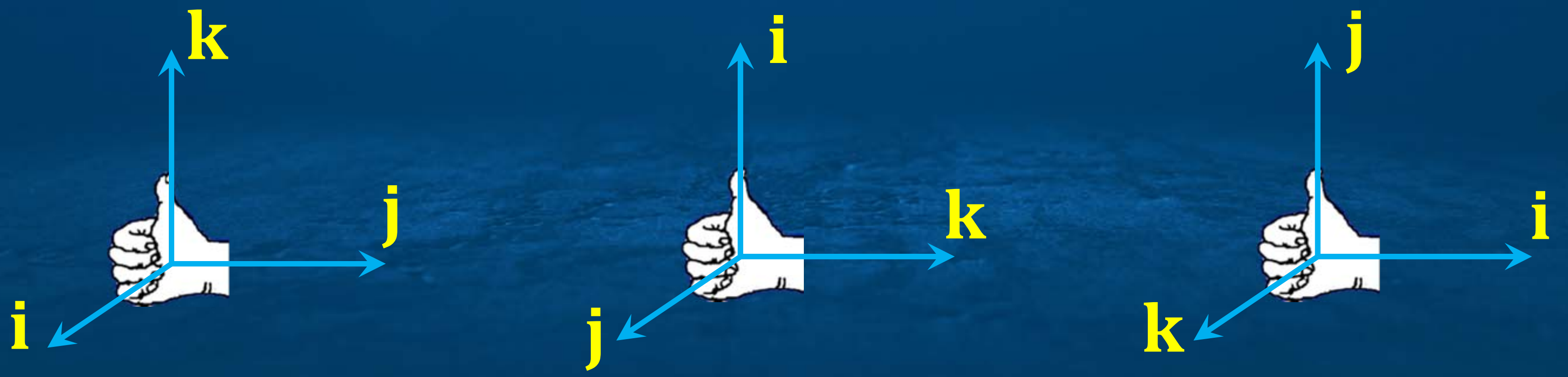
$$=a_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$$

例5 证明：$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$.

关于向量积，有

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$分别垂直；

(2) $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$服从右手法则；



关于向量积，有

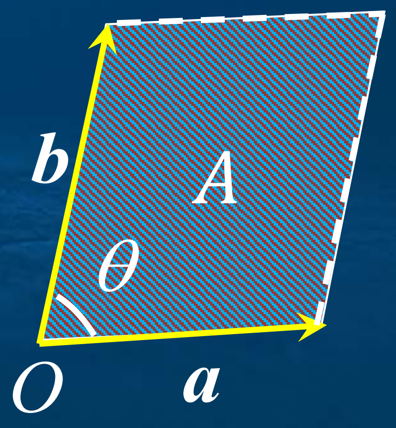
(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$分别垂直；

(2) $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$服从右手法则；

(3) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$，其中$\theta$为$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角.

当$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$为非零向量时,$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$的长度等于由$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$所确定的平行四边形的面积. 即

$$A = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$



关于向量积，有

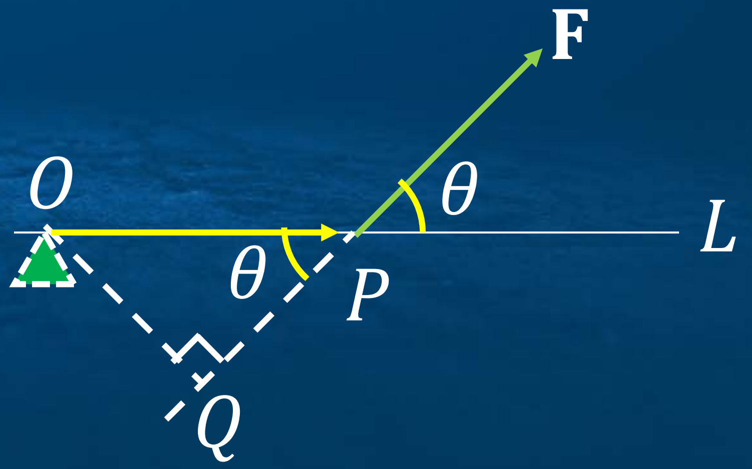
(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$分别垂直；

(2) $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 与$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$服从右手法则；

(3) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$，其中$\theta$为$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角.

力$\mathbf{F}$作用在杠杆上的力矩 $\mathbf{M}$ 为

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP}\times\mathbf{F}$$



向量积运算规律：

(1) 反交换律 $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;

(2) 结合律 $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;

(3) 分配律 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$;

(4) $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

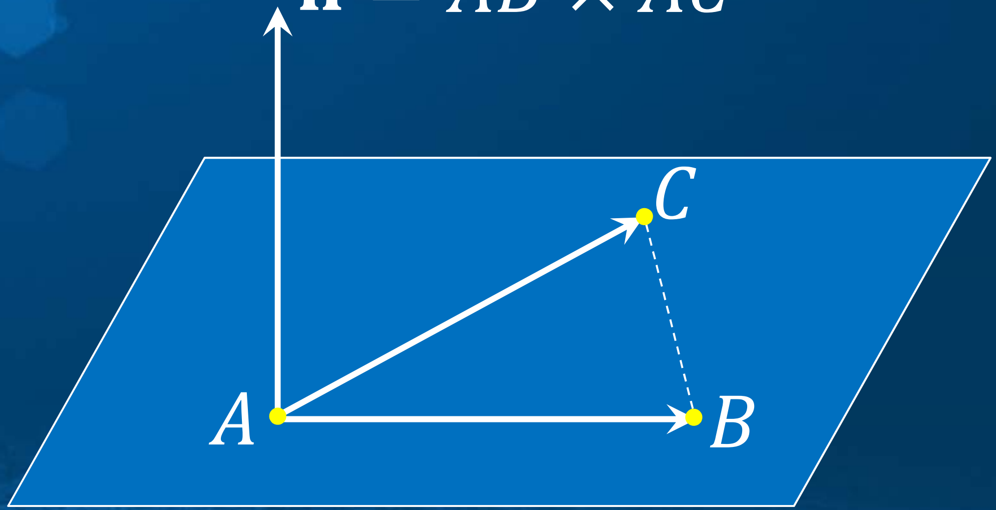
(5) 两非零向量 $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

例6 已知三角形 ABC 三个顶点为 $A(1,-1,2), B(3,2,1), C(2,2,3)$ ，

(1) 求垂直于这个三角形所在平面的单位向量.

(2) 求这三角形的面积.

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$



【例6解】(1)

$$\overrightarrow{AB} = (2,\ 3,\ -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,\ 3,\ 1)$$

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (6,-3,3)$$

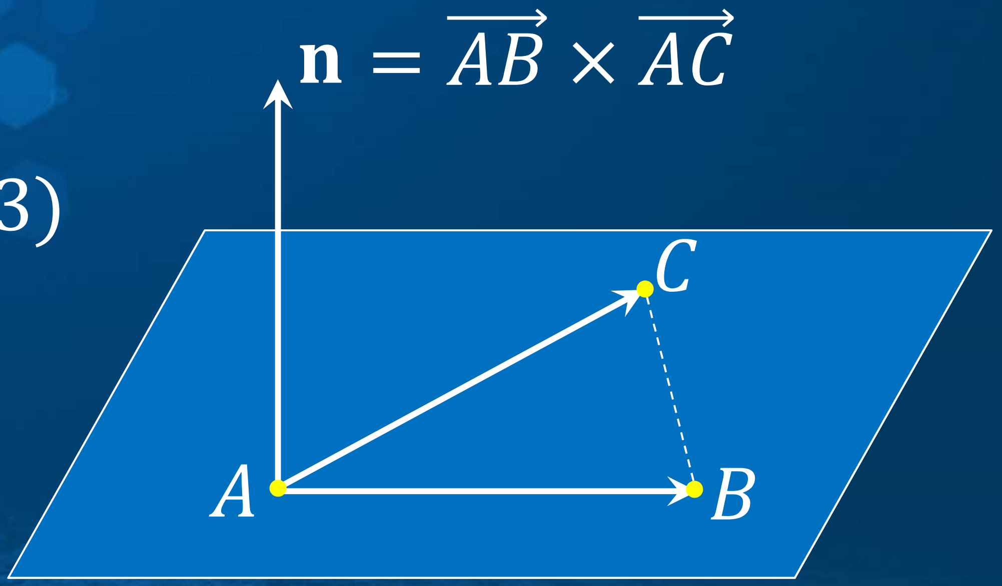
$$|\mathbf{n}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}$$

$$\mathbf{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$$

例6 已知三角形 ABC 三个顶点为$A(1,-1,2)$, $B(3,2,1)$, $C(2,2,3)$,

(1) 求垂直于这个三角形所在平面的单位向量.

(2) 求这三角形的面积.



【例6解】(2) $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,-3,3)$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

定义3 已知三向量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，称数量

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$$

为$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$的**混合积**.

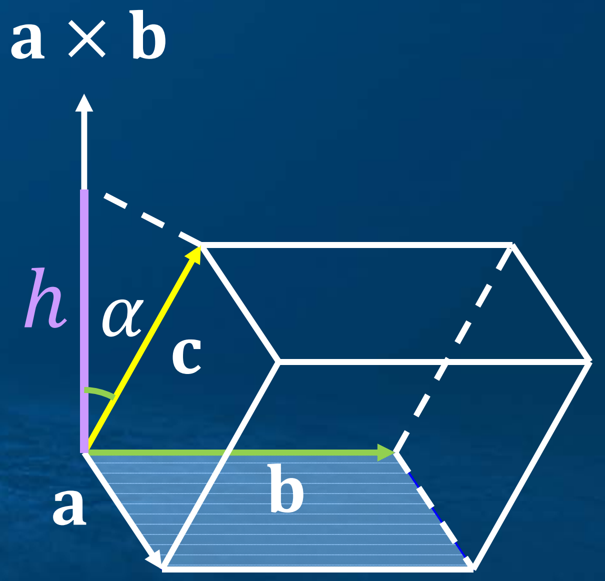
几何意义

以$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$为棱作平行六面体， 则其

底面积: $A=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ 高: $h=|\mathbf{c}||\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V=Ah=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}||\cos\alpha|=|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|=|[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]|$$



混合积的坐标表示

设 $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

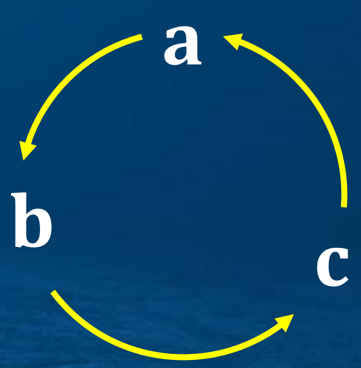
性质

(1) 三个非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面的充要条件是

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0.$$

(2) 轮换对称性：

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] = [\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]$$



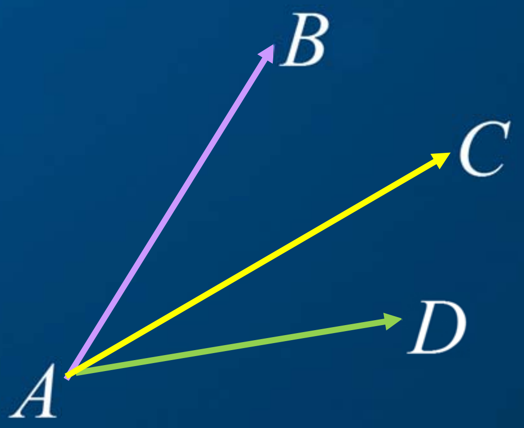
(可用三阶行列式推出)

例7 证明四点$A(1,1,1)$, $B(4,5,6)$, $C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$ 共面 .

【例7解】 $\overrightarrow{AB}=(3,\ 4,\ 5)$

$\overrightarrow{AC}=(1,\ 2,\ 2)$

$\overrightarrow{AD}=(9,\ 14,\ 16)$



混合积 $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix}=0$

三向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$共面