第22讲 导数的概念

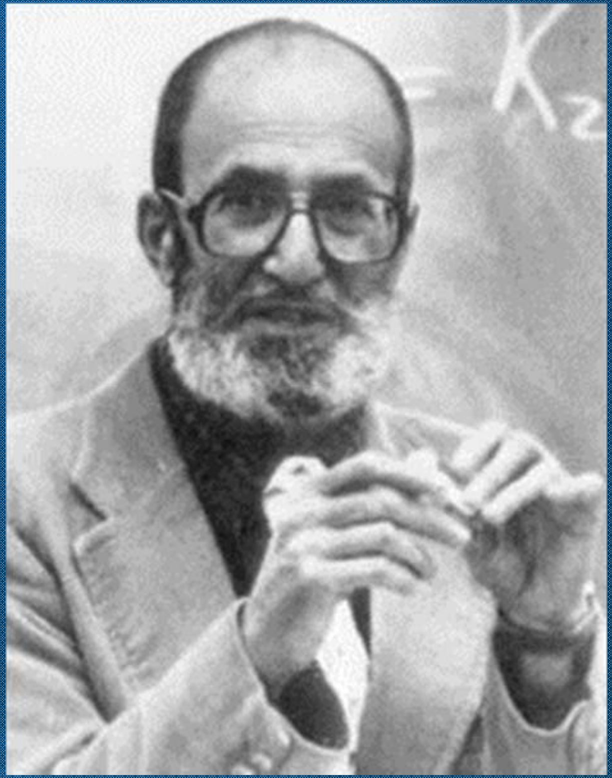
"问题是数学的心脏"

保罗 · 哈尔莫斯

问题1：已知物体运动的路程与时间的关系，求物体在任意时刻的速度和加速度.

问题2：求曲线的切线.

由解决相关问题而发展起来的数学理论称为微分学！



保罗·哈尔莫斯
(Paul Halmos)
1916—2006

微积分是微分学和积分学的总称．它是由牛顿与莱布尼兹在研究物理和几何问题的过程中总结前人的经验，于十七世纪后期建立起来的.

“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了！”

弗里德里希·冯·恩格斯

问题求解

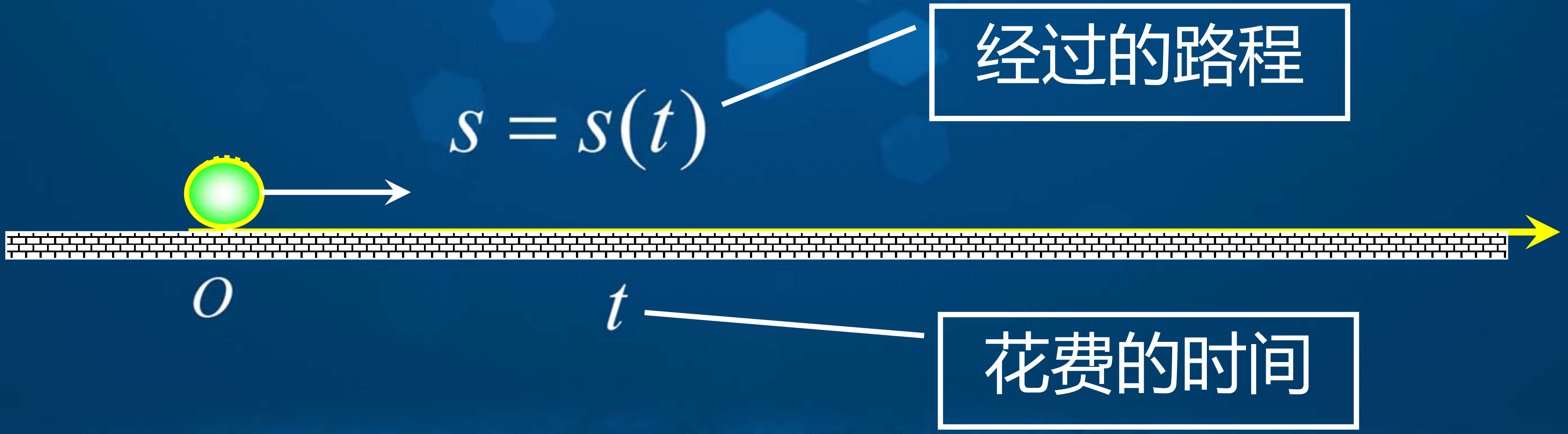
导数的定义及几何意义

导数存在的条件

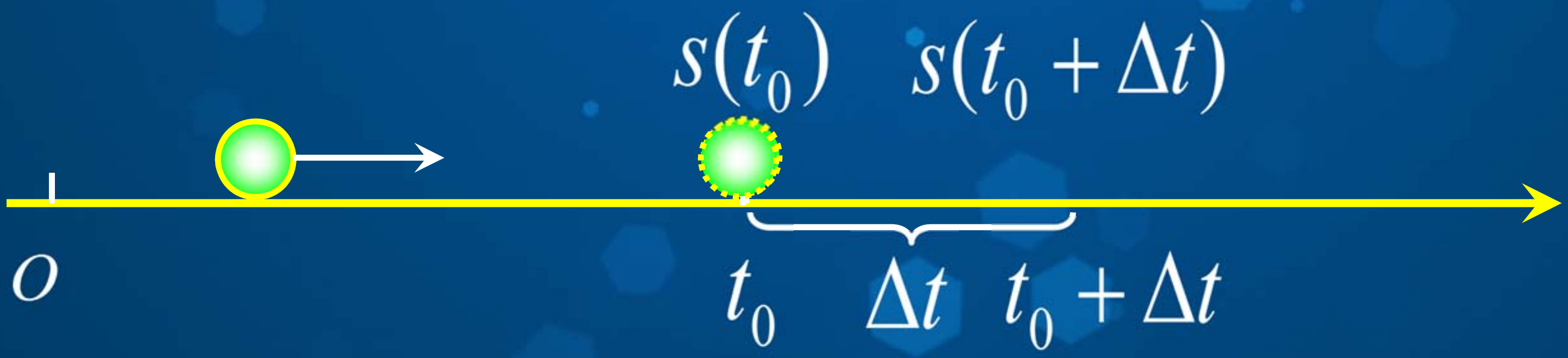
导函数

第22讲 导数的概念——主要内容

问题1 求变速直线运动的瞬时速度



匀速直线运动的速度：$v = \dfrac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}}$

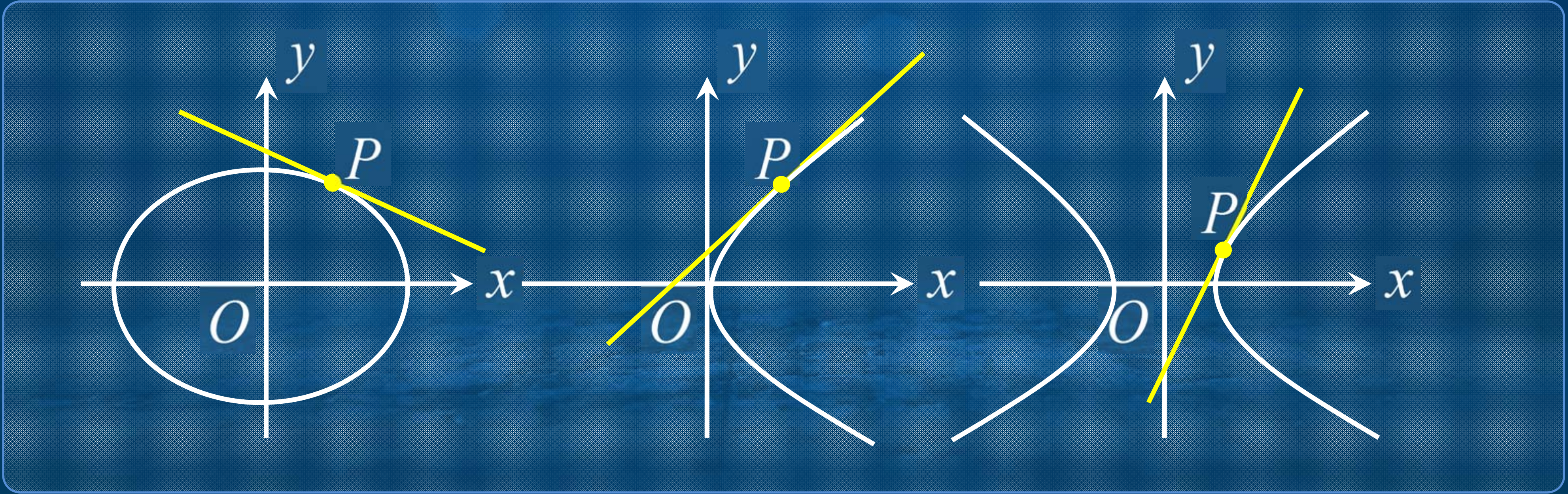


变速直线运动的平均速度： $\bar{v}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

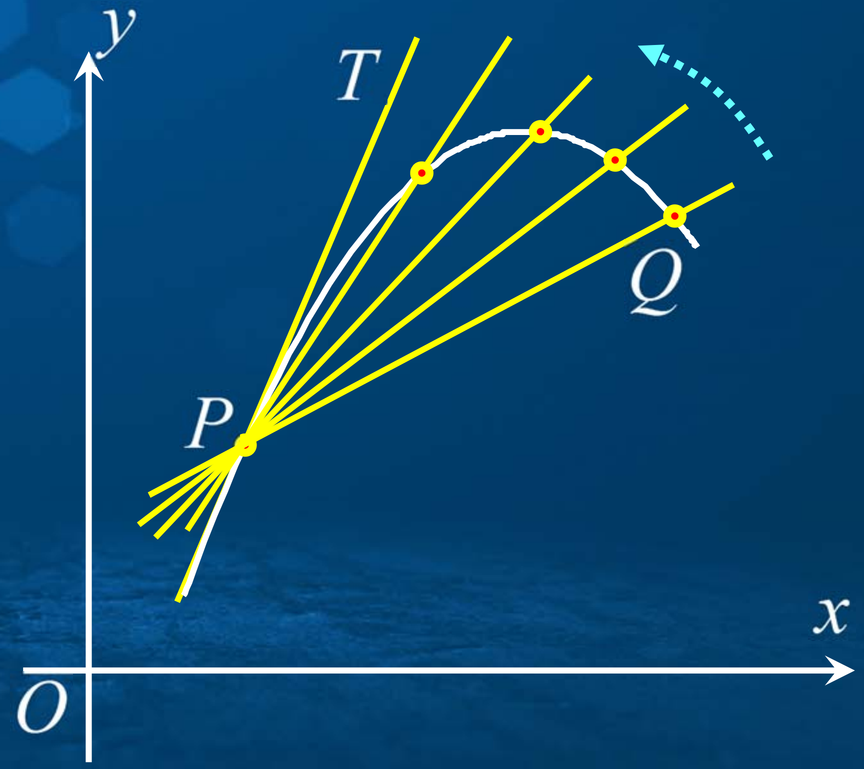
在 t_0 时刻的**瞬时速度**为 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

问题2 求曲线的切线

欧几里得定义圆锥曲线的切线：和曲线只接触一点而且位于曲线一边的直线.



一般曲线的切线 —— 割线的极限状态



一般曲线的切线 —— 割线的极限状态

割线的斜率：

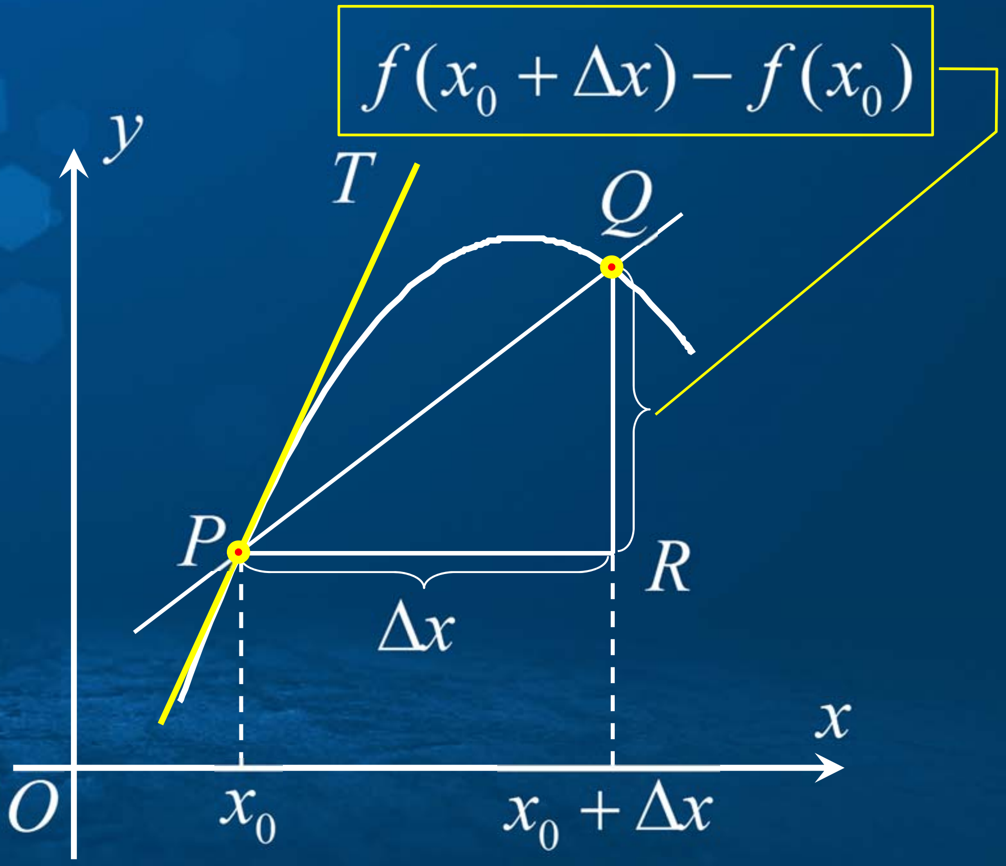
$$k_{PQ}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

切线的斜率：

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

切线方程

$$y=k(x-x_0)+f(x_0)$$



变速直线运动的瞬时速度

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

曲线切线的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

瞬时变化率

问题的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若极限

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，其极限值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为

$$f'(x_0) \quad 或 \quad y'_x\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

若上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导.

变速直线运动的瞬时速度

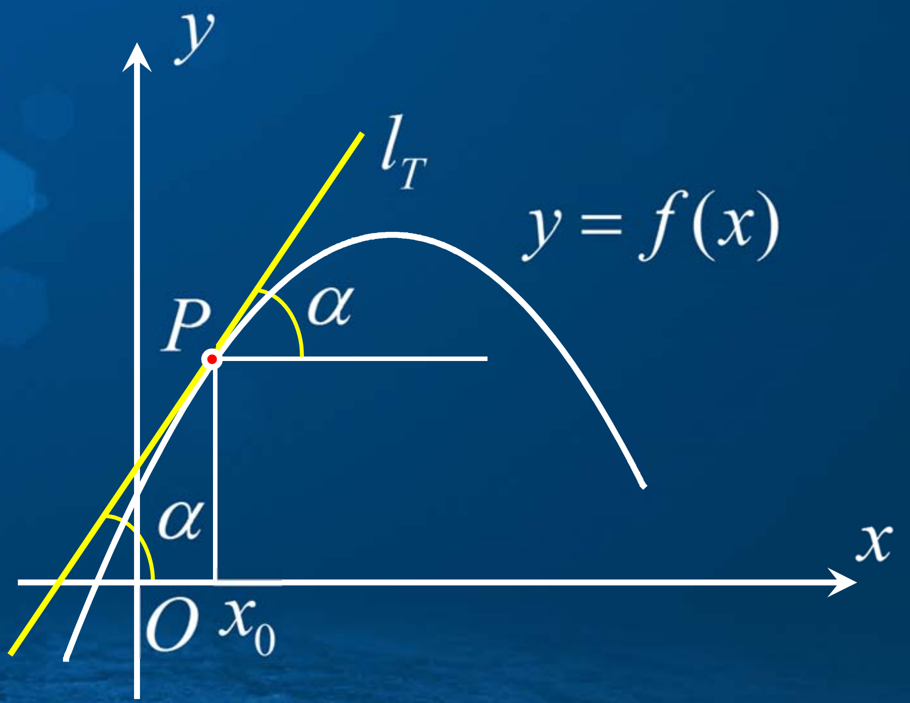
$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=s'(t_0)$$

切线的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

导数的几何意义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.



$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

切线方程：

$$l_T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

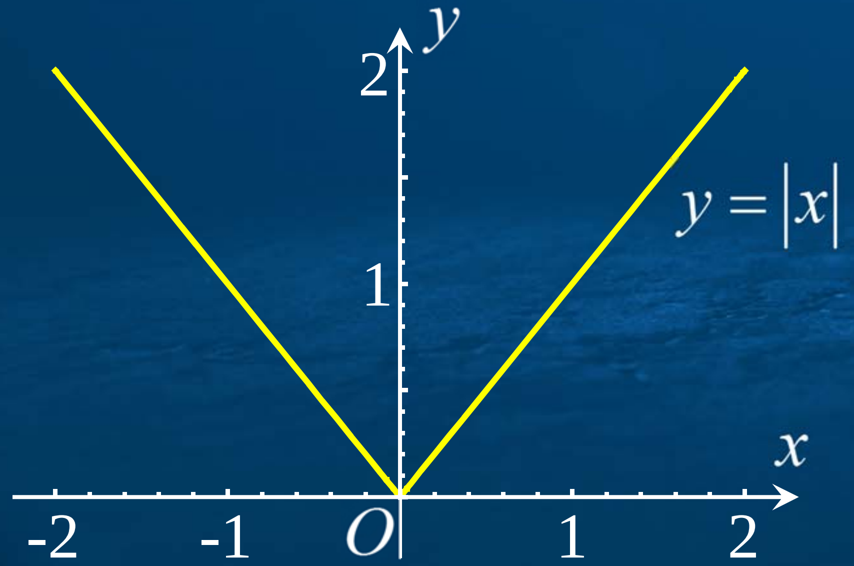
- 导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- 左导数 $f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- 右导数 $f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

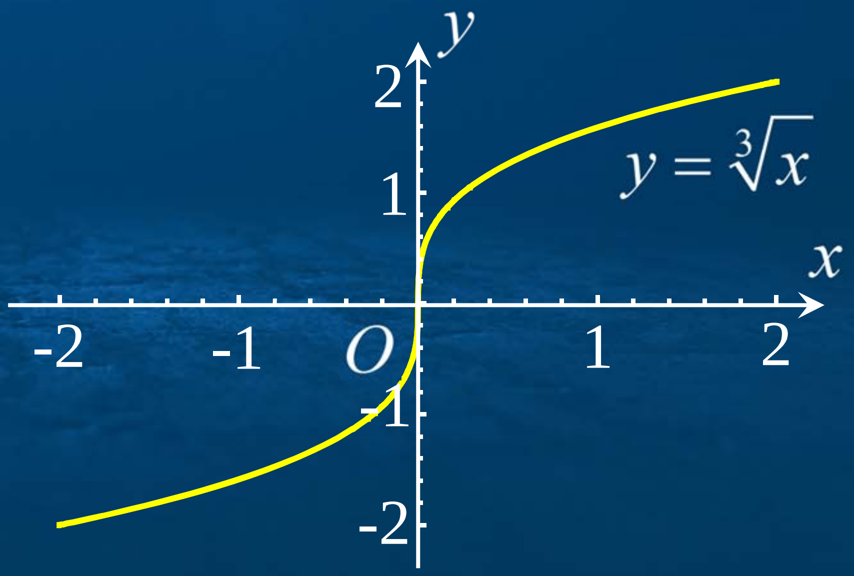
定理1 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是它在 x_0 的左、右导数存在且相等 .

定理2 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 一定在 x_0 处连续.

注：连续是可导的必要条件，但不是充分条件.

例1 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.





例2 求常数 a, b，使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0, \\ e^x, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续可导.

定义2 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导. 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. 导数对应的函数 $f'(x)$ 称为原来函数 $f(x)$ 的导函数，简称导数，记为

$$y',\ f'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

导函数的定义式为: $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},x\in(a,b).$$

例3 求常值 $f(x)=C$ 函数（C 为常数）的导数．

例4 求函数 $f(x)=x^2$ 的导数．

例5 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\neq 0$ 处均可导．