哈爾濱工業大學

第21讲 随机变量的独立性

随机变量的独立性

两事件A, B独立的定义是：
若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件A, B独立 .

设X, Y是两个随机变量，若对任意的实数x, y,

令$A=(X \le x), B=(Y \le y)$,则

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y),$$

$$\Downarrow$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

随机变量的独立性

- **定义** 设$F(x,y), F_X(x), F_Y(y)$依次为(X,Y), X,Y的分布函数. 若对任意实数x,y成立

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

称X与Y相互独立.

随机变量的独立性

X,Y为连续型随机变量时

X与Y独立的充要条件是

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

这里$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$分别是(X,Y), X,Y的概率密度.

X,Y为离散型随机变量时

X与Y独立的充要条件是

$$P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=P(X=x_i)P(Y=y_j).$$

即 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$,

这里p_{ij}, $p_{i\cdot}$, $p_{\cdot j}$分别是(X,Y), X,Y的分布列.

例1 已知(X,Y)的分布列，问X与Y是否独立？

$Y \backslash X$	2	5	$P(Y=j)$
0	1/3	1/3	2/3
3	1/6	1/6	1/3
$P(X=i)$	1/2	1/2	

解 逐点检验下式是否成立

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j).$$

$$P(X=2,Y=0)=1/3=P(X=2)P(Y=0).$$

$$P(X=2,Y=3)=1/6=P(X=2)P(Y=3).$$

$$P(X=5,Y=0)=1/3=P(X=5)P(Y=0).$$

$$P(X=5,Y=3)=1/6=P(X=5)P(Y=3).$$

需要检验所有等式成立，才能判定为独立.

X与Y是相互独立的.

例2 已知(X,Y)的分布列，$\Rightarrow$

$Y \backslash X$	2	5	$P(Y=j)$
0	1/6	1/3	1/2
3	1/3	1/6	1/2
$P(X=i)$	1/2	1/2	

问X与Y是否独立？

解 逐点检验下式是否成立

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j).$$

$$P(X=2,Y=0)=1/6,$$

$$P(X=2)P(Y=0)=1/2\cdot 1/2=1/4.$$

$$P(X=2,Y=0)\neq P(X=2)P(Y=0).$$

只要有一个等式不成立，就能判定为不独立。

例3 设随机变量X与Y独立，下面是(X,Y)的分布列及边缘分布列，请将所缺数值补上.

解

$X \backslash Y$	3	4	5	$P(X=x_i)$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

例4 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x\geq 0, y\geq 0, \\ 0, \quad\quad 其他. \end{cases}$$

问X与Y是否独立？

解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}, x\geq 0, \\ 0, \quad\quad x<0. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dx=e^{-y}, y\geq 0, \\ 0, \quad\quad y<0. \end{cases}$$

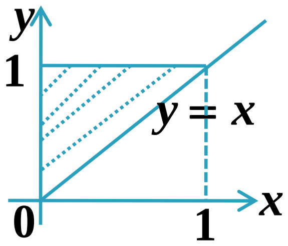
因为$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,所以$X$与$Y$独立.

结论：对连续型随机变量，若X与Y独立，则

$$f(x,y)=f(x)g(y).$$

例5 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



问X与Y是否独立？

解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 8xy\mathrm{d}y=4x(1-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y 8xy\mathrm{d}x=4y^3, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不独立.

例6 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,则

X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

证明 $\Leftarrow$ 设$\rho=0$，则

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

例6 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,则

X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

证明 $\Leftarrow$ 设$\rho=0$，则

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

$$=f_X(x)f_Y(y).$$

从而X，Y相互独立.

例6 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,则

X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

证明$\Rightarrow$ 设X与Y相互独立，由于$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$均连续,故对任意实数x,y，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

特别有$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$,

即 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}=1$，从而$\rho=0$.

例7 设$X \sim U[0,1]$, $Y \sim E(1)$且X与Y相互独立,

求$P(X+Y \leq 1)$.

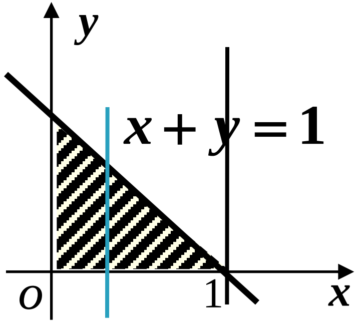
解 由$X \sim U[0,1]$, $Y \sim E(1)$有

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$$

由于X与Y相互独立,有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0\leq x\leq 1, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例7 设$X \sim U[0,1]$, $Y \sim E(1)$且X与Y相互独立，求$P(X+Y \le 1)$.



解

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0 \le x \le 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$P(X+Y \le 1)=\iint_{x+y\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} e^{-y}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \left(1-e^{-1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x\Big|_0^1-\left(e^{-1+x}\right)\Big|_0^1=1-\left(e^0-e^{-1}\right)=e^{-1}$$

n维随机变量的一些概念

n维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为n维随机变量，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为任意实数，则n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

称为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数.

n维随机变量的概率密度

设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数. 若存在非负函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,t_2\cdots,t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为连续型随机变量，$f(x_1,x_2\cdots,x_n)$为n维随机变量的概率密度.

n维随机变量的相互独立

设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数. 若对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的.

对连续型随机变量，则$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立的充要条件是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n).$$

思考：离散型时 $X_1,\ldots,X_n$ 独立的充要条件如何表示？

谢　　谢！