高等数学（二）综合练习

练习三： 泰勒公式及其应用

理学院 朱健民教授

主要内容

定理1 设函数$f(x)$在 x_0处具有 n 阶导数，则当$x \to x_0$ 时，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n].$$

— 函数$f(x)$在点 x_0处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式

- 特别当$x_0 = 0$时，称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$$

为$f(x)$的带皮亚诺余项的n阶麦克劳林公式.

主要内容

定理2　设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的区间 (a,b) 内有直 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x\in(a,b)$，至少存在介于x与 x_0之间的一点ξ, 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

——函数 $f(x)$在点 x_0 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

- 特别当$x_0=0$时，称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

为函数 $f(x)$带拉格朗日余项的n 阶麦克劳林公式.

例题讲解

1. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有二阶导数，且对于任意的实数 x，h 成立

$$f(x) \leq \frac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)],$$

证明：$f''(x) \geq 0.$

2. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在$\xi \in (a,b)$使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且满足$f(0)=f(1)$ 及 $|f''(x)| \leq M\ (0 \leq x \leq 1)$，证明：对一切$x \in [0,\ 1]$有$|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上有连续三阶导数，且满足方程

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$$

$(0<\theta<1, \theta$与h无关$)$.证明：$f(x)$ 为一次或二次函数.

5. 设函数$f(x)$ 在(a,b)内可导，$x_0 \in (a,b)$ ，若极限$\lim_{x \to x_0} f'(x)$存在，则$\lim_{x \to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

6. 证明下列不等式：

（1）当$x > 0$时，$(x^2 - 1)\ln x \geq (x-1)^2$；

（2）当$0 < x < 1$时，$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

（3）当$b > a > 0$时，$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$．