第25讲 局部线性化与微分

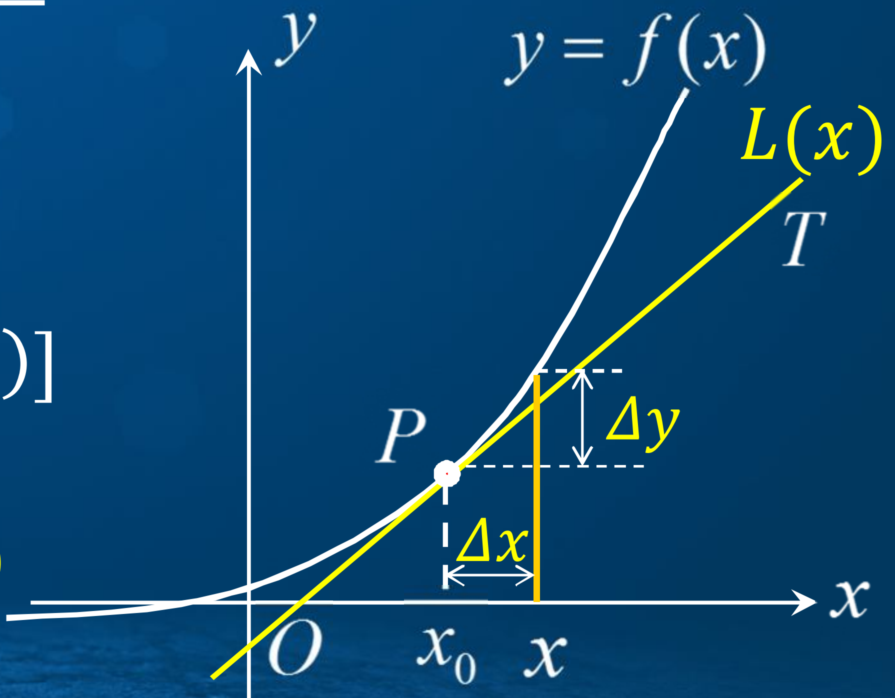
导数定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Updownarrow$

$$f(x)$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o[(x-x_0)]$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=L(x)$$

以直代曲　　局部线性化函数



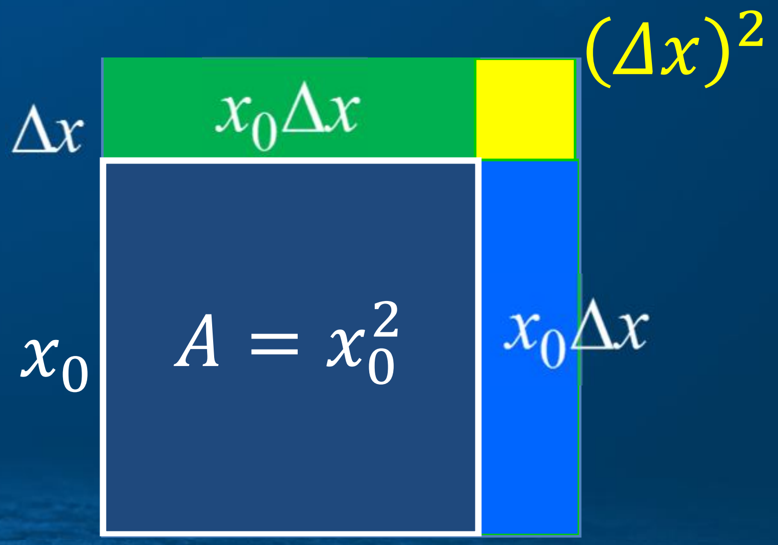
局部线性化

即　$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\approx \boxed{f'(x_0)\Delta x}$

一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长x由x_0变到$x_0+\Delta x$，则其面积$A=A(x)$的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{时为高阶无穷小}}$$



故 $\Delta A\approx 2x_0\Delta x.$

微分的概念

微分在近似计算中的应用

一阶微分形式的不变性

高阶微分

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内有定义，若存在与Δx无关的常数$\boldsymbol{A}$，使函数$y=f(x)$在点x_0处的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

则称函数$y=f(x)$在x_0处可微（或可微分），$A\Delta x$称为$y=f(x)$在点x_0处的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x=x_0} \text{ ,即 } \mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x\ .$$

若是在一般点x处的微分，则简记为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

例1 设$f(x)=x$，证明$f(x)$在任何点x_0处可微，且

$$\mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}=\Delta x\ .$$

函数$y=f(x)$在一般点x处的微分则写成

$$\mathrm{d}y=A\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)=A\mathrm{d}x\ .$$

定理1 设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内有定义，则 $y=f(x)$ 在 x_0 可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在x_0处可导，且 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x\ .$$

一般地，若函数$y=f(x)$在某区间中的任意点x处可导，则 $y=f(x)$在点x处的微分为

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x\ .$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

若$y=f(x)$在点x处可微，则对于充分小的$|\Delta x|$，有近似公式

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

它说明：用线性函数$f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$来近似 $f(x_0+\Delta x)$，所产生的误差

$$\delta=|f(x_0+\Delta x)-[f(x_0)+f'(x_0)\Delta x]|$$

是 Δx 的高级无穷小，即

$$\delta=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)\ .$$

例2 利用微分计算 $\sin 30°30'$，$\sqrt{1.05}$的近似值.

常见的近似公式有$|x| \ll 1$：

(1) $\sin x \approx x$, $\arcsin x \approx x$;

(2) $\tan x \approx x$, $\arctan x \approx x$;

(3) $e^x \approx 1 + x$;

(4) $\ln(1+x) \approx x$;

(5) $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

例3 将麦克风的插头视为圆柱形， 其截面半径$r = 0.12\text{cm}$，长 $l = 4\text{cm}$，为了提高它的导电性能，要在插头的侧面镀上一层厚为$\Delta r = 0.001\text{cm}$的纯铜, 试估算一下镀一个这样的插头需要多少克铜？（铜的比重为$\rho = 8.9\,\text{g/cm}^3$）

所需要的铜为 $\Delta V\rho = [\pi(r+\Delta r)^2 l - \pi r^2 l]\rho$

$\Delta V \approx \mathrm{d}V$

$r = 0.12\text{cm},$

$l = 4\text{cm},$

$\Delta r = 0.001\text{cm}$

$\approx \mathrm{d}V\ \rho$

$= 2\pi r l \Delta r \rho$

$= 0.02684g$

定理2(四则运算) 设函数$u(x), v(x)$在x处可导，则$u(x)+v(x)$、$u(x)v(x)$和$\frac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$在x处可微，且

(1) $\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$；

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$；

(3) $\mathrm{d}\frac{u}{v}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$.

这里为书写方便我们将$\mathrm{d}u(x)$简记为$\mathrm{d}u$.

定理3(复合运算) 设有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 均可微，则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微，且

$$\mathrm{d}y=\boxed{\boxed{f'(u)\varphi'(x)}\mathrm{d}x}$$

$\mathrm{d}u$

$[f(\varphi(x))]'_x$

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=[f(\varphi(x))]'_x\,\mathrm{d}x$$

无论是自变量，还是中间变量，微分公式的形式保持不变，将此性质称为**微分形式的不变性**．

例4 利用微分的形式不变性求函数 $y=e^{\arctan x^2}$ 的微分．

例5 将下面给出的微分形式写成某一函数的微分：

(1) $x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $e^{2x}\mathrm{d}x$;

(3) $\cos(5x-1)\mathrm{d}x$;　　(4) $\dfrac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x$.

例5解

$$(1)\quad x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}x^3=\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$(2)\quad e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}(2x)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，则

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$$

在 x_0 处可微，且微分为

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y)|_{x=x_0}=[f'(x)\mathrm{d}x]'_{x=x_0}\mathrm{d}x=f''(x_0)(\mathrm{d}x)^2$$

称之为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处二阶微分，记为：

$$\mathrm{d}^2y|_{x=x_0}=f''(x_0)\mathrm{d}x^2$$

如果 $y=f(x)$ 在 x 处具有 n 阶导数，类似有 n 阶微分公式：

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n \quad \text{即} \quad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f^{(n)}(x)$$