《高等数学（四）》习题解析

第三讲 偏导数

朱健民 教授

主要内容回顾

- 二元函数的偏导数

函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处关于x的偏导数

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

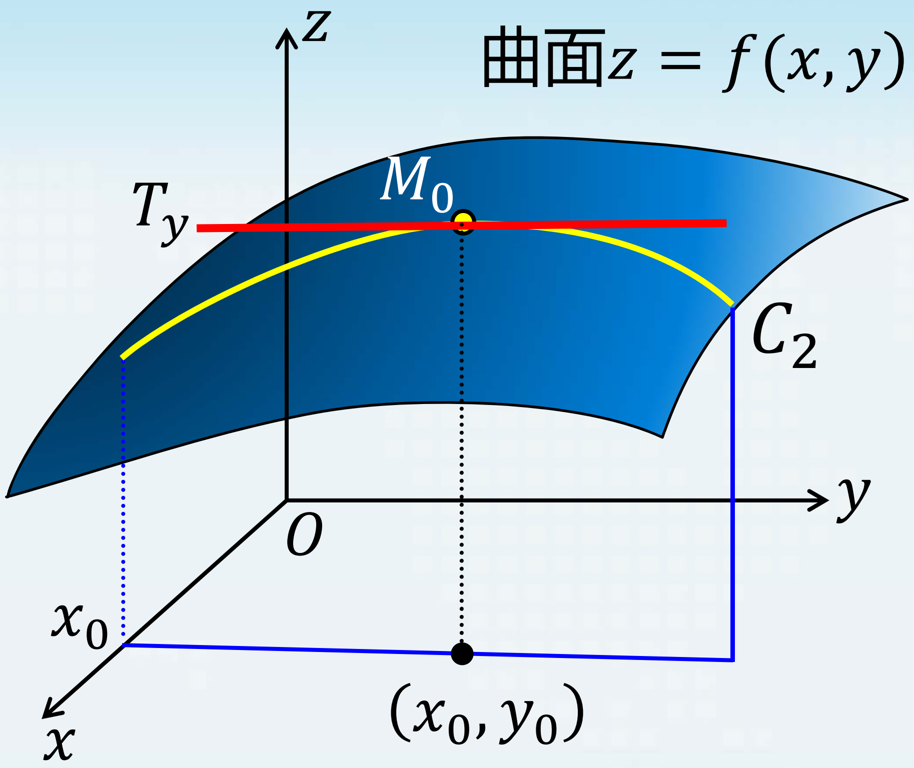
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

主要内容回顾

- 偏导数的几何意义

$$f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$$

$$=\tan\beta$$



β是曲线C_2:$\begin{cases}z=f(x,y),\\x=x_0\end{cases}$在点 M_0 处的切线M_0T_y对 y 轴的倾角.

主要内容回顾

- 高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$$ 关于 x 的二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$$ 关于x , y 的二阶混合偏导数

定理1 如果函数$z=f(x,y)$的两个混合偏导数$f''_{xy}(x,y)$和$f''_{yx}(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

习题解析——判断题：

1. 曲线$z=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ x=2\end{cases}$，在点(2,2,2) 处的切线对$y$轴的倾角为$\frac{\pi}{4}$．（ √ ）

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,2)}=1$，即 $\tan\beta=1$，所以$\beta=\frac{\pi}{4}$.

2. $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}$．（ √ ）

【解析】 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{-\Delta x}$

$=f_x'(x_0,y_0)$

3. $f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y_0)$.（ × ）

【解析】 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y_0)=0$

4. 若函数$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处存在关于x和y的偏导数，则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)必连续.（ × ）

【解析】 函数存在偏导数与函数连续没有必然的联系.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$ 在原点偏导数存在但不连续.

$f(x,y)=|x|+|y|$ 在原点连续但偏导数不存在.

习题解析：第三讲 偏导数

5. 设$f(x,y)=\frac{xe^y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$，则$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$. （ √ ）

【解析】初等函数在其定义区域内有任意阶连续偏导数.

6. 设$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 则$f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$. （ × ）

【解析】 计算得 $f''_{xy}(0,0)=-1$, $f''_{yx}(0,0)=1$

- 通过Mathematica计算

习题解析：第三讲 偏导数

```
f[x_, y_] = x y (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2);   f[0, 0] = 0
```

$$f[x\_,\ y\_] = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad f[0,0]=0$$

定义函数

$$fx[0,0] = \text{Limit}\left[\frac{f[0+\Delta x,0]-f[0,0]}{\Delta x},\ \Delta x\to 0\right]$$

$$fy[0,0] = \text{Limit}\left[\frac{f[0,0+\Delta y]-f[0,0]}{\Delta y},\ \Delta y\to 0\right]$$

计算在原点的一阶偏导数

```
fx[x_, y_] = D[f[x, y], x]
fy[x_, y_] = D[f[x, y], y]
```

计算一阶偏导函数

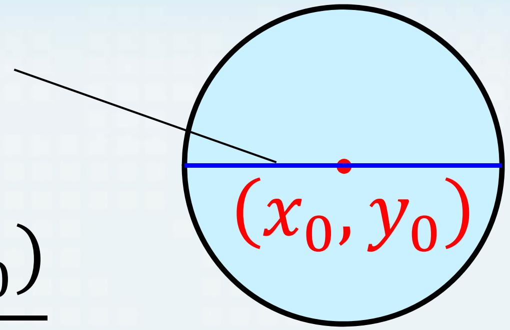
$$fxy[0,0] = \text{Limit}\left[\frac{fx[0,0+\Delta y]-fx[0,0]}{\Delta y},\ \Delta y\to 0\right]$$

$$fyx[0,0] = \text{Limit}\left[\frac{fy[0+\Delta x,0]-fy[0,0]}{\Delta x},\ \Delta x\to 0\right]$$

计算在原点的二阶混合偏导数

7. 设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)存在偏导数$f_x'(x_0,y_0)$，则函数$f(x,y)$必在(x_0,y_0) 的某邻域内有定义.（ × ）

$(x_0+\Delta x, y_0)$



【解析】 偏导数定义

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

8. 设函数$z=f(x,y)$在xOy平面上满足$\frac{\partial f}{\partial x}=0$，则函数$z=f(x,y)$与变量$x$无关. （ √ ）

【解析】微分中值定理 $f(x_1,y)-f(x_2,y)=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(\xi,y)}(x_1-x_2)=0$

9. 设函数$z=f(x,y)$在开集D内满足$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0,\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，则函数$z=f(x,y)$在开集$D$内恒为常数．（ × ）

【解析】设D_1和D_2分别为第一和第三象限（不含坐标轴上的点），

$D=D_1\cup D_2$，定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D_1,\\ 2, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

结论：若函数$z=f(x,y)$在区域D内满足$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0,\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，则函数$z=f(x,y)$在区域$D$内恒为常数.

习题解析——选择题

1. 设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在关于x和y的一阶偏导数，则极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{h}$的值为(C).

（A）$f_x'(x_0,y_0)$ （B）$f_y'(x_0,y_0)$

（C）$2f_x'(x_0,y_0)$ （D）$2f_y'(x_0,y_0)$

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}+\frac{f(x_0-h,y_0)-f(x_0,y_0)}{-h}\right)=2f_x'(x_0,y_0)$$

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数是二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的（ ）

习题解析：第三讲 偏导数

2. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在所有二阶偏导数，则它在该点处二阶偏导数的个数为（ **D** ）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【解析】二阶偏导数 $f''_{xx}(x_0,y_0),\ f''_{xy}(x_0,y_0),\ f''_{yx}(x_0,y_0),\ f''_{yy}(x_0,y_0)$

3. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数是二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的（ **D** ）.

（A） 必要条件　　（B） 充分条件

（C） 充分必要条件　　（D） 既非充分条件也非必要条件

4. 设二元函数$f(x,y)$在点 (x_0,y_0)处存在二阶混合偏导数，则其二阶混合偏导数在(x_0,y_0)处连续是$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$的（ **B** ）.

（A）必要条件　　（B）充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不是充分条件也不是必要条件

5. 设$f(x,y)=x^7+2^y+x^y$，则有（ **C** ）.

（A）$f'_x(x,y)=7x^6+2^y+x^y\ln x$　（B）$f'_x(x,y)=7x^6+x^y\ln x$

（C）$f'_y(x,y)=2^y\ln 2+x^y\ln x$　（D）$f'_y(x,y)=y2^{y-1}+yx^{y-1}$

【解析】 $f'_x(x,y)=7x^6+0+(y-1)x^{y-1}=7x^6+(y-1)x^{y-1}$

$f'_y(x,y)=0+2^y\ln 2+x^y\ln x=2^y\ln 2+x^y\ln x$

6. 设$f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$，则$f_x'(1,1,1)+f_y'(1,1,1)+f_z'(1,1,1)$的值为（ **D** ）.

（A） 0 （B）2 （C） 3 （D）1

【解析】

$$f_x'(1,1,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\,|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\,|_{x=1}=1$$

$$f_y'(1,1,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y,1)\,|_{y=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}1|_{y=1}=0$$

$$f_z'(1,1,1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(1,1,z)\,|_{z=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}1|_{z=1}=0$$

$$f_x'(1,1,1)+f_y'(1,1,1)+f_z'(1,1,1)=1$$

7. 设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$等于（ C ）.

（A）$x^2+y^2+z^2$　　（B）$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

（C）1　　（D）$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

【解析】

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

8. 设$f(x), g(x)$ 是可微函数，$u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$ ，且 $u(x,0)=\sin 2x$ ，$u'_y(x,0)=0$，则 $u(x,y)$为（ A ）.

（A）$\sin 2x\cos 5y$ （B）$\sin 2x+\sin 5y$

（C）$\sin(2x+5y)$ （D）$\sin 2x-\sin 5y$

【解析】板书推导

9. 设$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$等于（ A ）.

（A） 0 （B）1

（C）$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ （D）$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

【解析】板书推导