第49讲 一阶常微分方程的求解

不定积分与微分方程的解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x) \longleftrightarrow$$

$F'(x)=f(x)$

未知函数$y=F(x)$即为函数$f(x)$的原函数

积分

$y=\int f(x)\mathrm{d}x$ 为方程的通解

1686年，莱布尼兹求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$.

1838年，刘维尔证明不能用初等积分法求解！

一阶微分方程的几种情形

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

（1）$f(x,y)=g(x)h(y)$ ------------------------------ 可分离变量方程

（2）$f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})$ ------------------------------ 齐次方程

（3）$f(x,y)=p(x)y+q(x)$ ------------------------------ 线性方程

（4）$f(x,y)=p(x)y+q(x)y^n \ (n\neq 0,\ 1)$ 伯努利方程

可分离变量方程

齐次方程

一阶线性微分方程

伯努利方程

第49讲 一阶常微分方程的求解——主要内容

称形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的一阶微分方程为**可分离变量的方程**.

当 $g(y)\neq 0$ 时，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

一个原函数

若存在y_0使得$g(y_0)=0$, 则 $y=y_0$ 为原方程的一个特解.

这就是所求方程的通解.

这种通过分离变量求方程通解的方法叫做**分离变量法**.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

两边积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

积分计算

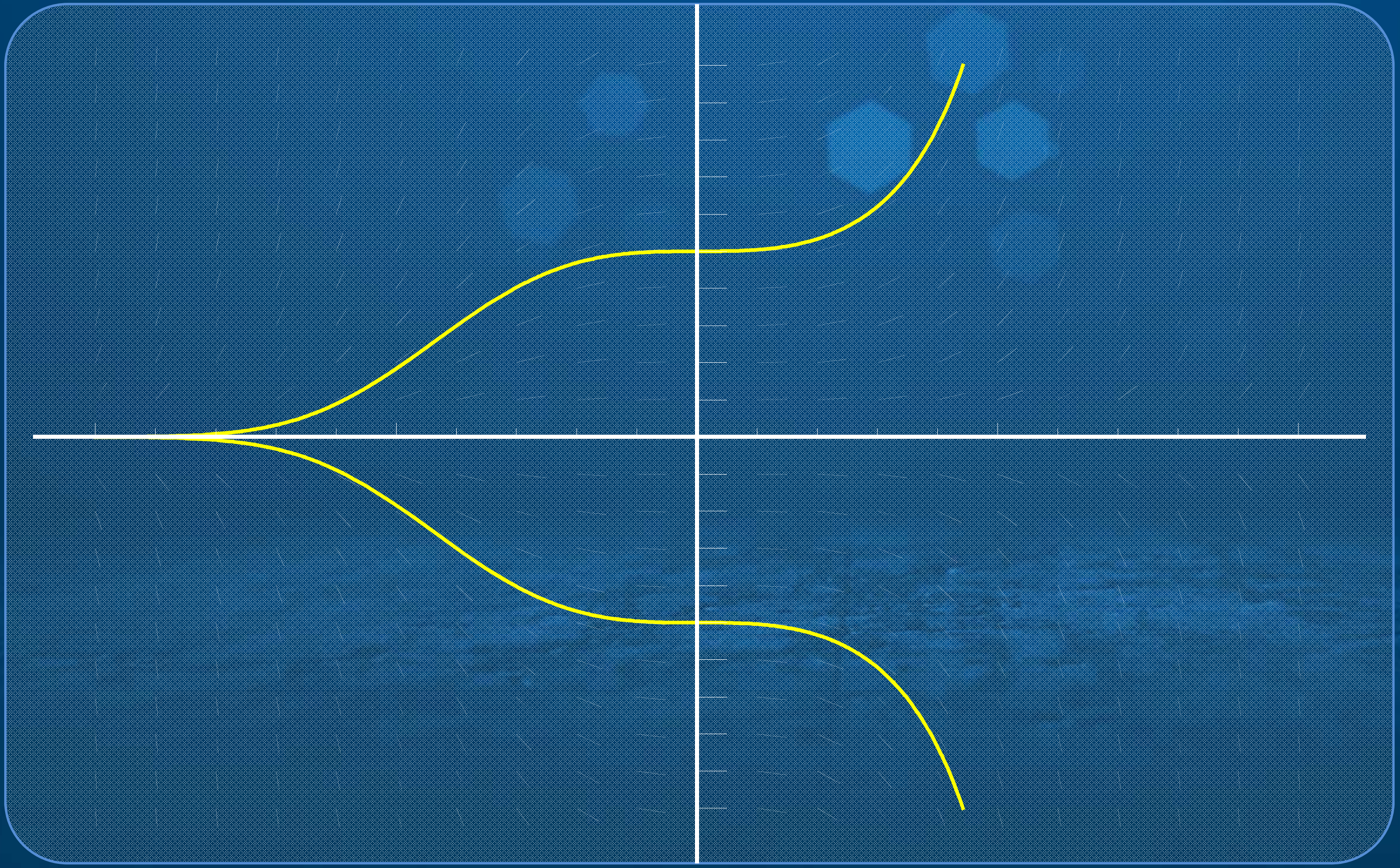
$$G(y) = F(x) + C$$

方程通解

为什么是方程的通解？

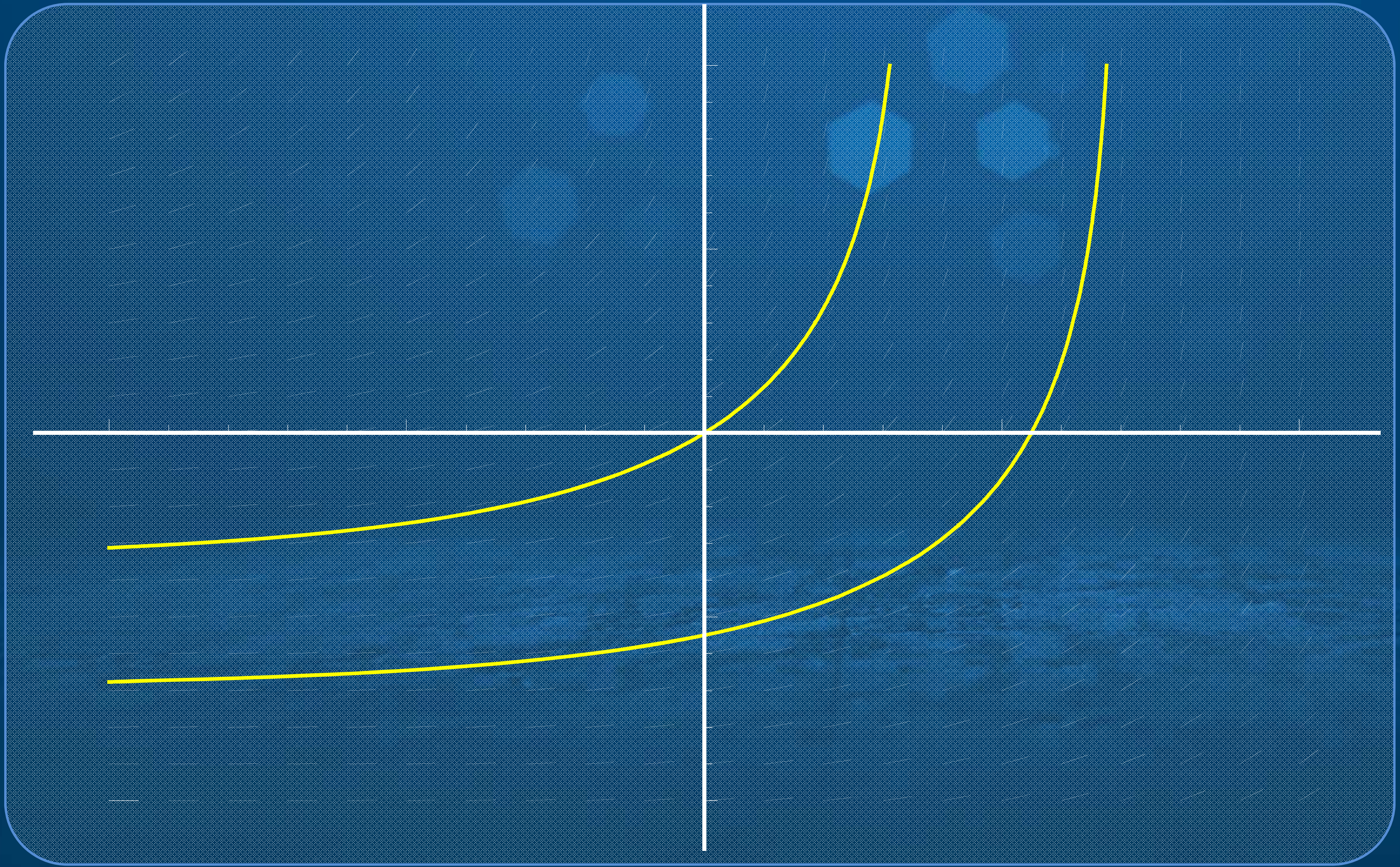
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)+C] \Rightarrow \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

例1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.



方向场与积分曲线

例2 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x+y}$ 的通解.



方向场与积分曲线

齐次微分方程： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

令$z=\dfrac{y}{x}$，则 $y=zx$ ，由此有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z$，代入原方程得

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z=\varphi(z)\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi(z)-z}{x}.$$ ——可分离变量方程

情形1：如果$\varphi(z)-z\neq 0$，则齐次方程的通解为

$$\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\ln|x|-\ln|C|$$

情形2：如果$\varphi(z)-z\equiv 0\ \Rightarrow \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=Cx$

例3 求解方程$(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0.$

$$\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}=\frac{2z}{z^2-1}-\frac{3}{z}$$

有理函数分解方法：

$$\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{z^2-1}=\frac{(A+B)z^2+Cz-A}{z(z^2-1)}$$

比较系数得$\begin{cases}A+B=-1\\ C=0\\ -A=3\end{cases}$ 解得$A=-3,\ B=2,\ C=0$

例4　求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$.　齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-5y}{2x+4y}$

【例4解法】令 $x=X+h,\ y=Y+k$，则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{2X-5Y+(2h-5k+3)}{2X+4Y+(2h+4k-6)}$$

令 $\begin{cases}2h-5k+3=0,\\ 2h+4k-6=0\end{cases}$，解得 $h=k=1$

$$\begin{cases}x=X+1\\ y=Y+1\end{cases}$$

齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{2X-5Y}{2X+4Y}$

一阶线性微分方程标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x).$$

若$q(x)\equiv 0$, 称为一阶齐次线性微分方程；否则称为一阶非齐次线性微分方程.

例如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2y=0$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\cos x$

齐次线性微分方程 非齐次线性微分方程

- 求一阶齐次线性方程通解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$$ ——可分离变量微分方程

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}$$

- 用常数变易法求解一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$$

设 $y(x)=C(x)\,e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$是非齐次线性微分方程的解

通解：$y(x)=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\,e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$y=\underbrace{Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)\,e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

通解公式：$\boxed{\boldsymbol{y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + C\right]}}$

例5 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x}y - x$.

例6 求微分方程 $(2x + y^2)dy = dx$ 的通解.

$$\int y^2 e^{-2y}\, dy = -\frac{1}{2}e^{-2y}\left(y^2 + y + \frac{1}{2}\right) + C$$

例7 已知某车间的容积为$30\times30\times6\mathrm{m}^3$，其中含0.12%的二氧化碳，现以含0.04%二氧化碳的新鲜空气输入. 问每分钟应输入多少这样的新鲜空气，才能在30分钟后使得车间空气中二氧化碳的含量不超过0.06%?

(假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出)

混合问题 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\text{注入速度}-\text{排出速度}}$

例7 已知某车间的容积为$30\times30\times6\mathrm{m}^3$，其中含$0.12\%$的二氧化碳，现以含$0.04\%$二氧化碳的新鲜空气输入. 问每分钟应输入多少这样的新鲜空气，才能在30分钟后使得车间空气中二氧化碳的含量不超过0.06%?

【解】设每分钟应输入$k\mathrm{m}^3$ 新鲜空气，t 时刻车间空气中二氧化碳的含量为$x\mathrm{m}^3$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2500}k-\dfrac{x}{5400}k,\\ x|_{t=0}=0.12\times54.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{k}{5400}x=\dfrac{k}{2500},\\ x|_{t=0}=0.12\times54.\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{5400}x = \dfrac{k}{2500}, \\ x\big|_{t=0} = 0.12 \times 54. \end{cases}$$

一阶非齐次线性微分方程

$$x = 54\left(0.08\, e^{\frac{-k}{5400}t} + 0.04\right)$$

$t = 30$ 时，$x = \dfrac{0.06}{100} \times 5400 = 0.06 \times 54$

$$k = 180\ln 4 \approx 250$$

因此每分钟应至少输入 250m^3新鲜空气 .

形如 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$ 的方程称为伯努利方程 .

解法：以y^n除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, $\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)\,z=(1-n)q(x)$$ (线性方程)

例8 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=(\ln x)y^2$ 的通解.