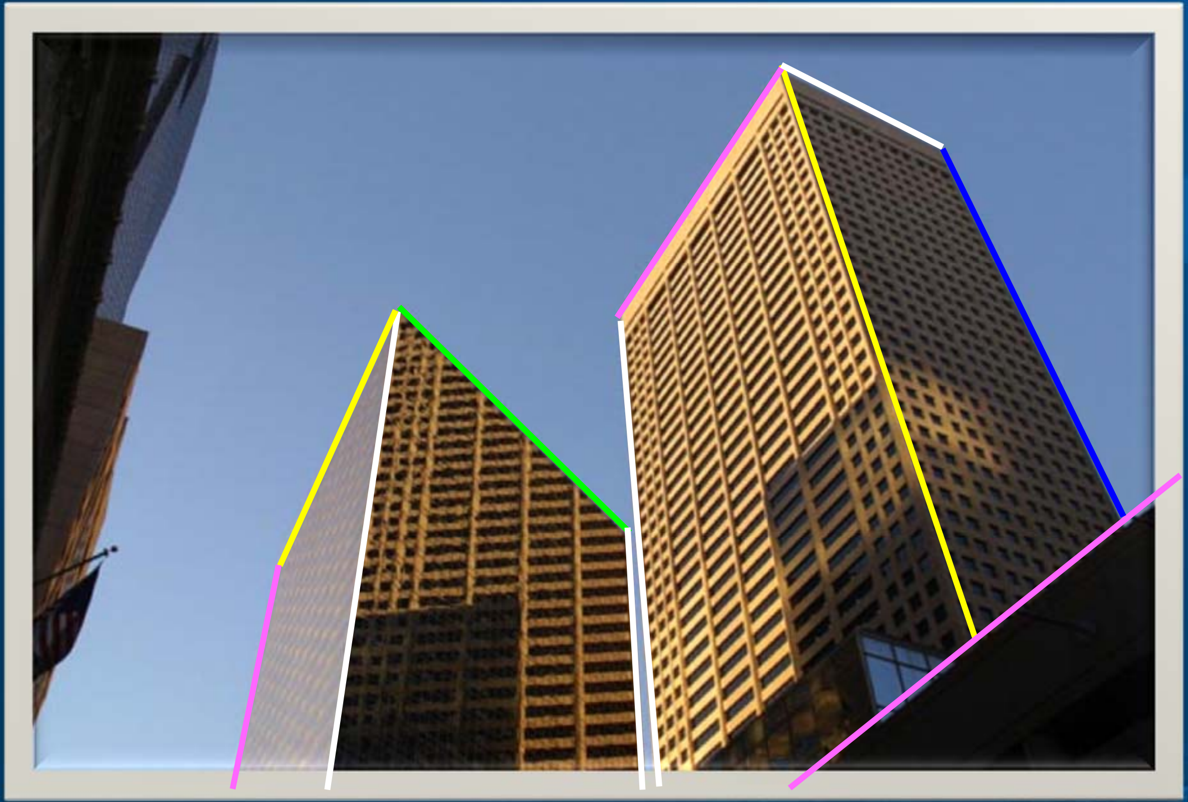
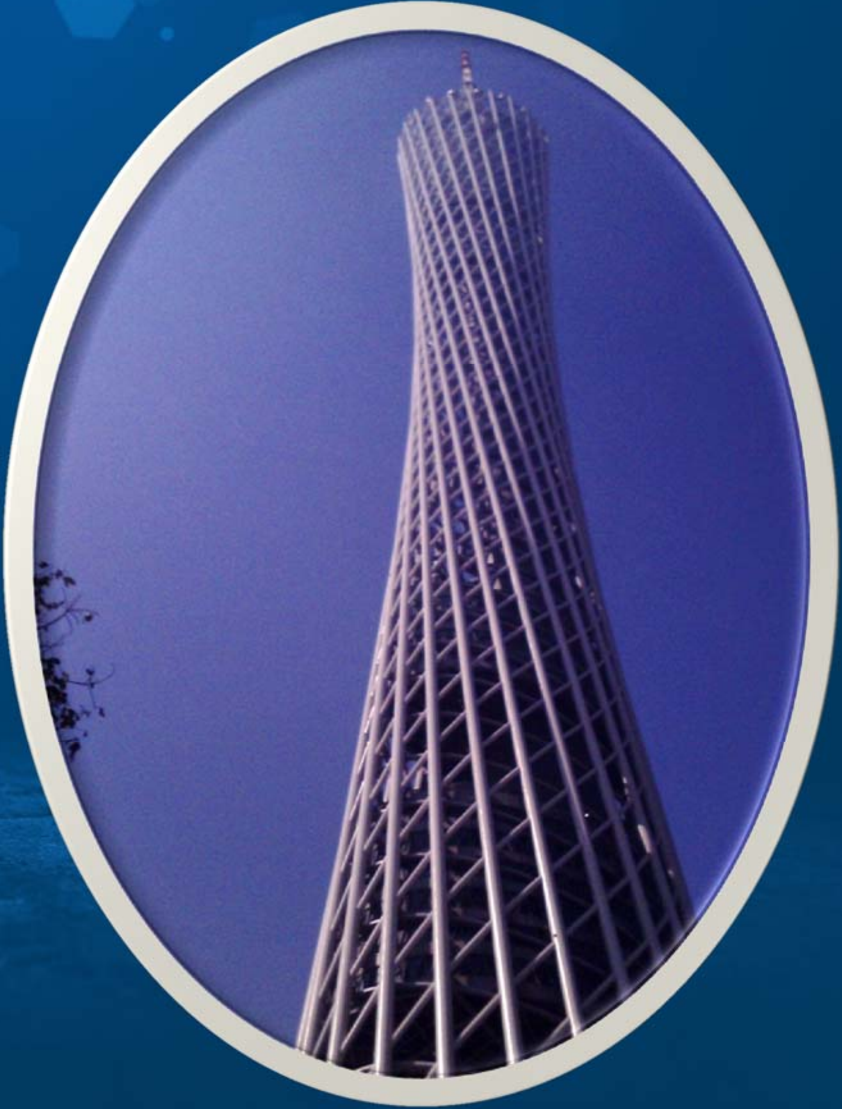
第56讲 空间直线及其方程



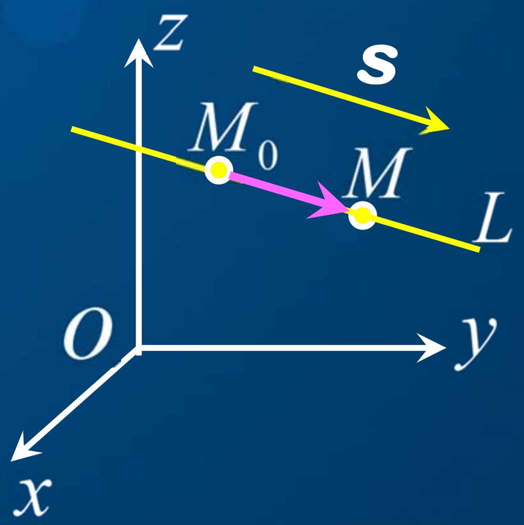
高楼大厦的轮廓

电视塔的主体结构



- 直线的参数方程
- 直线的一般方程
- 点到直线的距离

设直线 L 过已知定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，其方向向量为$\mathbf{s} = (m, n, p)$，其中m，n，p 是不全为零的常数.



设$M(x, y, z)$为直线L上任一点

$$\overrightarrow{M_0M} \,/\!/\, \mathbf{s} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{s}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

直线的参数方程 $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = z_0 + pt. \end{cases}}$

直线的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt\,, \\ y = y_0 + nt\,, \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = z_0 + pt\,. \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \quad \frac{y - y_0}{n} = t, \quad \frac{z - z_0}{p} = t$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

直线的对称式方程或标准方程

直线的参数方程
$$\begin{cases} x = x_0 + mt\,, \\ y = y_0 + nt\,, \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = z_0 + pt\,. \end{cases}$$

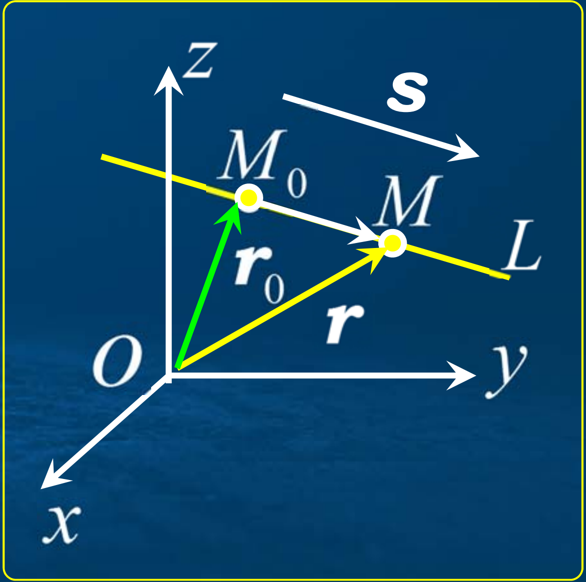
$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\mathbf{s} = (m, n, p)$$

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}}$$

直线的向量方程



例1 求过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的标准方程.

过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的标准方程为

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

直线的两点式方程

问题：如何写接两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$线段$\overline{M_1M_2}$的方程？

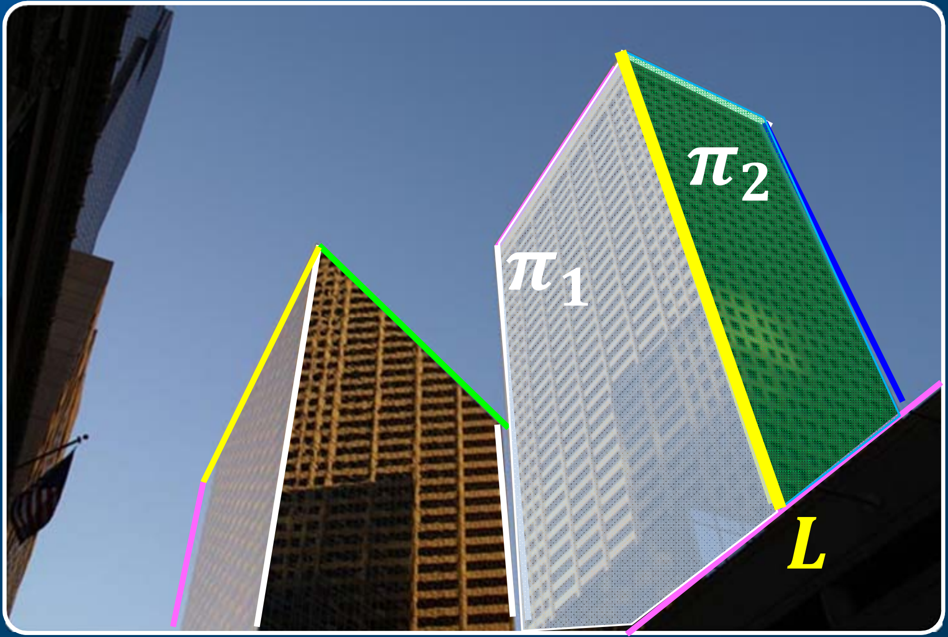
直线L可视为两平面$\boldsymbol{\pi}_1$和$\boldsymbol{\pi}_2$交线：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

直线的一般式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的对称式方程



$\boldsymbol{\pi}_1$：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\boldsymbol{\pi}_2$：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

例2 化直线 L 的一般方程 $\begin{cases}3x+2y+z-6=0\\2x-3z-5=0\end{cases}$，为标准方程.

【例2解】 首先求直线上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\begin{cases}3x+2y+z-6=0\\2x-3z-5=0\end{cases}\xrightarrow{x=1}\begin{cases}2y+z-3=0\\-3z-3=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}y=2\\z=-1\end{cases}$$

求得直线上一点$M_0(1,2,-1)$，直线的方向向量为

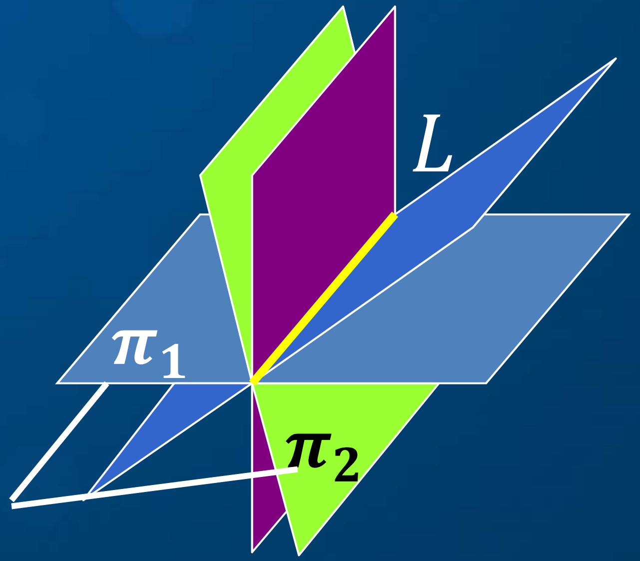
$$\mathbf{s}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=(3,2,1)\times(2,0,-3)=(-6,11,-4)$$

直线 L 的标准方程为 $L:\ \dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{-4}$

直线L可视为两平面π_1和π_2交线：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

直线的一般式方程



过直线L的平面束方程：

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(λ, μ 不同时为0)

思考：如果$\lambda = 0$或$\mu = 0$，以上平面束方程表示怎样的平面？

例3 求过直线 $L:\begin{cases}3x+2y+z-6=0\\2x-3z-5=0\end{cases}$，和点(1,4,1)的平面方程.

如果过点(4,4,1)或(1,1,1)，那么平面方程是怎样的呢？

【例4解】 过直线L的平面束方程为

$$\lambda(3x+2y+z-6)+\mu(2x-3z-5)=0$$

即 $$\boxed{(3\lambda+2\mu)x+2\lambda y+(\lambda-3\mu)z-6\lambda-5\mu=0}$$

$$x=1, y=4, z=1$$

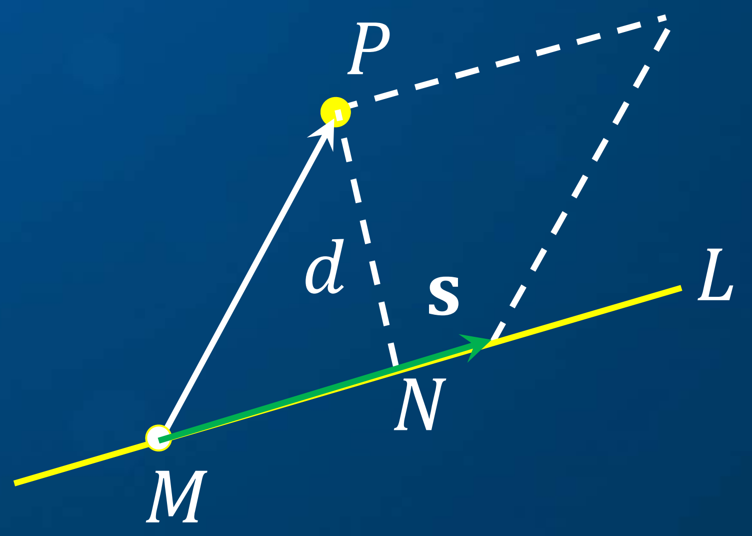
$$\boxed{\lambda=\mu}$$

$$\boxed{5x+2y-2z-11=0}$$ 此为所求平面方程

设点$P(x_0,y_0,z_0)$是直线

$$L:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

外一点, 求点P到直线的距离d.



$$\boxed{d=|NP|=\frac{|\overrightarrow{MP}\times\mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}=|\overrightarrow{MP}\times\mathbf{e}_s|}$$

点到直线的距离公式

例4 求点$P(3,1,-4)$到直线$L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$的距离.