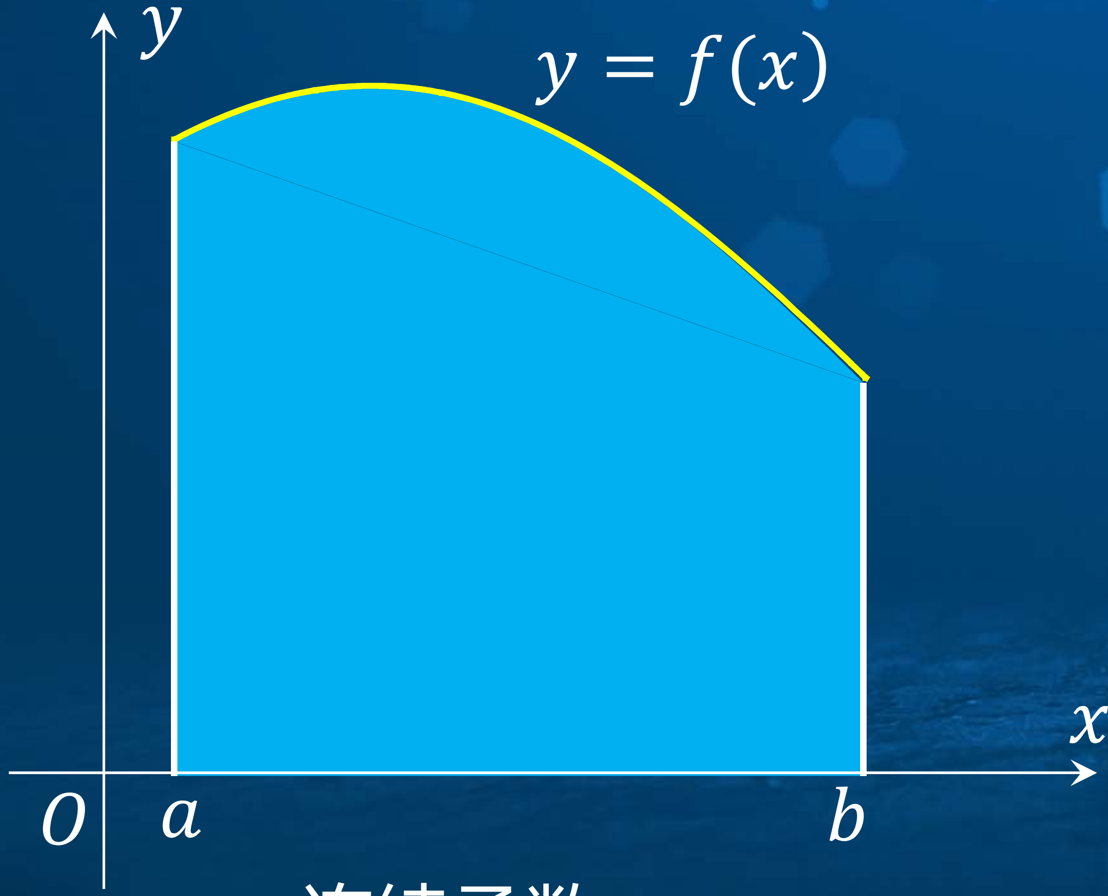
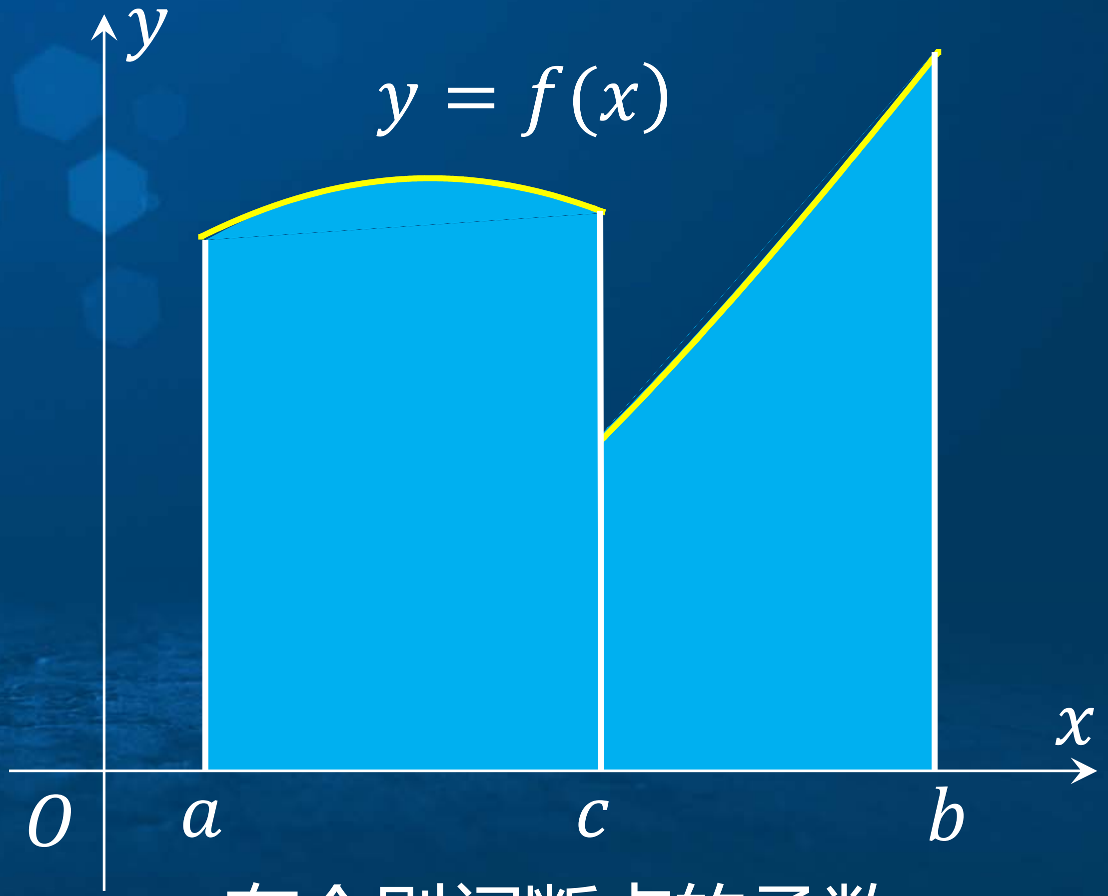
第39讲 定积分的性质

什么样的函数是可积的？



连续函数



有个别间断点的函数

函数的可积性

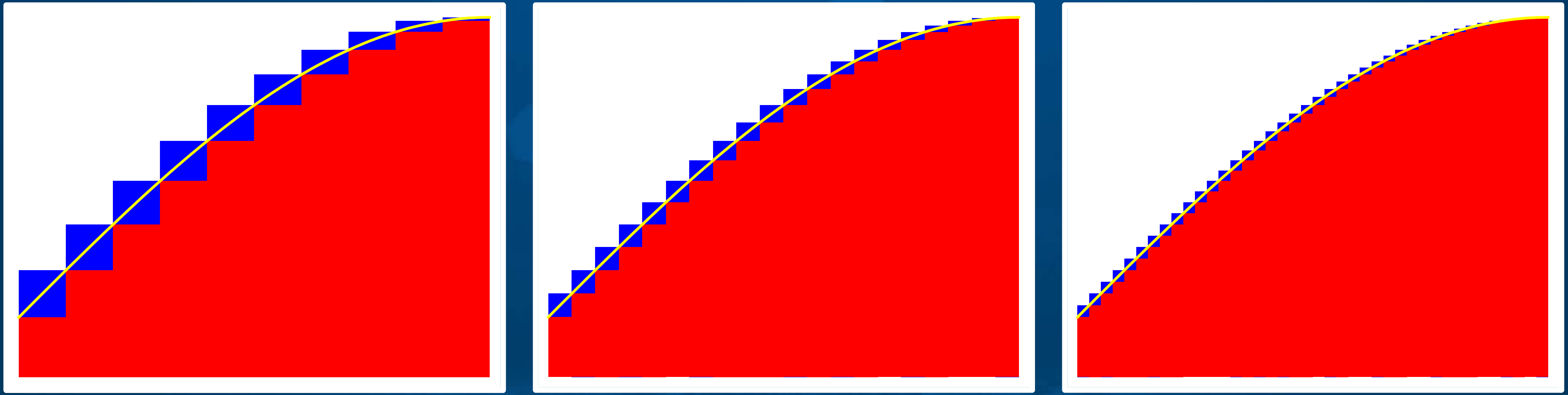
定积分求特殊和式的极限

积分中值定理

定理1 (1) 若函数$f(x)$在 $[a,b]$上可积, 则$f(x)$在 $[a,b]$上有界;
(2) 若函数 $f(x)$在 $[a,b]$上连续, 则$f(x)$在 $[a,b]$上必可积.

- 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限多个间断点，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.
- 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调增加或单调减少，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

可积的充要条件



函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是：图中包围曲线$y=f(x)$的小矩形面积之和可以任意小.

可积的充要条件

设 $T=\{\Delta_k=[x_{k-1},x_k],k=1,2,\cdots,n\}$ 为对$[a,b]$的任意一个分割，由$f(x)$在$[a,b]$上有界，所以$f(x)$在每个Δ_k上有上、下确界：

$$M_k=\sup_{\Delta_k} f(x),\quad m_k=\inf_{\Delta_k} f(x)$$

称$S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$，$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$为$f(x)$关于分割$T$的达布(Darboux)上和与达布下和.

可积的充要条件

定理2 函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists[a,b]$的分割$T=\{\Delta_k\}$，使得$S(T)-s(T)<\varepsilon.$

记$\omega_k=M_k$-m_k，称为函数在Δ_k上的振幅，所以

$$S(T)-s(T)=\sum_T\omega_k\,\Delta x_k.$$

例如，对狄利克雷函数 $y=D(x)$ 及任意区间$[a,\ b]$，有

$$S(T)-s(T)=\sum_T\omega_k\,\Delta x_k=\sum_T\Delta x_k=b-a.$$

定积分数列极限的关系

$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k} = \boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

一般地，将区间$[a,b]$进行n 等分，得到 n 个子区间

$$\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right], \left[a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}\right], \cdots, \left[\frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right]$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}}$$

如果$f(x)$在$[a,b]$上可积

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算数列极限 → 计算定积分

例1 用定积分表示下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}$;

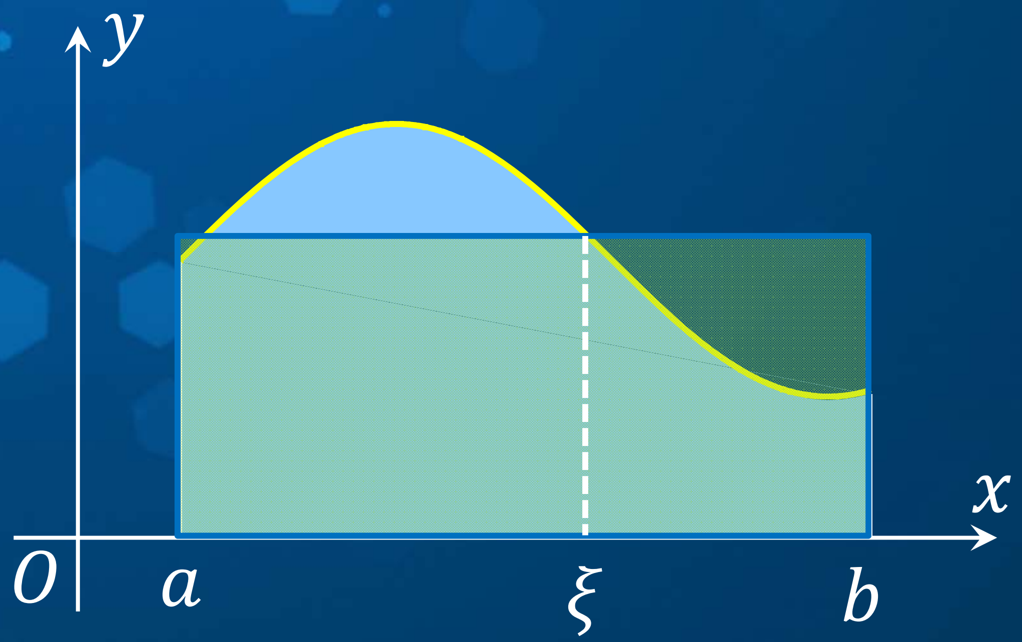
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i/n}\cdot\dfrac{1}{n+1/i}$.

定理2 (积分中值定理)

设函数$f(x) \in C[a,b]$,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



$$f(\xi) = \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$ ——函数$f(x)$在$[a,b]$上的平均值

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)}{n}}$$ 算术平均值

推广的积分第一中值定理

设$f(x), g(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续，且$g(x)$在$[a, b]$上不变号，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例2 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$

思考 是否成立 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$ ？

例3 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,dx=f(0).$$

证明存在$c\in(0,1)$，使得$f'(c)=0$.