第47讲 定积分的数值计算

定积分计算的常用工具：牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

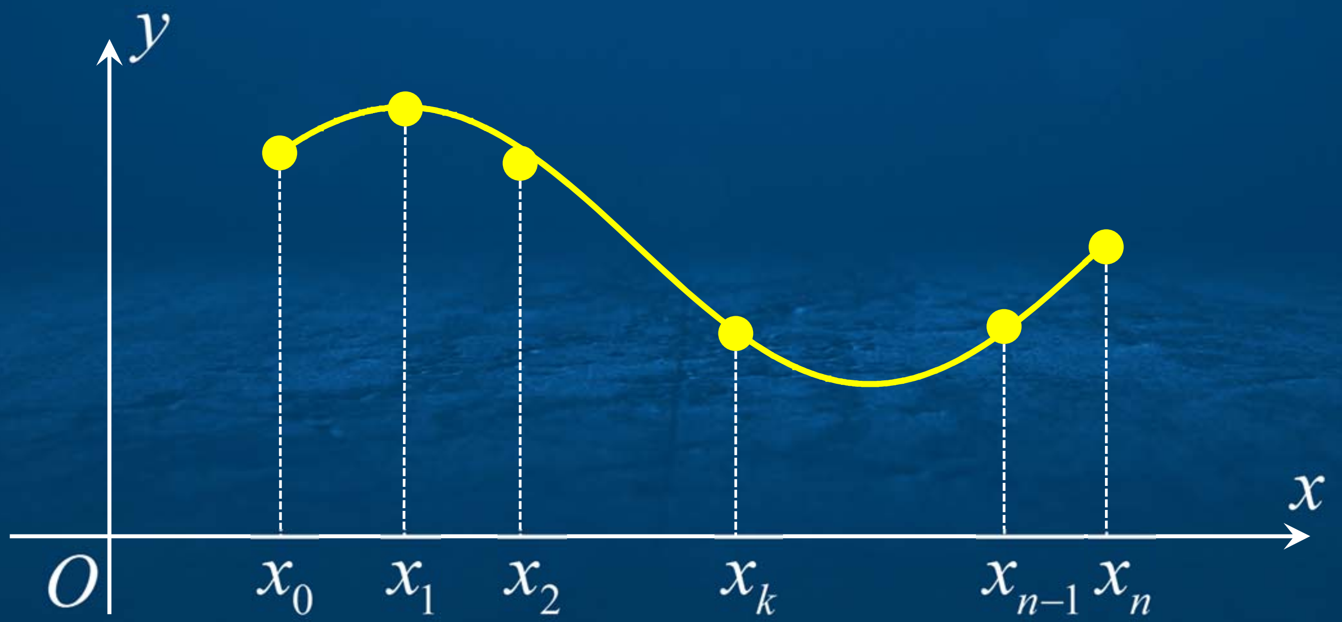
实际问题中应用牛顿—莱布尼兹公式的困难：

- $f(x)$的原函数求不出来；或者 $f(x)$的解析式结构复杂

$$\int_0^1 \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ (0<k<1),\qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

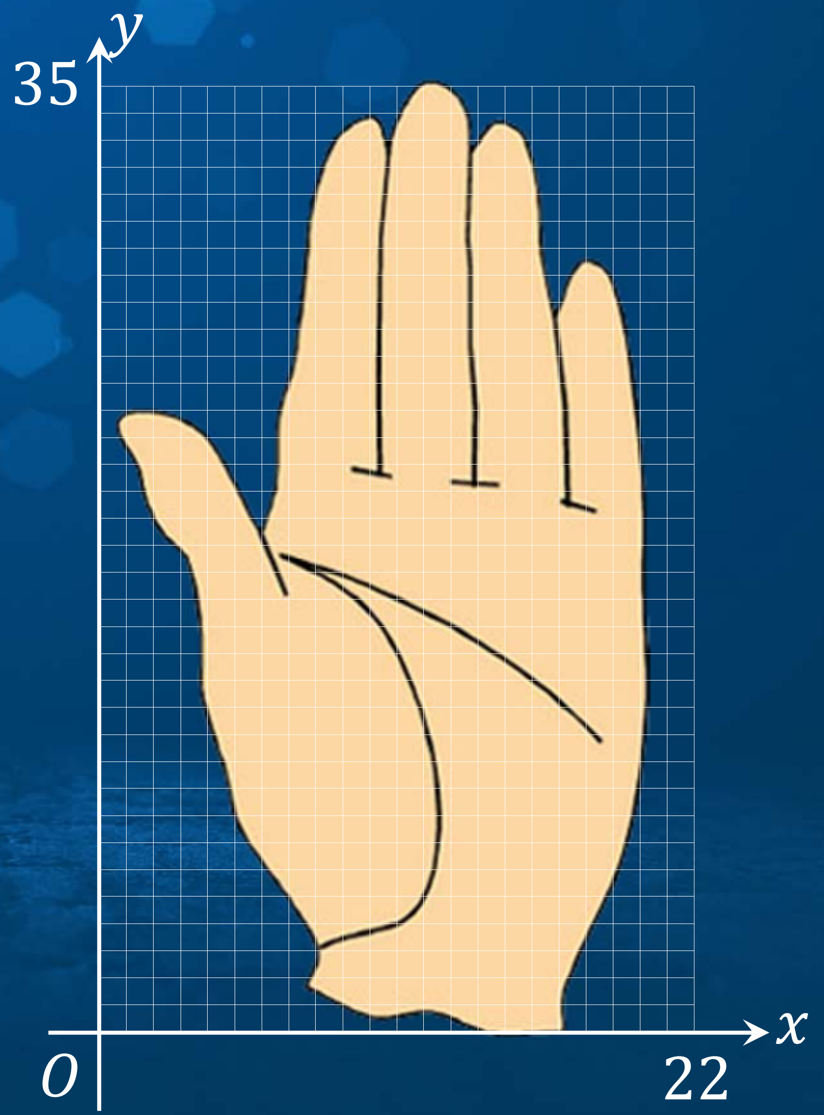
- $f(x)$的解析式根本不存在，只给出了$f(x)$的一些数值或图形

x_k	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_k)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n



问题：手掌面积的计算

- 用病人的手估计烧伤面积已成为诊断烧伤面积的公认方法之一
- 男性手掌的面积大致占人体表面积的0.81%
- 女性手掌的面积大致占人体表面积的0.67%



数值积分的基本思想

矩形公式

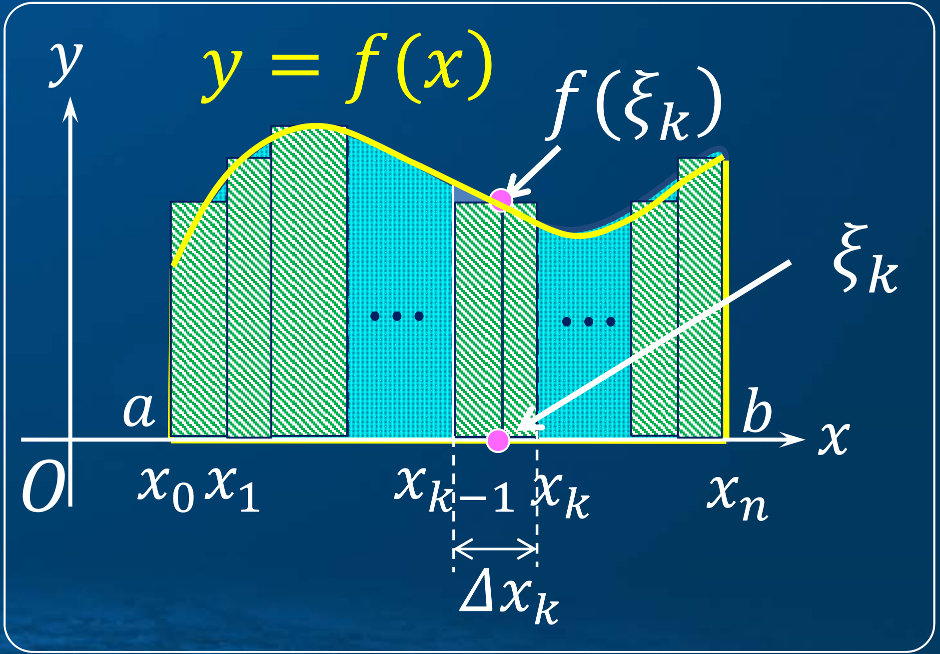
梯形公式

辛普森公式

定积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

分割、取近似、作和、取极限



数值积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

分割、取近似、作和

矩形公式： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

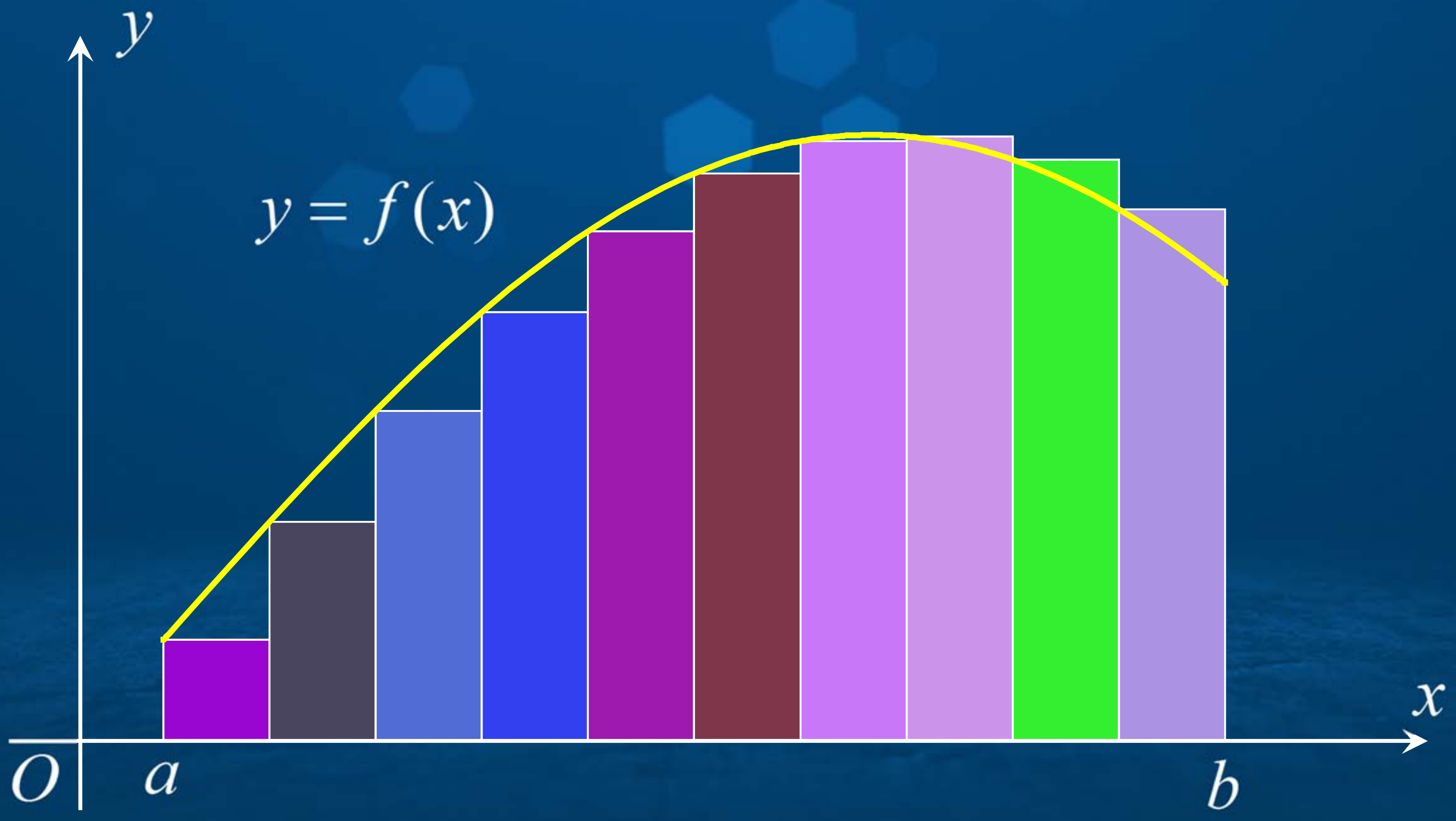
$$\xi_k = x_{k-1}\ ,\ \frac{x_{k-1}+x_k}{2}\ ,\ x_k$$

左矩公式： $L_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$

中矩公式： $M_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1})$

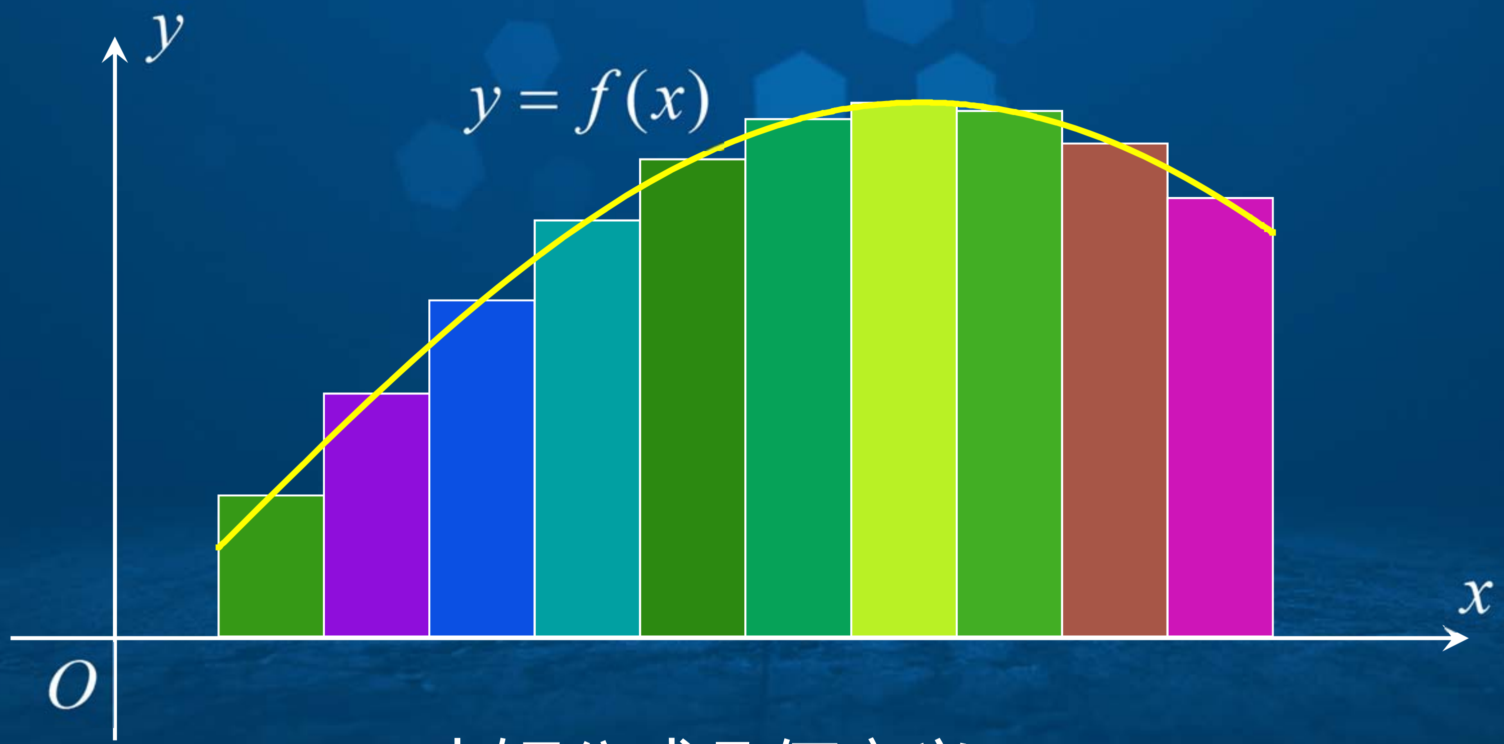
右矩公式： $R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$

将区间$[a,b]$进行n等分: $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), k = 0,1,2,\cdots,n.$



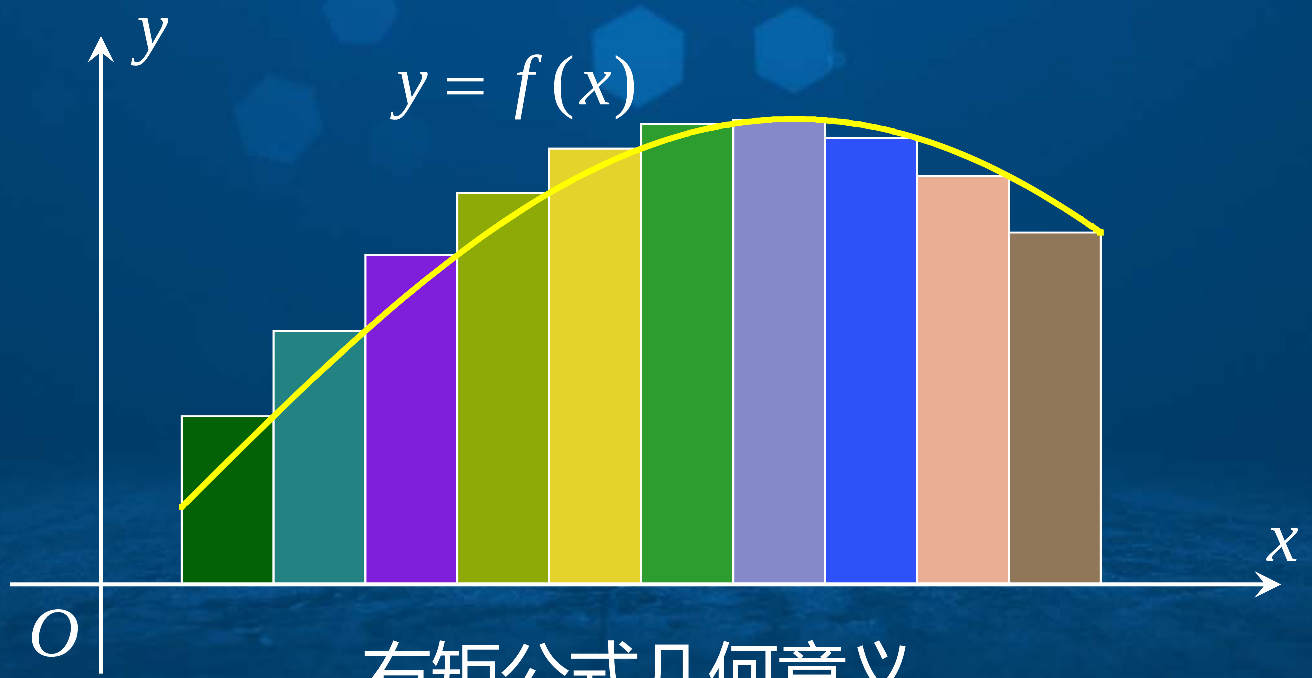
左矩公式几何意义

将区间$[a,b]$进行n等分：$x_k=a+\frac{k}{n}(b-a), k=0,1,2,\cdots,n.$



中矩公式几何意义

将区间$[a,b]$进行n等分: $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a), k=0,1,2,\cdots,n.$



右矩公式几何意义

例1 试用左矩，中矩，右矩公式计算定积分$\int_0^{\pi/2}\sin x dx$.

准确结果：$\int_0^{\pi/2}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1.$

左矩公式：$L_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left[\frac{(k-1)\pi}{2n}\right].$

中矩公式：$M_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}+\frac{k\pi}{2n}\right)\right]=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left[\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right].$

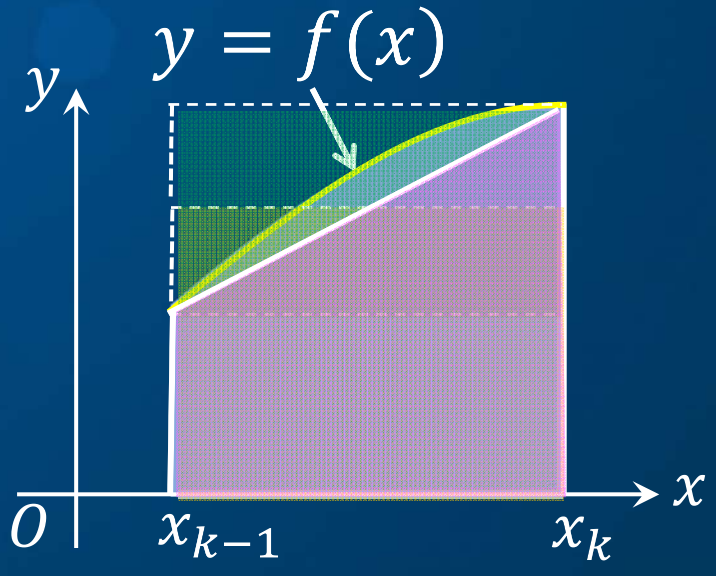
右矩公式：$R_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$

分别取$n = 10,100,200,400,800,1600$计算得到的结果如下表：

n	左矩和	中矩和	右矩和
10	0.919403170014612 4	1.0010288241427083	1.07648280269410 2
100	0.99212545660563 3	1.0000102809119054	1.0078334198735819
200	0.9960678687587692	1.0000025702141038	1.0039218503927436
400	0.9980352194864364	1.0000006425526589	1.0019622103034236
800	0.9990179310195476	1.0000001606381106	1.0009814264280412
1600	0.9995090458288292	1.0000000401595244	1.0004907935330758

梯形面积近似曲边梯形面积：

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}).$$



梯形公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = T_n$$

例2 已知圆周率π的近似值可以由下列定积分求出

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

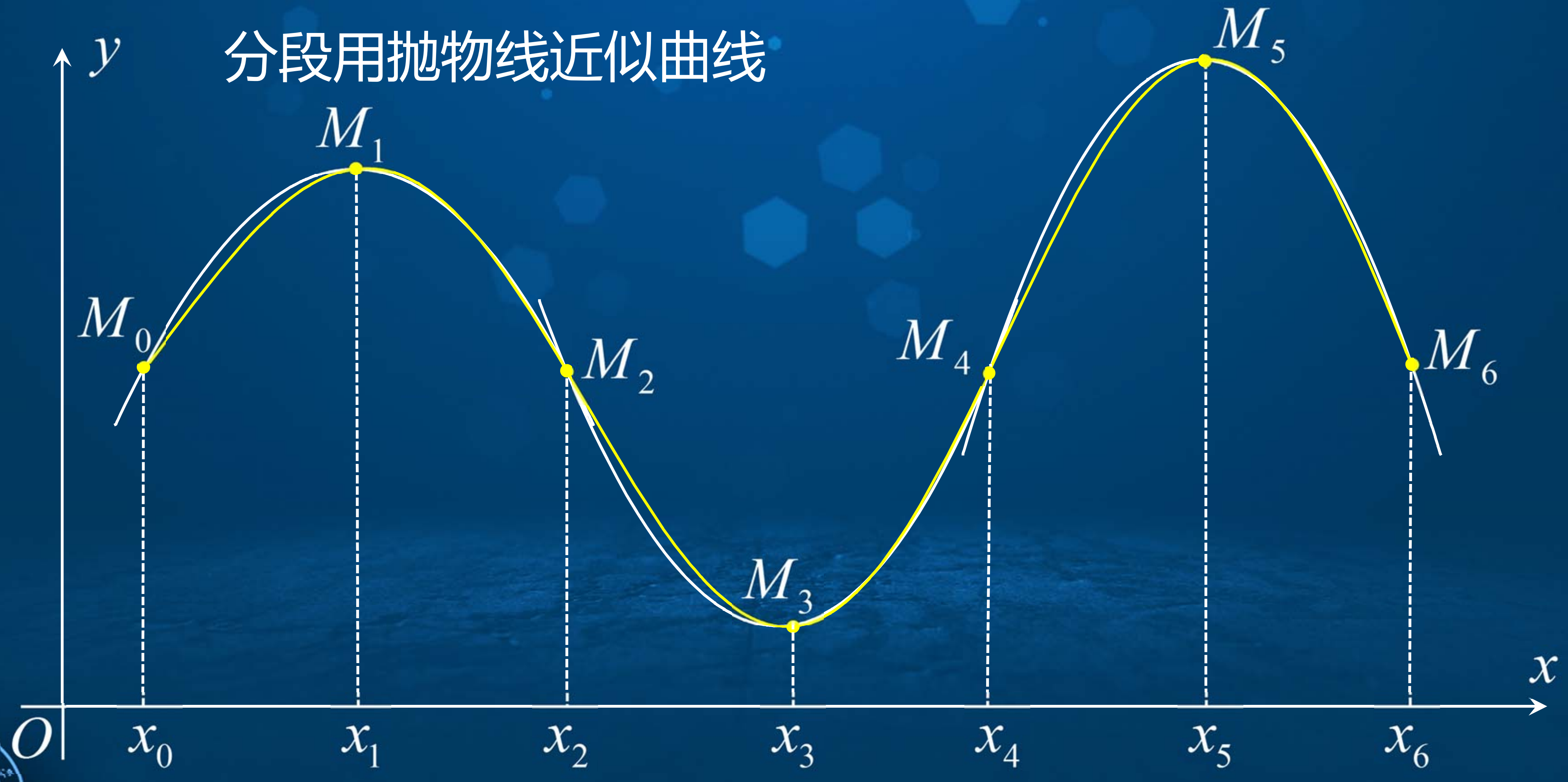
试通过梯形公式求圆周率π的似近值.

$$f(x)=\frac{4}{1+x^2},\ a=0,\ b=1$$

$$x_k=\frac{k}{n}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

n	T_n
10	3.13992598890
50	3.14152598692
100	3.14157598692
200	3.14158848692
400	3.14159161192
800	3.14159239317

$$\pi = 3.141592653\cdots$$

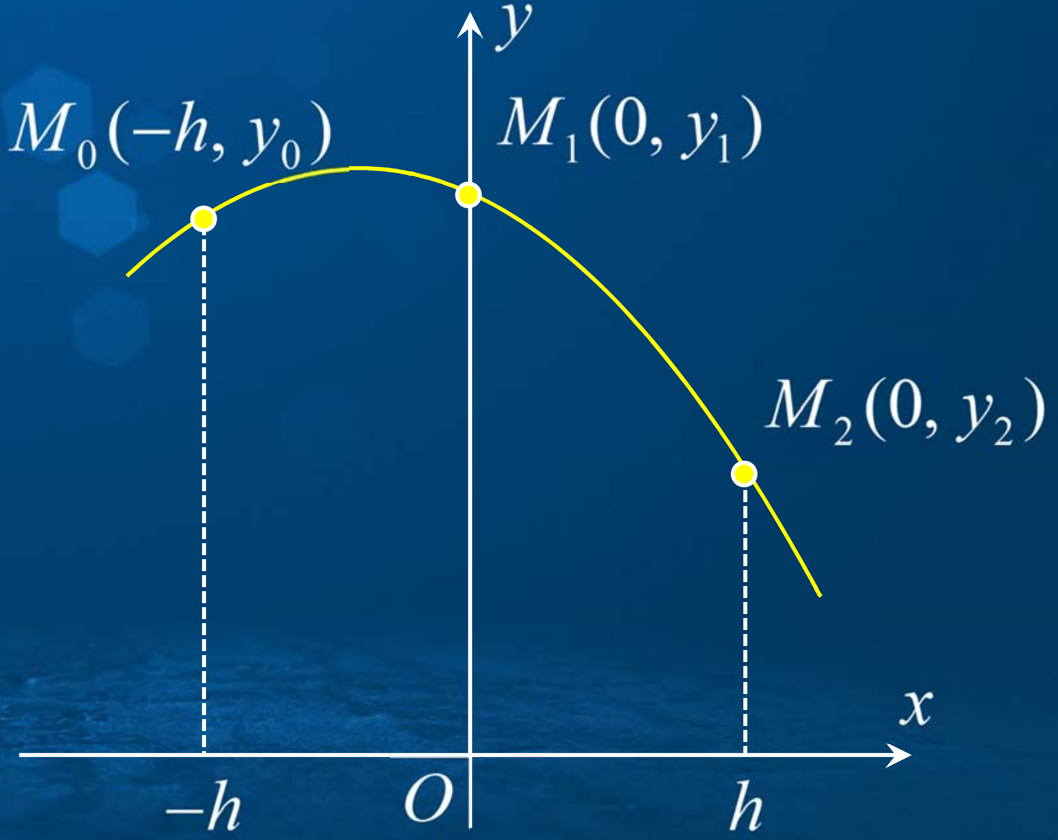


y
分段用抛物线近似曲线
M1
M5
M0
M2
M4
M6
M3
x
O
x0
x1
x2
x3
x4
x5
x6

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三点 $M_0(-h, y_0), M_1(0, y_1), M_2(h, y_2)$, 其在区间$[-h, h]$上对应的曲边梯形面积为

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = S_n$$

其中n为偶数，$h = \dfrac{b-a}{n}$ 辛普森法则

辛普森法则各项系数规律： $1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \cdots, 4, 2, 4, 1$

例3 试分别用梯形公式和辛普森公式通过下式计算π的似近值.

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} \mathrm{d}x \,.$$

$\boldsymbol{f(x)=\frac{4}{1+x^2}}$, $\boldsymbol{a=0, b=1}$, 取$n=10,50,100,200,300$, 得

n	T_n	S_n
10	3.139925988907159	3.141592652969784
50	3.141525986923253	3.141592653589753
100	3.141575986923128	3.141592653589792
200	3.141588486923126	3.141592653589793
300	3.141590801737941	3.141592653589793

梯形方法、中点方法与辛普森法则误差比较

梯形方法误差 $|E_T| \le \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$ $\quad (|f''(x)| \le K)$

中点方法误差 $|E_M| \le \dfrac{K(b-a)^3}{24n^2}$ $\quad (|f''(x)| \le K)$

辛普森法则误差 $|E_S| \le \dfrac{K(b-a)^5}{180n^4}$ $\quad (|f^{(4)}(x)| \le K)$