



哈爾濱工業大學

# 第13讲 离散型随机变量



# 离散型随机变量



■ 只能取有限个值或可列无穷多个值的随机变量 $X$ 称为离散型随机变量.

■ 概率分布列

称  $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$

或

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

为离散型随机变量 $X$ 的概率分布列, 简称分布列或分布律.

# 分布列的性质



(1)  $p_k \geq 0, (k = 1, 2, \dots),$

(2)  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

可以判断数列  $\{p_k\}$   
是否是分布列.



**例1** 设随机变量 $X$ 的分布列为

$P(X = k) = a \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$   
求常数 $a$  .

**解** 由分布列的性质  $P(X = k) \geq 0$ , 即  $a \geq 0$ ,

$$\sum_k P(X = k) = 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a \frac{\lambda^k}{k!} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = a e^{\lambda} = 1.$$

解得  $a = e^{-\lambda}$ .

由泰勒展示得  $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$



**例2** 一汽车开往某地需通过三个交通岗, 各个交通岗出现什么信号是相互独立的, 每个交通岗出现红灯和绿灯的概率均为 $1/2$ , 以 $X$ 表示汽车首次遇到红灯前已通过的交通岗个数, 求 $X$ 的分布列.

**解**  $X$ 可取值 $0, 1, 2, 3$ .

令  $A_i =$  “第 $i$ 个路口遇红灯”,  $i=1, 2, 3$ .

则 $A_1, A_2, A_3$ 相互独立, 且 $P(A_i)=1/2, i=1, 2, 3$ .

$P(\bar{A}_i)=1/2, i=1, 2, 3$ .

$X$ 表示汽车首次遇到红灯前已过的交通岗数



解 令  $A_i =$  “第 $i$ 个路口遇红灯”，  $i=1,2,3$ .



路口1



路口2



路口3

$$P(X=0)=P(A_1)=1/2,$$



路口1



路口2



路口3

$$P(X=1)=P(\bar{A}_1 A_2)=1/2 \cdot 1/2=1/4.$$

$X$ 表示汽车首次遇到红灯前已过的交通岗数



解 令  $A_i =$  “第 $i$ 个路口遇红灯”，  $i=1,2,3$ .



$$P(X=2)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2=1/8$$



$$P(X=3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2=1/8.$$

## $X$ 表示汽车首次遇到红灯前已过的交通岗数



- 即 $X$ 的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$





# 几个常用的离散型分布



## ■ 两点分布(伯努利分布、(0-1)分布)

定义 若随机变量 $X$ 的分布列是

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}, k = 0, 1 \quad (0 < p < 1)$$

或

$X$	0	1
$P$	$1-p$	$p$

$(0 < p < 1).$

称 $X$ 服从**两点分布**或**伯努利分布**, 也称为  
**(0-1)分布**, 记为 **$X \sim B(1, p)$** .

若  **$P(X=a)=1$** , 称 $X$ 服从**退化分布**.

## ■ 二项分布(Binomial)

定义 若随机变量 $X$ 的分布列是

二项概率  
公式

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$k = 0, 1, \dots, n. \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$

称 $X$ 服从参数为 $n, p$ 的二项分布, 记为

$X \sim B(n, p).$

当 $n = 1$ 时,  $P(X = k) = p^k q^{1-k}$  为两点分布.



二项分布满足分布列的两个性质. 即

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0, (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

二项分布描述的是 $n$ 重伯努利试验中“成功”出现次数 $X$ 的概率分布.



**例3** 设  $X \sim B(2, p)$ ,  $Y \sim B(3, p)$ ,

若  $P(X \geq 1) = 5/9$ , 求  $P(Y \geq 1)$ .

**解** 由  $P(X \geq 1) = 5/9$ , 知

$$P(X < 1) = P(X = 0) = (1 - p)^2 = 4/9,$$

得  $p = 1/3$ .

再由  $Y \sim B(3, p) = B(3, 1/3)$ , 可得

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 1/3)^3 \\ &= 19/27. \end{aligned}$$



**例4** 某电子管使用时数在3000小时以上的概率是0.1，求三个同种电子管在使用3000小时以后最多只坏一个的概率.

**解** 设 $X$ 表示三个电子管在使用3000小时已坏的个数.  $X \sim B(3, 0.1)$ ,

$$P(X = k) = C_3^k (0.1)^k (0.9)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= (0.9)^3 + 3(0.9)(0.1)^2 = 0.972. \end{aligned}$$



# 几个常用的离散型分布

## ■泊松分布(Poisson)

定义 若随机变量 $X$ 的分布列

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda > 0, k = 0, 1, \dots,$$



称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$ .

可以验证

$$P(X = k) \geq 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

# 泊松分布的应用



- 交换台在某时间段内接到呼叫的次数;
- 商场在某时间段内接待的顾客数;
- 某时间段内到达飞机场的飞机数;
- 一放射性源放射出的  $\alpha$  粒子数;
- ...

都可以看作泊松分布.



**例5** 某种铸件的砂眼数服从参数为0.5的泊松分布. 试求该铸件至多有1个砂眼和至少有2个砂眼的概率.

**解** 用 $X$ 表示铸件的砂眼数, 由题意知 $X \sim P(0.5)$  则该铸件至多有1个砂眼的概率为

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \frac{0.5^0}{0!} e^{-0.5} + \frac{0.5^1}{1!} e^{-0.5} = 0.91. \end{aligned}$$

$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

该铸件至少有2个砂眼的概率为

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0.09.$$





## ■ 几何分布(Geometric)

定义 若随机变量 $X$ 的分布列

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad (k = 1, 2, \dots),$$
$$0 < p < 1, q = 1 - p,$$

称 $X$ 服从参数为 $p$ 的几何分布, 记为 $X \sim G(p)$ .

### 几何分布的应用

在伯努利试验中, 设每次试验成功的概率均为 $p(0 < p < 1)$ , 独立重复试验直到出现首次成功为止, 所需试验次数 $X$ 服从几何分布.



## 几何分布满足分布列的两个性质

$$P(X = k) = q^{k-1} p \geq 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \\ &= p \cdot \frac{q^{1-1}}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1. \end{aligned}$$

# 几何分布的无记忆性



设  $X \sim G(p)$ ,  $n, m$  为任意的两个正整数, 则

$$P(X > n + m \mid X > n) = P(X > m).$$

$$P(X = k) = q^{k-1} p$$

证明

$$\begin{aligned} P(X > n + m \mid X > n) &= \frac{P(X > n + m, X > n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > n + m)}{P(X > n)} = \frac{\sum_{k=n+m+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p}{\sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p} = \frac{(1-p)^{n+m}}{1-(1-p)} \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^m = \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = P(X > m). \end{aligned}$$



## ■ 超几何分布

**定义** 设有 $N$ 件产品，其中有 $M$ 件次品．今从中任取 $n$ 件不同产品，则这 $n$ 件中所含的次品数 $X$  的分布列为

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad (k = 0, 1, \dots, l = \min(M, n))$$

规定当 $i > m$ 时,  $C_m^i = 0$ .

称 $X$ 服从超几何分布.



✚ 二项分布用来描述有放回抽样.

✚ 超几何分布用来描述不放回抽样.

✚ 当总体 $N$ 很大, 抽样数 $n$ 较小时,  
可用二项分布来逼近超几何分布.



**定理** 设在超几何分布中,  $n$  是一个取定的正整数, 而  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = p, \quad 0 < p < 1,$

$$\text{则 } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k = 0, 1, \dots, n).$$

对固定  $n \geq 1$ , 当  $N$  充分大时, 有

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k \left( \frac{M}{N} \right)^k \left( 1 - \frac{M}{N} \right)^{n-k}, (k = 0, 1, \dots, \min(M, n)).$$

在实际中, 一般当  $n \leq 0.1 \cdot N$  时, 可用此近似公式.



谢 谢！