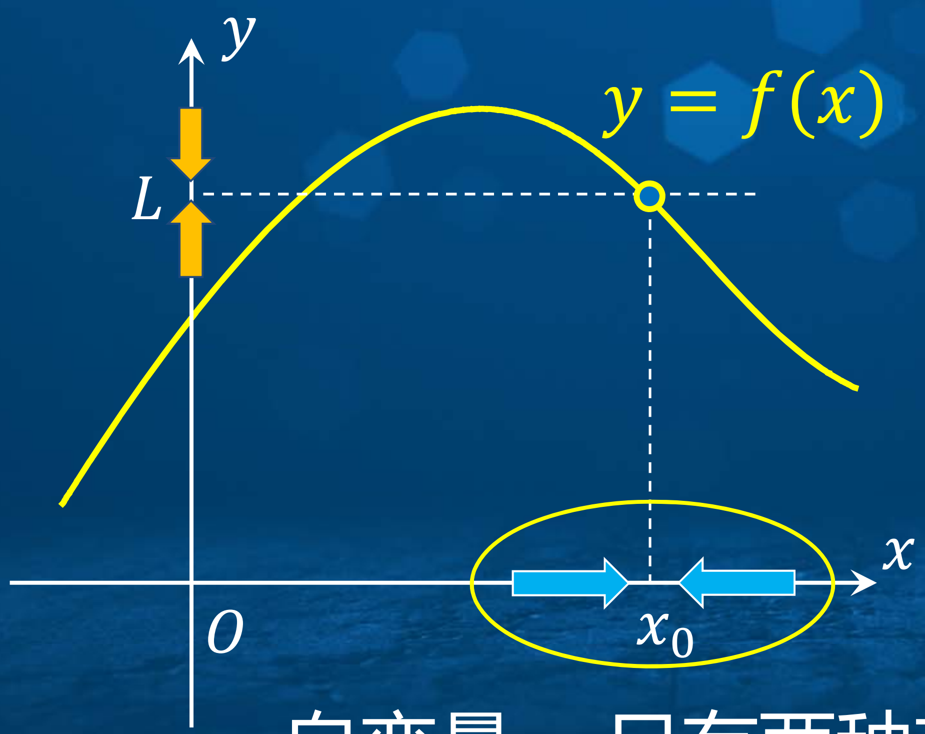
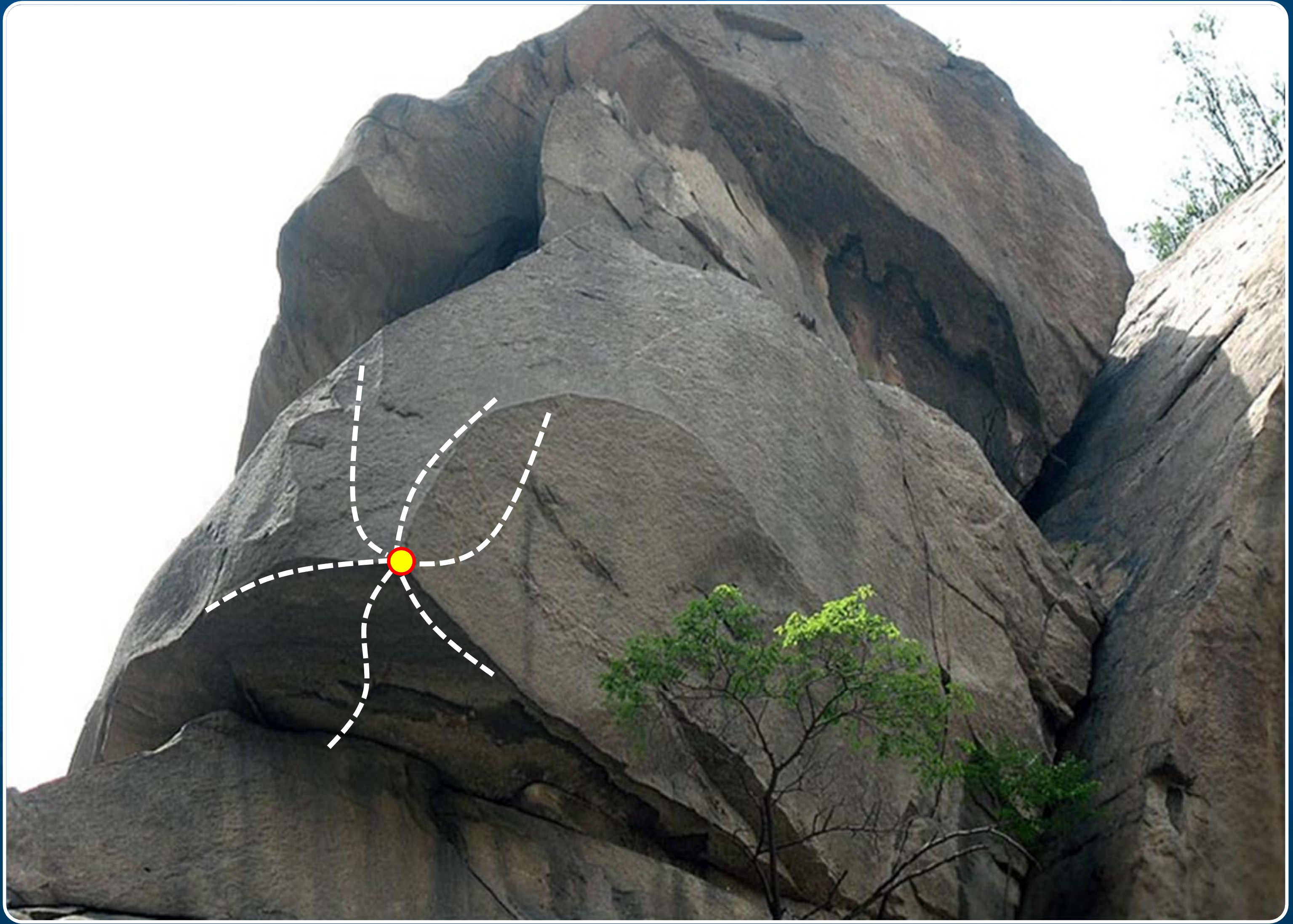
第63讲 多元函数的极限与连续

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ 的几何解释



自变量 x 只有两种变化方式

蚂蚁觅食



多元函数极限

多元函数的连续性

闭区域上连续函数的性质

一元函数的极限 $\longrightarrow$ 多元函数的极限

一元函数的连续 $\longrightarrow$ 多元函数的连续

- **多元函数极限的描述性定义**

设n元函数$f(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}_0$的某去心邻域内有定义，如果当自变量$\mathbf{x}$无限趋于$\mathbf{x}_0$时，函数$f(\mathbf{x})$的值无限接近于某个常数a，那么，称当$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$时，$f(\mathbf{x})$以$a$为极限，记作

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = a\ .$$

定义1 设n元函数$f(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}_0$的某去心邻域内有定义，a为常数，如果对于任意给定的正数ε，存在正数δ，当$0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$时，恒有

$$|f(\mathbf{x})-a|<\varepsilon,$$

则称函数$f(\mathbf{x})$当$\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$时以$a$为极限，记作

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=a.$$

并称上述极限为n重极限.

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有 恒有$|f(\mathbf{x})-a|<\varepsilon.$

当 $n=2$ 时, 二重极限的分量描述形式如下：

设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某去心邻域内有定义，a为常数，如果对于任意给定的正数ε，存在正数δ，当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，恒有

$$|f(x,y)-a|<\varepsilon\ ,$$

则称当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时, $f(x,y)$以a为极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a.$$

例1 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2\neq 0)$

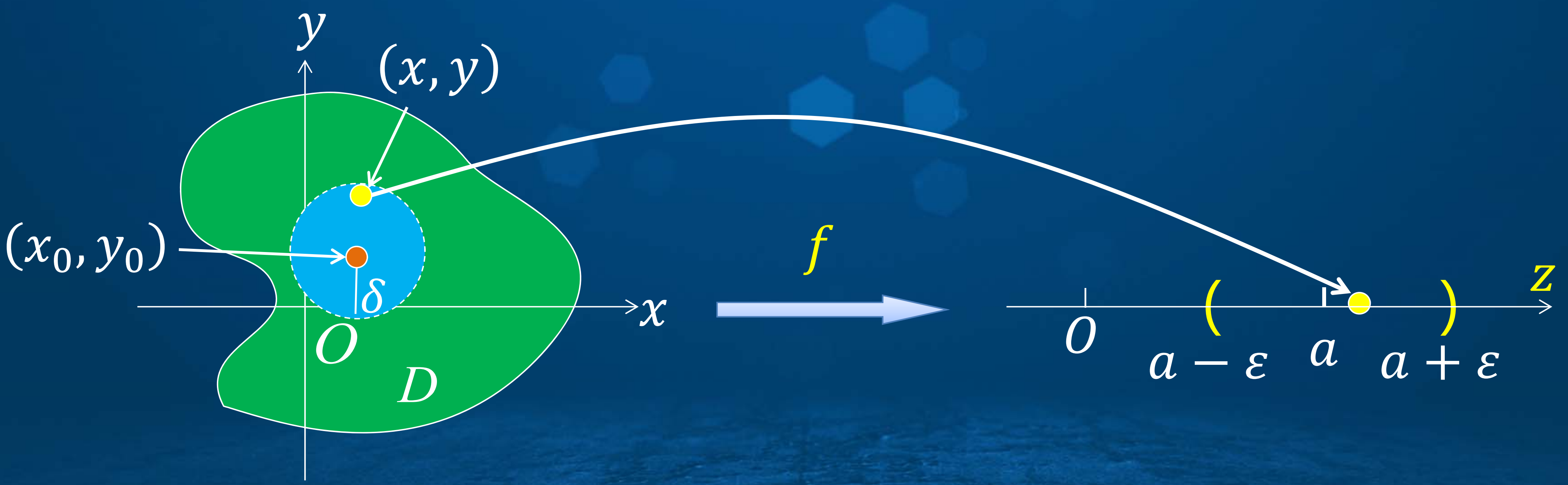
证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

【例1解】 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时

恒有 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leq x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$

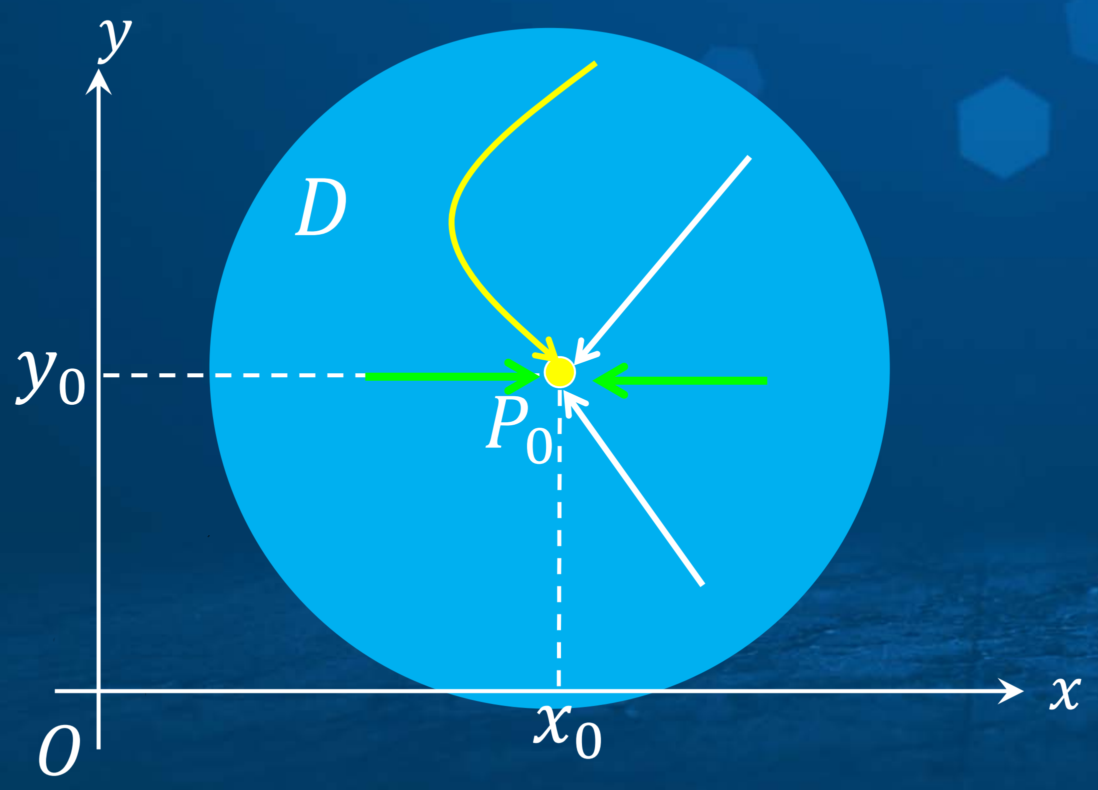
因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

二元函数的二重极限直观的解释



$z=f(x,y),(x,y)\in D$

二重极限存在性与函数自变量变化的关系

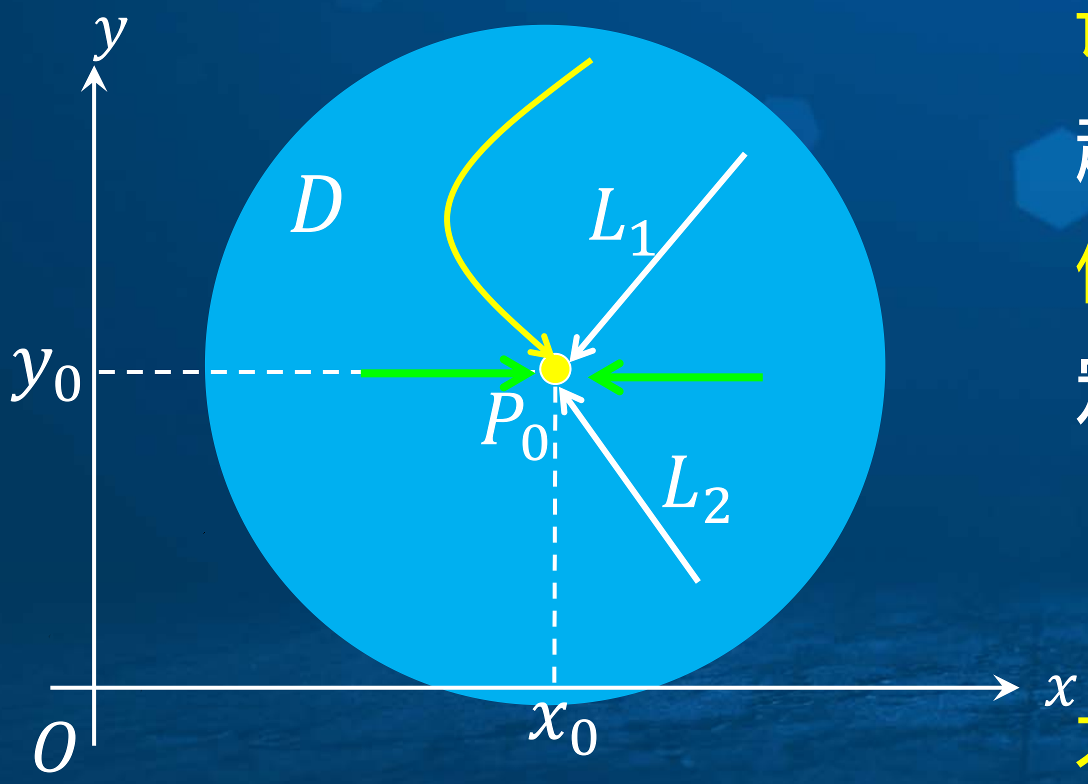


自变量的变化方式

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$$

$$\Updownarrow$$

点(x,y)以任意路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)\to a$.



说明： 若当点(x,y)以不同路径趋于(x_0,y_0)时，函数趋于不同值或有的极限不存在，则可以断定二重极限

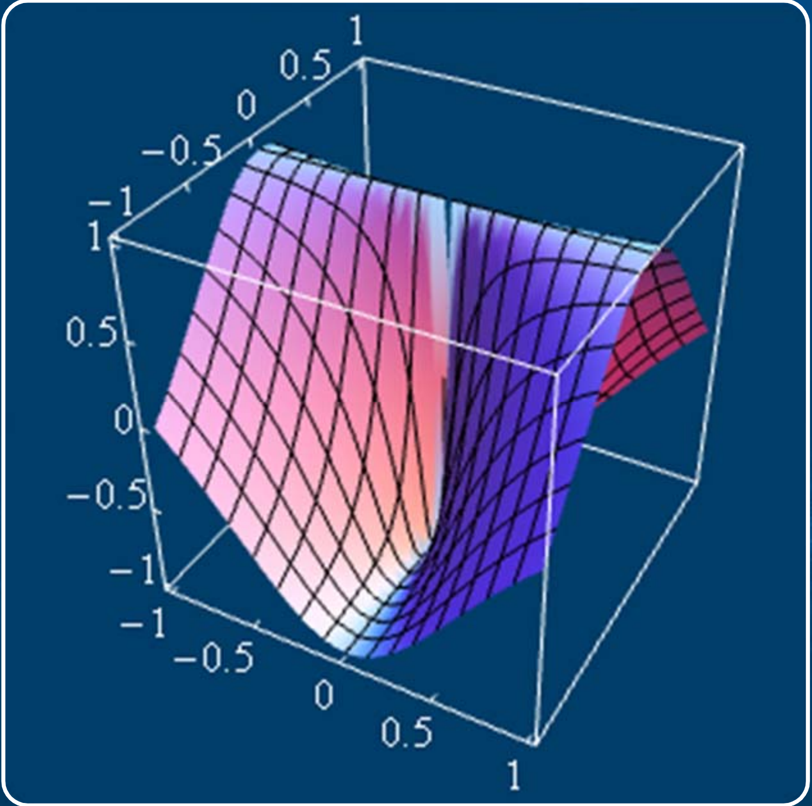
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

不存在.

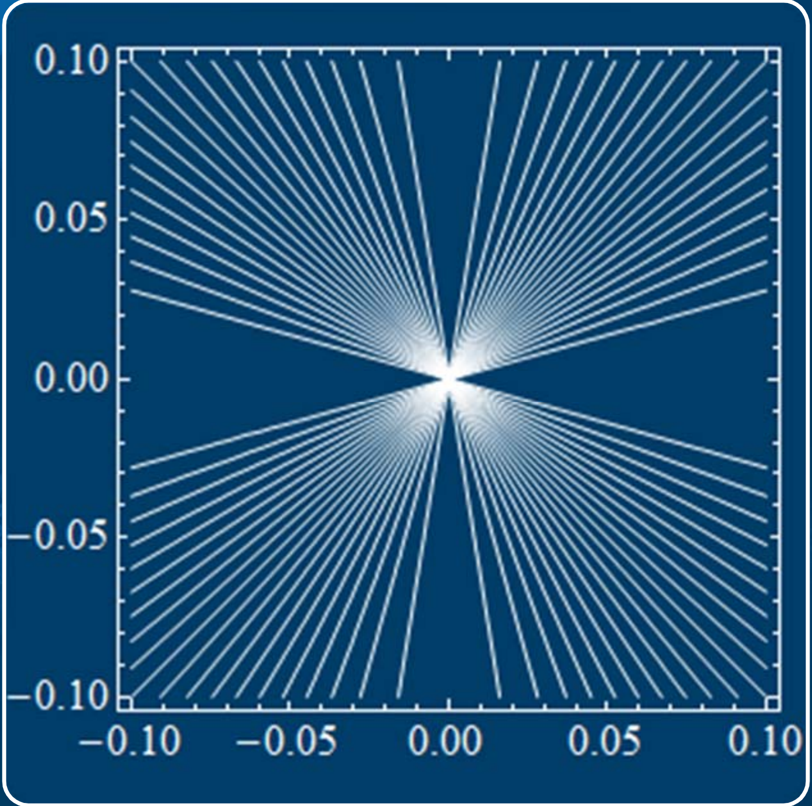
例2 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在 .

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

曲面图形



等值线图形



累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] \text{ 和 } \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right].$$

- 二重极限、两个二重极限如果它们都存在, 则三者相等.
- 仅知其中一个存在，推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

函数$f(x,y)$在$(0,0)$点二重极限不存在，但累次极限均存在

定义2 设n元函数$f(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}_0$的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

则称函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处连续．

当$n = 2$时，二元函数连续的分量描述形式为：

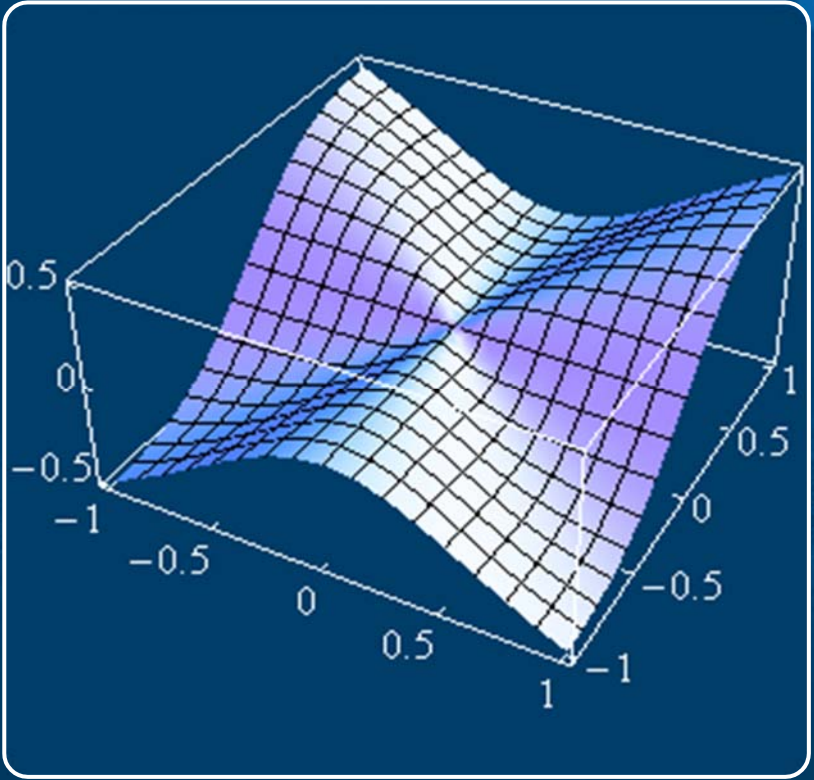
设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a,$$

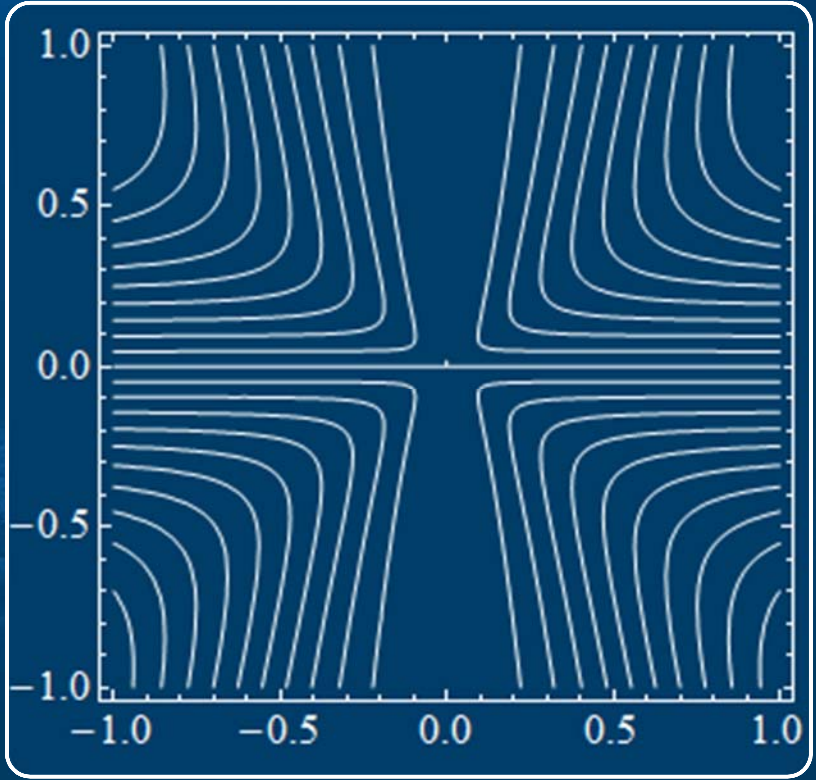
则称$f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

例3 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处连续．

曲面图形



等值线图形



定理1(有界性与最大值最小值定理) 在有界闭区域D上的多元连续函数，必定在D上有界，且能取得它的最大值和最小值.

即，若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则必定存在$M>0$，使得对于一切$(x,y)\in D$，有

$$|f(x,y)|\le M\text{；}$$

且存在$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$，使得

$$f(x_1,y_1)=\max\{f(x,y)|(x,y)\in D\};$$

$$f(x_2,y_2)=\min\{f(x,y)|(x,y)\in D\}.$$

定理2(介值定理) 在有界闭区域D上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

定理3(一致连续性定理) 在有界闭区域D上的多元连续函数必定在D上一致连续.

一致连续的定义

若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则任给$\varepsilon>0$，总存在正数δ，对任意两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$，只要$|P_1P_2|<\delta$，便有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$成立.