



哈爾濱工業大學

第3讲 古典概率



概率



■ **概率**——表示事件 A 发生可能性大小的数值，称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

注意：概率是随机事件的函数.

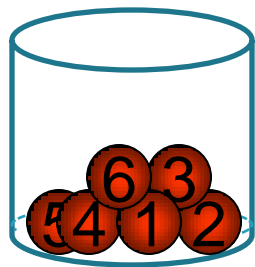
古典概率的定义



- 若试验的样本空间 S 满足：

{ 只有有限个样本点——**有限性**,
每个样本点发生的可能性相等——**等可能性**.

称此试验为古典概型试验.



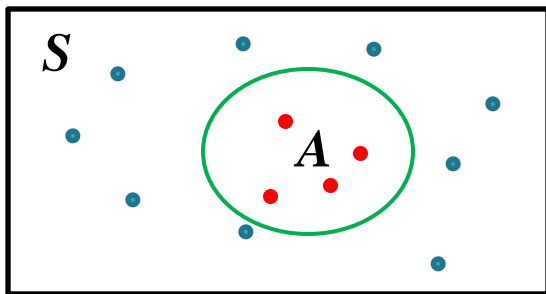
古典概率的计算公式



- 在古典概型下，事件A的概率定义为：

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点数}}{S \text{ 含样本点总数}}$$

- 这里计算样本点数的主要工具是排列、组合.



排列与组合



➤ 加法原理

设完成一件事有 m 种方式,

第一种方式有 n_1 种方法,

第二种方式有 n_2 种方法,

.....

第 m 种方式有 n_m 种方法,

则完成这件事总共有
 $n_1 + n_2 + \dots + n_m$
种方法 .

排列与组合

➤ 例如



甲地



飞机有3班

火车有4班



乙地

$$3+4=7\text{种}$$

排列与组合



➤ 乘法原理

设完成一件事必须经过 r 个步骤,

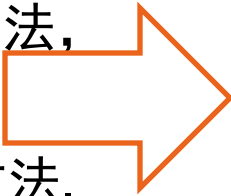
第一个步骤有 n_1 种方法,

第二个步骤有 n_2 种方法,

第三个步骤有 n_3 种方法,

.....

第 r 个步骤有 n_r 种方法.



则完成这件事总
共有 $n_1 \times n_2 \times \dots$
 $\times n_r$ 种方法.

乘法原理



- 例如，小王要从三种不同水果和两种不同饮料中各选一个，他有多少种不同选法？



可以有 3×2 中选法.

排列和组合的区别



- 顺序不同是不同排列



- 组合不管顺序



元素无重复排列

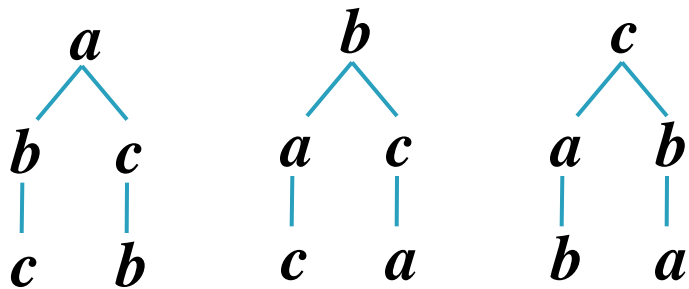


(1) 将 n 个不同元素按照一定次序排成一列，称为全排列，全排列的个数为

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

例1 3个不同字母 a, b, c 的全排列个数为

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$



元素无重复排列



从3个不同的球中取出2个的排列有?种,



$$A_3^2 = 3 \times 2 = 6.$$

元素无重复排列



(2) 从 n 个不同元素中任取 k 个 ($1 \leq k \leq n$)

元素排成一行，不同的排列总数为

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$k = n$ 时，则为全排列

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

元素无重复排列



例2 5个小孩排成一排的方式有多少种?

解 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

例3 将10本书任意放在书架上，求其指定的3本书靠在一起的排法有多少种?

解 $8! \times 3! = 241920$

元素允许重复的排列

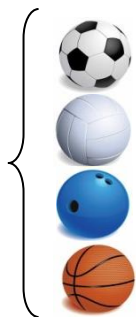


(3) 从 n 个不同元素中取 k 个 ($1 \leq k \leq n$) 排成一列,
(元素允许重复) 不同排列的总数为

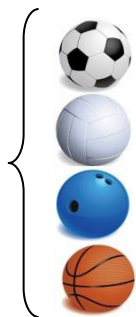
$$n \cdot n \cdots n = n^k$$

例如: 从盒中有放回地取3个球

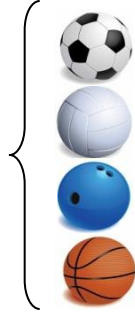
第1个



第2个



第3个



$n=4, k=3$

共有

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

种可能取法.

组合

(1) 组合: 从 n 个不同元素中取 k ($1 \leq k \leq n$) 个元素组成一组, (无次序) 称为一个组合, 所有组合的个数为

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k},$$

C_n^k 常记作 $\binom{n}{k}$, 称为组合数.

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!$$



组合



从3个不同的球中取出2个的**组合**有?种,
(无次序)



$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3.$$



(2) n 个不同元素分为 k 个($1 \leq k \leq n$)不同组, 每组元素个数分别为 r_1, r_2, \dots, r_k 个的分法总数为

$$C_n^{r_1} \cdot C_{n-r_1}^{r_2} \cdots C_{r_k}^{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

其中 $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.



例4 将7个学生安排到一个三人间和两个双人间中住宿，问有多少种不同的住法？

解 问题转化为将7人分为3组，第1组有3人，第2组有2人，第3组有2人，不同住法总数为：

$$C_7^3 \cdot C_{7-3}^2 C_2^2 = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

古典概率的计算公式



- 在古典概型下，事件A的概率定义为：

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点数}}{S \text{ 含样本点总数}}.$$

古典概率的计算



例1 一批产品中有10个正品和2个次品，任意抽取两次，每次抽出一个，抽出后不放回，求第二次抽到次品的概率？

解 设 A = “第二次抽到次品”，则

$$P(A) = \frac{A_{10}^1 A_2^1 + A_2^2}{A_{12}^2} = \frac{10 \times 2 + 2 \times 1}{12 \times 11} = \frac{1}{6}.$$

古典概率的计算



例2 将 r 个人随机地分配到 n 个房间里, $r \leq n$,
设 A_1 =“某指定 r 个房间中各有一人”, A_2 =“恰
有 r 个房间中各有一人”, A_3 =“某指定房间
恰有 k 个人”, $k \leq r$. 求 A_1 , A_2 , A_3 的概率.

解

$$P(A_1) = \frac{r!}{n^r} \quad P(A_2) = \frac{C_n^r r!}{n^r}$$

$$P(A_3) = \frac{C_r^k (n-1)^{r-k}}{n^r}$$

古典概率的计算



例3 袋中有 a 个黑球， b 个白球，若随机地（不放回）把球一个接一个地摸出来，求 $A =$ “第 k 次摸出的球是黑球”的概率（ $k \leq a+b$ ）.

解1 把 $a+b$ 个球编号为 $1, 2, \dots, a+b$ ，前 a 号球是黑球. 把 $a+b$ 个球的一种排列作为一个样本点，则

$$P(A) = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{(a+b)}$$

与 k 无关

古典概率的计算



解2 把第 k 次摸到的球号作为一个样本点，
由等可能性

$$P(A) = \frac{a}{(a+b)}$$

与 k 无关

结论说明抽签与次序无关.

古典概率的性质



(1) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若事件 A 、 B 互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含样本点数}}{S \text{ 含样本点总数}}.$$

推广：若 A_1, A_2, \dots, A_n 互斥，则：

$$\begin{aligned} &P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

这是概率的加法公式或概率的有限可加性.

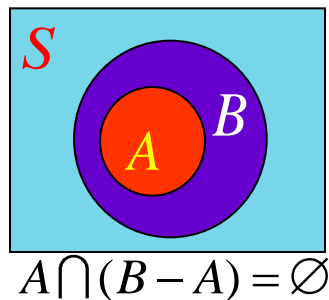
古典概率的性质

(4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

(5) $P(\emptyset) = 0$;

(6) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$ (*)

且 $P(B - A) = P(B) - P(A)$ (**)



证明: $P(B) = P(A \cup (B - A))$

$$= P(A) + P(B - A)$$

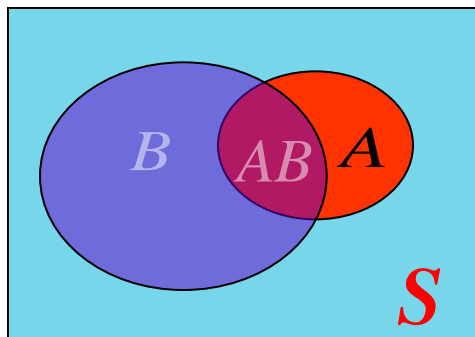
移项得 (**), 再由 $P(B - A) \geq 0$ 得 (*).

古典概率的性质

推广: $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

(7) (一般概率加法公式)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



证明

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (B - AB)) \\ &= P(A) + P(B - AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

$$A \cap (B - AB) = \emptyset$$

古典概率的性质



- 推广:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

- 一般情形

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

古典概率的计算



例4 有 r 个人，设每个人的生日是365天的任何一天是等可能的，求事件“至少有两人生日相同”的概率.

解 设 A =“至少有两人生日相同”，则

\bar{A} =“ r 个人的生日都不相同”

$$P(\bar{A}) = \frac{A_{365}^r}{(365)^r} \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{365}^r}{(365)^r}$$

当 $r=22$ 时， $P(A)=0.476$ ， $r=23$ 时， $P(A)=0.507$ ，
 $r=50$ 时， $P(A)=0.97$.



谢 谢！