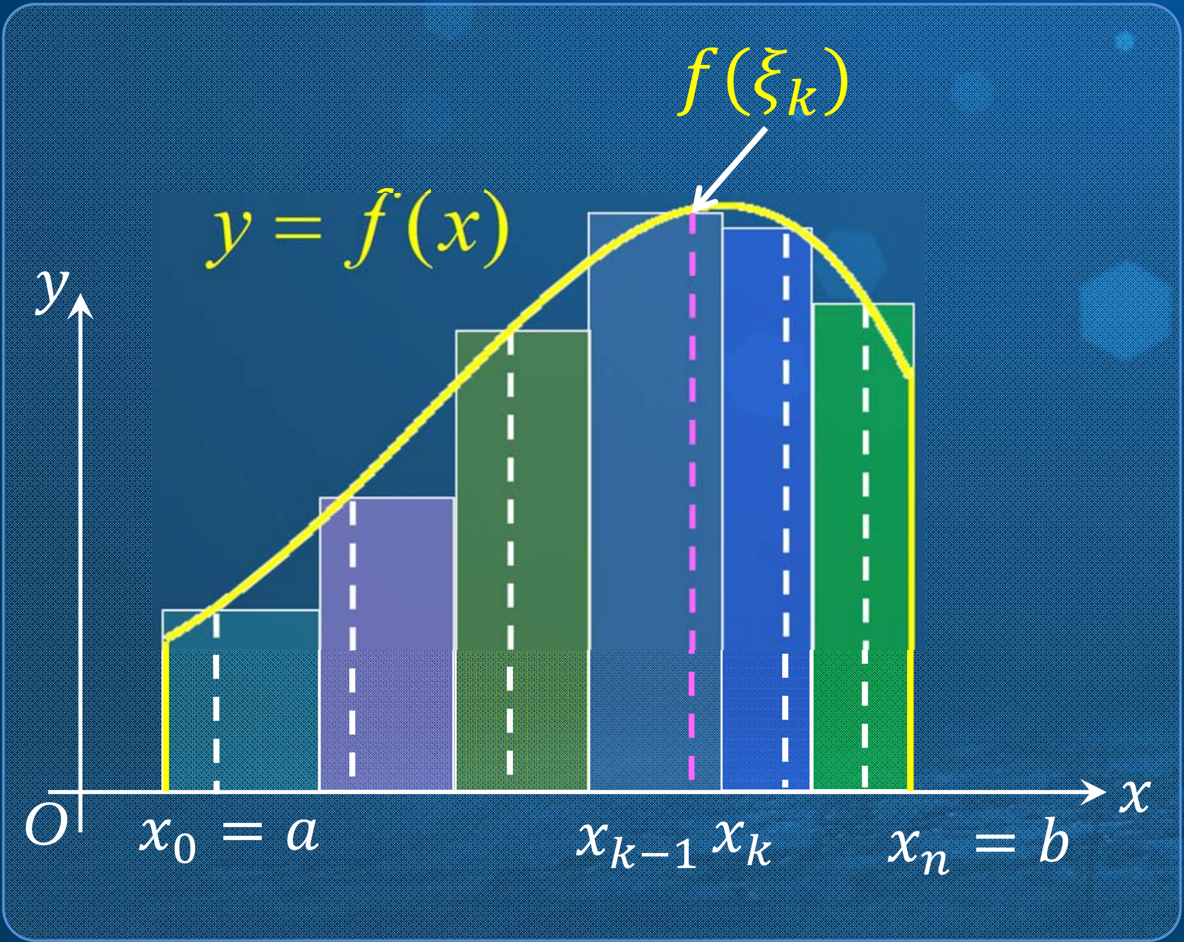
《高等数学》全程教学视频课

第44讲 定积分的几何应用

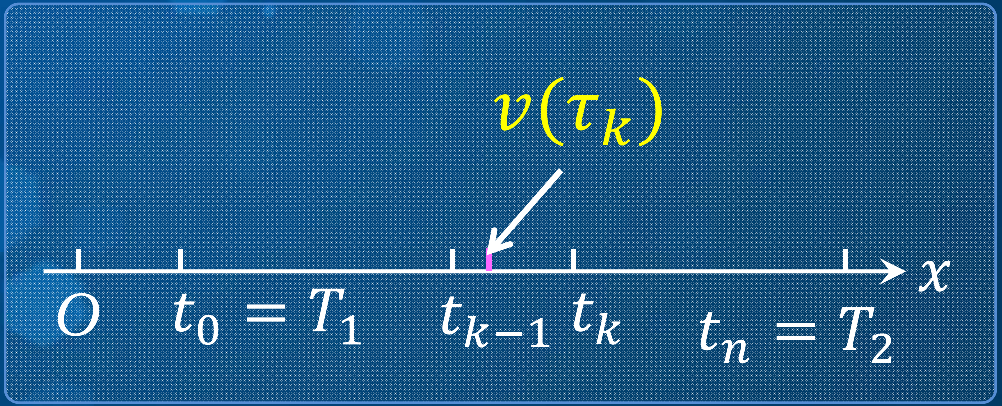
- 什么问题可以用定积分解决？

（一）能用定积分来描述的量具有什么特征？

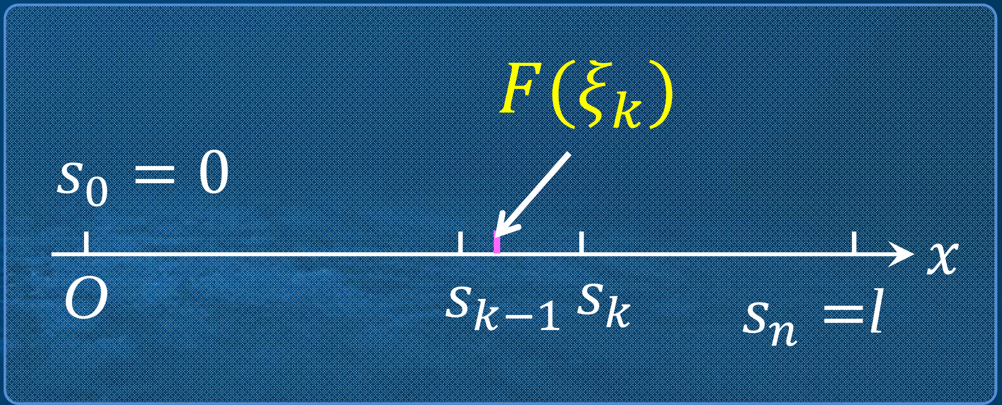
（二）如何建立这些量的定积分表达式？



曲边梯形面积



变速直线运动的路程



同向变力所做的功

它们具有的共同特征：

(1) 它们都是由一个函数 $f(x)$ 及其定义区间 $[a,b]$ 决定的量，即分布在区间$[a,b]$上的非均匀连续变化的量；

(2) 分布在区间$[a,b]$上的总量等于分布在各子区间上的部分量之和，即具有对区间的可加性.

（一）能用定积分来描述的量具有什么特征？

微元法

分割取近似，作和求极限

(1)“分割、取近似”. 将区间$[a,b]$作任意分割，任取一子区间$[x_{k-1},x_k]$，得到所求量的局部近似值 $\Delta U_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k$.

(2)“作和、求极限”. 将各子区间的近似值相加, 并求极限.

$$U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k \qquad U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

（二）如何建立这些量的定积分表达式？

微元法解决实际问题的具体步骤

第一步 选取积分变量，并确定其变化区间$[a, b]$.

第二步 在$[a, b]$内任取一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$, 求出这个子区间对应的部分量ΔU的一个合理近似值，得到积分微元

$$dU = f(x)\mathrm{d}x.$$

第三步 得总量U的定积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

平面图形的面积

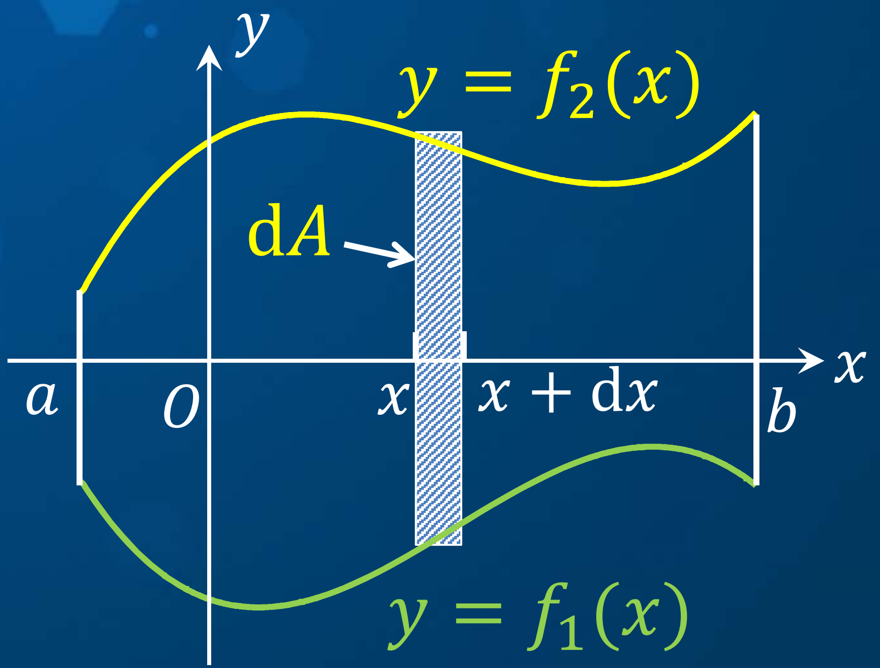
体积

求由连续曲线和直线

$$y=f_1(x),y=f_2(x)$$

和直线 $x=a,x=b$ 所围成的平面图形的面积.

$$\mathrm{d}A=[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$



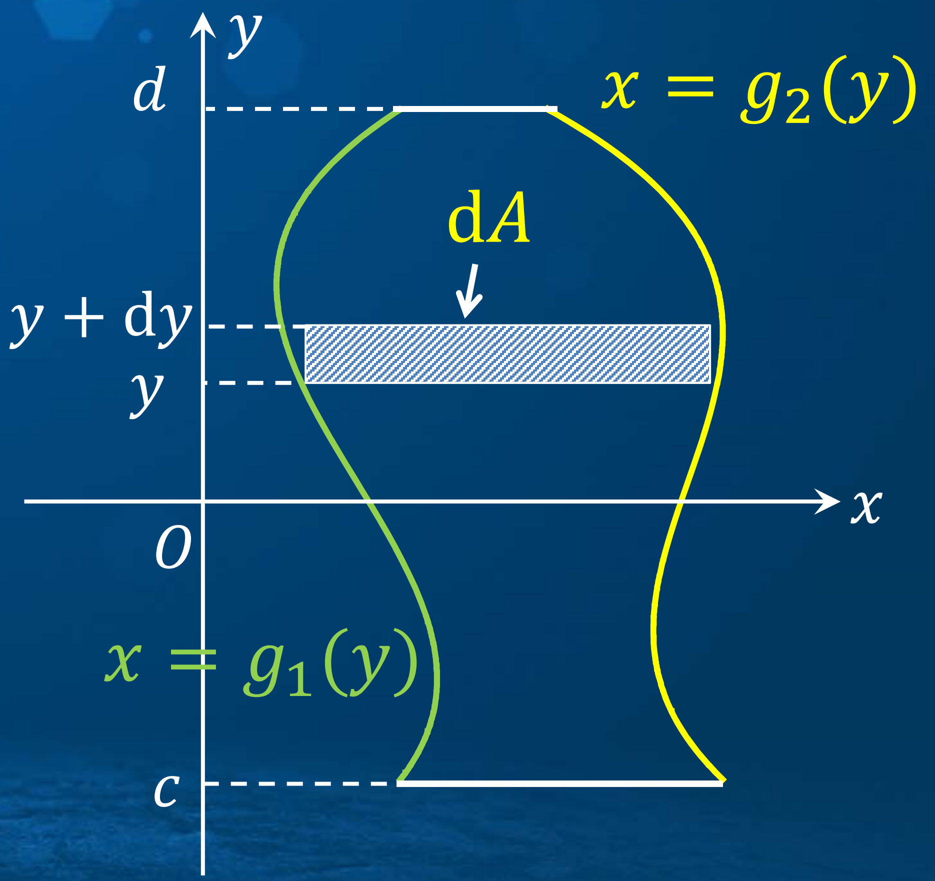
故所求平面图形面积

$$A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

求由连续曲线和直线

$$x = g_1(y), y = g_2(y)$$

和直线$y = c, y = d$所围成的平面图形的面积.

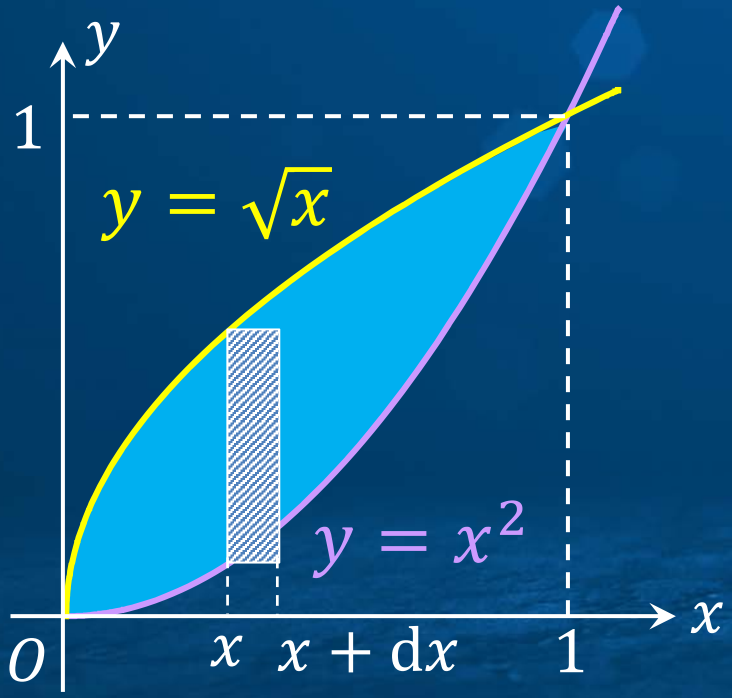


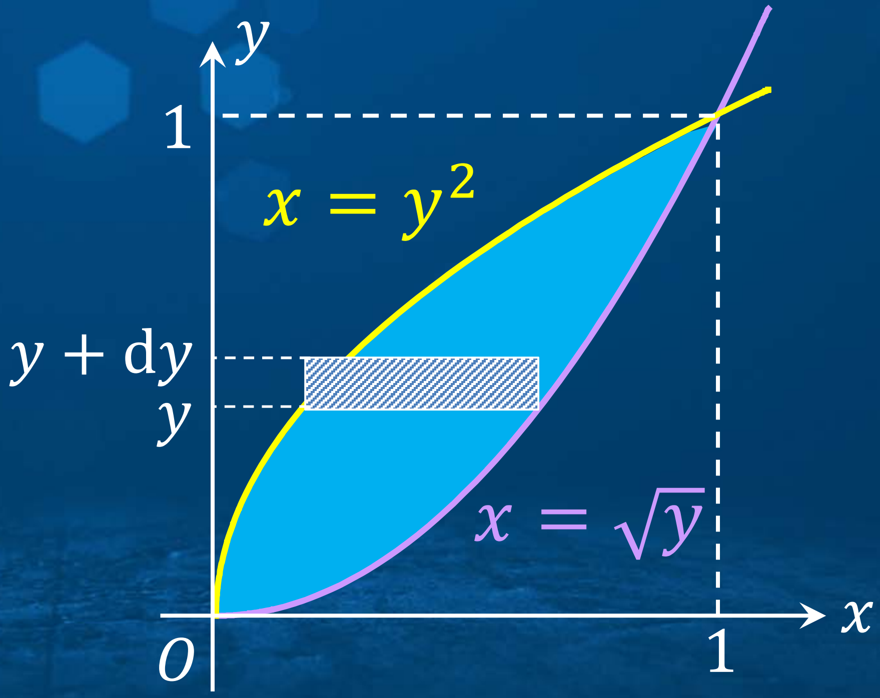
$$\mathrm{d}A = [g_2(y) - g_1(y)]\mathrm{d}y$$

故所求平面图形面积

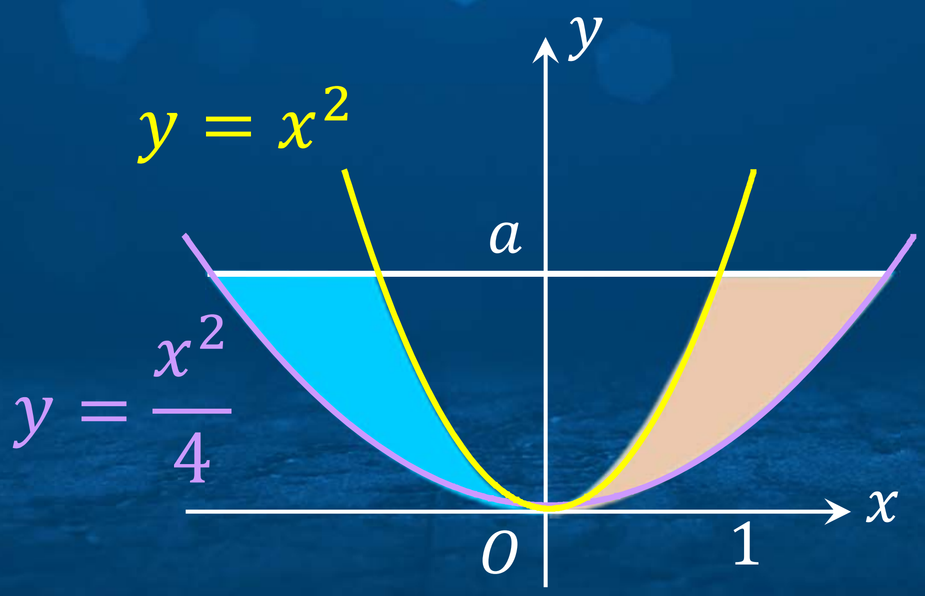
$$A = \int_a^b [g_2(y) - g_1(y)]\mathrm{d}y.$$

例1 计算由曲线$y = x^2$ 及 $y = \sqrt{x}$ 所围成的图形的面积.

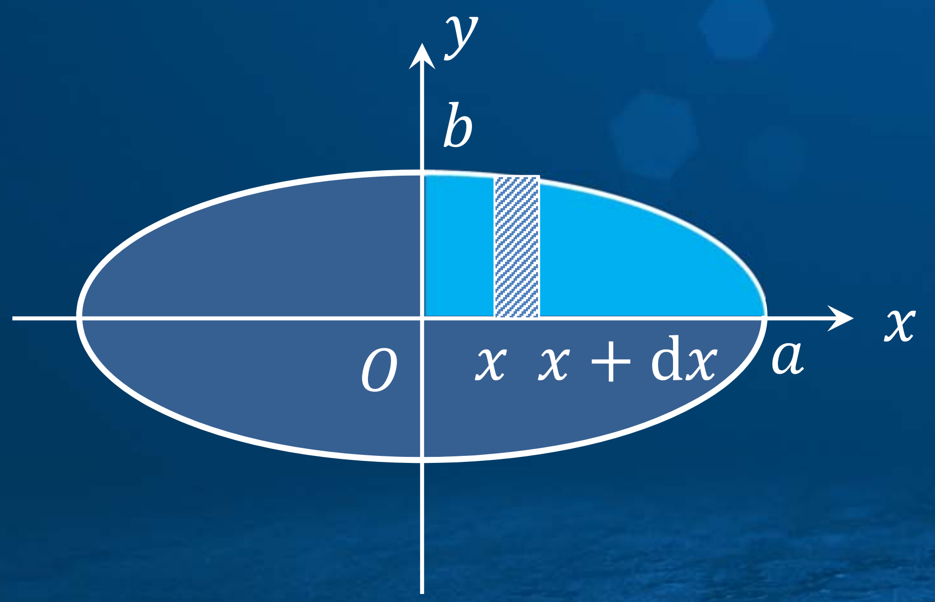




例2 计算夹在曲线 $y=x^2$ 及 $y=\frac{x^2}{4}$ 之间，并在直线 $y=a(a>0)$ 之下的那部分图形的面积.



例3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.



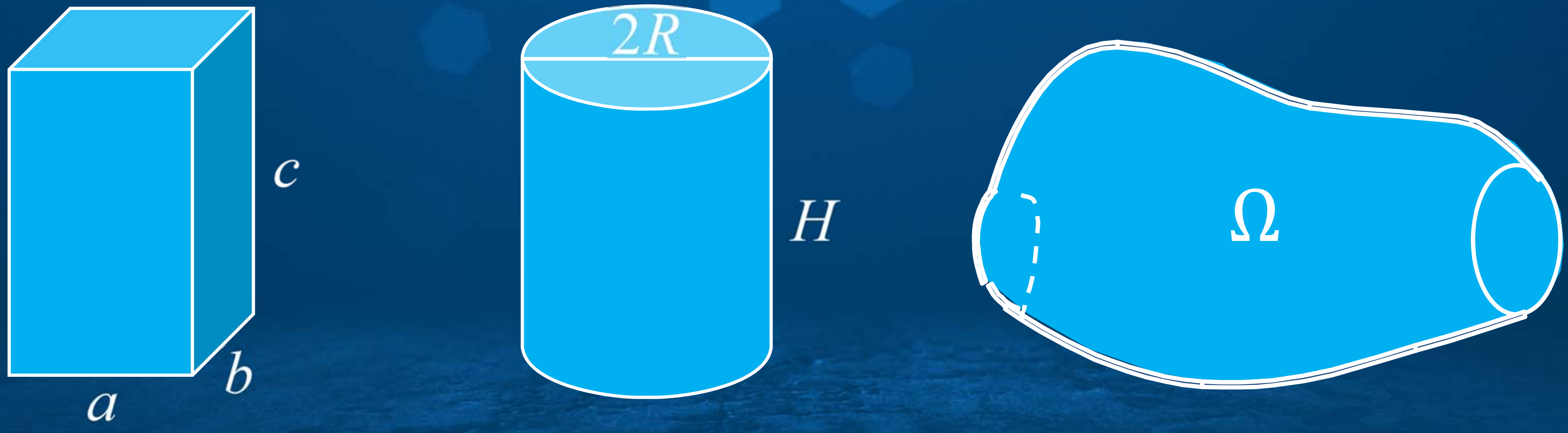
问题：

（1）椭圆的周长等于多少？

（2）椭圆的绕x轴旋转所得旋转椭球的体积等于多少？

平行截面面积为已知的立体体积

规则几何体　　　　　　　　非规则几何体



$V = abc$　　　　$V = \pi R^2 H$　　　　体积如何计算？

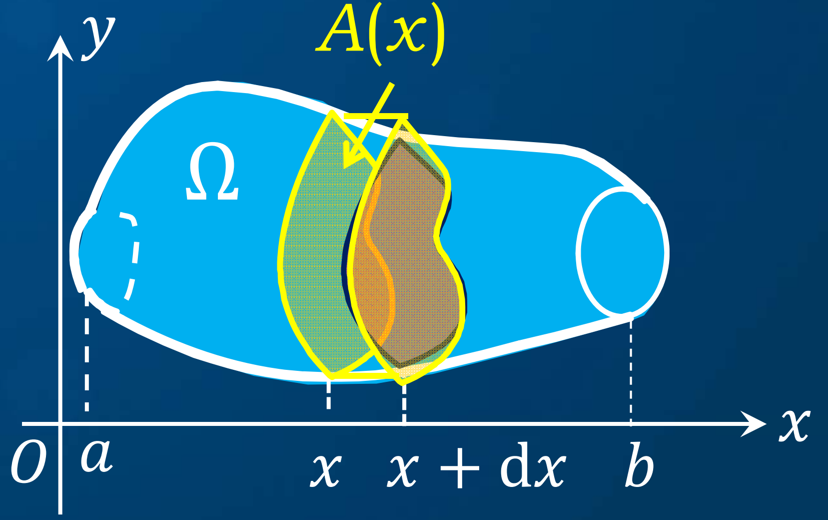
平行截面面积为已知的立体体积

该立体的横截面的面积$A(x)$是已知的连续函数，过点 x及 $x+\mathrm{d}x$ 用垂直于 x 轴的平面切得Ω的一个厚度为dx的薄片，将它近似看作直柱体，从而得体积微元

$$A\quad(\;x\quad)$$

立体的体积为

$$A\,(\,x\,)$$



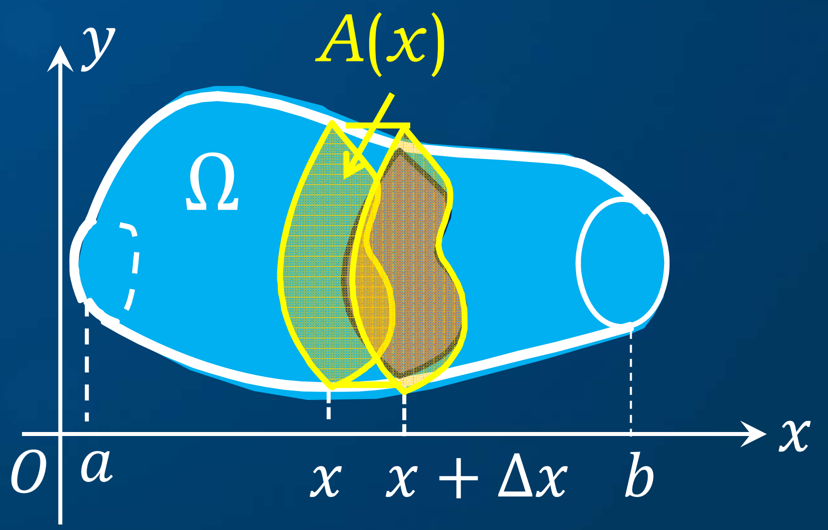
截面法

截面法的基本步骤：

(1) 画一个该立体及典型截面的草图；

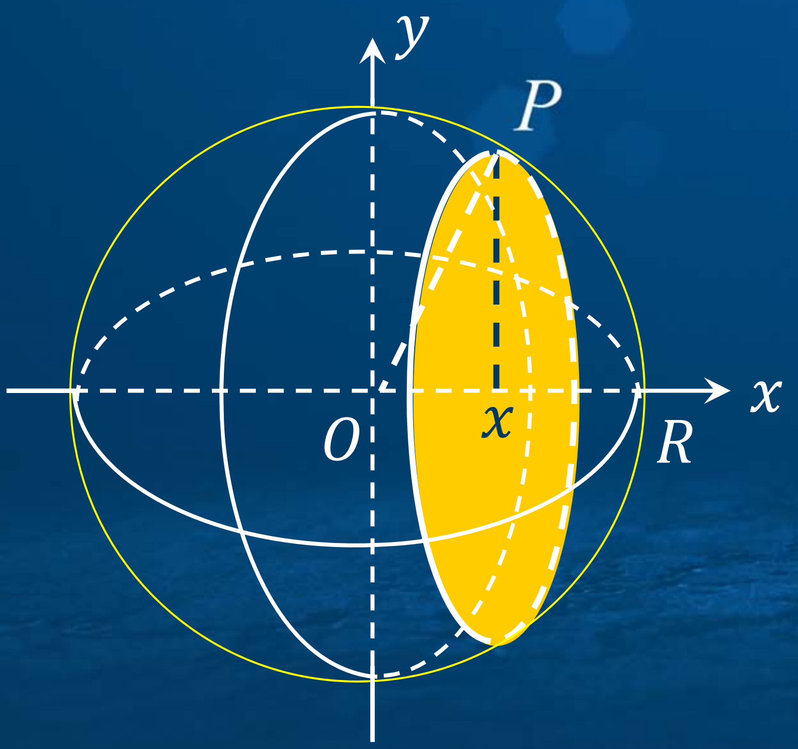
(2) 写出$A(x)$的表达式；

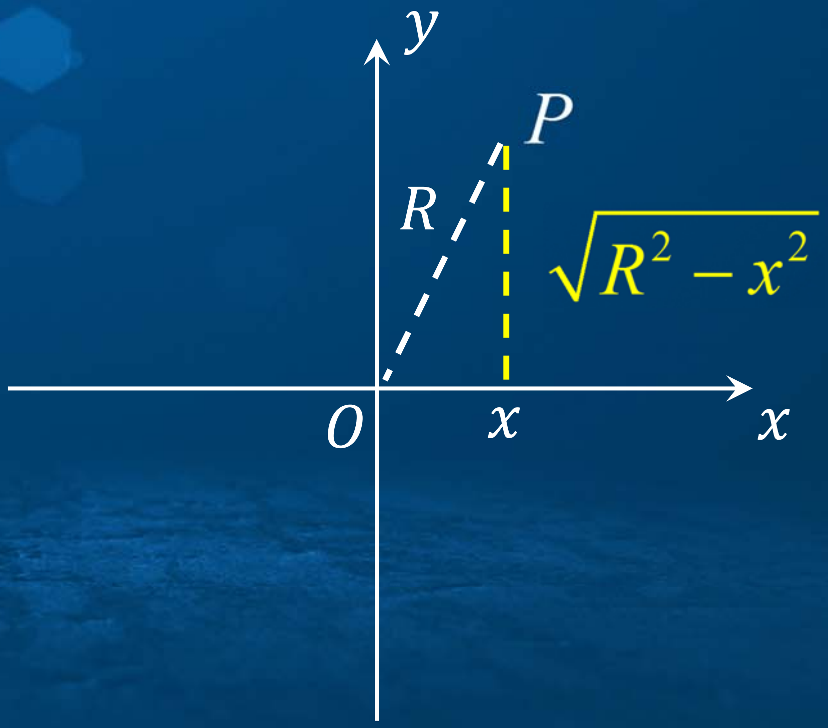
(3) 计算定积分$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$得立体体积.



截面法

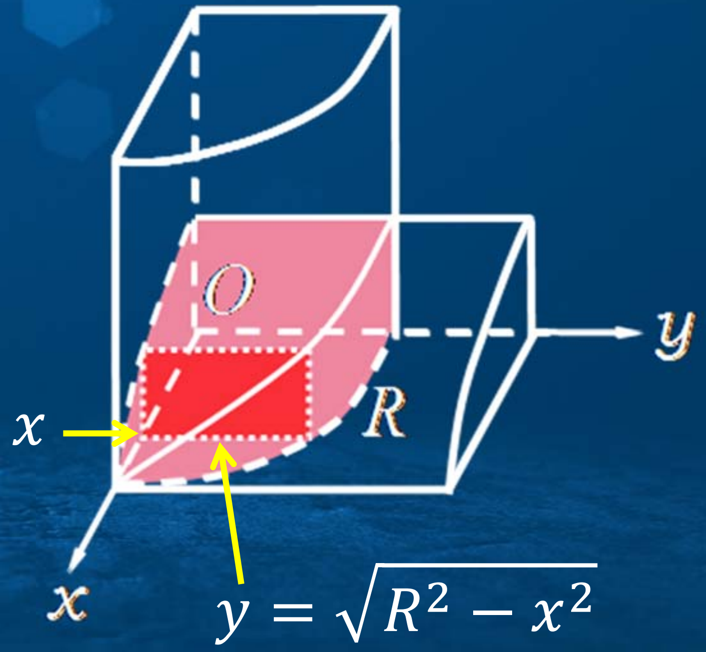
例4 证明半径为R的球体的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.





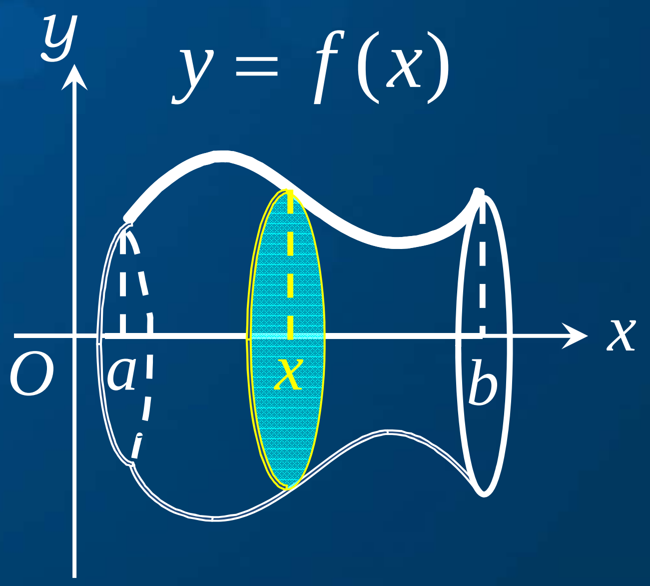
例5 两个半径为 R 的圆柱体中心轴垂直相交，求这两个圆柱体公共部分体积.

"牟合方盖"



旋转体的体积

求连续曲线段 $y = f(x)(a \le x \le b)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

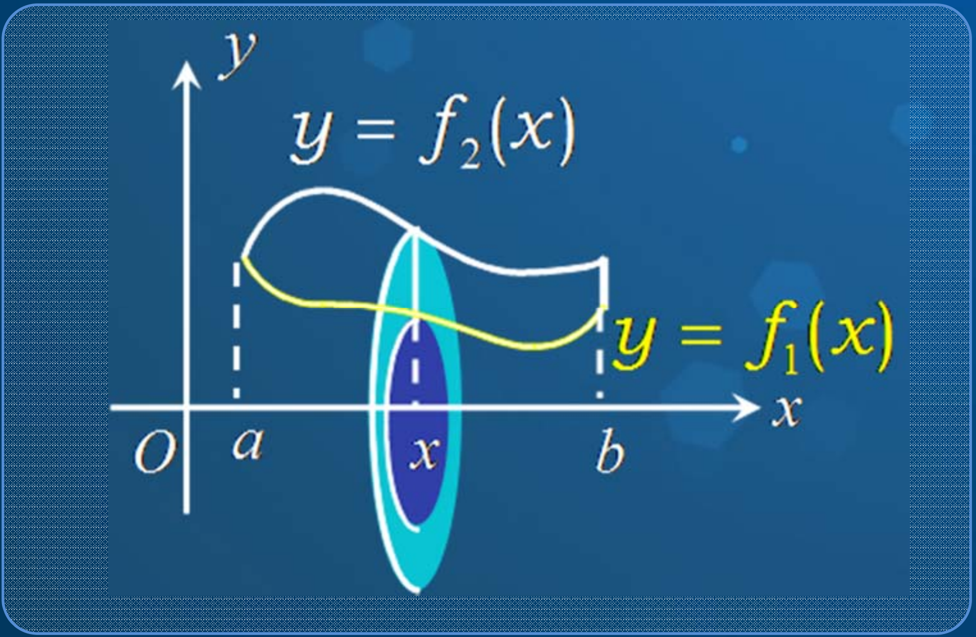


因垂直于x 轴的截面是半径为$f(x)$ 的圆盘, 其面积为

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

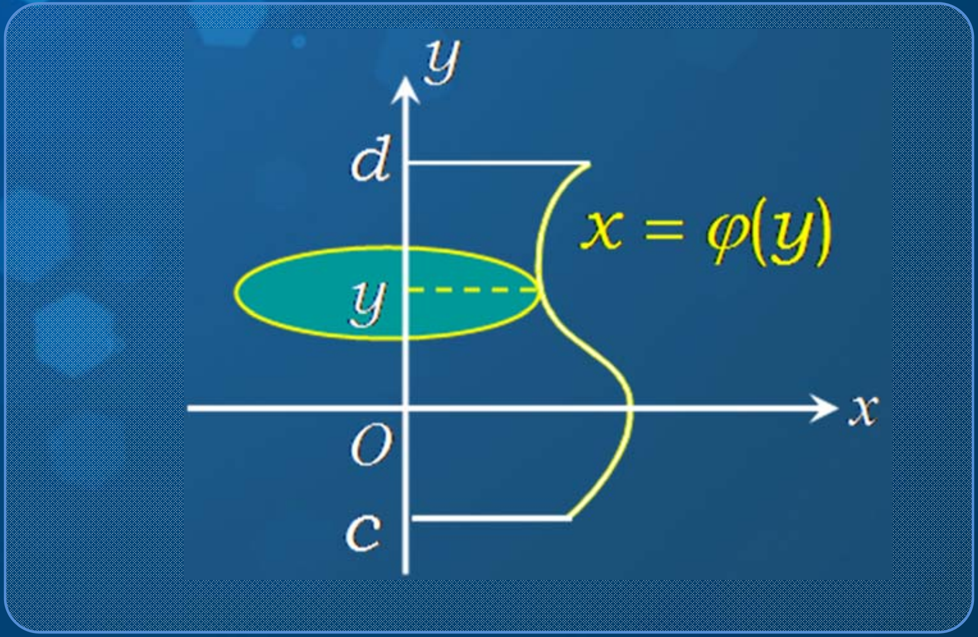
故旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$



$$A(x)=\pi f_2^2(x)-\pi f_1^2(x)$$

$$V=\int_a^b\left[\pi f_2^2(x)-\pi f_1^2(x)\right]\mathrm{d}x.$$



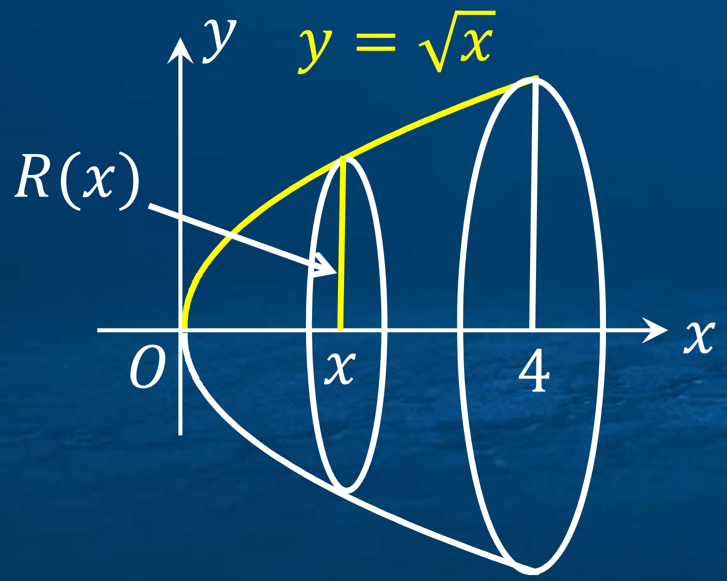
$$A(x)=\pi\varphi^2(y)$$

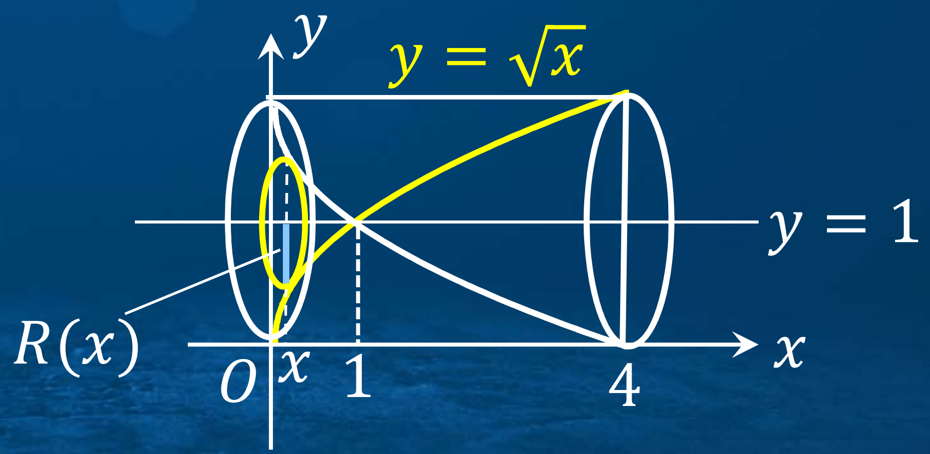
$$V=\int_c^d\pi\varphi^2(y)dy.$$

例6 设D是由曲线$y=\sqrt{x}$与直线$x=4$及x轴所围成的平面区域.

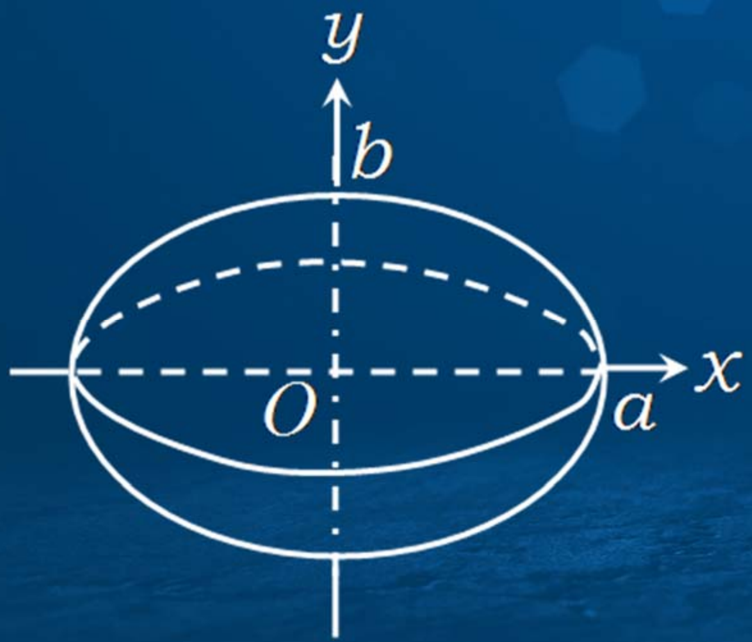
(1)求该平面图形D绕x轴旋转一周所得旋转体体积;

(2)求该平面区域D绕$y=1$旋转一周所得旋转体体积.





例7 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.



问题：

（1）旋转椭球面的面积？

（2）一般椭球体的体积？

例8 求圆形区域 $D: x^2+(y-b)^2 \le a^2 (b>a)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.