第48讲 微分方程模型与基本概念

算术 → 解方程 → 代数

“鸡兔同笼”问题

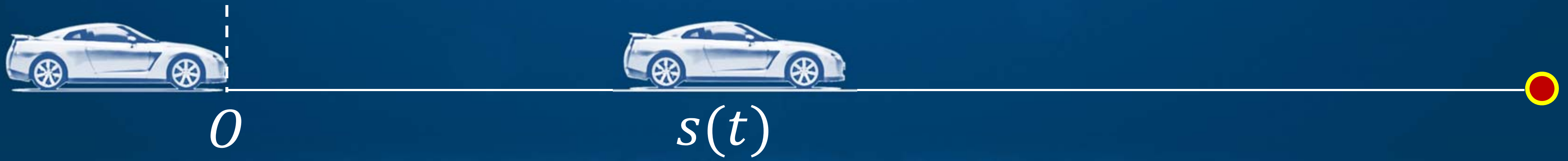
今有鸡兔同笼，
上有三十五头，
下有九十四足，
问鸡兔各几何？

设鸡有 x 只，则兔有$(35-x)$只，根据题意列方程得：

$$\boxed{2x+4(35-x)=94} \longrightarrow x=23$$

列车制动问题

列车在平直线路上以20m/s (相当于72km/h) 的速度行驶；当制动时列车获得加速度$-0.4\mathrm{m/s^2}$. 问开始制动后多少时间列出才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程？



微分方程 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4}$

$\boxed{\begin{aligned} s(0) &= 0 \\ s'(0) &= 20 \end{aligned}}$ 初值条件

微分方程建模

通解和特解

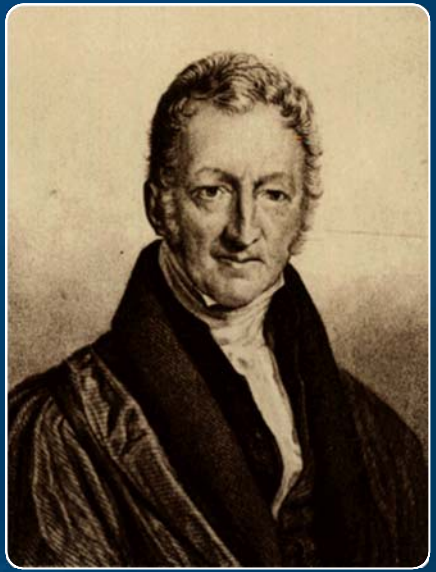
积分曲线

解的近似几何描述

数学建模 用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具.

马尔萨斯人口增长模型

英国人口学家马尔萨斯根据百余年的人口统计资料，在 1798 年提出了人口的增长率与该时刻人口总量成正比这一观点.



Thomas Robert Malthus

用$x(t)$表示某个国家t时刻的人口总数，记

$$r = r(t, x)$$

为人口增长率(即出生率与死亡率之差)，

马尔萨斯人口增长模型

由于在时间间Δt内人口的平均增长率(净增长率)为 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t \cdot x}$,

其中Δx为人口的增量，所以

$$r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t \cdot x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{即} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx.$$

指数模型

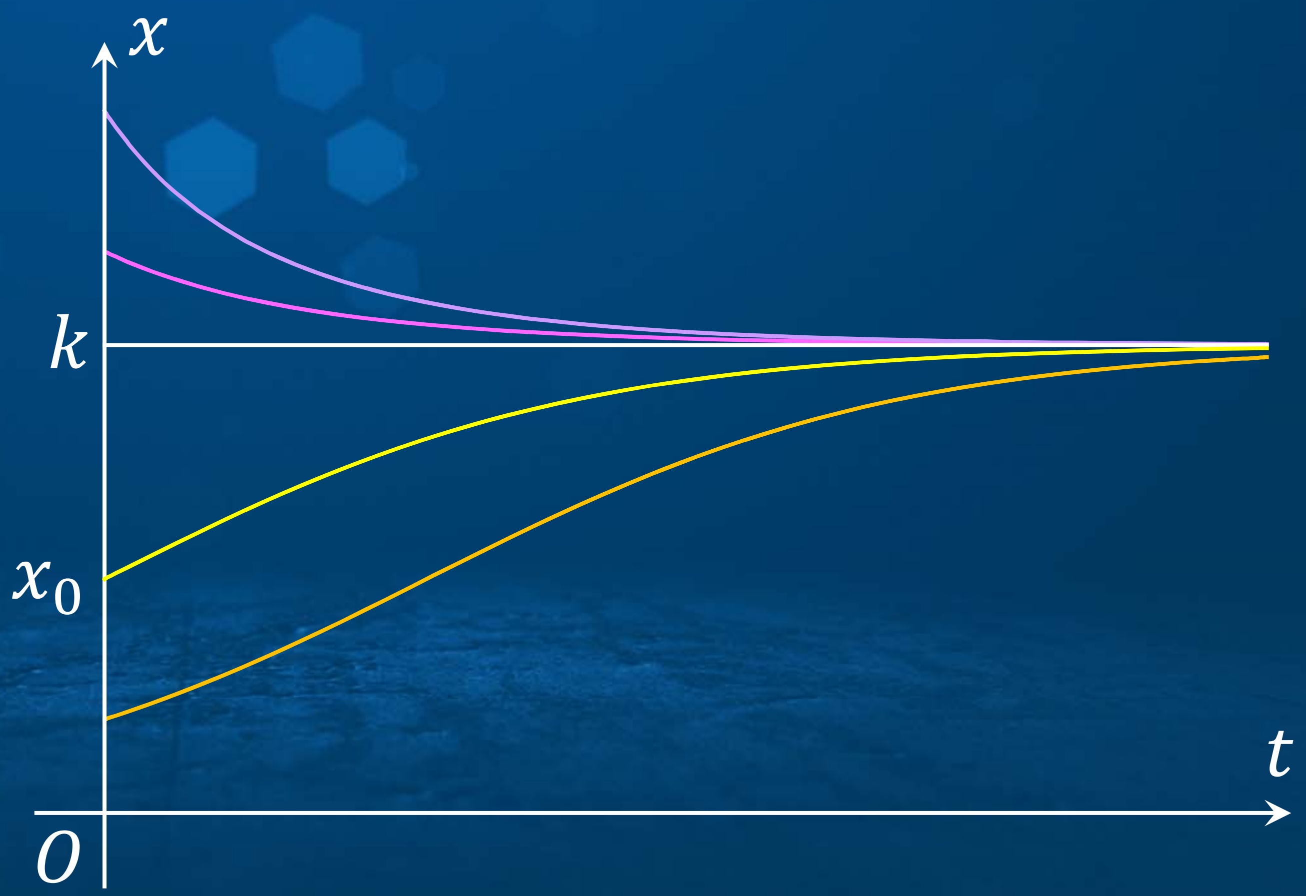
常微分方程模型：$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}}.$

马尔萨斯人口增长模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-\dfrac{x}{k}), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

密度制约模型



湖南长沙马王堆汉墓考古

根据原子物理学理论，放射性同位素碳-14(记作^{14}C)在t时刻的蜕变速度与该时刻^{14}C的含量成正比, 活着的生物通过新陈代谢不断地摄取生物体内的^{14}C (与空气中的^{14}C百分含量相同)．生物死亡之后立即停止摄取^{14}C，并且尸体中的^{14}C开始蜕变．假定生物死亡时体内^{14}C 的含量为 x_0 ．我们先研究死亡生物体内^{14}C含量随时间t的变化规律，并运用这一规律来推断出湖南长沙马王堆一号墓是哪个时代的墓葬．

【建模与求解】

假定生物死亡时体内^{14}C的含量为x_0，在t时刻生物体内^{14}C的含量为$x(t)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k\,x, \\ x|_{t=0} = x_0\end{cases}$$

其中$k > 0$为比例常数，负号则表示^{14}C的含量是不断递减的.

设^{14}C的半衰期为T，即$x(T) = \frac{x_0}{2}$，解得 $t = \dfrac{T}{\ln 2}\ln\dfrac{x'(0)}{x'(t)}$.

【建模与求解】 已知^{14}C的半衰期为$T=5568$年

出土时，测得出土木炭标本中^{14}C的平均原子蜕变速度

$$x'(t) = 29.78\text{次/分}$$

新砍伐木材烧成的木炭中 ^{14}C的平均原子蜕变速度

$$x'(0) = 38.37\text{次/分}$$

$$t = \frac{5568}{\ln 2}\ln\frac{38.37}{29.78} \approx 2036(\text{年})$$

➢ 由此推断出马王堆一号墓大约是2000多年前的汉墓.

定义1 含有自变量、未知函数以及未知函数导数或微分的关系式称为常微分方程，简称微分方程．

未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的阶．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=kx \quad (k\text{为常数})$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y^2$$

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a^2y=0\,(a\text{为常数})$$

二阶微分方程

一般的n 阶微分方程的形式(也称隐式表达式)为

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$$

特别，称下面的n阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n(x)y = f(x)$$

为 n 阶线性微分方程，其左端是关于未知函数 y 以及未知函数的各阶导数的线性表达式 .

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + y^2 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a^2 y = 0$$

定义2 设函数$y=\varphi(x)$在区间 I上连续，且有直到n阶的导数．如果将$y=\varphi(x)$及其各阶导数代入式

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$$

中，使之成为关于x在区间 I上的恒等式

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

则称$y=\varphi(x)$为上述方程在 I上的一个解．

例如，$y=e^{2x}$满足方程 $y''-4y=0$，称 $y=e^{2x}$ 为该方程的解.

定义3 n 阶微分方程$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$的，包含$n$个相互独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$的解

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n),$$

称为该微分方程的通解.

- 常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 互相独立的理解：

每一个常数C_j对解的影响是其他常数所不能代替的.

例如，对微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+a^2 y=0(a\neq 0)$，容易验证

$$y=\sin ax,\quad y=\cos ax,\ \underbrace{y=C_1\sin ax+C_2\cos ax}_{\text{通解}}$$

都是微分方程的解.

思考：

$$\boxed{\begin{aligned} &y=C_1\sin ax+C_2\sin ax\\ &y=(C_1+C_2)\sin ax\\ &y=C_1 e^{C_2}\cos ax\end{aligned}}$$

是通解吗？

定义3 微分方程$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$的通解中确定了任意常数的解称为一个特解.

例如,

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x + \sin x$$

都是$y'' + y = 0$的特解 .

初始条件：n阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \qquad (*)$$

的解在某一点$x = x_0$所满足的条件：

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^{(1)},\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (**)$$

方程(*)联合初始条件(**)式称为初值问题或柯西问题.

一阶微分方程的初值问题：$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$

显式解与隐式解

如果关系式$\Phi(x,y)=0$所确定的隐函数$y=\varphi(x),x\in I$为方程的解,

则称$\Phi(x,y)=0$是方程$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$的一个隐式解 .

对于n个相互独立常数的解$\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$的解为隐式通解, 而$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$则称为显示通解.

注: 显式解与隐式解统称为微分方程的解.

例如，对一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}$

显式解: $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

隐式解: $x^2+y^2=1$.

隐式通解: $x^2+y^2=C$.

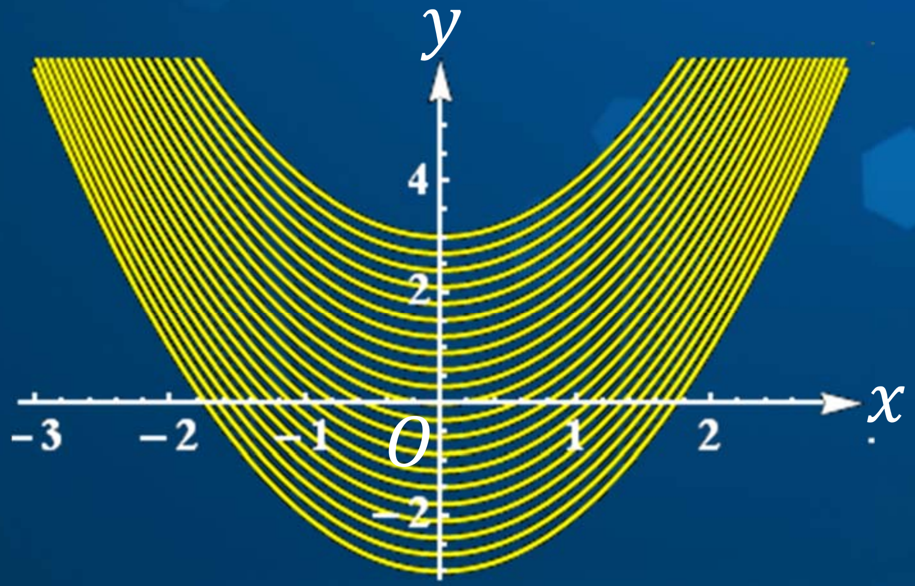
通常称微分方程的解对应的曲线为**积分曲线**.

初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的解对应过点 (x_0, y_0)的一条积分曲线，

该曲线在点(x_0, y_0) 处的切线的**斜率**为$f(x_0, y_0)$.

若不给定初始条件，微分方程的通解在几何上对应着一族积分曲线，该族曲线称为微分方程的**积分曲线族**．

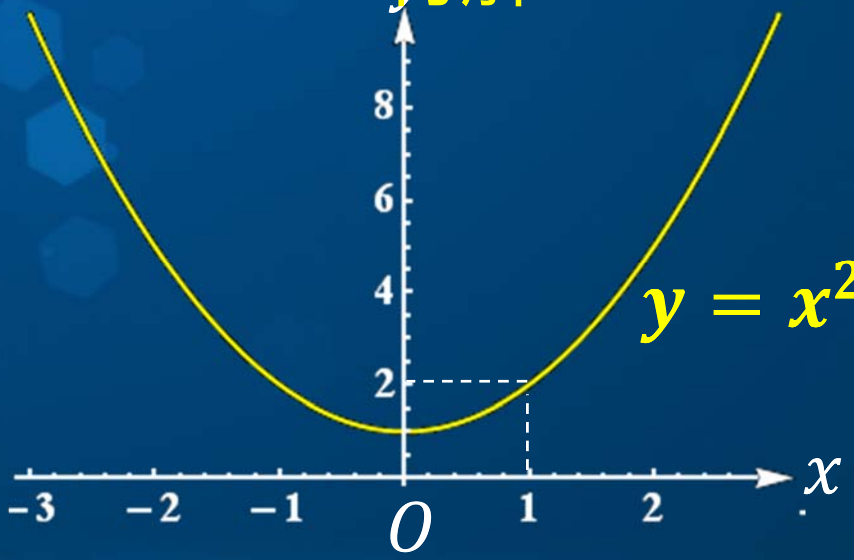
通解



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

$$\boldsymbol{y = x^2 + C}$$

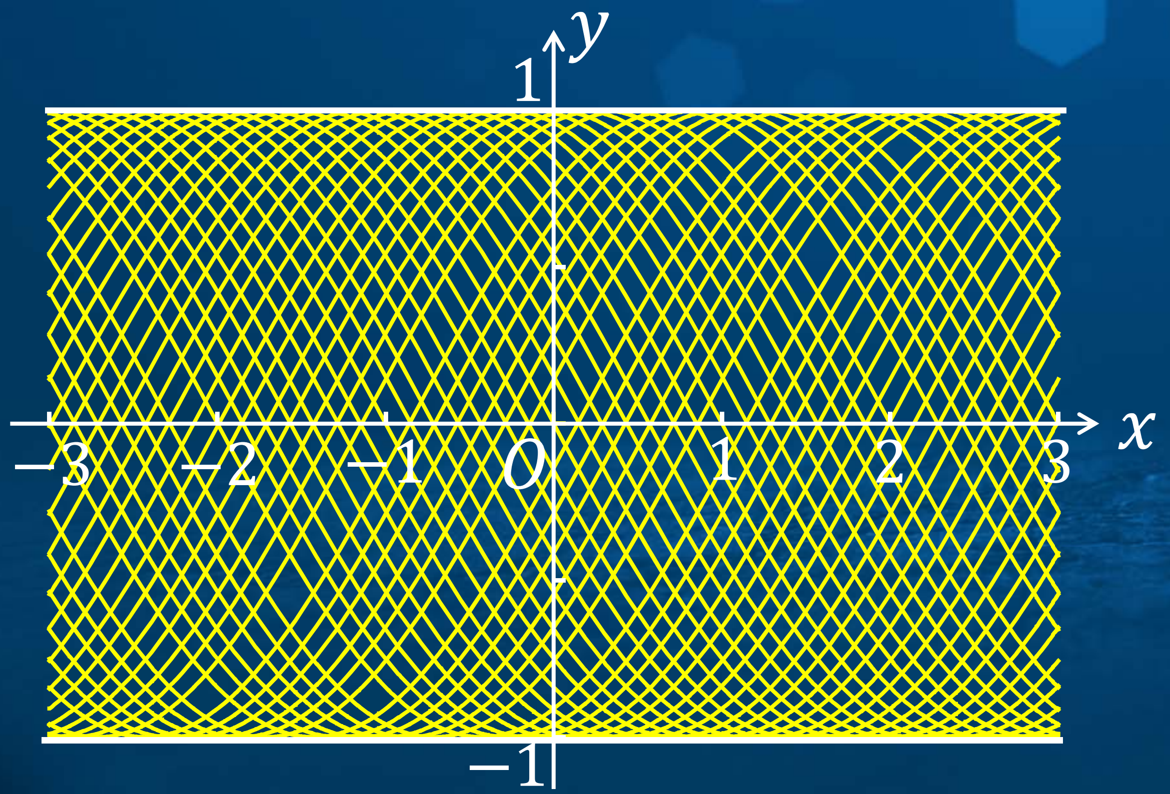
特解



$$\boldsymbol{y = x^2 + 1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y|_{x=1} = 2 \end{cases}$$

例1 验证$y(x)=\sin(x+C)$是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}$ 的通解，并讨论其积分曲线的分布情况 .

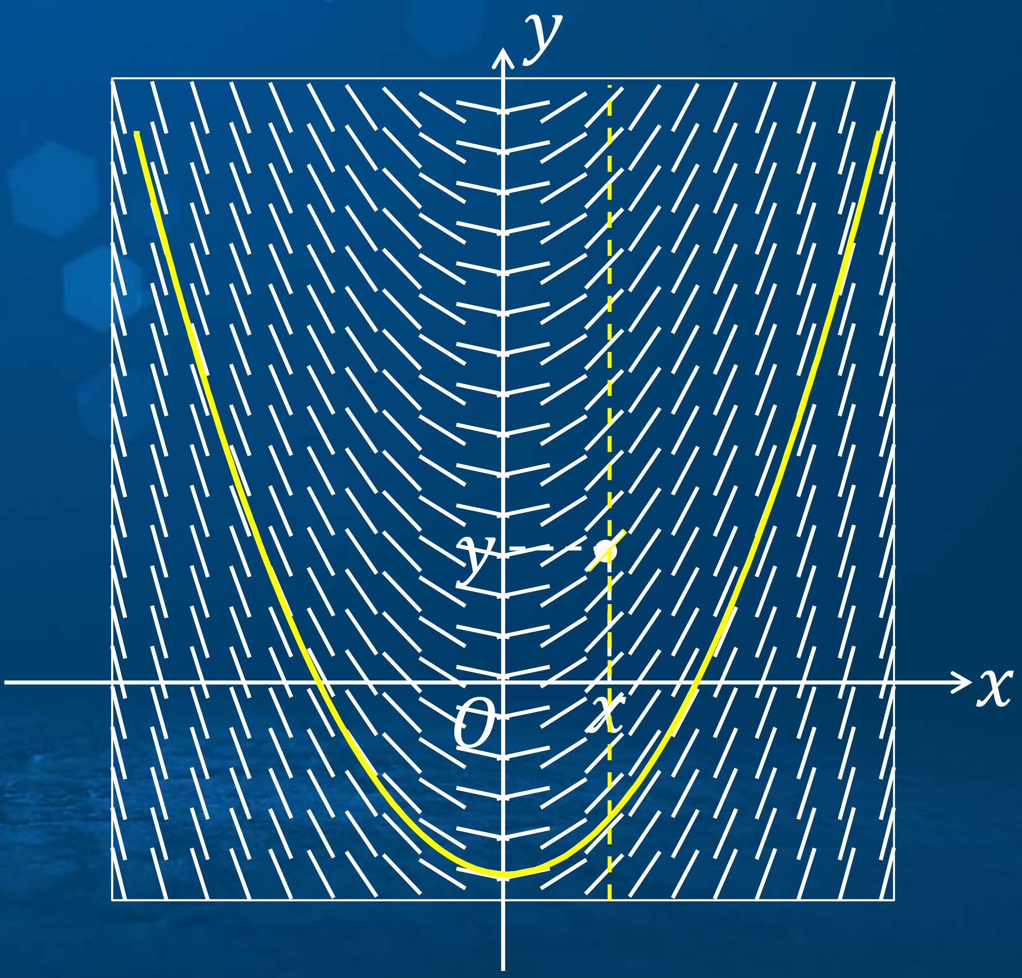


注1：微分方程的通解不一定包含微分方程的所有解.

注2：表明，有些初值问题的解可能不止一个，即解不是惟一的 .

考虑微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，若 $f(x,y)$的定义域为平面区域 D. 在 D 内一点(x,y)作斜率为$f(x,y)$的单位线段，则称该线段为点(x,y)的线素.

D内所有的线素构成由微分方程D内所有的线素构成由微分方程确定的线素场.



如果给每个线段加上指向x增加的方向箭头，则称带方向的线素场为由微分方程确定的方向场，这个方向场也称为有微分方程确定的向量场.