第61讲 空间曲线的弧长与曲率

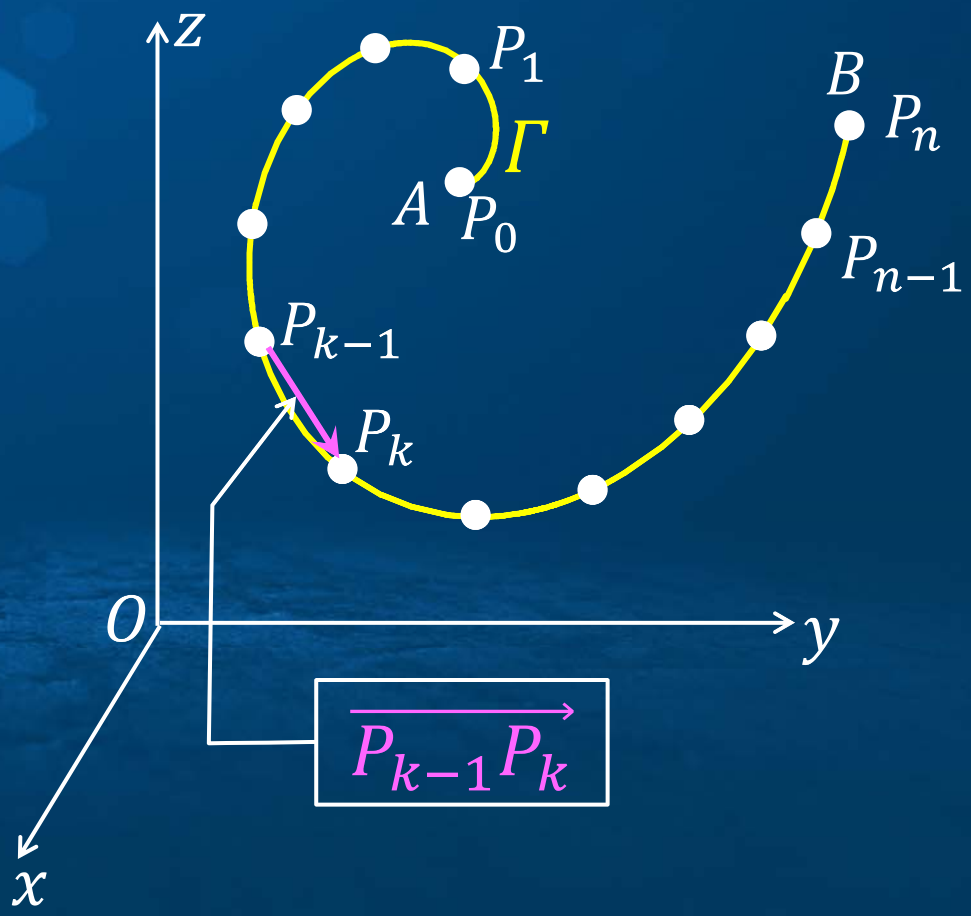
- 曲线弧长概念
- 空间曲线曲率及其计算
- 主法向量与副法向量

定义1 设$\Gamma=\overset{\frown}{AB}$为一条空间曲线，在其上依次插入个分点：

$$A=P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_{k-1},\ P_k,\ \cdots,\ P_{n-1},\ P_n=B$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}|P_{k-1}P_k|$，若$\lambda\to 0$时，$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|$ 趋于有限数s，且与对Γ上分点的插入方式无关，则称曲线Γ是**可求长的**，s 称为**曲线的长度**(或**弧长**)，

即 $$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|.$$



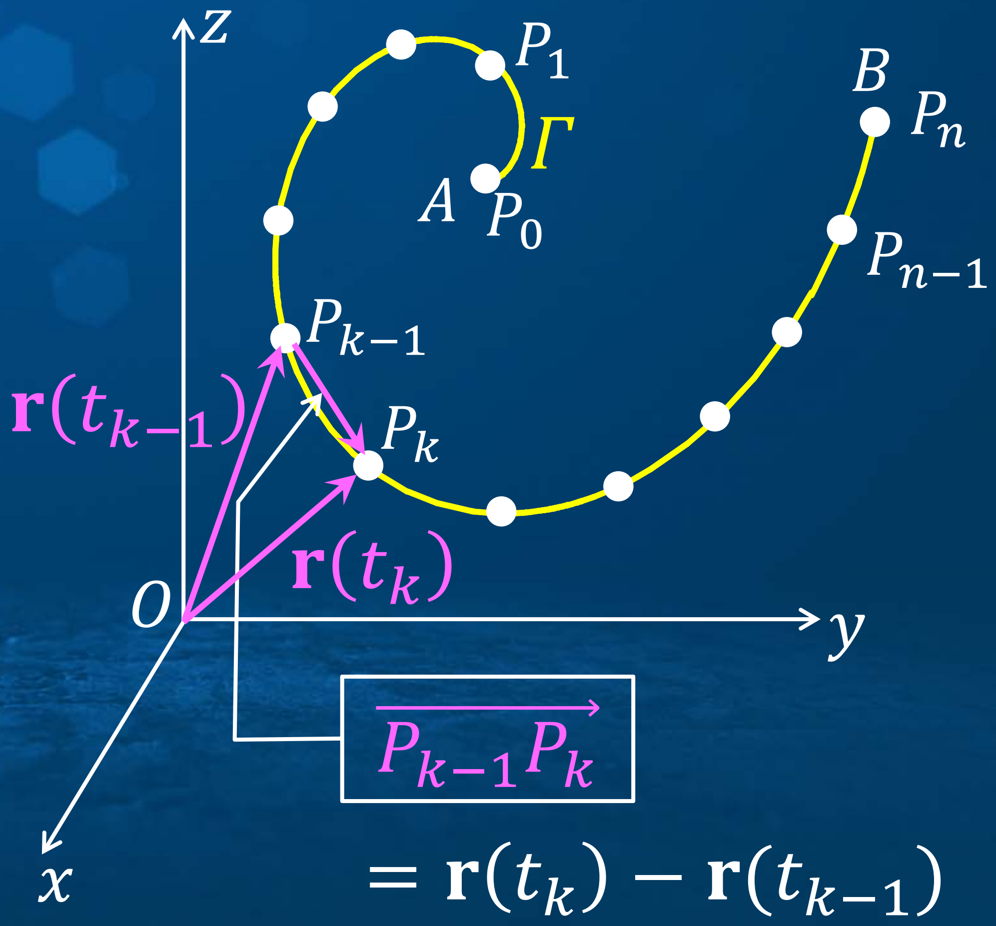
$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|.$$

假设 Γ：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)(a\le t\le b)$为光滑曲线，$\overrightarrow{OP_k}=\mathbf{r}(t_k)$，并且 $t_{k-1}<t_k(k=0,1,\cdots,n)$，则有

$$|P_{k-1}P_k|=|\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})|$$

$$=\left|\frac{\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right||t_k-t_{k-1}|$$

$$\approx|\mathbf{r}'(t_k)|\Delta t$$



$$s=\lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|}\qquad \sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|\approx\boxed{\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{r}'(t_k)|\Delta t}$$

记$d=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta t_k$，由$\mathbf{r}'(t)$的连续性及定积分的定义，有

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{r}'(t_k)|\Delta t_k=\int_a^b|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

对空间曲线Γ：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))(a\le t\le b)$, 有

$$s=\int_a^b|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left|\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)\right|\mathrm{d}t$$

弧长计算公式

$$\boxed{s=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t}$$

例1 计算螺旋曲线Γ: $\mathbf{r}(t)=\left(\cos t,\sin t,\frac{1}{3}t\right)$ $(0\le t\le 3\pi)$的弧长.

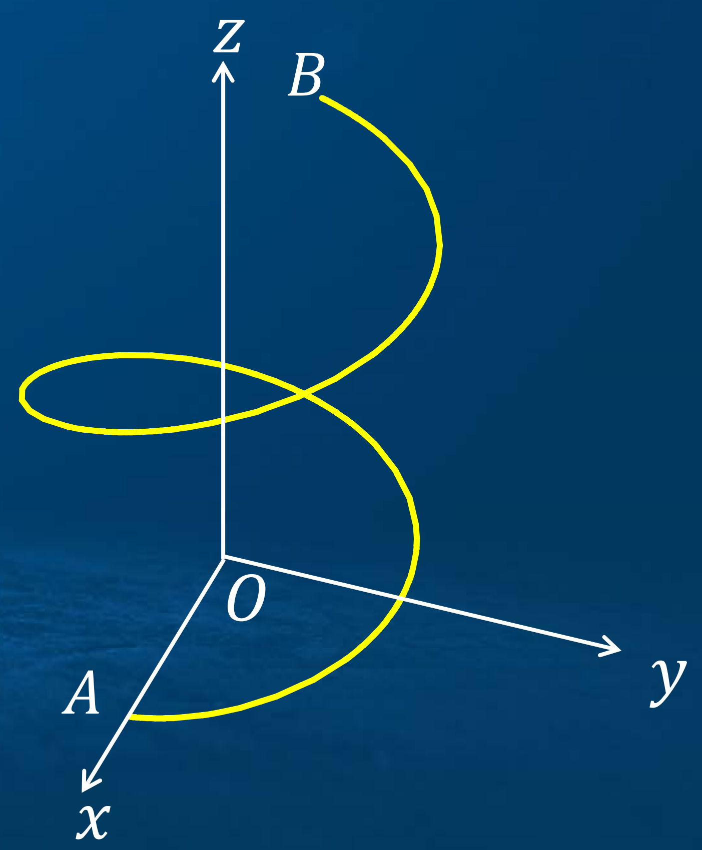
【例1解】

$$\mathbf{r}'(t)=\left(-\sin t,\ \cos t,\ \frac{1}{3}\right)$$

$$|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

所求弧长为

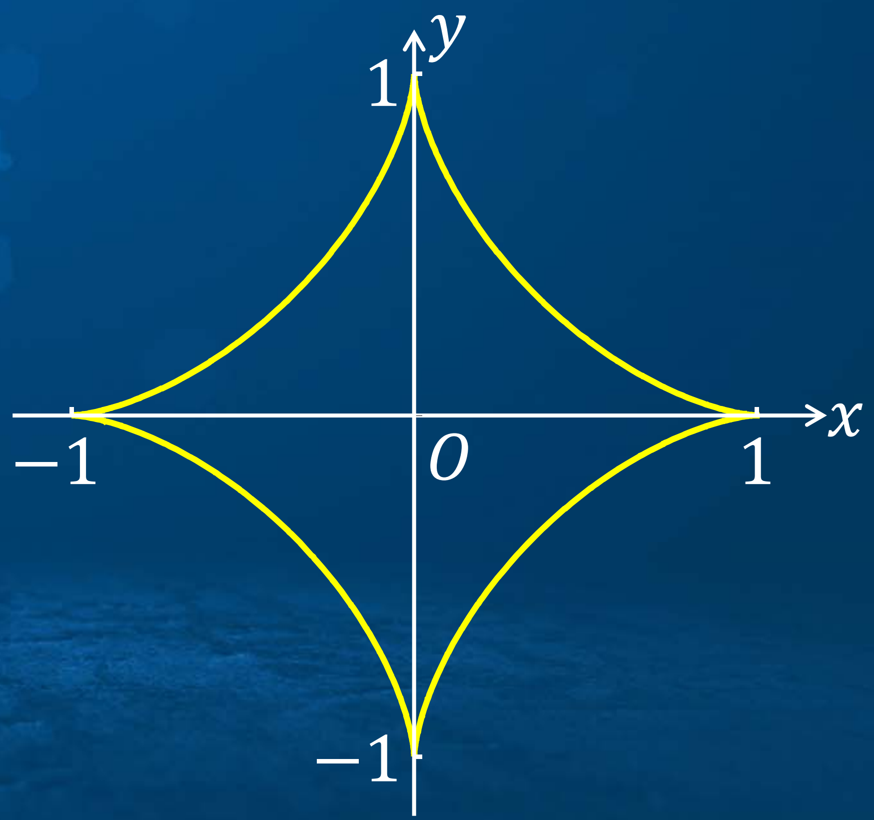
$$s=\int_0^{3\pi}|\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{3\pi}\frac{\sqrt{10}}{3}\mathrm{d}t=\sqrt{10}\pi$$



例2 求星形曲线$L: x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t\ (0 \leq t \leq 2\pi)$的弧长.

平面曲线弧长计算公式

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



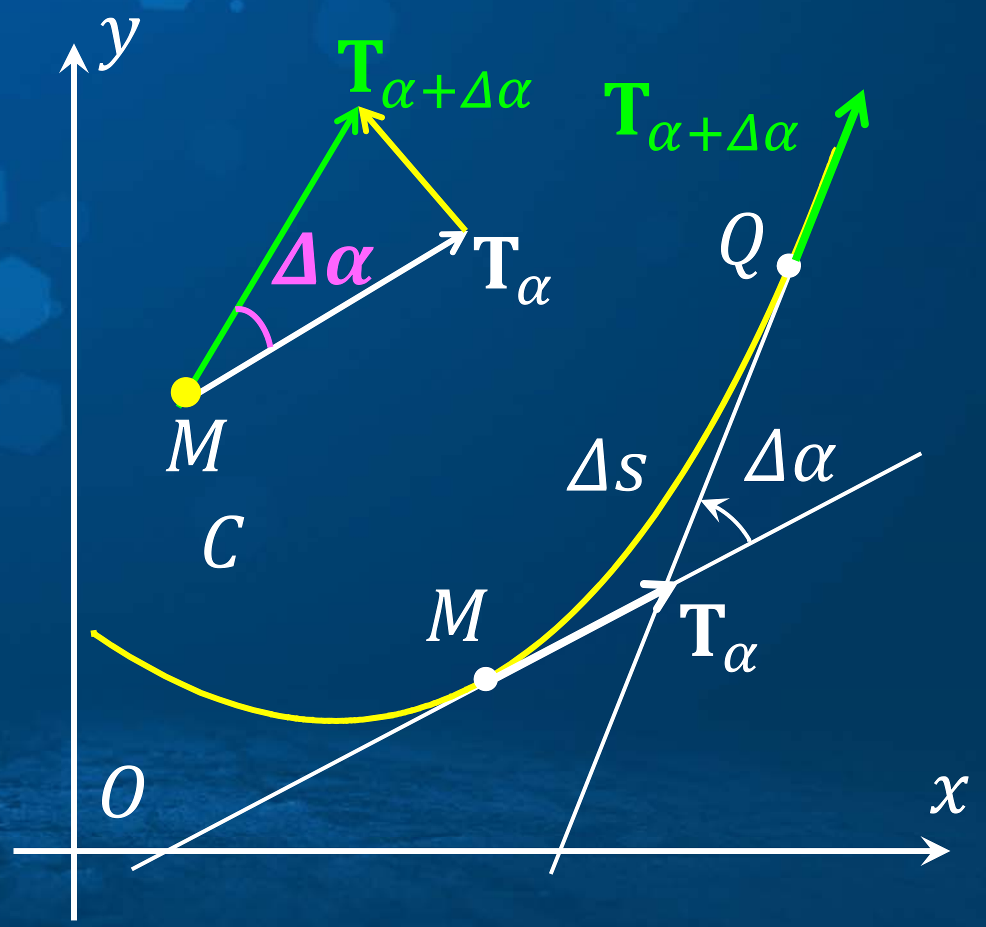
平面曲线的曲率：

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|.$$

如果$\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{T}_{\alpha+\Delta\alpha}$为单位切向量

$$|\mathbf{T}_{\alpha+\Delta\alpha}-\mathbf{T}_\alpha|=2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\sim\Delta\alpha$$

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\mathbf{T}_{\alpha+\Delta\alpha}-\mathbf{T}_\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right|.$$

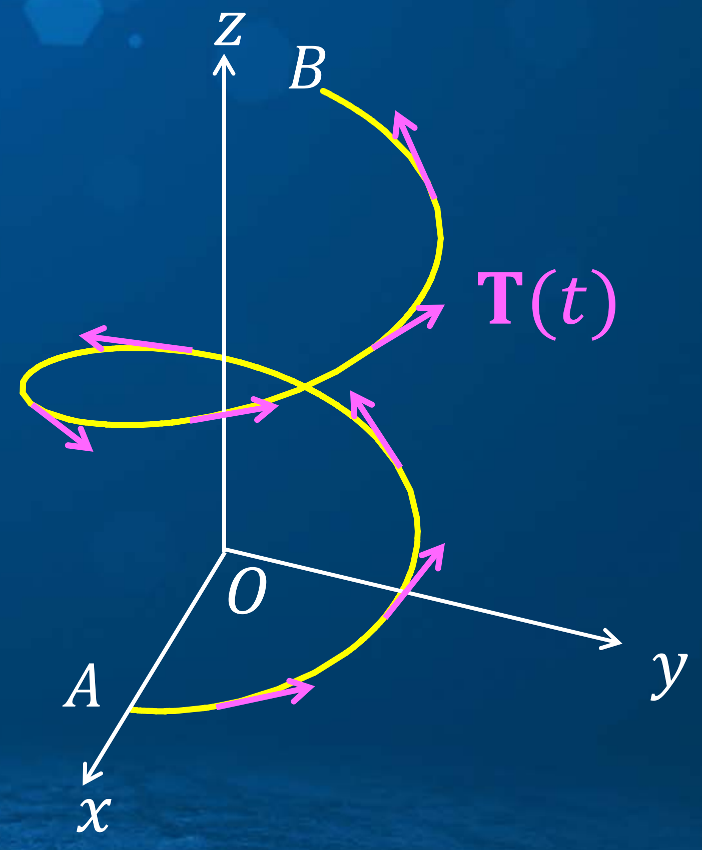


定义 设$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 为空间曲线，其中 $\mathbf{r}(t)$ 具有二阶导数，$\mathbf{T}(t)$为单位切向量，即

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

则曲线的曲率定义为

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$



曲率计算公式 $K = \dfrac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$

对光滑空间曲线Γ：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)(a\le t\le b)$,

定义基于点$\mathbf{r}(t_0)$的弧长函数：

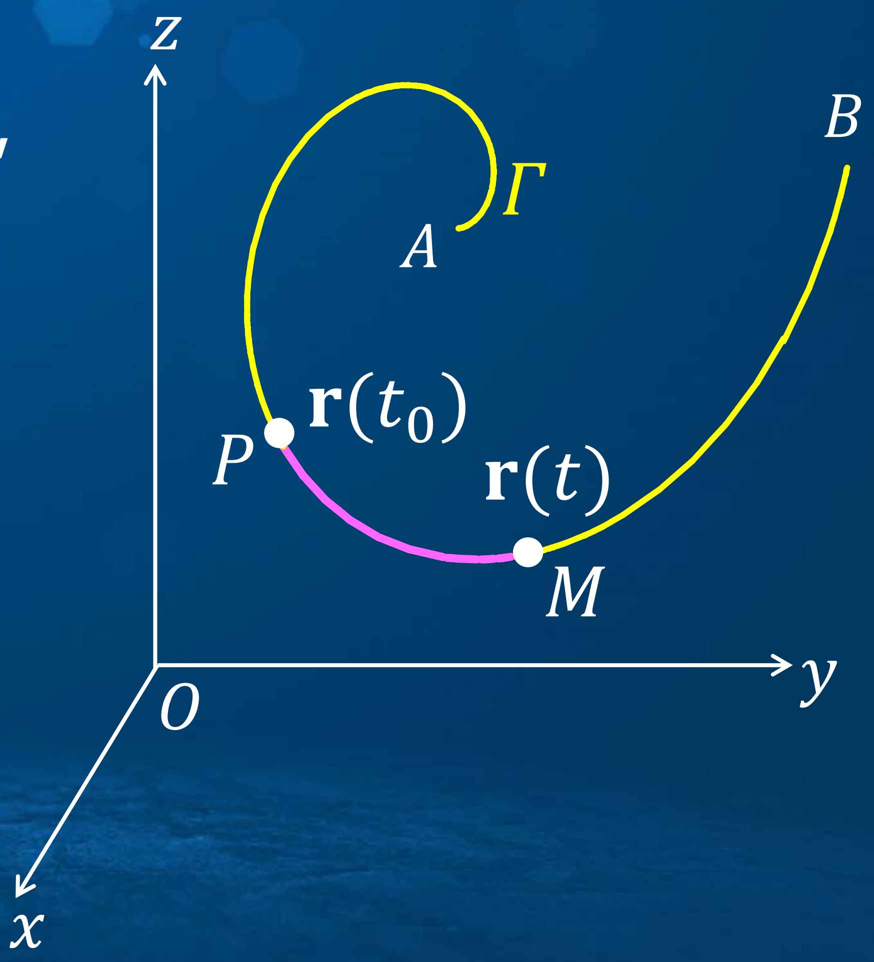
$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{r}'(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

$$s'(t)=|\mathbf{r}'(t)|>0$$

所以$s(t)$为单调增加函数.

光滑空间曲线Γ：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$

$$\mathbf{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$ 曲线的单位切向量



设光滑空间曲线方程为Γ：$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$，则有

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}(t)$$

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\mathbf{T}_{\alpha+\Delta\alpha} - \mathbf{T}_{\alpha}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right| = |\mathbf{r}''(s)|.$$

例3 试将螺旋线$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$表示成弧长$s$为参数的描述形式$\mathbf{r}(s)$，并验证 $K = |\mathbf{r}''(s)|$.

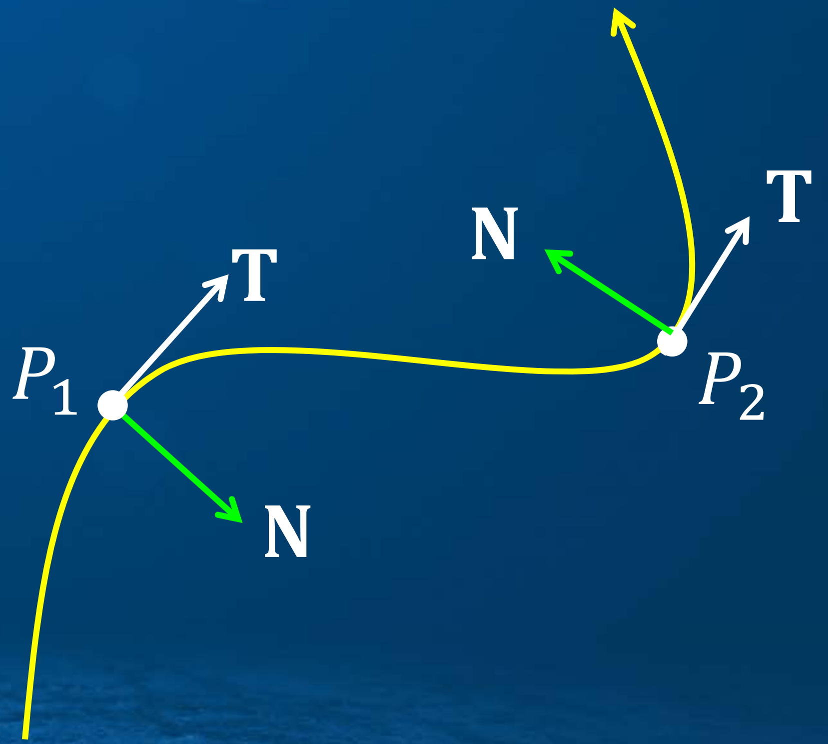
主单位法向量

设曲线由$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$确定，定义曲线的主单位法向量为

$$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

其中$\mathbf{T}(t)$为单位切向量

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



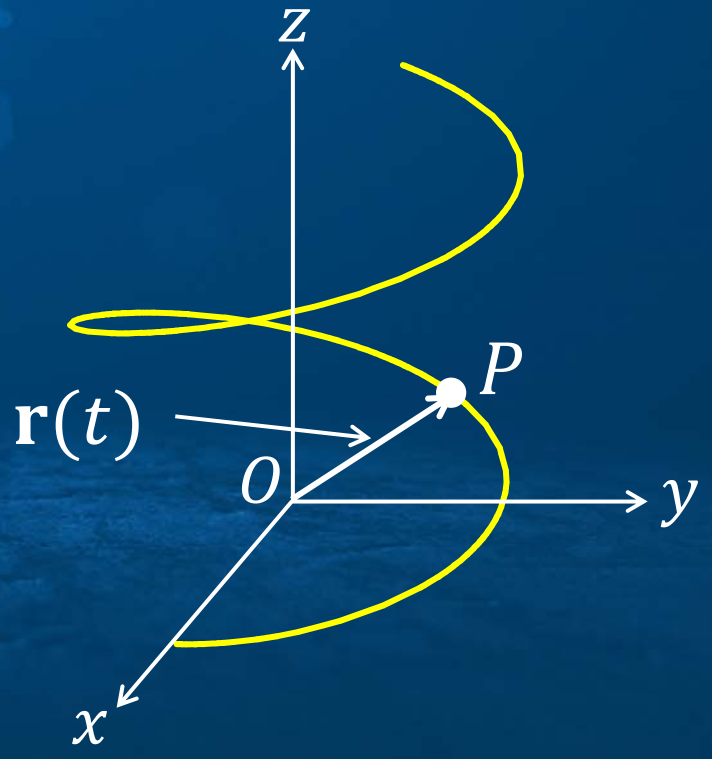
例4 试求螺旋线

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}\,(a,b\geq 0,a^2+b^2\neq 0)$$

的曲率K与主单位法向量$\mathbf{N}$.

$$K=\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

$$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$



副法向量

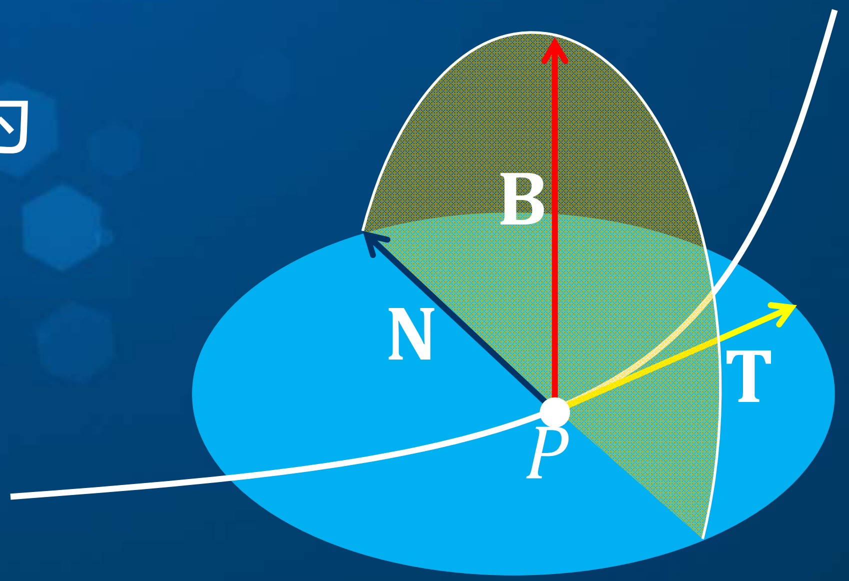
在$K \neq 0$的点，定义副法向量为

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}$$

$$= \mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\tau\mathbf{N}$$

$\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{N}$ ——曲线的挠率



$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$为右手单位正交系

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$为Frenet标架

曲率 $K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right|$

挠率 $\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{N}$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\mathbf{N} \Rightarrow |\tau| = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\right|$$