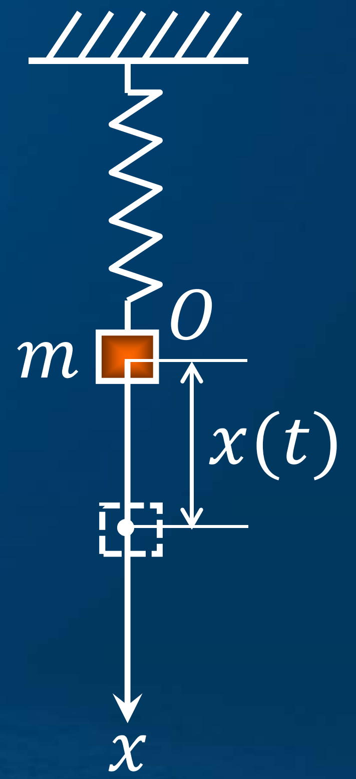
第51讲 高阶线性微分方程

质量为m的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上，当重力与弹性力抵消时，物体处于平衡状态，若用手向下拉物体使它离开平衡位置后放开，物体在弹性力与阻力作用下作往复运动，阻力的大小与运动速度成正比，方向相反．试确定物体的运动规律．



有阻尼自由振动微分方程: $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=0$

有阻尼强迫振动微分方程: $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=h\sin pt$

线性方程解的结构

降阶法与刘维尔公式

常系数齐次线性微分方程

n阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

二阶线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

一阶线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$的通解为：

$$y=\underbrace{Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解 } Y}+\underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 } y^*}$$

二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{*}$$

定理1 若函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程(*)的两个解，则它们的线性组合$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$也是该方程的解，其中$C_1$和$C_2$是任意常数．——叠加原理

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2)$$

$$= (C_1y_1'' + C_2y_2'') + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2)$$

$$= C_1(\underbrace{y_1'' + py_1' + qy_1}_{=0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + py_2' + qy_2}_{=0}) = 0$$

函数组的线性相关与线性无关

定义1 设$y_1, y_2, \cdots, y_n$是定义在区间 I 上的 n个函数，如果存在不全为零的n个常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ，使得对一切$x \in I$ ，都有

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$$

则称这 n个函数在区间I内线性相关 .

否则称为线性无关， 即若有常数$k_1, k_2, \cdots, k_n$使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$$

在区间 I恒上成立，则一定有$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

例1 （1）函数1，$\cos^2 x$，$\sin^2 x$在整个实轴$\mathbb{R}$上是线性相关的函数．

（2）函数1，x，x^2在任何区间(a,b)都是线性无关的.

➢ 两个函数在区间I上线性相关与线性无关的充要条件:

$y_1(x), y_2(x)$线性相关 $\rightleftarrows$ 存在不全为0的k_1，k_2，使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1} (无妨设 k_1 \neq 0)$$

$y_1(x), y_2(x)$线性无关 $\rightleftarrows$ $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

定理2(齐次线性方程通解结构) 若函数$y_1(x)$和 $y_2(x)$是二阶齐次线性方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$两个**线性无关**的特解，则

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)(C_1，C_2\text{是任意常数})$$

是该方程的通解.

例如, $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的两个特解，

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数，故方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (**)$$

定理3(非齐次线性方程通解结构)

设y^*是二阶非齐次线性方程(**)的一个特解，Y是相应的二阶齐次线性方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的通解，则

$$\boldsymbol{y = Y + y^*}$$

是二阶非齐次线性方程(**)的通解．

非齐次方程的特解

例如，$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \boxed{x}$是 $y'' + y = x$ 的通解.

定理4 设非齐次线性微分方程(**)的右端$f(x)$是几个函数之和，如

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x),$$

而$y_1^*(x)$和$y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x) \text{ 与 } y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是原非齐次线性微分方程的解.

非齐次线性微分方程的解的叠加原理

推广：如果$y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots,y_n(x)$是n阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的n个线性无关的解，那么，此方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中C_1，$C_2,\cdots C_n$为任意常数.

如果$y^*(x)$是n阶非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

的一个特解，则此方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)+y^*(x).$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

求对应齐次方程通解

求二阶非齐次方程通解

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

求非齐次方程特解

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

设$y_1(x)$是齐次线性微分方程(*)的的非零特解

求方程的另一解$y_2(x)$且与$y_1(x)$线性无关 ——降阶法

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}\mathrm{d}x$$

刘维尔公式

二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}\mathrm{d}x$$

刘维尔公式

例2 已知微分方程$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$的一个特解为

$y_1 = e^x$，求该方程的通解．

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0(p, \ q\text{为常数}) \quad ①$$

设$y = e^{rx}$ (r为待定常数)为上面微分方程的解

$$\Leftrightarrow \ (r^2 + pr + q)\, e^{rx} = 0 \quad \Leftrightarrow \ r^2 + p\,r + q = 0 \quad ②$$

称②为微分方程①的特征方程，其根称为特征根.

方程$r^2 + p \quad r + q = 0$根的三种情形：

不同实根、相同实根、复数根

二阶常系数齐次线性微分方程：$y'' + py' + qy = 0$(p，q为常数)

1. 特征方程: $r^2 + pr + q = 0$,

2. 特征根: r_1, r_2

3. 根据特征根写出微分方程的通解：

特征根	通解
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例3 求微分方程$y'' - y' - 2y = 0$的通解．

例4 求方程$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = 0$满足初始条件

$$s|_{t=0} = 4,\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = -2$$

的特解．

例5 求微分方程$y'' - 2y' + 5y = 0$的通解．