第74讲 极值的应用

第74讲 极值的应用——问题的引入


165838 北京时 005838
00 14 74
003404

第74讲 极值的应用——问题的引入

多个约束条件的极值

条件极值方法的应用

最小二乘法

求二元函数$z=f(x,y)$在条件$g(x,y)=0$下的极值的方法：

(1) 代入法，直接转换为一元函数的无条件极值；

(2) 拉格朗日乘子法.

构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

解如下方程组求驻点 .

$$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0 g_x'(x_0,y_0)=0, \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0 g_y'(x_0,y_0)=0, \\ g(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

- 多个约束条件的条件极值问题

求函数$u=f(x,y,z)$在条件 $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$, 下的极值.

构造拉格朗日函数

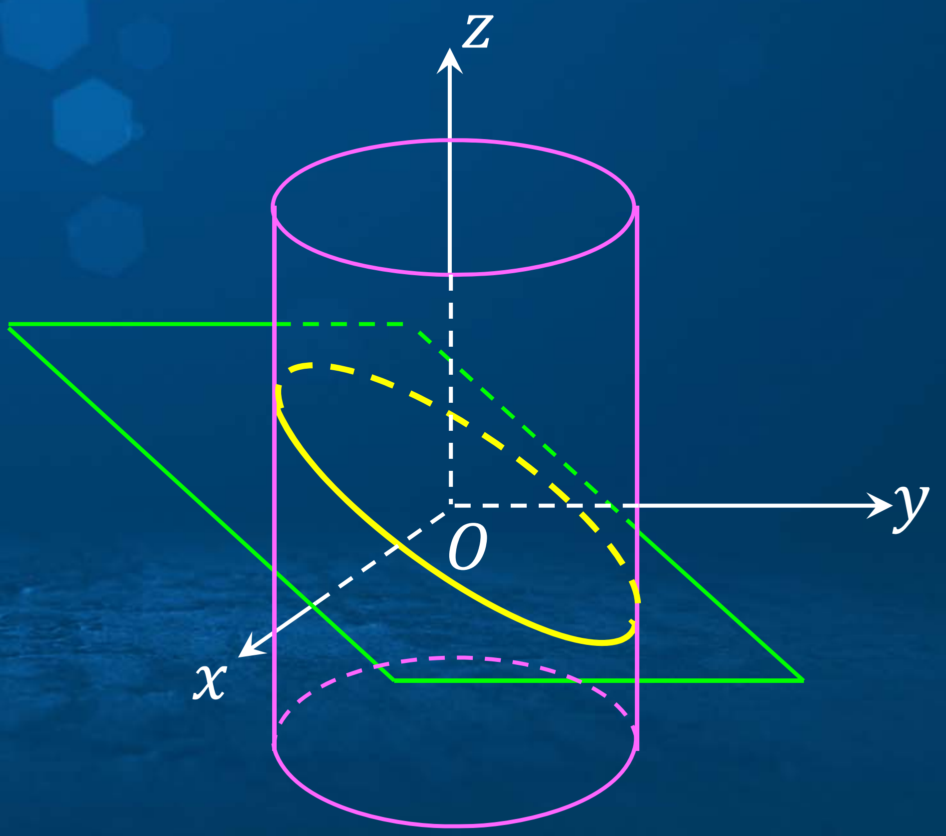
$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

$$\nabla L=\mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda g'_x(x,y,z)+\lambda h'_x(x,y,z)=0, \\ f'_y(x,y,z)+\lambda g'_y(x,y,z)+\lambda h'_y(x,y,z)=0, \\ f'_z(x,y,z)+\lambda g'_z(x,y,z)+\lambda h'_z(x,y,z)=0, \\ \quad g(x,y,z)=h(x,y,z)=0. \end{cases}$$

例1 平面$x+y+z=0$交圆柱面$x^2+y^2=1$成一个椭圆，求这个椭圆上离原点最近和最远的点．

椭圆交线的半长轴和半短轴分别为

$\sqrt{3}$ 和 1.



- 求函数在有界闭区域上的最值

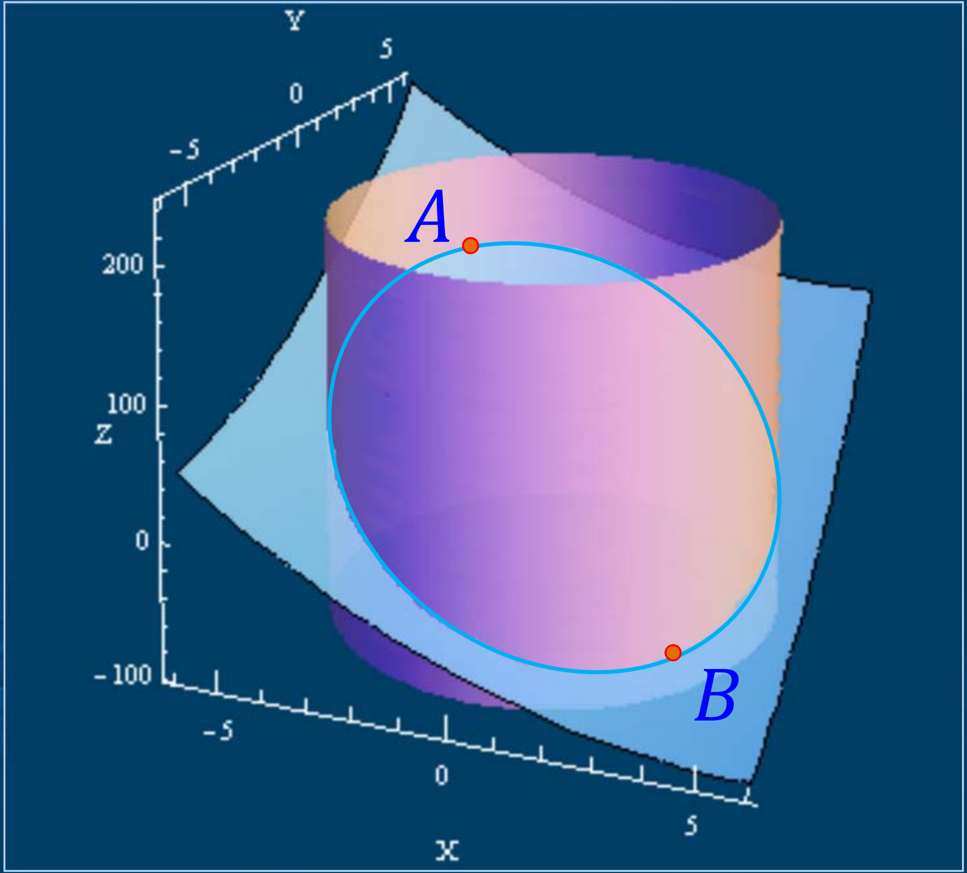
例2 求函数

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

在区域

$$D: x^2 + y^2 \le 25$$

上的最大值和最小值．



- 证明不等式

例3 总和等于常数$C(C>0)$的 n 个非负实数，它们的乘积 P 的最大值为多少？

条件极值问题：

求n元函数$P=x_1x_2\cdots x_n$对如下条件的极大值

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=C,\ \ x_i\geq 0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$P_{\max}=\left(\frac{C}{n}\right)^n \Longrightarrow \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

A-G不等式

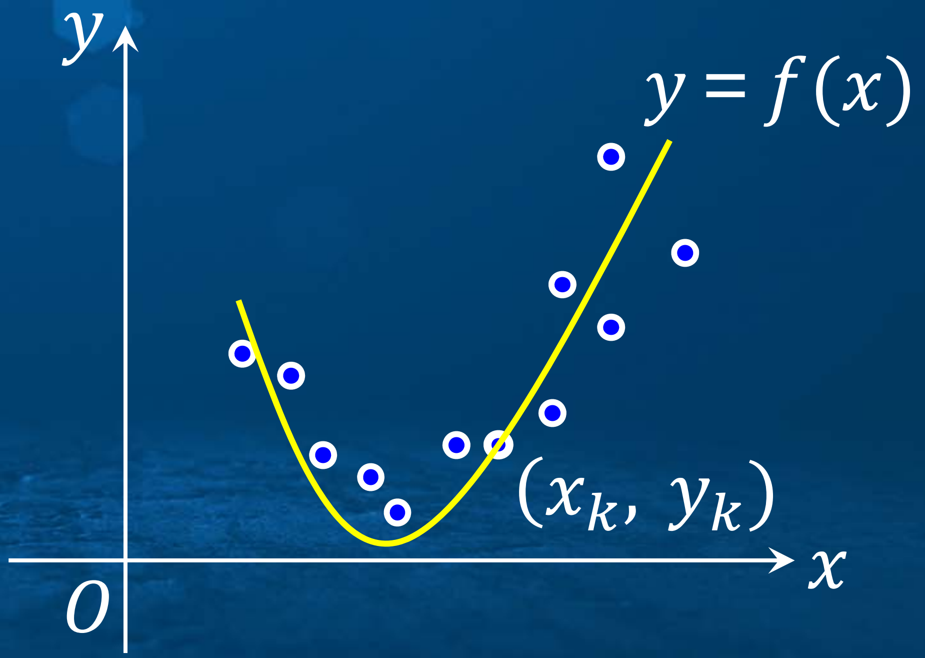
通过对试验数据进行分析，找出数据满足或者近似满足的关系式的过程称为数据拟合，拟合出来的关系式通常称为经验公式．

已知一组实验数据

$(x_k, y_k)\ (k = 0, 1, \cdots, n)$,

求它们的近似函数关系

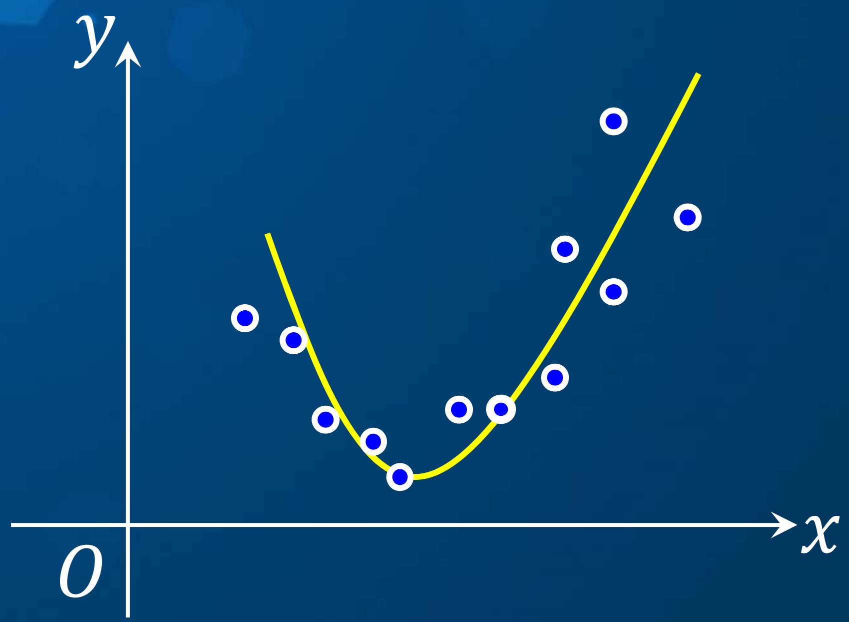
$$y = f(x).$$



需要解决两个问题:

1. 确定近似函数的类型

- 根据数据点的分布规律
- 根据问题的实际背景



2. 确定近似函数的标准

- 实验数据有误差，不能要求$y_k = f(x_k)$.
- 偏差$r_i = y_i - f(x_i)$，可由偏差平方和最小来确定函数$f(x)$.

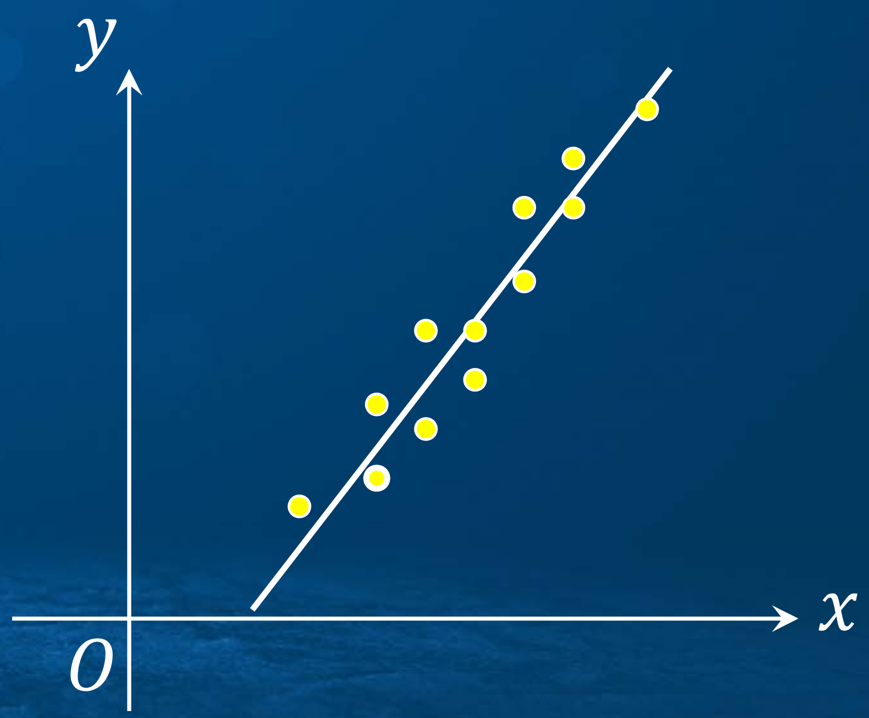
$$\min \sum_{i=0}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

最小二乘法

当数据点分布近似一条直线时，确定 a, b ，使$y = ax + b$满足

$$M(a,b) = \min_{a,b} \sum_{k=0}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$$

令
$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -2\sum_{k=0}^{n}(y_k - ax_k - b)x_k = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = -2\sum_{k=0}^{n}(y_k - ax_k - b) = 0 \end{cases}$$



解此线性方程组即得 a, b.

当数据点分布近似一条直线时，确定 a, b ，使$y = ax + b$满足

$$M(a,b) = \min_{a,b} \sum_{k=0}^{n} (y_k - a x_k - b)^2$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -2\sum\limits_{k=0}^{n}(y_k - a x_k - b)x_k = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = -2\sum\limits_{k=0}^{n}(y_k - a x_k - b) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right)b = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right)a + (n+1)b = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \end{cases}$$

解此线性方程组即得 a, b.　　$y = ax + b$ 称为回归直线

数据点 $(x_k, y_k)(k=0,\ 1,\ \cdots, m)$ $\quad p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ (n\le m)$

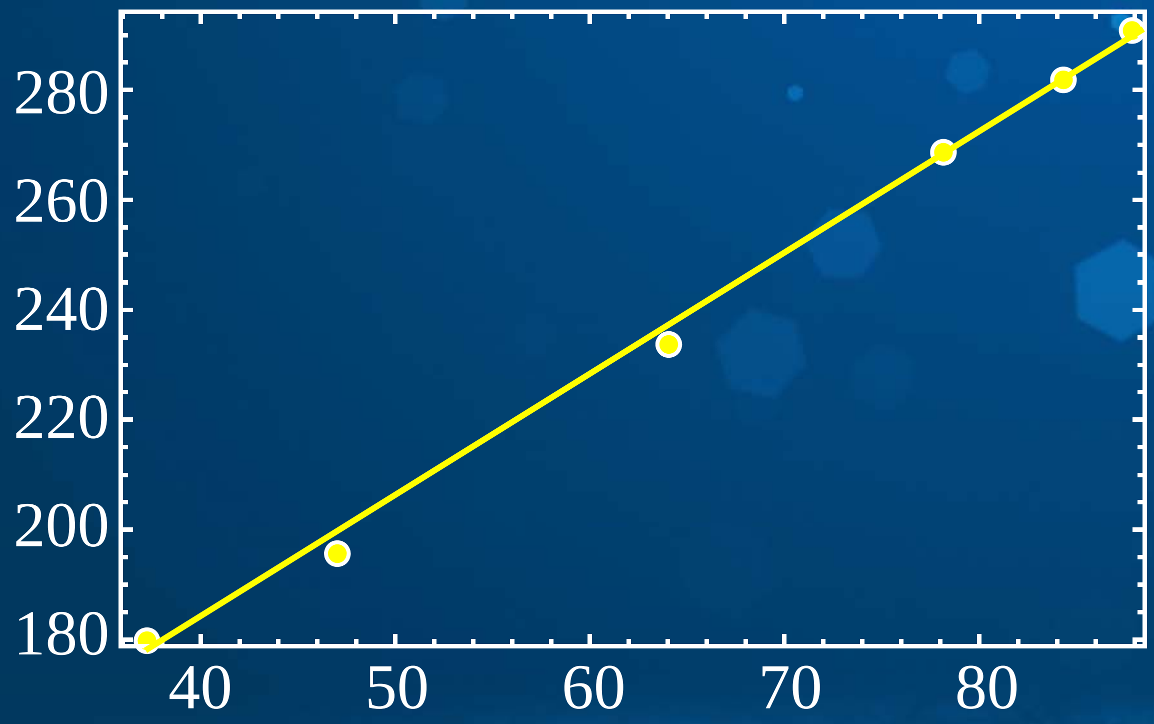
$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Leftarrow \begin{pmatrix} m+1 & \sum_{k=0}^{m} x_k & \cdots & \sum_{k=0}^{m} x_k^n \\ \sum_{k=0}^{m} x_k & \sum_{k=0}^{m} x_k^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{m} x_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{m} x_k^n & \sum_{k=0}^{m} x_k^{n+1} & \cdots & \sum_{k=0}^{m} x_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} x_k \\ \sum_{k=0}^{m} x_k y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{m} x_k^n y_k \end{pmatrix}$$

最小二乘n 次拟合多项式

例4 假设某种合金的含铅量百分比(%)为p，其熔解温度为$\theta\,^0C$，由试验观测到的数值如下表.

$p(\%)$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
其熔解温度$\theta\,^0C$	181	197	235	270	283	292

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a+\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)b=\sum_{k=0}^{n} x_k y_k \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a+(n+1)b=\sum_{k=0}^{n} y_k$$



代入数据得：

$$\sum_{i=1}^{6} p_i^2 = 28365.28,\quad \sum_{i=1}^{6} p_i = 396.6,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \theta_i p_i = 101176.3,\quad \sum_{i=1}^{6} \theta_i = 1458$$

$$\begin{cases} 28365.28\,a + 396.6\,b = 101176.3, \\ 396.6\,a + 6\,b = 1458. \end{cases}$$

解得：$a = 2.234, b = 95.35$

经验公式为: $\theta = 2.234p + 95.35$

通过计算确定某些经验公式类型的方法:

观测数据: (x_i, y_i) $(i = 0, 1, \cdots, n)$

令$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

(1) 若$\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx$定值，则考虑 $y = ax + b$

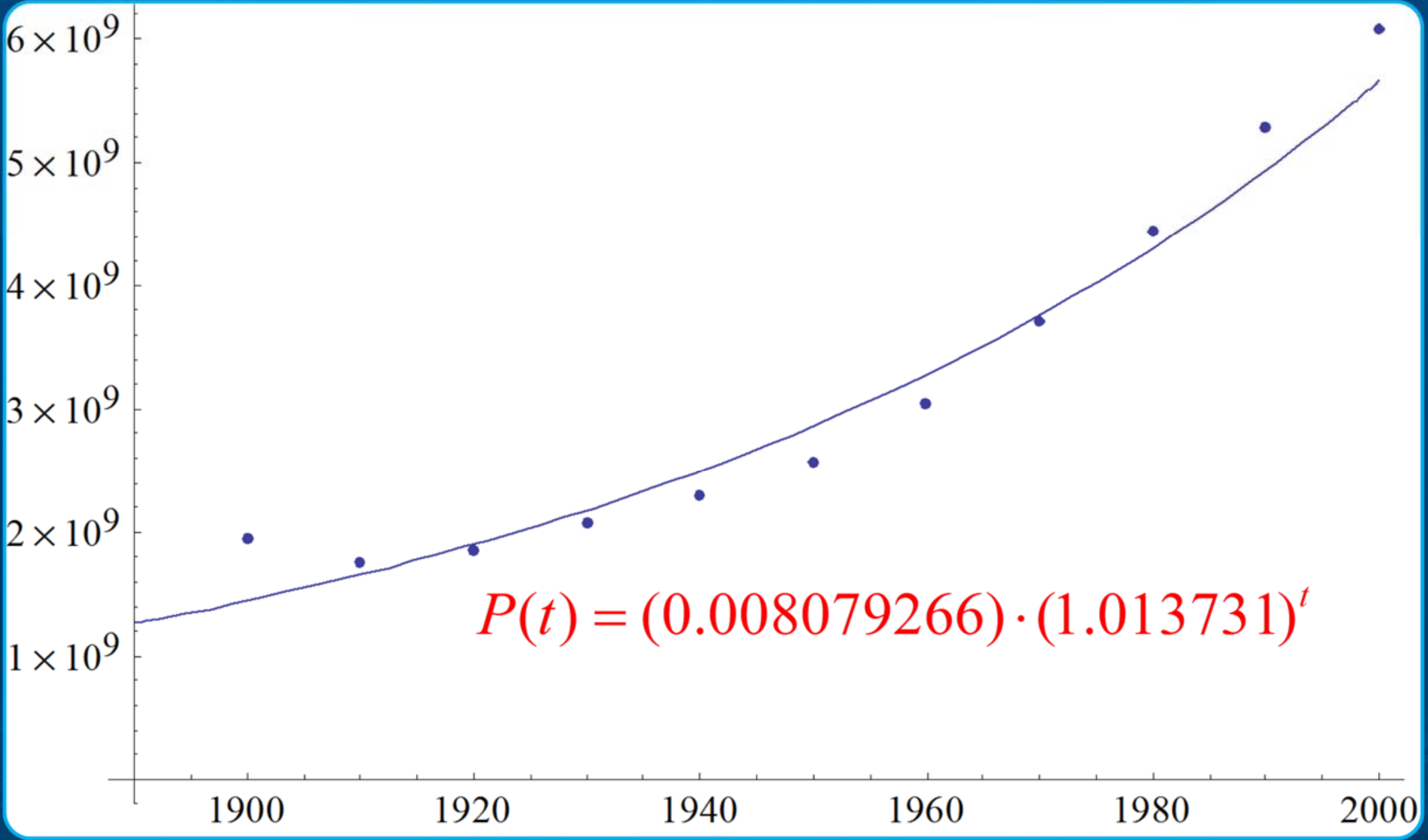
(2) 若$\dfrac{\Delta \ln y_i}{\Delta \ln x_i} \approx$定值，则考虑 $y = ax^b$

转化为 $\ln y = b\ln x + \ln a$

(3) 若$\dfrac{\Delta \ln y_i}{\Delta x_i} \approx$定值，则考虑 $y = ae^{bx}$

转化为 $\ln y = bx + \ln a$

用最小二乘法确定a, b



幂函数拟合二十世纪全世界人口数量的变化