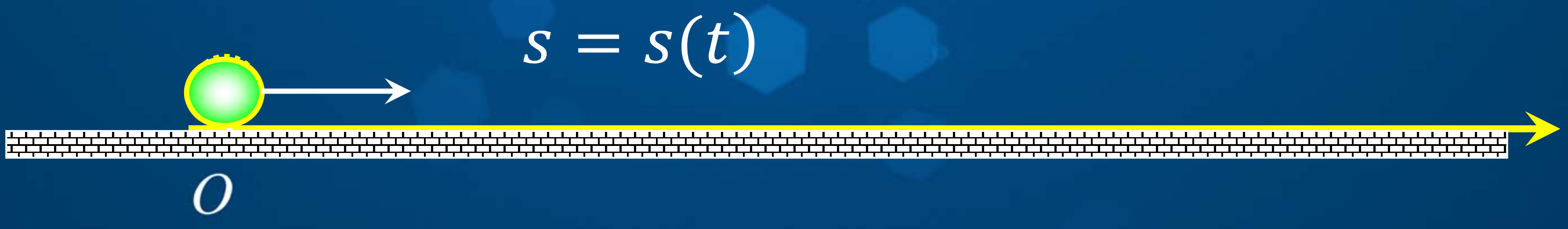
第24讲 高阶导数

质点作变速直线运动的速度与加速度

设质点作变速直线运动的路程 s 关于时间 t 的函数为$s = s(t)$



- 质点在 t 时刻的瞬时速度为

$$v(t) = s'(t)$$

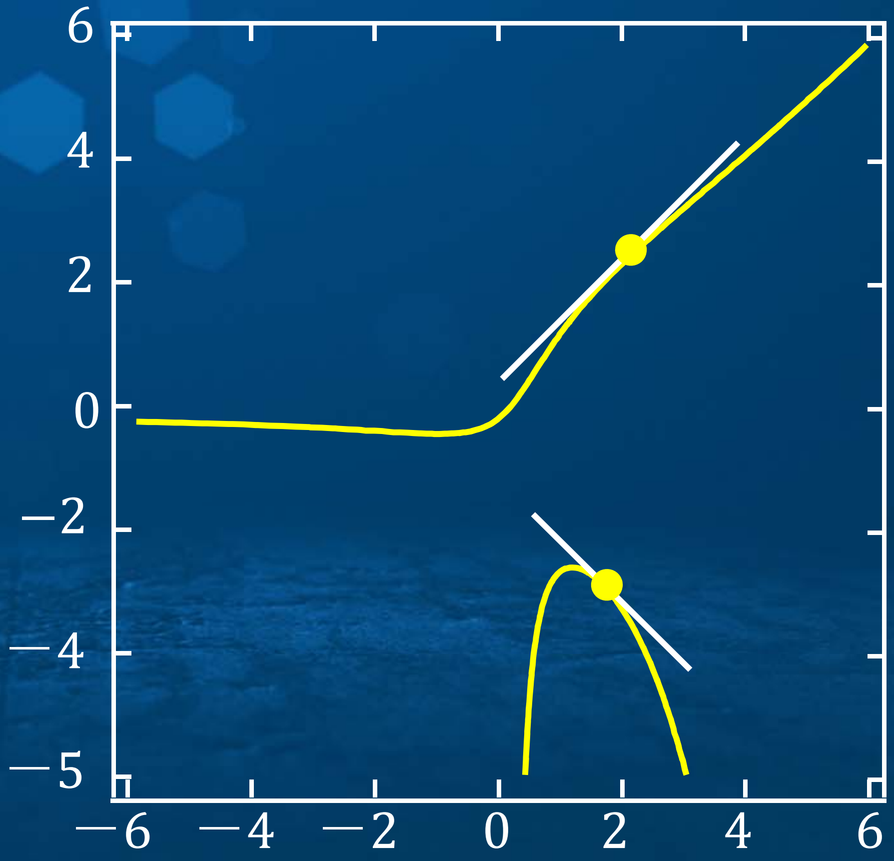
- 质点在 t 时刻的瞬时加速度为

$$a(t) = v'(t) = [s'(t)]'$$

直角坐标方程所确定函数的导数

$$e^{y}-e^{x}-xy=0$$

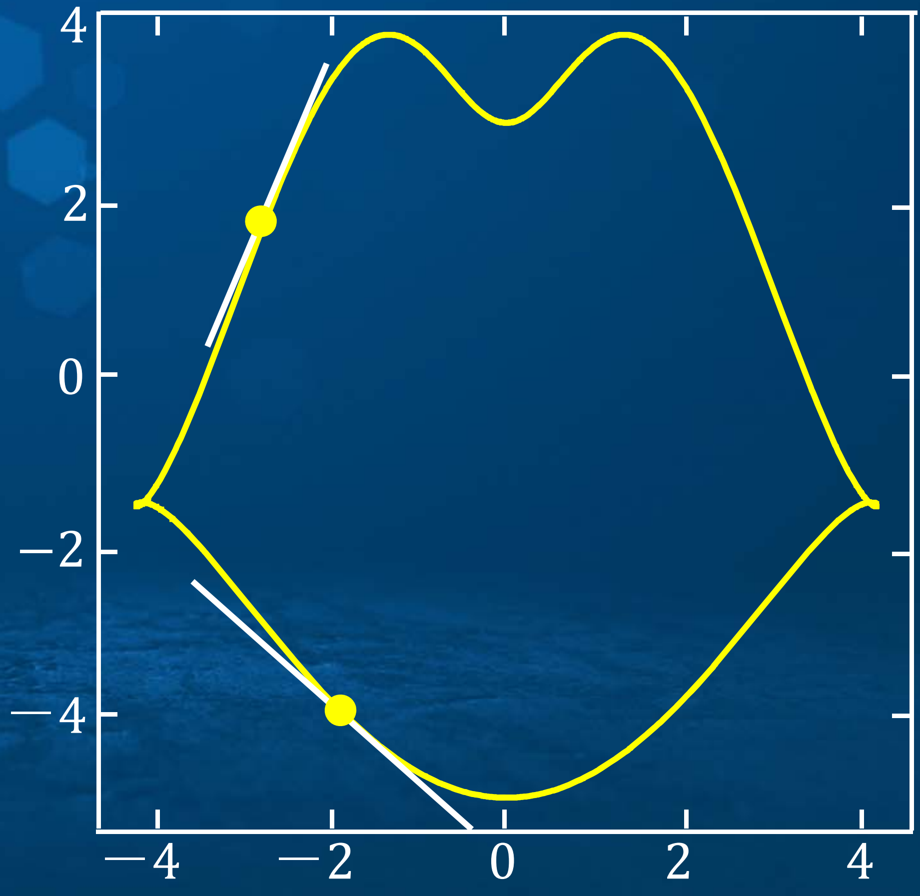
$$k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=?$$



参数方程所确定函数的导数

$$\begin{cases} x = 4\sin t - \sin 2t, \\ y = 4\cos t - \cos 4t \end{cases} (0 \le t < 2\pi)$$

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ?$$



高阶导数

隐函数的导数

参数方程确定函数的导数

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，$x\in(a,b)$，若极限

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x 处二次可导，该极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x 处的二阶导数，记为 $f''(x)$ 或 y'' .

函数 $y=f(x)$ 在 x 处的三阶导数

$$f'''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}$$

函数 $y=f(x)$ 在 x 处的 n 阶导数

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}\quad(n=2,3,\cdots)$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数，也可以记作：

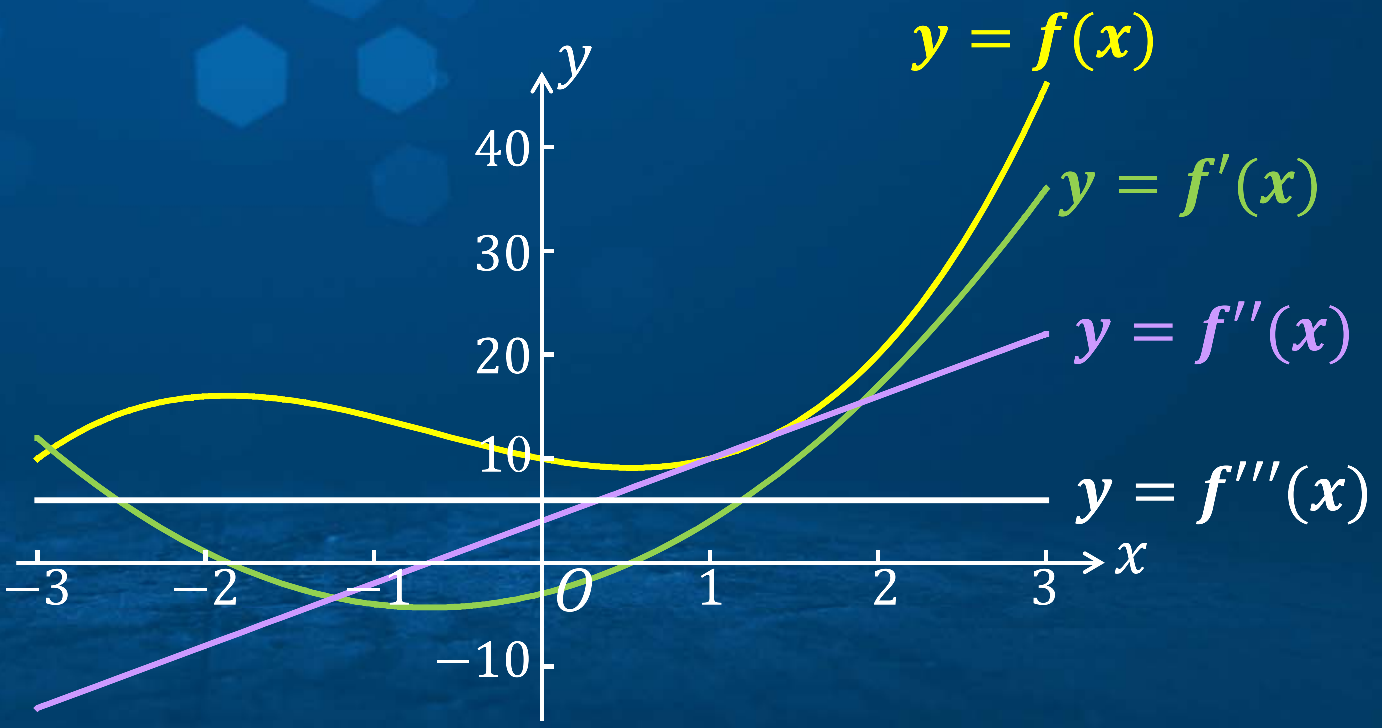
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$$

例1 求函数$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 10$的 n 阶导数.

任何n次多项式的$n+1$阶导数为0，而且反过来也是对的，即若

$$f^{(n+1)}(x) \equiv 0,$$

则$f(x)$为次数不超过n的多项式.



例2 求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的 n 阶导数.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\,(n=1,2,\cdots)$$

例3 求函数 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\,(n=1,2,\cdots)$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

莱布尼兹公式 设函数$u(x)$和$v(x)$均存在n阶导数，则有

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$

这里$u^{(0)}(x) = u(x),\ \ v^{(0)}(x) = v(x)$.

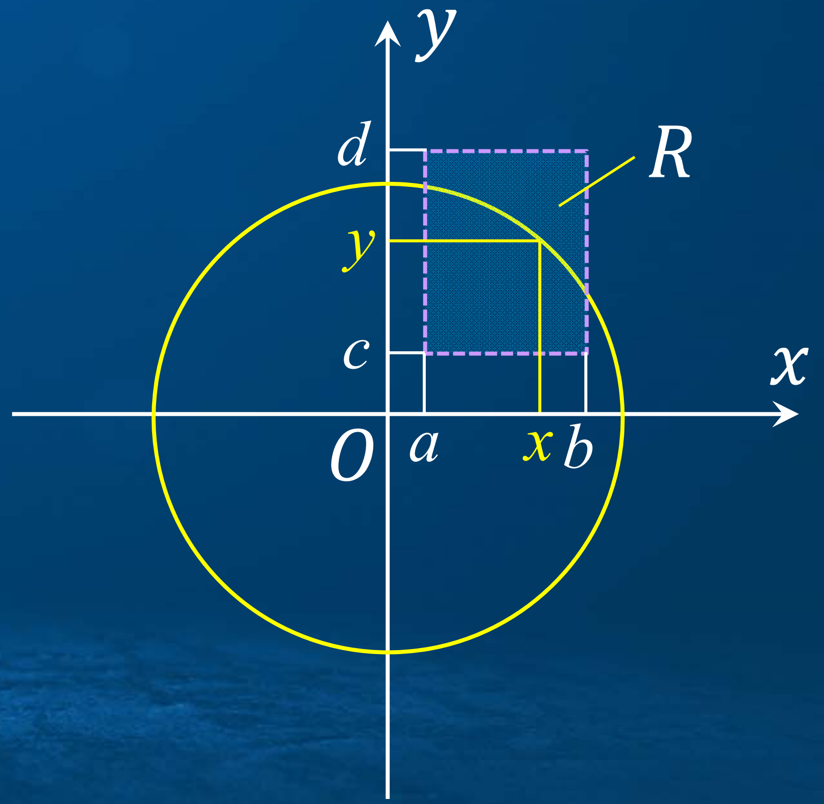
例4 设 $y = x^3e^x$，求 $y^{(10)}$.

显函数: $y = f(x)$ 或 $x = f(y)$.

隐函数: 对于方程 $F(x,y) = 0$ 及平面上的矩形区域

$R = \{(x,y)|a < x < b, c < y < d\}$,

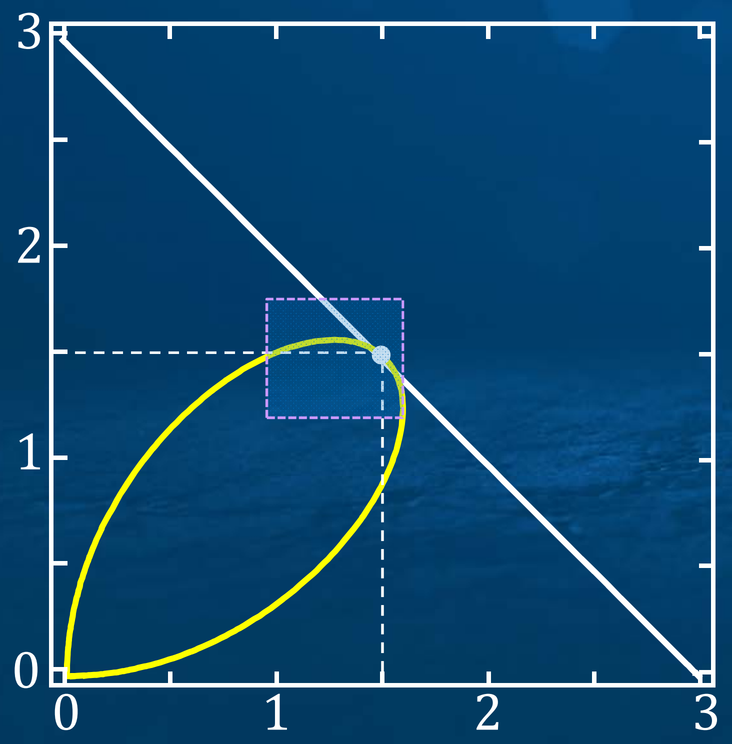
若当 $x \in (a, b)$ 时，存在惟一的 $y \in (c, d)$，使得 $F(x,y) = 0$，则称方程 $F(x,y) = 0$ 在 R 上确定一个隐函数 $y = y(x)$.

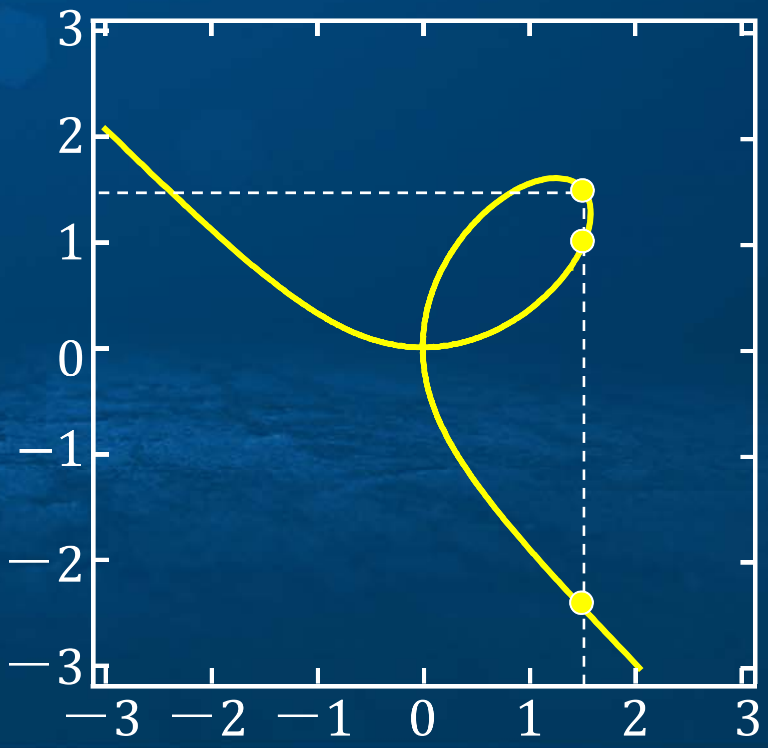


$x^2 + y^2 = a^2$

例5 设$y=y(x)$是由方程 $x^3+y^3=3xy$ 确定的隐函数，且满足

$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$，求$y=y(x)$对应的曲线在$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$处的切线方程．





隐函数求导法

假设由方程$F(x,y)=0$所确定的函数为 $y=y(x)$，则把它回代回方程$F(x,y)=0$中，所得的恒等式为$F[x,y(x)]=0$.

利用复合函数求导法则，对上式两端同时对自变量 x求导，再解出所求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 这样求导数的方法称为隐函数求导法.

对数求导法

例如，求函数 $y = x^x$ 的导数.

对函数 $y = x^x$ 两边取对数，得 $\ln y = x\ln x$

对方程两边同时关于x求导数，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

例6　求函数 $y = (x^2+1)\sqrt[3]{(x-2)^2(x^2+x)}$ 的导数 .

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定

$$y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad y''=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

例7 求抛物线$x=y^2$在$(1,\ 1)$和$(4,-2)$处的切线方程．

例8 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$确定，求$y''(x)$．