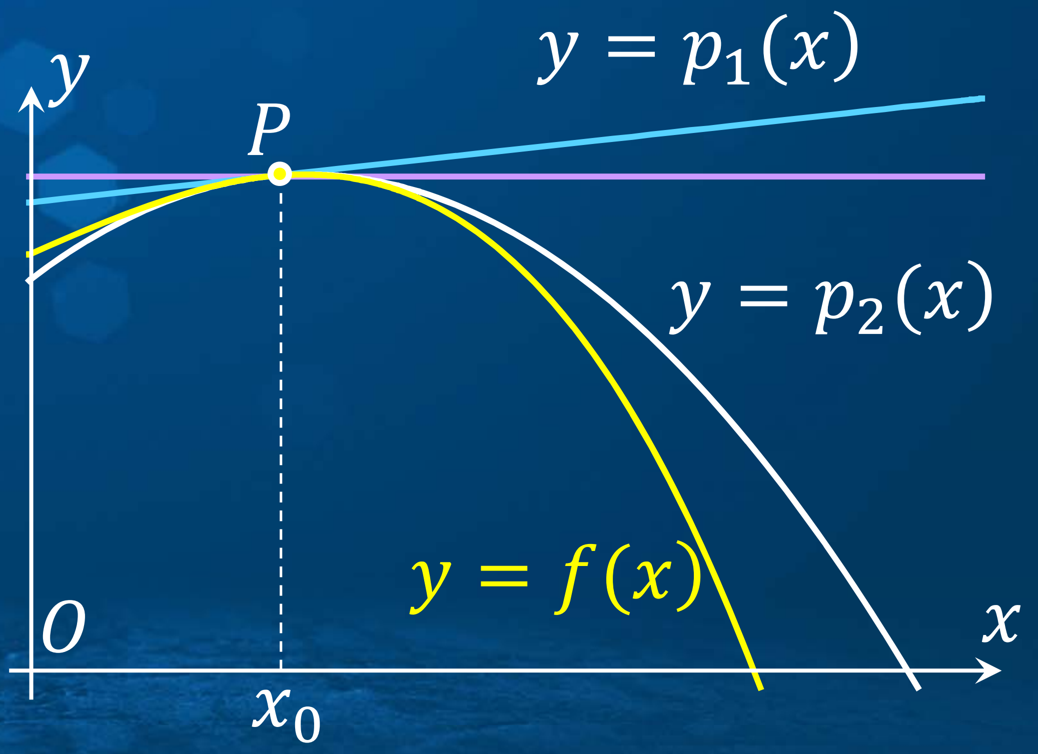
第32讲 泰勒公式

函数$f(x)$在点 x_0处的 0,1,2 阶泰勒多项式

$$p_0(x) = f(x_0)$$

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - p_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = p_2(x) + o((x - x_0)^2)$$

- 误差估计及泰勒公式
- 几个初等函数的麦克劳林公式
- 间接法求泰勒公式

泰勒余项

设$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$，称

$$|R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|$$

为泰勒多项式 $p_n(x)$逼近$f(x)$ 的绝对误差.

定理1 设函数$f(x)$在 x_0处具有 n 阶导数，则当$x \to x_0$ 时，有

$$R_n(x) = o[(x - x_0)^n].$$

皮亚诺余项

即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \boxed{o[(x - x_0)^n].}$$

函数$f(x)$在点 x_0处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式

- 特别当$x_0=0$时，称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$$

为$f(x)$的带皮亚诺余项的n阶麦克劳林公式.

- 定理1表明用 n阶泰勒多项式近似表示 $f(x)$时，其误差是 $(x-x_0)^n$ 在过程 $x\to x_0$中的高阶无穷小. 这说明当$n>1$ 时，只要x充分接近x_0，相应的逼近精度较线性逼近大大提高了.

- 皮亚诺余项只是对误差作了定性的刻画，不能用于具体的精度分析.

定理2 设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的区间 (a,b) 内有直 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x\in(a,b)$，至少存在介于x与 x_0之间的一点ξ, 使得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

或

拉格朗日余项

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

函数 $f(x)$在点 x_0 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

- 特别当$x_0 = 0$时，称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

为函数 $f(x)$带拉格朗日余项的麦克劳林公式.

- 若$n = 0$, 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式可写为

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),$$

其中ξ介于x与 x_0之间.　说明拉格朗日中值公式是泰勒中值公式的一个特例.

- 指数函数 $f(x)=e^x$ 的麦克劳林公式

$$e^x \sim p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1, -\infty<x<+\infty}$$

- 正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林公式

$$\sin x \sim p_{2m-1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right), k=0,1,2,\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}, 0<\theta<1, -\infty<x<+\infty$$

- 余弦函数 $f(x)=\cos x$ 的麦克劳林公式

$$\cos x \sim p_{2m}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\cdot\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),k=0,1,2,\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},\quad 0<\theta<1,-\infty<x<+\infty$$

- 对数函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式

$$\ln(1+x)\sim p_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},k=1,2,\cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\&+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1,x>-1\end{aligned}}$$

- 幂函数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林公式

$$(1+x)^{\alpha}\sim p_n(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}},0<\theta<1,x>-1$$

例1 求 $f(x)=\tan x$ 的三阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式 .

例2 用间接法求 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的 n 阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式 .

例3 用间接法求 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 在$x_0=1$ 处的 7 阶泰勒多项式，并求 $f^{(7)}(1)$.