第79讲 柱坐标系下三重积分的计算

如何计算神舟飞船返回舱的体积？

空间上点的柱坐标表示

柱坐标下三重积分的计算

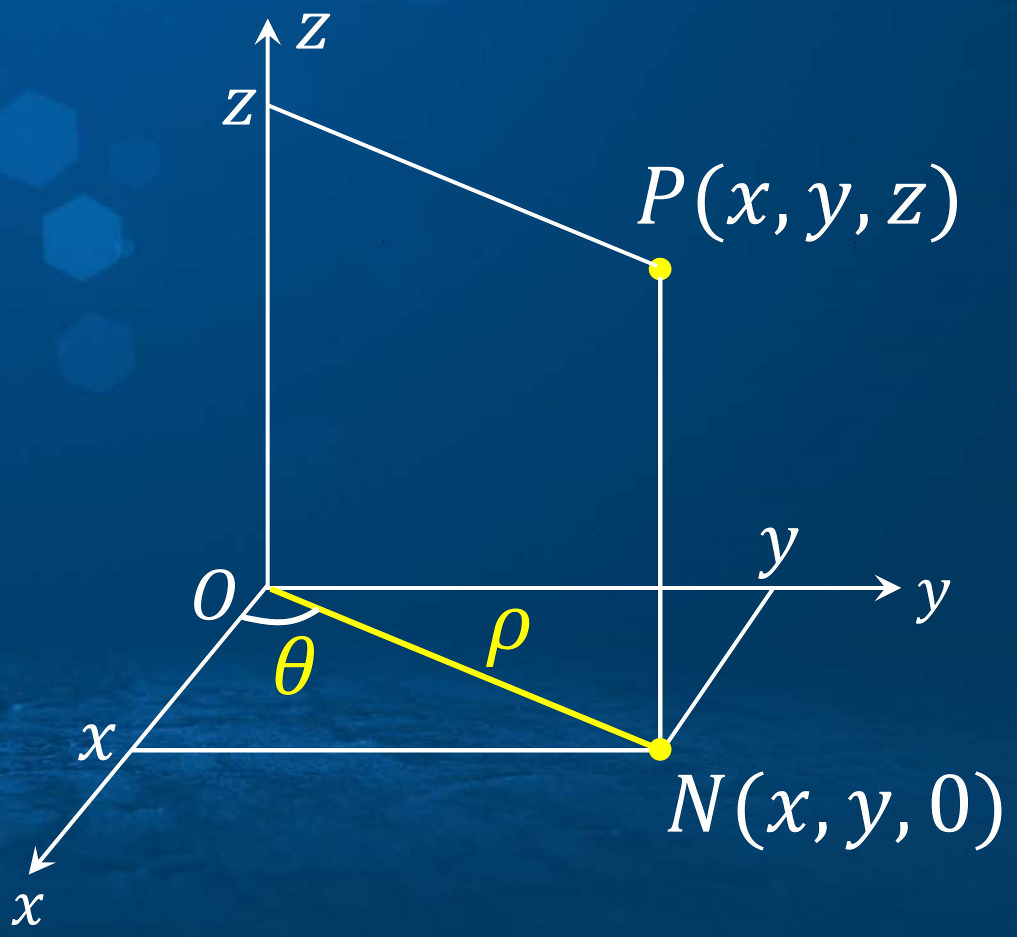
柱坐标：

空间一点P的直角坐标为 (x,y,z)

(1) (ρ,θ)是$P(x,y,z)$点在xOy面上投影点的极坐标.

(2) z 是直角坐标系的竖坐标.

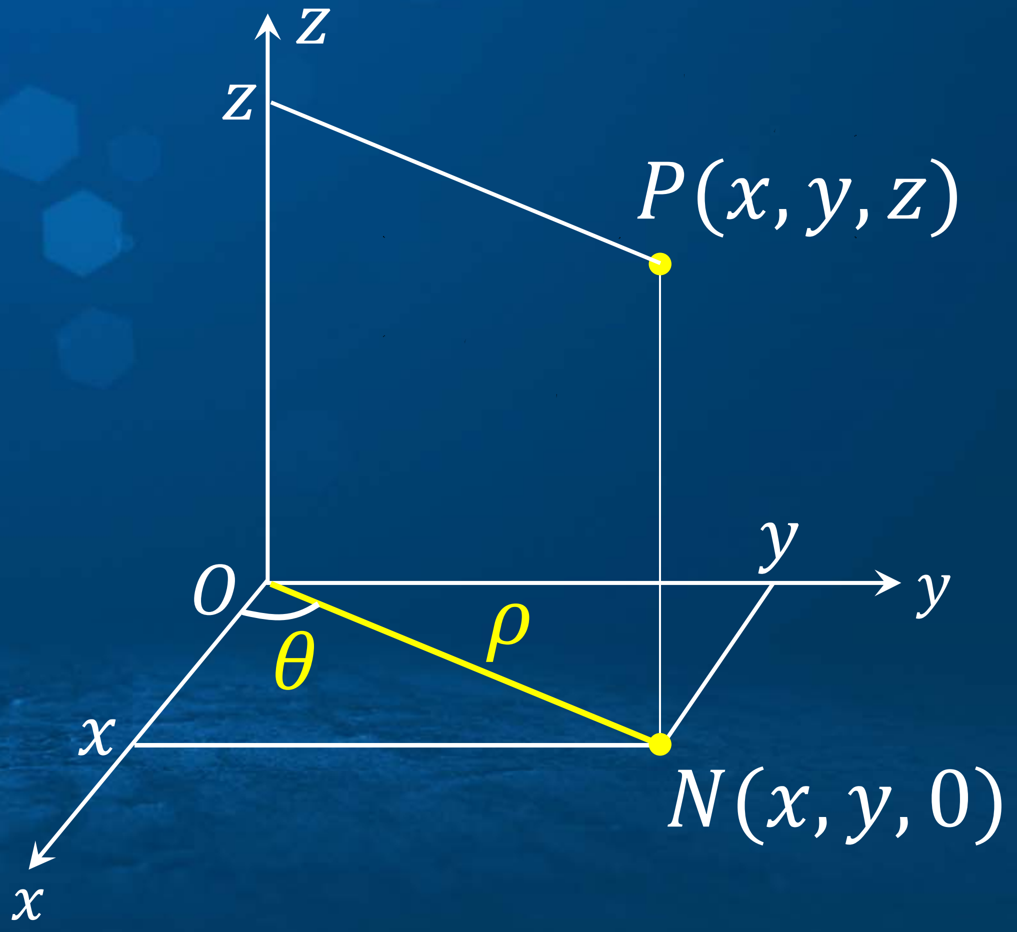
称有序三元数组(ρ,θ,z)为点P的柱坐标



直角坐标(x,y,z)与柱坐标(ρ,θ,z)

之间的关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z. \end{cases} \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



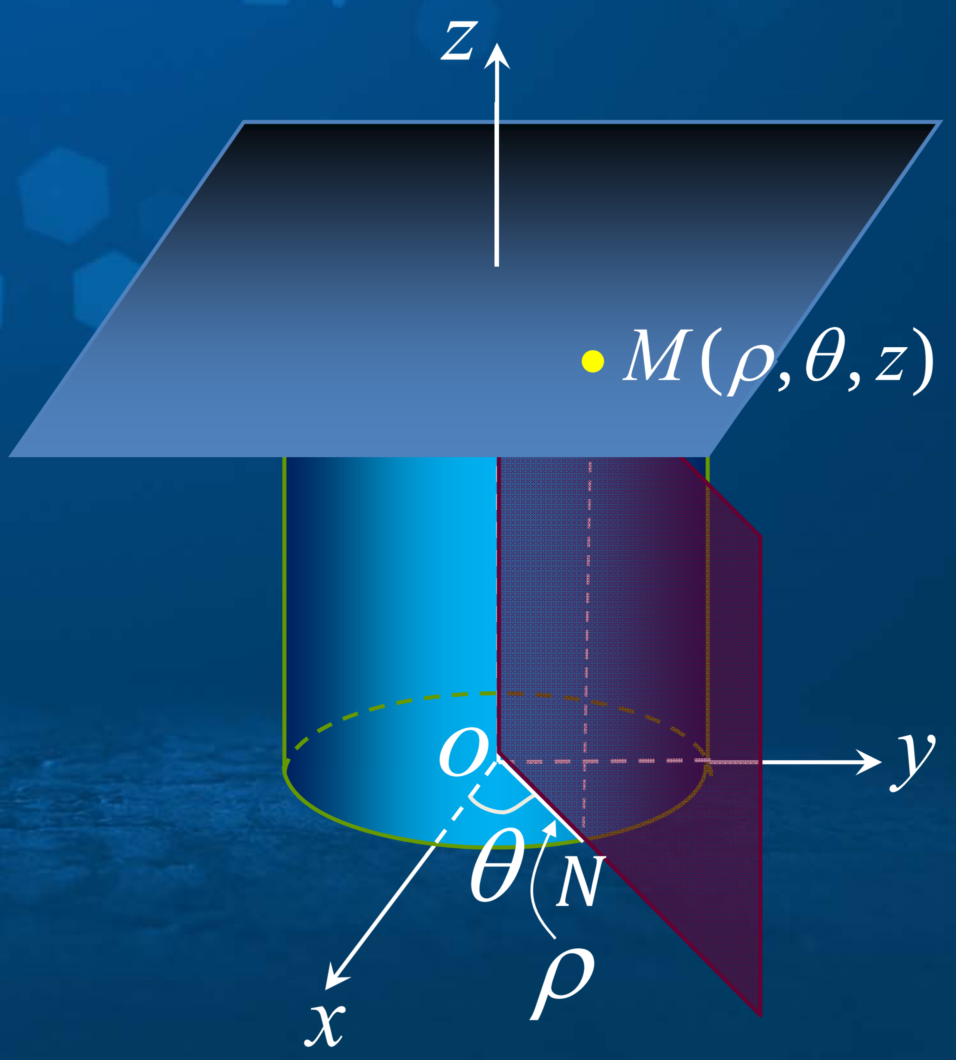
柱坐标系中的坐标面：

ρ =常数 ⟶ 圆柱面

θ =常数 ⟶ 半平面

z =常数 ⟶ 平面

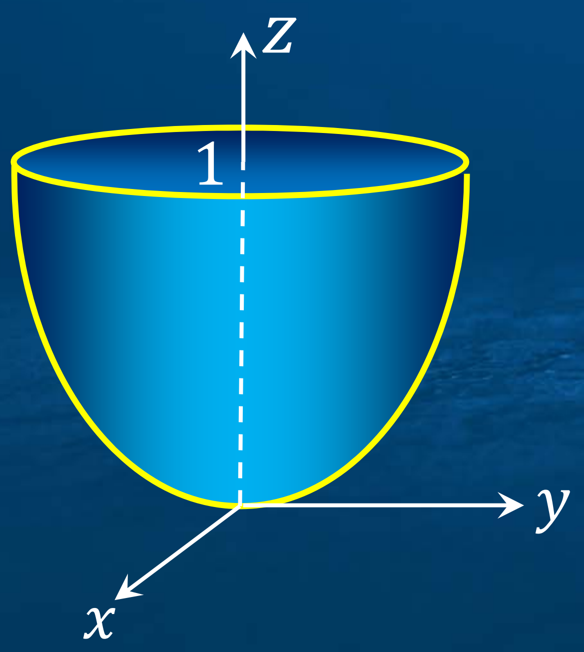
柱坐标系中，空间中点的位置由以上三个坐标曲面确定.



例1 试将下列区域的边界曲面用柱坐标方程表示.

(1) 由旋转抛物面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 1$围成的区域 Ω.

(2) 由上半球面$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$、圆柱面$x^2 + y^2 = 1$和平面$z = -2$围成的空间区域 Ω.



抛物面$z = x^2 + y^2$的柱坐标方程

$$z = \rho^2$$

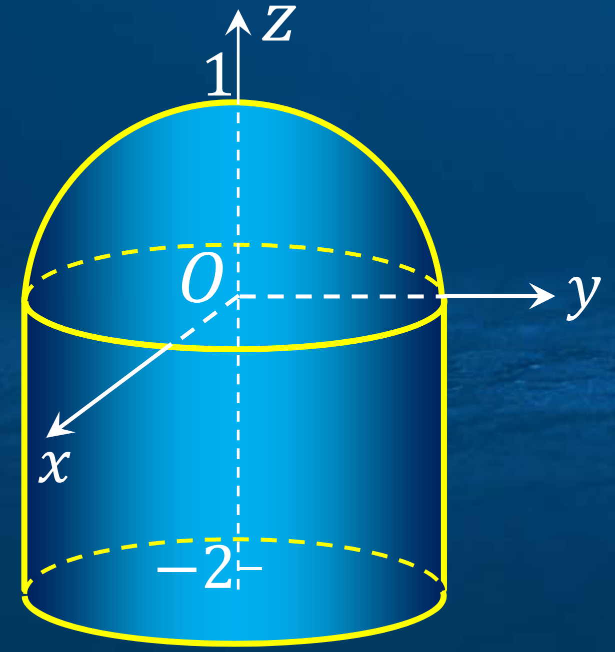
平面$z = 1$的柱坐标方程

$$z = 1$$

例1 试将下列区域的边界曲面用柱坐标方程表示.

(1) 由旋转抛物面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 1$围成的区域 Ω.

(2) 由上半球面$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$、圆柱面$x^2 + y^2 = 1$和平面$z = -2$围成的空间区域 Ω.



半球面$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$z = \sqrt{1 - \rho^2}$$

圆柱面$x^2 + y^2 = 1$

$$\rho = 1$$

$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$的实际背景为体密度$f(x,y,z)$的空间立体$\Omega$的质量.

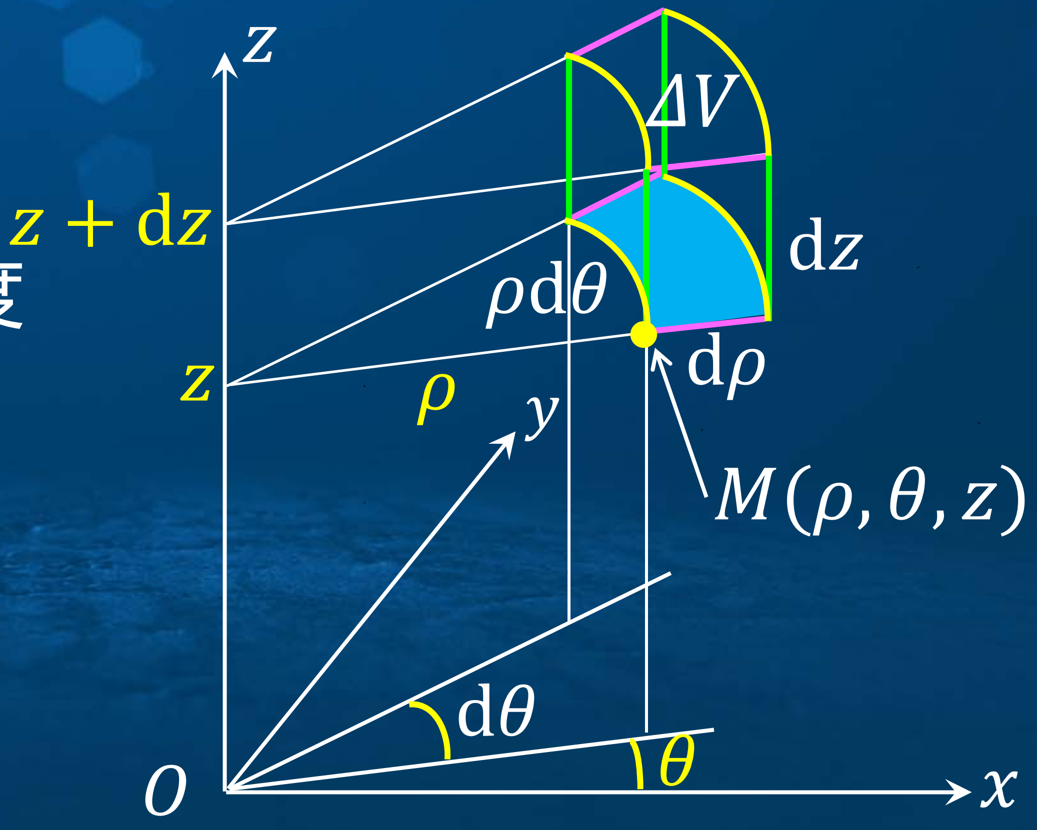
ΔV对应的体积近似为

$$\Delta V \approx \rho d\theta d\rho dz$$

取ΔV上密度近似为$M(\rho,\theta,z)$处密度

$F(\rho,\theta,z)$ ，即

$$F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$



三重积分的柱坐标形式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}V} = \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\boxed{\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z}$$

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z.$$

一般适用范围:

(1) 积分域表面用柱坐标表示时方程简单；

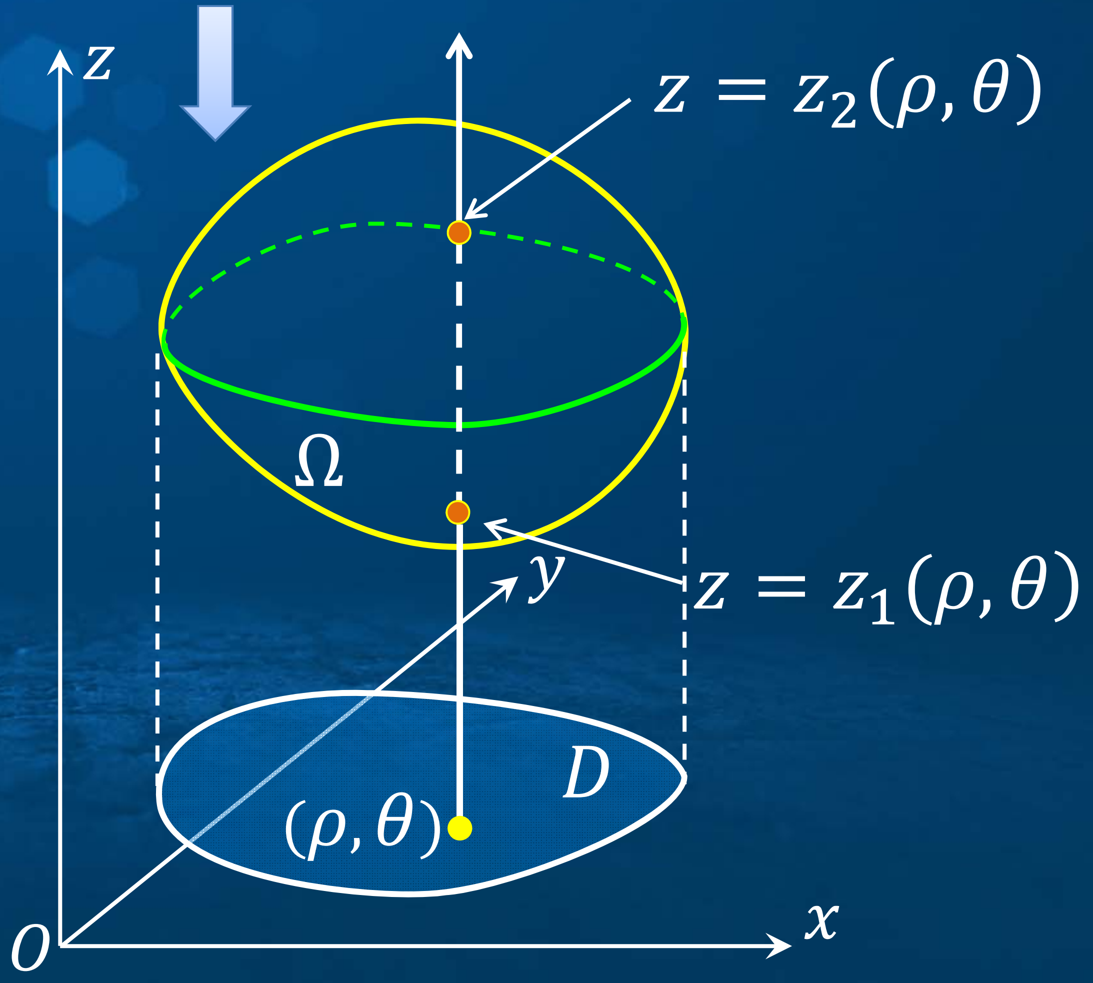
(2) 被积函数用柱坐标表示时变量互相分离 .

假设积分区域Ω是关于z轴简单的区域，则柱坐标系下三重积分转化为累次积分的基本步骤为：

(1) 画图. 画出Ω草图，将Ω投影到 xOy 面，得到投影区域 D ；

(2) 确定z-积分限. 在投影区域任取一点，作平行于z 的直线穿过区域确定ρ，θ描述的z-积分限：

$$z_1(\rho,\theta) \le z \le z_2(\rho,\theta)$$

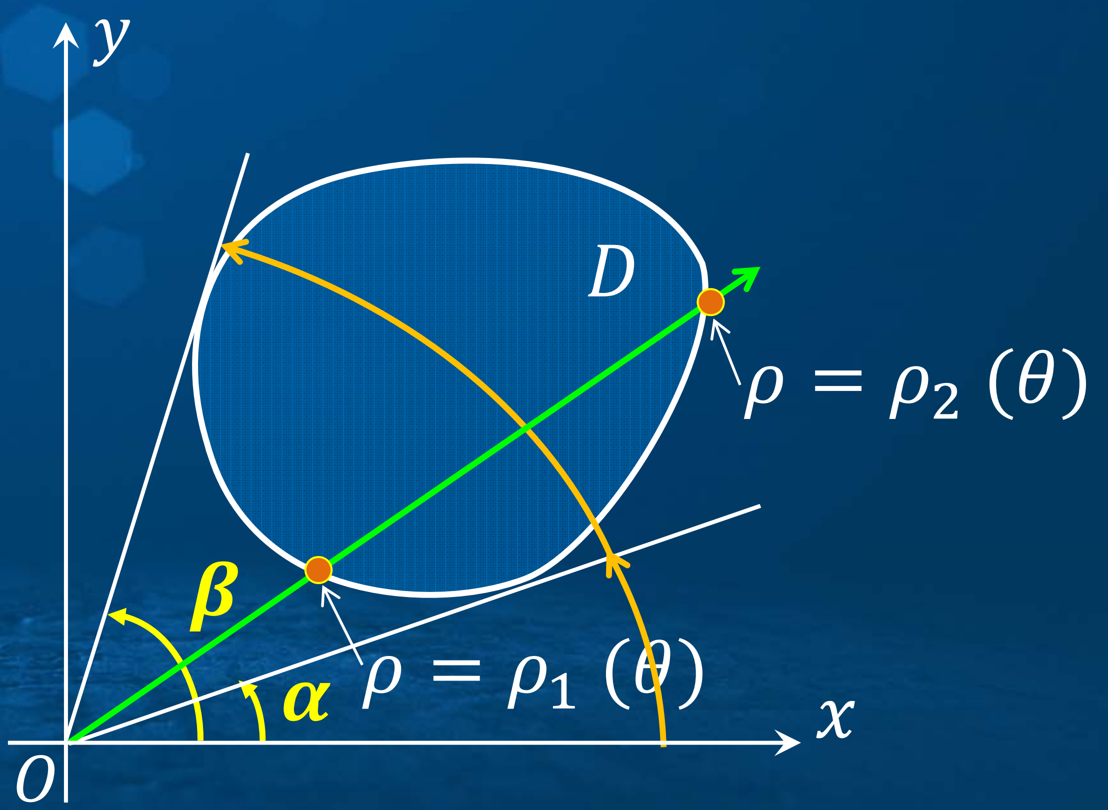


假设积分区域Ω是关于z轴简单的区域，则柱坐标系下三重积分转化为累次积分的基本步骤为：

(3) 确定θ-积分限. 从x轴出发作射线，逆时针旋转扫描区域，确定θ的积分限： $\alpha \le \theta \le \beta$

(4) 确定ρ-积分限. 从原点出发在 θ 范围内作射线穿过区域确定 ρ 的积分限：

$$\rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta)$$



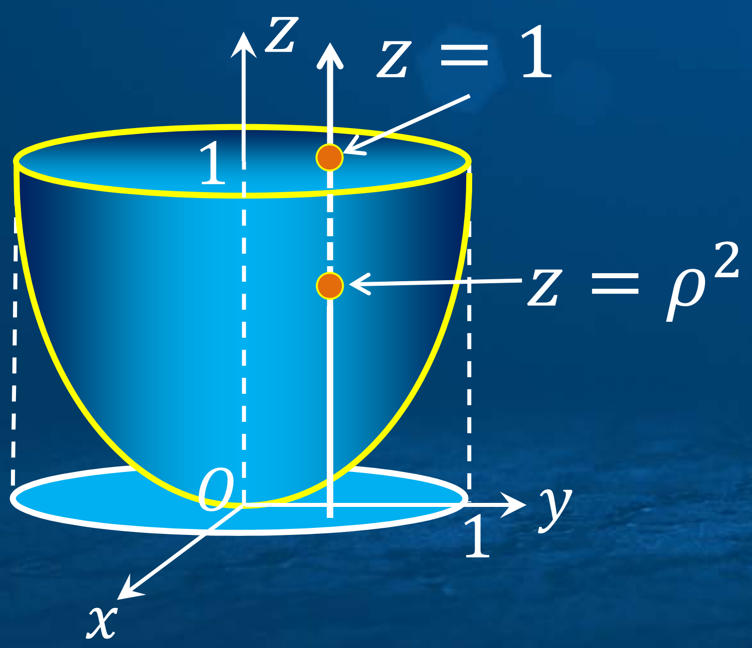
假设积分区域Ω是关于z轴简单的区域，投影区域可以用极坐标描述时，可得柱坐标的积分限为

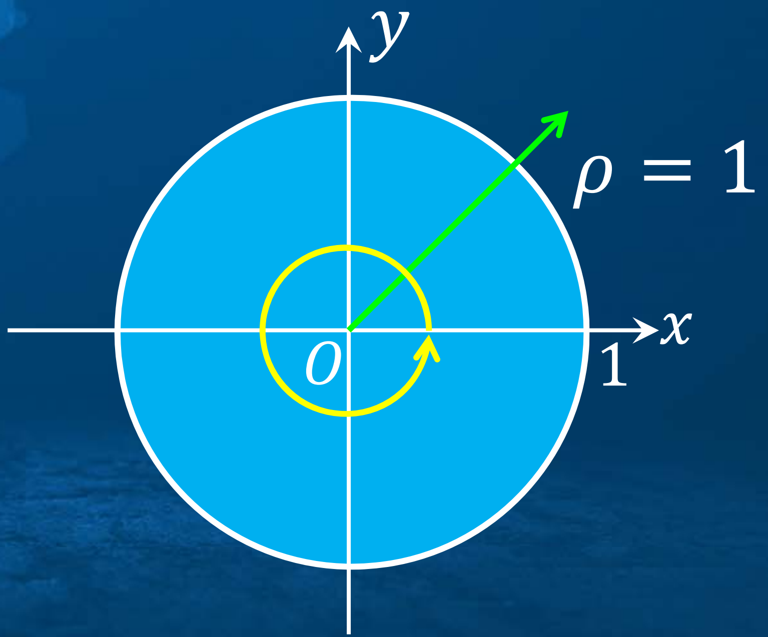
$$\Omega:\left|\begin{array}{l}\alpha \le \theta \le \beta,\\ \rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta),\\ z_1(\rho,\theta) \le z \le z_2(\rho,\theta).\end{array}\right.$$

将被积函数转化为极坐标形式，则有柱坐标系下的累次积分：

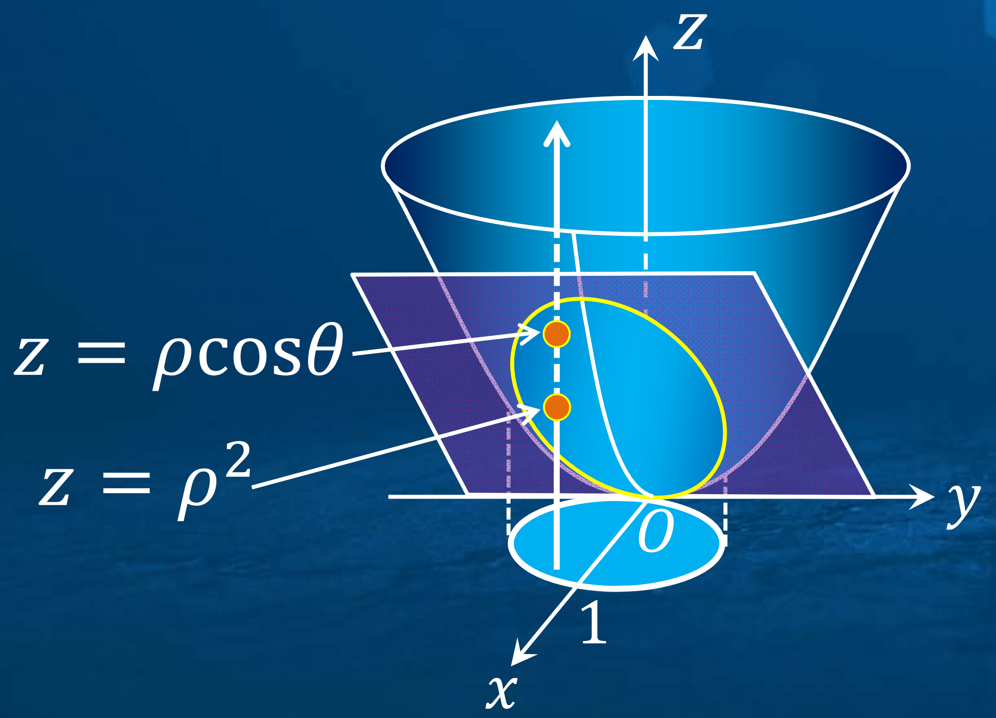
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\mathrm{d}z.$$

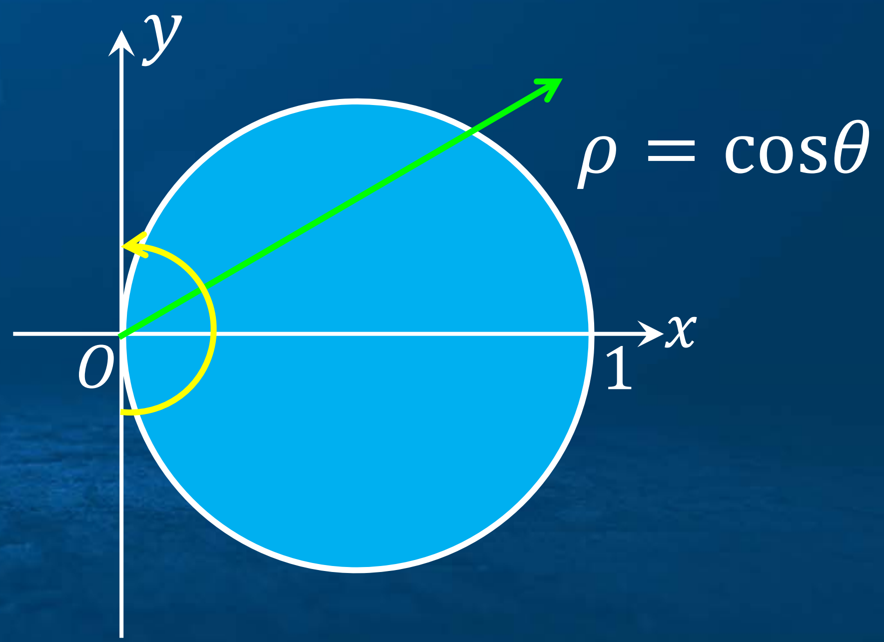
例2 计算由旋转抛物面$z = x^2 + y^2$分别与平面$z = 1$和平面$z = x$所围成的立体 Ω的体积.



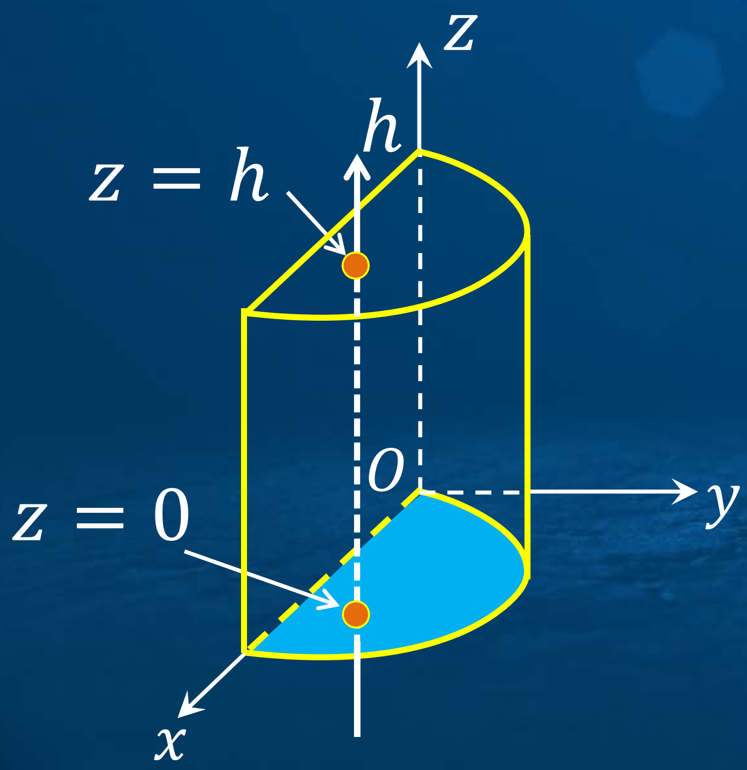


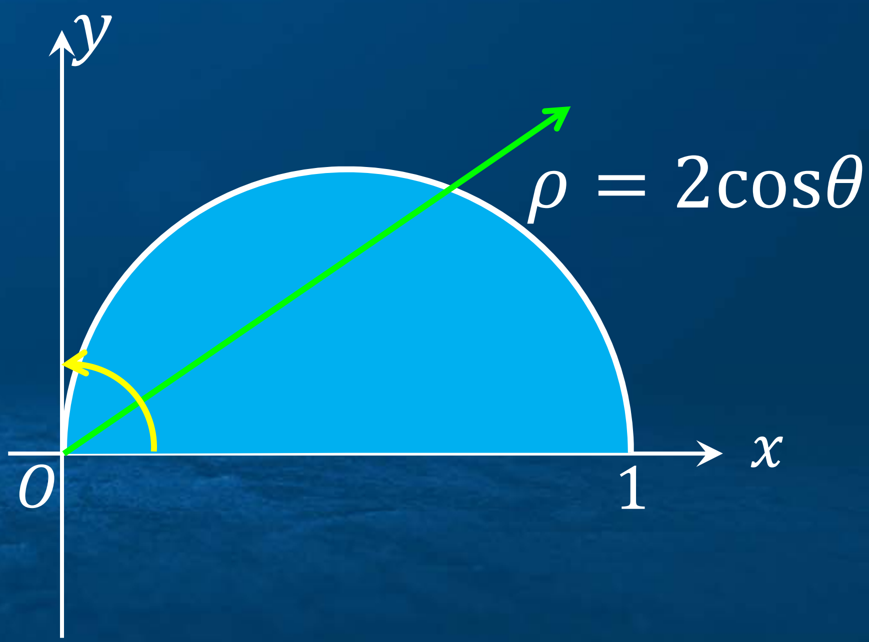
例2 计算由旋转抛物面$z=x^2+y^2$分别与平面$z=1$和平面$z=x$所围成的立体Ω的体积.



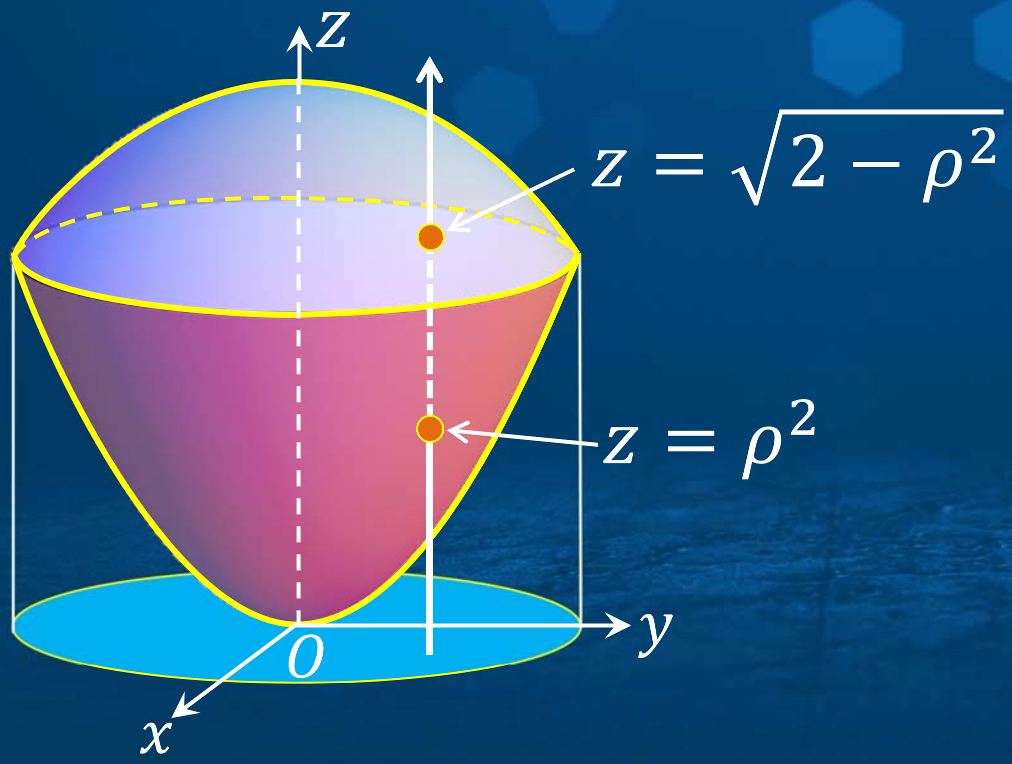


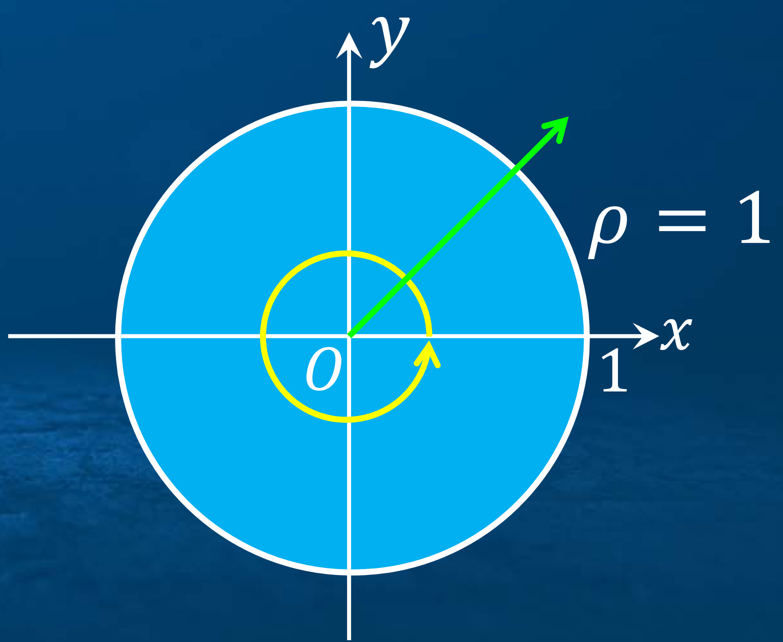
例3 计算三重积分$\iiint_{\Omega}(x^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$为由柱面$x^2+y^2=2x$及平面$z=0, z=h(h>0)$所围成的区域在第一卦限中的部分．





例4 计算三重积分$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域.





三重积分计算的先一后二 — 投影法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \boxed{\iint_{D_{xy}}}\mathrm{d}\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

三重积分计算的先二后一 — 截面法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_a^b \mathrm{d}z\boxed{\iint_{D(z)}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

使用极坐标求解

柱坐标 ← 三重积分计算的θ,ρ,z描述形式