《高等数学》全程教学视频课

第72讲 多元函数的极值

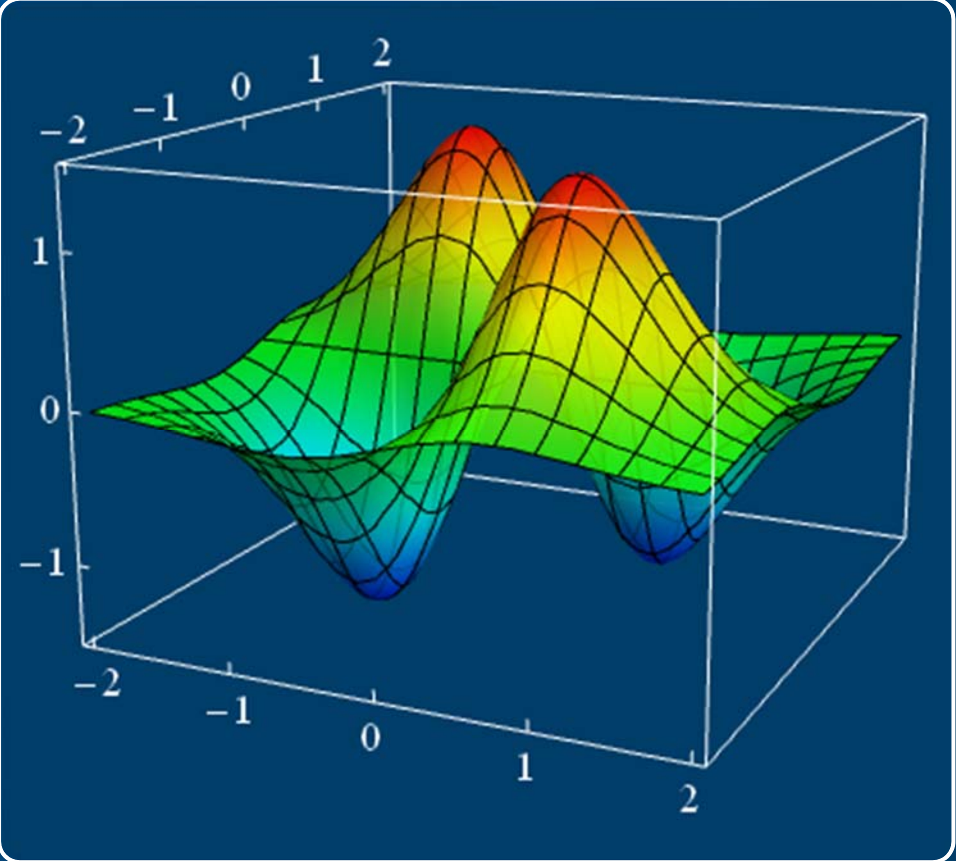
结构设计	总重量最轻
资源分配	总效益最大
物资运输	总费用最低
产品生产	总利润最高

结构设计　总重量最轻

资源分配　总效益最大

物资运输　总费用最低

产品生产　总利润最高



$$z = f(x, y)$$

多元函数极值的概念

多元函数极值的必要条件

多元函数极值的充分条件

定义1 设$f(\mathbf{x})$为n元函数，$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，如果存在$\mathbf{x}_0$的某邻域$U(\mathbf{x}_0)$，使$f(\mathbf{x})$在$U(\mathbf{x}_0)$有定义，且当$\mathbf{x} \in U_0(\mathbf{x}_0)$时恒有

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0),$$

则称$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处取得**极大值**$f(\mathbf{x}_0)$，称点$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的**极大值点**；

如果当$\mathbf{x} \in U_0(\mathbf{x}_0)$时恒有

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0),$$

则称$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处取得**极小值**$f(\mathbf{x}_0)$，称点$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的**极小值点**.

极大值、极小值统称为**极值**，使函数取得极值的点称为**极值点**.

- 二元函数的情形

二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取**极大值**是指：对于在该点的某邻域内任何异于该点的点(x,y)，都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)；$$

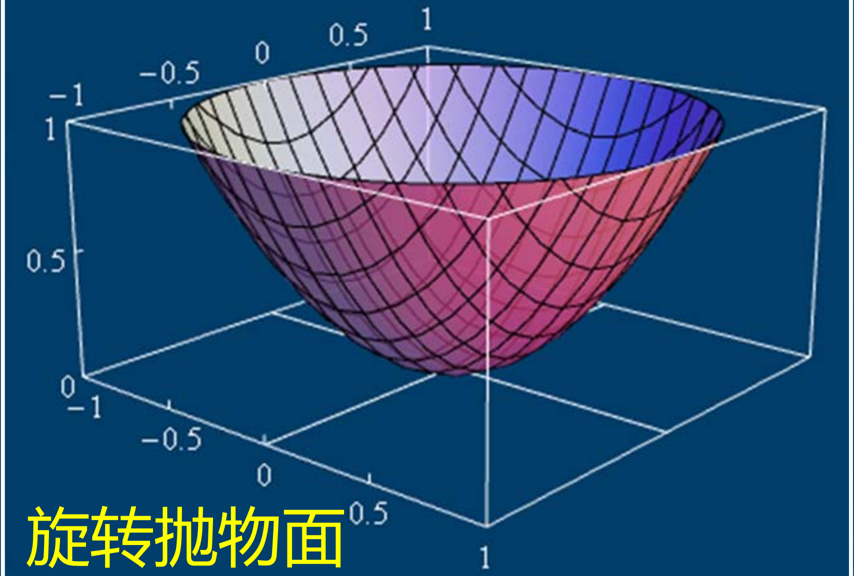
二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取**极小值**是指：对于在该点的某邻域内任何异于该点的点(x,y)，都有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0).$$

点$P(x_0,y_0)$的邻域：

$$U(P,\delta)=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

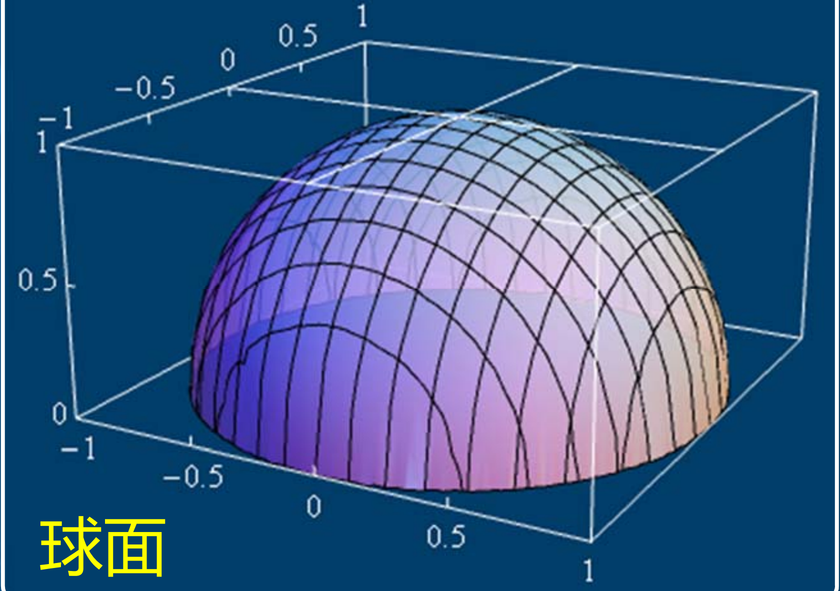


旋转抛物面

(0,0)为极小值点

极小值为$f(0,0) = 0$

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

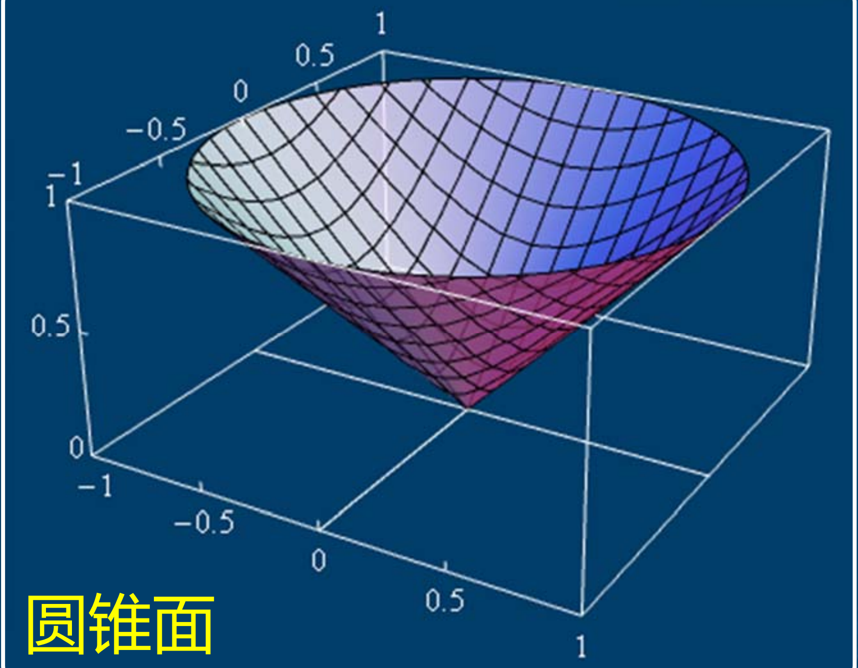


球面

(0,0)为极大值点

极大值为$f(0,0) = 1$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

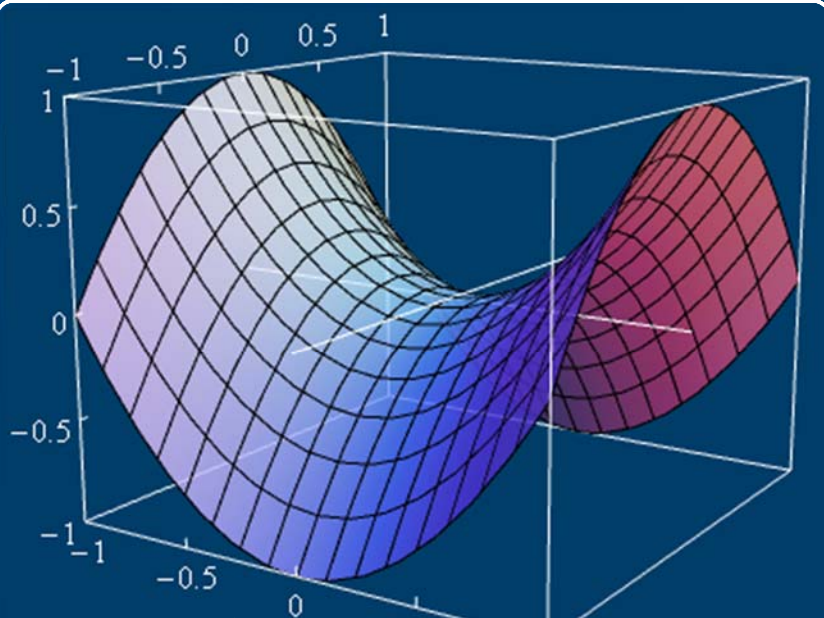


圆锥面

(0,0)为极小值点

极小值为$f(0,0)=0$

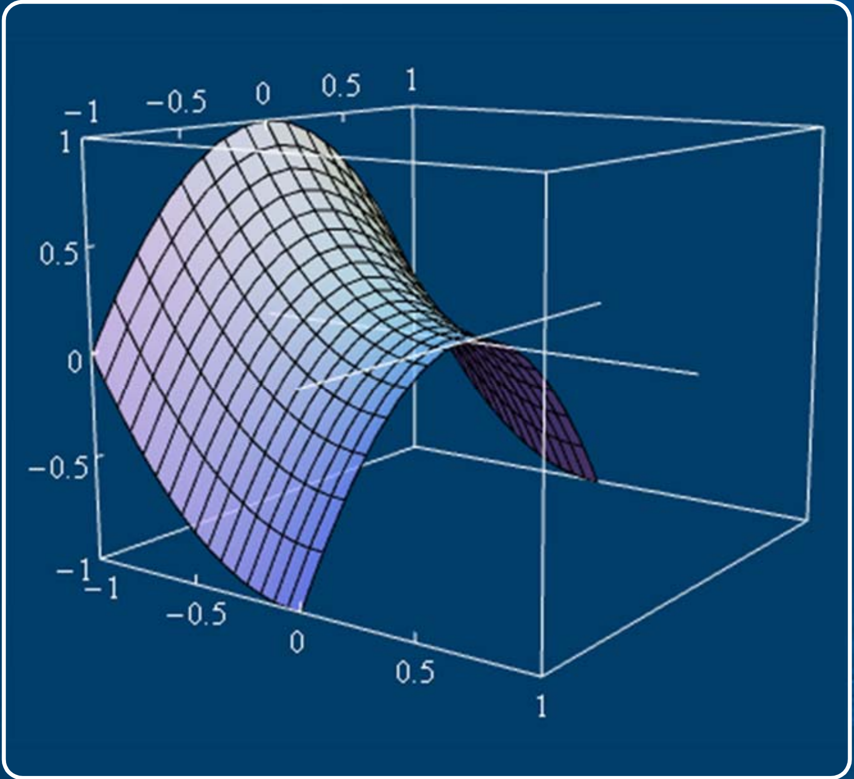
$$f(x,y)=x^2-y^2$$



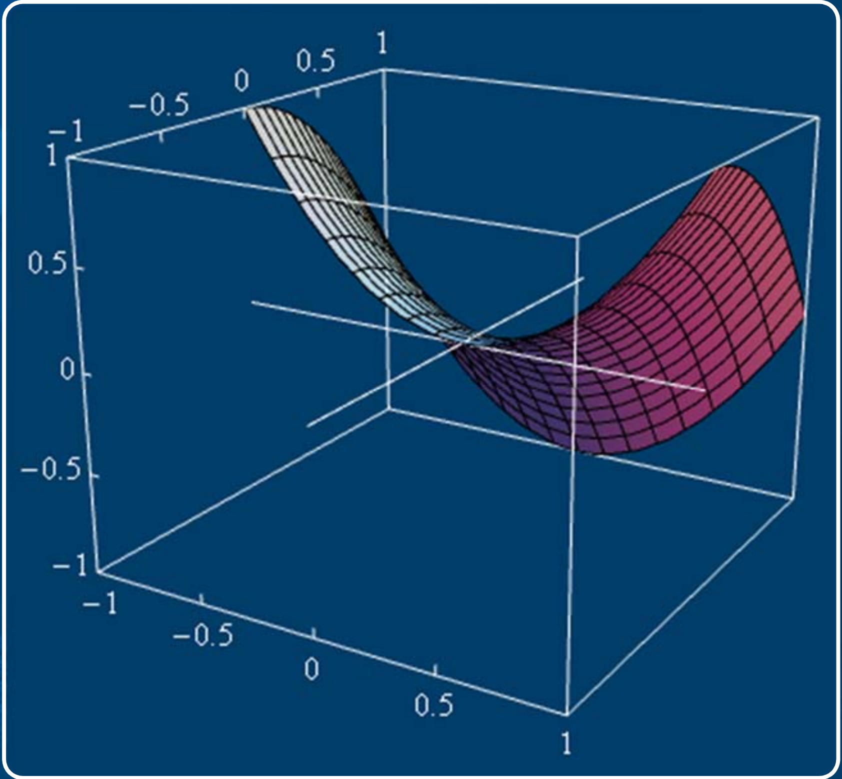
双曲抛物面（马鞍面）

(0,0)为极值点?

$f(x,y) = x^2 - y^2$

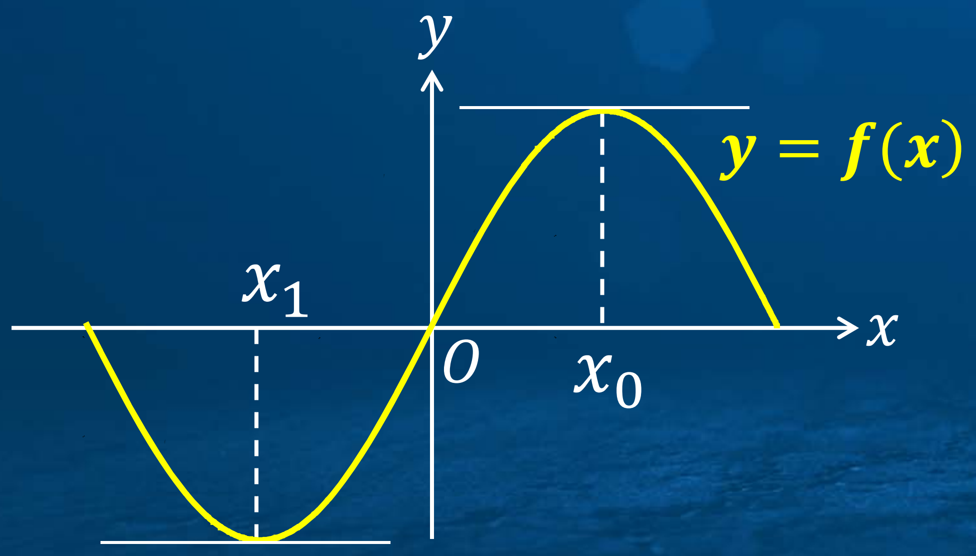


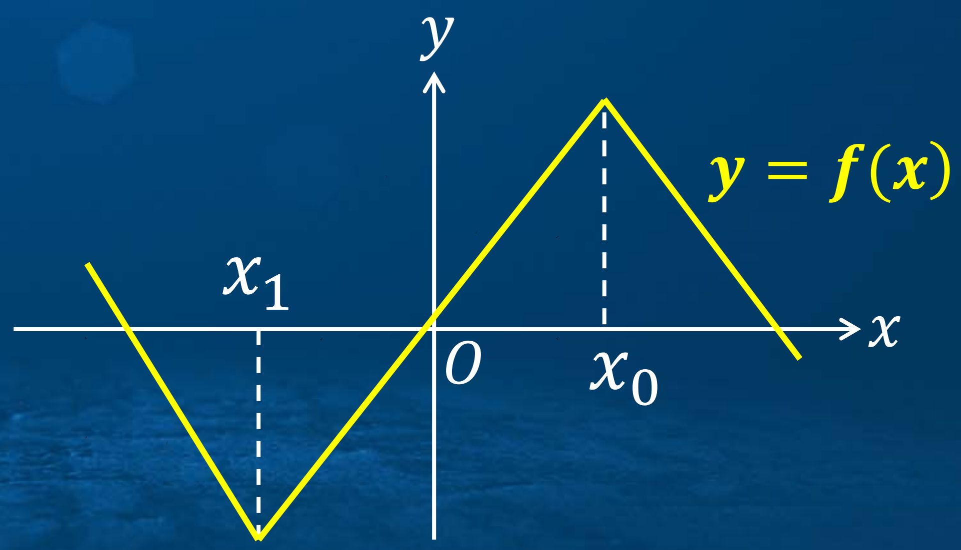
$f(x,y) = x^2 - y^2$



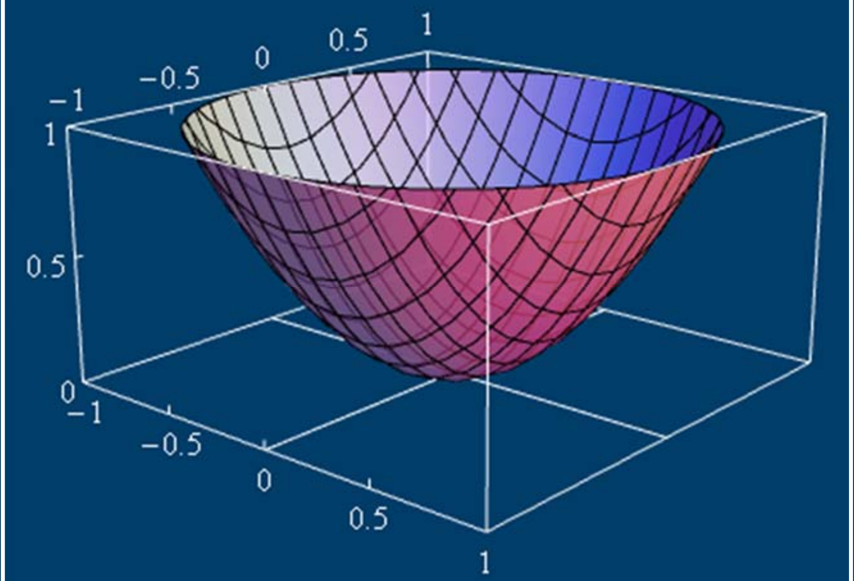
(0,0)不是$f(x,y) = x^2 - y^2$的极值点

对于一元函数$f(x)$，如果它在x_0处取极值，那么要么$f'(x_0)=0$(或者说曲线$f(x)$在x_0处有水平切线)，要么$f(x)$在x_0处不可微．





$$f(x,y)=x^2+y^2$$

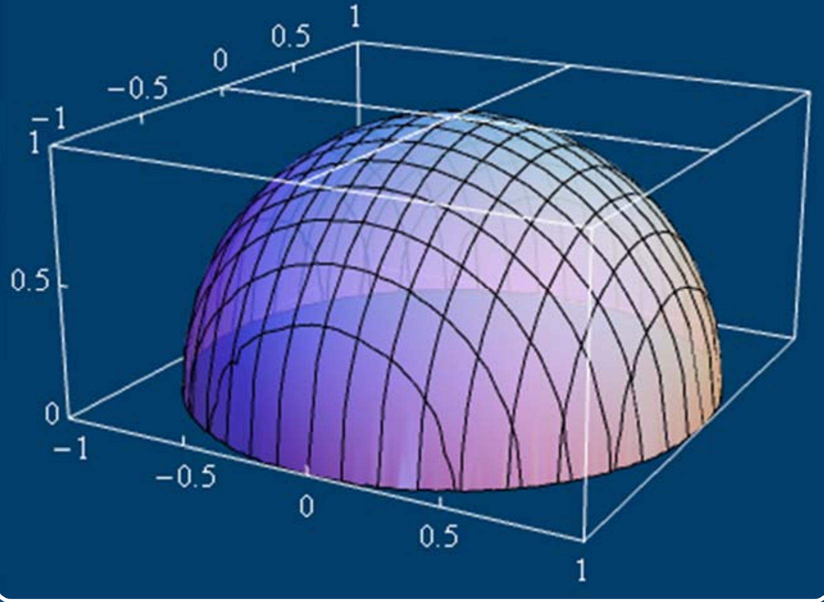


$$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0$$

在(0,0)点有水平的切平面

$$z=0$$

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

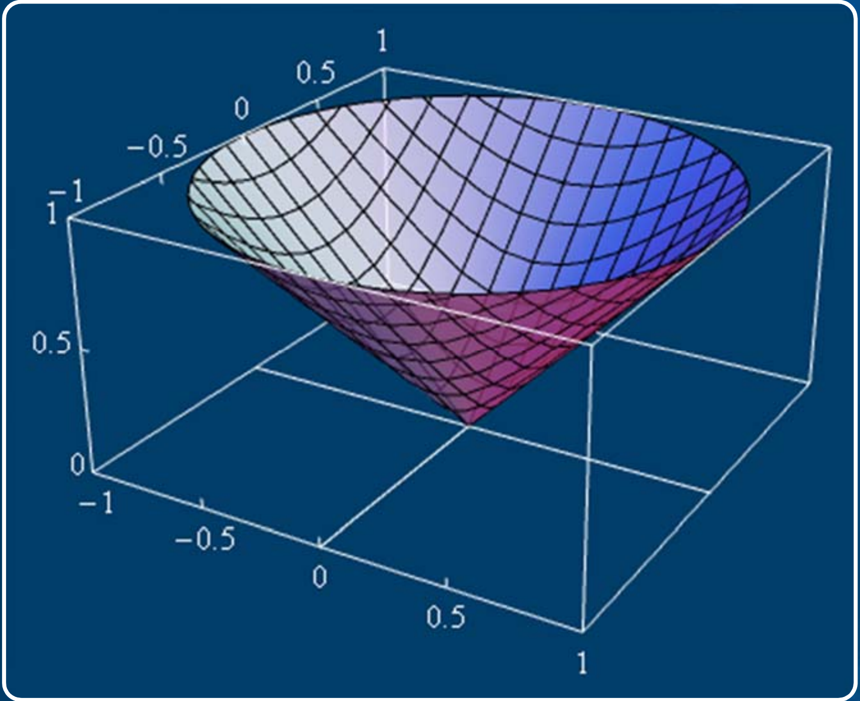


$$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0$$

在(0,0)点有水平的切平面

$$z=1$$

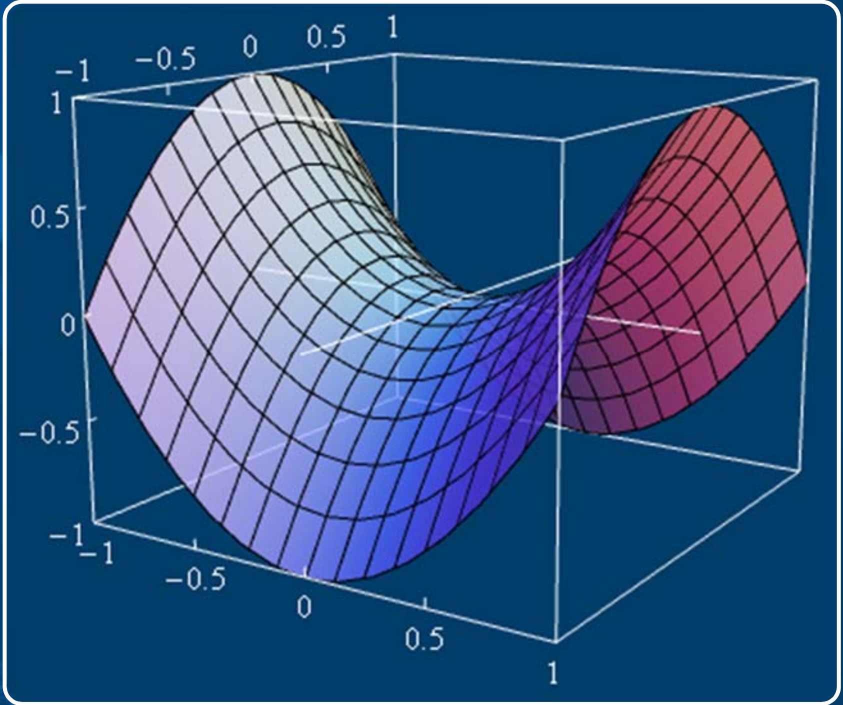
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



(0,0)为极值点

$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$不存在

$f(x,y)=x^2-y^2$



$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0$

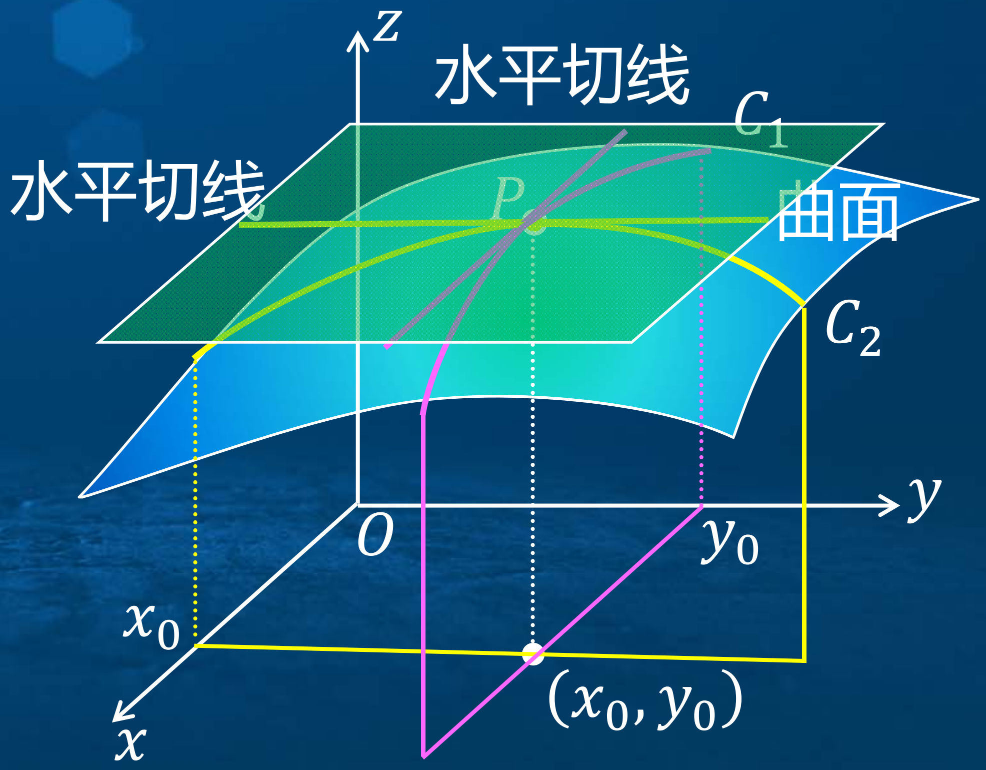
(0,0)不是极值点

定理1(必要条件) 设n元函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处对各个自变量的一阶偏导数都存在，且在点$\mathbf{x}_0$处取极值，则有 $\nabla f(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$.

二元函数的情形

设$f(x,y)$在(x_0,y_0)处对各个自变量的一阶偏导数都存在，且在点(x_0,y_0)处取极值，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0.$$



说明：称$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$的点$\mathbf{x}_0$为函数$f(\mathbf{x})$的驻点或稳定点；

若函数$f(\mathbf{x})$在点 $\mathbf{x}_0$处可微，且$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$，但$\mathbf{x}_0$不是极值点，则称$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的鞍点.

如果二元函数$z=f(x,y)$在极值点(x_0,y_0)处可微

在该点的切平面方程

$$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$=0$$

即 $z=f(x_0,y_0)$ —— 平行于xOy的平面

回顾：如何判断一元函数的驻点是否是极值点？

$$设\ f'(x_0)=0\ \begin{cases} 若f''(x_0)>0,\ 则x_0为极小值点； \\ 若f''(x_0)<0,\ 则x_0为极大值点； \\ 若f''(x_0)=0,\ 则不能判断. \end{cases}$$

问题：对于多元函数是否有相应的极值充分条件？

n元函数$f(\mathbf{x})$的二阶导数（海赛矩阵）

$$\boxed{f''(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}}$$

线性代数结论：对称矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$正定的充分必要条件是

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

对称矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, (r = 1,2,\cdots,n).$$

定理2(充分条件) 设n元函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处具有二阶连续偏导数，且$\nabla f(\mathbf{x}_0)=0$，记$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$为$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处的海赛矩阵．

(1) 如果$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$正定，则$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的极小值点；

(2) 如果$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$负定，则$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的极大值点；

(3) 如果$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$不定，则$\mathbf{x}_0$不是$f(\mathbf{x})$的极值点．

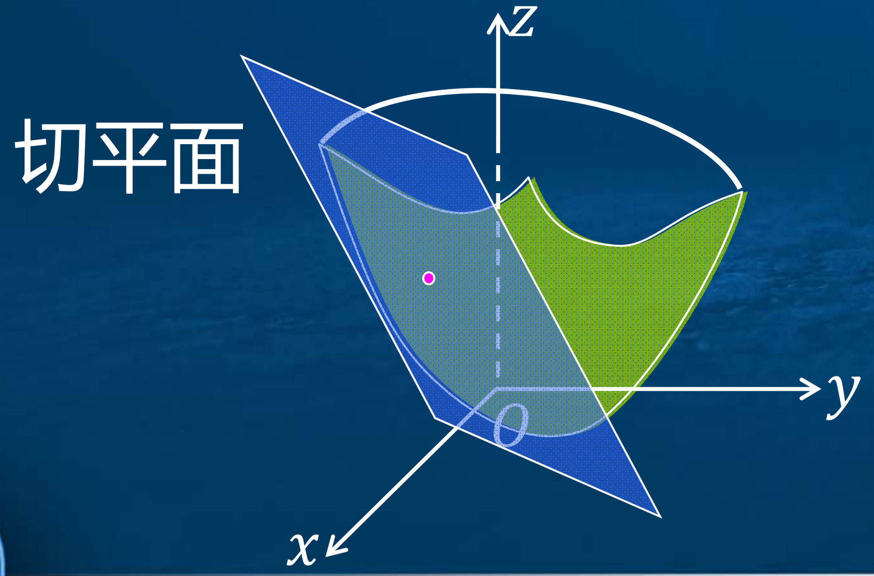
$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+\nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T$$
$$+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T+o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2)$$

思考：若$\mathbf{H}(\mathbf{x})$正定，曲面与其切平面有何位置关系？

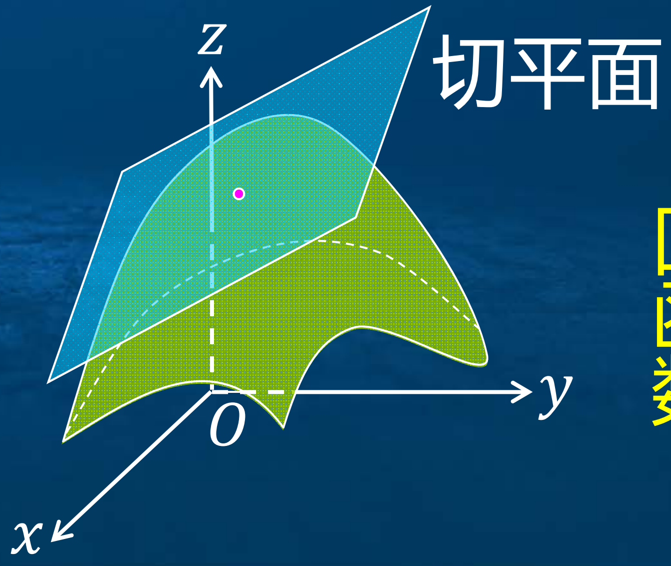
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T$$

$$+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\nabla^2 f(\mathbf{x}_0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T}}_{>\mathbf{0}}$$

$$> f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T$$



凸函数



凹函数

二元函数 $z=f(x,y)$ 的黑塞矩阵为：

$$\mathbf{H}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

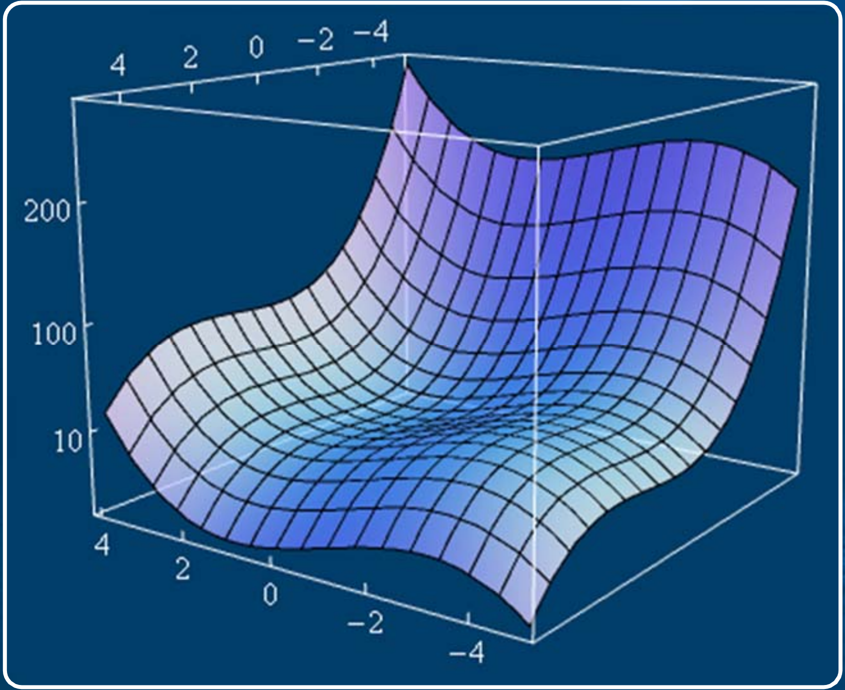
定理3 设二元函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处具有二阶连续的偏导数，且$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$.

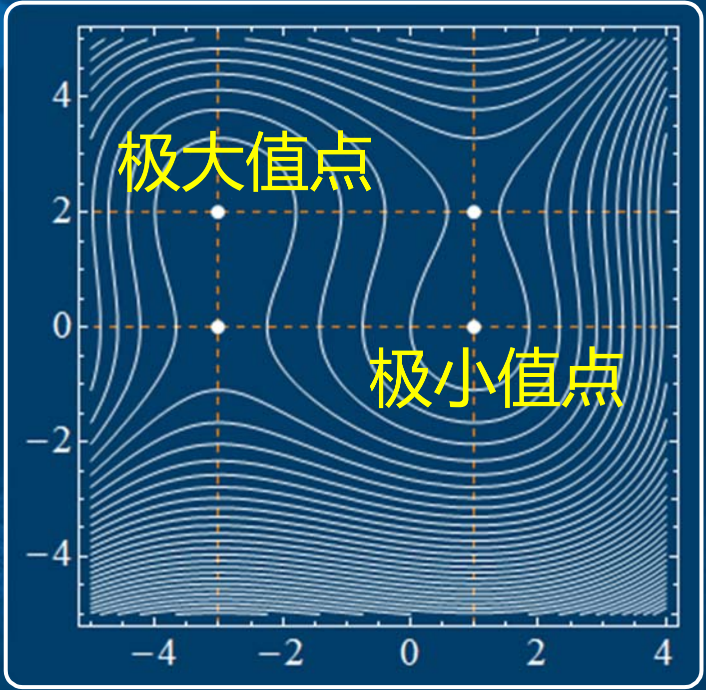
(1) 如果$A>0$，且$AC-B^2>0$，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处取极小值；

(2) 如果$A<0$，且$AC-B^2>0$，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处取极大值；

(3) 如果$AC-B^2<0$，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处不取极值 .

例1 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.





例2 商品销售利润最大化问题

某商场出售两种牌子的同一商品，提供该商品的有甲、乙两厂家，其中甲厂提供的商品进价为每件18元，乙厂家提供的商品进价为20元，商场通过市场调研发现，如果甲厂提供的商品每件卖x元，乙厂提供的商品每件卖 y元，则每天可总共可卖出$70-5x+4y$件甲厂商品和$80+6x-7y$ 件乙厂商品.

试问商场每天以什么价格卖两厂家的商品可以**获得最大收益**？