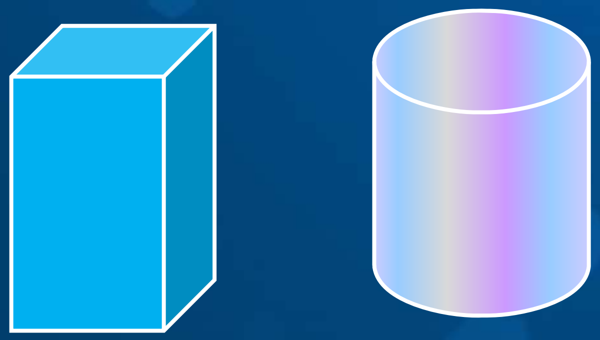
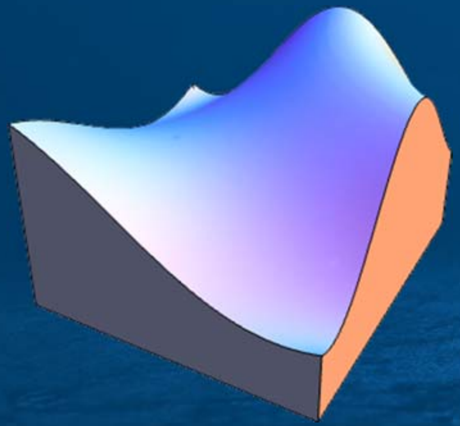
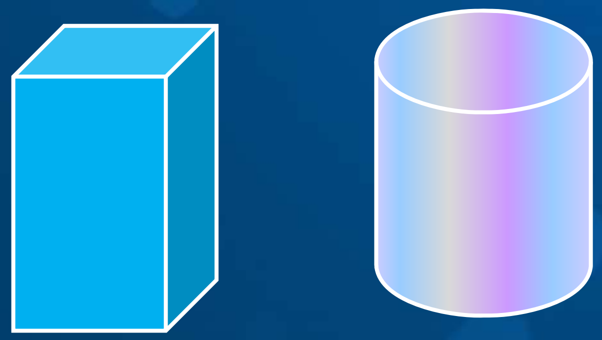
第75讲 重积分的概念和性质



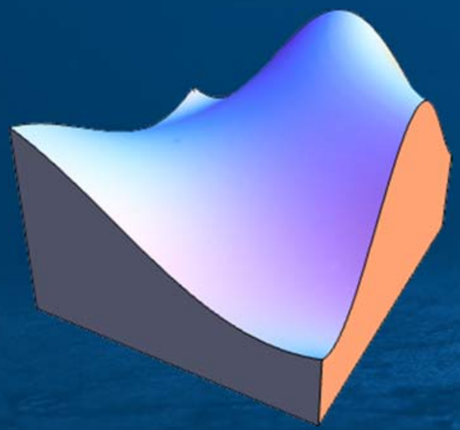
规则几何体的体积



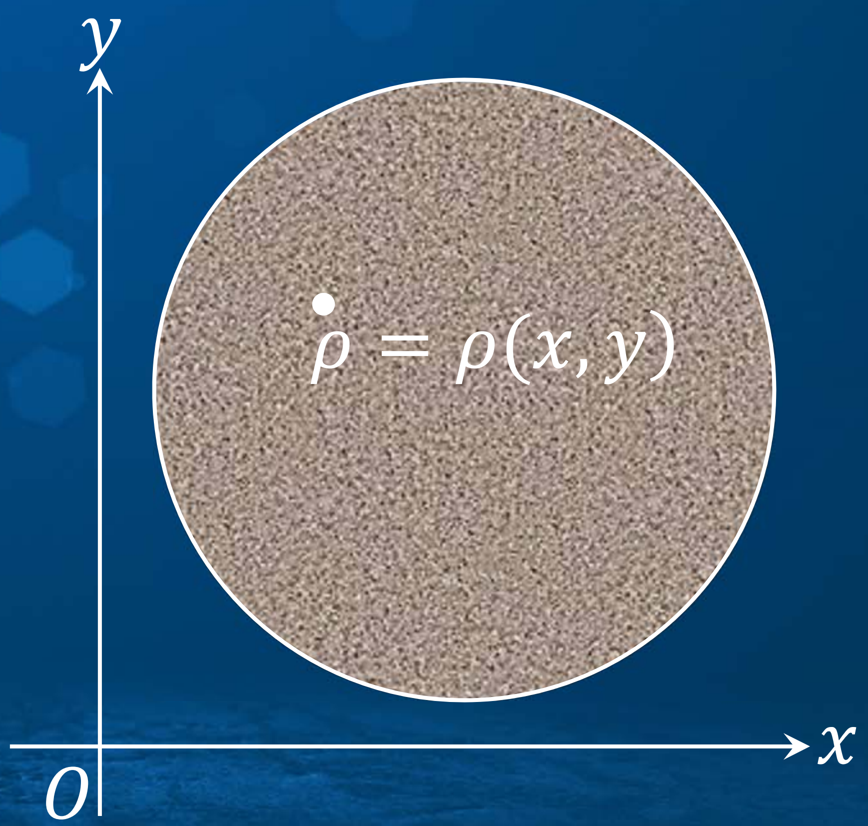
不规则几何体的体积



规则几何体的体积



不规则几何体的体积



质量分布非均匀
薄片的质量

- 几个与重积分有关的实际问题
- 重积分的概念
- 重积分的性质

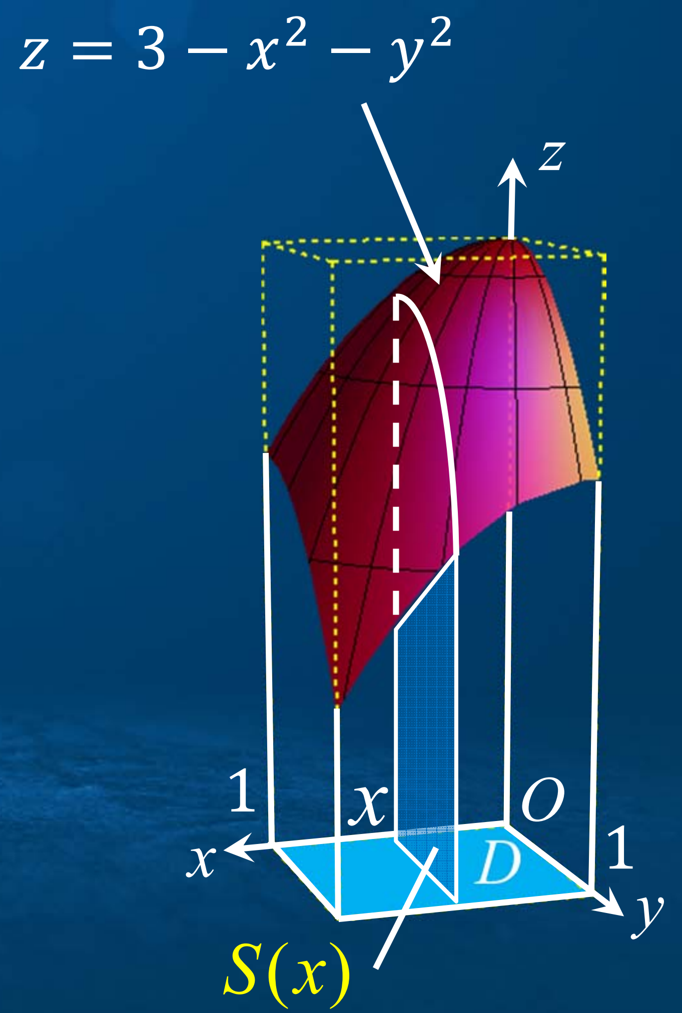
曲顶柱体的体积

空间几何体Ω由平面 $z = 0, x = 0, x = 1,$ $y = 0, y = 1$ 及曲面$z = 3 - x^2 - y^2$所围成，试求该立体的体积.　曲顶柱体

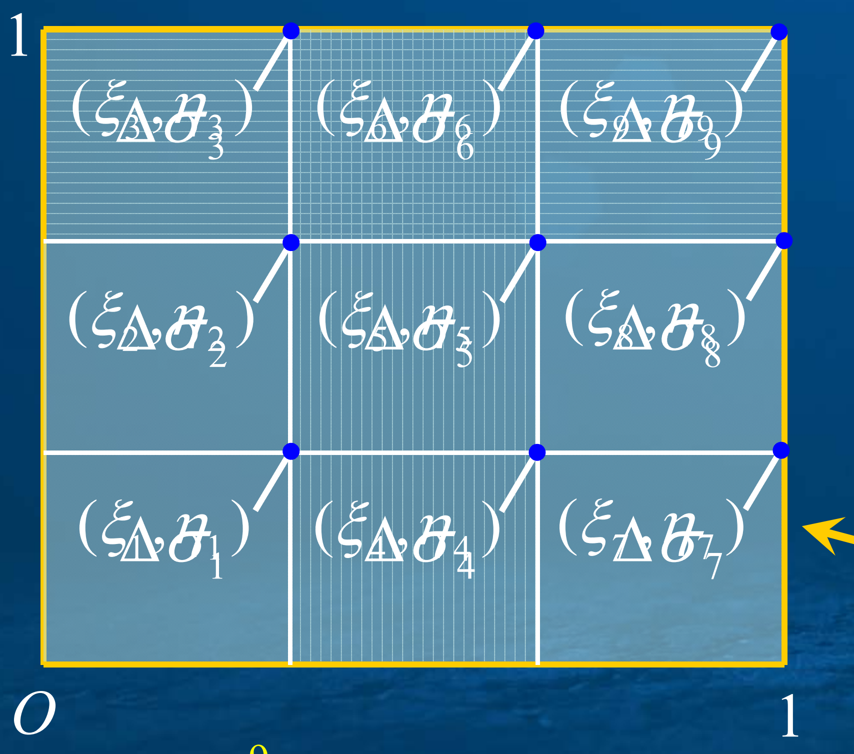
$$S(x) = \int_0^1 (3 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{8}{3} - x^2$$

$$V = \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{7}{3} = 2.333\cdots$$

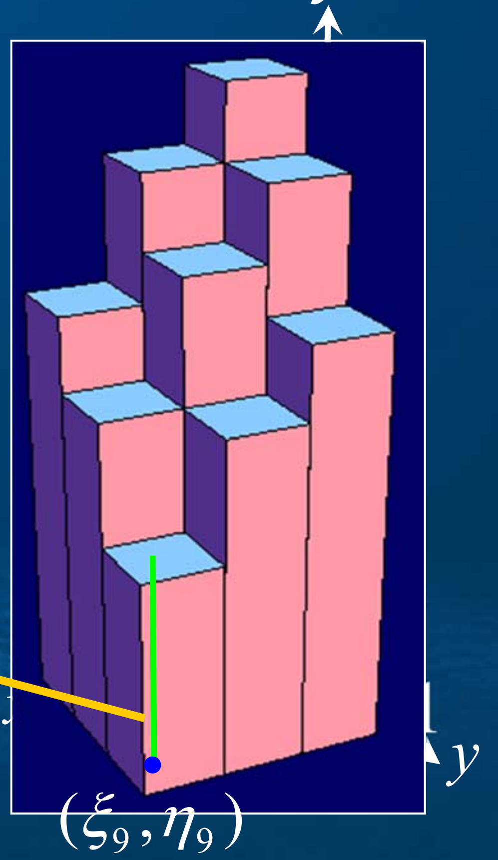


分割取近似，作和求极限



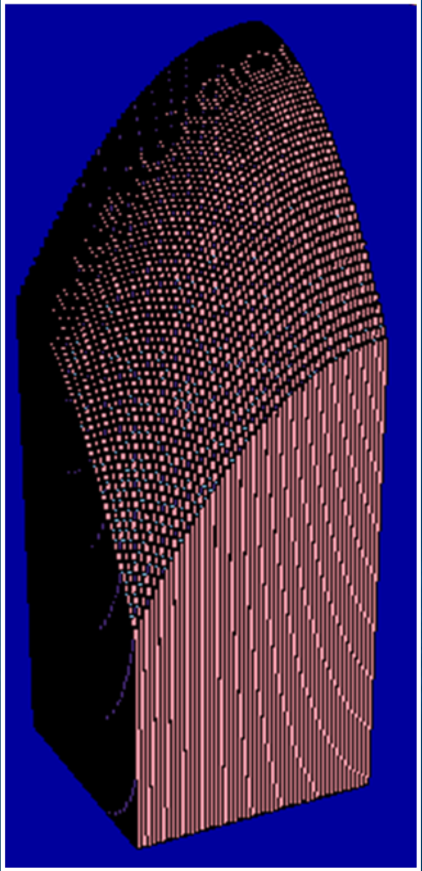
$z = 3 - x^2 - y^2$

$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$



$$S_9 = \sum_{k=1}^{9} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k = 1.962\,96$$

曲顶柱体更细的分割



曲顶柱体体积对应不同分割的近似值

n (等分)	$\Delta\sigma_k$ 的直径	$\sum_{k=1}^{n^2} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$
3	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	1.962 96
10	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	2.23
50	$\frac{\sqrt{2}}{50}$	2.313 2
100	$\frac{\sqrt{2}}{100}$	2.323 3

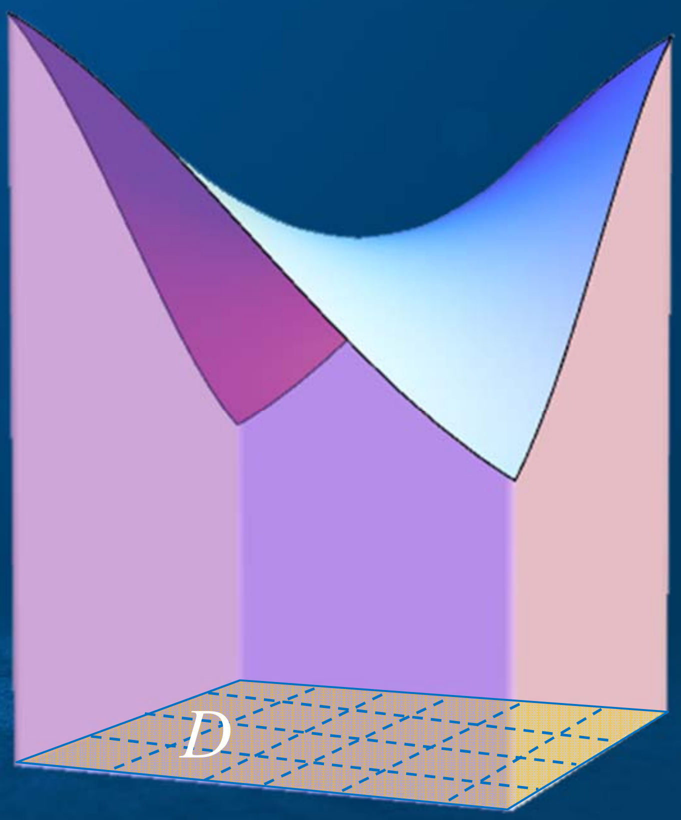
求以曲面$S: z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$为顶，$xOy$ 面上区域 D 为底的曲顶柱体的体积V .

1. 分割

用任意划分T 将D为为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_k, \cdots, \Delta\sigma_n$$

将曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体.



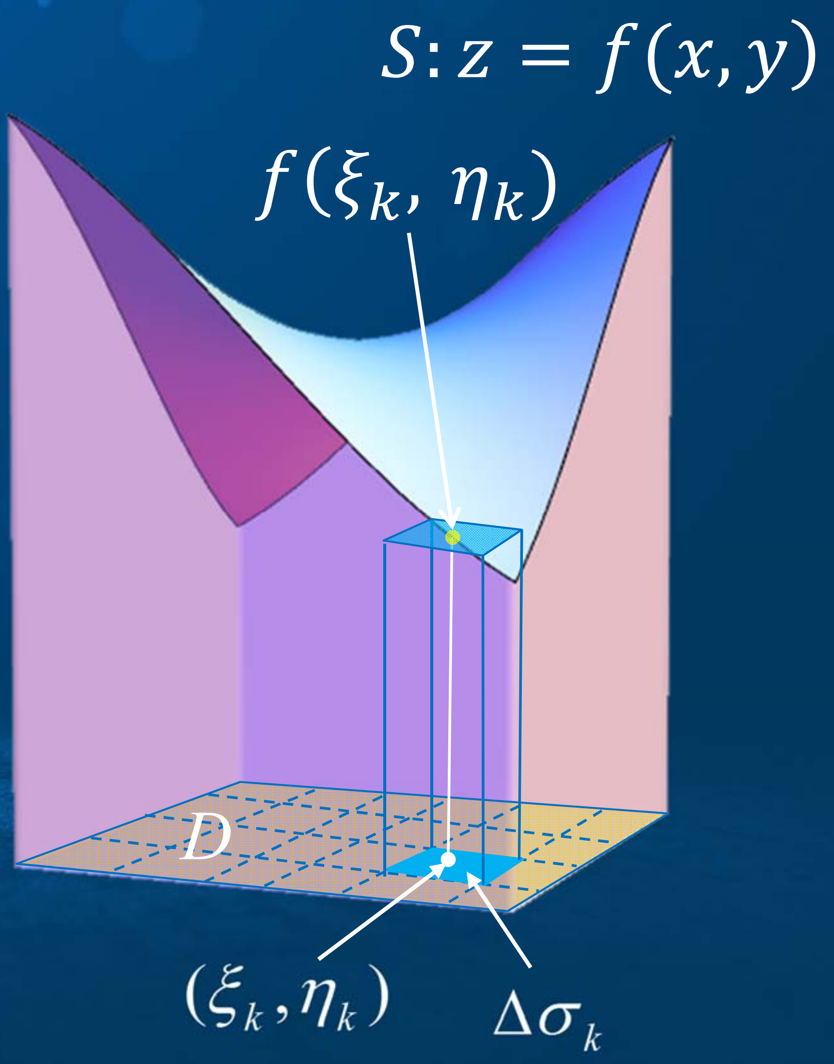
求以曲面$S: z=f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$为顶，$xOy$ 面上区域 D 为底的曲顶柱体的体积V .

2.取近似

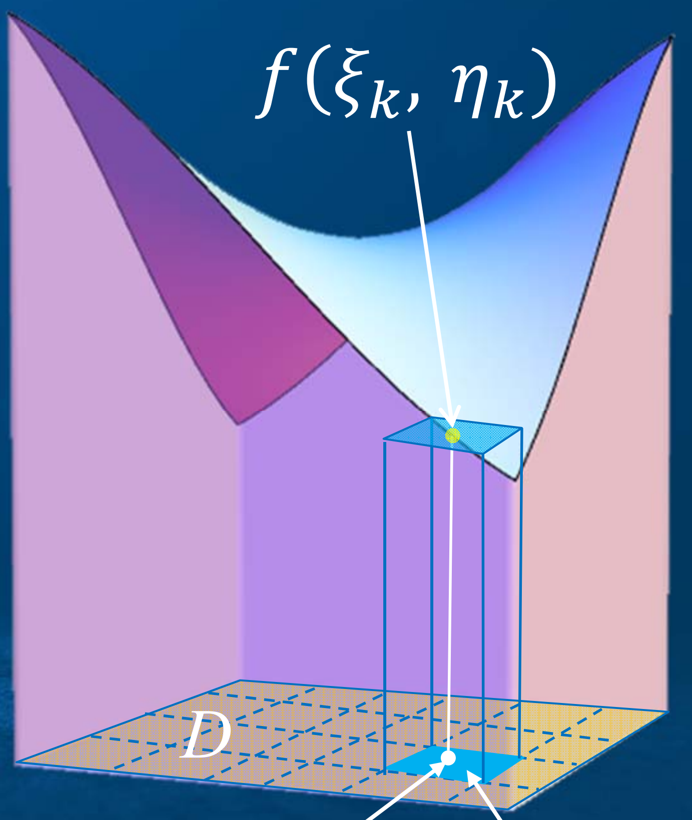
在每个$\Delta\sigma_k$中任取一点(ξ_k,η_k),

则 $\Delta V_k \approx f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

$(k=1,2,\cdots,n)$



求以曲面$S: z = f(x,y) \geq 0, (x,y) \in D$为顶，$xOy$ 面上区域 D 为底的曲顶柱体的体积V .



3.求和

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

4.取极限

$$V = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

其中 $d(T) = \max\{\Delta\sigma_k$的直径，$1 \leq k \leq n\}$

平面薄片的质量

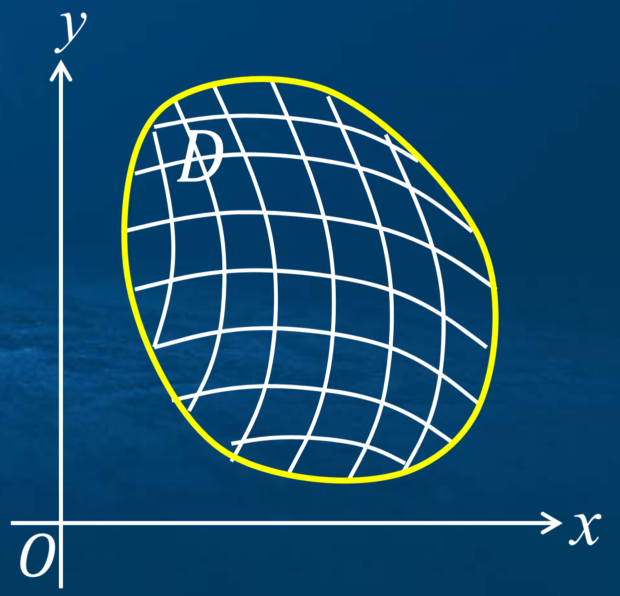
设密度函数为$\mu=\mu(x,y)\geq 0$，$(x,y)\in D$非均匀平面薄片占有xOy 面上区域 D，求平面薄片的质量M .

1.分割

用任意划分T 将D分为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_k,\cdots,\Delta\sigma_n$$

将平面薄片分为 n 个小薄片



- **平面薄片的质量**

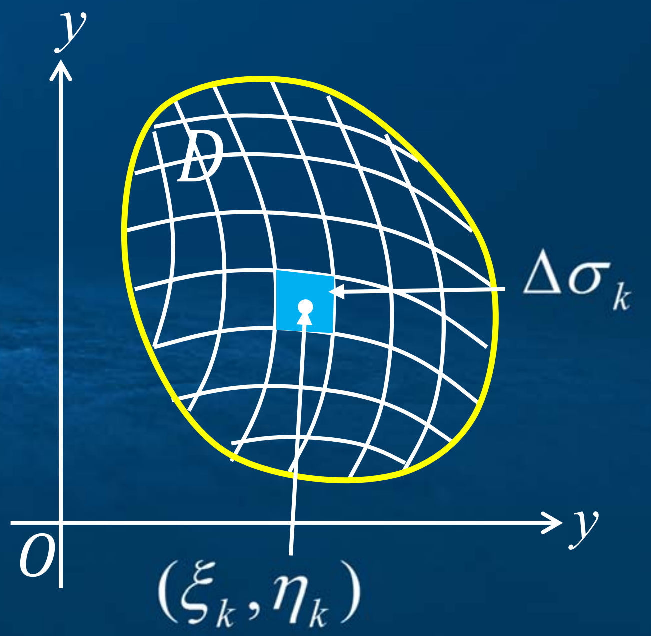
设密度函数为$\mu = \mu(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$非均匀平面薄片占有 xOy 面上区域 D ，求平面薄片的质量M .

2.取近似

在每个$\Delta\sigma_k$中任取一点(ξ_k, η_k)，

则 $\Delta M_k \approx \mu(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$

$(k = 1,2,\cdots,n)$



平面薄片的质量

设密度函数为$\mu=\mu(x,y)\geq 0$，$(x,y)\in D$非均匀平面薄片占有xOy面上区域D，求平面薄片的质量M．

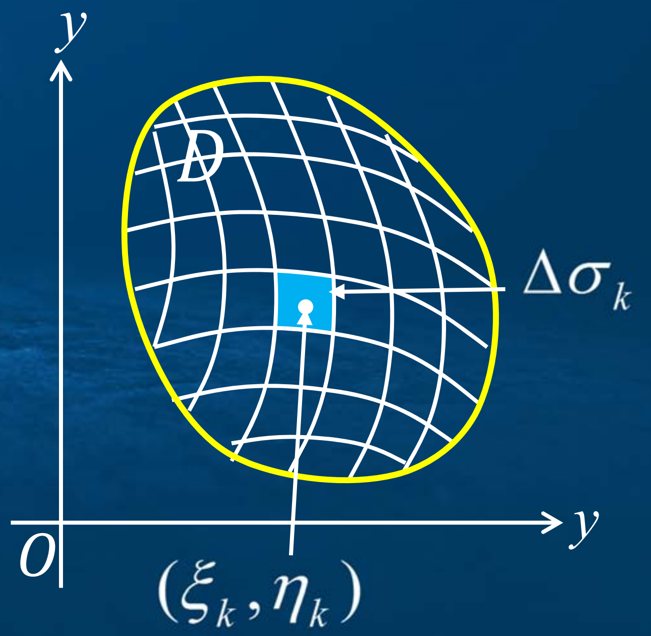
3.求和

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k\approx\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4.取极限

$$M=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

其中$d(T)=\max\{\Delta\sigma_k\text{的直径}，1\leq k\leq n\}$

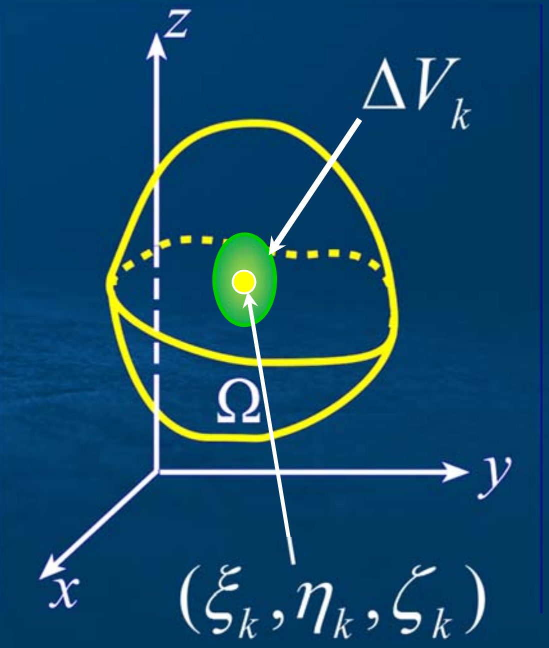


空间立体的质量

设物体在空间直角坐标 中所占的有界闭区域为Ω，所对应的体密度函数为$\mu = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in \Omega$，这里体密度是指单位体积的物体所含质量．求该空间物体的质量．

$$M = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k$$

其中$d(T) = \max\{\Delta V_k \text{的直径}, 1 \le k \le n\}$



(1) 解决问题的步骤相同

分割取近似，做和求极限

(2) 所求量的结构式相同

$$V=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \qquad M=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$M=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$

定义1 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上有定义．用任意划分T将D分成n个小的区域$\Delta\sigma_k(k=1,2,\cdots,n)$($\Delta\sigma_k$同时表示对应区域的面积)，在每个子区域$\Delta\sigma_k$上任取一点$(\xi_k,\eta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，记$d(T)=\max\{\Delta\sigma_k\text{的直径}, 1\le k\le n\}$，若

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=I$$

且I与划分T和在每个$\Delta\sigma_k$上点(ξ_k,η_k)取法无关，则称函数$f(x,y)$在区域D上可积，极限值I称为$f(x,y)$在区域D上的二重积分，记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k\ .$$

积分和

$$\lim_{d(T)\to 0} \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\Delta\sigma_k} = \iint_D \boxed{\underline{f(x,y)}\ \underline{\mathrm{d}\sigma}.}$$

积分表达式

x，y 称为积分变量

积分域　被积函数　面积元素

特别地，有　$\iint_D \mathrm{d}\sigma = D$的面积

曲顶柱体的体积：$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

平面薄片的质量：$M = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

定义2 设函数$f(x,y,z)$在有界闭区域 Ω上有定义，用任意划分 T 分成n个不重叠闭子域ΔV_k $(k=1,2,\cdots,n)$，在每个子区域上任取一点$(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta V_k$ ，记$d(T)=\max\{\Delta V_k$的直径$,1\le k\le n\}$，若

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k=I.$$

且极限值 I 与划分T及子区域上取点(ξ_k,η_k,ζ_k)位置无关，则称函数$f(x,y,z)$在区域 Ω上可积，极限值 I 称为函数 $f(x,y,z)$在区域Ω上的三重积分，记为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$

积分和

$$\lim_{d(T)\to 0}\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k} = \iiint_{\Omega} \boxed{f(x,y,z)\mathrm{d}V} \quad x,y,z\text{为积分变量}$$

积分表达式

积分域　　被积函数　　体积元素

特别地，有　　$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \Omega$的体积

空间立体的质量：$M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$

二重积分的存在

1. 若函数$f(x,y)$在有界闭区域 D上连续, 则$f(x,y)$在D上可积.

2. 若有界函数$f(x,y)$在有界闭区域D上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续，则$f(x,y)$在D上可积.

3. 若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上可积， $g(x,y)$在D上除去有限个点或有限条光滑曲线外均与$f(x,y)$ 相等，则$g(x,y)$在D上也可积，且二函数在D上的二重积分相等.

性质1 设函数$f(x,y)$, $g(x,y)$在有界闭区域D上可积，k为常数，则函数$f(x,y)\pm g(x,y)$和$kf(x,y)$也在D上可积，且有

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

—— 二重积分的线性运算性质

性质2 将有界闭区域D分成除边界外互不重叠的两个闭子区域D_1和D_2，若函数$f(x,y)$在区域D上可积，则 $f(x,y)$也在D_1和D_2上可积，且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

—— 二重积分对积分区域的可加性

性质3 若函数$f(x,y), g(x,y)$在有界闭区域D上可积.

(1) 若$f(x,y) \geq 0$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geq 0$. 进一步，若$f(x,y)$在D上连续，则$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$当且仅当在 D上有$f(x,y) = 0$.

(2) 若在D上$f(x,y) \leq g(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 特别有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma .$$

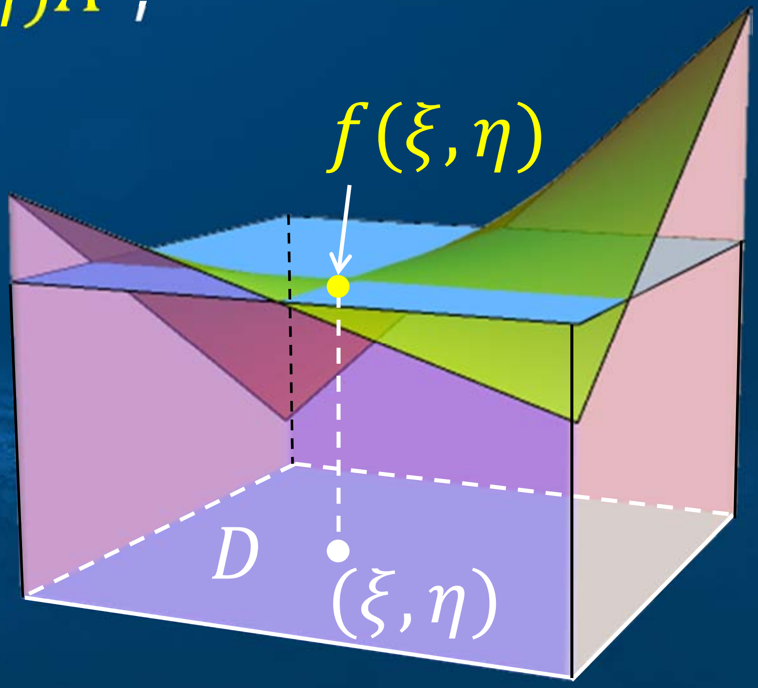
(3) 若存在常数m和M使得在D上成立$m \leq f(x,y) \leq M$，则有

$$mA \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq MA$$，其中A为区域D的面积 .

性质4(积分中值定理) 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则存在$(\xi,\eta)\in D$使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A,$$

其中A为区域D的面积．



积分中值定理的几何意义

$$\frac{1}{A}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad \text{积分平均值}$$

函数$f(x,y)$在D上的平均值.

例1 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

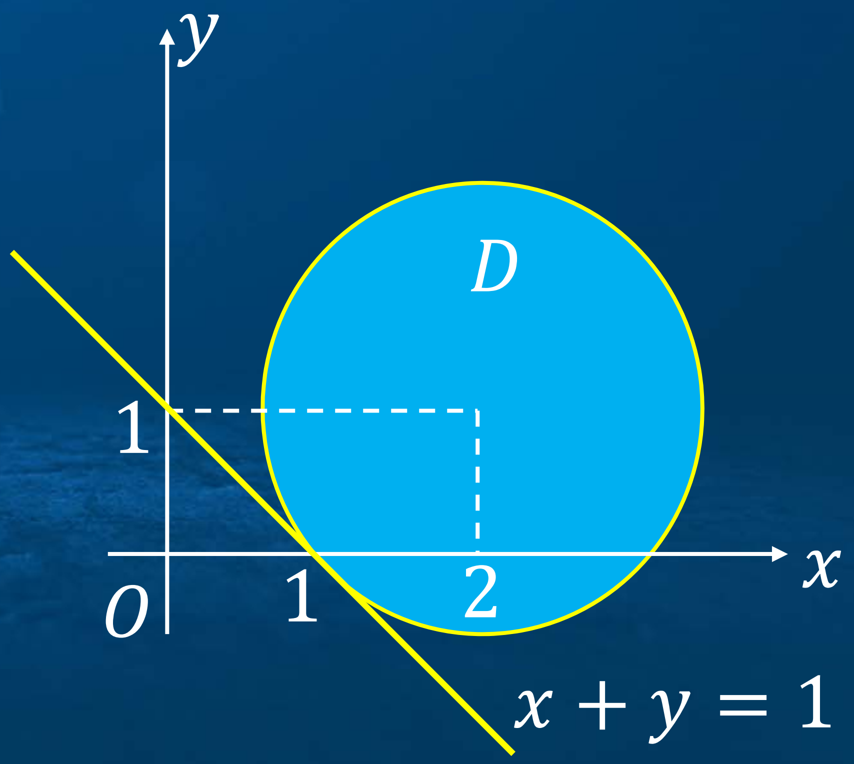
其中D: $(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2.$

【例1解】 当$(x,y)\in D$时 $x+y\ge 1$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \le (x+y)^3$$

因此

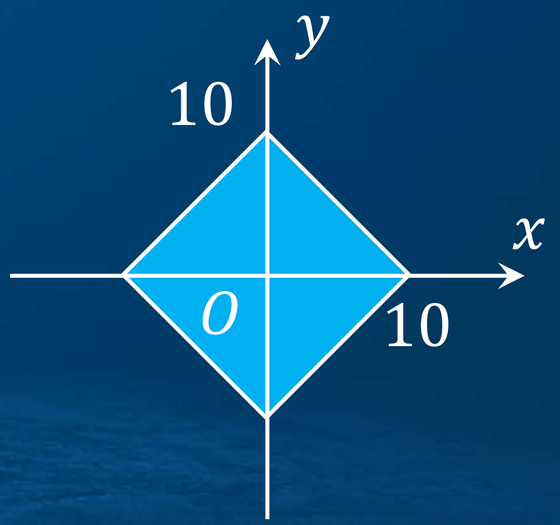
$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$



例2 估计下列积分之值

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\ D:|x|+|y|\le 10.$$

【例2解】 因为



$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

且区域D的面积为 $A=\left(10\sqrt{2}\right)^2=200$

$$\frac{200}{100+2}\le I\le\frac{200}{100}\ \Rightarrow\ 1.96078\le I\le 2$$

例3 设$D: x^2+y^2 \le r^2$，计算极限

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$