

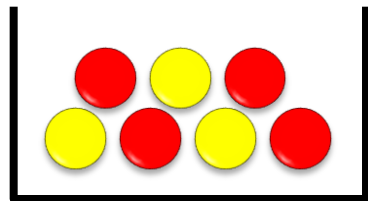


哈爾濱工業大學

第10讲 事件的独立性



两事件的独立性



例1 盒中有4红3黄共7个球，
有放回地取两次每次取一个，

记 A = “第一次取到红球”，

B = “第二次取到红球”，

$$P(B) = 4/7, P(B|A) = 4/7$$

这里 $P(B) = P(B|A)$

表明 A 的发生并不影响 B 发生可能性的大小，

这时称事件 A 、 B 独立.

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

由 $P(B) = P(B|A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B).$

两事件的独立性



- **定义** 设 A, B 是两个事件, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立.

➤ 这样定义比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

定义更好, 它不受 $P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约.

两事件的独立性



- 当 $P(A)>0$, 当 $P(B)>0$ 时,

$$P(AB)=P(A)P(B) \iff P(A|B) = P(A)$$

$$\iff P(B|A) = P(B)$$

定理 A 与 B 相互独立 $\iff A$ 与 \bar{B} 相互独立
 $\iff \bar{A}$ 与 B 相互独立 $\iff \bar{A}$ 与 \bar{B} 相互独立.

证明 $P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$

例2 设 $P(A)>0$, $P(B)>0$. 证明: A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立.

证明 若 A, B 互不相容, 则 $AB = \emptyset$,

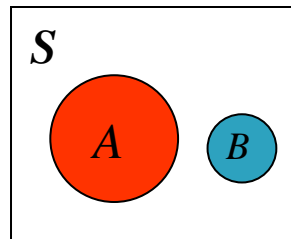
$$P(AB) = 0 \neq P(A)P(B) > 0,$$

所以 A, B 不相互独立.

若 A, B 相互独立, 则

$$P(AB) = P(A)P(B) > 0, \Rightarrow AB \neq \emptyset,$$

即, A, B 不是互不相容.



三个事件的独立性



定义 设三个事件 A 、 B 、 C ，若

$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} A, B, C \\ \text{两两独立} \end{array} \left. \vphantom{\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} A, B, C \\ \text{相互独立} \end{array}$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$



n 个事件独立



■ **定义** 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件，如果对任意 $k(1 < k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 具有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) \quad (1)$$

称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立.

(1)式代表的等式个数为

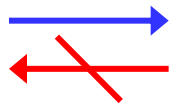
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$$

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^1 - C_n^0 = 2^n - n - 1.$$

n 个事件独立



n 个事件
相互独立



n 个事件
两两独立

实际应用中，常常不用定义去验证独立，而是通过实际意义判断。

n 个事件独立





定理 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则事件 $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ 也相互独立, 其中 $\hat{A}_i = A_i$ 或 $\hat{A}_i = \bar{A}_i$.

证明

只需证 $\bar{A}_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 反复用此结论,

即可得证. 对任意的 $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ 有

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 A_{i_1} \cdots A_{i_m}) &= P(A_{i_1} \cdots A_{i_m}) - P(A_1 A_{i_1} \cdots A_{i_m}) \\ &= P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) - P(A_1) P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) \\ &= [1 - P(A_1)] P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) \\ &= P(\bar{A}_1) P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}). \end{aligned}$$



例3 三人独立地去破译一份密码，他们能译出的概率分别为 $1/5$ ， $1/3$ ， $1/4$ ，求他们将此密码译出的概率.

解 设 A_i =“第 i 个人译出密码” ($i=1,2,3$)

A =“将密码译出” 所求概率为 $P(A)$.

已知 $P(A_1)=1/5$, $P(A_2)=1/3$, $P(A_3)=1/4$.

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_n) = 1 - \overline{P(A_1 \cup A_2 \cup A_n)}.$$



$$\underline{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$



$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$$

$$= \underline{1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)}$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)]$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6.$$



例4 某种型号的高射炮发一发击中目标的概率是0.6，现若干门高射炮同时发射，（每门发一发），问欲以99%以上把握击中飞机，至少要配置几门高射炮？

解 设至少要配 n 门炮，才能使飞机被击中的概率 ≥ 0.99 ，



令 A = “飞机被击中”, A_i = “第 i 门炮击中飞机”,
($i=1, 2, \dots, n$) 则 $P(A_i) = 0.6, (i=1, \dots, n)$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, i=1, 2, \dots, n.$$

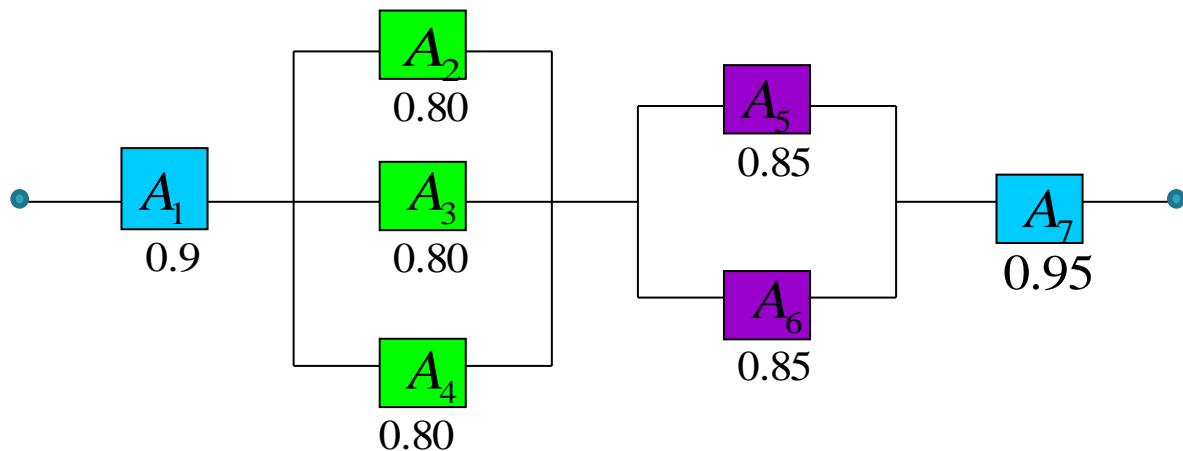
$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - (0.4)^n \geq 0.99 \end{aligned}$$

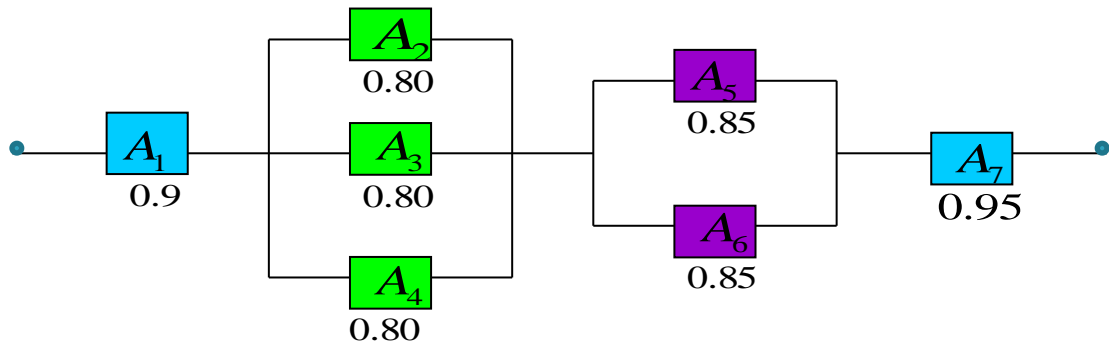
$$(0.4)^n \leq 0.01,$$

$$n \geq \frac{\lg 0.01}{\lg 0.4} = 5.026. \quad \text{至少6门炮.}$$



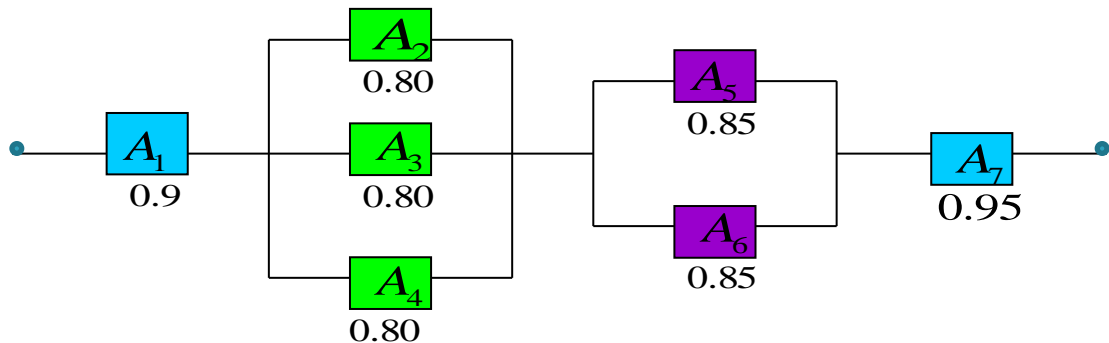
例5 下面是由独立元件 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ 构成的系统. 它们下方的数是它们各自正常工作的概率. 求系统正常工作的概率.





解 设 A = “系统正常工作”， A_i = “第 i 个元件正常工作”，则

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6) \cap A_7$$

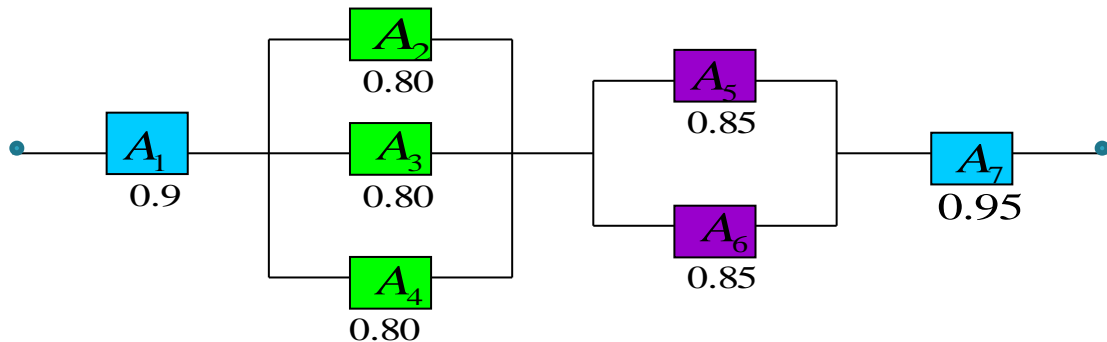


解 由独立性

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)P(A_5 \cup A_6)P(A_7)$$

$$P(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - \overline{P(\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \bar{A}_4)}$$

$$= 1 - P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = 0.992.$$



解：由独立性

$$\begin{aligned} P(A_5 \cup A_6) &= 1 - P(\overline{A_5 \cup A_6}) = 1 - P(\bar{A}_5)P(\bar{A}_6) \\ &= 0.9775, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)P(A_5 \cup A_6)P(A_7) \\ &= 0.9 \cdot 0.992 \cdot 0.9775 \cdot 0.95 = 0.829. \end{aligned}$$



谢 谢！