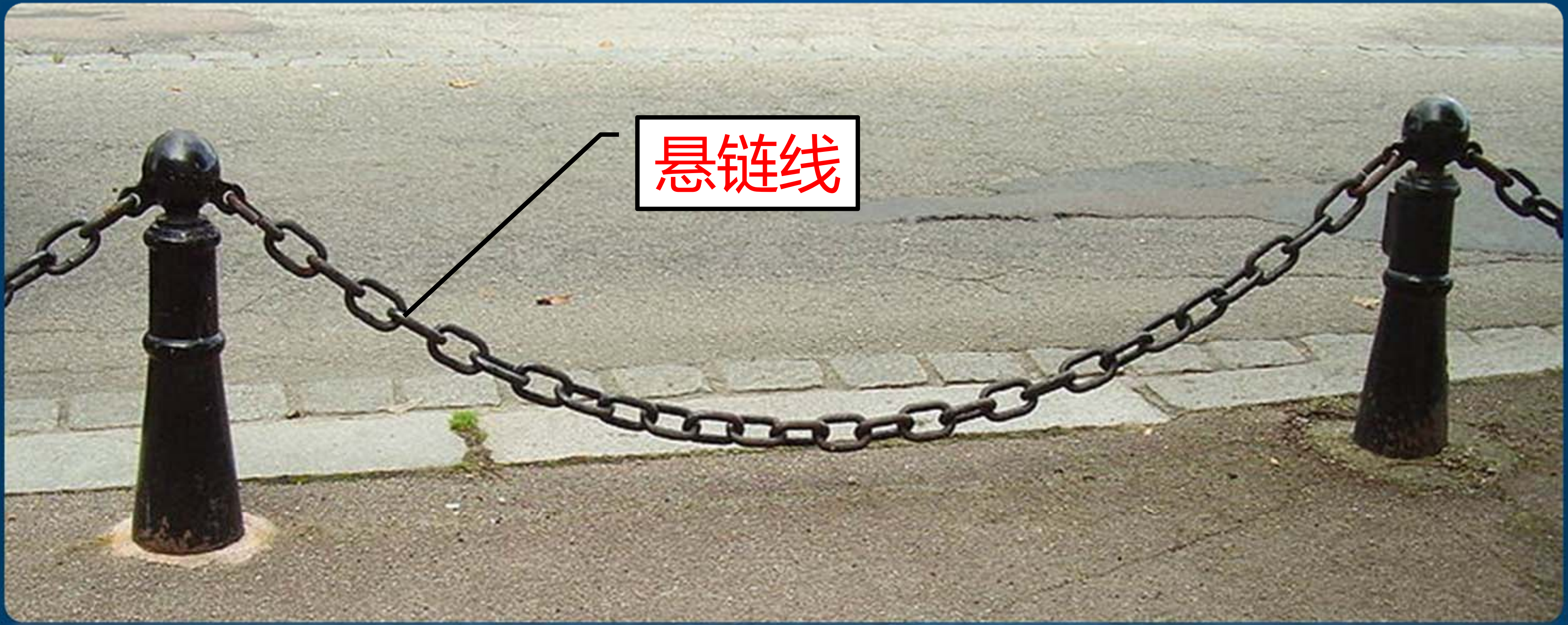
第50讲 可降阶的高阶微分方程

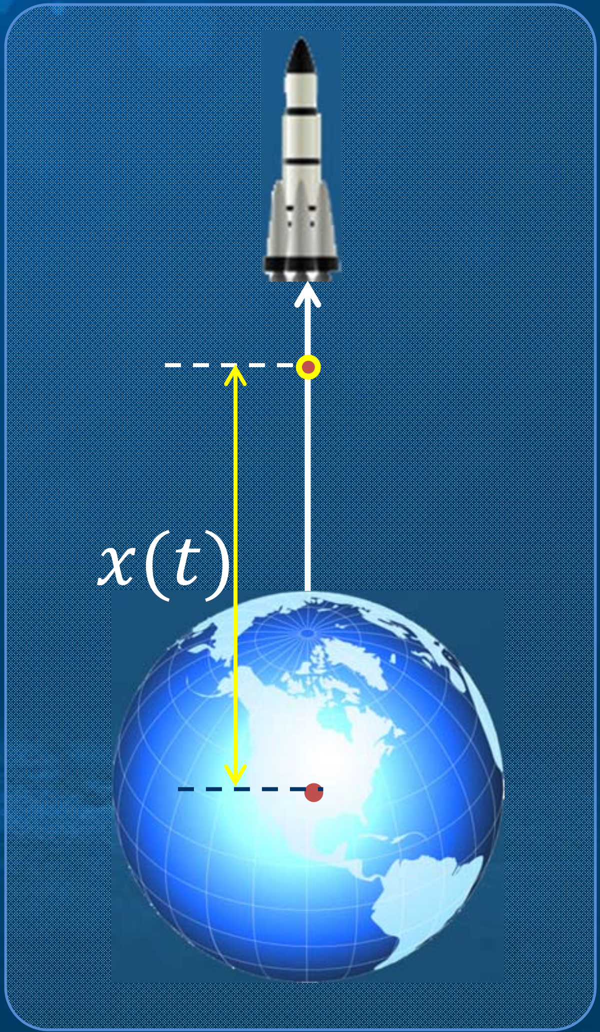


悬链线问题 → 解二阶微分方程 $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$

从地面垂直向上发射火箭问题

二阶微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{mgR^2}{x^2}$$



- $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程
- $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程
- $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

第50讲 可降阶的高阶微分方程——主要内容

$$y^{(n)} = f(x) \xrightarrow{\text{令} z = y^{(n-1)}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$$ 积分问题

$$\Rightarrow z = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,\ \text{即}\ y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \right] \mathrm{d}x + C_2$

$$= \int \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + C_1 x + C_2 \qquad \cdots$$

例1 求微分方程 $y''' = \sin x - \cos x$的通解．

若函数$p(x)$在 $(-\infty, +\infty)$内具有$n+1$阶导数，且

$$p^{(n+1)}(x) = 0\ ,$$

则$p(x)$为次数不超过n的多项式．

$$p^{(n+1)}(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad p^{(n)}(x) \equiv C_1 \quad \Rightarrow \quad p^{(n-1)}(x) \equiv C_1 x + C_2$$

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

另外两种类型的高阶微分方程

$$y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right) \qquad y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}\right)$$

$$\Downarrow \; u(x) = y^{(n-2)}$$

$$\boxed{u'' = f(x, u') \quad \text{重点研究} \quad u'' = f(u, u')}$$

$$\Downarrow \; y^{(n-2)} = u(x)$$

$$y(x)$$

$y'' = f(x, y')$ 型微分方程

$y' = p(x)$，则 $y'' = p'$

$p' = f(x, p)$ ⟶ 通解 $p = \varphi(x, C_1)$

即 $y' = \varphi(x, C_1)$

积分

原方程通解 $\boldsymbol{y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2}$

例2 求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

例3 设有一均匀、柔软的绳索，两端固定，绳索仅受到重力的作用下垂，试问该绳索在平衡状态下是怎样的曲线？

【条件量化及建模】

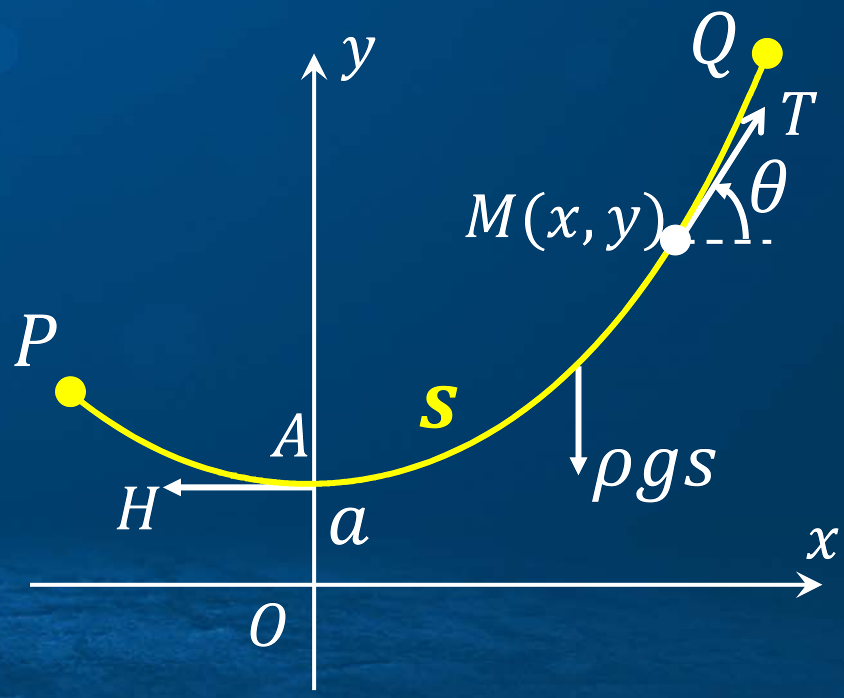
设曲线最低点为A，$|OA| = a$

$M(x,y)$为曲线上任一点，$|\widehat{AM}| = s$

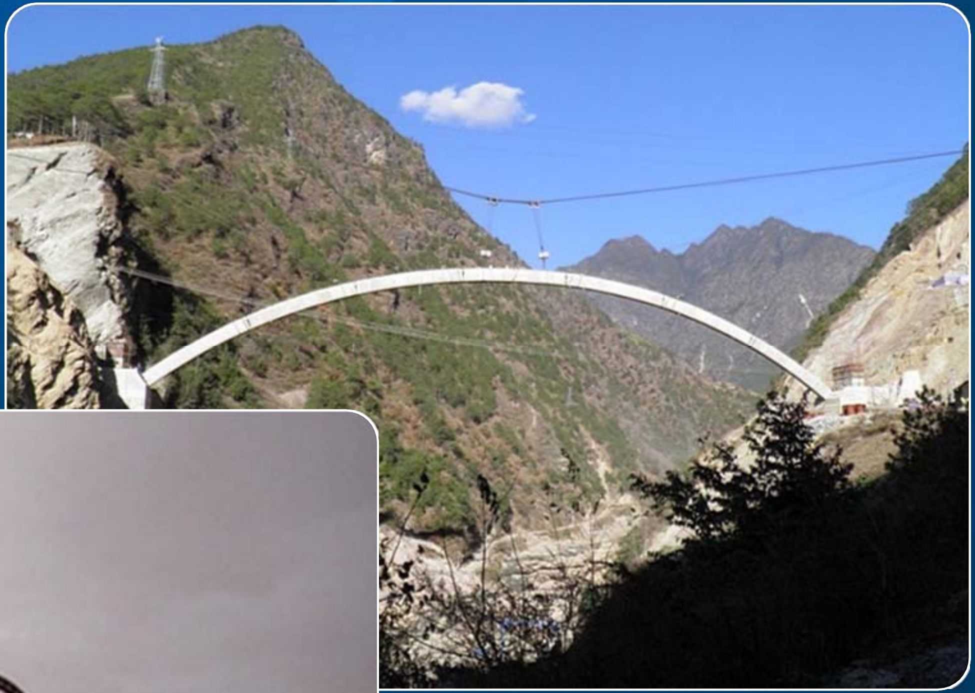
点A处的张力为H，方向水平向左

点M处的张力为T，方向与曲线相切

设绳索线密度为ρ



$$T\sin\theta = \rho g s, T\cos\theta = H \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{a}s \ \left(a = \frac{H}{\rho g}\right)$$



悬链线应用于桥梁的设计

$y'' = f(y, y')$型微分方程

$y' = p(y)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

$p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p) \longrightarrow$ 通解 $p = \varphi(y, C_1)$

即 $y' = \varphi(y, C_1)$

$\Big\downarrow$ 分离变量后积分

原方程通解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$

例4 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0, \\ y|_{x=0} = 0\,,\ y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

例5 设曲线的曲率等于常数，求曲线的方程．

- 设曲线 C 的直角坐标方程为 $y = f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数，则曲线 C 点 $M(x, y)$ 处的曲率为

$$\boxed{K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.}$$

【例5解】 设曲线方程为$y = y(x)$，且

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}\ (\text{其中}R > 0\text{为常数}) \xrightarrow{\text{设}y''>0} \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}$$

令$y = p(y)$，则有

$$\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{R} \Longrightarrow \frac{p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}p = \frac{1}{R}\mathrm{d}y$$

$$\int \frac{p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}p = \int \frac{1}{R}\mathrm{d}y \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{R}y + C_1$$

【例5解】

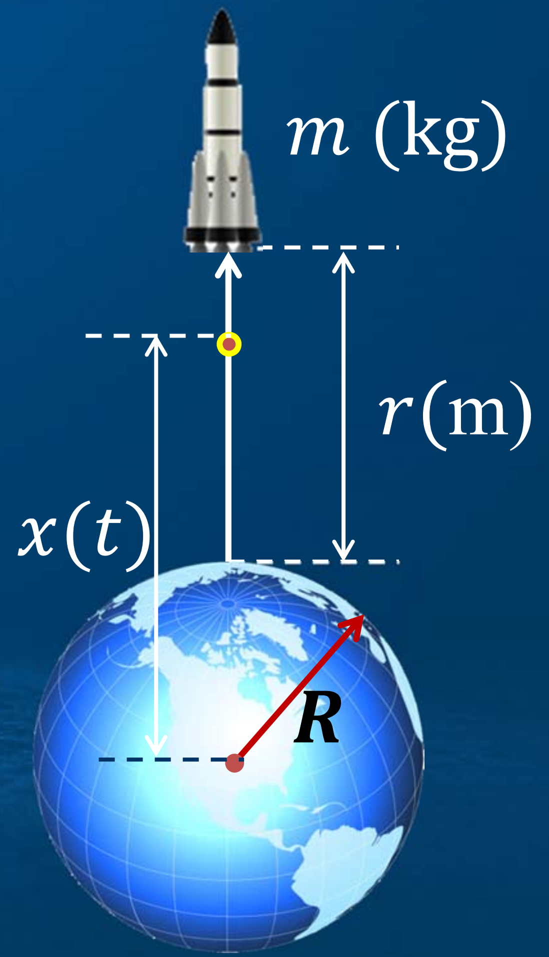
$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{R}y+C_1 \Rightarrow p=\pm\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{R}y+C_1\right)^2}}{\frac{1}{R}y+C_1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{R}y+C_1\right)^2}}{\frac{1}{R}y+C_1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{R}y+C_1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{R}y+C_1\right)^2}}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{R}y+C_1\right)^2}=-\frac{1}{R}x+C_2 \Rightarrow (x-RC_2)^2+(y+RC_1)^2=R^2$$

圆心为任意点半径为R的圆

例6 从地面垂直向上发射质量为m (kg)的火箭，要使火箭距离地面 r(m), 火箭应至少具备多大的初速度？ 若火箭脱离地球引力范围，火箭又应具备多大的初速度?



设 $t(s)$ 时火箭距地面$x(t)$(m)

模型：$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{mgR^2}{x^2}, \\ x(0) = R, x'|_{x=R+r} = 0. \end{cases}$