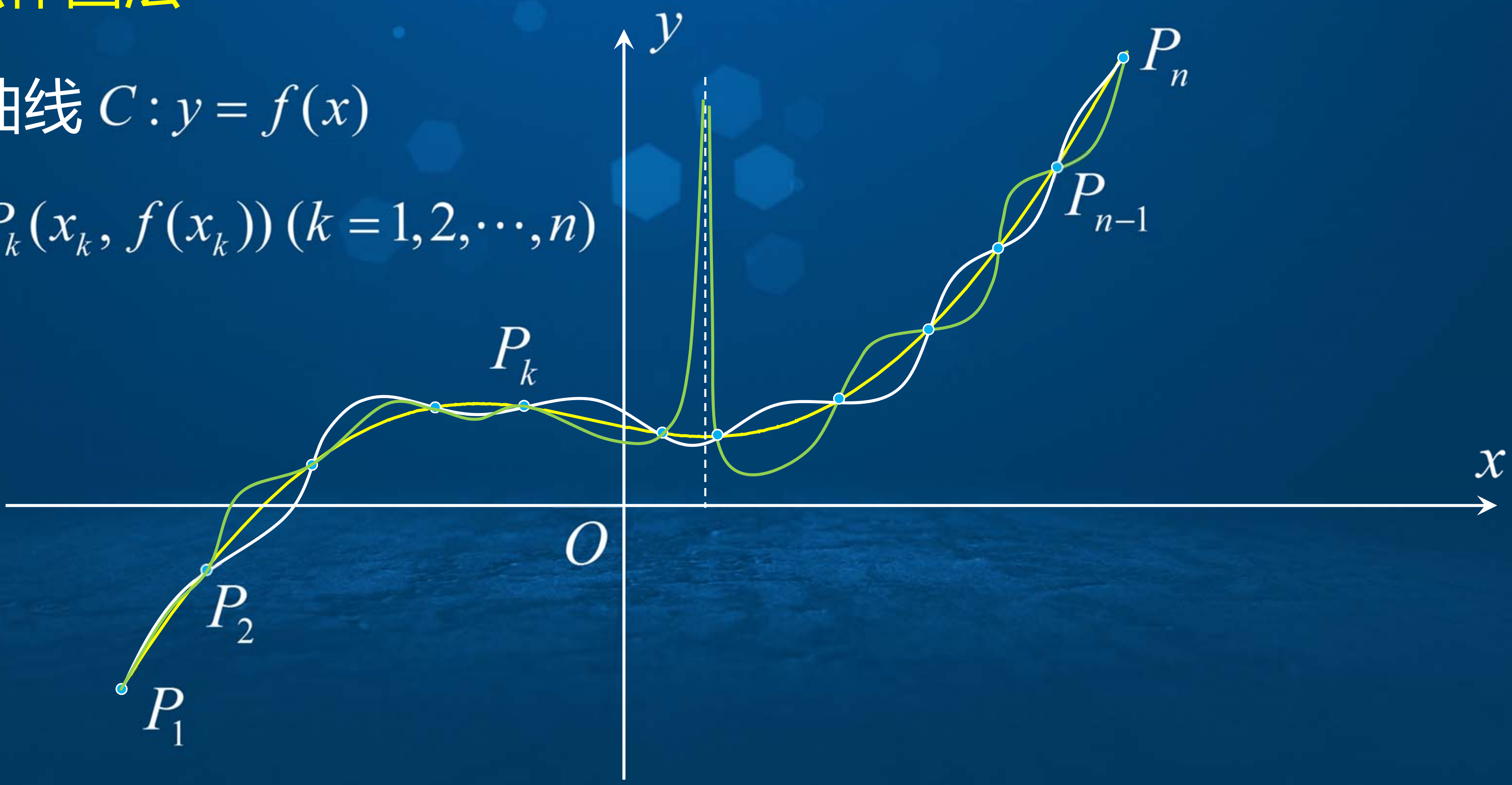
第35讲 利用导数研究函数的几何性态

描点作图法

描绘曲线 $C: y=f(x)$

取点 $P_k(x_k, f(x_k))\ (k=1,2,\cdots,n)$

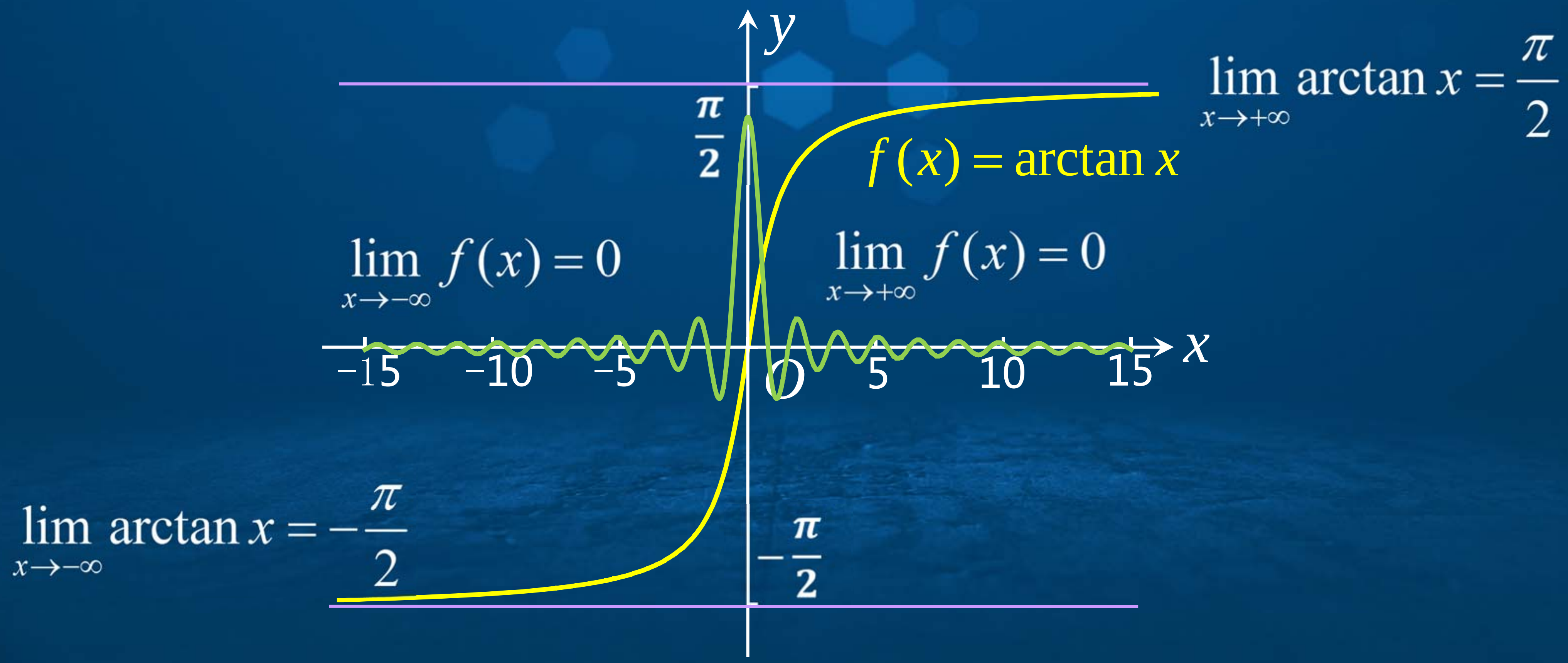


- 函数图形的几何性态回顾
- 函数图形的渐近线
- 函数的几何性态研究

函数图形特性	条件	结论	示例
增减性	$f'(x)>0$	$f(x)$ 增	$f(x)=x$
	$f'(x)<0$	$f(x)$ 减	$f(x)=-x$
凹凸性	$f''(x)>0$	$f(x)$ 下凸（凹）	$f(x)=x^2$
	$f''(x)<0$	$f(x)$ 上凸（凸）	$f(x)=-x^2$

点的类型	极值点与拐点判定方法	示例
极值点 x_0	$f'(x)$ 在 x_0 两侧异号	$y=x^2, y=-x^2$ 极值点$x_0=0$
	$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$	
拐点 $(x_0, f(x_0))$	$f''(x)$ 在 x_0 两侧异号	$y=x^3$ 拐点$(0,0)$
	$f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0$	

变化趋势——接近水平直线 $y=0, y=\pm\dfrac{\pi}{2}$



变化趋势——接近铅直直线 $x=0, x=1$

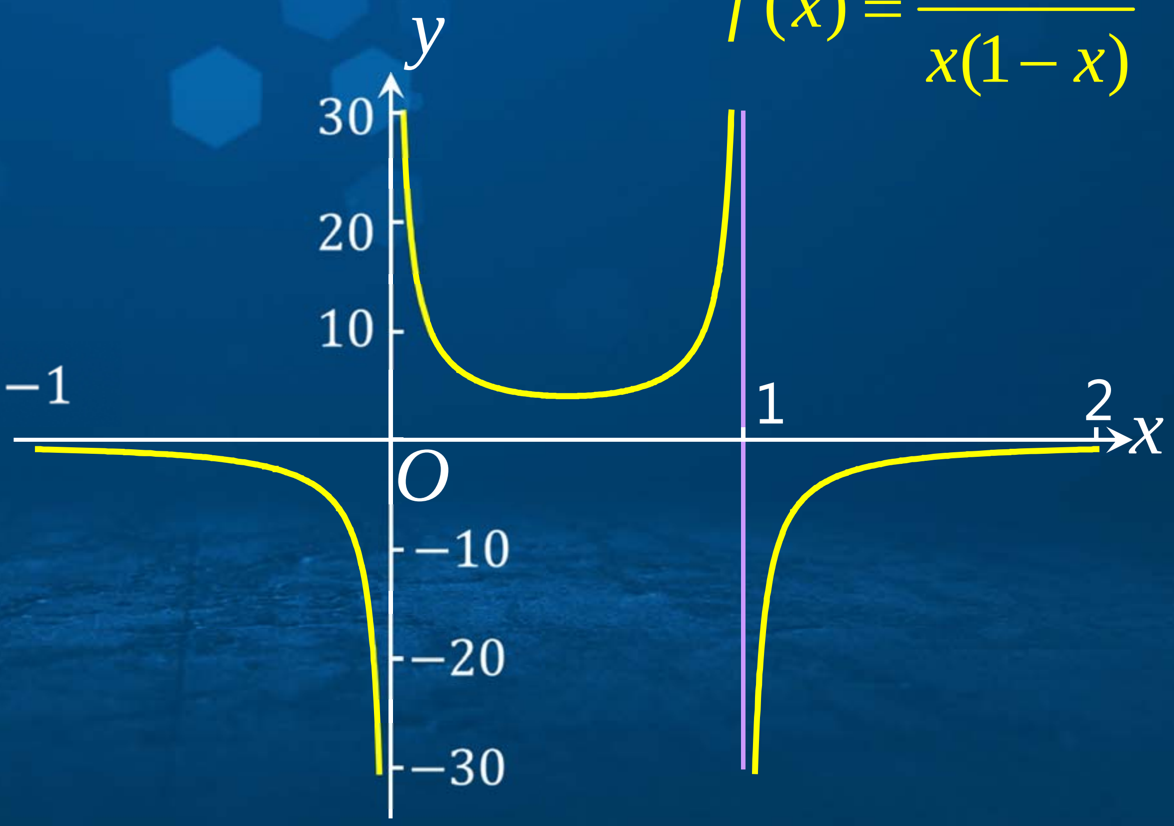
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

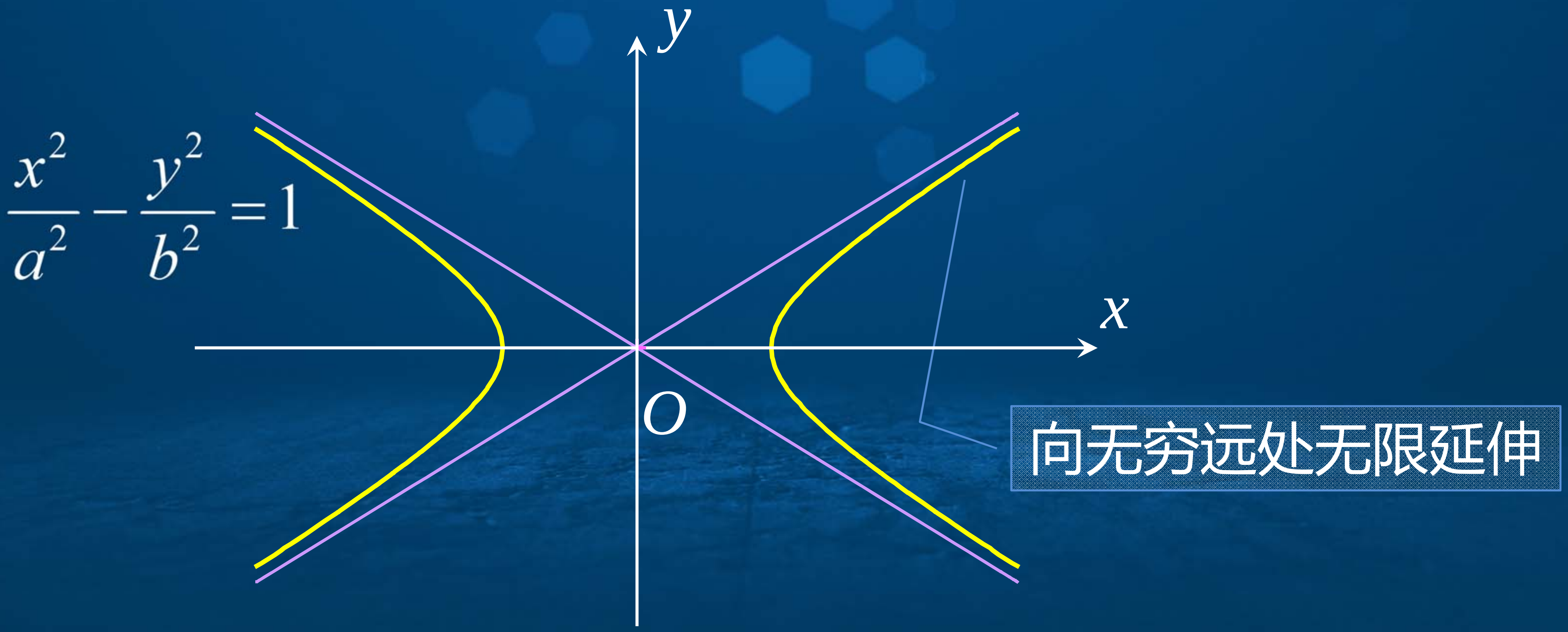
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

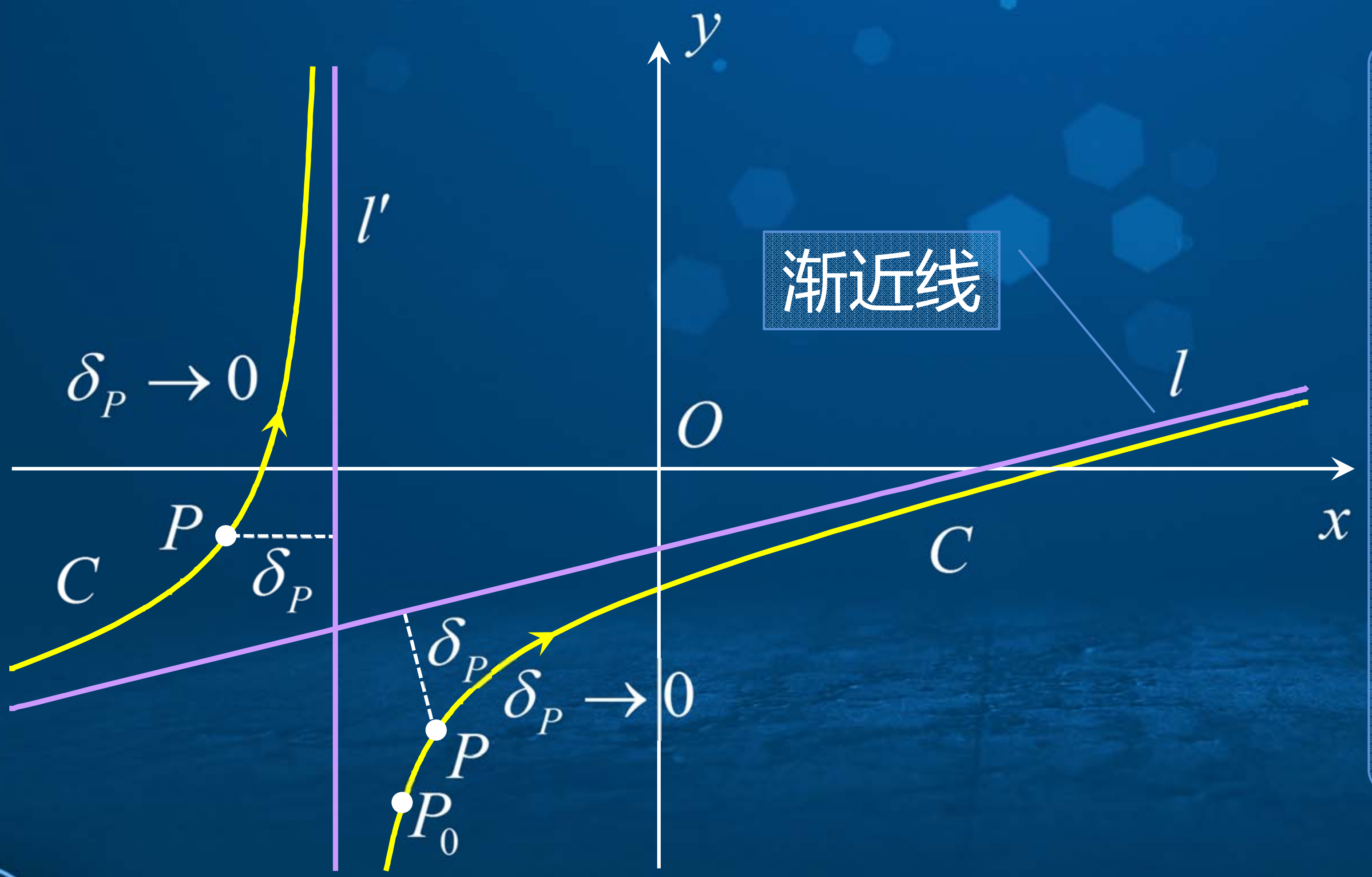
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$f(x)=\frac{1}{x(1-x)}$$



变化趋势——接近斜直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$





定义1 直线 l 称为曲线 C 的**渐近线**，若点 P 沿 C 的某一支无限远离某一定点 P_0 时，动点 P 到直线 l 的距离

$$\delta_P \to 0.$$

定理1（曲线渐近线的求法）

（1）曲线 $C: y = f(x)\ (a < x < +\infty)$ 存在水平渐近线 $y = b$ 的充要条件是：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

（2）曲线 $C: y = f(x)\ (a < x < b)$ 存在铅直渐近线 $x = a$ 的充要条件是：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

（3）曲线 $C: y = f(x)\ (a < x < +\infty)$ 存在斜渐近线 $y = kx + b$ 的充要条件是：$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x},\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx],\ k \neq 0$.

定理1（曲线渐近线的求法）

（3）曲线

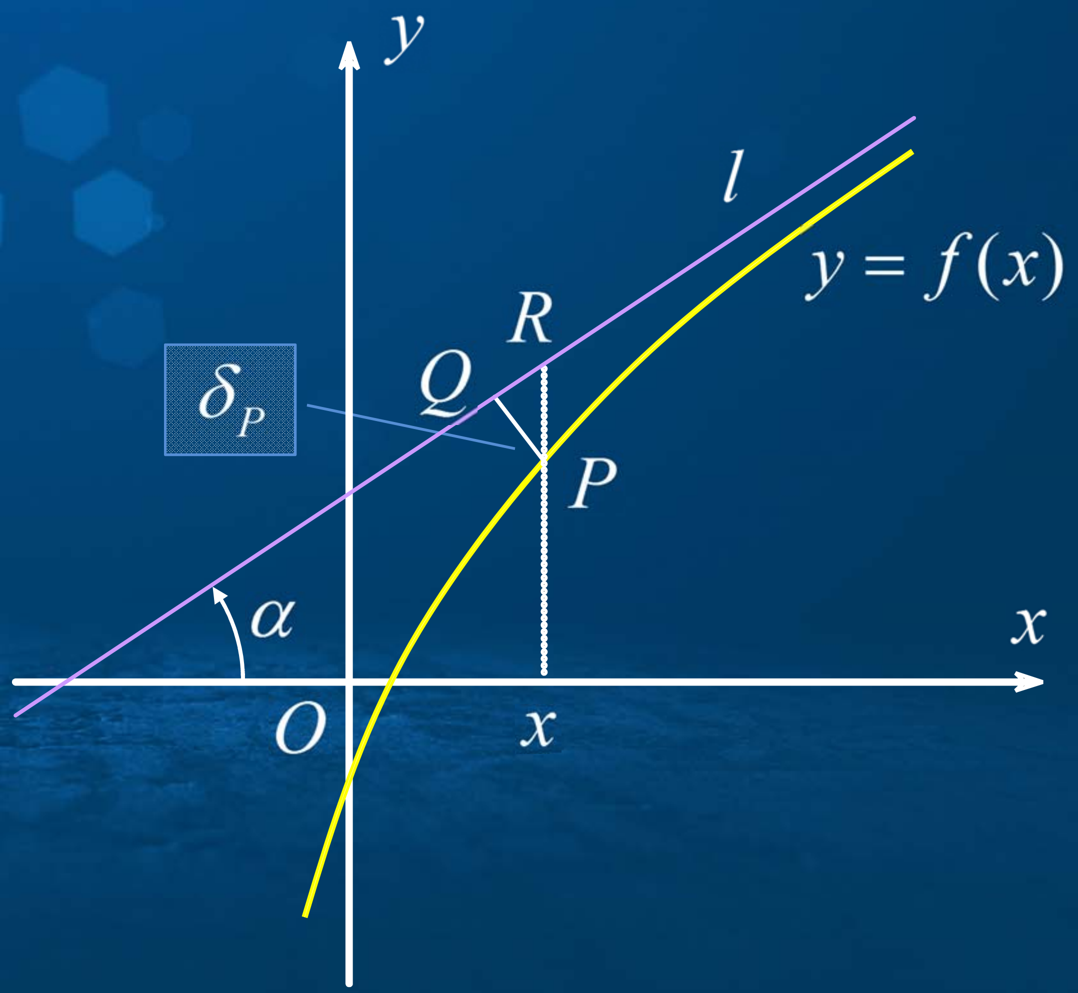
$$C: y=f(x)\,(a<x<+\infty)$$

存在斜渐近线 $y=kx+b$

的充要条件是：

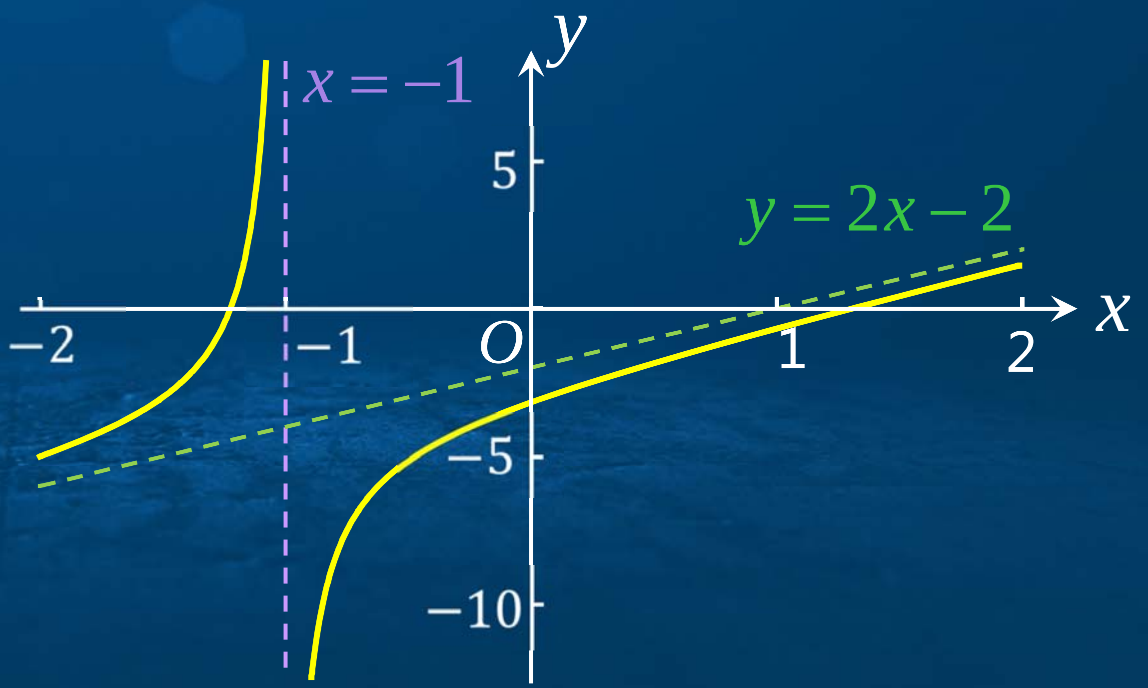
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ k\neq 0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$



例1 求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的斜渐近线.

例2 求曲线 $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x+1}$ 的渐近线.



分析作图法

第一步: 函数的一般性质分析：确定函数 $f(x)$ 的定义域、值域、奇偶性、周期性、与坐标轴的交点；

第二步: 求一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$，确定使 $f'(x)=0$ 的点及 $f'(x)$ 不存在的点，以及使 $f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点，即找出函数 $f(x)$ 的可能极值点和拐点；

第三步: 列表分析，分别根据 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号确定 $f(x)$ 的单调区间和凹凸区间、极值点和拐点；

第四步: 用渐近线界定曲线的变化趋势．求水平渐近线、铅垂渐近线和斜渐近线；

第五步: 描点作图，并标出关键点的坐标，使$y=f(x)$的图形轮廓清晰，特征分明．

例3 作出函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的图形.

例4 作出函数 $y=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$ 的图形.