哈爾濱工業大學

第16讲 正态分布

正态分布(Normal)

- 定义 若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

μ,σ为常数，且$\sigma>0$，称X服从参数为μ,σ的正态分布或高斯(Gauss)分布，也称X为正态变量，记作$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

可以验证：$f(x)\geq 0$,

概率密度的性质

下证：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$ 　　令$t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$\boxed{\text{记 } I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$ 　$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right)$

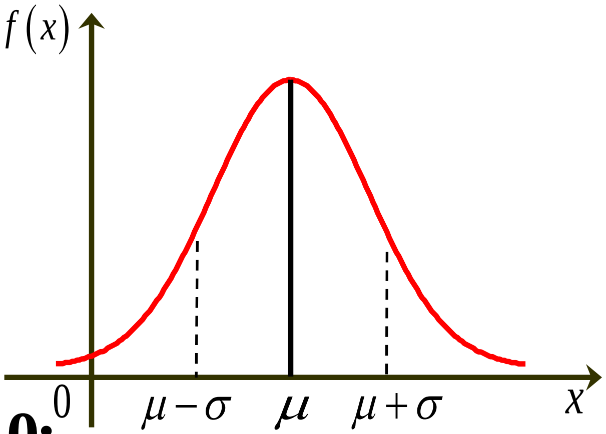
$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}} dtdu$ 令$\begin{cases} t = r\cos\theta, \\ u = r\sin\theta. \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi. \Rightarrow I = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

正态分布密度曲线特征

(1) 关于 $x=\mu$ 对称;

(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;



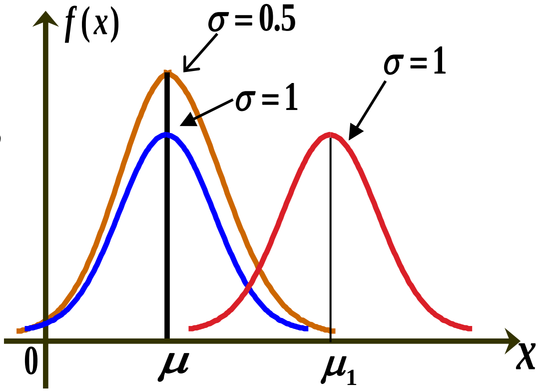
(3) 当 $x\to\pm\infty$ 时, $f(x)\to 0$;

(4) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;

两个参数的含义

(5) μ决定对称轴的位置.

当固定σ 值，改变 μ 值时，$f(x)$的形状不变，只是沿着x轴平移；



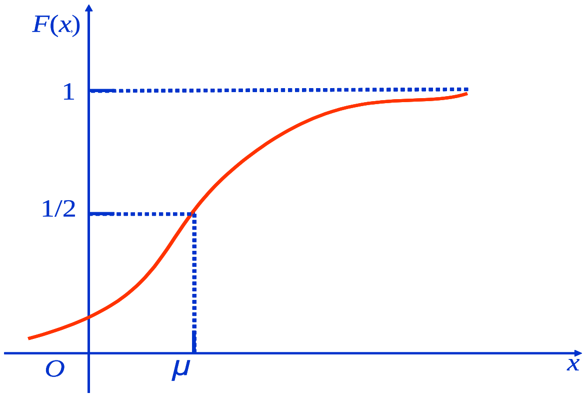
(6) σ决定离散程度.

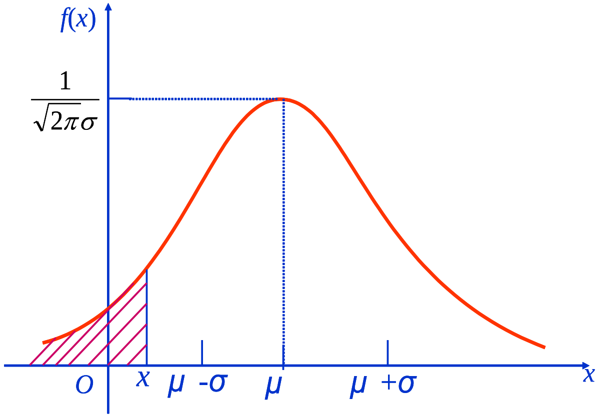
当固定μ值，改变σ 值时，$f(x)$的对称轴不变，但形状改变. σ 越大，图形越矮越胖，σ 越小，图形越高越瘦.

正态变量X的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

$$-\infty < x < +\infty$$

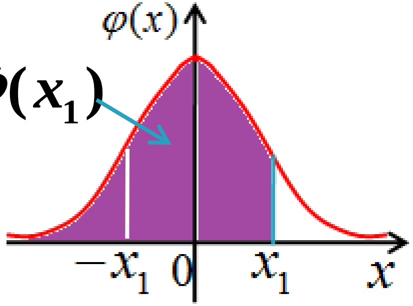




标准正态分布定义

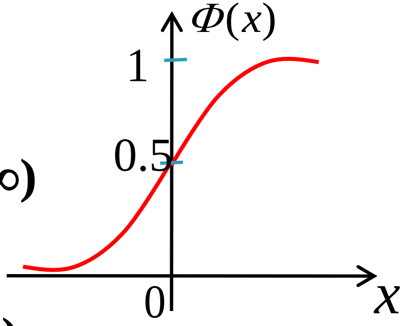
- 若$X \sim N(0,1)$，称X服从标准正态分布.
- 概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty<x<+\infty)$$



- 分布函数为

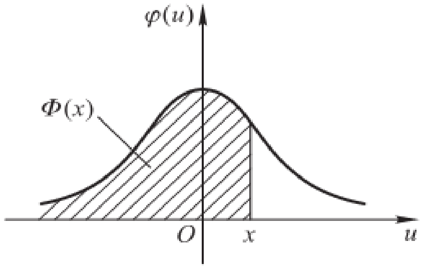
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad (-\infty<x<+\infty)$$



- 性质

$$\varphi(-x)=\varphi(x),\ \Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

附表 2　标准正态分布函数值表



$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2

$$\Phi(0.76)=0.7764$$

一般的正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的分布函数$F(x)$与标准正态分布的分布函数$\Phi(x)$间的关系为

$$\boxed{F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

证明

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \qquad \text{令}v=\frac{t-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}dv=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

$$\boxed{\text{即，若}X\sim N(\mu,\sigma^2),\text{则}\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).}$$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2), \forall a<b$有

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

例1 某种电池的寿命(h) $X\sim N(160,20^2)$,分别求寿命小于120h和寿命大于200h的概率.

解 $$P(X<120)=F(120)=\Phi\left(\frac{120-160}{20}\right)=\Phi(-2).$$

$$=1-\Phi(2)\overset{\text{查表}}{=}1-0.9772=0.0228.$$

$$P(X>200)=1-F(200)=1-\Phi\left(\frac{200-160}{20}\right)$$

$$=1-\Phi(2)\overset{\text{查表}}{=}1-0.9772=0.0228.$$

例2 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$P\{|X-\mu|<\sigma\}$, $P\{|X-\mu|<2\sigma\}$, $P\{|X-\mu|<3\sigma\}$.

解 $P\{|X-\mu|<\sigma\} = P\{\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\}$

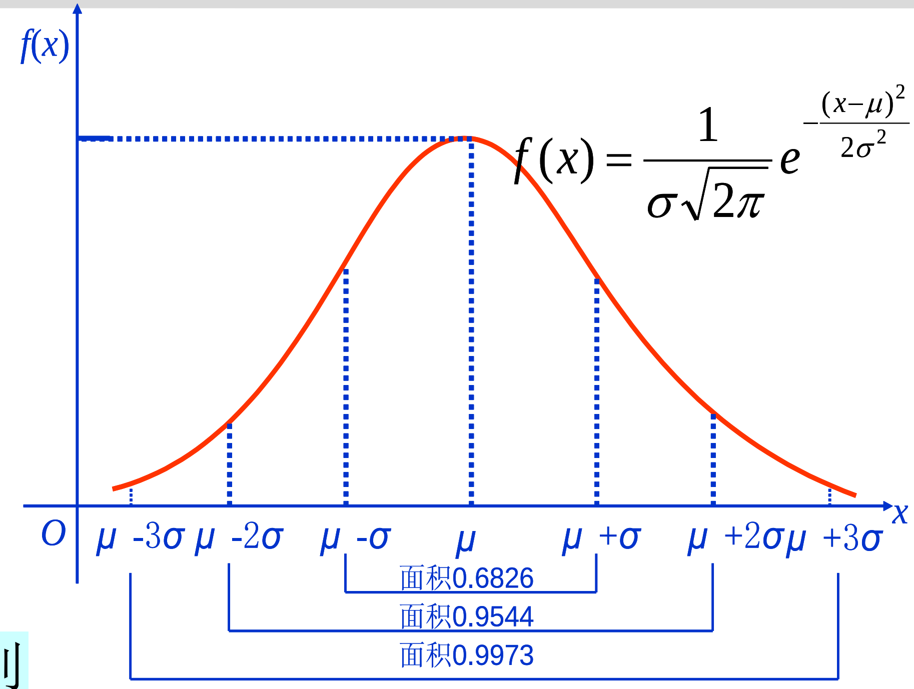
$$= \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826.$$

同理有 $P\{|X-\mu|<2\sigma\} = 0.9544,$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\} = 0.9973.$$

X几乎总是落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之中.



f(x)
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
O
x
μ -3σ
μ -2σ
μ -σ
μ
μ +σ
μ +2σ
μ +3σ
面积0.6826
面积0.9544
面积0.9973

3σ准则

正态分布的应用

在实际中，许多随机变量都服从或近似地服从这种“中间大，两头小”的正态分布.

例如,

✓测量一个零件长度的测量误差,

✓向一中心点射击的横向偏差或纵向偏差,

✓电子管中的噪声电流或电压,

✓飞机材料的疲劳应力等等.

谢　　谢！