第30讲 柯西中值定理与洛必达法则

不定式极限的计算

$$\lim[f(x)-g(x)]=\infty-\infty \qquad \lim[f(x)g(x)]=0\cdot\infty$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \qquad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$\frac{0}{0}$ 型不定式极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=?$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=?$

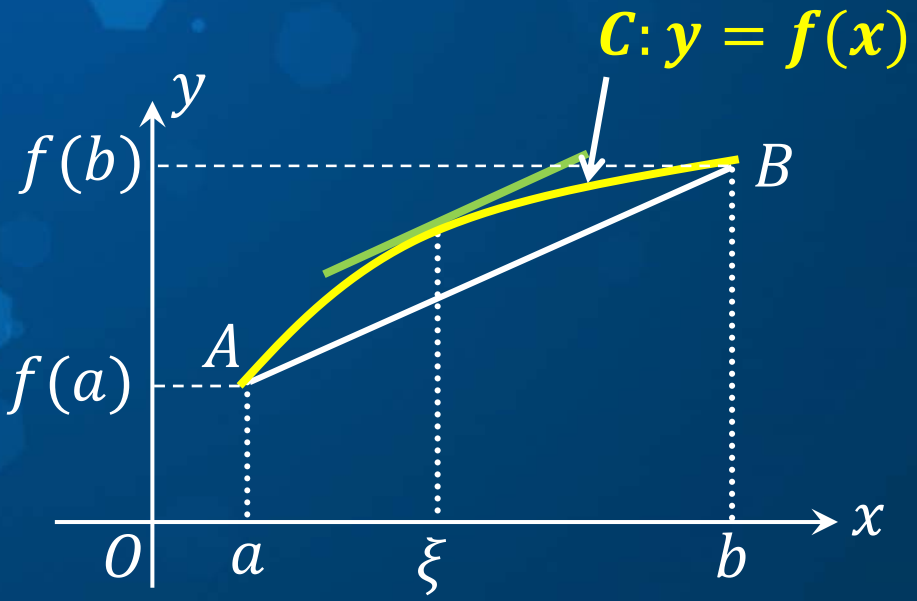
柯西中值定理

洛必达法则

拉格朗日中值定理

如果函数$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k_{AB}.$$



$$C: \begin{cases} x = G(t), \\ y = F(t). \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

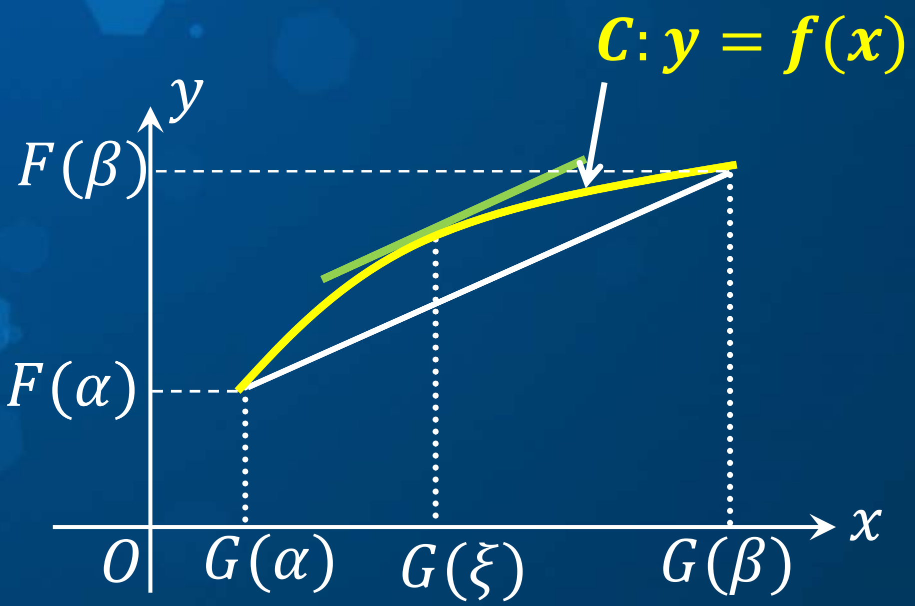
考虑拉格朗日中值定理的参数方程情形.

拉格朗日中值定理

$$
\begin{cases}
k_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}, \\
k_{AB} = f'(G(\xi)) \\
f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{F'(t)}{G'(t)}
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{G(\beta) - G(\alpha)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.}
$$

柯西中值定理



$$
C: \begin{cases} x = G(t), \\ y = F(t). \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)
$$

定理1 (柯西中值定理) 如果函数 $f(x)$和$\varphi(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在区间 (a,b)内可导, 且 $\varphi'(x)\neq 0,\ a<x<b$;

那么至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

例1 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

求 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限的洛必达法则

定理 2 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间$(a, a+\delta)$ 内满足:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$;

(2) $f(x), g(x)$ 在$(a, a+\delta)$ 内可导，且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$) ；

则 $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{（或} \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty\text{)}.$$

注: (1) 对于 $x \to a^-$, $x \to a$ 的情形, 也有相应结论;

(2) 当 $x \to +\infty$ 时, 令$t = \dfrac{1}{x}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对自变量变化的六种过程都成立

对于$x \to -\infty$, $x \to \infty$ 也有相应结论.

求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限的洛必达法则

定理 3 设函数$f(x), g(x)$在区间$(a, a+\delta)$ 内满足:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$;

(2) $f(x), g(x)$ 在$(a, a+\delta)$ 内可导，且$g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$) ;

则 $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{或} \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty).$$

该定理对于$x \to a^-, x \to a, x \to \mp\infty, x \to \infty$也成立.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\tan^3 x}$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n 为正整数，$\lambda>0$).

例5 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$($\alpha>0$).

其他不定式极限的计算

其他不定式：$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$

例6 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$ $0\cdot\infty$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$ $\infty-\infty$

（3）$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ 0^0

（4）$\lim\limits_{x\to0}(x^2+2^x)^{\frac{1}{x}}$ 1^∞