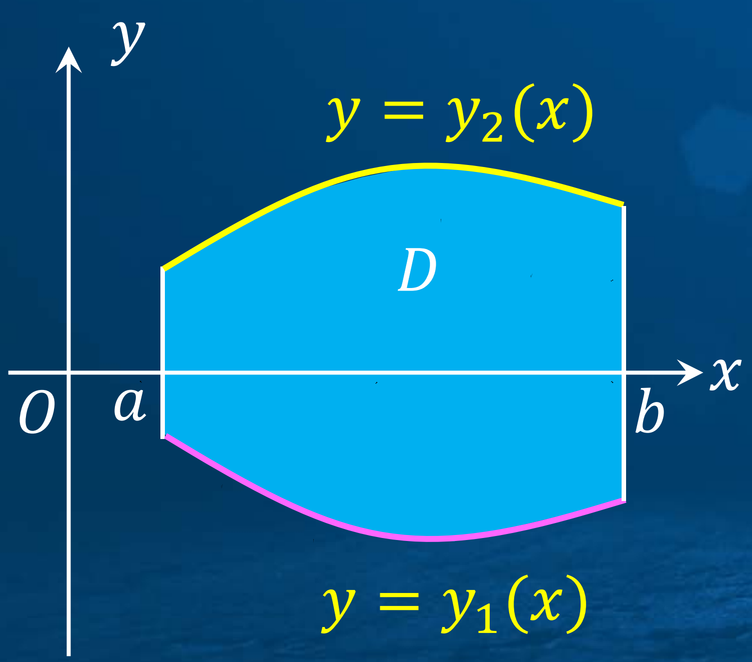
第78讲 极坐标系下二重积分的计算

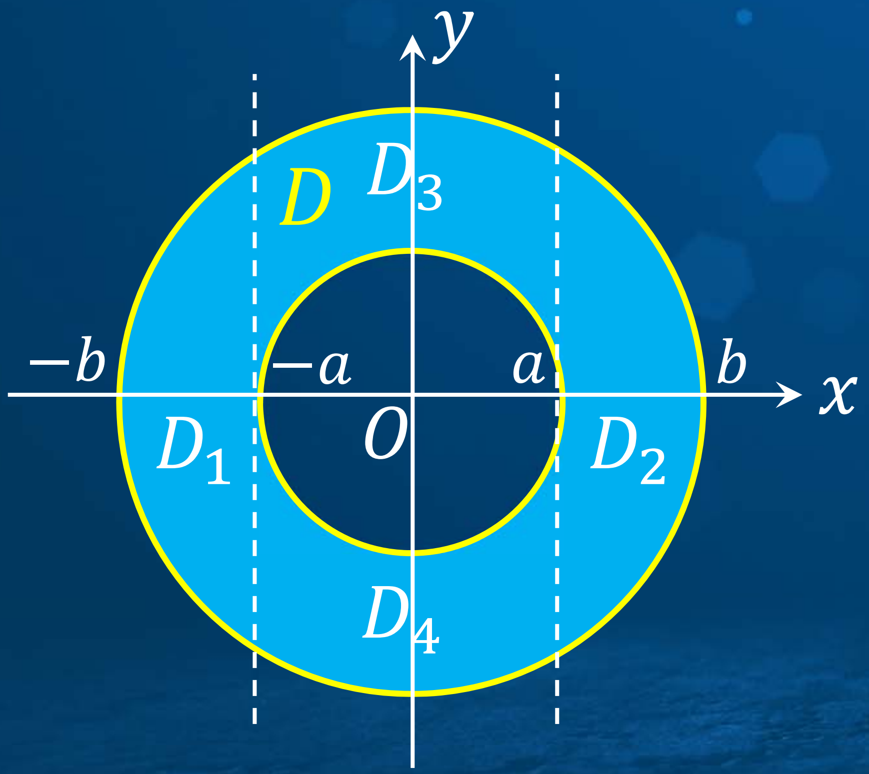
直角坐标下化二重积分为累次积分



对于X –型区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c} y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$



$$D: a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$$

$$D_1: -b \le x \le -a,$$
$$-\sqrt{b^2 - x^2} \le y \le \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$D_2: a \le x \le b,$$
$$-\sqrt{b^2 - x^2} \le y \le \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$D_3: -a \le x \le a,$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$D_4: -a \le x \le a,$$
$$-\sqrt{b^2 - x^2} \le y \le -\sqrt{a^2 - x^2}$$

- 区域的极坐标描述
- 极坐标形式的二重积分

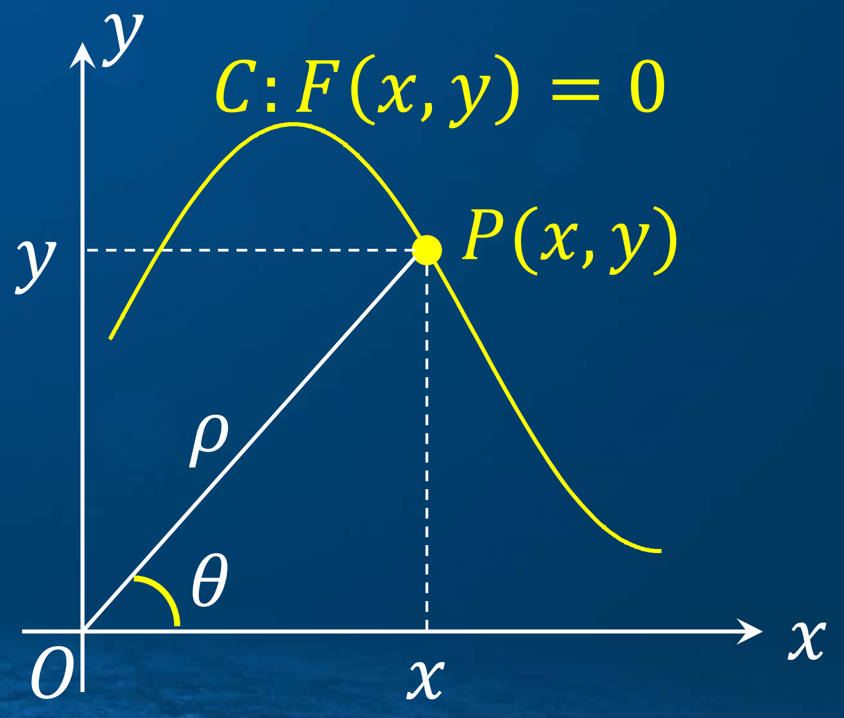
第78讲 极坐标系下二重积分的计算——主要内容

直角坐标与极坐标的关系

$$x=\rho\cos\theta\ ,\ y=\rho\sin\theta$$

直角坐标方程转换为极坐标方程

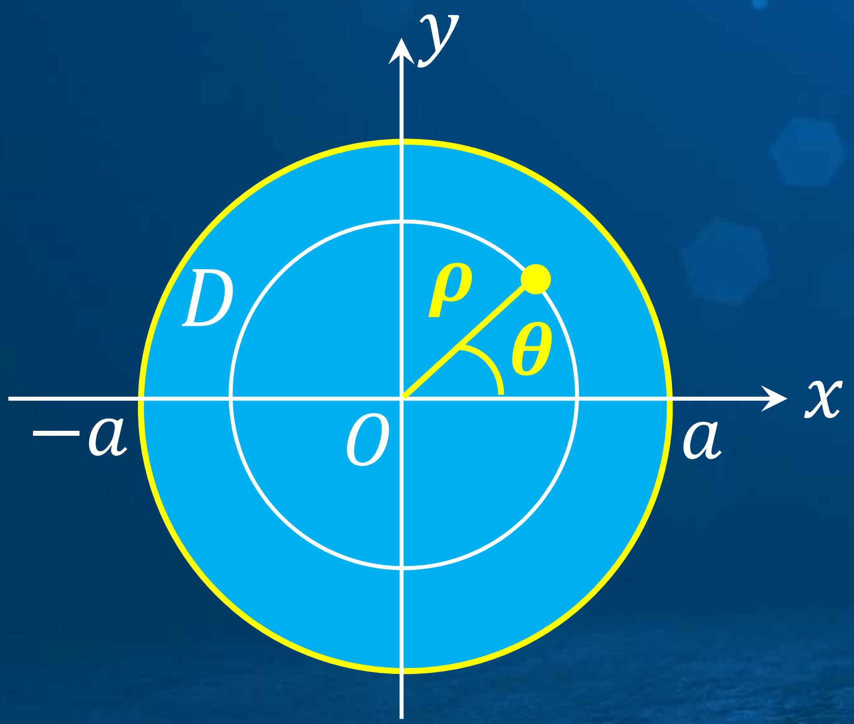
$$F(x,y)=0 \Rightarrow F(\rho\cos\theta,\theta\sin\theta)=0$$



例如

双扭线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \Rightarrow \rho^2=a^2\cos(2\theta)$

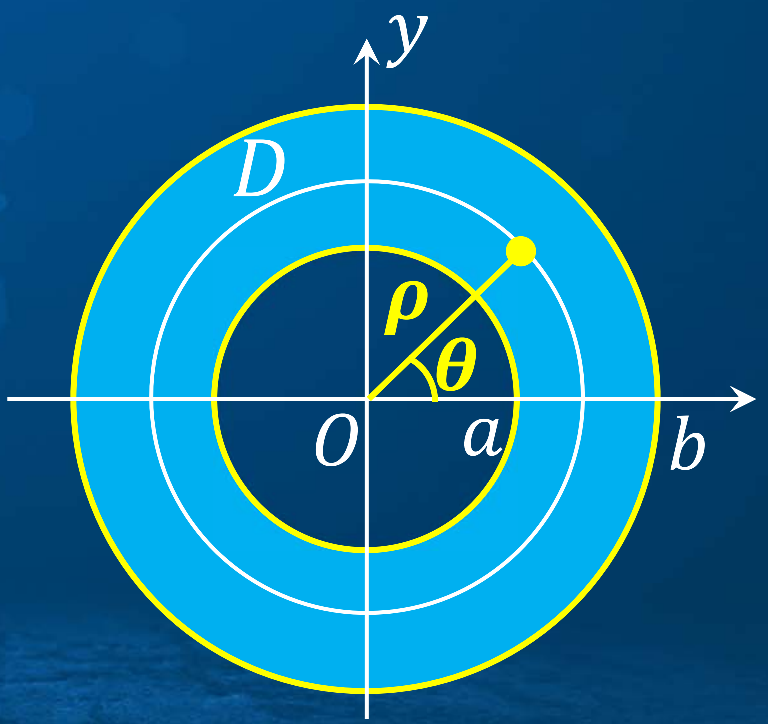
圆域$D: x^2+y^2 \le a^2$



D的极坐标描述：

$0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi$

圆环域$D: a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$



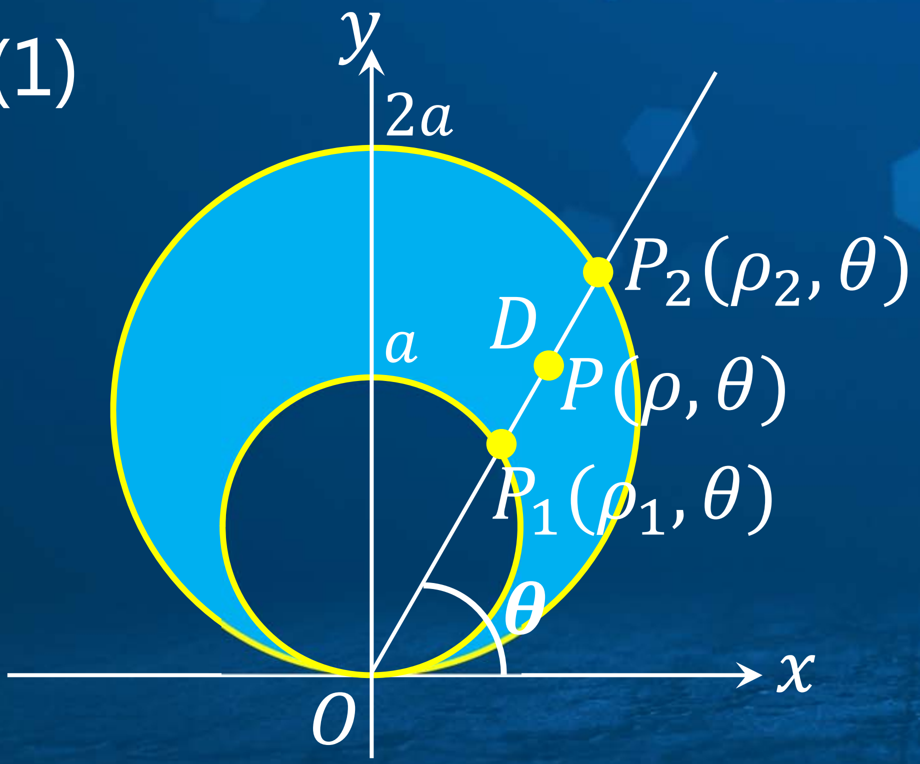
D的极坐标描述：

$a \le \rho \le b, 0 \le \theta \le 2\pi$

极矩形

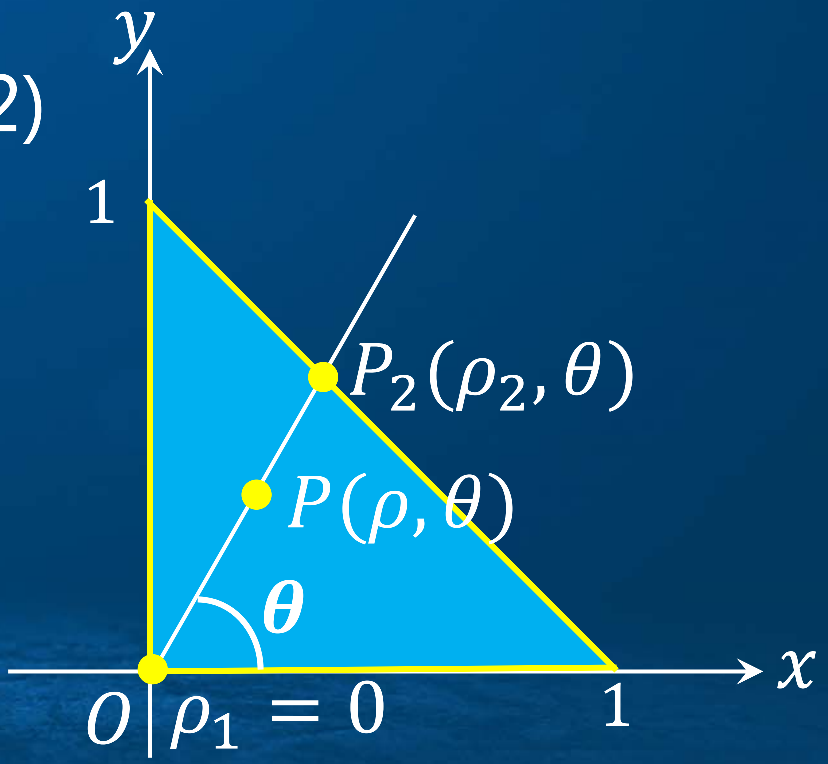
例1 试将下列区域用极坐标描述：

(1)



$$D:\begin{cases} 0\le\theta\le\pi, \\ a\sin\theta\le\rho\le 2a\sin\theta \end{cases}$$

(2)



$$D:\begin{cases} 0\le\theta\le\pi/2, \\ 0\le\rho\le 1/(\cos\theta+\sin\theta) \end{cases}$$

二重积分的实际背景

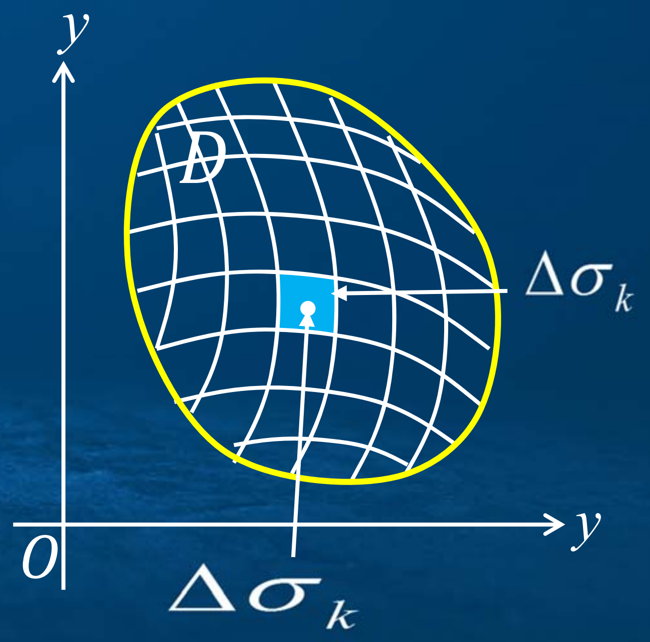
平面薄片占有平面有界闭区域D，面密度函数为

$$\mu = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in D\ ,$$

则该薄片的质量为

$$M = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



$f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$为小薄片$\Delta\sigma_k$的近似质量

$\Delta\sigma$的面积有近似值：

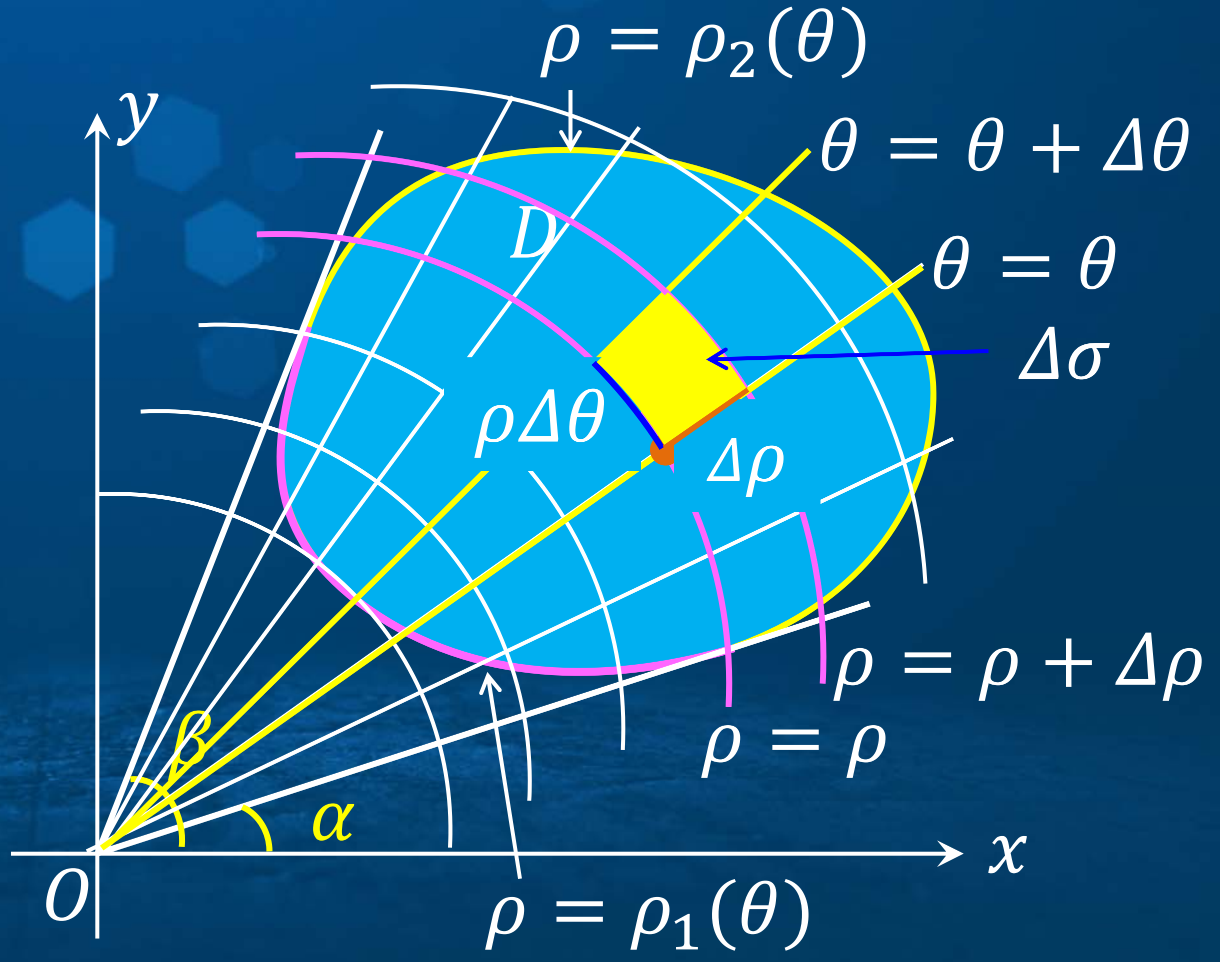
$$\Delta\sigma \approx \rho\Delta\theta\Delta\rho$$

极坐标(ρ,θ)点处的密度：

$$\mu = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

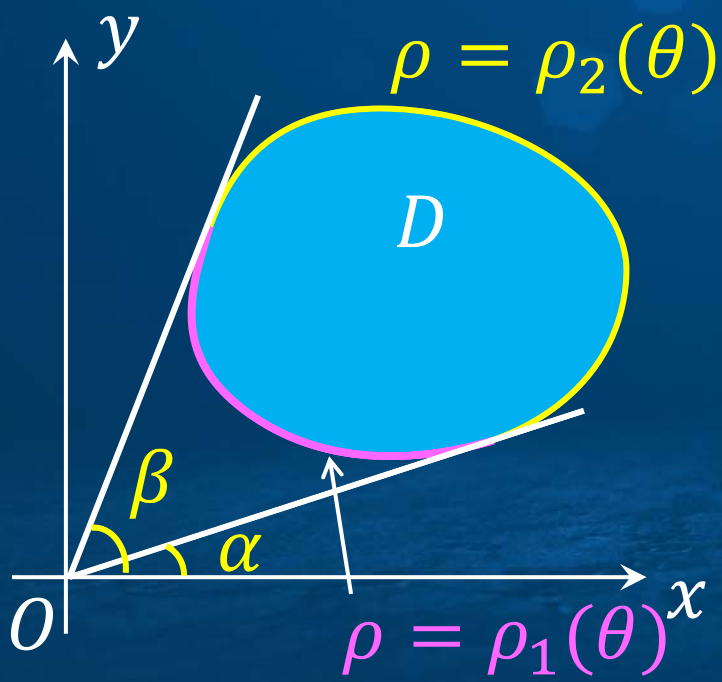
$\Delta\sigma$的对应的小薄片质量：

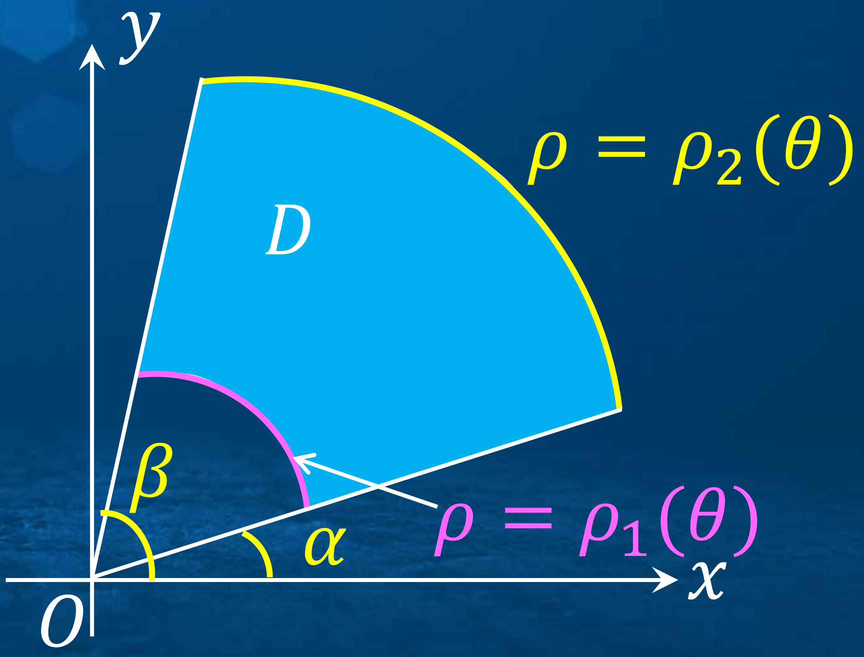
$$\Delta M \approx f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\Delta\theta\Delta\rho$$



二重积分的极坐标描述

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$





$$D: \alpha \le \theta \le \beta, \rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta)$$

二重积分的极坐标形式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

积分区域的极坐标描述为：

$$D: \alpha \le \theta \le \beta, \rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta)$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

二重积分化为极坐标累次积分的方法 —— 先ρ后θ积分

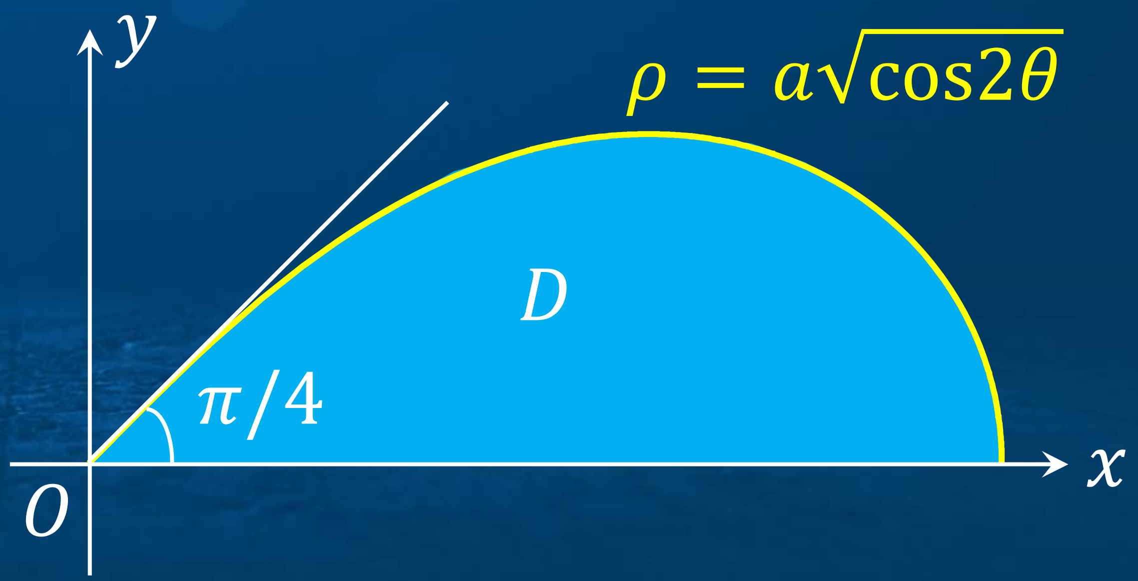
例2 计算二重积分$I=\iint_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域$D$由双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$$

在第一象限的部分与x轴所围成．

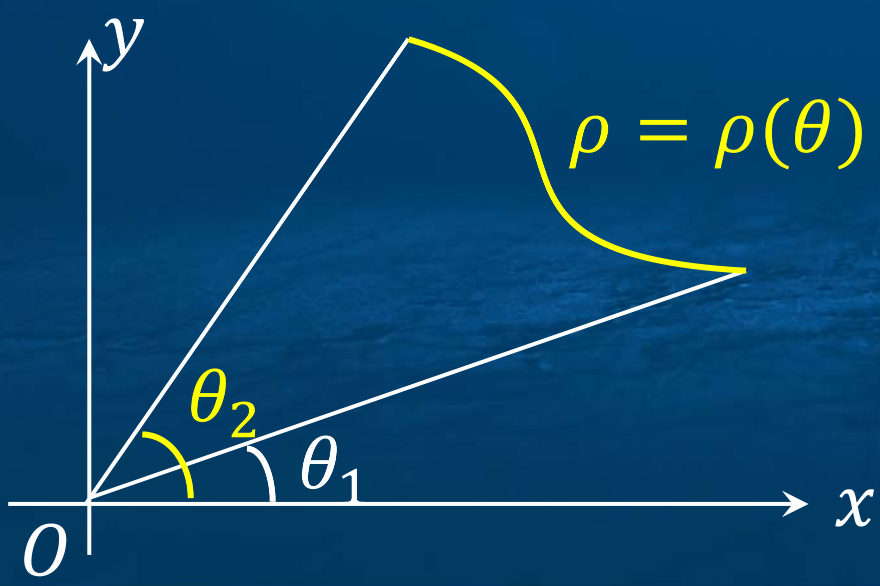
积分区域的极坐标描述为：

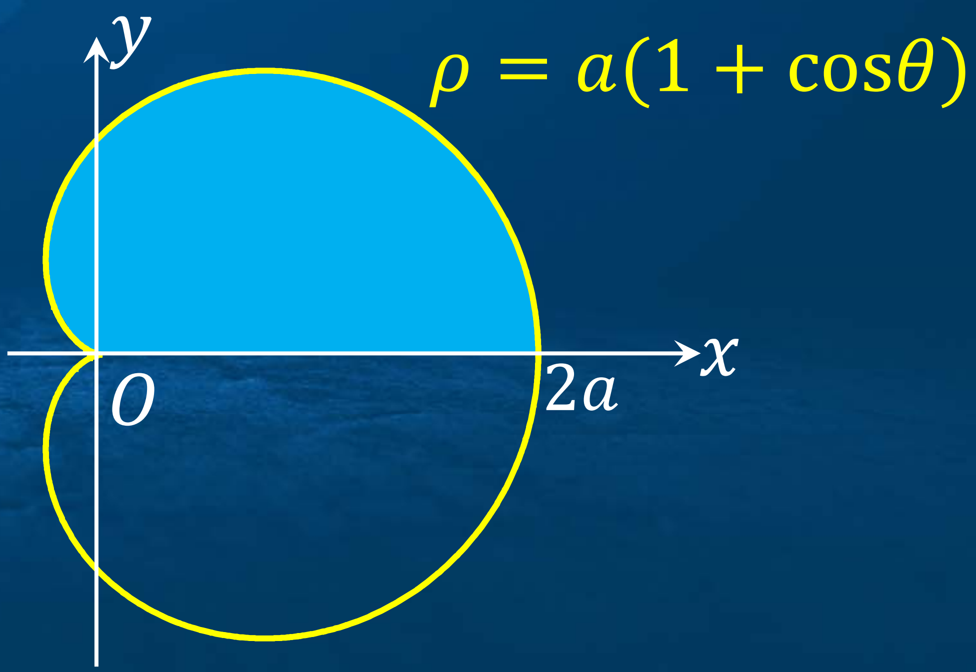
$$D:\begin{cases}0\le\theta\le\pi/4,\\0\le\rho\le a\sqrt{\cos2\theta}\end{cases}$$



例3 (1) (曲边扇形的面积) 在极坐标系中，曲边扇形区域D由射线$\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2\ (\theta_1 < \theta_2)$和曲线段$C: \rho = \rho(\theta)\ (\theta_1 \le \theta \le \theta_2)$所围成，求区域$D$的面积．

(2) 求心形线 $C: \rho = a(1 + \cos\theta)\ (0 \le \theta \le 2\pi)$所围区域的面积．





例4 计算如下二重积分，积分区域如图.

$$I_1=\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$I=\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

比较I_1，I_2与I的大小.

并证明概率积分：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.