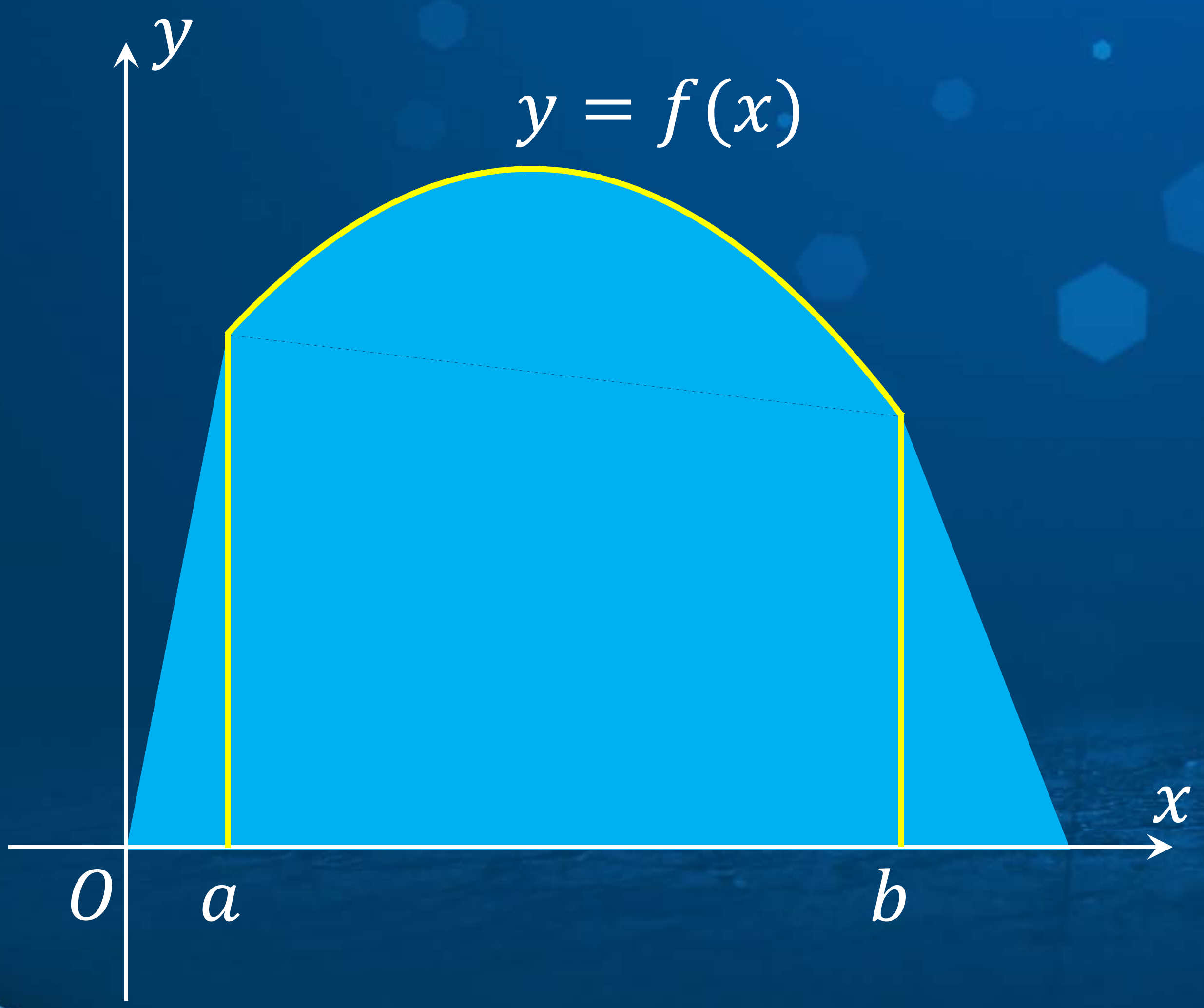
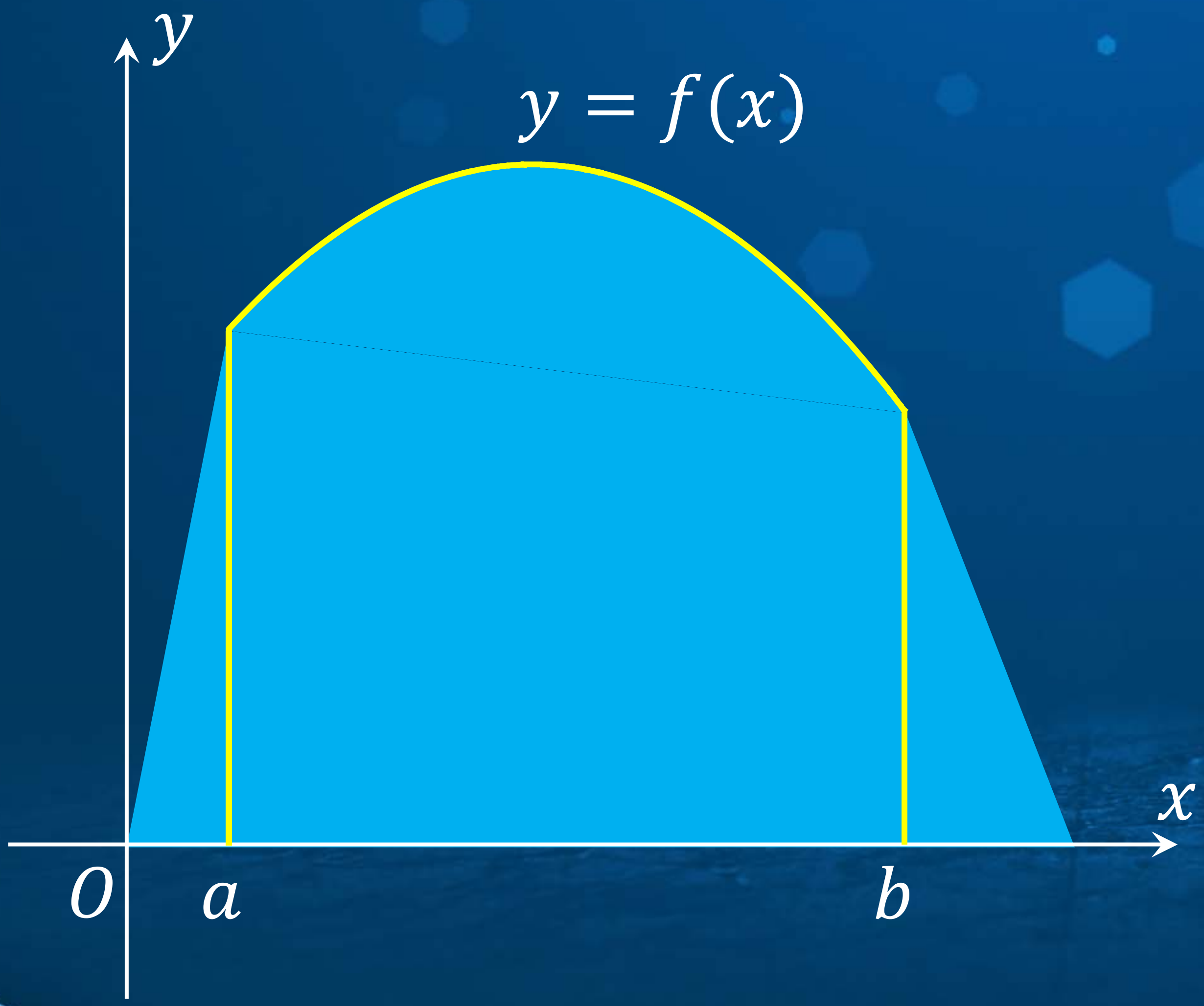
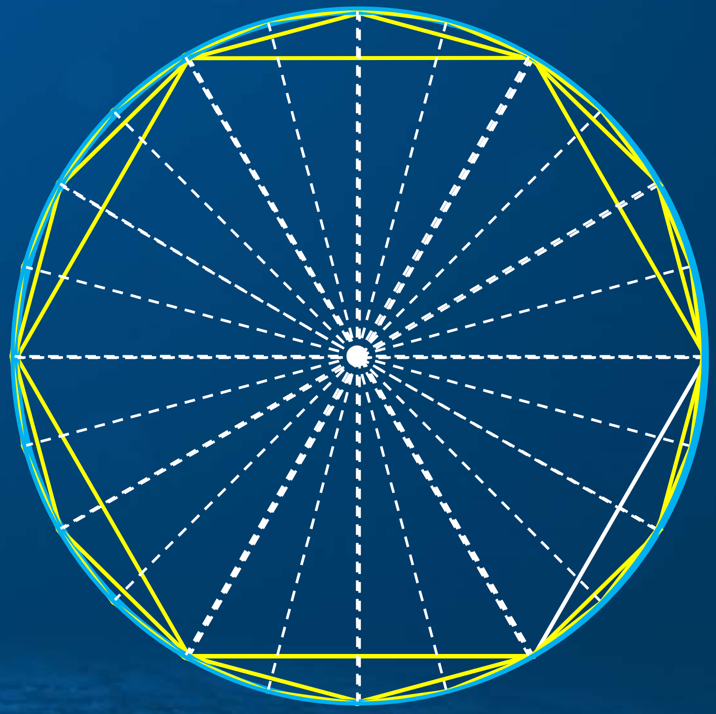
第38讲 定积分的概念

大坝的溢流坝


y
y = f(x)
x
O
a
b





割圆术

几个典型的定积分问题

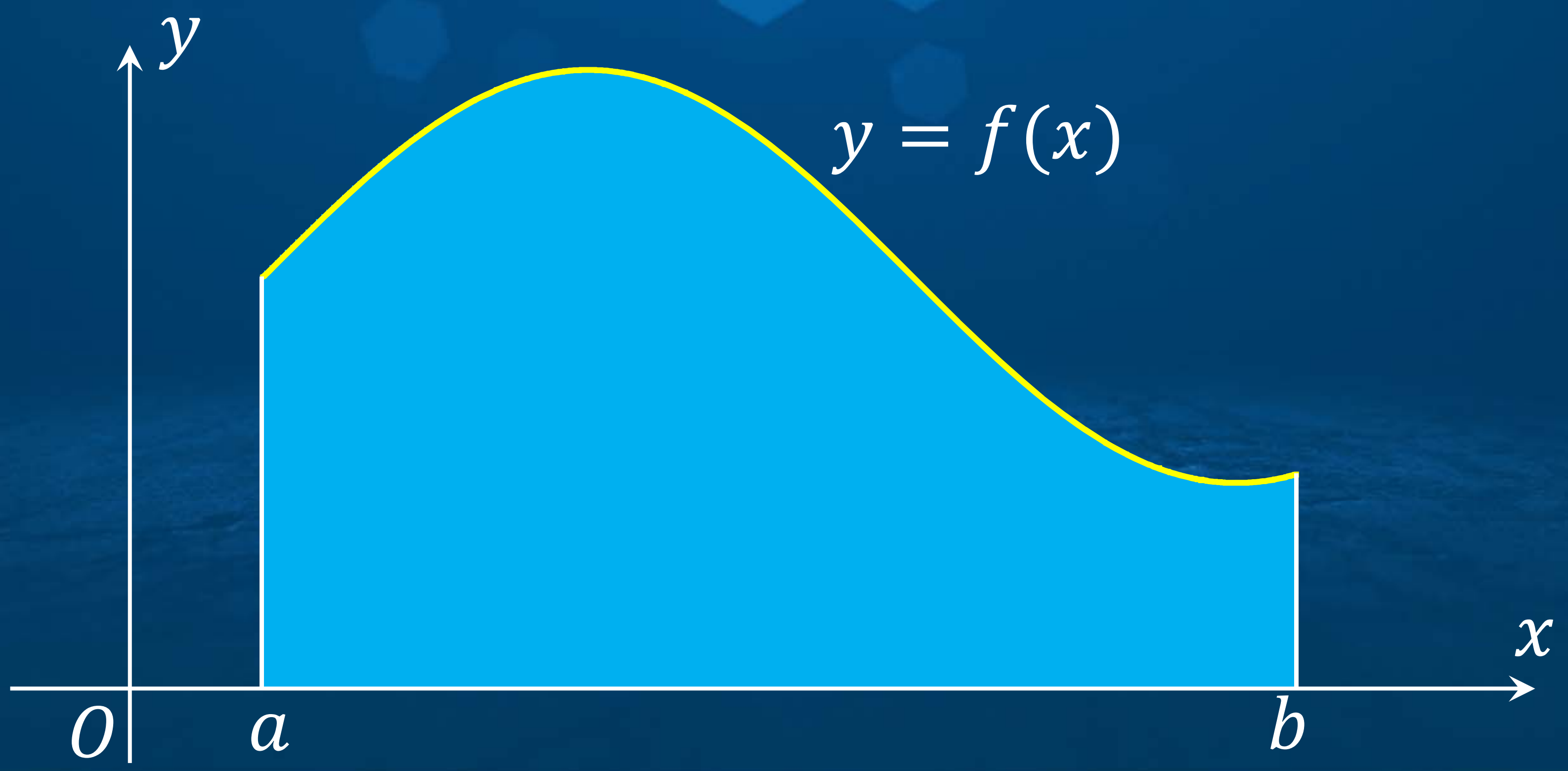
定积分的定义

定积分的几何意义

定积分的基本性质

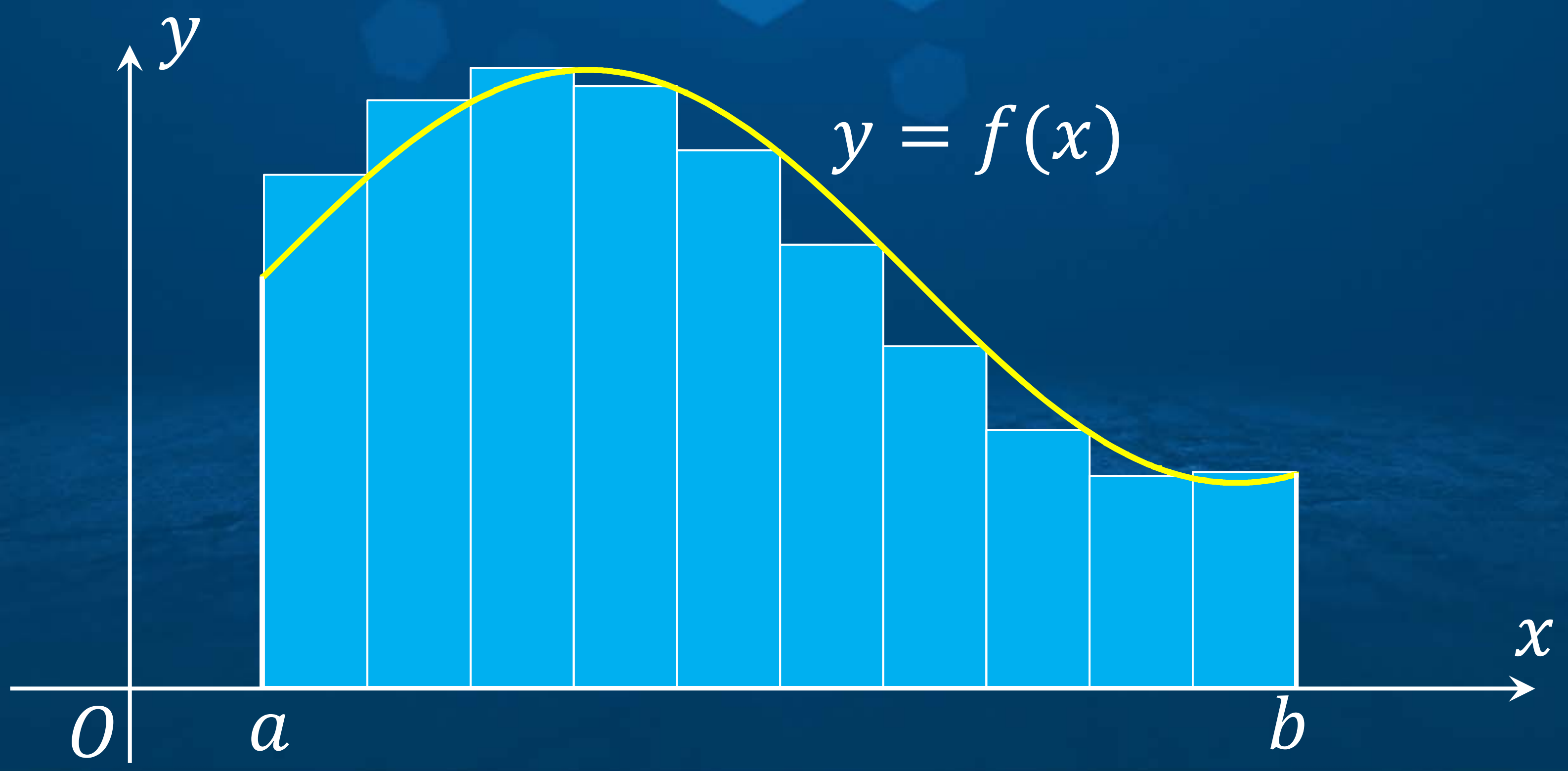
曲边梯形的面积

曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x)$（$f(x) \geq 0$），x轴及两直线 $x = a, x = b$所围成.



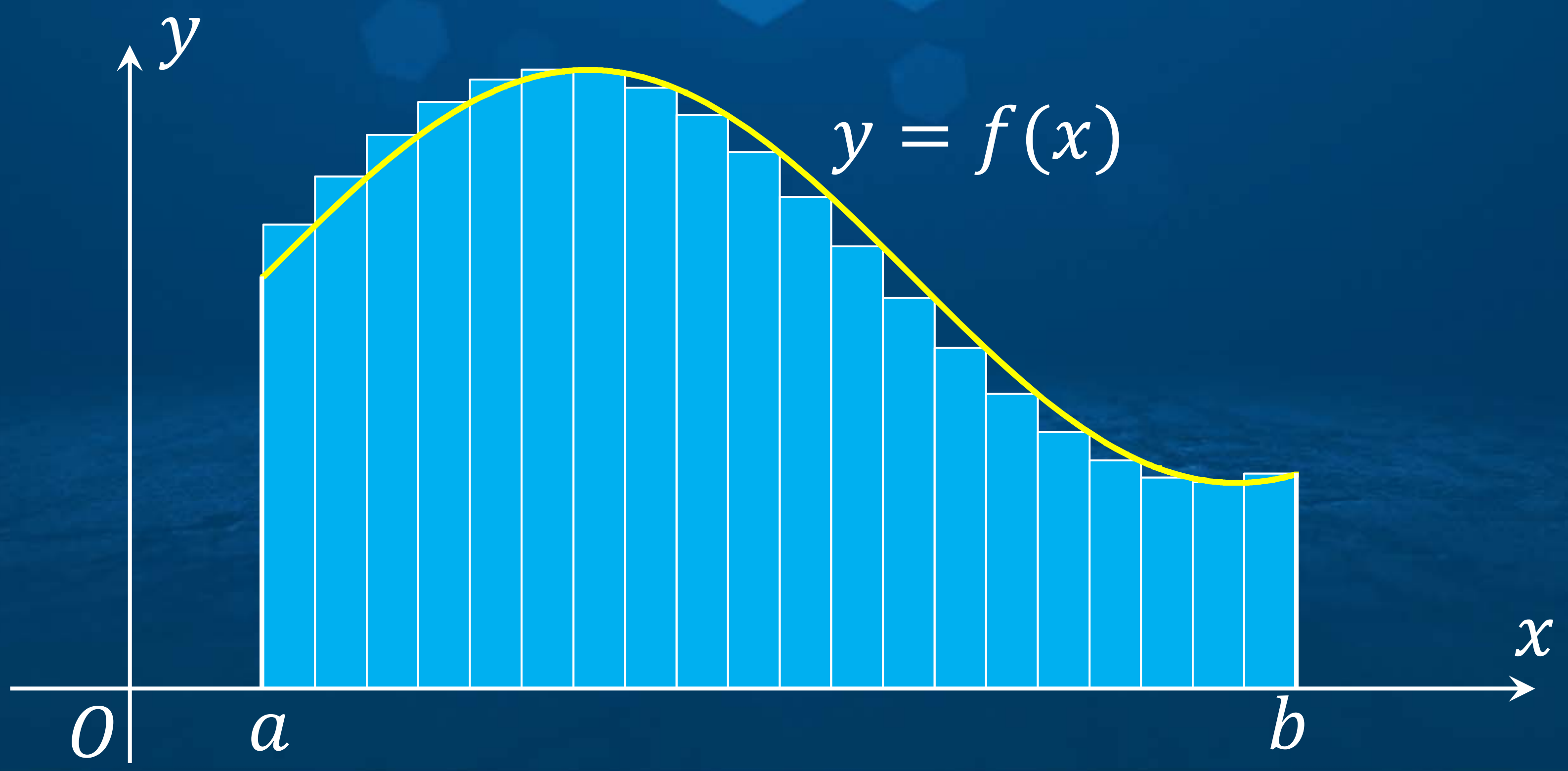
曲边梯形的面积

n等分区间$[a,b]$，用小矩形的面积近似小曲边梯形的面积.



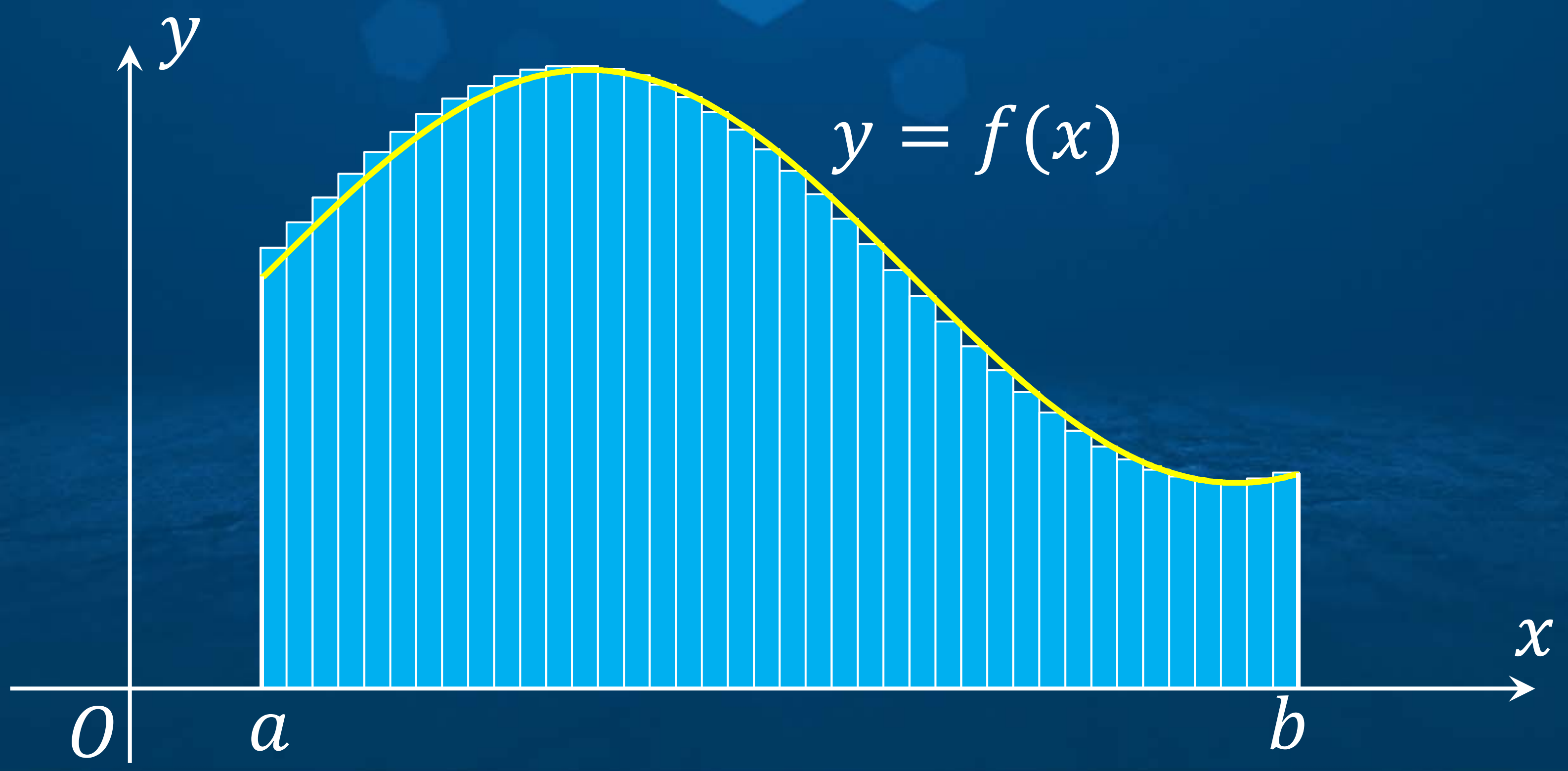
曲边梯形的面积

n等分区间$[a, b]$ ，用小矩形的面积近似小曲边梯形的面积.



曲边梯形的面积

n等分区间$[a,b]$，用小矩形的面积近似小曲边梯形的面积.

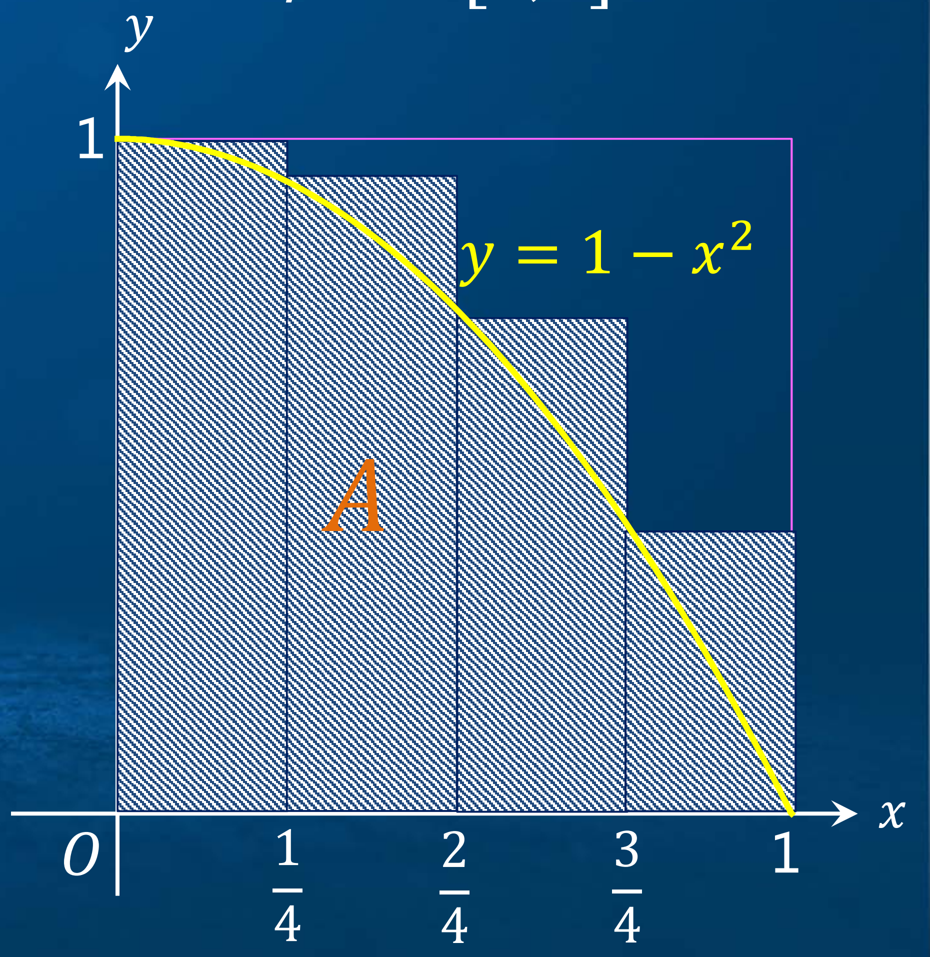


例如，假设曲边梯形的曲边为抛物线 $y=1-x^2,\ x\in[0,1]$.

设图中区域的面积为A, 显然 $0<A<1$.

将区间$[0,1]$ 进行4等分，用左端点函数值作为小矩形的高来近似小的曲边梯形面积，有

$$L_4=\frac{1}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{25}{32}$$



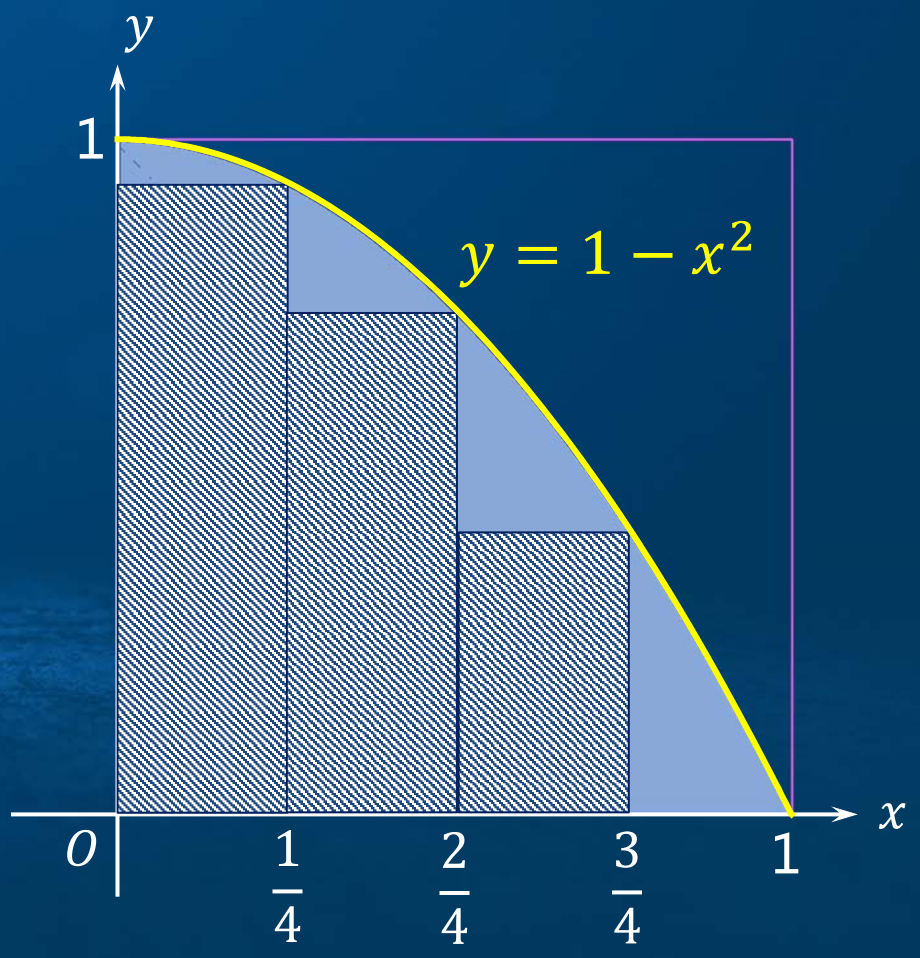
例如，假设曲边梯形的曲边为抛物线 $f(x)=1-x^2, x\in[0,1]$.

设图中区域的面积为A,显然 $0<A<1$.

将区间[0,1] 进行4等分，用右端点函数值作为小矩形的高来近似小的曲边梯形面积，有

$$L_4=\frac{1}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{25}{32}$$

$$R_4=\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]=\frac{17}{32}$$



一般地，将区间[0,1] 进行n等分，得到 n 个子区间

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

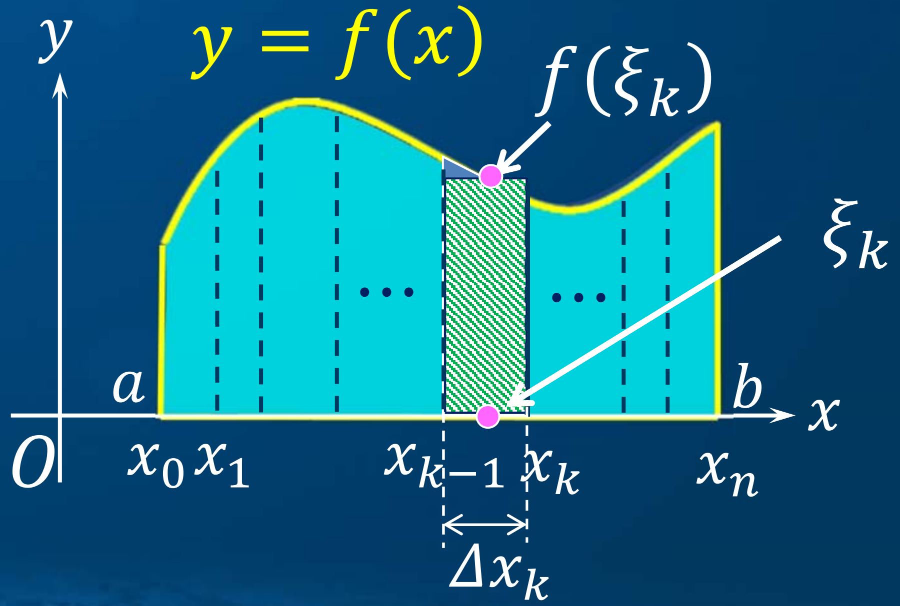
左和 $L_n=\frac{1}{n}\cdot\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]=1-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

右和 $R_n=\frac{1}{n}\cdot\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f(1)\right]=1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}R_n=\frac{2}{3}\qquad L_n<A<R_n \Longrightarrow A=\frac{2}{3}$$

一般曲边梯形的面积. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$.

1. 分割: 在区间$[a,b]$中任意插入 $n-1$个分点



$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将曲边梯形分割成n个窄条曲边梯形.

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, k=1,2,\cdots,n.$$

2. 取近似: $\forall \xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 则对应的窄曲边梯形的面积

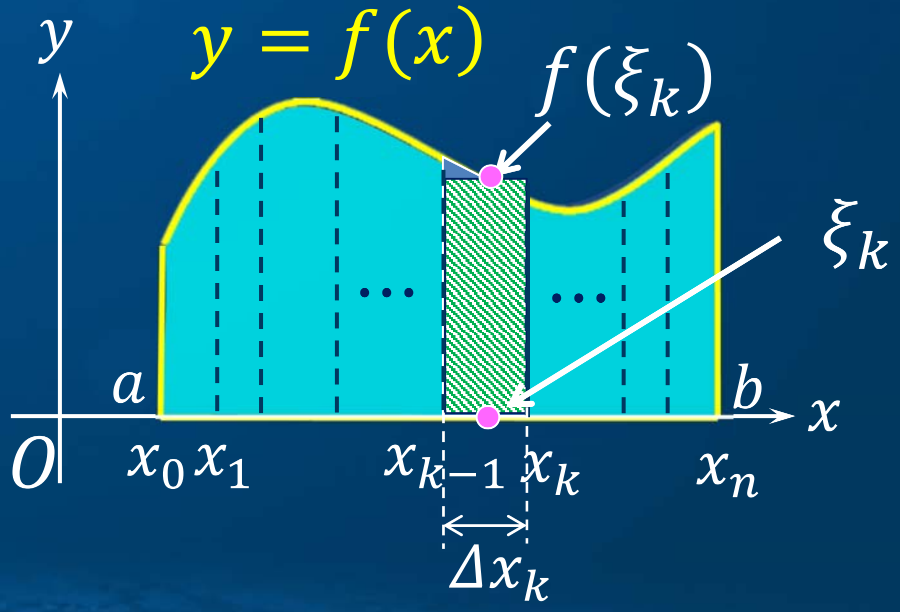
$$A_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k, k=1,2,\cdots,n$$

一般曲边梯形的面积. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$.

3. 作和: $$A=\sum_{k=1}^{n}A_k\approx\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

4. 取极限: 记$\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\{\Delta x_k\}$, 则

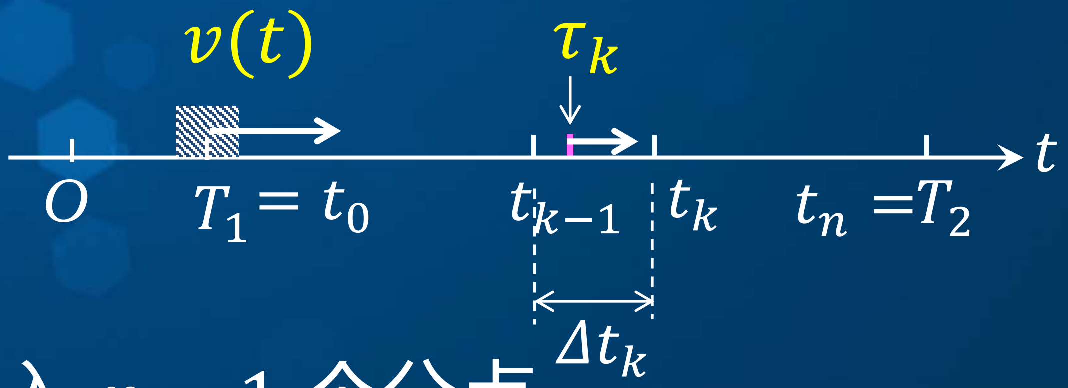
$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$



思想：分割取近似,作和求极限

变速直线运动的路程

某物体作变速直线运动,设速度 $v(t) \in C[T_1, T_2]$, 求这段时间内物体经过的路程 s.



1. 分割: 在区间$[T_1, T_2]$中任意插入 $n-1$ 个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

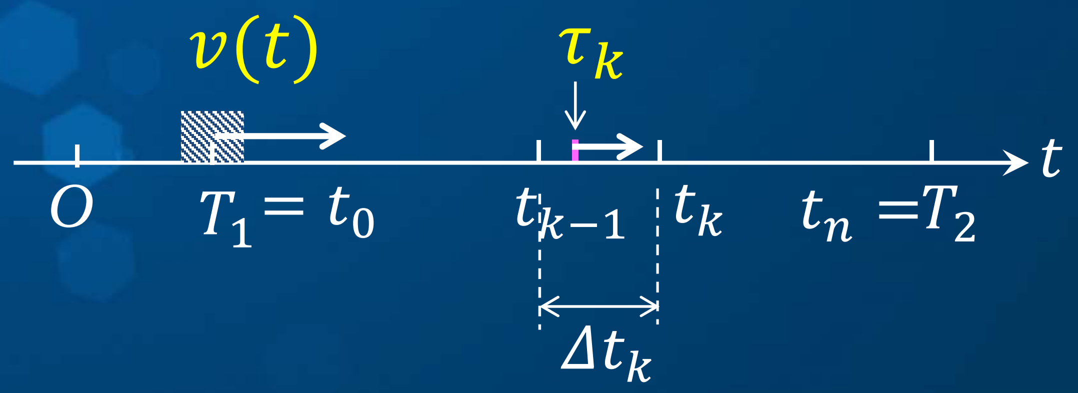
记 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 1,2,\cdots,n.$

2. 取近似: $\forall \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$,则对应该时段上的路程为

$$\Delta s_k \approx v(\tau_k)\Delta t_k, k = 1,2,\cdots,n$$

变速直线运动的路程

某物体作变速直线运动,设速度 $v(t) \in C[T_1, T_2]$, 求这段时间内物体经过的路程 s.

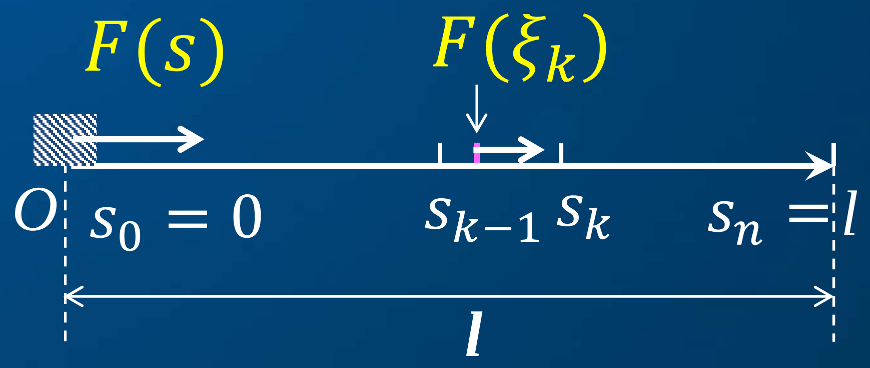


3. 作和: $$s = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k .$$

4. 取极限: 记 $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\Delta t_k\}$, 则 $$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \Delta t_k .$$

同向变力所做的功

设物体受同向变力作用沿力的方向移动路程 l，力的大小$F(s)\in C[0,l]$，求变力$F(s)$所做的功W.



1. 分割：在区间$[0,l]$中任意插入 $n-1$ 个分点

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_{n-1}<s_n=l,$$

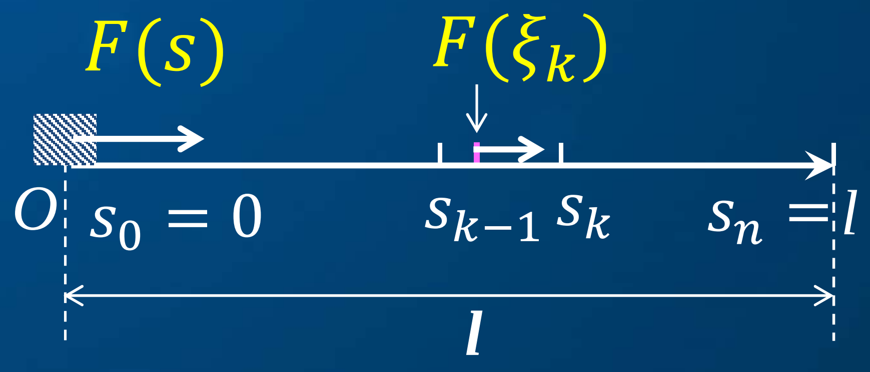
记 $\Delta s_k=s_k-s_{k-1}, k=1,2,\cdots,n.$

2. 取近似：$\forall\xi_k\in[s_{k-1},s_k]$,则对应该路段上的功为

$$\Delta W_k\approx F(\xi_k)\Delta s_k, k=1,2,\cdots,n$$

同向变力所做的功

设物体受同向变力作用沿力的方向移动路程 l，力的大小$F(s) \in C[0,l]$，求变力$F(s)$所做的功W.



3. 作和: $$W = \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k .$$

4. 取极限: 记$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$，则 $$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k .$$

上述三个问题具有两个共同的基本特征:

(1) 所求总量等于各小区间上的部分量之和;

(2) 所求量近似等于某常量与对应区间长度之乘积.

解决问题方法的共性：

(1) 解决问题的步骤相同

分割取近似，做和求极限

(2) 所求量的结构式相同

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,\quad s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k,\quad W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta s_k.$$

定义1 设函数$f(x)$在 $[a,b]$上有定义, 在$[a,b]$中任意插入 $n-1$个分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$, 任意取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 作和数 $I_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, 记$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$, 若只要当$\lambda\to 0$时, 和数 I_n 总趋于确定的极限 I, 则称极限值 I 为函数$f(x)$在区间 $[a,b]$上的定积分(黎曼积分), 记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0} I_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

此时称 $f(x)$在 $[a,b]$上可积(黎曼可积).

积分上限

$[a,b]$称为积分区间

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和（黎曼和）

规定：(1) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;　　(2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

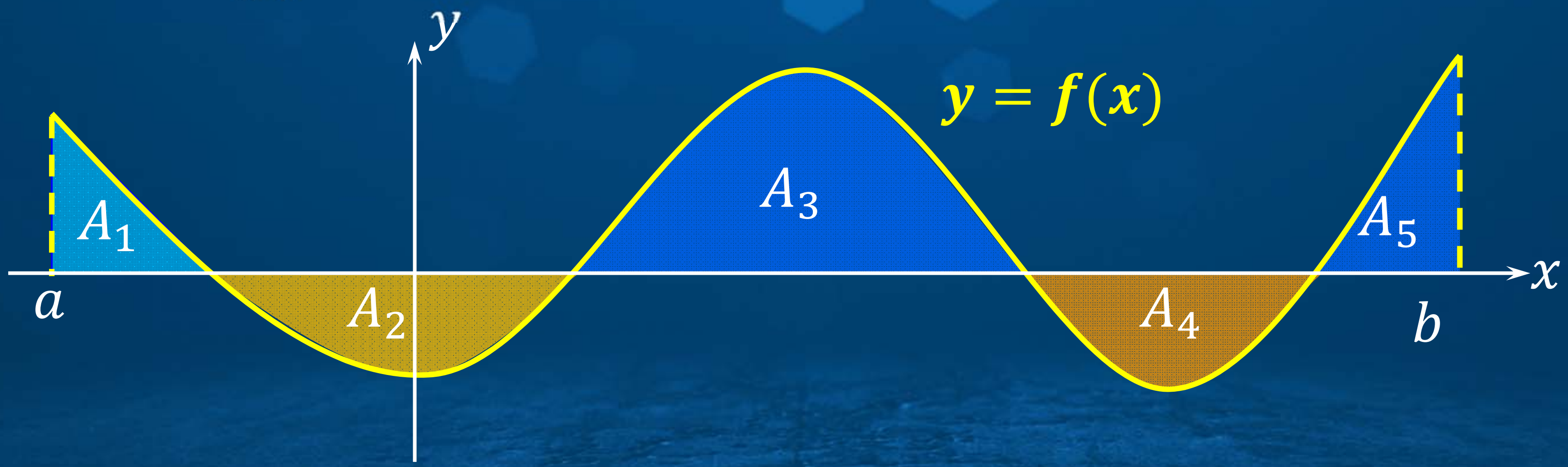
- 曲边梯形的面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- 变速直线运动的路程 $s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$
- 同向变力所做的功 $W=\int_0^l F(s)\mathrm{d}s$

定积分与积分变量的名称无关：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

例1 证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ 0, x\in R-Q\end{cases}$ 在任何闭区间$[a,b]$上不可积.

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ ——曲边梯形面积

$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ ——曲边梯形面积的负值



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$ ——各部分面积的代数和

性质1 (线性性)

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

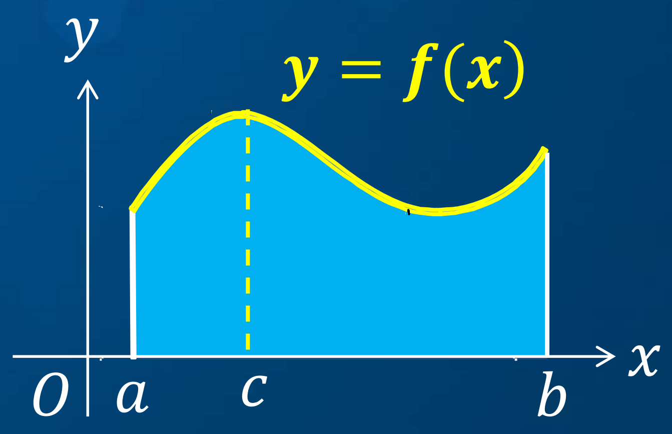
由性质1, 易知

$$(1)\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

$$(2)\ \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{是常数})$$

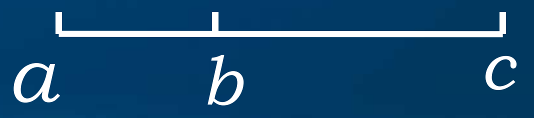
性质2 (对积分区间的可加性)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



说明: 当 a, b, c 的相对位置任意时, 上式仍成立.

例如, 当$a < b < c$时, 有



$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质3 (保号性)

(1)若$f(x) \geq 0, x \in [a,b]$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$;

(2)若$f(x) \geq 0, f(x) \in C[a,b]$,且$f(x)$ 不恒为零, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

推论1 (保序性)

若 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论2 (绝对值不等式)

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

推论3 (积分估值)

若$m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

例2 试比较下列两个积分的大小:

$$I_1 = \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^1 e^{x^3}\mathrm{d}x.$$

$$e^{x^2} > e^{x^3} \quad (0 < x < 1) \quad \Rightarrow I_1 > I_2$$