第82讲 重积分的应用

- 二重积分：$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(f(x,y)\geq 0)$

  几何意义：以区域D为底、曲面 $S: z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积

  物理意义：占有区域D且以$f(x,y)$为面密度的平面薄片的质量

- 三重积分：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,(f(x,y,z)\geq 0)$

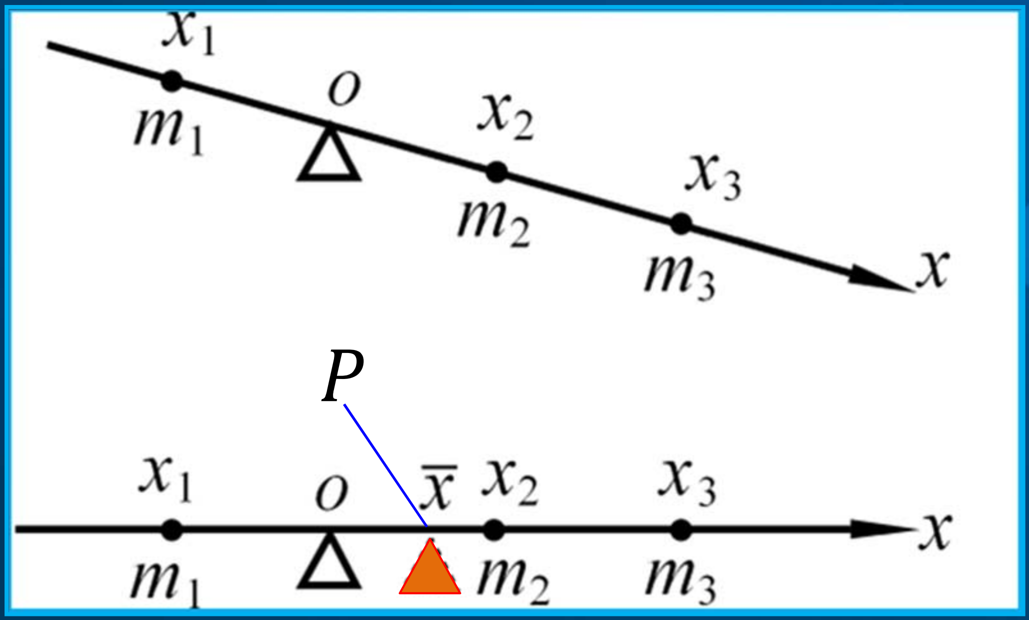
  几何意义：当$f(x,y,z)\equiv 1$，表示占有空间域Ω的立体体积

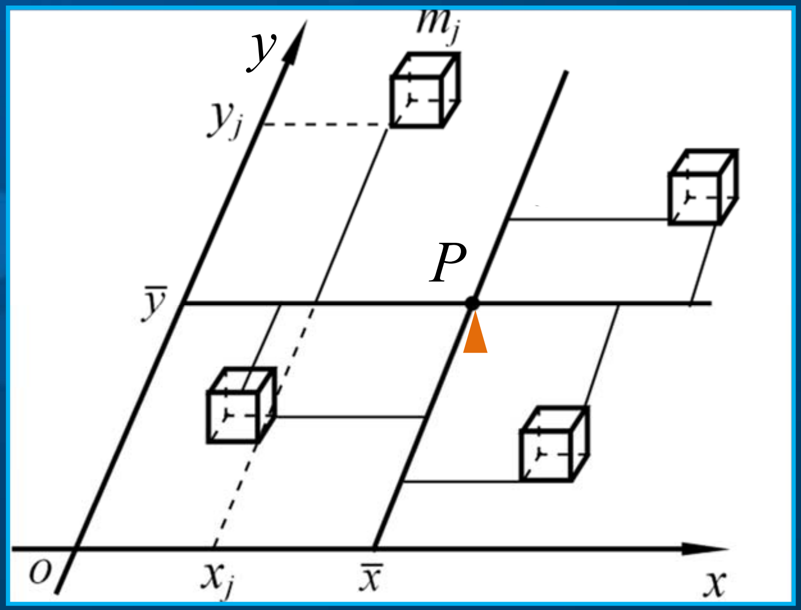
  物理意义：表示占有空间域Ω，并以 $f(x,y,z)$为体密度的立体质量

平面薄片与立体的质心

转动惯量

物体对质点的引力





刚性轴上的质点组的质心

$P(\bar{x})$

刚性平面上的质点的质心

$P(\bar{x}, \bar{y})$

静矩等效：$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

设平面上有n个质点，分别位于(x_k, y_k)，其质量分别为$m_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，称

$$m_k y_k, m_k x_k (k = 1,2,\cdots,n)$$

为质点分别对x轴、y轴的静矩. 质点系对两坐标轴的静矩依次为

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k\ ,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k .$$

平面上的质点系的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad \left(M = \sum_{k=1}^{n} m_k \right)$$

设空间有n个质点，分别位于(x_k, y_k, z_k)，其质量分别为m_k $(k=1, 2, \cdots, n)$，则该质点系的质心坐标为

$$\overline{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \overline{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \overline{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

其中$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = M_{yz}, \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = M_{xz}, \sum_{k=1}^{n} m_k z_k = M_{xy}$ 分别表示该质点系对坐标面yOz，zOx，xOy的静矩.

例1 设半径为R的半圆形薄片在每一点的面密度与该点到圆心的距离成正比，求该薄片的质心 .

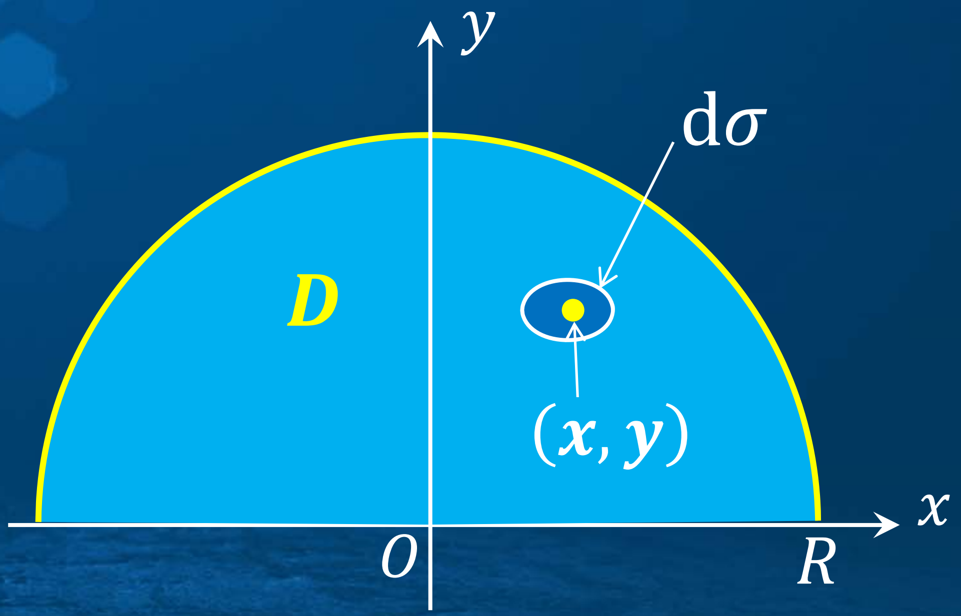
$$\mu(x,y)=K\sqrt{x^2+y^2}$$

$$M=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$dM_y=x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$M_y=\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma \Rightarrow \bar{x}=\frac{M_y}{M}$$

$$M_x=\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma \Rightarrow \bar{y}=\frac{M_x}{M}$$



例2 求均匀半球壳Ω: $a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2\ (z \ge 0)\ (0 < a < b)$ 的质心(形心).

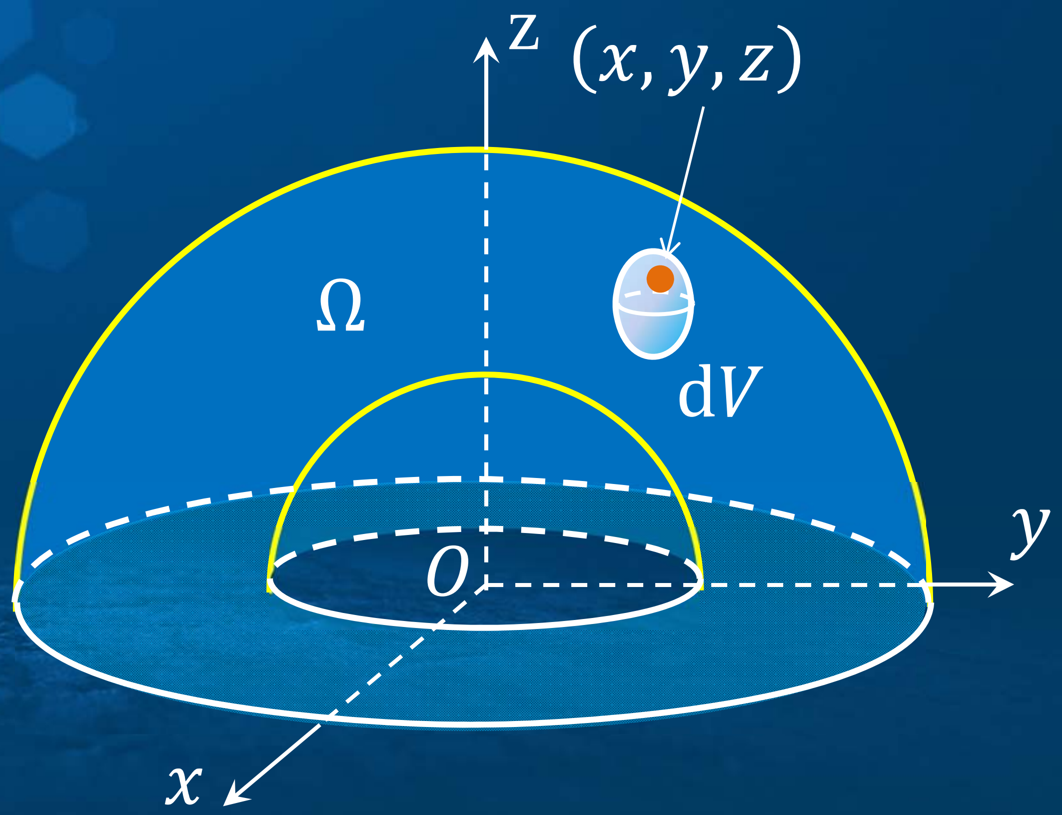
设密度为常数ρ，则质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{d}V \quad \mathrm{d}M_{yz} = x\rho \mathrm{d}V$$

$$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\rho \mathrm{d}V \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$$

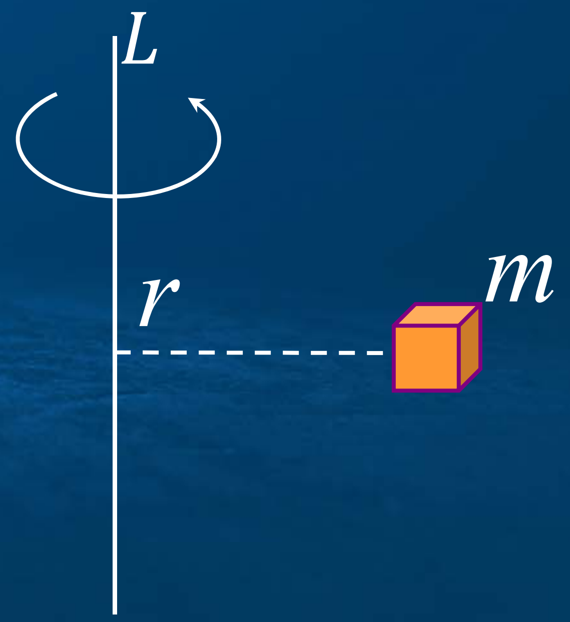
$$M_{zx} = \iiint_{\Omega} y\rho \mathrm{d}V \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}$$

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\rho \mathrm{d}V \Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$



质量为m的质点与轴 L的距离为r, 则该质点绕轴 L 旋转的转动惯量为 $I = mr^2$.

设物体占有空间区域 Ω , 有连续体密度函数 $\mu(x, y, z)$.



质量为m的质点与轴 L的距离为r, 则该质点绕轴 L 旋转的转动惯量为 $I = mr^2$.

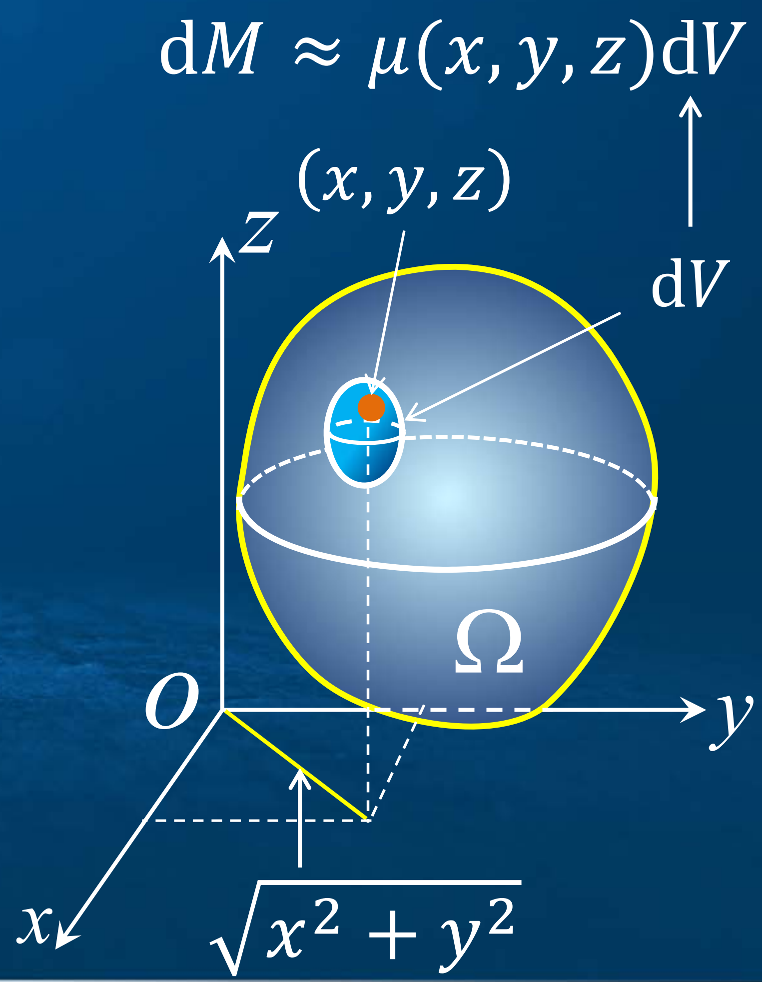
设物体占有空间区域 Ω , 有连续体密度函数 $\mu(x,y,z)$.

微元$\mathrm{d}V$对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I_z = (x^2 + y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$$

因此物体对 z 轴的转动惯量：

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V.$$



对 x 轴的转动惯量 $I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$

对 y 轴的转动惯量 $I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$

对原点的转动惯量 $I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$

说明：使得$I_x = MR_x^2$, $I_y = MR_y^2$, $I_z = MR_z^2$, $I_O = MR_O^2$

成立的R_x, R_y, R_z, R_O称为物体关于相应轴的旋转半径.

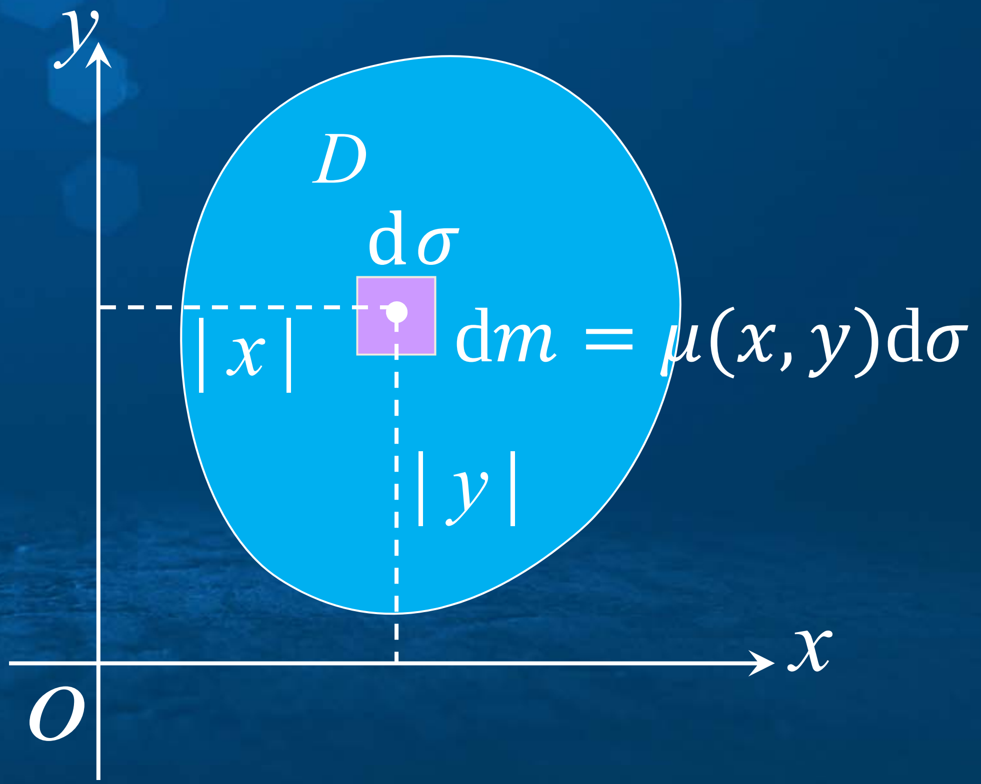
其中$M = \iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}V$为物体的质量.

如果物体是平面薄片，面密度为$\mu(x,y)$, $(x,y)\in D$，则转动惯量的表达式是二重积分.

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

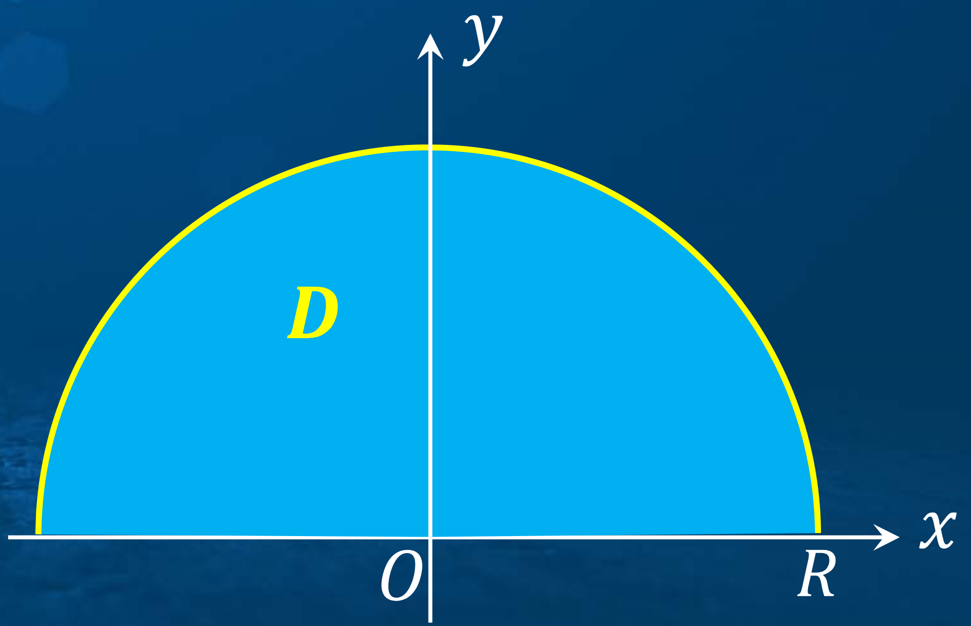
$$I_o=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$



例3 设半径为R的半圆形薄片在每一点的面密度与该点到圆心的距离成正比，求该薄片关于其直径的转动惯量和旋转半径.

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) \mathrm{d}\sigma$$



设物体占有空间区域 Ω，有连续体密度函数 $\mu(x,y,z)$.

微元对位于原点的质量m的质点引力

$$\mathrm{d}\mathbf{F}=\frac{Gm\mu\mathrm{d}V}{r^2}$$

该引力在坐标轴方向的分量大小为

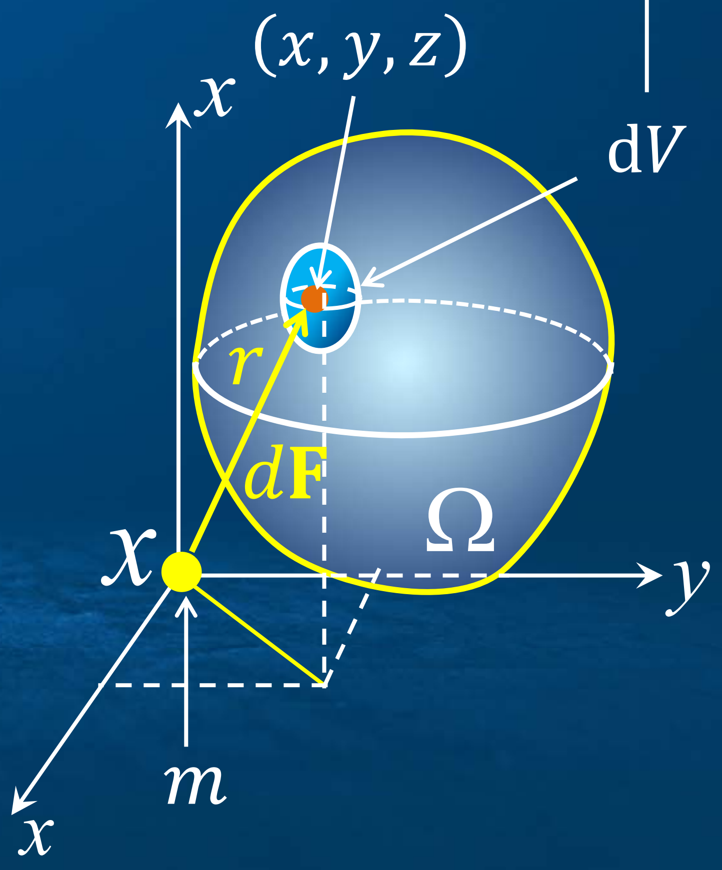
$$\mathrm{d}\mathbf{F}_x=Gm\frac{\mu(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}V \quad \mathrm{d}\mathbf{F}_y=Gm\frac{\mu(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_z=Gm\frac{\mu(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}V$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

G 为引力常数

$$dM\approx\mu(x,y,z)\mathrm{d}V$$



物体Ω对位于点$P(a,b,c)$的质量m的质点引力

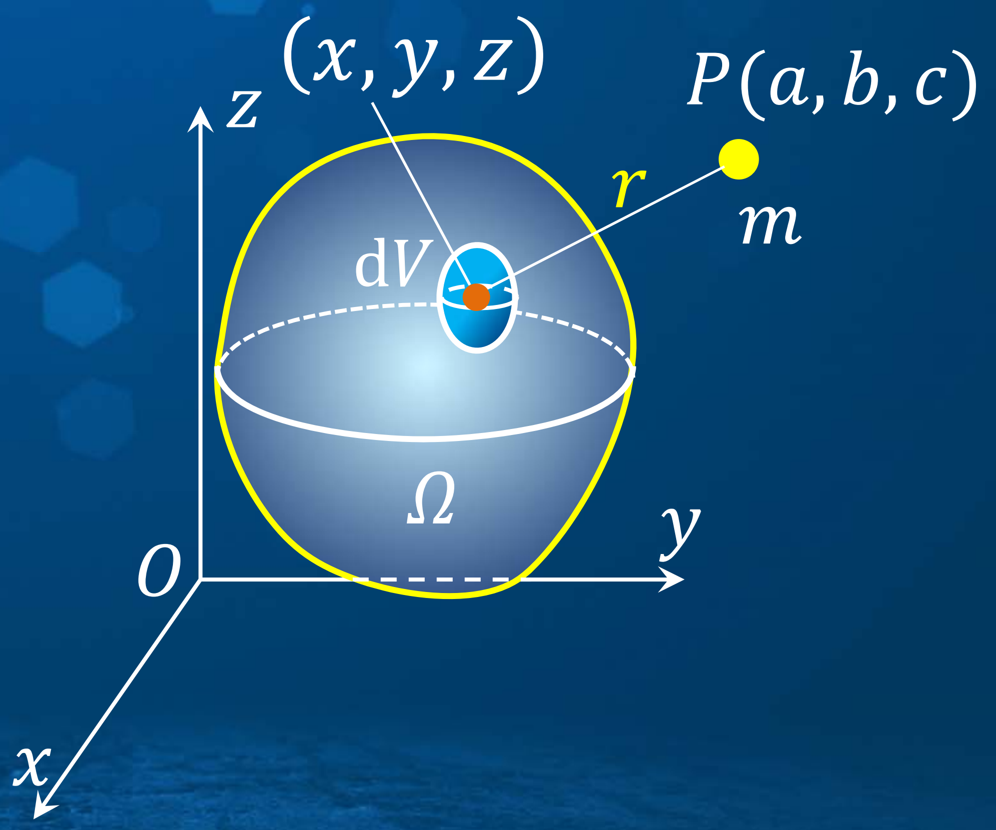
$$\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z)$$

其中

$$\mathbf{F}_x = \iiint_\Omega \mathrm{d}\mathbf{F}_x = \iiint_\Omega Gm\mu \frac{x-a}{r^3}\mathrm{d}V$$

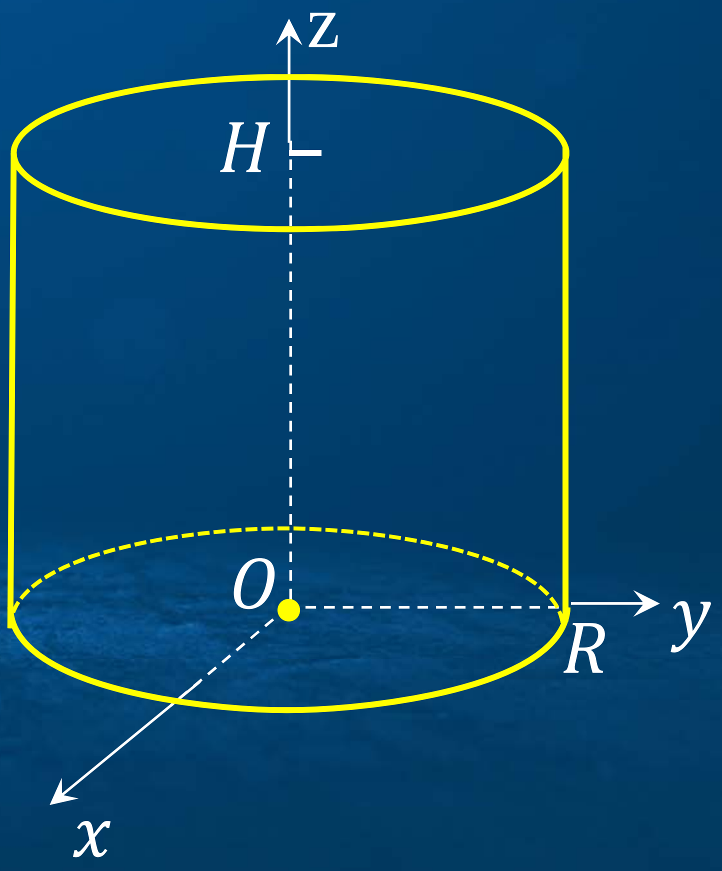
$$\mathbf{F}_y = \iiint_\Omega \mathrm{d}\mathbf{F}_y = \iiint_\Omega Gm\mu \frac{y-b}{r^3}\mathrm{d}V$$

$$\mathbf{F}_z = \iiint_\Omega \mathrm{d}\mathbf{F}_z = \iiint_\Omega Gm\mu \frac{z-c}{r^3}\mathrm{d}V$$



$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

例4 求高为H、底半径为R且密度均匀的圆柱体，对圆柱底面中心一单位质点的引力 .



引力在z轴方向的分量大小

$$\mathbf{F}_z = \iiint_{\Omega} Gm\mu \frac{z}{r^3} \mathrm{d}V$$

$$= \iiint_{\Omega} G\mu \frac{z}{(x^2+y^2+z^3)^{3/2}} \mathrm{d}V$$