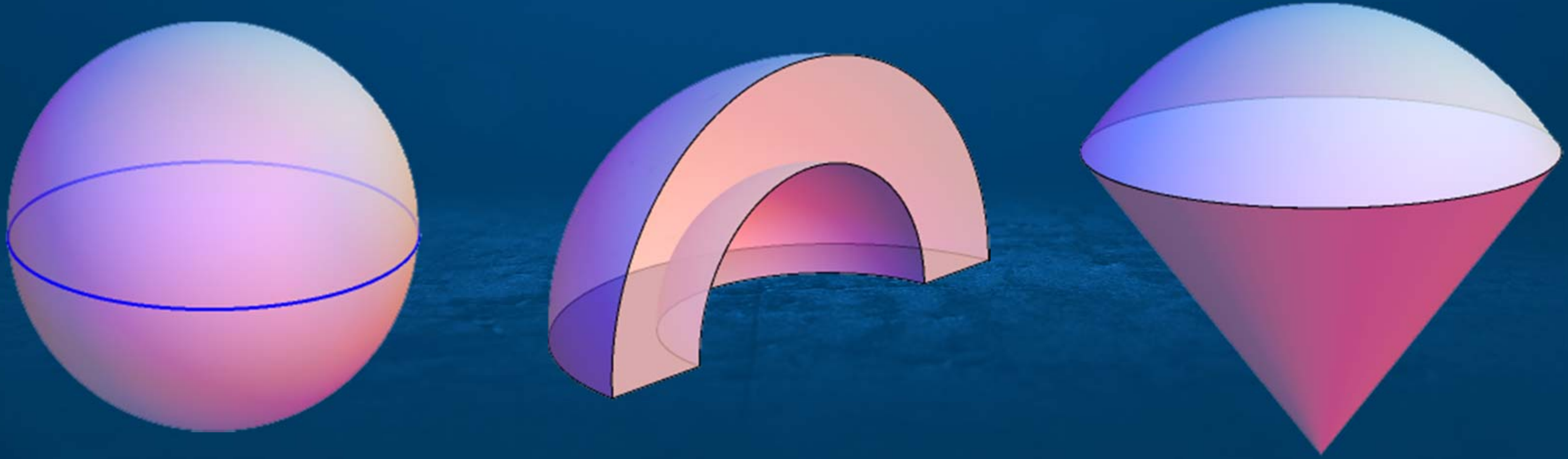
第80讲 球坐标系下三重积分的计算

柱坐标系下三重积分的计算

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z$$



空间上点的球坐标表示

球坐标系下三重积分的计算

球坐标：

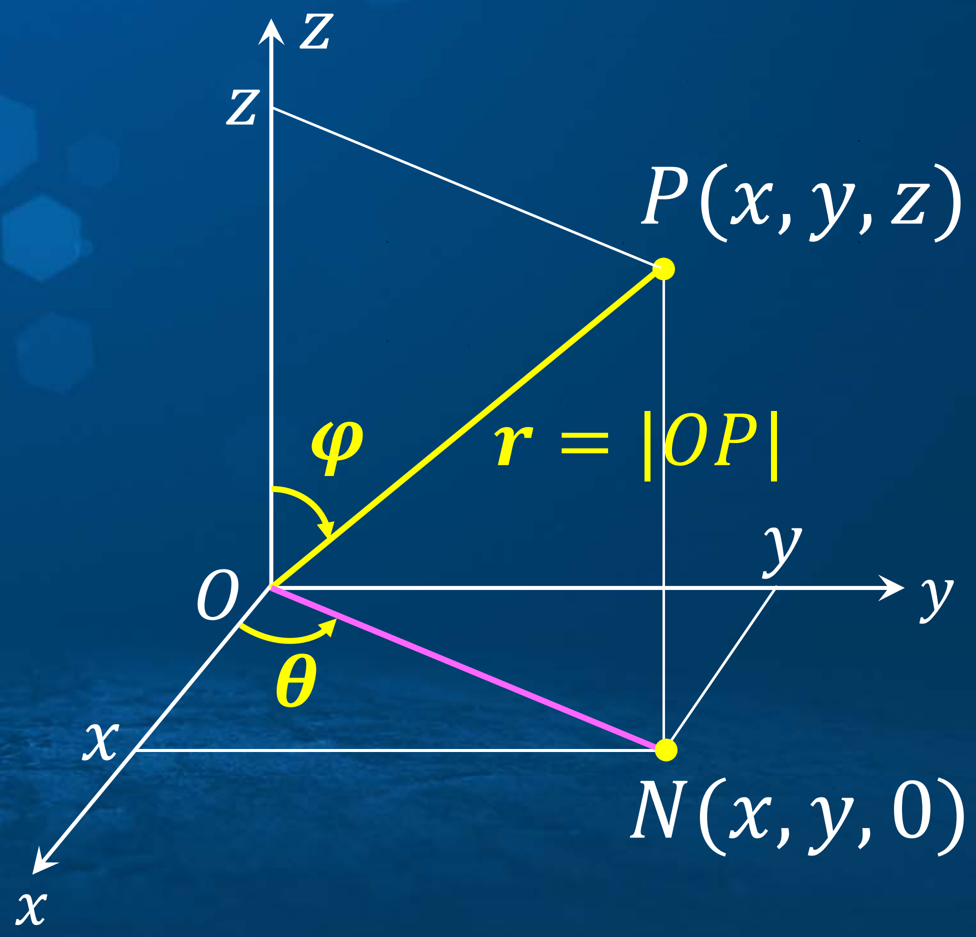
空间上点P的直角坐标为(x,y,z)

(1) r是点P到原点的距离；

(2) φ是$\overrightarrow{OP}$与z轴正向的夹角；

(3) θ是$\overrightarrow{OP}$在xOy面上的投影与x轴正向的夹角.

称有序三元数组(r,φ,θ)为点P的球坐标



直角坐标与球坐标的关系：

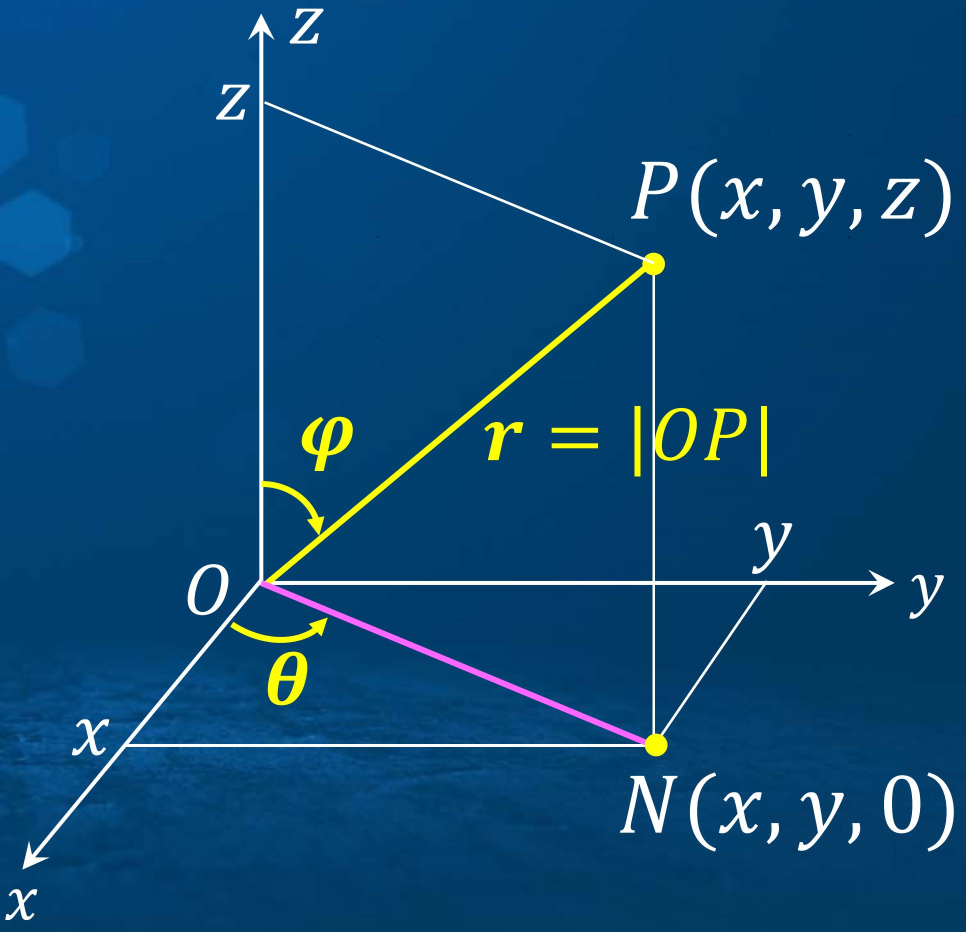
$$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|ON| = r\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x = |ON|\cos\theta = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = |ON|\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi . \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta , \\ y = r\sin\varphi\sin\theta , \\ z = r\cos\varphi . \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

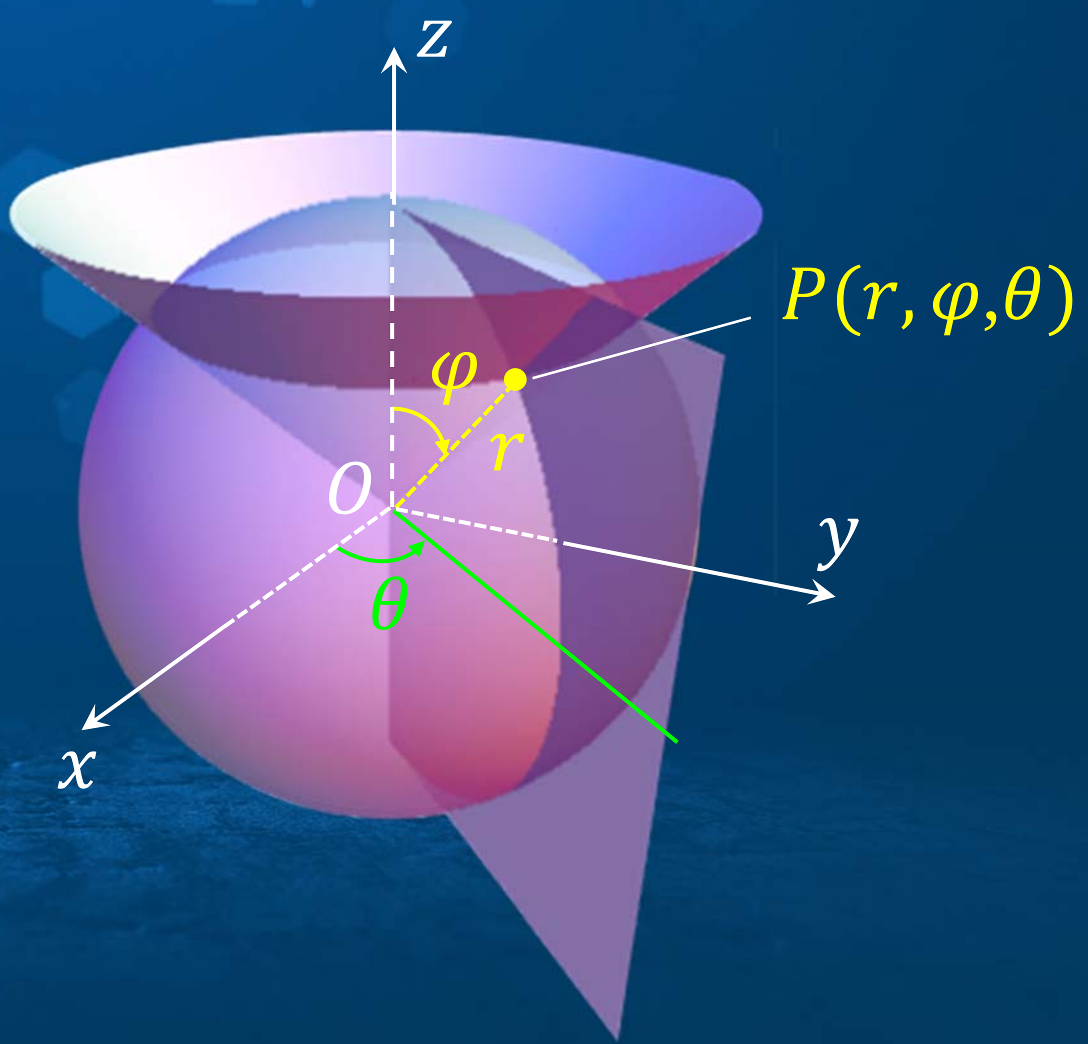


球坐标系中的坐标面：

r =常数 ⟶ 球面

φ =常数 ⟶ 半锥面

θ =常数 ⟶ 半平面



球坐标系中，空间中点的位置由以上三个坐标曲面确定.

例1 将下列曲面方程用球坐标表示.

(1) $x^2+y^2+(z-1)^2=1$； (2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

【例1解】(1) 将$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$ 代入方程

$x^2+y^2+z^2=2z$ 得

$$r^2=2r\cos\varphi \quad \text{即} \quad r=2\cos\varphi.$$

(2) 代入方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得

$$r\cos\varphi=\sqrt{r^2\sin^2\varphi} \xRightarrow{0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}} \tan\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

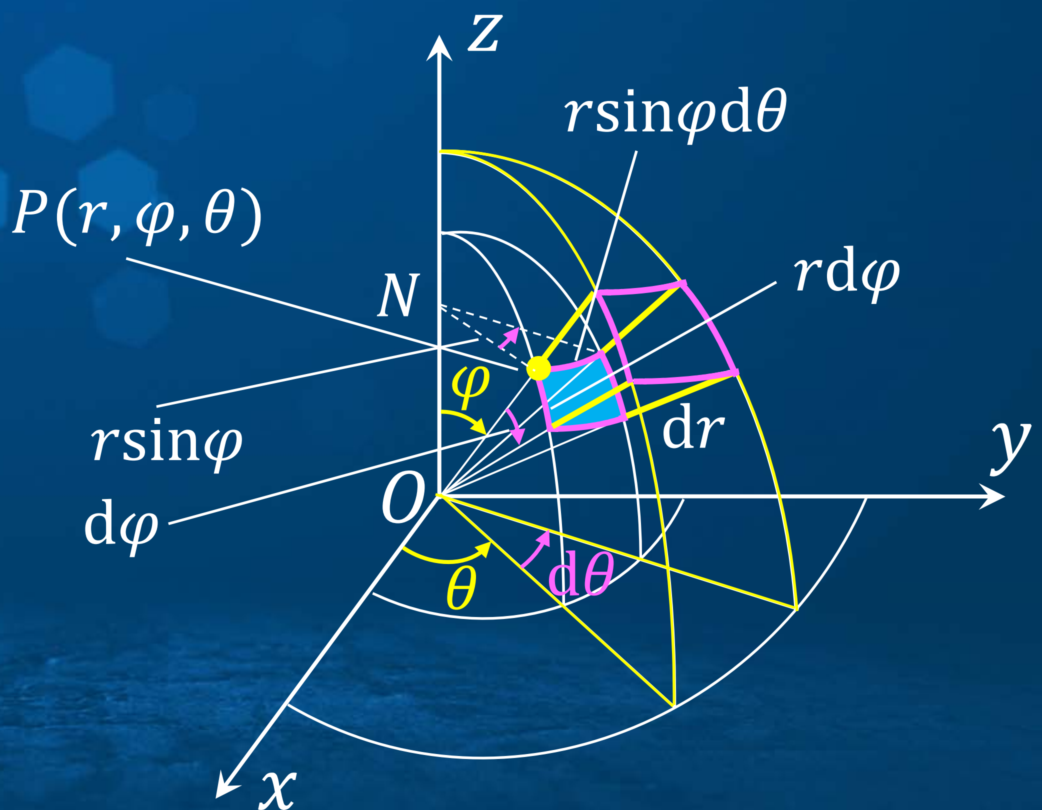
$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$的实际背景为体密度$f(x,y,z)$的空间立体$\Omega$的质量.

ΔV对应的体积近似为

$$\Delta V \approx r^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

取ΔV上密度近似为$P(r,\varphi,\theta)$处的密度$F(r,\varphi,\theta)$，其中

$$F(r,\varphi,\theta) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$$



$$\Delta V \approx r\sin\varphi \mathrm{d}\theta \cdot r\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r$$

三重积分计算的球坐标表示

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\boxed{\mathrm{d}V} = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)\boxed{r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

一般适用范围:

(1) 积分域表面用球坐标表示时方程简单；

(2) 被积函数用球坐标表示时变量互相分离 .

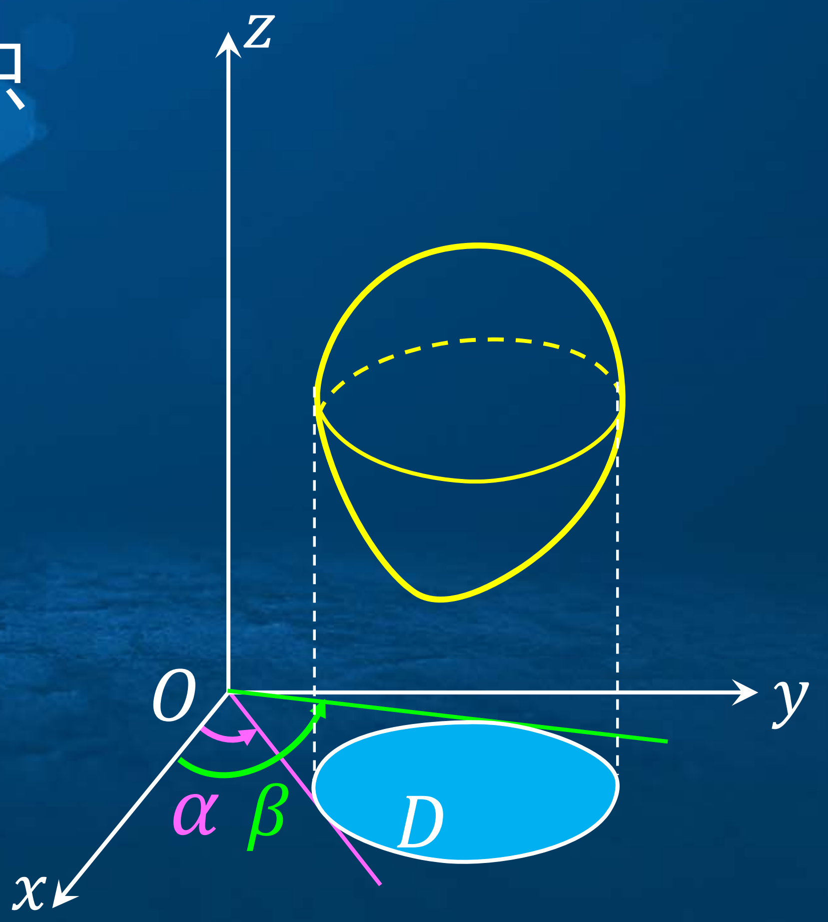
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

化为球坐标下累次积分，总是先对r积分，再对φ积分，最后对θ求积分：

第一步: 作图. 作出区域和它在xOy面的投影区域图.

第二步: 确定θ-积分限：

$$\alpha \le \theta \le \beta$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

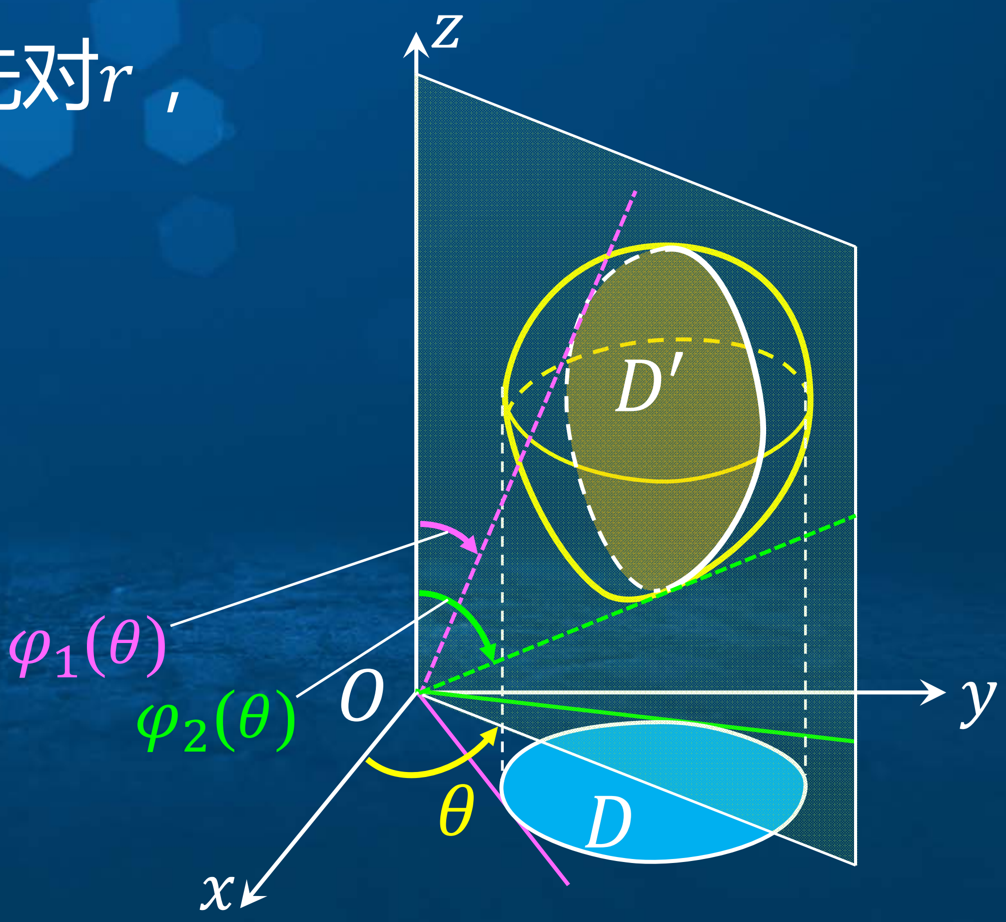
用球坐标计算三重积分，总是先对r，在对φ，最后对θ求积分：

第二步: 确定θ-积分限：

$$\alpha \le \theta \le \beta$$

第三步: 确定φ-积分限：

$$\varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta)$$



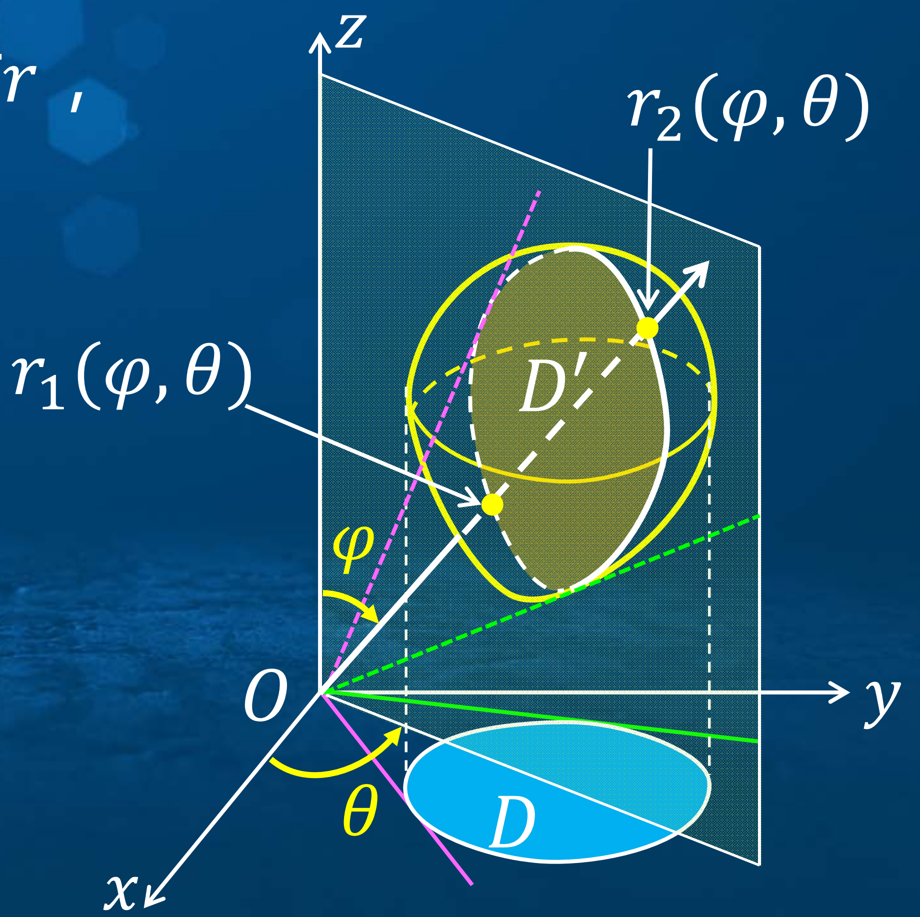
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

用球坐标计算三重积分，总是先对r，在对φ，最后对θ求积分：

第四步: 确定r-积分限：

$$r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta)$$

$$\Omega:\left|\begin{array}{c}\alpha\le\theta\le\beta,\\ \varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\\ r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta)\end{array}\right.$$



三重积分在球坐标系下的累次积分

$$\Omega: \begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta, \\ \varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta), \\ r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta) \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

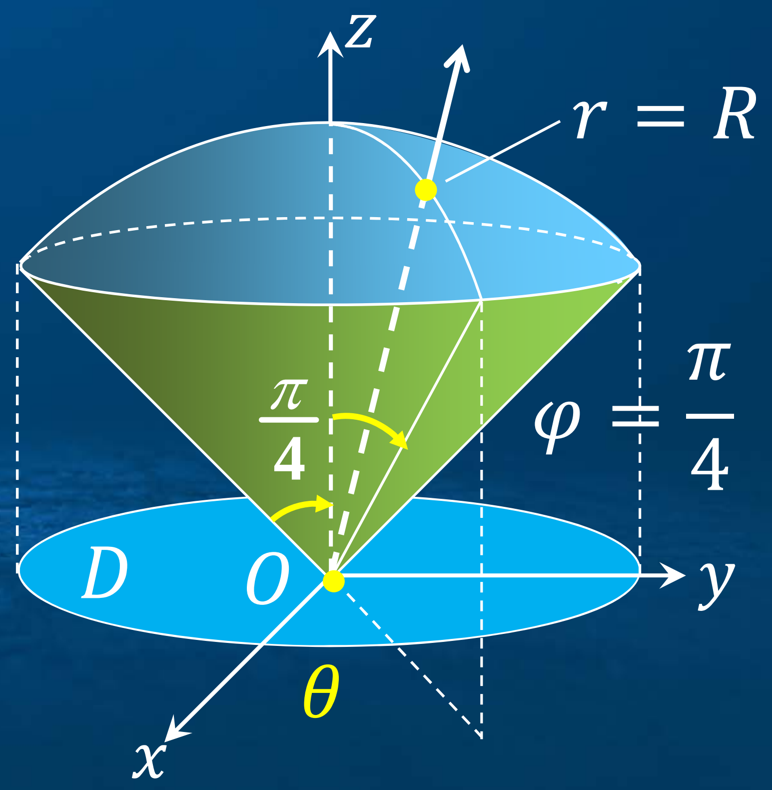
$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

例2 计算三重积分$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$ 为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围立体.

积分区域Ω 的球坐标描述：

$$\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0\le r\le R\end{cases}$$



例3 计算三重积分

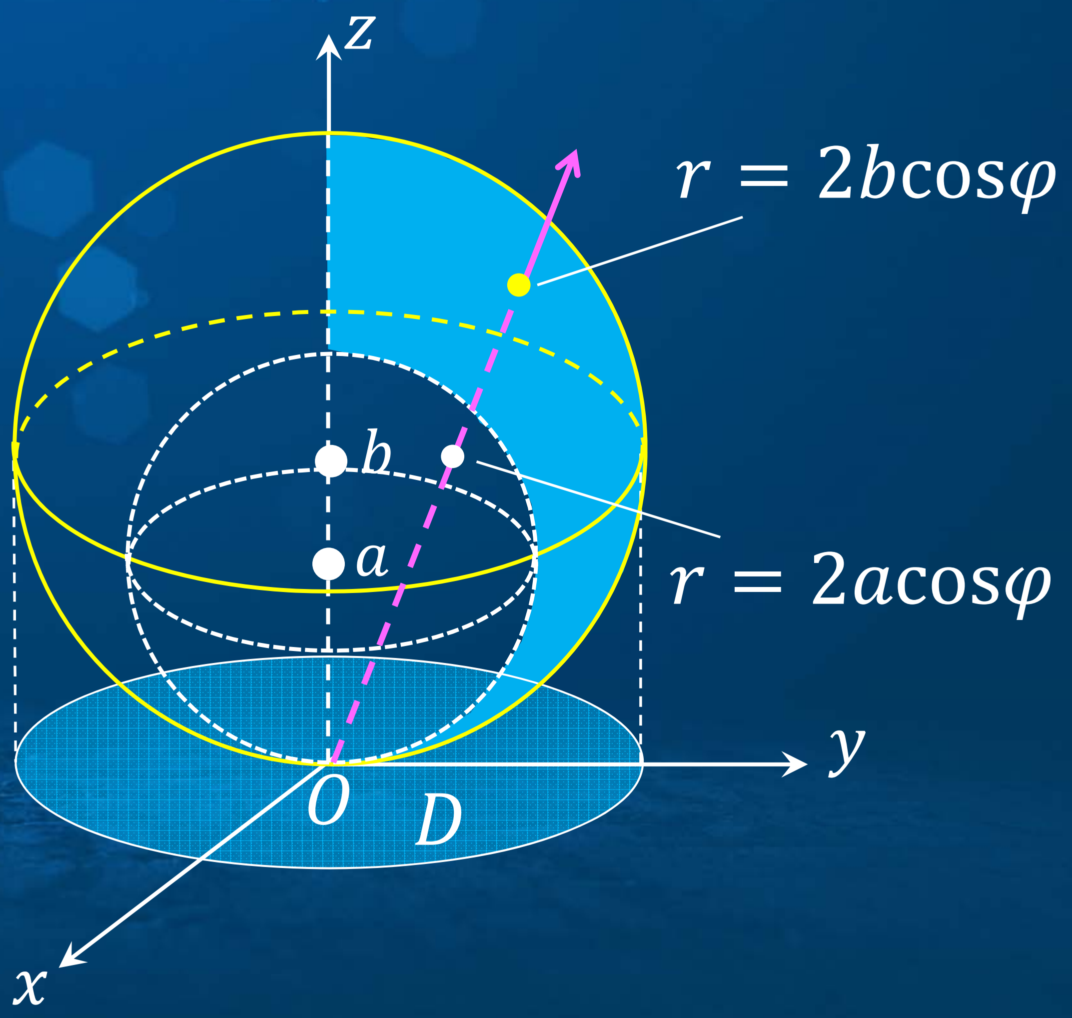
$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V\ ,$$

其中Ω是由两个球面

$$x^2+y^2+z^2=2az,$$

$$x^2+y^2+z^2=2bz(a<b)$$

所围成的部分．



$$\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 2a\cos\varphi\le r\le 2b\cos\varphi\end{cases}$$

例3 计算三重积分

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V\ ,$$

其中Ω是由两个球面

$$x^2+y^2+z^2=2az,$$

$$x^2+y^2+z^2=2bz(a<b)$$

所围成的部分 .