《高等数学》全程教学视频课

第40讲 微积分基本公式

设变速直线运动速度为$v(t)$，则在时段$[a,b]$内物体经过的路程为

$$s=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

如果该物体运动的路程函数为 $s(t)$，则在时段$[a,b]$内的路程为

$$s=s(b)-s(a).$$

$$v(t)=s'(t)$$

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t=s(b)-s(a)$$

设变速直线运动速度为$v(t)$，则在时段$[a,b]$内物体经过的路程为

$$s=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

如果该物体运动的路程函数为 $s(t)$，则在时段$[a,b]$内的路程为

$$s=s(b)-s(a).$$

$v(t)=s'(t)$

$$\int_a^b s'(t)\,\mathrm{d}t=s(b)-s(a)$$

微积分基本公式

变限积分函数

原函数的存在性

变限积分的综合应用

第40讲 微积分基本公式——主要内容

定理1（微积分基本定理）设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可积，且$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

微积分基本公式或牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

例1 计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

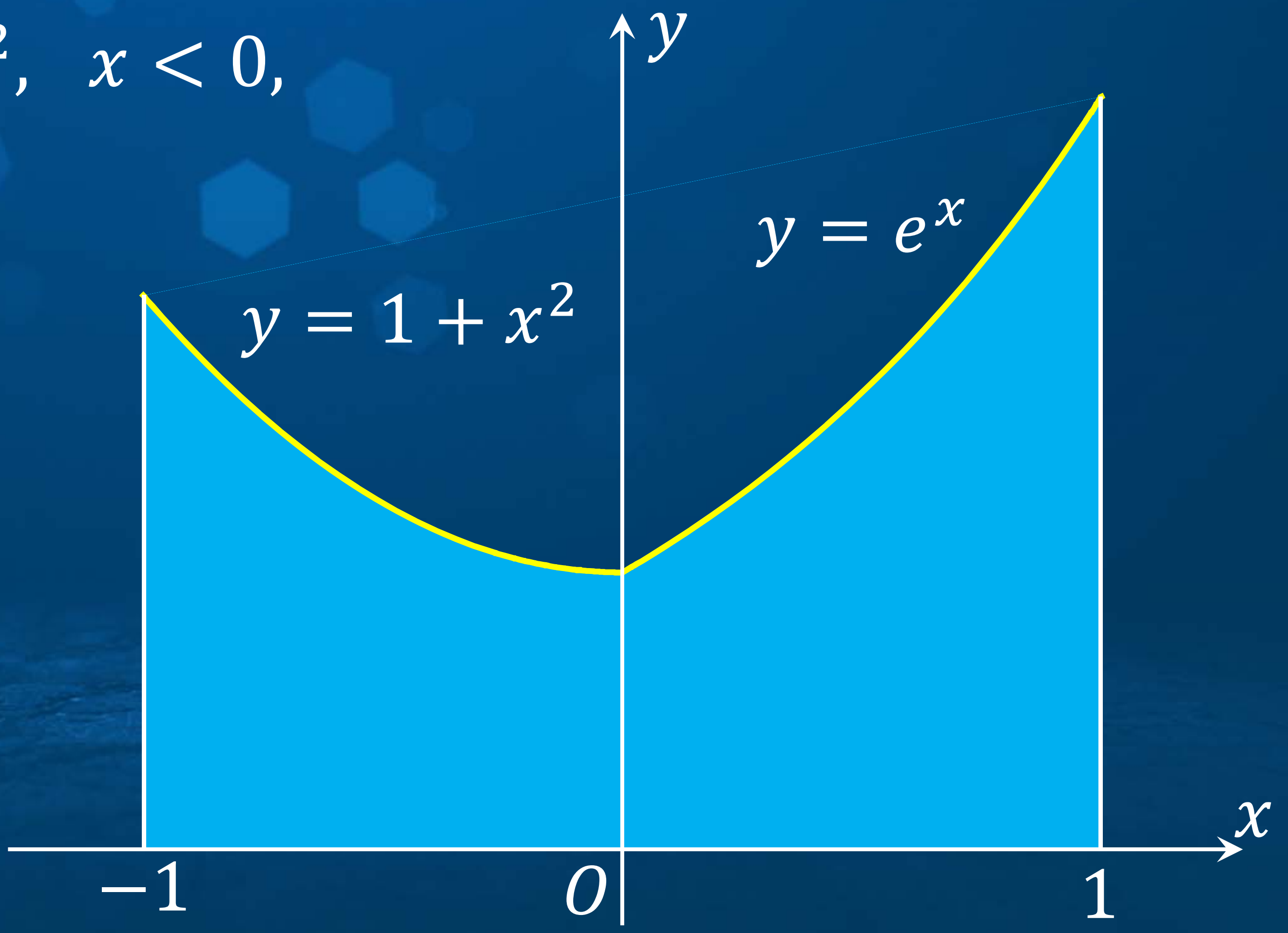
例2 计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$； (3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

例3 计算定积分 $\int_0^1 (x-2e^x)\,\mathrm{d}x$.

例4 已知$f(x)=\begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x<0, \end{cases}$

计算$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

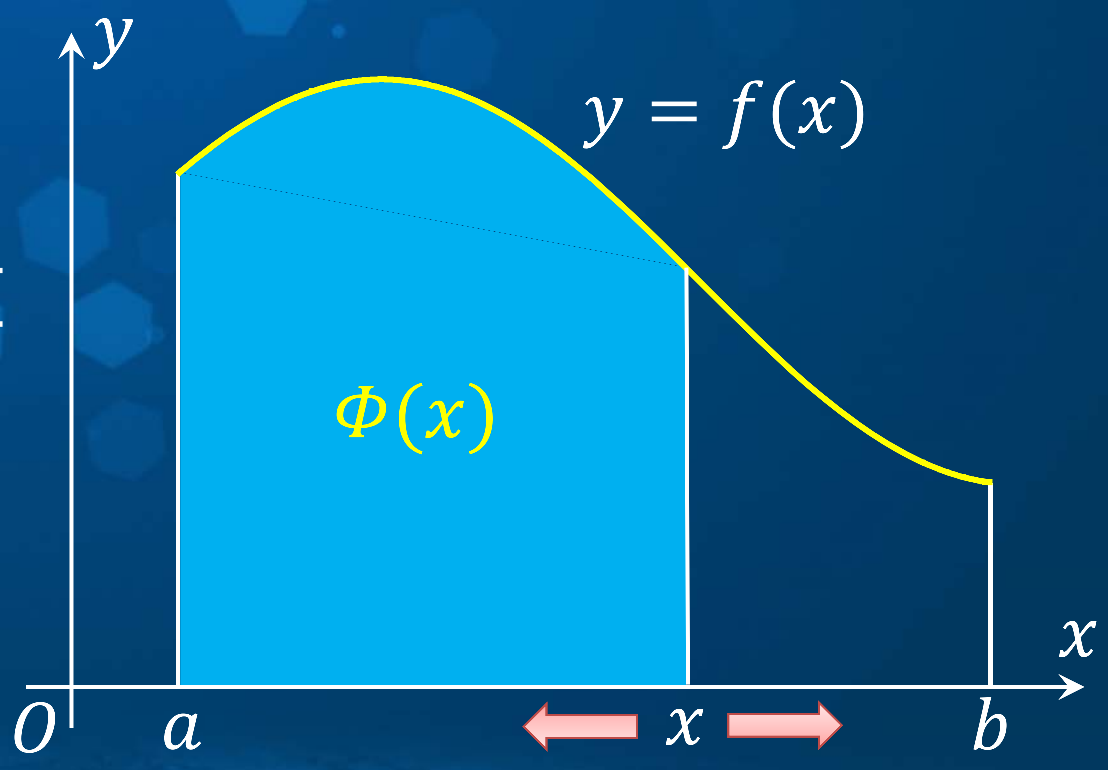


设$f(x)$在$[a,b]$上可积

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x,\ x \in [a,b]$$

注意: 两个x含义不同.



$$\boldsymbol{\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [a,b]}$$

积分上限函数
或变上限积分

定理2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上可导，且

$$\boldsymbol{\Phi}'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

一般地，设$f(x)$连续，$\varphi(x)$可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

例5 求下列变限积分函数的导数

(1) $y=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

(2) $y=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$;

(3) $y=\int_{-x}^{\sqrt{x}}\sin t^2\,\mathrm{d}t,\ x>0.$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$$

- 是否任何函数都存在原函数？

例5 证明函数$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上不存在原函数.

究竟什么样的函数存在原函数？

定理3 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上的连续，则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

例6 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

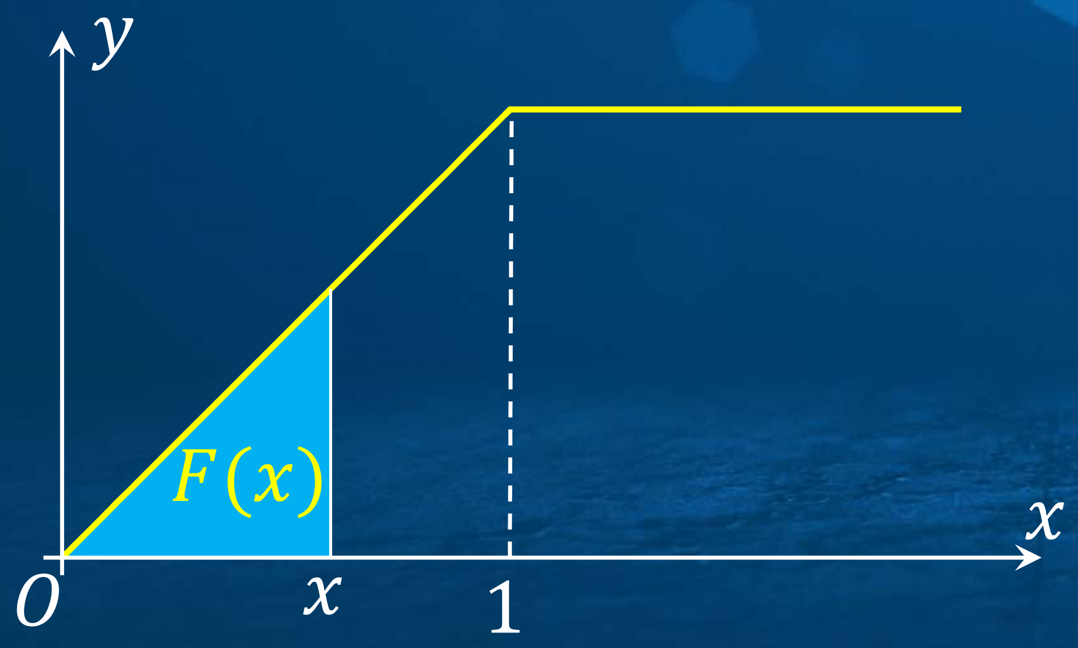
试利用原函数存在定理证明之.

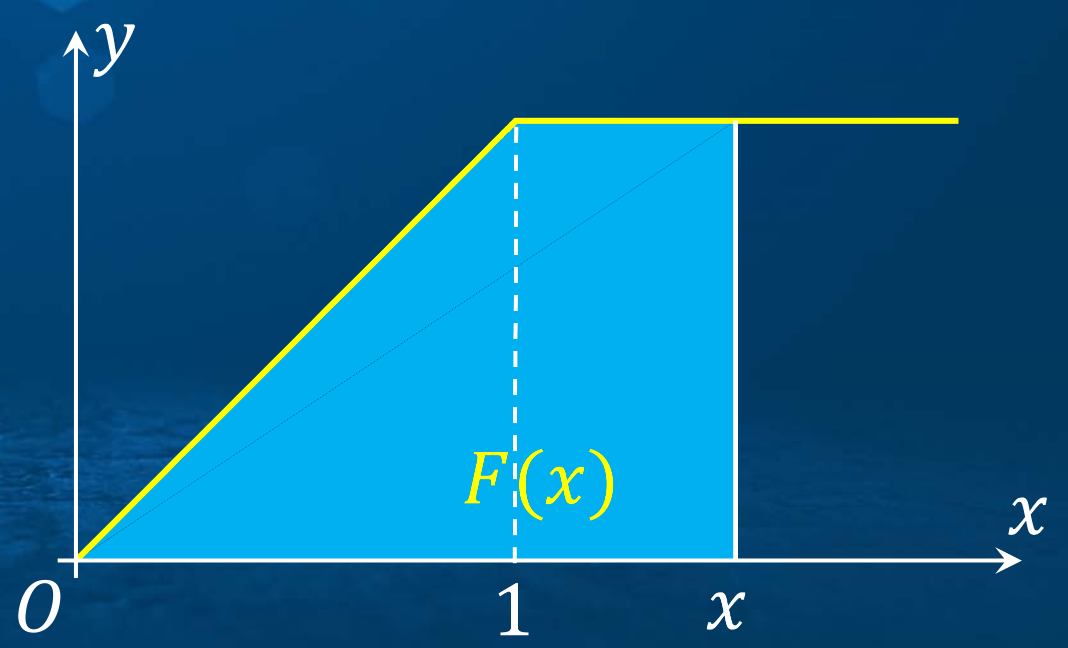
- 初等函数的原函数是否一定是初等函数？

大部分初等函数的原函数都不是初等函数，即这些函数的不定积分“积不出来”

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\cdots$$

例7 已知函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 1, & x>1 \end{cases}$，求$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$上的表达式.





例8 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x^5}$.

例9 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，且$f(x)>0$，证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

在$(0,+\infty)$内单调增加.