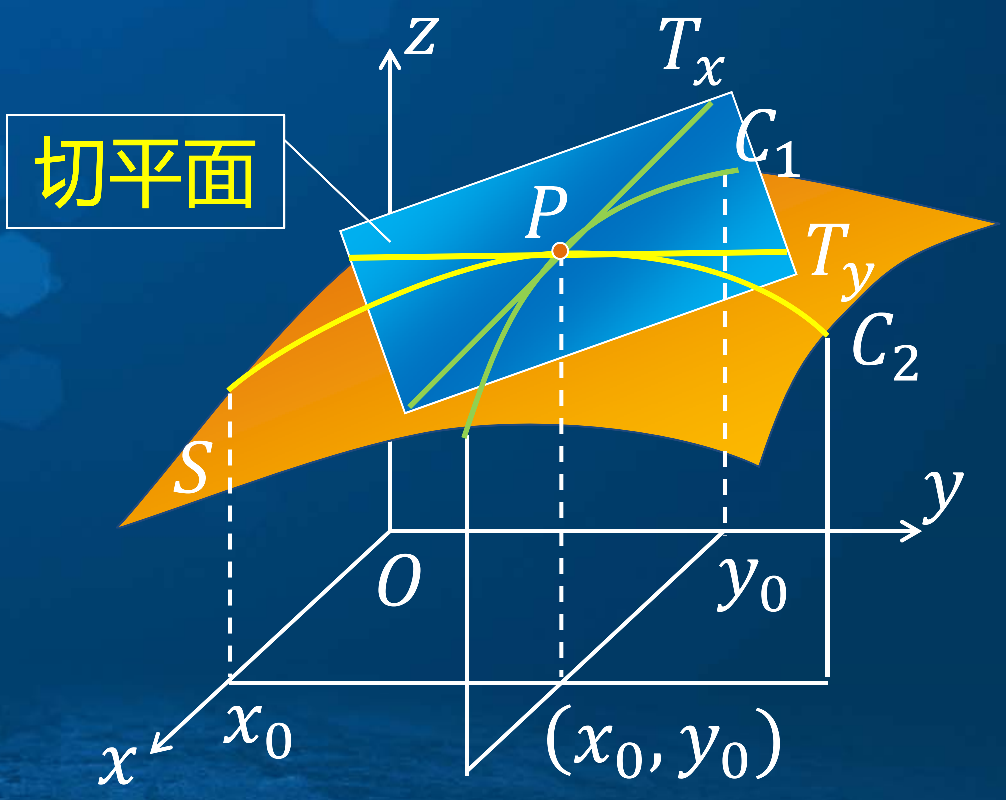
第69讲 偏导数在几何上的应用

设$z=f(x,y)$具有一阶连续偏导数，称由切线T_x和T_y所确定的平面为曲面 S 在点 P 处的切平面．



（1）函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数是否是存在切平面的必要条件？

（2）切平面与曲面上通过P 的其他曲线是否也贴近？

（3）如何得到一般曲面$S: F(x,y,z)=0$的切平面方程？

曲面的切平面和法线

参数曲面的切平面

方程组所确定的空间曲线的切线

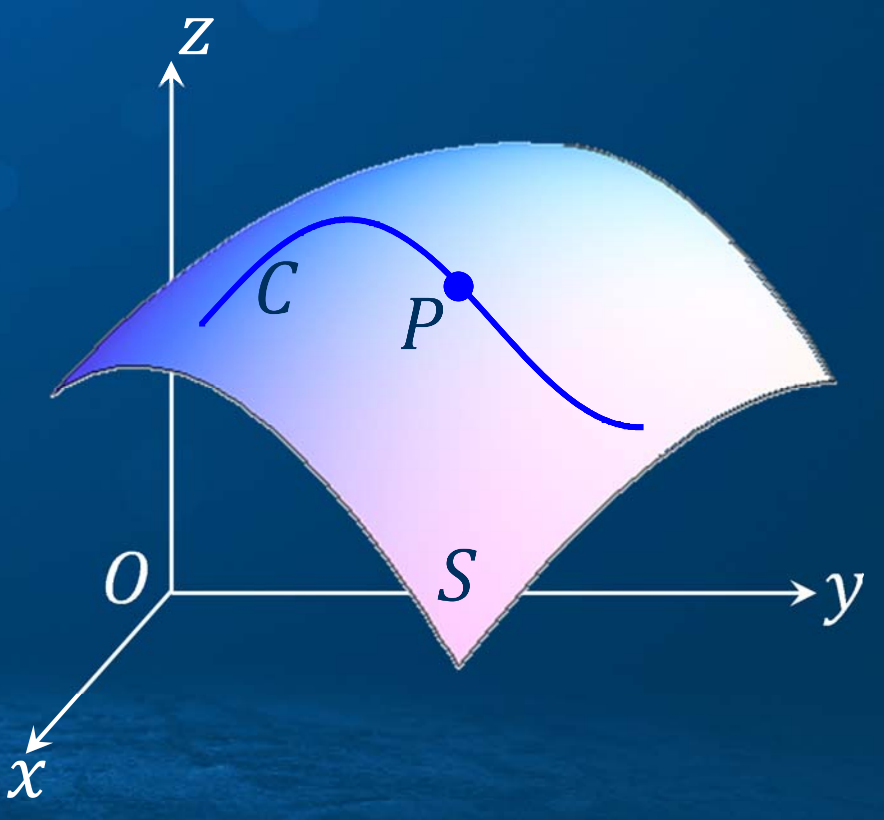
设有曲面S：$F(x,y,z)=0$，其中F可微，C是曲面上通过点$P(x_0,y_0,z_0)$的任意一条光滑曲线.

设曲线C的参数方程为

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$$

令t_0是点P对应的参数，即

$$x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0)$$



$$F(x(t),y(t),z(t))=0 \longrightarrow F'_x\cdot x'(t)+F'_y\cdot y'(t)+F'_z\cdot z'(t)=0$$

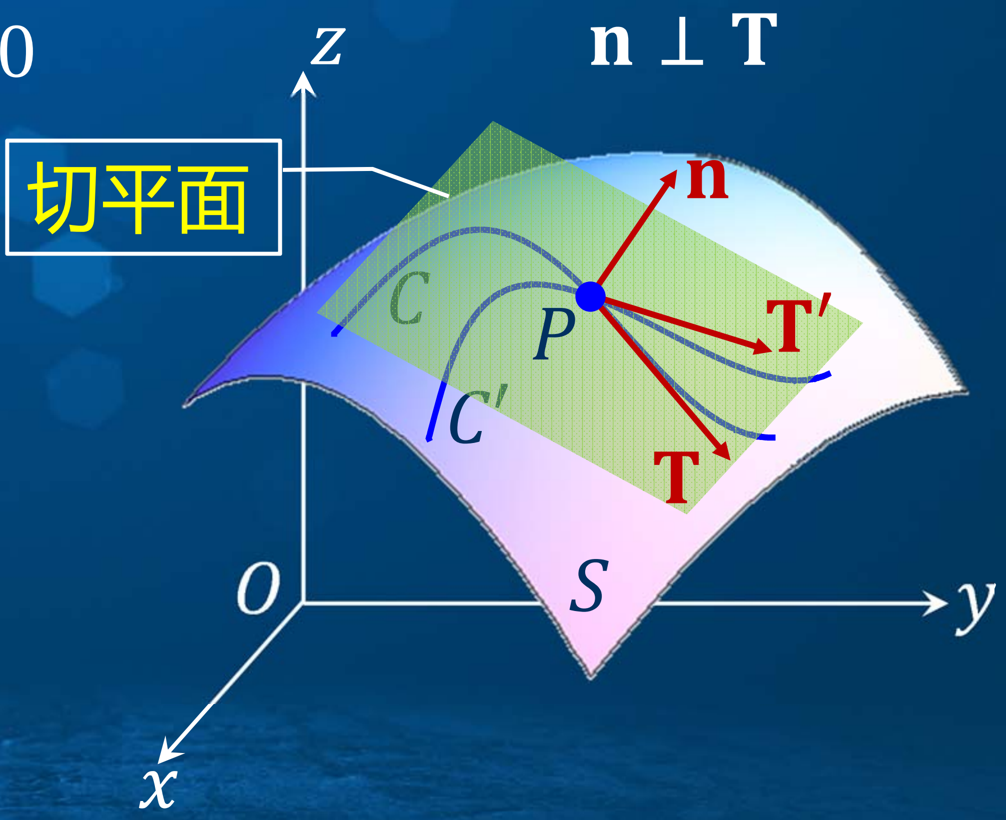
$F'_x \cdot x'(t_0) + F'_y \cdot y'(t_0) + F'_z \cdot z'(t_0)=0$

$\mathbf{T} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

——曲线C在P的切向量

$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)_{(x_0,y_0,z_0)}$

——曲面S在P的法向量



曲面S在P的切平面方程

$$F'_x|_P(x - x_0) + F'_y|_P(y - y_0) + F'_z|_P(z - z_0) = 0$$

特别地，当曲面S的方程为$z=f(x,y)$（其中f可微），令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$$

则曲面S在点$P(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为

$$\mathbf{n}=\left(f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1\right).$$

于是曲面S在点P的切平面方程为：

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例1 求球面$x^2+y^2+z^2=R^2$上点$P(x_0,y_0,z_0)$处的切平面与法线方程．

例2 求旋转抛物线面$z=1+x^2+y^2$在点$(-1,1,3)$处的切平面及法线方程．

设曲面由可微函数$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$给出，试求参数为$(u_0, v_0)$所对应的曲面上的点$P_0$的切平面.

分别取$u = u_0$与$v = v_0$, 由曲面的参数方程可得两条曲面上经过给定点的曲线:

$$\Gamma_1: x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), z = z(u_0, v)$$

$$\Gamma_2: x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$$

则两曲线在P_0点的切向量分别为

$$\mathbf{T}_1 = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0))$$

$$\mathbf{T}_2 = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0))$$

因此，曲面在该点的法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2.$$

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)} = \left(\begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right)_{(u_0,v_0)}$$

$$\boxed{\mathbf{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)_{(u_0,v_0)}}$$

——曲面S：$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$的法向量

例4 设曲面由参数方程$\begin{cases} x = \sin u\cos v, \\ y = \sin u\sin v, \\ z = \cos u. \end{cases}$ $(0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi)$给出，试求该曲面在由参数$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$确定的点处的切平面方程.

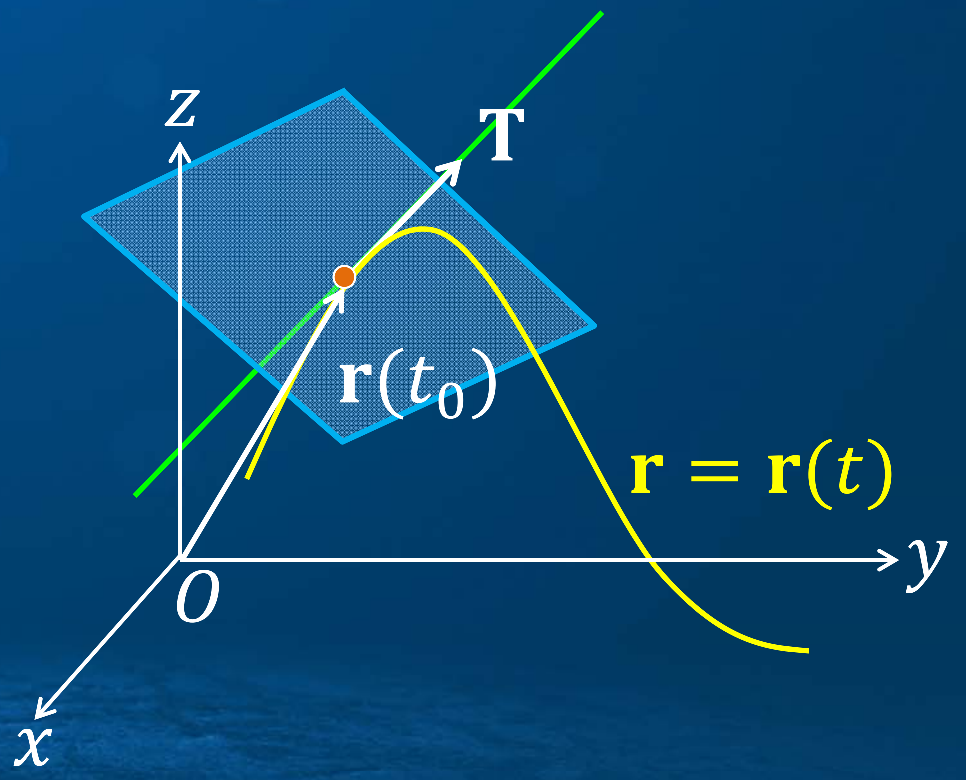
$$\begin{cases} x = \sin u\cos v, \\ y = \sin u\sin v, \\ z = \cos u. \end{cases} \xrightarrow{u = v = \frac{\pi}{3}} P\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

设空间曲线Γ的向量值函数为

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

则在点$(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))$处的切向量为

$$\mathbf{T}=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$$



切线方程为

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)\big(z-z(t_0)\big)=0$$

设有空间曲线Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 当$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$时,

Γ 可表示为 $\begin{cases} x=x, \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ 切向量：$\mathbf{T}=\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$

实际上 $\mathbf{T}=(F'_x,F'_y,F'_z)\times(G'_x,G'_y,G'_z)$

$$=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$$

例5 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$P(1,1,-2)$处的切线及法平面方程．