第68讲 隐函数存在定理

练习：设函数$y=y(x)$方程 $x^3y+2e^{xy}=0$ 确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

将方程两边同时关于x求导数，得

$$3x^2y+x^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2e^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

解得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{3x^2y+2ye^{xy}}{x^3+2xe^{xy}}$$

$$F(x,y)=x^3y+2e^{xy}$$

一般问题：设函数$y=y(x)$方程 $F(x,y)=0$ 确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$F(x,y(x))=0 \longrightarrow F_x'+F_y'\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}$$

$$F(x,y)=0 \qquad F(x,y,z)=0$$

不能显化

$$y=y(x) \qquad z=z(x,y)$$

- 方程在什么条件下才能确定隐函数，即隐函数的存在性；
- 在方程能确定隐函数时，研究其连续性、可微性及求导方法问题．

一个方程确定的隐函数

方程组确定的隐函数

定理1（隐函数存在定理） 如果函数$F(x,y)$满足下列条件：

(1) $F(x_0,y_0)=0$；

(2) $F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内具有连续偏导数；

(3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某邻域内惟一确定一个函数$y=y(x)$，满足$F(x,y(x))=0$且$y_0=y(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

设$y=y(x)$为由$F(x,y)=0$确定的隐函数 ,则

$$F(x,y(x))=0$$

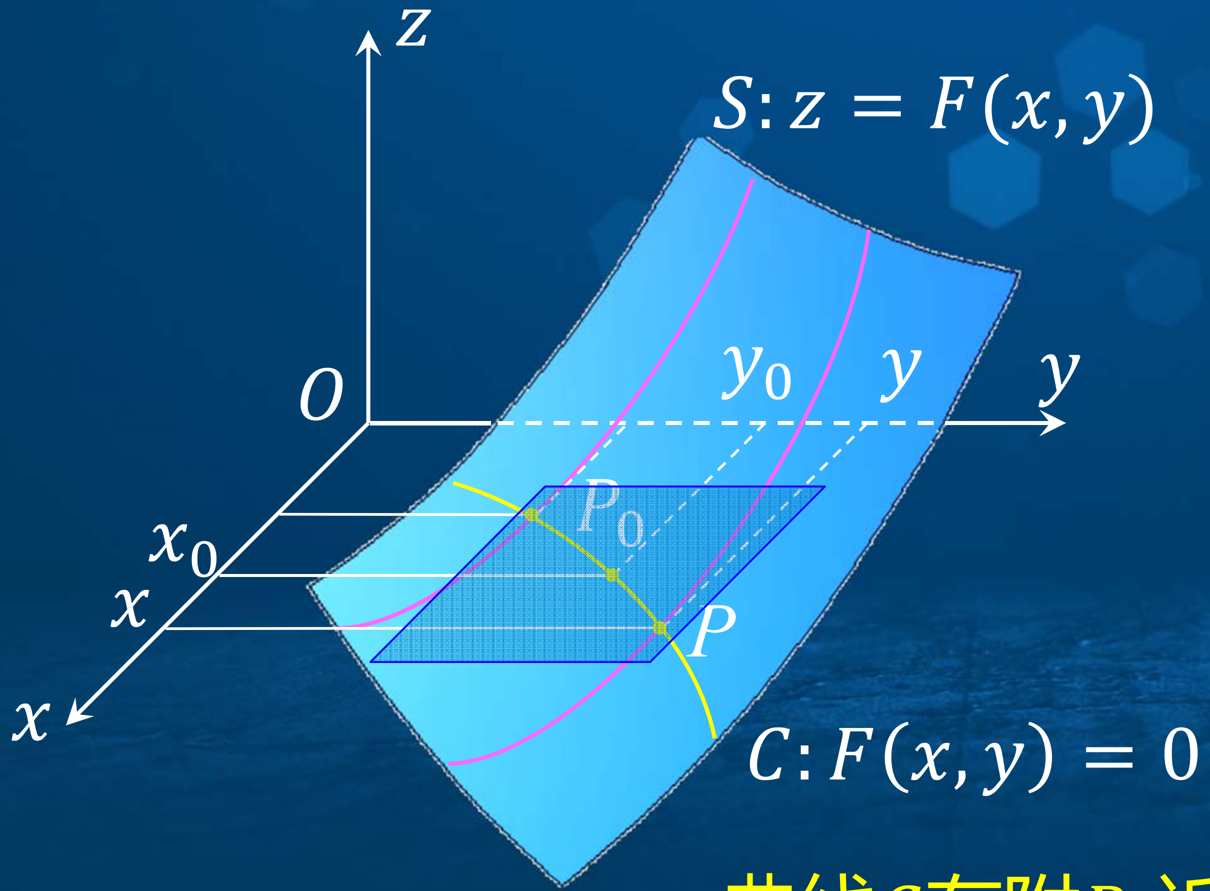
两边对 x 求导

$$F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv 0$$

在$(x_0\,,\,y_0)$的某邻域内$F_y\neq 0$

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}=-\frac{\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{y}}}$$

隐函数存在定理的几何解释



- $F(x_0, y_0) = 0$

$P_0(x_0, y_0)$—在S与xOy平面的交集上

- $F'_y(x_0, y_0) > 0$

存在P_0的邻域使得

$$F'_y(x, y) > 0$$

$F(x, y)$关于y增加

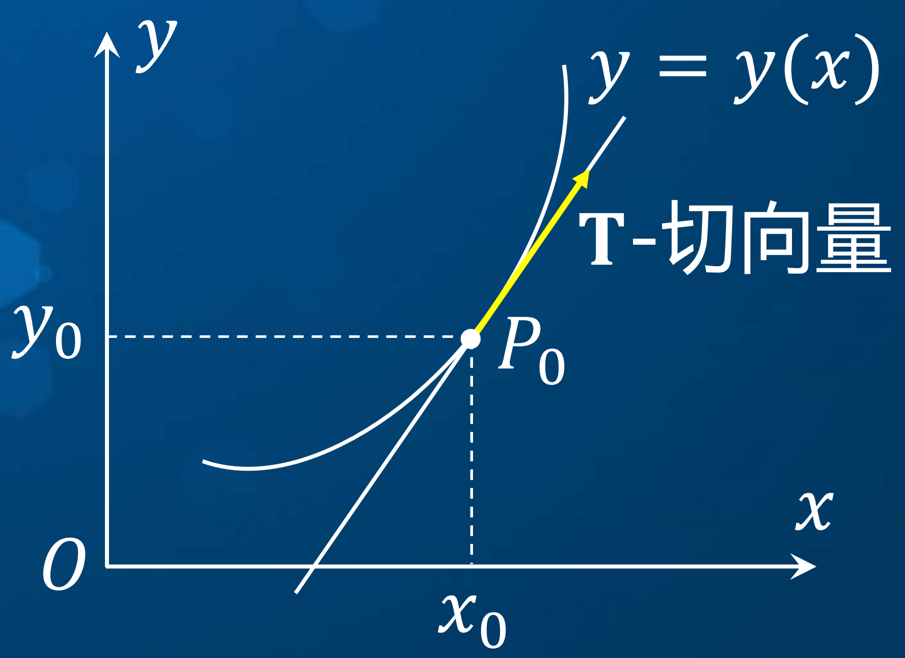
曲线C在附P_0近确定隐函数

隐函数图形的切线方程

$$F(x,y)=0 \ \Rightarrow \ y=y(x)$$

$$\mathbf{T}=\left(1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(1,-\frac{F_x'}{F_y'}\right)$$

$$\mathbf{T}//\left(F_y',-F_x'\right)$$



切线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{-F_x'(x_0,y_0)}$

即

$$\boxed{F_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0)(y-y_0)=0}$$

例1 验证 $2^{xy}=x+y$ 在点(0,1)某邻域内确定一个函数 $y=y(x)$ ，

并求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$. $F(x,y)=2^{xy}-x-y$

验证隐函数存在定理条件：

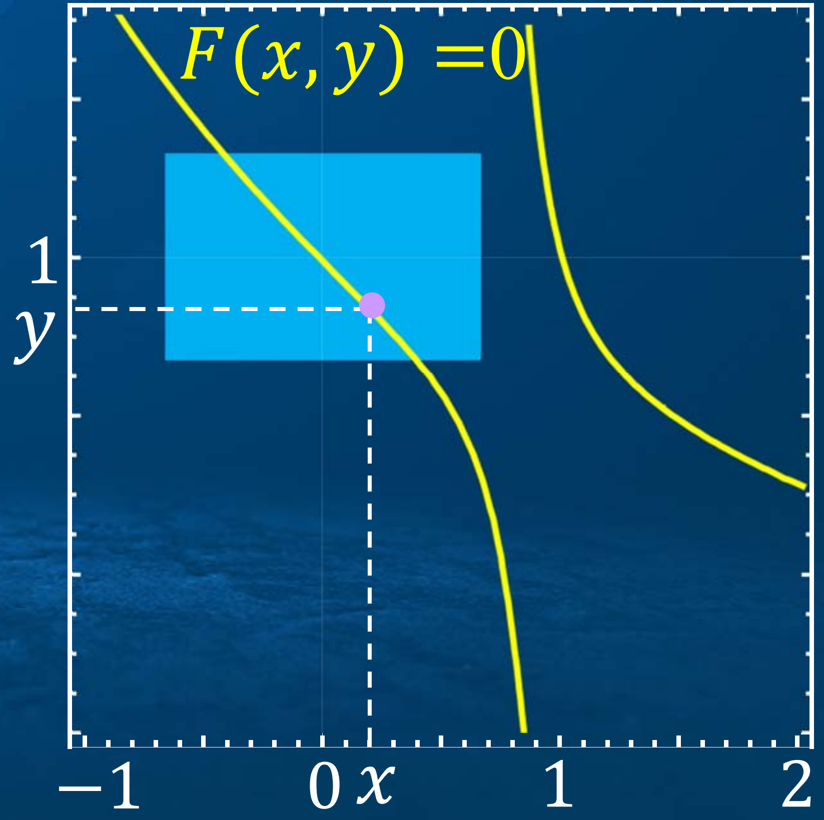
（1）$F(0,1)=0$；

（2） F_x'和F_y'连续；

（3）$F_y'(0,1)=F_y'(x,y)|_{(0,1)}$

$$=(x2^{xy}\ln 2-1)|_{(0,1)}$$

$$=-1\neq 0.$$



定理2（隐函数存在定理）如果函数$F(x,y,z)$满足下述条件：

(1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$；

(2) $F(x,y,z)$在(x_0,y_0,z_0)的某个邻域内具有连续的偏导数；

(3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，

则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内惟一确定一个二元函数$z=z(x,y)$，使得$F(x,y,z(x,y))=0$，且$z_0=z(x_0,y_0)$，并有连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

设$z=z(x,y)$为由$F(x,y,z)=0$确定的隐函数，则

$$F(x,y,z(x,y))\equiv 0$$

两边对 x 求偏导

$$F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$$

在(x_0,y_0,z_0)的某邻域内$F'_z\neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$，同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

例2 设$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

【例2解】令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$ ，由于

$$F'_x=2x-3yz,\ F'_y=2y-3xz,\ F'_z=2z-3xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y-3xz}{2z-3xy}$$

例3 设$x^2y-e^z=z$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例4 设 $xu-yv=0, yu+xv=1$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$ 得 $u=\dfrac{y}{x^2+y^2}, v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{cases} xu(x,y)-yv(x,y)=0 \\ yu(x,y)+xv(x,y)=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{关于}x,y\text{求偏导数}} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

例5 设函数$u = u(x, y), v = v(x, y)$由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}$$

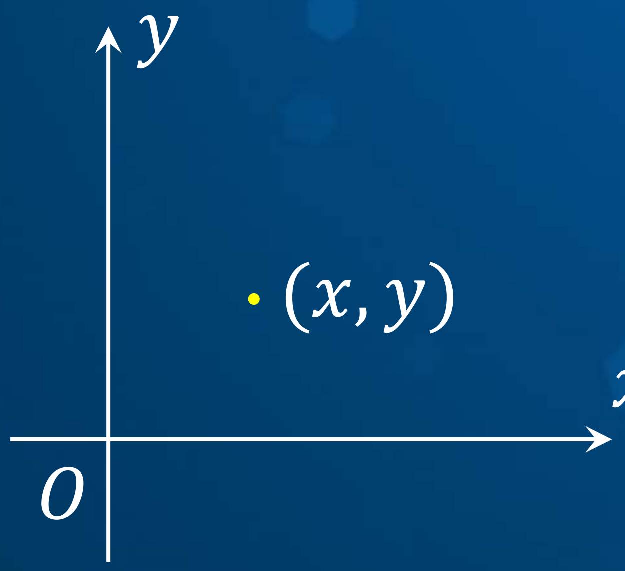
所确定，试推导 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 的公式 .

$$\boxed{J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

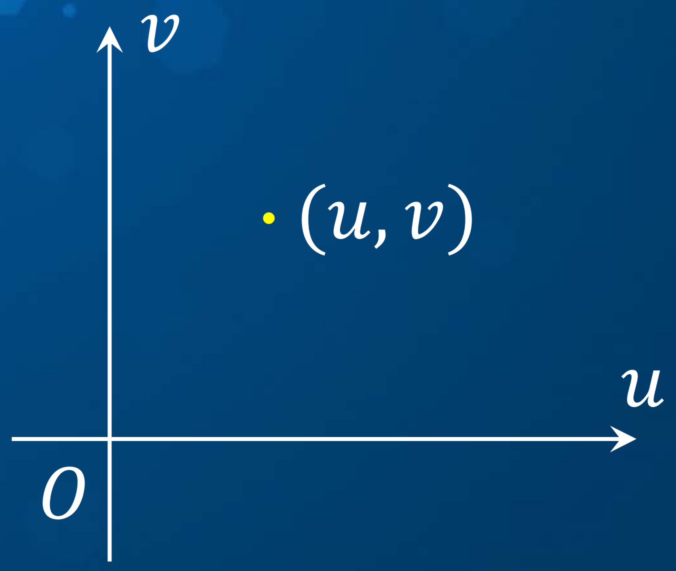
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

F, G关于u, v的雅可比行列式



$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$



$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \Longleftrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$