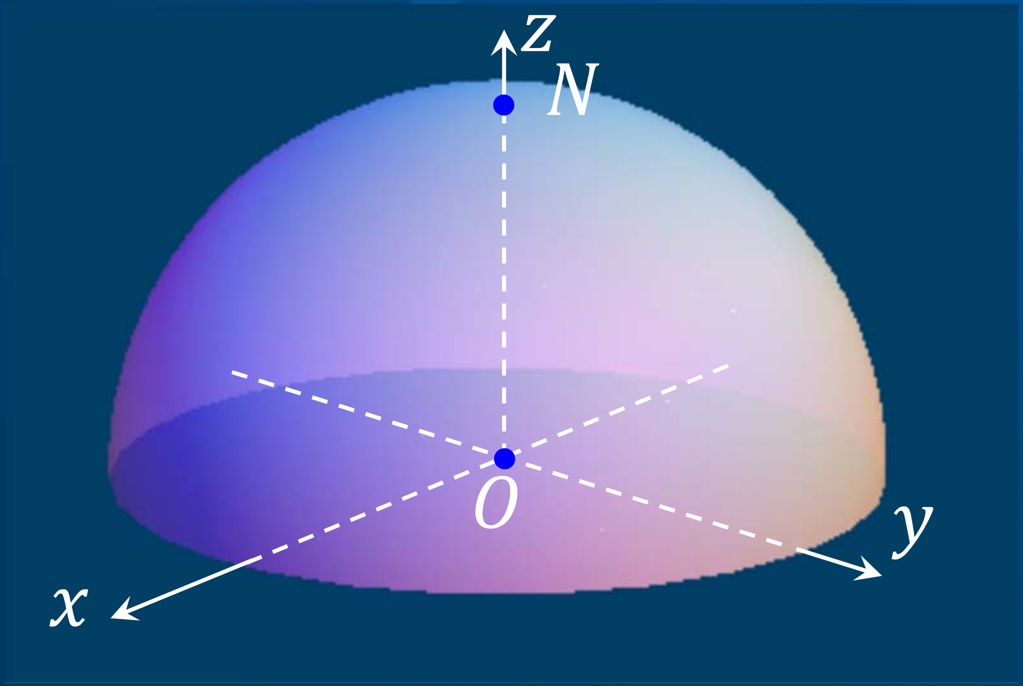
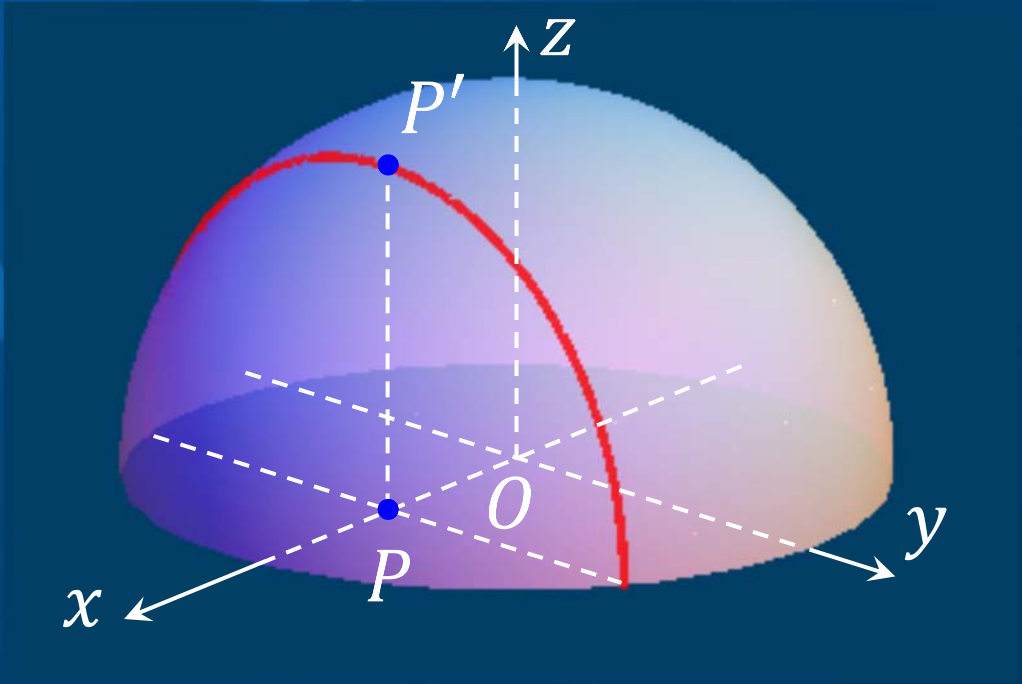
第73讲 条件极值





$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

函数的极大值为

$$f(0,0)=1$$

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x=\frac{1}{2}$$

所给条件的极大值为

$$f(1/2,0)=\sqrt{3}/2$$

条件极值的概念

条件极值的几何判定

拉格朗日乘子法

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值：对自变量只有定义域限制}\\ \text{条件极值：对自变量除定义域限制外，}\\ \qquad\qquad\quad\text{还有其它条件限制}\end{cases}$$

例如，求 $f(x,y)$在条件$g(x,y)=0$下的极值．

——— 条件极值

称$f(x,y)$为目标函数，方程$g(x,y)=0$为约束条件，变量x,y为决策变量.

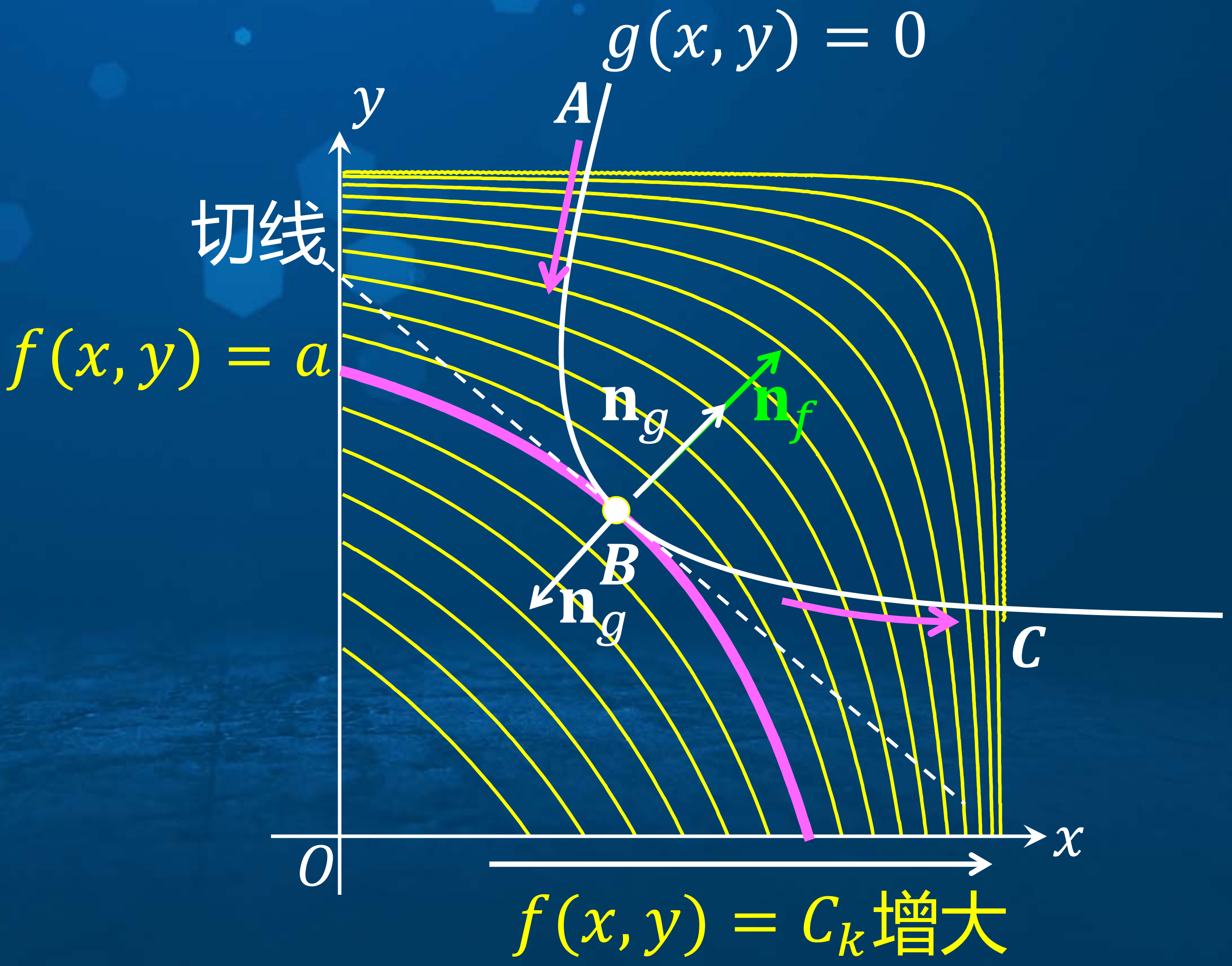
$\mathbf{n}_f // \mathbf{n}_g$

$\Downarrow$

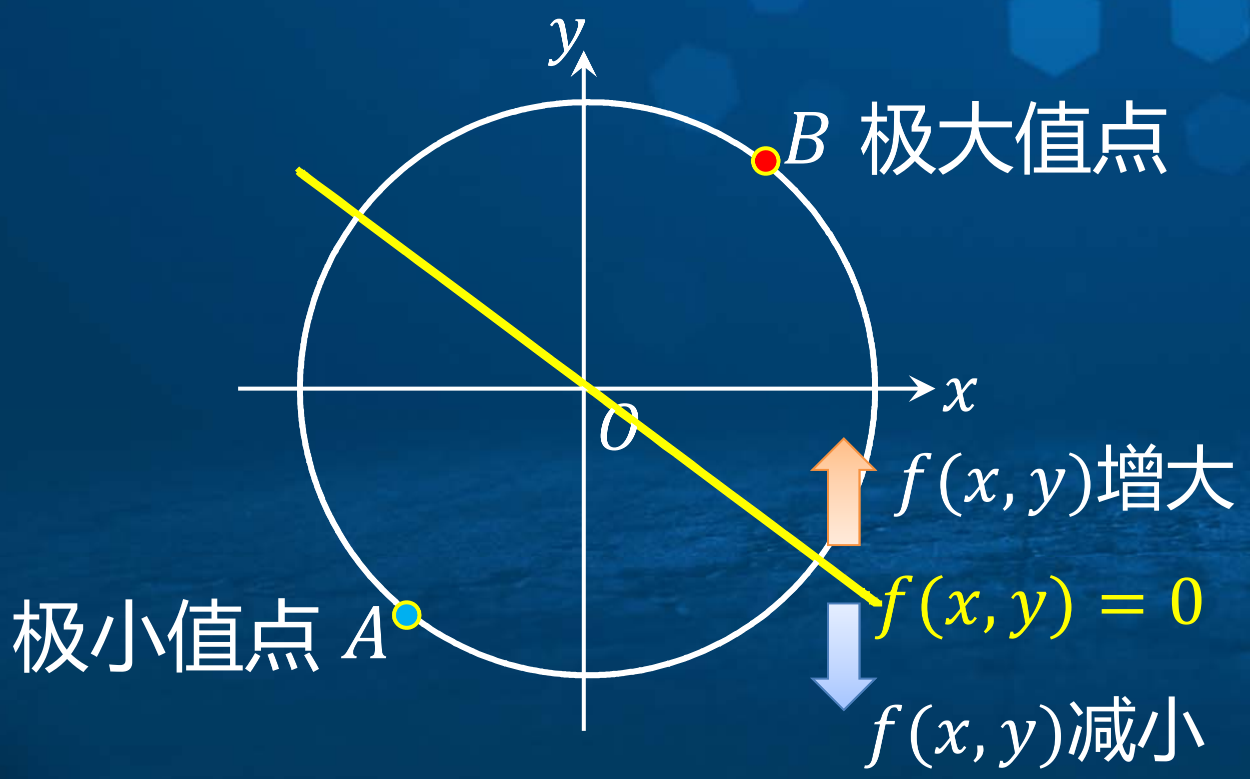
$$\begin{cases}\nabla f(x_0,y_0) // \nabla g(x_0,y_0)\\ g(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

$\Downarrow$

(x_0,y_0)



例1 试根据几何图形观察、分析函数$f(x,y)=3x+4y$在圆周$x^2+y^2=1$上的极值点，根据几何图形关系求条件极值.



单位圆周$x^2+y^2=1$的法向量

$$\mathbf{n}_g=(2x,2y)$$

等值线$f(x,y)=C$的法向量

$$\mathbf{n}_f=(3,4)$$

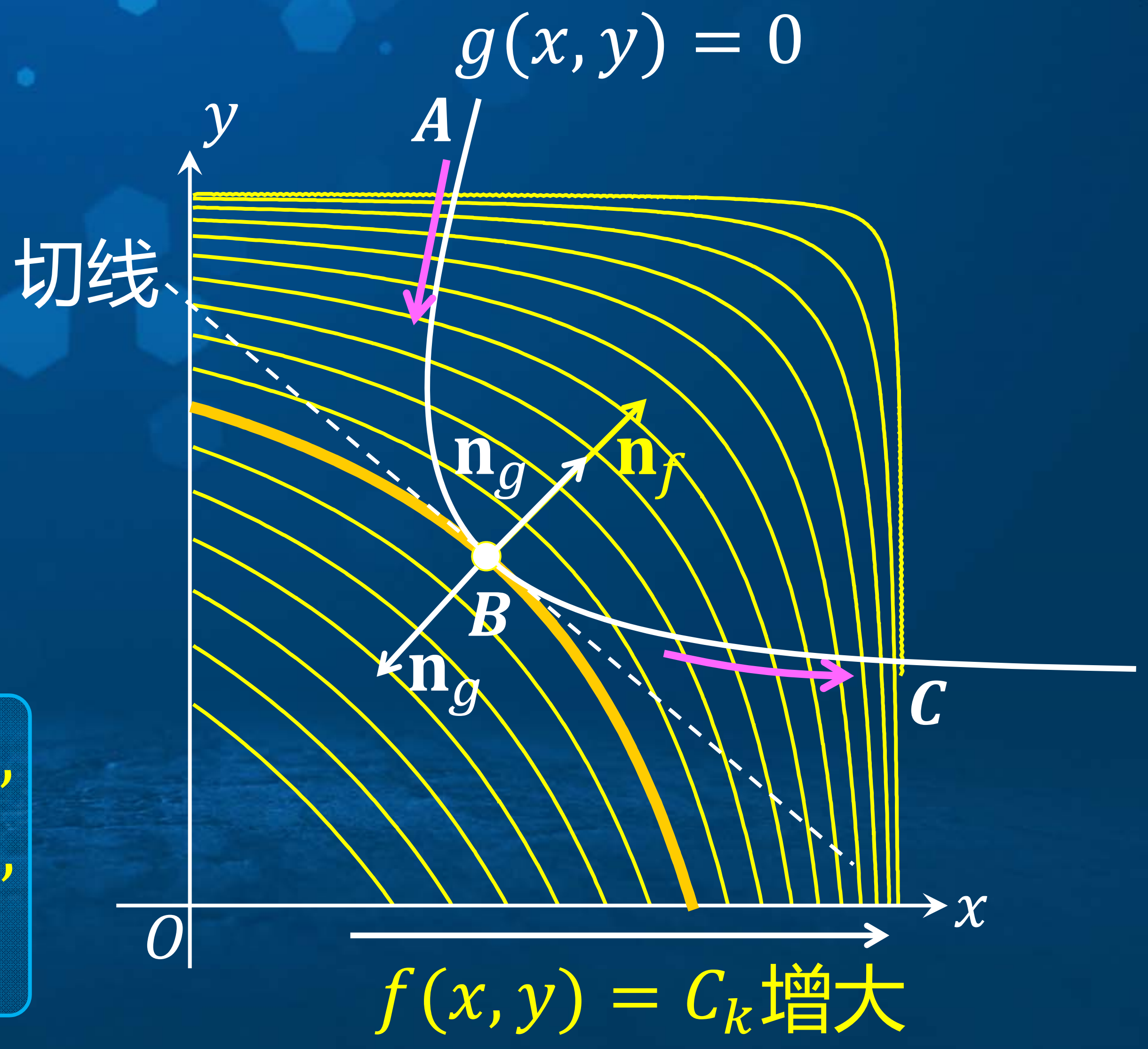
$$\mathbf{n}_g /\!/ \mathbf{n}_f \longrightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{4}$$

$$\nabla f(x_0,y_0) // \nabla g(x_0,y_0)$$

$$f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0 g'_x(x_0,y_0)=0$$
$$f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0 g'_y(x_0,y_0)=0$$

$$g(x_0,y_0)=0$$

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0 g'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0 g'_y(x_0,y_0)=0, \\ g(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0 g_x'(x_0,y_0)=0, \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0 g_y'(x_0,y_0)=0, \\ g(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

引入辅助函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\,g(x,y)$—— 拉格朗日函数

参数λ称为拉格朗日乘子

拉格朗日函数在(x_0,y_0,λ_0)取极值的必要条件是：

$$\nabla L(x_0,y_0,\lambda_0)=\mathbf{0}$$

- 上述求条件极值的方法称为拉格朗日乘子法

- 拉格朗日乘子法的分析推导

假设条件极值问题 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ 的极值点为 (x_0, y_0)

如，函数$z = f(x,y)$在$g(x,y) = 0$条件下取极小值

方程$g(x,y) = 0$确定隐函数$y = y(x)$，则有$y_0 = y(x_0)$

函数$z = f(x,y(x))$在$x = x_0$处取得极小值

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y(x))\bigg|_{x=x_0} = 0 \longrightarrow \nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$$

总结 如果 $f(x,y)$ 在条件 $g(x,y)=0$ 下，在 (x_0,y_0) 取得极值，那么存在实数λ_0，使得(x_0,y_0,λ_0)是拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\, g(x,y)$$

的驻点，即满足方程组

$$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0 g_x'(x_0,y_0)=0, \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0 g_y'(x_0,y_0)=0, \\ g(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

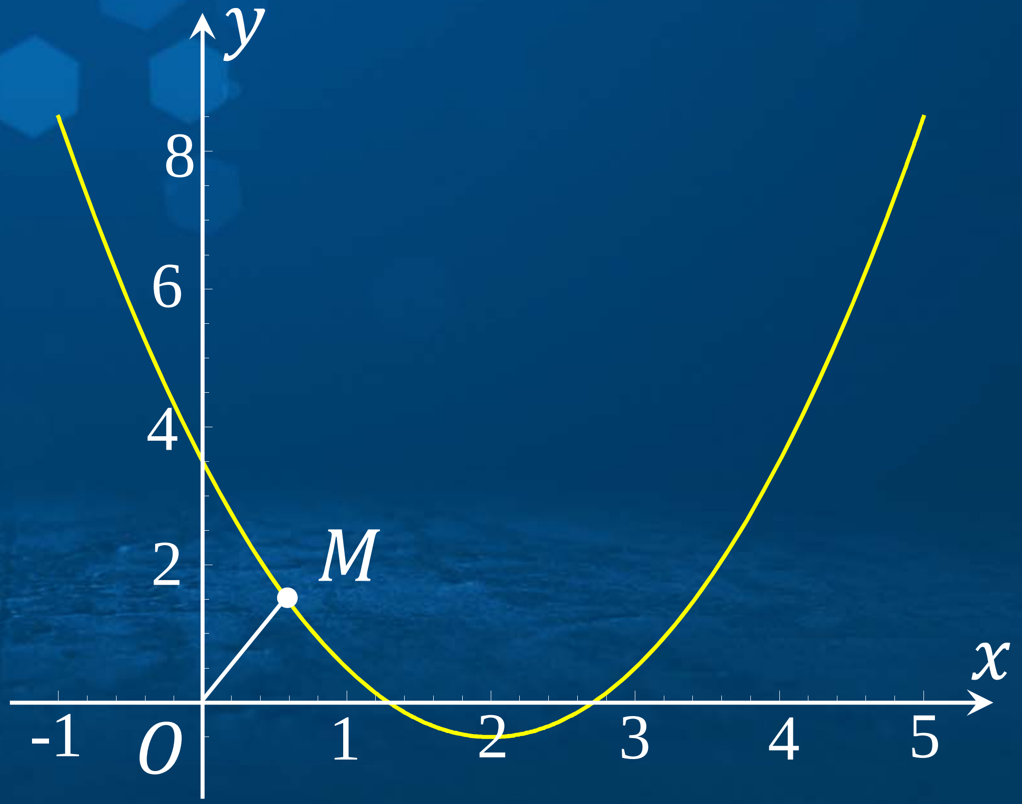
求条件极值 $\xrightarrow{\text{拉格朗日乘子法}}$ 无条件极值

例2 求利用拉格朗日乘子法求函数 $f(x,y)=3x+4y$ 在圆周 $x^2+y^2=1$上的极值.

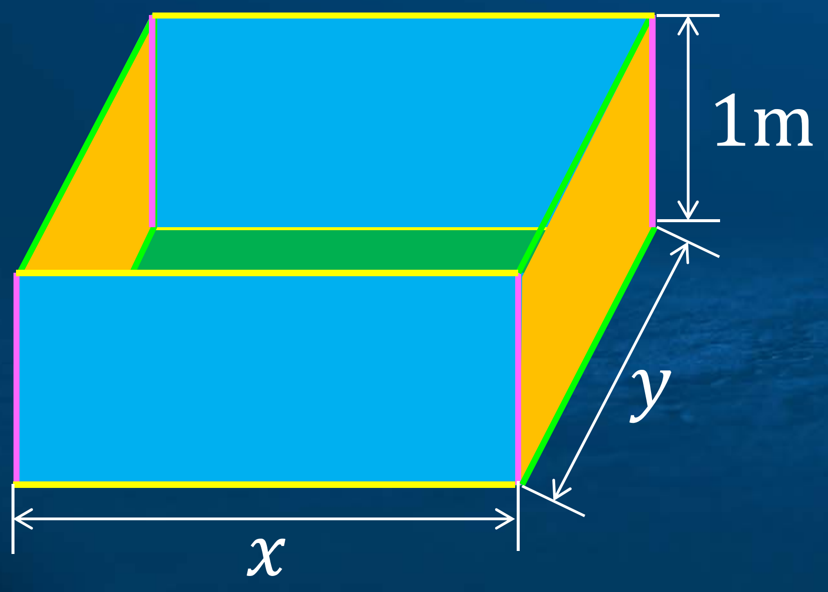
例3 在抛物线

$$y=x^2-4x+\frac{7}{2}$$

上求一点使它到原点的距离最近．



例4 (容积最大化问题) 某加工厂对于已经做好的高度为1米的无盖长方体容器需要在内表面涂上一层金属涂料. 根据预算，分配给每个箱子的涂料只能涂满5平方米的表面积. 试问，在保证内部能够涂满涂料的同时，如何使得它们的容积最大？



x, y满足如下约束条件：

$$xy + 2x + 2y = 5\ (x, y > 0)$$

求 $V = xy$ 的最大值.