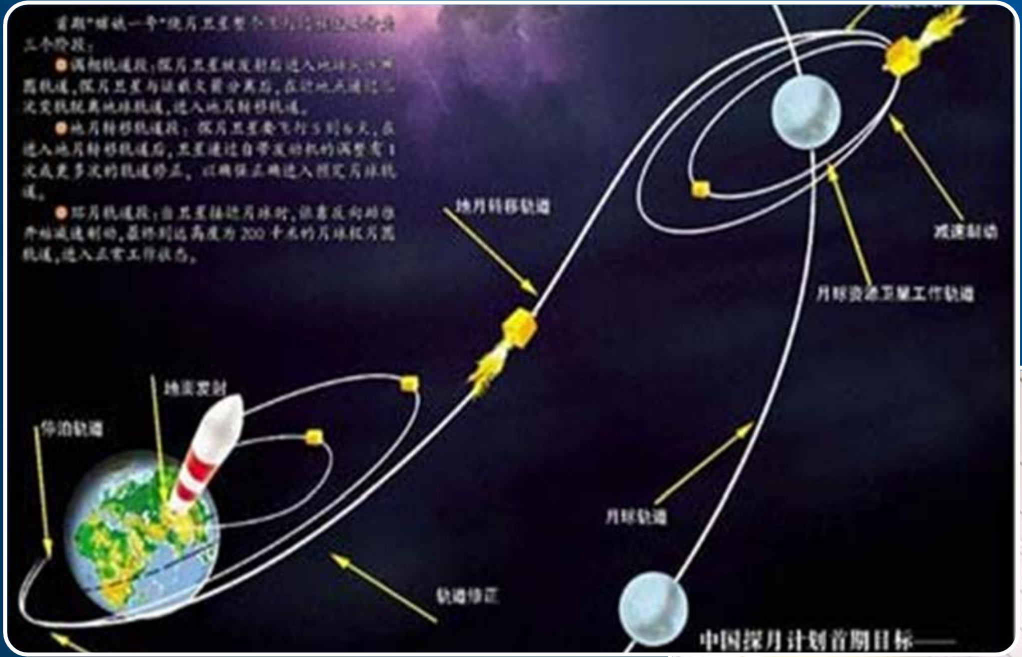
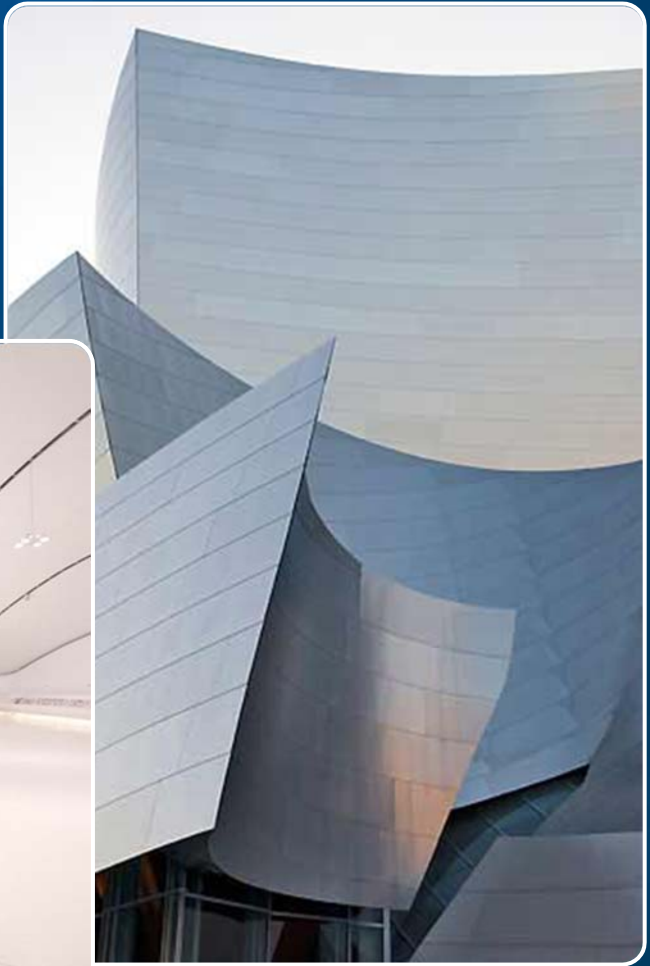
第59讲 空间曲线





第59讲 空间曲线——问题的引入

空间曲线及其方程

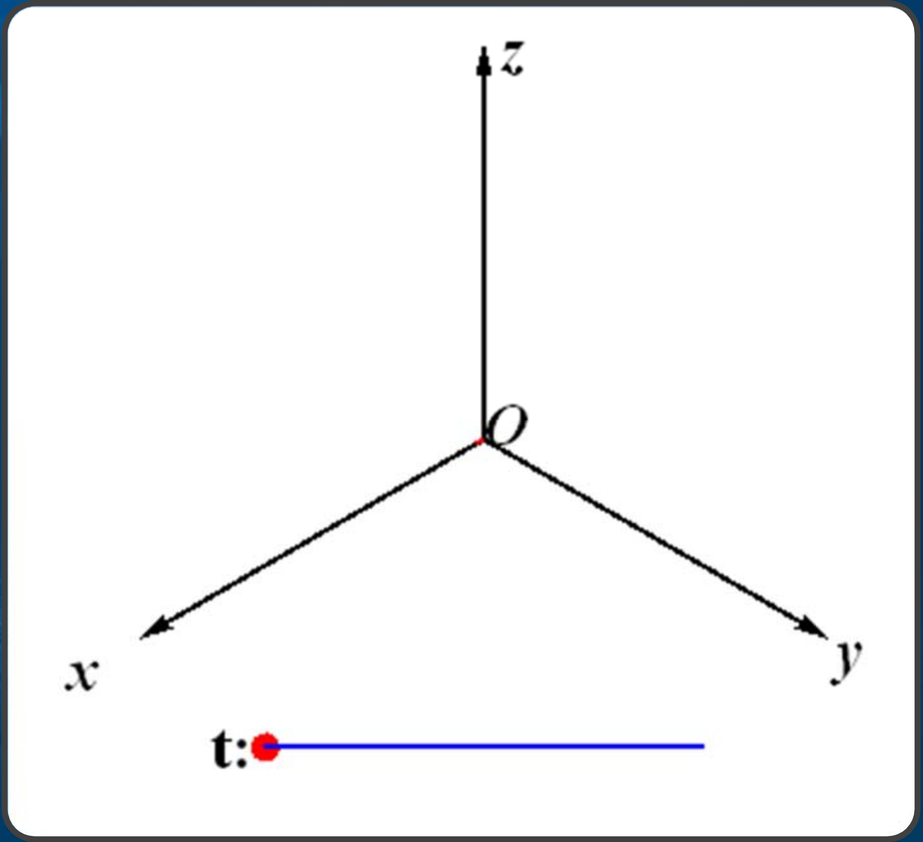
投影柱面与投影曲线

用截痕法研究曲面

一般地, 曲线 C 上动点 M 的坐标(x, y, z)都表示为另一个变量 t 的函数 ：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \\ z = z(t). \end{cases}$$

当 t 在范围$[\alpha, \beta]$范围内变动时，则产生一条空间曲线C ，称上述方程组为空间曲线 C 的参数方程，并称 t 为参数.

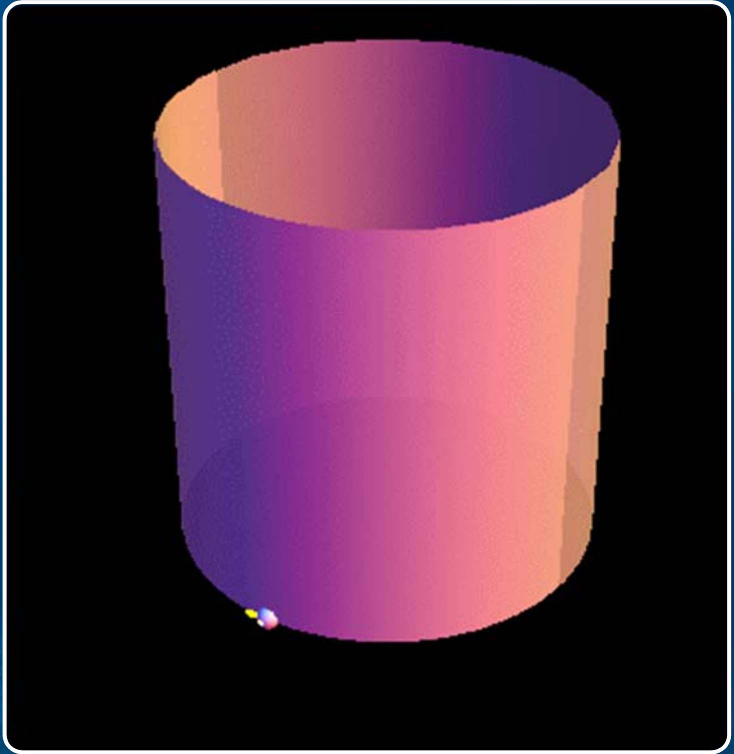


例1 设空间一动点M在圆柱面

$$x^2+y^2=R^2$$

上以等角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正向均匀地上升. 动点M的轨迹称为圆柱螺旋线 .

试求圆柱螺旋线的参数方程 .



圆柱螺旋线的参数方程为：

$$x^2+y^2=R^2$$

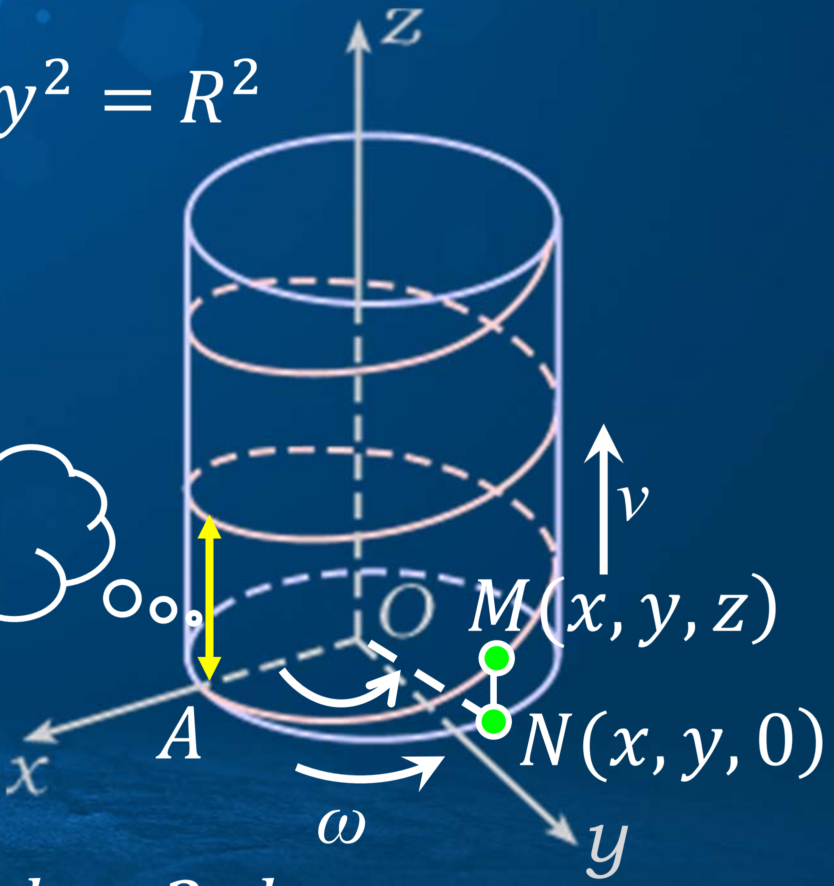
$$\begin{cases} x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

令 $\omega t = \theta, b = \dfrac{v}{\omega}$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

应用案例

螺距

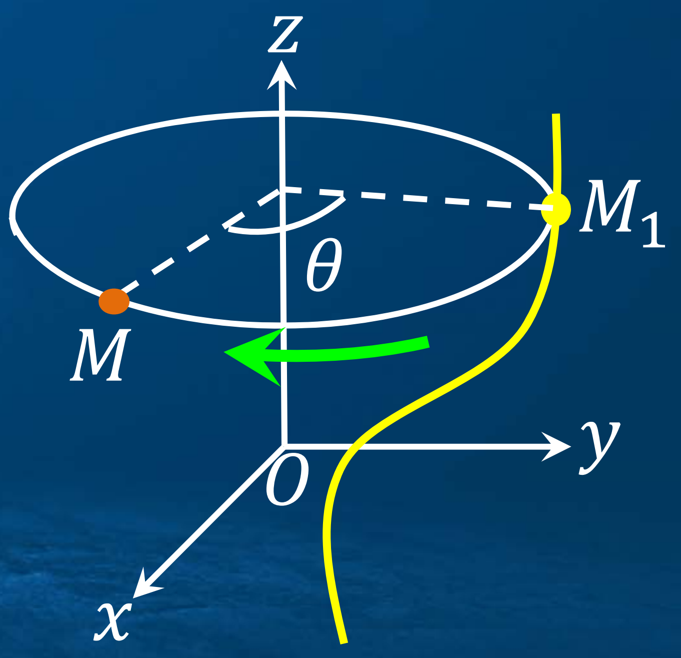


螺距: $h = 2\pi b$

例2 求空间曲线 $\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$绕 z 轴旋转时的旋转曲面方程 .

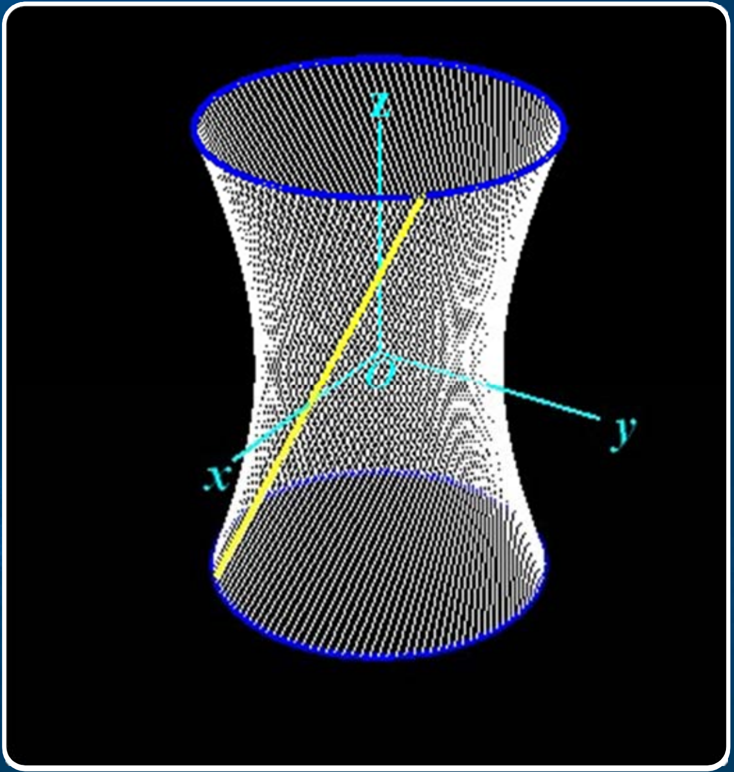
旋转曲面方程为：

$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\cos\theta, \\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\sin\theta, \\ z=\omega(t) \end{cases} \begin{pmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$



例如，$x=1, y=t, z=2t$绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta, \\ z=t \end{cases} \begin{pmatrix} -\infty<t<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{pmatrix}$$



消去 t 和 θ, 得旋转曲面方程为

$$4(x^2+y^2)-z^2=4.$$

旋转单叶双曲面

设两曲面的方程分别为：

$$S_1 : F(x, y, z) = 0,$$
$$S_2 : G(x, y, z) = 0.$$

空间曲线可视为两曲面的交线：

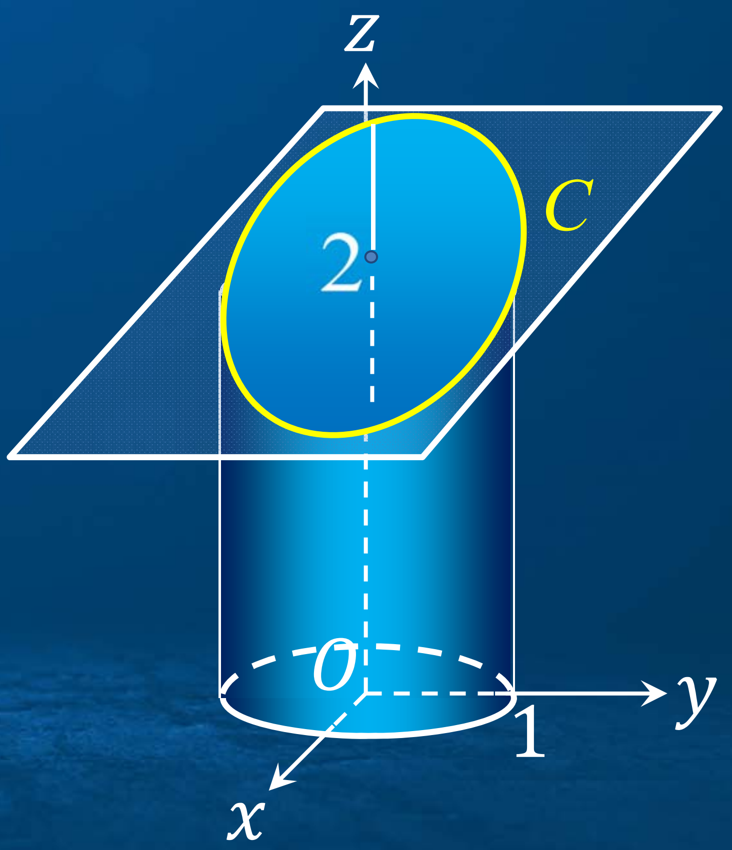
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

这种描述空间曲线C的形式称为空间曲线的一般方程．

例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3z = 6. \end{cases}$$

表示圆柱面与平面的交线 C.



例3 方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2Rz=0, \\ x^2+y^2+z^2-R^2=0 \end{cases}$表示怎样的曲线？

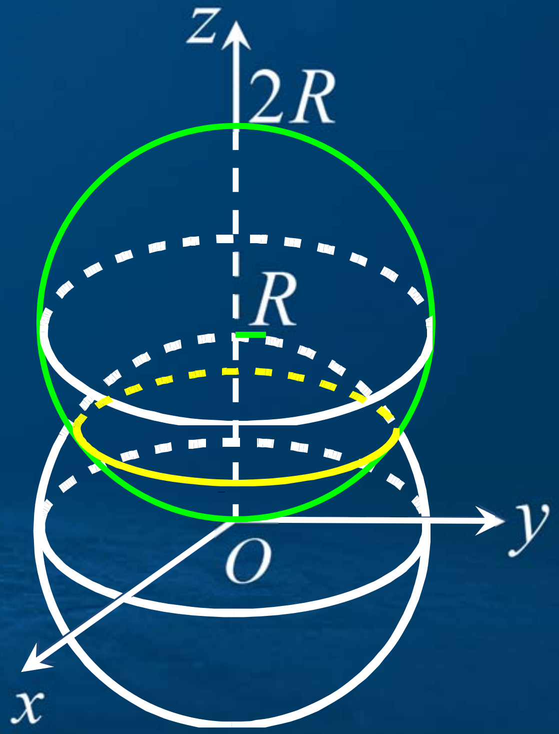
【例3解】 $x^2+y^2+z^2-2Rz=0$

表示球心在$(0,0,R)$, 半径为R的球面.

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

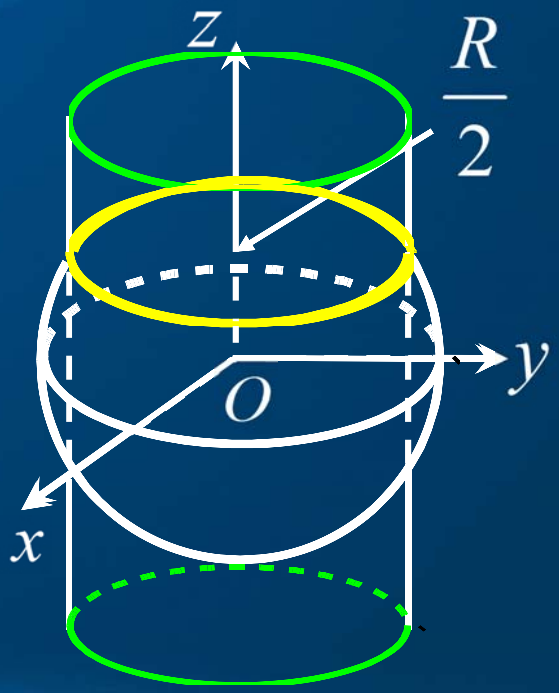
表示球心在原点, 半径为R的球面.

因此，两个球面的交线为一个圆.



说明：这个圆还可以表示

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=\dfrac{1}{2}R. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}R^2, \\ z=\dfrac{1}{2}R. \end{cases}$$



该曲线的参数方程为

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta,\ z=\frac{1}{2}R.$$

例4 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2-Rx=0 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

【例4解】

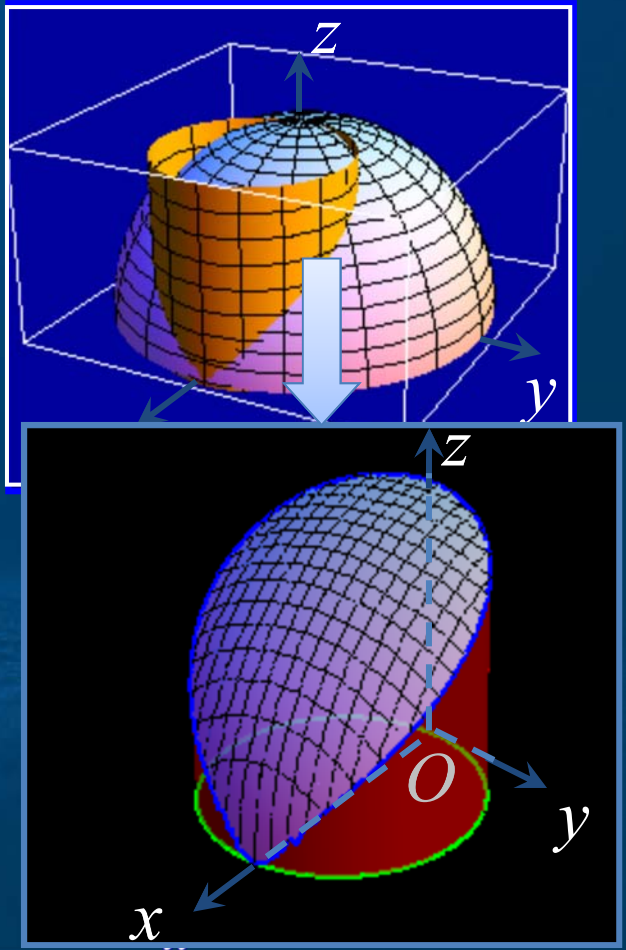
$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$表示球

在(0,0,0),半径为 R 的上半

与xOy 面围成的立体具有什么特征？

$x^2+y^2-Rx=0$表示准线为xOy面上的圆$x^2+y^2-Rx=0$，母线平行于 z 轴的圆柱面.

该空间曲线称为维维安尼曲线.



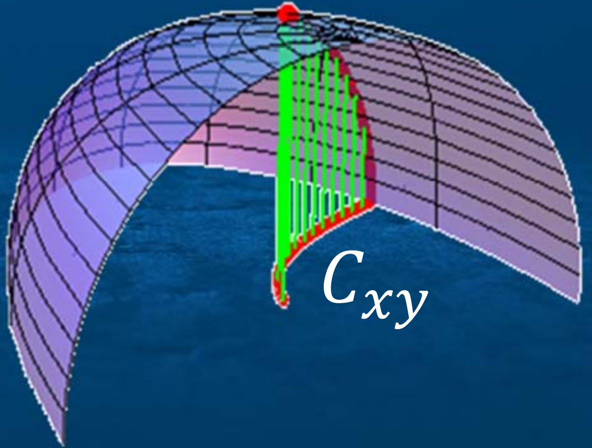
设空间曲线 Γ 的参数方程为

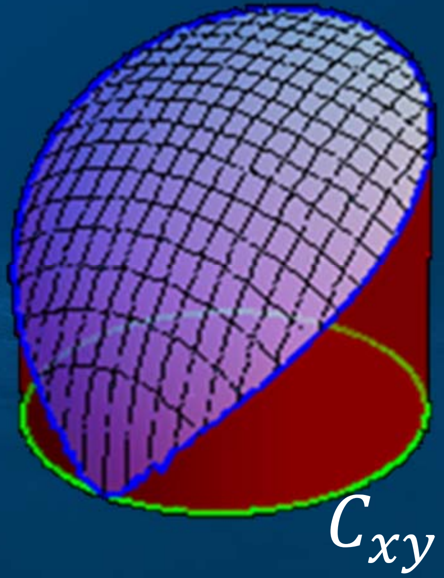
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

由空间点 $P(x, y, z)$ 在 xOy, yOz, xOz 平面上的投影分别为 $(x, y, 0)$、$(0, y, z)$、$(x, 0, z)$，很容易求得曲线在各坐标面上的投影曲线.

例如, 曲线 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为

$$C_{xy}: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), (t \in [t_0, t_1]) \\ z = 0 \end{cases}$$



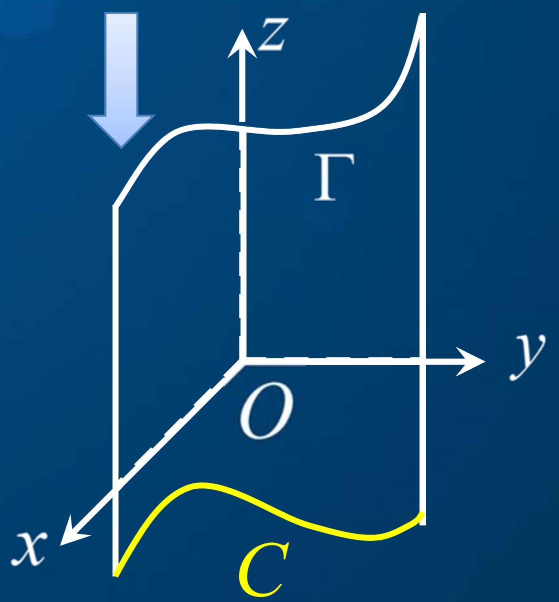


设空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

由方程组消去 z ,得方程

$$H(x,y)=0.$$



该方程表示母线平行于 z 轴的柱面，通过曲线 Γ.

称该柱面为空间曲线关于 xOy 平面的投影柱面.

投影柱面与xOy面的交线 C: $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 投影曲线

设空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

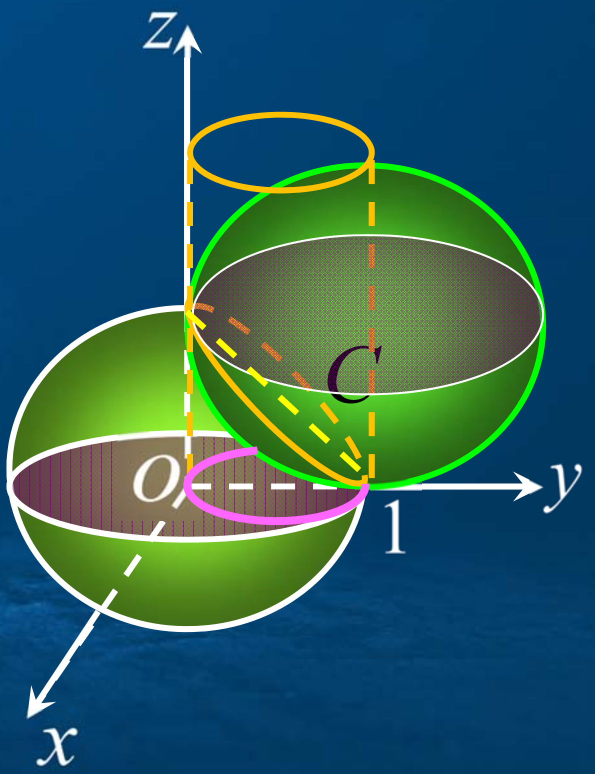
同理, 由方程组消去 x 或 y 后，得到空间曲线 Γ 关于 yOz平面及 zOx 平面的投影柱面方程分别为

$$T(y,z)=0,\ R(x,z)=0.$$

曲线 Γ 在 yOz 平面、zOx 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} T(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例5 求空间曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程.



【例5解】 两方程相减，得 $y+z=1$，

将 $z=1-y$ 代入第一个方程，

得投影柱面方程为

$$x^2+2y^2-2y=0,$$

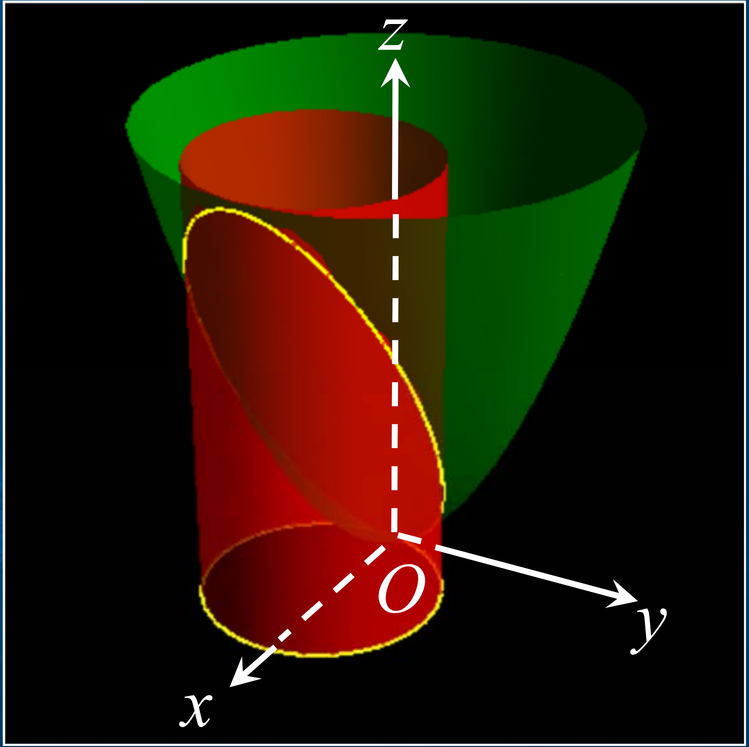
投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

例6 画出由曲面 $S_1: x^2+y^2-2z=0$ 与曲面 $S_2: x^2+y^2-2x=0$ 以及 xOy 面所围成的立体Ω在 xOy 面上的投影区域.

【例6解】 两曲面的交线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z=0, \\ x^2+y^2-2x=0. \end{cases}$$



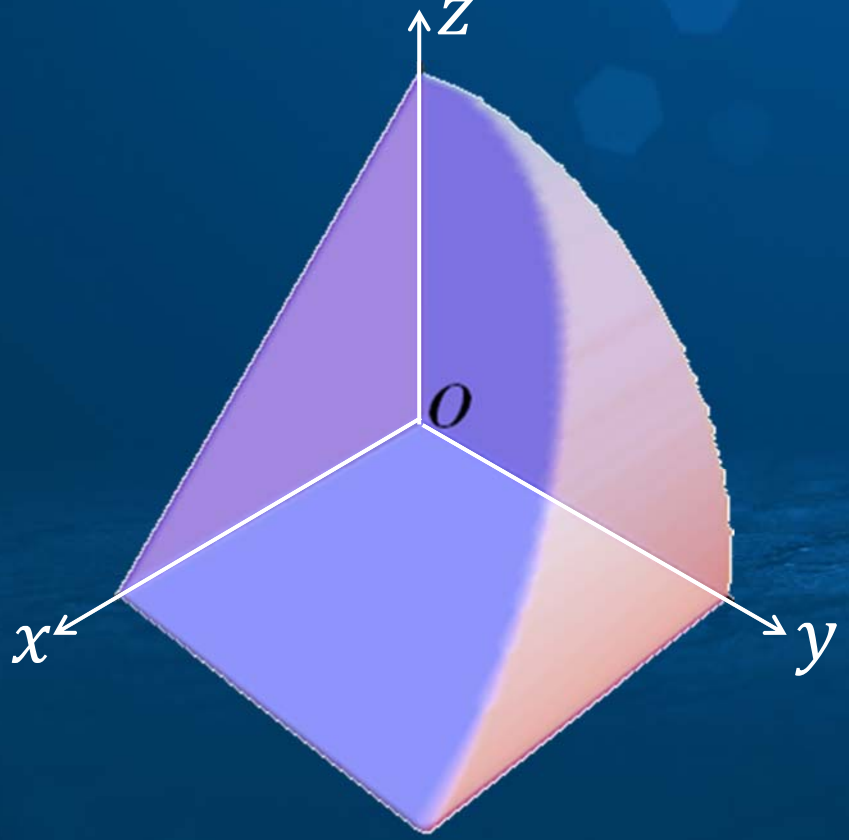
曲线Γ在xOy 面的投影曲线为

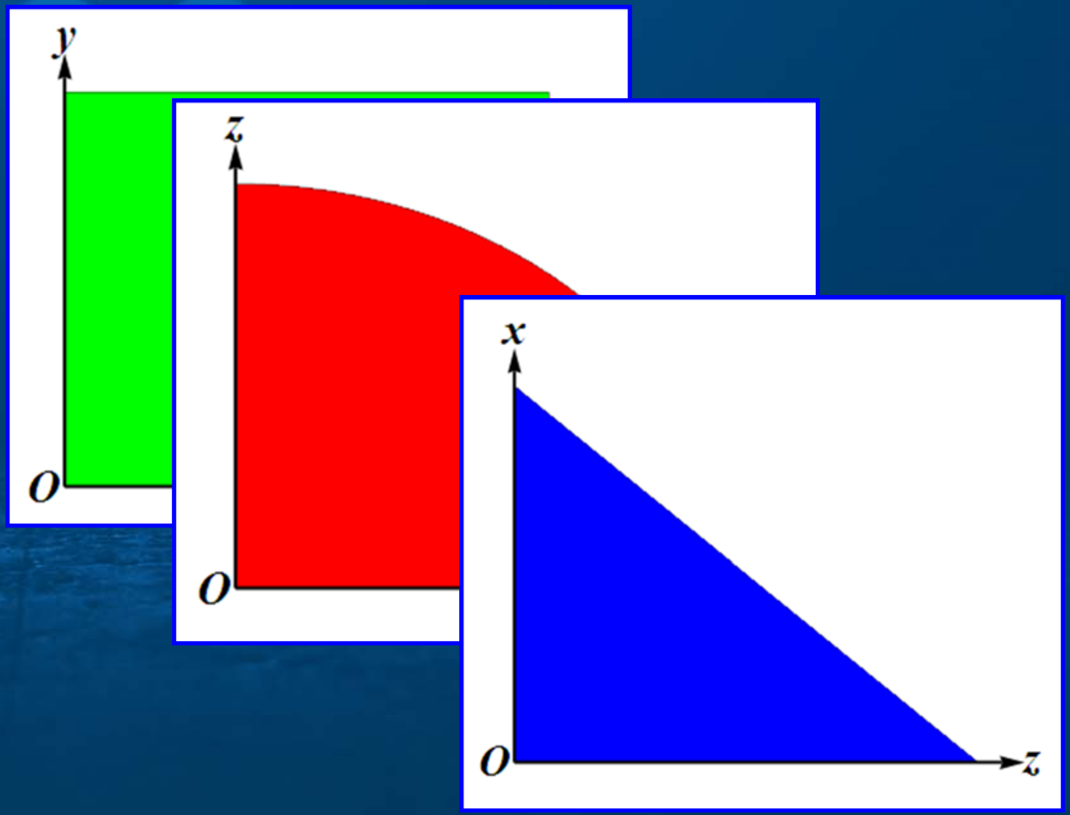
(圆)$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0, \\ z=0. \end{cases}$

立体在 xOy 面上的投影区域为

$x^2+y^2-2x \le 0$, 即$(x-1)^2+y^2 \le 1$.

例7 作出由不等式组$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1$所确定的立体的图形，并画出它在各坐标面上的投影区域．





截痕法

例8 试用截痕法考察椭球面的图形特征.

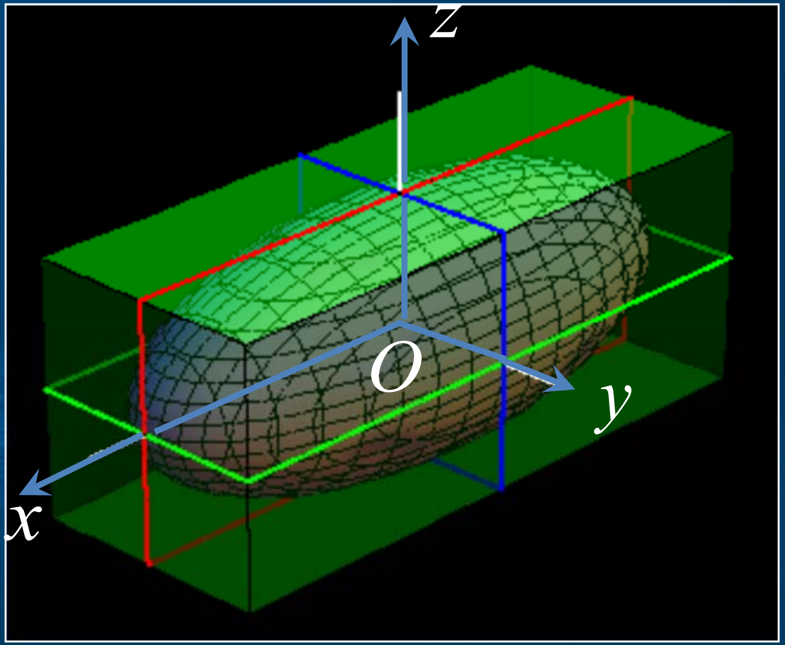
【例8解】椭球面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\frac{y^2}{b^2}\le 1,\frac{z^2}{c^2}\le 1 .$$

即椭球面在以平面

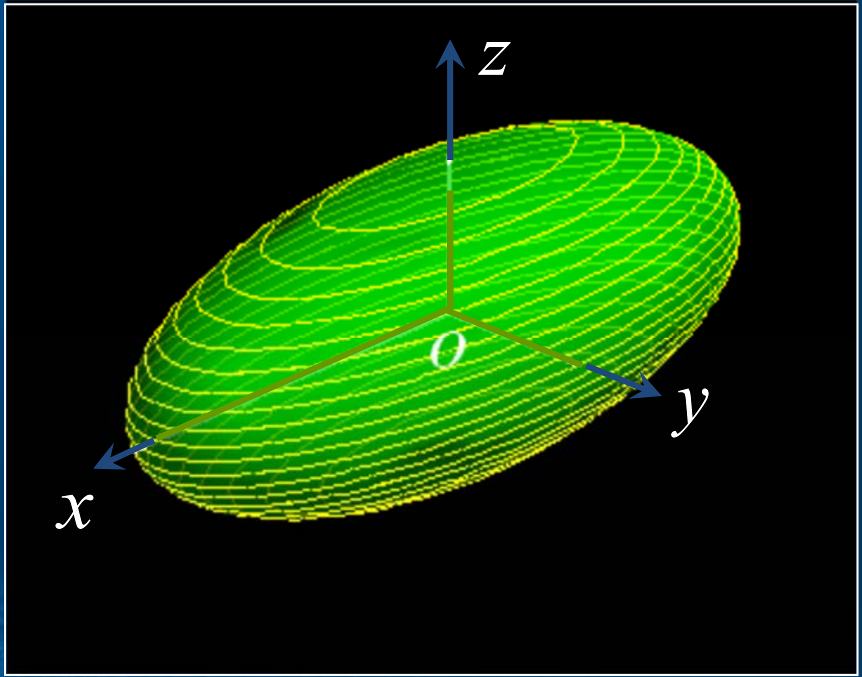
$$x=\pm a\,,y=\pm b\,,z=\pm c\,,$$

长方体内.



选用三个坐标面截椭球面，截痕分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$



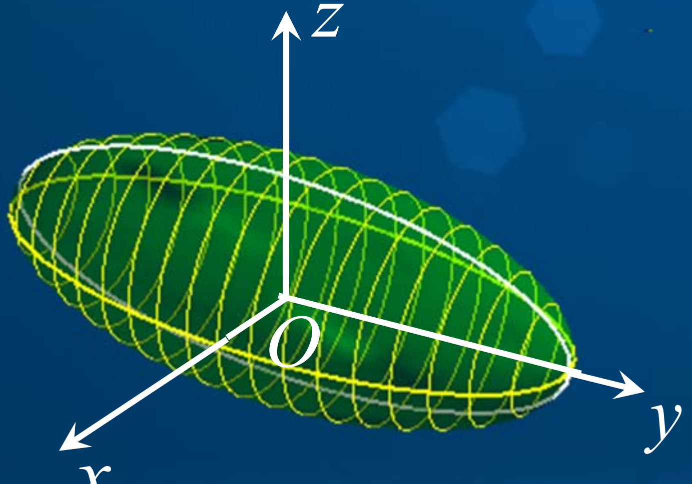
三个截痕都为椭圆.

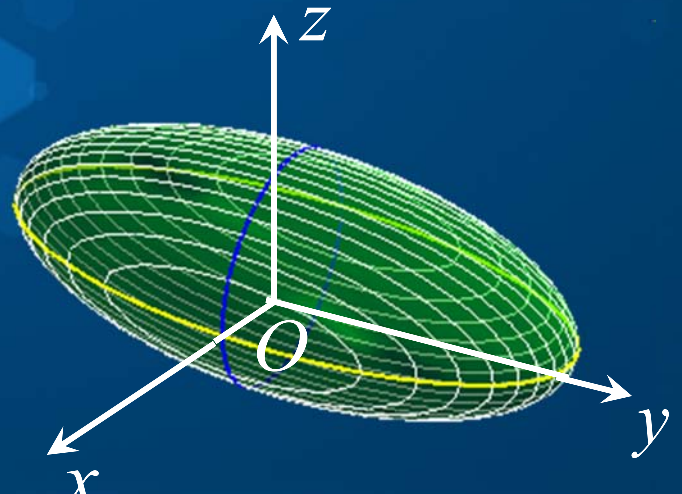
用平行于xOy面的平面$z=h$截取，

截痕为 $$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\ (|h|\le c)\\ z=h,\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

用$y=k(|k|\le b)$和$x=m(|m|\le a)$去截取椭球面，得完全类似的结果.





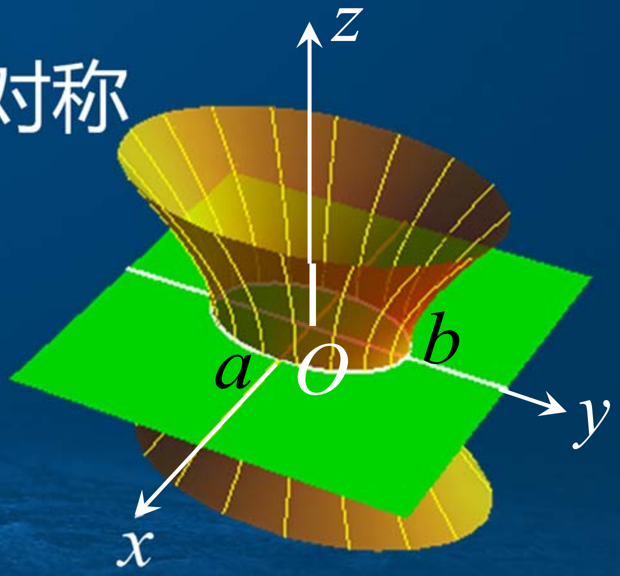
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2},\ (|k|\le b)\\ y=k,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{m^2}{a^2},\ (|m|\le a)\\ x=m,\end{cases}$$

例9 试用截痕法考察单叶双曲面的图形特征.

【例9解】单叶双曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

曲面关于三个坐标面、坐标轴和坐标原点对称



用 xOy 面截曲面，截痕为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

为$z = 0$平面上中心在原点，半轴a和 b 的椭圆.

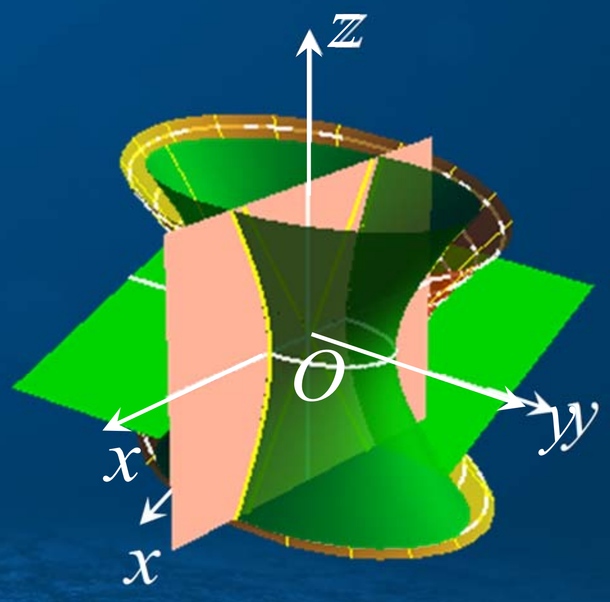
用平行于 xOy 面的平面 $z=h$, 截得的截痕为

椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$

用zOx 截得的截痕为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$$

截痕为实轴为 x 轴，虚轴为 z 轴的双曲线.



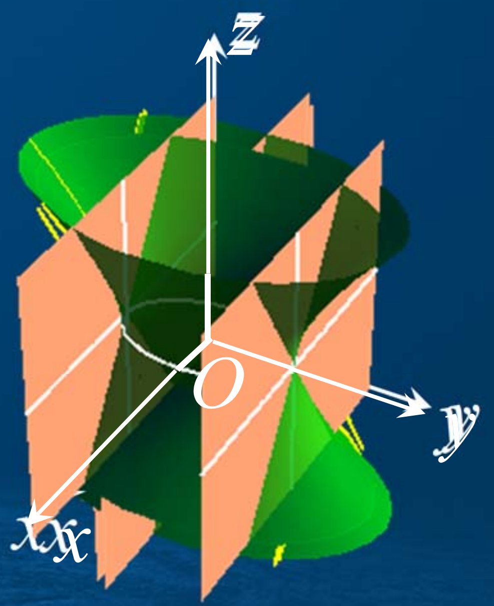
用平行于 zOx 面的平面 $y=k\ (k\neq\pm b)$ 截得的截痕为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2},\\ y=k.\end{cases}$$

当 $k^2<b^2$ 时，实轴平行于 x 轴的双曲线.

当 $k^2>b^2$ 时，实轴平行于 z 轴的双曲线.

当 $y=\pm b$ 时，则交线为一对直线.

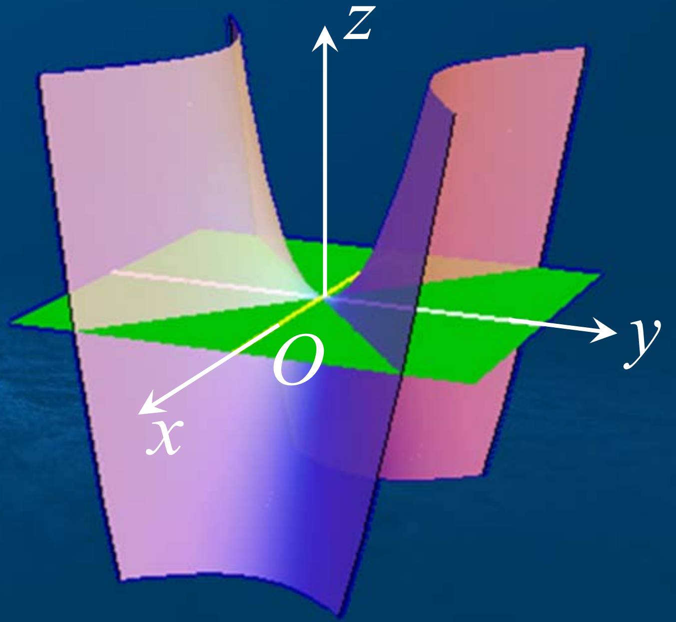


例10 试用截痕法考察双曲抛物面的图形特征.

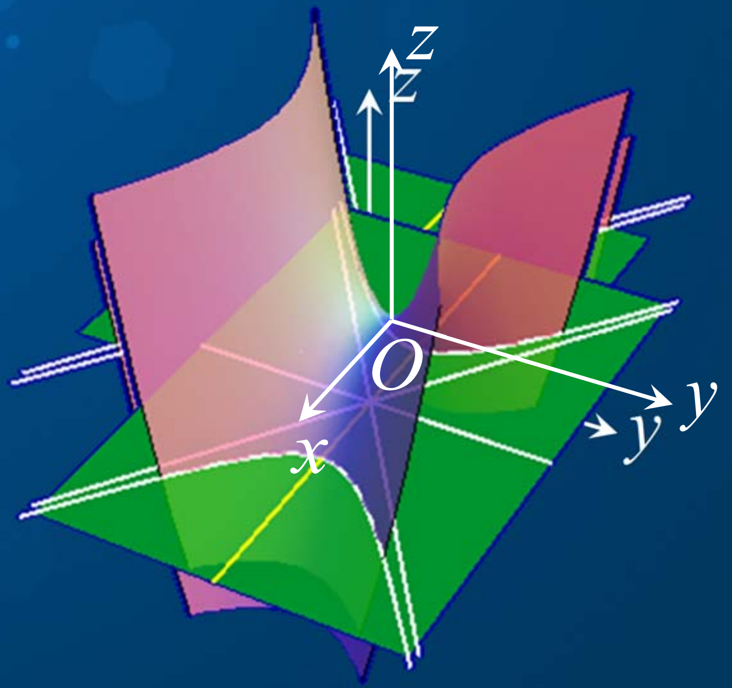
【例10解】 双曲抛物面方程为 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

用 xOy 面截曲面时，截得为一对相交于于原点的直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\\ z=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\\ z=0\end{cases}$$



双曲抛物面方程为$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$.



用平面 $z=h$, 截得的截痕为双曲线

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2h}+\dfrac{y^2}{b^2h}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

当 $h>0$ 时，实轴平行于 y 轴的双曲线.

当 $h<0$ 时，实轴平行于 x 轴的双曲线.

双曲抛物面方程为$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

用 zOx 面截曲面时，截得为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = -a^2 z, \\ y = 0. \end{cases}$$

用平面 $y=k$, 截得的截痕为抛物线

$$\begin{cases} x^2 = -a^2\left(z-\frac{k^2}{b^2}\right), \\ y=k. \end{cases}$$

用yOz 面及平面 $x=h$,截得的截痕也为抛物线.