



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**  
**Wydział Zarządzania**

Samodzielna Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii

## Praca dyplomowa

Badanie współzależności wybranych rynków finansowych

Study of the interdependence of selected financial markets

Autor:

Kierunek studiów:

Opiekun pracy:

Filip Szempruch

Informatyka i Ekonometria

dr hab. Anna Czapkiewicz

Kraków, 2022

# Spis treści

Wstęp.....	4
1. Przegląd literatury .....	6
2. Wybrane czynniki współzależności rynków finansowych.....	8
2.1. Integracja gospodarcza.....	8
2.2. Obustronna wymiana handlowa.....	8
2.3. Unie walutowe .....	9
2.4. Przepływy pieniężne.....	9
2.5. Ceny kluczowych surowców.....	10
3. Metody badawcze.....	11
3.1. Stacjonarność zmiennych .....	11
3.2. Model AR(p) .....	13
3.2.1. Optymalny rząd opóźnień .....	14
3.2.2. Autokorelacja składnika losowego .....	14
3.2.3. Normalność składnika losowego .....	15
3.2.4. Stabilność procesu AR .....	16
3.3. Model VAR(p) .....	16
3.3.1. Optymalny rząd opóźnień .....	17
3.3.2. Estymacja modelu VAR.....	18
3.3.3. Weryfikacja wyestymowanego modelu VAR .....	18
3.3.4. Wielowymiarowa autokorelacja składnika losowego .....	19
3.3.5. Wielowymiarowa normalność składnika losowego.....	19
3.3.6. Stabilność modelu VAR.....	20
3.3.7. Przyczynowość w sensie Grangera .....	21
3.3.7. Funkcja odpowiedzi na impuls.....	22
3.3.8. Dekompozycja wariancji .....	23

<b>4. Badanie empiryczne.....</b>	<b>25</b>
<b>4.1. Dane.....</b>	<b>25</b>
<b>4.2. Model VAR.....</b>	<b>28</b>
<b>4.2.1. Przyczynowości w sensie Grangera .....</b>	<b>30</b>
<b>4.2.2. Funkcje odpowiedzi na impuls.....</b>	<b>32</b>
<b>4.2.3. Dekompozycje wariancji.....</b>	<b>34</b>
<b>Zakończenie.....</b>	<b>36</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>37</b>
<b>Wykaz innych materiałów.....</b>	<b>39</b>
<b>Spis rysunków .....</b>	<b>40</b>
<b>Spis tabel.....</b>	<b>40</b>

## Wstęp

Od lat 80. XX w. jesteśmy świadkami ogromnego wzrostu tempa globalizacji. Zjawisko to przejawia się w wielu gałęziach funkcjonowania gospodarek. Proces ten pociąga za sobą także wzrost współzależności pomiędzy rynkami finansowymi. Prowadzi to do tego, że giełdy w poszczególnych krajach nie są od siebie całkowicie niezależne, a kondycja pojedynczego rynku nie może być analizowana bez zbadania jego relacji z innymi parkietami na świecie<sup>1</sup>.

Sam termin współzależności można interpretować dwojako. Jeden nurt badań zakłada, że analiza współzależności rynków wyrażana jest poprzez korelację, kowariancję lub inne wzajemne struktury powiązań krótkookresowych. Druga tendencja zakłada istnienie czynników, które oddziałują na dane giełdy, powodując na nich wspólny, długoterminowy trend<sup>2</sup>. Na potrzeby badania empirycznego przyjęto pierwszą wersję definicji, chociaż w części teoretycznej opisano także czynniki mogące powodować współzależności.

Znajomość istniejących współzależności pomiędzy rynkami finansowymi ma ogromne znaczenie m.in. dla inwestorów przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. Mając wiedzę na temat obecnych powiązań rynkowych, mogą oni tak zdywersyfikować portfolio inwestycyjne, by jak najbardziej zminimalizować ryzyko utraty kapitału.

Celem pracy jest zbadanie istniejących współzależności pomiędzy wybranymi rynkami finansowymi w okresie od 2013 roku do końca 2019 roku. Zweryfikowana zostanie hipoteza, czy istnieje rynek, który pełni rolę lidera dla pozostałych parkietów. Nastąpi także próba odpowiedzi na pytania jak poszczególne rynki reagują na ruchy na pozostałych parkietach, a także jaką część zmian na jednym rynku można wyjaśnić zmianami na pozostałych rynkach.

W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele propozycji w jaki sposób badać współzależności pomiędzy rynkami finansowymi. Na przykład Fałdziński i Pietrzak (2015)<sup>3</sup> w swoich rozważaniach używają wielowymiarowy model DCC-GARCH. Część badań sugeruje także użycie modeli wykorzystujących teorię funkcji kopuli. Takie

---

<sup>1</sup> A.Czapkiewicz, Determinanty zmian współzależności wybranych giełd papierów wartościowych. Analiza relacji GPW w Warszawie z giełdami na świecie. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2008, Łódź, s.10.

<sup>2</sup> Ibidem, s. 11.

<sup>3</sup> M. Fałdziński, M. Pietrzak, The multivariate DCC-GARCH model with interdependence among markets in conditional variances' equations, Przegląd Statystyczny, 2015, 62(1), s.397-413.

rozwiązanie zaprezentowano m.in. w pracy Pattona (2009)<sup>4</sup>. Na potrzeby tej pracy uznano jednak, że podejściem wystarczającym do wyznaczonego celu pracy będzie model wektorowej autoregresji. Z modelu VAR do zbadania współzależności korzystali np. Eun i Shim (1989)<sup>5</sup>.

Badanie empiryczne zostało przeprowadzone dla dziennych stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych z Niemiec, Stanów Zjednoczonych, Polski, Wielkiej Brytanii i Brazylii w okresie od 2013 roku do końca 2019 roku. Analiza składa się z czterech etapów. W ramach pierwszej części wyestymowany i zweryfikowany zostanie model wektorowej autoregresji (VAR). Następnie sprawdzone zostaną przyczynowości w sensie Grangera pomiędzy analizowanymi stopami zwrotu. W trzecim etapie będą wyestymowane funkcje odpowiedzi na impuls, a w czwartym dokonane dekompozycje wariancji dla każdego z rozważanych rynków.

Schemat pracy zorganizowany jest w następujący sposób: rozdział pierwszy zawiera krótki przegląd literatury tematu współzależności rynków finansowych. W rozdziale drugim przedstawiono wybrane czynniki wpływające na poziomy współzależności pomiędzy rynkami finansowymi. Rozdział trzeci obejmuje teoretyczny opis stosowanych metod badawczych. W rozdziale czwartym zaprezentowano charakterystykę szeregów czasowych używanych w pracy, a także przeprowadzone zostało badanie empiryczne. Ostatni, piąty rozdział to zakończenie, w którym krótko podsumowano wnioski płynące z pracy.

---

<sup>4</sup> A. Patton, Copula-based Models for Financial Time Series, Handbook of financial time series, Springer, Berlin, 2009, s. 767-785

<sup>5</sup> C. Eun, S. Shim, International transmission of stock market movements, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1989, 24, s. 241-256.

## 1. Przegląd literatury

Temat współzależności rynków finansowych jest obecny w literaturze ekonomicznej już od lat 70. XX w. Zależności pomiędzy rynkami w tamtym okresie zostały przeanalizowane m.in. przez Hilliarda (1979)<sup>6</sup>. Zbadał on powiązania pomiędzy dziesięcioma rynkami giełdowymi z Europy, Stanów Zjednoczonych, Australii, Kanady i Japonii, w okresie od 1973 do 1974 r. Badanie wykazało, że w rozważanym czasie nie istniały praktycznie żadne istotne współzależności pomiędzy analizowanymi krajami. Jediną znaczącą zależność odnotowano pomiędzy giełdą nowojorską i amsterdamską.

Postępująca globalizacja, a szczególnie ułatwienia w przepływie informacji coraz bardziej wpływały na rynki finansowe. Eun i Shim (1989)<sup>7</sup> za pomocą modelu wektorowo-autoregresyjnego, funkcji odpowiedzi na impuls i dekompozycji wariancji przeanalizowali współzależności pomiędzy dziewięcioma rynkami giełdowymi z Europy, Azji i Ameryki Północnej. Badanie przeprowadzono w okresie od 1979 do 1985 r. Wyniki pracy wykazały, że istniały umiarkowane współzależności pomiędzy badanymi rynkami giełdowymi w analizowanym czasie. Ponadto stwierdzono, że amerykański rynek akcji jest najbardziej wpływowym rynkiem na świecie i dominuje on pozostałe kraje.

Krach z października 1987 r., który potocznie nazywany jest czarnym poniedziałkiem, przyczynił się do wzrostu zainteresowania tematem współzależności wśród naukowców. W swojej pracy Malliaris i Urrutia (1993)<sup>8</sup>, badając przyczynowości w sensie Grangera, stwierdzili, że ilość związków przyczynowych pomiędzy rynkami różnych krajów nie uległa znacznym zmianom od czasu kryzysu w 1987 roku. W badaniu nie stwierdzono istotnych przyczynowości przed październikowym załamaniem jak i po nim. Wykryto natomiast wysoki wzrost dwukierunkowych i jednokierunkowych przyczynowości tylko i wyłącznie w miesiącu, w którym nastąpił krach.

Analiza współruchów na rynkach międzynarodowych w najnowszej historii sugeruje wysoki stopień współzależności pomiędzy rynkami finansowymi. Glezakos,

---

<sup>6</sup> E. Hilliard, The relationship between equity indices on world exchanges, *The Journal of Finance* 34.1, 1979, s. 103-114.

<sup>7</sup> C. Eun, S. Shim, International transmission... s. 241-256.

<sup>8</sup> A. Malliaris, J. Urrutia, The International Crash of October 1987: Causality Tests, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1992, 22, s. 353-364.

Merika i Kaligosfiris (2007)<sup>9</sup> przeprowadzili badanie współzależności głównie dla rynków europejskich, ale uwzględnili w nim także rynek amerykański i japoński. Przy użyciu modeli VAR i przyczynowości w sensie Grangera, udowodniono, że w okresie od 2000 do 2006 roku istniały bardzo silne współzależności pomiędzy analizowanymi rynkami giełdowymi. Ponownie potwierdzono dominujący wpływ rynku amerykańskiego na pozostałe parkiety. Wszystkie rynki europejskie były w badanym okresie także mocno zależne od zmian głównego indeksu niemieckiego.

Współzależności na rynkach finansowych w latach 2009-2015, zostały zbadane przez Garcie, Cotera, Mejia i Ojedę (2015)<sup>10</sup>. Do analizy wybrano rynki z Meksyku, Wielkiej Brytanii, Stanów Zjednoczonych, Brazylii, Szanghaju i Japonii. Badanie przeprowadzono również przy użyciu modeli VAR, funkcji reakcji na impuls oraz dekompozycji wariancji. Otrzymane wyniki sugerują, że rynki są ze sobą mocno powiązane, a w szczególności te, które są położone blisko siebie. Wykazano także, że giełdy szybko dostosowują się do zewnętrznych szoków dzięki szybkiemu przyswajaniu i przetwarzaniu informacji zgodnie z teorią efektywności rynku. Ponownie potwierdzono dominujący wpływ rynku amerykańskiego na pozostałe rynki.

Współzależności polskiego rynku giełdowego z pozostałymi parkietami zostały zbadane m.in. przez Czapkiewicz i Jamera (2015)<sup>11</sup>. W badaniu zastosowano modele Copula-GARCH. Do analizy użyto stopy zwrotu indeksów z Europy Zachodniej, Europy Wschodniej oraz Azji i Ameryki z okresu od 2004 roku do 2014 roku. Badanie wykazało, że współzależności pomiędzy rynkami są wyższe w okresach kryzysów niż w okresach spokoju. Zauważono także, że współzależność rynku polskiego z innymi rynkami jest zmienna w czasie. Gwałtowny wzrost powiązań nastąpił po wejściu Polski do Unii Europejskiej, a także w trakcie kryzysu finansowego latach 2007-2009. Po 2012 roku obserwowano zauważalne osłabienie tych współzależności. Polski rynek oznaczał się także na ogół mocniejszymi współzależnościami z rynkami Europy Zachodniej aniżeli z pozostałymi parkietami.

---

<sup>9</sup> M. Glezakos, A. Merika, H. Kaligosfiris, Interdependence of major world stock exchanges: How is the Athens stock exchange affected, *International Research Journal of Finance and Economics*, 2007, 7.1, s. 24-39.

<sup>10</sup> E.Garcia, D.Cotera, S.Mejia, L.A.Ojeda, Interdependence of the Stock Markets around the World *Economía: teoría y práctica*, 2015, s. 155-181.

<sup>11</sup> A. Czapkiewicz, P. Jamer, Dynamika współzależności warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych z innymi rynkami finansowym, *Econometrics. Ekonometria. Advances in Applied Data Analytics*, 2015, (2 (48)), s. 100-113.

## **2. Wybrane czynniki współzależności rynków finansowych**

W literaturze przedmiotu wyróżnia się wiele czynników wyjaśniających przyczyny oraz stopień istniejących współzależności pomiędzy rynkami finansowymi. Wybrano kilka z nich, które uznano za mające najistotniejszy wpływ na poziom tych zależności, a także zostały one krótko opisane. Uznano, że powiązania ekonomiczne i walutowe pomiędzy państwami takie jak integracja gospodarcza, obustronna wymiana handlowa czy unie walutowe wpływają na współzależności pomiędzy rynkami. Za istotnie przyczyniające się do wzrostu związków pomiędzy rynkami wybrano również przepływy pieniężne. Wiele badań uzasadnia także wpływ cen kluczowych dla gospodarek krajowych surowców np. ropy czy miedzi na poziomy współzależności.

### **2.1. Integracja gospodarcza**

Integracja gospodarcza to określenie procesu scalania się gospodarek narodowych poprzez stopniowe znoszenie barier w obrocie towarów, usług i czynników produkcji. Integracja powoduje utworzenie jednolitego systemu gospodarczego, co jest owocne dla państw biorących udział w tym procesie. Ideą scalania gospodarek jest wzrost efektywności gospodarowania, następujący dzięki możliwości równoległego wykorzystywania wewnętrznych i zewnętrznych czynników rozwoju gospodarczego przez członków „sojuszu” integracyjnego. Integracja ułatwia handel międzynarodowy i dostęp do czynników produkcji. Takie współdziałania inicjują oraz przyspieszają międzynarodowe współprace gospodarcze. Zwiększa to współzależność gospodarek i rynków państw, a nawet całych regionów pozornie niebędącymi partnerami gospodarczymi, a nawet bezpośrednio niesąsiadującymi ze sobą<sup>12</sup>.

### **2.2. Obustronna wymiana handlowa**

Wpływ obustronnej wymiany handlowej na współzależność rynków finansowych jest bardzo prosty do zobrazowania. Zakładając, że kraje X i Y charakteryzuje bardzo silna wymiana handlowa, hipotetyczny spadek koniunktury gospodarczej w państwie X

---

<sup>12</sup> P. Kozielski, Australia i jej rola w kształtowaniu procesów integracyjnych w obszarze Azji i Pacyfiku, CeDeWu, 2020, s. 17-18.



spowoduje spadek popytu zagregowanego w tym kraju, w tym także na dobra importowane z kraju Y. Pogorszona koniunktura w kraju X spowoduje spadki na rynkach finansowych tego państwa, a jednocześnie zmniejszony eksport w kraju Y, przyczyni się do spadków na rynkach finansowych w państwie Y. Im silniejsza wymiana handlowa pomiędzy krajami, tym bardziej zauważalna jest współzależność pomiędzy rynkami finansowymi tych państw<sup>13</sup>.

### **2.3. Unie walutowe**

Wpływ unii monetarnej na współzależność stóp zwrotów z rynków akcji na przykładzie Unii Gospodarczo – Walutowej pomiędzy krajami europejskimi analizował Wälti (2011) . Wyniki jego badania potwierdzają istotny wpływ unii walutowej na korelacje stóp zwrotów z rynków akcji. Unie walutowe wpływają na korelacje stóp zwrotu z rynków giełdowych na kilka sposobów. Ograniczenie zmienności kursów walutowych przyczynia się do niższych kosztów transakcyjnych w inwestycjach międzynarodowych. Uczestnictwo w unii oznacza także prowadzenie jednolitej polityki pieniężnej, co wiąże się ze zbieżnymi oczekiwaniami inflacyjnymi. W związku z tym stopy wolne od ryzyka są zbliżone, co doprowadza do bardziej jednorodnych wycen. Mniejsza zmienność kursów walutowych, prowadzi również do większej synchronizacji cykli koniunkturalnych, co przyczynia się do większej współzależności rynków<sup>14</sup>.

### **2.4. Przepływy pieniężne**

W pracy Pretoriusa stwierdzono, że zgodnie z modelem przepływów pieniężnych, stopy procentowe i inflacja mogą wpływać na stopy zwrotów z rynków giełdowych. Z tego powodu korelacje pomiędzy tymi zmiennymi w poszczególnych krajach wpływają na korelacje pomiędzy ich rynkami finansowymi. Jeśli zmienne makroekonomiczne w dwóch lub więcej krajów są do siebie zbieżne, to stopy zwrotów z rynków giełdowych także powinny być do siebie zbliżone<sup>15</sup>.

---

<sup>13</sup> E. Pretorius, Economic determinants of emerging stock market interdependence, *Emerging Markets Review*, 2002, 3.1, s. 96.

<sup>14</sup> S. Wälti, Stock market synchronization and monetary integration, *“Journal of International Money and Finance”* 2011, 30.1, s. 96-110.

<sup>15</sup> E. Pretorius, Economic determinants of emerging..., s. 96.

## 2.5. Ceny kluczowych surowców

Do kluczowych surowców dla gospodarek zaliczane są m.in. ropa naftowa, miedź, gaz ziemny i złoto. Wzrost cen tych surowców zazwyczaj powoduje w krótkim horyzoncie czasowym obniżenie tempa wzrostu gospodarczego, a także wzrost inflacji. Zahamowanie koniunktury gospodarczej obniża oczekiwania inwestorów co do zysków spółek, co wpływa negatywnie na ceny akcji. Wzrost kosztów produkcji w przedsiębiorstwach, wywołany wzrostem cen surowców obniża marże zysków. Dodatkowo w okresach wysokich cen surowców zwiększa się niepewność wśród inwestorów co do perspektyw zysków spółek, powodując dodatkową presję na spadki cen na rynkach giełdowych<sup>16</sup>. Ze względu na fakt, że zmiany cen surowców mają charakter globalny a ich cena ustalana jest na światowych rynkach surowcowych, skutki ich zmian są zauważalne na rynkach finansowych całego świata.

---

<sup>16</sup> European Central Bank, How do stock markets react to changes in oil prices?, Monthly Bulletin, September 2004, s. 44.

## 3. Metody badawcze

### 3.1. Stacjonarność zmiennych

Proces stochastyczny jest stacjonarny (ściśle stacjonarny), jeżeli jego łączne i warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa procesu nie zmieniają się w zależności od przesunięć w czasie<sup>17</sup>. Zazwyczaj te warunki są zbyt restrykcyjne, dlatego w praktyce zwykle mamy do czynienia ze słabą stacjonarnością, zwaną też stacjonarnością kowariancyjną. Proces stochastyczny możemy wtedy nazwać stacjonarnym, jeżeli spełnia on założenia o:

- stałej w czasie wartości oczekiwanej:  $E(x_t) = constant = \mu$ , (1)

- stałej w czasie wariancji:  $Var(X_t) = constant = \sigma^2$ , (2)

- niezależnej od czasu, a tylko od okresu  $j$ , kowariancji:

$$cov(X_t, X_{t+j}) = const = \sigma^{18}. \quad (3)$$

Niestacjonarność może wynikać z faktu, iż szereg czasowy składa się z deterministycznego trendu i stacjonarnej zmiennej losowej, która wyraża odchylenia od tego procesu:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t \quad (4)$$

lub generowany jest przez proces błędzenia losowego (biały szum):

$$y_t = y_{t-1} + \xi_t. \quad (5)$$

Takie procesy nie będą wykazywać stacjonarności. Jeżeli proces jest stacjonarny w wyniku zawierającego się w nim trendu, to należy go wyeliminować, pozostawiając samą zmienną losową. Niestacjonarność wywołaną przez błędzenie losowe można usunąć poprzez różnicowanie. Niektóre szeregi wymagają wielokrotnego różnicowania, a część z nich pomimo wielu prób nigdy nie będzie stacjonarna. W momencie użycia różnicowania proces wyjściowy staje się, w stosunku do spełniającego założenia o stacjonarności, procesem zintegrowanym o stopniu integracji równym liczbie wykonanych powtórzeń operacji różnicowania, dzięki którym osiągnięto jego

---

<sup>17</sup> W.W Charemza, D. F. Deadman, New directions in econometric practice. General to Specific Modelling, Cointegration and Vector Autoregression, Edward Elgar Publishing Limited, 1997, Cheltenham, s. 85.

<sup>18</sup> Ibidem, s. 85.

stacjonarność. Proces  $x_t$  zintegrowany w stopniu  $d$  jest umownie oznaczany jako:  $y_t \sim I(d)$ <sup>19</sup>.

Do zbadania stacjonarności szeregów czasowych zastosowanych w tej pracy zostanie użyty rozszerzony test Dickeya-Fullera, w skrócie zwanym testem ADF.

Nierozszerzona wersja testu – DF polega na sprawdzeniu istnienia pierwiastka jednostkowego<sup>20</sup>, czyli hipotezy, że  $\rho = 1$  w równaniu:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \xi_t, \quad (6)$$

gdzie  $\xi_t$  jest procesem białego szumu, który jest procesem stacjonarnym. Jeżeli  $|\rho| < 1$ , to proces  $y_t$  jest stacjonarny. W sytuacji gdy  $\rho = 1$ , to szereg jest niestacjonarny, ponieważ mimo tego, iż jego wartość oczekiwana jest stała w czasie, to wariancja rośnie wraz ze wzrostem  $t$ . W takim wypadku nie możemy przeprowadzić testu sprawdzającego czy  $\rho = 1$  przy użyciu testu istotności t-Studenta, ponieważ w takiej sytuacji estymator parametru  $\rho$ , otrzymany metodą najmniejszych kwadratów, byłby obciążony ujemnie i nie miałby pożądanego rozkładu t-Studenta<sup>21</sup>.

Równanie (6) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 + \delta)y_{t-1} + \xi_t, \\ y_t - y_{t-1} &= \delta y_{t-1} + \xi_t \\ \Delta y_t &= \delta y_{t-1} + \xi_t, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie  $\rho = (1 + \delta)$ . Testowanie polega na tym, że jeżeli  $\delta$  w równaniu (7) jest ujemne, to we wzorze (6)  $\rho$  jest mniejsze od jeden, a szereg  $y_t$  jest stacjonarny. W tym przypadku można już użyć metody najmniejszych kwadratów do estymacji równania (7).

Hipotezy testu DF:

$$\begin{aligned} H_0 : \delta &= 0, \\ H_1 : \delta &< 0. \end{aligned}$$

Hipoteza zerowa zakłada istnienie pierwiastka jednostkowego (szereg niestacjonarny). Odrzucenie jej pozwala stwierdzić, że badany proces jest zintegrowany rzędu zerowego:  $y_t \sim I(0)$ , czyli jest stacjonarny.

<sup>19</sup>A. Wójcik, Modele wektorowo-autoregresyjne jako odpowiedź na krytykę strukturalnych wielorównaniowych modeli ekonometrycznych. *Studia Ekonomiczne*, 193, 2014, s. 116.

<sup>20</sup> Stwierdzenie, że proces  $y_t$  ma pierwiastek jednostkowy jest równoważne ze stwierdzeniem, że jest zintegrowany rzędu pierwszego.

<sup>21</sup> E. Kusideł, Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. *Metodologia i zastosowania: Dane panelowe i modelowanie wielowymiarowe w badaniach ekonomicznych*, t. 3, Absolwent, 2000, Łódź, s. 21-22.

Statystyka testowa w tym teście ma postać:

$$DF = \frac{\hat{\delta}}{s(\hat{\delta})}. \quad (8)$$

Statystyka testowa przypomina test t-Studenta, ale nie ma takiego samego rozkładu. Wartości krytyczne dla testu DF są zdecydowanie wyższe w stosunku do rozkładu t-Studenta. Gdy obliczona statystyka DF dla danych  $n$  obserwacji jest mniejsza od wartości krytycznej, to odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy hipotezę alternatywną, która orzeka o stacjonarności badanego szeregu. Natomiast kiedy obliczona statystyka jest większa od wartości krytycznej, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej i proces jest niestacjonarny<sup>22</sup>.

Rozszerzony test Dickeya-Fullera (ADF), w porównaniu do testu DF, uwzględnia w swoim równaniu podlegającym testowaniu, że składnik losowy równania (7) może zawierać autokorelację. Równanie to wygląda następująco:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + u_t, \quad (9)$$

gdzie  $k$  oznacza liczbę opóźnień. Liczba opóźnień powinna być jak najniższa, ale także na tyle duża, by wykluczyć autokorelacje składnika losowego. Procedura stosowania hipotezy i wartości krytyczne testu ADF są identyczne jak w przypadku testu DF<sup>23</sup>.

### 3.2. Model autoregresyjny AR( $p$ )

Model autoregresyjny AR( $p$ ) to model ekonometryczny dla jednowymiarowego szeregu czasowego, w którym wartości zmiennej zależą tylko i wyłącznie od jej własnych opóźnień. Stosuje się je, gdy istnieje pewna korelacja pomiędzy wartościami w chwili  $t$  i wartościami w opóźnionych momentach.

Model AR( $p$ ) definiowany jest równaniem<sup>24</sup>:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + u_t, \quad (10)$$

gdzie:

$Y_t$  – zmienna objaśniana w momencie  $t$ ,

$Y_{t-i}$  – opóźniona zmienna objaśniana w momencie  $t - i$ ,

$p$  – rząd autoregresji, czyli maksymalne opóźnienie zmiennej objaśnianej.

<sup>22</sup> E.Kusideł, Modele wektorowo-autoregresyjne..., s. 22.

<sup>23</sup> A. Wójcik, Modele wektorowo-autoregresyjne..., s. 117.

<sup>24</sup> M. Osińska, M. Koško, J. Stempińska, Ekonometria współczesna, wyd. Dom Organizatora, TNO iK, , 2007, Toruń, s. 277.

$u_t$  – wektor składników losowych o niezależnym rozkładzie ze średnią 0 i stałą wariancją równą  $\sigma^2$ .

Do estymacji parametrów modeli AR wykorzystać można Klasyczną Metodę Najmniejszych Kwadratów, dlatego po wybraniu optymalnego rzędu opóźnień i wyestymowaniu modelu dla danego  $p$ , należy zweryfikować jego poprawność pod kątem występowania autokorelacji wśród składników losowych oraz normalności ich rozkładu. Model AR można zweryfikować także pod kątem jego stabilności.

### 3.2.1. Wybór optymalnego rzędu opóźnień $p$

Wybierając optymalny rząd opóźnień  $p$  w modelu AR można posłużyć się między innymi kryterium informacyjnym Akaike’a (AIC) postaci<sup>25</sup>:

$$AIC(p) = n \log \sigma_p^2 + 2p, \quad (11)$$

gdzie:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}{T-p},$$

$p$  – liczba szacowanych parametrów z wyłączeniem stałej,

$n$  – wielkość próby.

### 3.2.2. Autokorelacja składnika losowego

Używając metody najmniejszych kwadratów do estymacji parametrów równania modelu  $AR(p)$ , należy zwrócić szczególną uwagę na wystąpienie autokorelacji składnika losowego, ponieważ istnienie tego zjawiska może oznaczać, że estymator MNK jest obciążony.

Autokorelacje składników losowych w poszczególnych modelach można weryfikować testem Ljunga-Boxa. Hipoteza zerowa zakłada brak autokorelacji, natomiast hipoteza alternatywna mówi, że autokorelacja składników losowych jest istotna statystycznie. Hipoteza zerowa weryfikowana jest za pomocą statystyki  $Q$ :

$$Q = T(T+2) \sum_{i=1}^m \frac{p_i^2}{T-i}, \quad (12)$$

<sup>25</sup> A. Czapkiewicz, Ekonometria, <https://pages.mini.pw.edu.pl/~estatic/e.mini.pw.edu.pl/sites/default/files/ekonometria.pdf>, dostęp z dnia 15.06.2022 r., s.109.

gdzie:

$m$  – rząd autokorelacji,

$p_i$  – współczynnik autokorelacji rzędu  $i$ .

Statystyka testowa  $Q$  ma rozkład chi-kwadrat z  $m$  stopniami swobody. Gdy jej wartość przekracza wartość krytyczną, to odrzuca się hipotezę zerową zakładającą brak autokorelacji rzędu  $m$ . Natomiast jeśli wartość statystyki jest mniejsza niż wartość krytyczna - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, zatem autokorelacja rzędu  $m$  jest nieistotna statystycznie<sup>26</sup>.

### 3.2.3. Normalność składnika losowego

Normalność rozkładu składnika losowego w wyestymowanych równaniach modeli AR, sprawdzana jest np. testem Jarque'a - Bera. Ideą testu jest porównanie rozkładu składnika losowego z teoretycznym rozkładem normalnym.

Hipotezy zerowa i alternatywna wyglądają następująco:

$$H_0: F(u_i) = F_N(u_i),$$

$$H_1: F(u_i) \neq F_N(u_i).$$

Hipoteza zerowa mówi o normalności rozkładu składnika losowego, natomiast hipoteza alternatywna zakłada brak normalności jego rozkładu. Statystka testu Jarque-Bera:

$$JB = N \left( \frac{1}{6} \beta_1 + \frac{1}{24} (\beta_2 - 3)^2 \right), \quad (13)$$

gdzie:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{u_i^3}{S^3(u_i)},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{e_i^4}{S^4(u_i)},$$

$$S(e_i) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2},$$

$u_i$  – reszty modelu,

$S(u_i)$  – standardowy błąd reszt.

Statystyka testowa  $JB$  jest zbieżna do rozkładu chi-kwadrat o 2 stopniach swobody. Gdy  $JB < \chi_\alpha^2(2)$ , nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, a rozkład składnika losowego jest rozkładem normalnym. Z kolei jeżeli  $JB \geq \chi_\alpha^2(2)$ , odrzuca się hipotezę

---

<sup>26</sup> G. Ljung., G. Box. "On a measure of lack of fit in time series models." *Biometrika* 65.2, 1978, s. 297-303.

zerową i przyjmuje się hipotezę alternatywną, mówiącą o niezgodności rozkładu składnika losowego z rozkładem normalnym<sup>27</sup>.

### 3.2.4. Stabilność procesu AR

Stabilny proces AR charakteryzuje się stałością parametrów w czasie i skończoną wariancją. Proces AR jest stabilny jeśli wszystkie pierwiastki z tzw. równania charakterystycznego postaci:

$$1 - y_1 z - y_2 z^2 - \dots - y_p z^p = 0, \quad (14)$$

leżą wewnątrz koła jednostkowego.

### 3.3. Model VAR(p)

Wykorzystywane w pracy modele wektorowej autoregresji - VAR zostały zdefiniowane przez Christophera Simsa w latach 80. XX w. w odpowiedzi na niedoskonałe ówczesne modele ekonometryczne. Modele VAR są uogólnieniem procesów AR dla wielu szeregów czasowych. W odróżnieniu od modeli AR, w przypadku VAR każda ze zmiennych jest wyjaśniana przez własne opóźnienia, a także opóźnienia pozostałych zmiennych endogenicznych. W modelu jest taka sama ilość równań co zmiennych. Modele VAR są powszechnie stosowane w badaniach szeregów czasowych do analizy dynamicznych zależności między zmiennymi, które wzajemnie na siebie oddziałują. Zależności pomiędzy konkretnymi równaniami objawiają się w powiązaniach między składnikami losowymi tych równań<sup>28</sup>.

Postać modelu VAR(p) prezentuje się następująco:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \cdot & \phi_{n,1} \\ \phi_{2,1} & \cdot & \phi_{n,2} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n,1} & \cdot & \phi_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ \vdots \\ y_{n,t-1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \phi_{1,p} & \cdot & \phi_{n,p} \\ \phi_{2,p} & \cdot & \phi_{n,p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n,p} & \cdot & \phi_{n,p+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \\ \vdots \\ y_{n,t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ u_t \\ \vdots \\ u_t \end{bmatrix}, \quad (15)$$

można go także zapisać w zredukowanej formie:

$$y_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i y_{t-i} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T; \quad (16)$$

gdzie:

$y_t$  – wektor obserwowalnych wartości zmiennych o wymiarach  $(K \times 1)$ ,

<sup>27</sup> M. Osińska, M. Koško, J. Stempińska, Ekonometria współczesna..., s. 81-82.

<sup>28</sup> E. Kusideł, Modele wektorowo-autoregresyjne..., s. 15.



$A_0$  – wektor stałych o wymiarach  $(K \times 1)$ ,

$A_i$  – macierze o wymiarach  $(K \times K)$  parametrów przy opóźnionych wartościach zmiennych, w których nie zakłada się elementów zerowych.

$u_t$  – wektor o wymiarach  $(K \times 1)$  składników losowych, które są  $K$ -wymiarowym białym szumem takim, że  $E(u_t) = 0$ ,  $E(u_t u_t') = \Sigma_u$  i  $E(u_t u_s') \neq 0$  dla  $s \neq t$ .

Model VAR należy konstruować dla zmiennych stacjonarnych. Jest to niezbędne kryterium, ponieważ dla niestacjonarnych zmiennych rozkłady statystyk testowych mogą być niestandardowe, co może skutkować błędnymi wnioskowaniami statystycznymi.

Kolejną ważną kwestią jest wybór optymalnego rzędu opóźnień. Za duża ilość opóźnień powoduje skomplikowanie modelu, natomiast ich zbyt mała liczba może wywołać autokorelację składników losowych.

Następnym krokiem jest estymacja modelu. Model VAR można estymować klasyczną metodą najmniejszych kwadratów KMNK, stosowaną do każdego z równań osobno. Tak oszacowane estymatory KMNK są zgodne i asymptotycznie efektywne<sup>29</sup>.

Wyestymowany model trzeba zweryfikować. Przede wszystkim należy zbadać, czy zachodzi zjawisko autokorelacji składników losowych oraz czy mają one rozkład normalny.

Pozytywnie zweryfikowany model VAR pozwala przeanalizować powiązania pomiędzy tworzącymi go zmiennymi. W tej pracy przeprowadzone zostaną analizy przyczynowości w sensie Grangera, estymacje funkcji odpowiedzi na impuls, a także dekompozycje wariancji.

### 3.3.1. Wybór optymalnego rzędu opóźnień

Wybór optymalnego rzędu opóźnień w modelu VAR jest bardzo ważnym aspektem, ponieważ wszystkie wnioskowania, których podstawą jest wyestymowany model, zależą od jego poprawnej specyfikacji. Podobnie jak w przypadku modelu AR, optymalny rząd opóźnień można wybrać na podstawie kryteriów informacyjnych. Najpopularniejszymi z nich są:

- kryterium informacyjne Akaike’a (AIC):

$$AIC(k) = \ln |\hat{\Sigma}_k| + \frac{2n^2 k}{T}, \quad (17)$$

---

<sup>29</sup> E.Kusideł, Modele wektorowo-autoregresyjne..., s. 16.

- kryterium informacyjne Schwarza (BIC):

$$BIC(k) = \ln |\hat{\Sigma}_k| + \frac{n^2 k \ln T}{T}, \quad (18)$$

- kryterium informacyjne Hannana i Quinna (HQ):

$$HQ(k) = \ln |\hat{\Sigma}_k| + \frac{n^2 k \ln \ln T}{T}, \quad (19)$$

gdzie  $k$  to rząd opóźnień zmiennych w modelu VAR, a  $|\hat{\Sigma}_k|$  to wyznacznik estymatora macierzy  $\hat{\Sigma}_k = E(u_t u_t')$  modelu VAR( $k$ ). We wszystkich podanych kryteriach sugerowanym najbardziej optymalnym rzędem opóźnień jest takie  $k$ , dla którego wartości kryteriów osiągają minimum, co jest równoznaczne z tym, że utrata informacji jest najmniejsza<sup>30</sup>.

### 3.3.2. Estymacja modelu VAR

Z uwagi na fakt, że w model VAR zawiera tylko opóźnione zmienne po prawej stronie równań, a także zmienne te są z definicji nieskorelowane ze składnikiem losowym (przy zakładanym braku autokorelacji), można go estymować metodą najmniejszych kwadratów kalkulując każde z równań osobno. Ponieważ zakłada się, że wielowymiarowy składnik losowy ma niesymetryczną macierz kowariancji, naturalne byłoby rozważenie zastosowania regresji wielorakiej zamiast KMNK, aby wyraźnie uwzględnić niezerowe kowariancje składników losowych. Jako że na współczynniki nie nakłada się żadnych ograniczeń, estymacje uzyskane regresją wieloraką nie będą bardziej efektywne od tych uzyskanych KMNK<sup>31</sup>.

### 3.3.3. Weryfikacja modelu VAR

Model VAR, podobnie jak proces AR, należy zweryfikować pod kątem występowania autokorelacji reszt i normalności ich rozkładu. W tym celu wykorzystane zostaną wielowymiarowe wersje testów Ljunga-Boxa i Jarque-Bera. Zbadana zostanie także stabilność parametrów obliczonego modelu.

---

<sup>30</sup> A. Wójcik, Modele wektorowo-autoregresyjne..., s. 117-118.

<sup>31</sup> W.W Charemza, D. F. Deadman, New directions in econometric..., s. 157-158.

### 3.3.4. Wielowymiarowa autokorelacja składnika losowego

Występowanie autokorelacji w modelu VAR może oznaczać złą specyfikację modelu. Może do tego dojść, gdy wybrany rząd opóźnień w modelu jest za niski. Zjawisko to w resztach wyestymowanego modelu VAR zostanie sprawdzone za pomocą wielowymiarowego testu Ljunga-Boxa o hipotezach:

$$H_0: \forall_{1 \leq i \leq m} \Gamma_i = 0,$$

$$H_1: \exists_{1 \leq i \leq m} \Gamma_i \neq 0,$$

gdzie  $\Gamma_i = cov(u_t, u_{t-j})$ , czyli jest to macierz autokowariancji rzędu  $j$  dla składnika losowego w modelu VAR.

Statystyka testowa ma postać:

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{T-i} tr(\hat{\Gamma}_i' \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_i \hat{\Gamma}_0^{-1}), \quad (20)$$

gdzie  $\hat{\Gamma}_s = \frac{1}{T} \sum_{t=s+1}^T y_t y_{t+s}'$ ,  $T$  jest liczebnością próby,  $k$  jest wymiarem  $u_t$ ,  $tr(A)$  to ślad macierzy  $A$ , czyli suma elementów na jej głównej przekątnej. Zakładając prawdziwość hipotezy zerowej, statystyka  $Q_k(m)$  ma rozkład  $\chi^2$  o  $k^2 m$  stopniach swobody<sup>32</sup>.

### 3.3.5. Wielowymiarowa normalność składnika losowego

Wielowymiarowy test normalności Jarque-Bera, tak jak jego jednowymiarowy odpowiednik, polega na porównaniu badanego rozkładu z teoretycznym rozkładem normalnym, w tym wypadku wielowymiarowym. W teście miary skośności i kurtozy oparte są o transformację Mahalanobisa.

Hipotezy testu są następujące:

$$H_0: \text{składniki losowe mają wielowymiarowy rozkład normalny,}$$

$$H_1: \text{składniki losowe nie mają wielowymiarowego rozkładu normalnego,}$$

Wielowymiarowa skośność liczona jest następująco:

$$sk_i = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{W}_{in}^3}{\left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{W}_{in}^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (21)$$

<sup>32</sup> R.S.Tsay, Analysis of financial time series, Wiley-Interscience, 2005, Hoboken, s. 346-347.

a wielowymiarowa kurtoza ma postać:

$$ku_i = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{W}_{in}^4}{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{W}_{in}^2\right)^2}, \quad (22)$$

gdzie  $\tilde{W}_{in}$  to elementy macierzy, zdefiniowanej w sposób:

$$\tilde{W} = \hat{U} S_{\hat{U}}^{-1},$$

$\hat{U}$  to macierz składników losowych, natomiast  $S_{\hat{U}}$  jest trójkątną macierzą górną, taką że  $\hat{U}'\hat{U} = S_{\hat{U}}'S_{\hat{U}}$  i  $(\hat{U}'\hat{U})^{-1} = S_{\hat{U}}^{-1}(S_{\hat{U}}^{-1})'$ .

Tak więc  $W$  można interpretować jako standaryzowaną macierz  $U$ . Inaczej mówiąc,  $sk_i$  i  $ku_i$  są indywidualnymi skośnościami i kurtozami opartymi na standaryzowanej macierzy reszt.

Oznaczając:

$$SK = (sk_1, \dots, sk_p)' (sk_1, \dots, sk_p),$$

$$KU = (ku_1 - 3, \dots, ku_p - 3)' (ku_1 - 3, \dots, ku_p - 3),$$

statystyka wielowymiarowego testu Jarque-Bera przyjmuje postać:

$$JB = \frac{N}{6} SK + \frac{N}{24} KU \quad (23)$$

oraz ma ona rozkład  $\chi^2$  o  $2p$  stopniach swobody<sup>33</sup>.

Jeśli dla założonego poziomu istotności  $\alpha$  statystyka  $JB \leq \chi_{2p, \alpha}^2$ , to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o wielowymiarowej normalności badanego rozkładu. Natomiast gdy  $JB \geq \chi_{2p, \alpha}^2$ , odrzuca się hipotezę zerową i przyjmuje hipotezę alternatywną mówiącą, że badany rozkład nie ma wielowymiarowego rozkładu normalnego.

### 3.3.6. Stabilność modelu VAR

Warunek stacjonarności modelu VAR jest analogiczny do tego w modelu AR. Proces VAR jest stabilny, jeżeli jego odwrotny wielomian charakterystyczny:

$$\det(I_K - A_1 z - \dots - A_p z^p) \neq 0 \text{ dla } |z| \leq 1 \quad (24)$$

<sup>33</sup> C. Domański, Properties of Jarque-Bera test, Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica, 2010, 235, s.76-77.

nie ma pierwiastków w lub na okręgu jednostkowym<sup>34</sup>. Jest to równoważne warunkowi, że wszystkie wartości własne macierzy towarzyszących  $A$  są na moduł mniejsze niż 1<sup>35</sup>. Stabilność modelu VAR umożliwia zapisanie systemu jako procesu średniej ruchomej, na podstawie której można dokonywać dalszych badań, m.in. takich jak analizy odpowiedzi na impuls czy dekompozycje wariancji.

### 3.3.7. Przyczynowość w sensie Grangera

Z definicji zmienna  $X_t$  jest przyczyną w sensie Grangera zmiennej  $Y_t$  (oznaczaną jako  $X_t \rightarrow Y_t$ ), jeżeli obecne wartości  $Y_t$  można przewidywać z lepszą dokładnością, używając przeszłych wartości zmiennej  $X_t$ , niż bez ich używania, przy założeniu niezmienności pozostałych informacji<sup>36</sup>.

Badanie przyczynowości w sensie Grangera polega na przetestowaniu istotności parametrów przy zmiennej, którą chcemy sprawdzić, pod kątem możliwego wpływu na zmienną objaśnianą. W tym celu estymujemy dwuwymiarowy model VAR postaci:

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,1} & A_{12,2} \\ A_{21,1} & A_{22,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} A_{11,p} & A_{12,p} \\ A_{21,p} & A_{22,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-p} \\ X_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Hipoteza zerowa i alternatywna wyglądają następująco<sup>37</sup>:

$$H_0: \forall_{1 \leq i \leq p} A_{12,i} = 0.$$

$$H_1: \exists_{1 \leq i \leq p} A_{12,i} \neq 0.$$

Hipoteza zerowa weryfikowana jest za pomocą statystyki  $F$ <sup>38</sup>:

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS_1)/p}{RSS_1/(T-2p-1)}, \quad (26)$$

gdzie:

$T$  – liczność próby,

$$RSS_0 = \sum_{t=1}^T \hat{u}_{1t}^2.$$

$$RSS_1 = \sum_{t=1}^T \hat{u}_{2t}^2.$$

<sup>34</sup> H. Lütkepohl, New introduction to multiple time series analysis, Springer, 2005, Berlin s. 16.

<sup>35</sup> B. Pfaff, M. Stigler, Package 'vars', 2021, s.31, <https://cran.r-project.org/web/packages/vars/vars.pdf> **Błąd! Nieprawidłowy odsyłacz typu hiperłącze.**, dostęp (10.06.2022r.)

<sup>36</sup> W.W Charemza, D. F. Deadman, New directions in econometric..., s. 165.

<sup>37</sup> A. Czapkiewicz, Ekonometria..., s. 128-133.

<sup>38</sup> Bivariate Granger Causality Test, <https://support.sas.com/rnd/app/ets/examples/granger/index.html>, dostęp z dnia 15.06.2022 r.

Statystyka  $F$  ma rozkład  $F_{p,T-2p-1}$ . Gdy  $F_{obl} < F_{\alpha,p,T-2p-1}$  - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, a więc zmienna  $x_t$  nie jest przyczyną zmiennej  $y_t$  w sensie Grangera. Z kolei, jeżeli  $F_{obl} > F_{\alpha,p,T-2p-1}$ , odrzuca się hipotezę zerową i przyjmuje się hipotezę alternatywną, mówiącą o tym, że zmienna  $x_t$  jest przyczyną  $y_t$  w sensie Grangera.

### 3.3.8. Funkcja odpowiedzi na impuls

Każdy model VAR( $p$ ) można zapisać w postaci VAR(1), co jest bardzo przydatne w wielu sytuacjach praktycznych. Takie przekształcenie uzyskiwane jest poprzez wyrażenie modelu VAR( $p$ ) w formie towarzyszącej:

$$y_t = A_0 + Ay_{t-1} + u_t, \quad (27)$$

gdzie:

$$y_t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, u_t = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Wektory  $Y_t, v$  i  $U_t$  mają wymiary  $(Kp \times 1)$ . Macierze parametrów  $A_j$  dla  $j = 1, \dots, p$  są  $(K \times K)$  wymiarowe, a  $A$  jest wymiaru  $(Kp \times Kp)$ <sup>39</sup>.

Zakładając, że system VAR jest stabilny, można odnaleźć jego stan równowagi  $\bar{y}$ . Używając operatora opóźnienia, równanie (27) zapisuje się jako:

$$y_t = A_0 + A(L)y_t + u_t, \quad (29)$$

lub

$$[I - A(L)]Y_t = A_0 + u_t. \quad (30)$$

Uwzględniając warunek stabilności, mamy:

$$\begin{aligned} y_t &= [I - A(L)]^{-1}(A_0 + u_t) \\ &= (I - A)^{-1}A_0 + \sum_{i=0}^{\infty} A^i u_{t-1} \\ &= \bar{y} + \sum_{i=0}^{\infty} A^i u_{t-1} \end{aligned} \quad (31)$$

Współczynniki w potęgach  $A$  są mnożnikami w tym systemie. Zakładając, że  $u_t$  było równe 0 na tyle długo, że  $y_t$  osiągnęło stan równowagi  $\bar{y}$ , wstrząśnięcie systemem poprzez jednostkową zmianę wartości  $u_t$  a następnie przywrócenie jej z powrotem do

<sup>39</sup> H. Lütkepohl, New introduction to..., s. 15.

zera spowoduje odchylenie  $y_t$  od stanu równowagi, po czym po określonej liczbie okresów wartości  $y_t$  powinny do niego powrócić. Ścieżka, po której zmienna wraca do stanu równowagi nazywana jest odpowiedzią impulsową<sup>40</sup>.

Możemy powiązać każdą innowację  $u_{mt}$  z konkretną zmienną w  $y_t$ , np.  $y_{mt}$ , rozważając efekt jednorazowego szoku systemu  $du_{mt}$ . Porównując ze stanem równowagi, w obecnym okresie mamy:

$$y_{mt} - \bar{y}_m = du_{mt} = \phi_{mm}(0)du_t, \quad (32)$$

jeden okres dalej:

$$y_{m,t+1} - \bar{y}_m = (A)_{mm}du_{mt} = \phi_{mm}(1)du_t, \quad (33)$$

kolejno dwa okresy w przód:

$$y_{m,t+2} - \bar{y}_m = (A^2)_{mm}du_{mt} = \phi_{mm}(2)du_t, \quad (34)$$

itd. Funkcja  $\phi_{mm}(i)$  przedstawia charakterystykę odpowiedzi impulsowej zmiennej  $y_m$  na innowację w  $u_m$ . Istnieje również możliwość zbadania jednorazowych szoków pomiędzy różnymi zmiennymi. Efekt pojedynczej innowacji  $u_l$  na zmienną  $m$  zapisywany jest jako<sup>41</sup>:

$$\phi_{ml}(i) = A_{ml}^i. \quad (35)$$

### 3.3.9. Dekompozycja wariancji

Funkcje odpowiedzi na impuls śledzą wpływ szoku wywołanego przez zmienną endogeniczną na inne zmienne w modelu VAR, natomiast dekompozycja wariancji rozkłada zmienność każdej zmiennej na składowe szoku dla pozostałych zmiennych. Rozkład wariancji dostarcza informacji o względnym znaczeniu każdej innowacji losowej dla zmiennych w modelu VAR, ukazując jaka część zmian w szeregu wynika z jej własnych wstrząsów, a jaka ze wstrząsów pozostałych zmiennych.

Mając model VAR w postaci średniej ruchomej:

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \xi_{t-i}, \quad (36)$$

wartość wektora  $x_t$  w momencie  $t + n$  można zapisać jako:

$$y_{t+n} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \xi_{t+n-i}, \quad (37)$$

natomiast błąd prognozy wynosi wtedy:

$$y_{t+n} - Ey_{t+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \xi_{t+n-i}. \quad (38)$$

<sup>40</sup> W. H. Greene, Econometric analysis. Pearson Education Inc., 2003, Saddle River, s. 593-594.

<sup>41</sup> W. H. Greene, Econometric analysis..., s. 594.

Zakładając, że wektor  $x_t$  ma przykładową postać  $y_t = [w_t \ x_t \ z_t]$ , nie ma przeszkód, aby błąd prognozy zmiennej  $w_t$  określić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} w_{t+n} - Ew_{t+n} &= \phi_{11}(0)\xi_{wt+n} + \phi_{11}(1)\xi_{wt+n-1} + \dots + \phi_{11}(n-1)\xi_{wt+1} \\ &+ \phi_{12}(0)\xi_{xt+n} + \phi_{12}(1)\xi_{xt+n-1} + \dots + \phi_{12}(n-1)\xi_{xt+1} \\ &+ \phi_{13}(0)\xi_{zt+n} + \phi_{13}(1)\xi_{zt+n-1} + \dots + \phi_{13}(n-1)\xi_{zt+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Wariancja błędu prognozy zmiennej  $w_{t+n}$  może być wyznaczona jako:

$$\begin{aligned} \sigma_w(n)^2 &= \sigma_w^2[\phi_{11}(0)^2 + \phi_{11}(1)^2 + \dots + \phi_{11}(n-1)^2] + \\ &\sigma_x^2[\phi_{12}(0)^2 + \phi_{12}(1)^2 + \dots + \phi_{12}(n-1)^2] + \\ &\sigma_z^2[\phi_{13}(0)^2 + \phi_{13}(1)^2 + \dots + \phi_{13}(n-1)^2]. \end{aligned} \quad (40)$$

Z uwagi na fakt, że wszystkie wartości  $\phi_{jk}(i)^2$  są wartościami nieujemnymi, wariancja błędu rośnie wraz ze wzrostem  $n$ . Mając tak obliczoną wariancję, istnieje możliwość obliczenia stosunków wpływów poszczególnych  $\xi_w, \xi_x, \xi_z$  na całkowitą wariancję  $\sigma_w(n)^2$ <sup>42</sup>:

$$\frac{\sigma_w^2[\phi_{11}(0)^2 + \phi_{11}(1)^2 + \dots + \phi_{11}(n-1)^2]}{\sigma_w(n)^2}, \quad (41)$$

$$\frac{\sigma_x^2[\phi_{12}(0)^2 + \phi_{12}(1)^2 + \dots + \phi_{12}(n-1)^2]}{\sigma_w(n)^2}, \quad (42)$$

$$\frac{\sigma_z^2[\phi_{13}(0)^2 + \phi_{13}(1)^2 + \dots + \phi_{13}(n-1)^2]}{\sigma_w(n)^2}. \quad (43)$$

---

<sup>42</sup> E.Kusideł, Modele wektorowo-autoregresyjne..., s. 40-42.



## 4. Badanie empiryczne

### 4.1. Dane

Badanie współzależności rynków finansowych w niniejszej pracy obejmuje dzienne notowania pięciu głównych indeksów giełdowych z wybranych krajów w okresie od stycznia 2013 r. do grudnia 2019 r. Do rozważań wybrano indeksy giełdowe z takich państw jak: Niemcy (indeks DAX), USA (indeks DJIA), Polska (indeks WIG20), Wielka Brytania (indeks FTSE100) i Brazylia (indeks BOVESPA)<sup>43</sup>. Rynki te zostały wybrane z następujących powodów: Niemcy to najsilniejsza gospodarka w Europie, rynek amerykański to największy parkiet giełdowy pod względem kapitalizacji na świecie, Polska została wybrana jako przedstawicielka rynków Europy Środkowo-Wschodniej, w Wielkiej Brytanii znajduje się największa giełda finansowa w Europie a Brazylia to lider w regionie Ameryki Południowej.

Aby usunąć braki w danych wynikające z różnic w dniach bez sesji giełdowych pomiędzy krajami, zastosowano interpolację liniową. Dodatkowo, aby zapewnić bezpośrednią porównywalność indeksów, wszystkie wartości notowań przewalutowano na dolary amerykańskie. Dla indeksów obliczono logarytmiczne stopy zwrotu według wzoru:

$$r_{it} = \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}},$$

gdzie  $P_{i,t}$  to cena zamknięcia indeksu  $i$  w dniu  $t$ , natomiast  $P_{i,t-1}$  to cena zamknięcia indeksu w dniu  $t - 1$ .

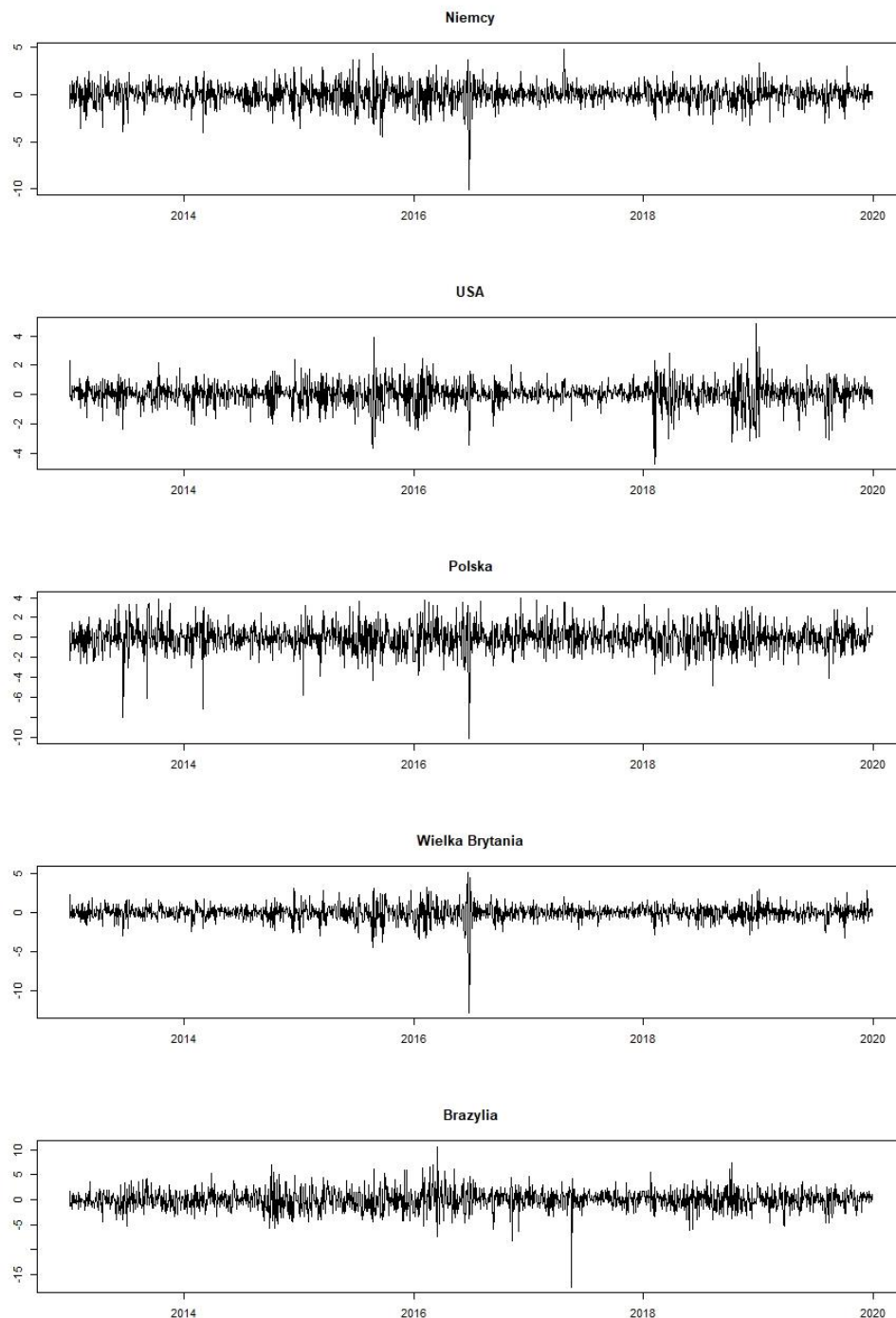
Na rysunku 1 przedstawiono wykresy obliczonych wahań stóp zwrotu wybranych indeksów. W prezentowanych szeregach czasowych zauważalne są okresy o bardzo małej i wysokiej zmienności. W badanym czasie nie występowały żadne znaczące ogólnoświatowe kryzysy finansowe.

W tabeli 1 zamieszczono statystyki opisowe stóp zwrotu badanych indeksów. Zauważono, że średnie stopy dla wszystkich rozważanych indeksów są niższe od ich median, co może sugerować asymetrię ich rozkładów. Dla wszystkich indeksów obliczone kurtozy są dodatnie, a skośności ujemne, co sygnalizuje, że rozkłady stóp

---

<sup>43</sup> Notowania indeksów pobrano ze strony internetowej [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl).

zwrotów nie mają rozkładów normalnych, są za to leptokurtyczne oraz lewostronnie asymetryczne. Odchylenia standardowe występują dość duże, co sugeruje wysoką zmienność stóp zwrotu.



**Rysunek 1.** Wykresy wahań stóp zwrotu badanych indeksów giełdowych  
Źródło: opracowanie własne

**Tabela 1.** Statystyki opisowe stóp zwrotu badanych indeksów giełdowych

Kraj	Średnia	Mediana	Odch. stand.	Kurtoza	Skośność
Niemcy	0,021	0,035	1,080	5,142	-0,597
USA	0,043	0,060	0,790	4,030	-0,526
Polska	-0,021	-0,006	1,289	3,845	-0,495
W. Bryt.	0,002	0,036	0,966	18,426	-1,396
Brazylia	-0,002	0,047	1,912	5,056	-0,337

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2 przedstawia korelacje Pearsona stóp zwrotu między poszczególnymi indeksami. Zasadniczo korelacje pomiędzy krajami są na ogół umiarkowane, co jest już pierwszą przesłanką na temat istniejących współzależności. Najwyższa korelacja występuje pomiędzy Niemcami i Wielką Brytanią (0,849), a najniższa pomiędzy Niemcami i Brazylią (0,338). Należy zaznaczyć, że rynek brazylijski na ogół wykazuje najsłabsze korelacje z pozostałymi krajami (maksymalnie 0,382 z Polską).

**Tabela 2.** Korelacje Pearsona pomiędzy stopami zwrotów badanych indeksów

	Niemcy	USA	Polska	W. Bryt.	Brazylia
Niemcy	1	0,504	0,575	0,849	0,338
USA	0,504	1	0,349	0,522	0,382
Polska	0,575	0,349	1	0,504	0,339
W. Bryt.	0,849	0,522	0,504	1	0,346
Brazylia	0,338	0,382	0,339	0,346	1

Źródło: opracowanie własne

Zbadano stacjonarność badanych szeregów czasowych. Analiza graficzna wykresów stóp zwrotów na rysunku 1 wskazuje, że każdy z szeregów oscyluje z dość stałą zmiennością wokół stałej wartości, co sygnalizuje ich kowariancyjne stacjonarność. Dla potwierdzenia tych przypuszczeń przeprowadzono rozszerzony test Dickeya-Fullera dla każdego z analizowanych szeregów. Wyniki testów w każdym przypadku odrzucają hipotezę zerową o niestacjonarności zmiennych i pozwalają przyjąć hipotezę alternatywną mówiącą, że zmienne te są stacjonarne. Potwierdzają to obliczone statystyki

testowe, które dla każdego z badanych szeregów są mniejsze od wartości krytycznych, ustalonych dla poziomu istotności 1%. Podsumowanie przeprowadzonych testów przedstawiono w tabeli 3.

**Tabela 3.** Wyniki testów ADF dla badanych stóp zwrotu

Kraj	Wartość krytyczna	Statystyka testowa	Decyzja
Niemcy	-2,58	-30,153	Stacjonarność
USA	-2,58	-31,558	Stacjonarność
Polska	-2,58	-29,178	Stacjonarność
W. Bryt.	-2,58	-30,208	Stacjonarność
Brazylia	-2,58	-29,283	Stacjonarność

Źródło: opracowanie własne

## 4.2. Model VAR

Wiedząc, że szeregi czasowe używane w badaniu są stacjonarne, przystąpiono do szacowania modelu VAR. Obliczono kryteria informacyjne Akaike'a, Schwarza oraz Hannana i Quinna w celu wyznaczenia optymalnego rzędu opóźnienia w modelu i minimalizacji utraty informacji. Kryteria jednoznacznie stwierdzają opóźnienie rzędu 2 za najlepsze. Wyniki obliczonych kryteriów zamieszczono w tabeli 4.

**Tabela 4.** Wyniki obliczonych kryteriów informacyjnych

Opóźnienie	AIC	BIC	HQ
1	13,516	12,684	13,580
2	13,515*	13,606*	13,549*
3	13,517	13,762	13,609
4	13,529	13,850	13,648
5	13,530	13,925	13,675

\* - wskazuje najlepszą (minimalną) wartość dla odpowiednich kryteriów.

Źródło: opracowanie własne

Wyestymowany model VAR(2) poddano weryfikacji. Sprawdzone, czy występuje w nim wielowymiarowa autokorelacja składników losowych oraz czy reszty mają wielowymiarowy rozkład normalny. Wyniki testów Ljunga-Boxa i Jarque-Bera zamieszczono w tabeli 5. Dla testu Ljunga-Boxa wszystkie oszacowane wartości  $p$  przewyższają zadany wcześniej poziom istotności 5%. Oznacza to, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o braku autokorelacji składników losowych w weryfikowanym modelu dla rzędów  $k = 5, 10, 20$  i  $30$ . W przypadku testu normalności obliczona  $p$ -wartość jest mniejsza od założonego poziomu istotności 5%. Odrzucono zatem hipotezę zerową o normalności rozkładu składnika losowego i przyjęto hipotezę alternatywną mówiącą, że reszty nie mają rozkładu normalnego.

**Tabela 5.** Wyniki wielowymiarowych testów Ljunga-Boxa i Jarque-Bera dla wyestymowanego modelu VAR(2)

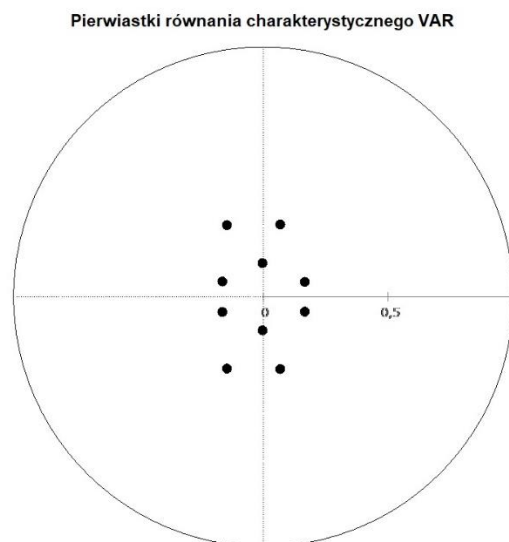
Model	Opóźnienie $k$	LB [wartość- $p$ ]	JB [wartość- $p$ ]
VAR(2)	5	0,44***	0,000
	10	0,30***	
	20	0,55***	
	30	0,06**	

\*\*\*, \*\*, \* - oznaczają istotności na poziomach odpowiednio: 1%, 5%, 10%.

LB – test Ljunga-Boxa, JB - test Jarque-Bera

Źródło: opracowanie własne

Sprawdzono także stabilność oszacowanego modelu VAR. W tym celu obliczono pierwiastki równania charakterystycznego. Położenie pierwiastków na kole jednostkowym zaprezentowano na rysunku 2. Wszystkie obliczone wartości pierwiastków znajdują się wewnątrz koła jednostkowego. Świadczy to o tym, że wyestymowany model VAR(2) jest stabilny, a co za tym idzie można wykorzystać go do dalszych analiz, m.in. estymacji funkcji odpowiedzi na impuls, czy dekompozycji wariancji.



**Rysunek 2.** Wykres pierwiastków równania charakterystycznego wyestymowanego modelu VAR(2)

Źródło: opracowanie własne

#### 4.2.1. Przyczynowości w sensie Grangera

Model VAR(2) wykorzystano do zbadania przyczynowości w sensie Grangera pomiędzy analizowanymi stopami zwrotów w celu sprawdzenia, które z szeregów czasowych przyczyniają się do poprawy przewidywań obecnych stóp zwrotów pozostałych zmiennych. Testy przyczynowości zrealizowano dla każdej pary rynków w obu kierunkach. Wykryto cztery zależności dwukierunkowe, cztery jednokierunkowe oraz osiem braków przyczynowości. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.

Badanie wykazało, że rynek niemiecki, na poziomie istotności 10%, jest przyczyną w sensie Grangera dla wszystkich analizowanych rynków poza Polską. Oznacza to, że przeszłe stopy zwrotu indeksu niemieckiego pozwalają z większą dokładnością prognozować obecne stopy zwrotów indeksów z USA, Wielkiej Brytanii i Brazylii.

Rynek USA jest przyczyną dla wszystkich analizowanych rynków europejskich, tj. niemieckiego, polskiego i brytyjskiego. Nie odnotowano istotnej zależności pomiędzy rynkiem amerykańskim a brazylijskim.

W badaniu nie odnotowano żadnych istotnych statystycznie przyczynowości ze strony rynku polskiego. Stopy zwrotu polskiego indeksu nie poprawiają przewidywań żadnych pozostałych szeregów czasowych użytych w pracy.

Wielka Brytania jest przyczyną w sensie Grangera dla trzech innych indeksów giełdowych: niemieckiego, amerykańskiego i polskiego. Przeszłe stopy zwrotu głównego indeksu brytyjskiego nie miały istotnego znaczenia w kształtowaniu się obecnych stóp zwrotu indeksu brazylijskiego.

Wyniki badania wskazują rynek brazylijski jako przyczynę w sensie Grangera dla rynków niemieckiego, polskiego i brytyjskiego. Wartości przeszłe indeksu z Brazylii nie wpływały na poprawę przewidywań wartości obecnych stóp zwrotu z USA.

**Tabela 6.** Wyniki przyczynowości w sensie Grangera

Kierunek przyczynowości		Statystyka F	Wartość p
Niemcy →	USA	2,753	0,064*
	Polska	0,678	0,411
	W. Bryt.	2,730	0,098*
	Brazylia	2,7230	0,089*
USA →	Niemcy	31,714	0,000***
	Polska	17,514	0,000***
	W. Bryt.	33,015	0,000***
	Brazylia	2,4012	0,121
Polska →	Niemcy	0,515	0,473
	USA	0,393	0,531
	W. Bryt.	0,057	0,811
	Brazylia	0,076	0,783
W. Bryt. →	Niemcy	7,095	0,008***
	USA	3,549	0,029**
	Polska	8,804	0,003***
	Brazylia	0,008	0,928
Brazylia →	Niemcy	19,029	0,000***
	USA	2,417	0,120
	Polska	25,489	0,000***
	W. Bryt.	18,818	0,000***

\*\*\*, \*\*, \* - oznaczają istotności na poziomach odpowiednio: 1%, 5%, 10%.

Źródło: opracowanie własne

#### 4.2.2. Funkcje odpowiedzi na impuls

Funkcje odpowiedzi na impuls wyestymowano w celu sprawdzenia, jak losowy i nieoczekiwany szok w wartościach jednej ze zmiennych wpływa na pozostałe szeregi czasowe zawarte w modelu. Wykresy funkcji skonstruowano w ten sposób, że na osiach  $y$  wykresów odłożono wielkości reakcji danych stóp zwrotu na jednostkową zmianę szeregu będącego źródłem impulsu. Z kolei na osiach  $x$  zaznaczono horyzont czasowy wpływu jednostkowego wstrząsu. Graficzne reprezentacje funkcji odpowiedzi na impuls zaprezentowano na rysunku 3.

Jednostkowe zaburzenie na rynku niemieckim powoduje silne reakcje na pozostałych rynkach. Kierunek oddziaływania dla wszystkich indeksów jest wspólny. Zauważono, że rynki powracają do stanu równowagi już po jednym, maksymalnie dwóch okresach od zaistnienia szoku. Najmocniej na wstrząs ze strony Niemiec reagują pozostałe rynki europejskie, tj. Polska i Wielka Brytania.

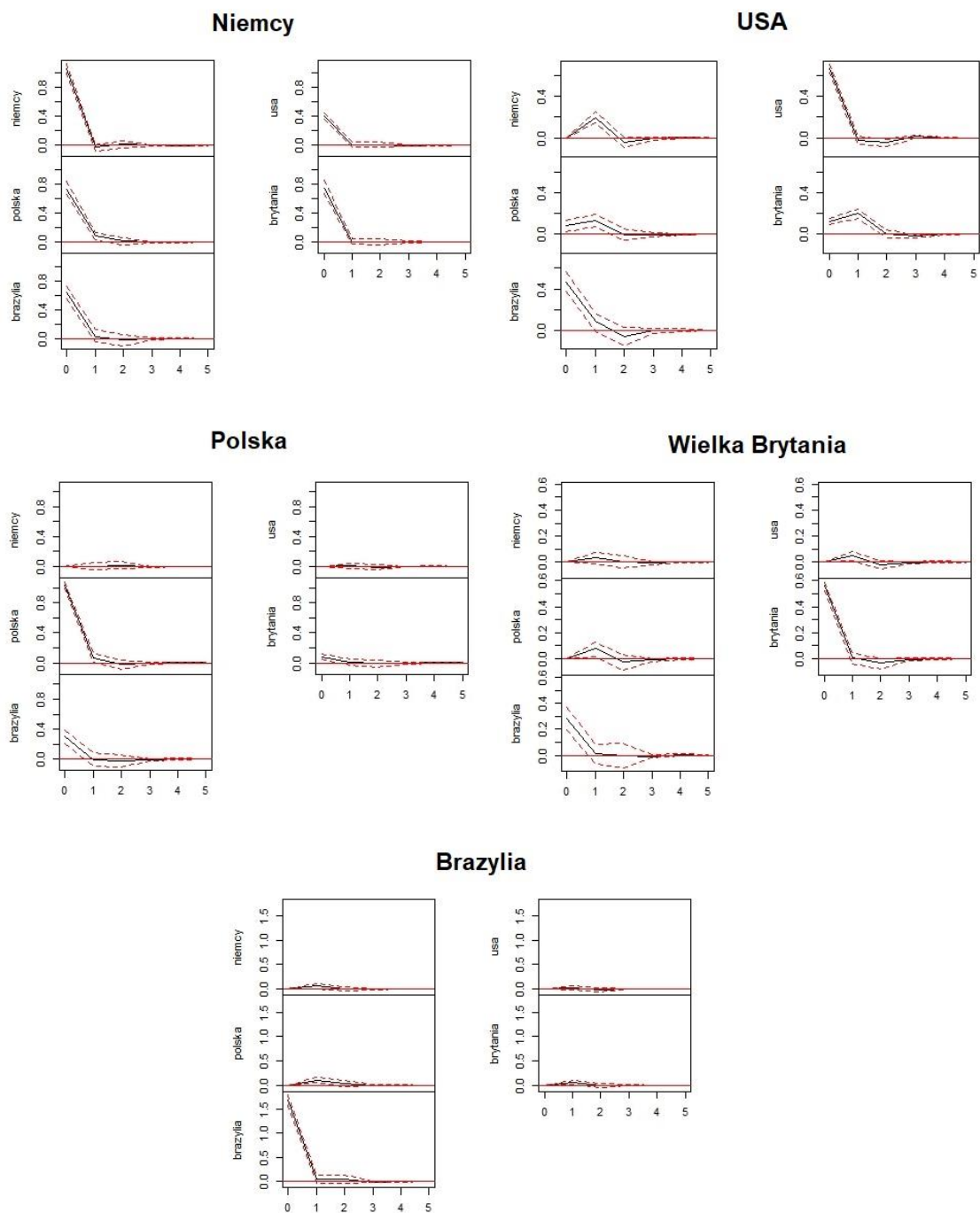
W przypadku jednostkowego zaburzenia na rynku USA pozostałe rynki, wyłączając Brazylię, która reaguje na impuls już w okresie 0, osiągają maksima swoich reakcji z opóźnieniem jednodniowym. Reakcje te są umiarkowane i wszystkie zgodne kierunkiem wstrząsu na rynku USA. Rynki powracają do stanów równowagi po około 2-3 okresach.

Wykresy reakcji rynków na impuls ze strony Wielkiej Brytanii ukazują, że rynki niemiecki i amerykański słabo reagują na pojedynczy szok z tego kraju. Zauważalne są za to mocniejsze odpowiedzi na rynku polskim i brazylijskim. Polska reaguje tu umiarkowanie i z jednookresowym opóźnieniem. Odpowiedź Brazylii jest natomiast natychmiastowa i najmocniejsza ze wszystkich rozważanych rynków. Wszystkie reakcje wygasają po około 2-3 okresach.

Pojedynczy impuls szokowy w Polsce powoduje jedynie umiarkowaną reakcję na rynku brazylijskim. Reakcja ta utrzymuje się tylko przez jeden okres. Pozostałe rynki pozostają obojętne na zaburzenie w stopach zwrotu głównego polskiego indeksu giełdowego.

Jednorazowe zaburzenie na rynku brazylijskim również nie powoduje znaczących reakcji na pozostałych rynkach. Zauważalne są jedynie znikome odchyły od stanów równowagi na rynkach polskim i brytyjskim.





**Rysunek 3.** Wykresy funkcji odpowiedzi na impuls

Źródło: opracowanie własne

### 4.2.3. Dekompozycja wariancji

Obliczono dekompozycje wariancji dla każdej zmiennej w modelu, aby określić, jaka część wariancji błędu prognozy każdych ze stóp zwrotu została wyjaśniona przez nią samą, a jaka przez inne zmienne w modelu. Na rysunku 4 przedstawiono dekompozycje wariancji w postaci skumulowanych wykresów kolumnowych dla każdej z analizowanych zmiennych dla pięciu okresów w przód.

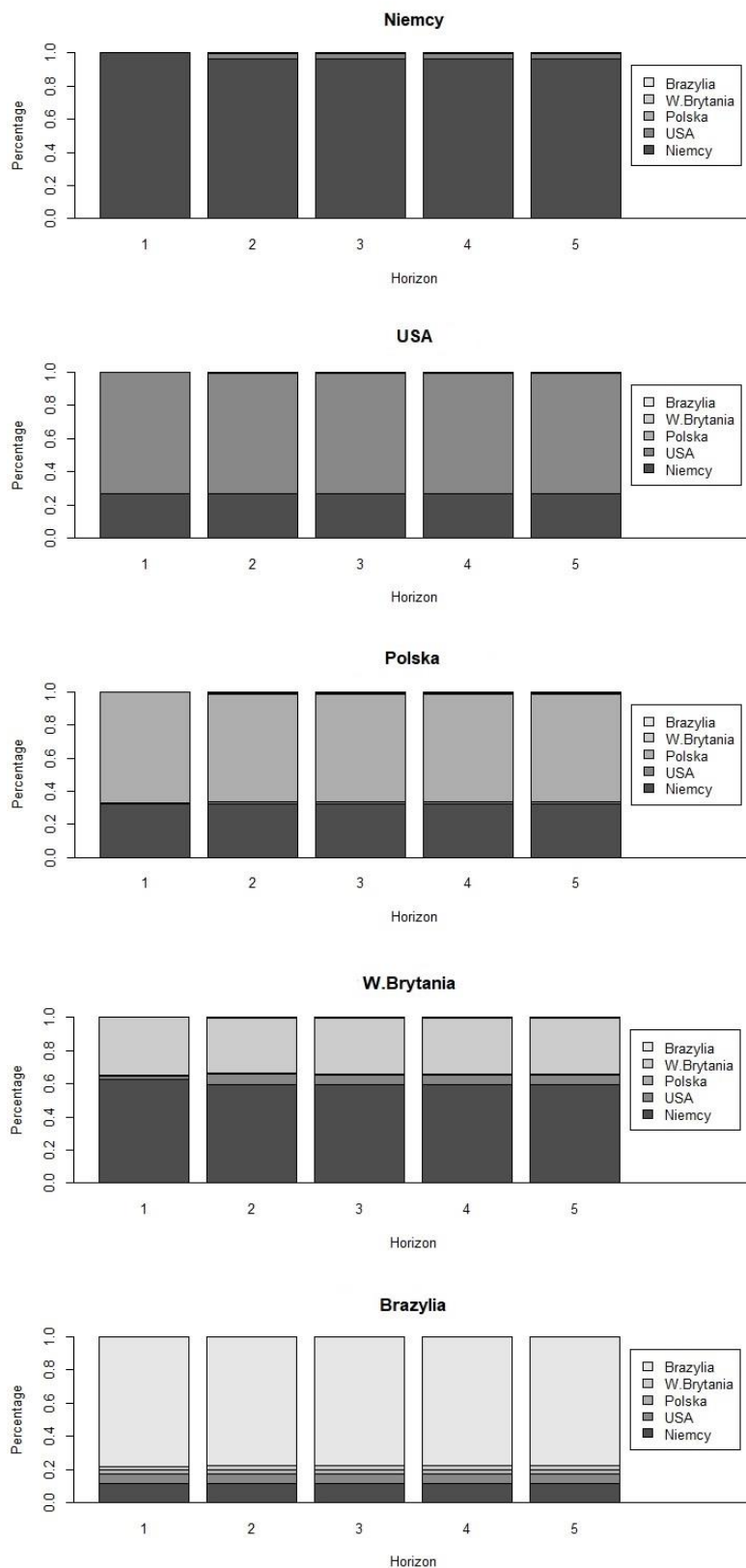
Badanie ujawniło, że zdecydowana większość błędu prognozy dla rynku niemieckiego jest wyjaśniana przez innowacje na samym rynku niemieckim. W piątym okresie około 96,17% wariancji błędu jest wyjaśnione przez zmiany w indeksie niemieckim, podczas gdy tylko około 3,29%, 0,28% i 0,09% wariancji błędu jest wyjaśnione kolejno przez USA, Brazylię i Wielką Brytanię. Świadczy to o słabym wpływie innych rynków wariancję rynku niemieckiego.

Z dekompozycji wariancji błędu dla USA wynika, że około 72,83% wariancji błędu wyjaśniane jest przez sam rynek amerykański. Znaczny wpływ na wariancję USA, mają Niemcy, wyjaśniają one 26,80% ich zmienności. Pozostałe rynki mają znikomy wpływ w rozkładzie wariancji USA.

W przypadku Polski za około 65% wariancji błędu prognozy odpowiadają innowacje własne. Rynek niemiecki ma wpływ aż na 32%, a amerykański na 1,5% zmienności na tym rynku. Rezultat ten kolejny raz potwierdza mocną zależność rynku polskiego od rynku niemieckiego.

Dekompozycja wariancji błędu prognozy Wielkiej Brytanii ukazuje większościowy wpływ Niemiec w jej rozkładzie. Rynek niemiecki odpowiada aż za ok. 60% wariancji na tym rynku, gdzie tylko 33,5% wyjaśniane jest przez rynek brytyjski samodzielnie. USA wyjaśnia ok. 5% wariancji błędu prognozy indeksu z Wielkiej Brytanii. Takie wyniki potwierdzają wnioski z poprzednich analiz, gdzie Niemcy i USA były przyczyną w sensie Grangera dla Wielkiej Brytanii. Rynek brytyjski gwałtownie reagował także na impulsy ze strony obu tych rynków.

Udział Brazylii zdecydowanie przeważa w dekompozycji jej własnej wariancji błędu i wynosi on 77,82%. Za 11,29% i 6,23% w tym rozkładzie odpowiadają kolejno Niemcy i USA. Udziały Polski i Wielkiej Brytanii w całkowitej wariancji to 2,48% i 2,18%. Ogólnie rzecz biorąc, wariancja błędu rynku brazylijskiego nie zależy znacząco od pozostałych rynków.



**Rysunek 4.** Wykresy dekompozycji wariancji

Źródło: opracowanie własne

## Zakończenie

Tematem niniejszej pracy było zbadanie współzależności rynków finansowych. Analizę przeprowadzono przy użyciu modelu wektorowej autoregresji, dla pięciu wybranych indeksów giełdowych z Niemiec, USA, Polski, Wielkiej Brytanii i Brazylii w okresie od 2013 roku do końca 2019 roku. Przeprowadzone badanie wykazało, że wszystkie analizowane rynki giełdowe były ze sobą skorelowane dodatnio. Korelacje pomiędzy rynkami europejskimi były na ogół wyższe niż korelacje tych rynków z parkietami na innych kontynentach.

Wyniki przeprowadzonych badań, przedstawiły rynek niemiecki w pozycji lidera dla reszty analizowanych rynków. Potwierdzają to wyniki przyczynowości w sensie Grangera, w których rynek ten był przyczyną dla trzech z czterech pozostałych parkietów. Wszystkie rynki szybko i gwałtownie reagowały również na jednostkowe impulsy ze strony rynku niemieckiego. Rynek ten wyjaśniał także duże części wariancji pozostałych rynków: 26,8% w przypadku USA, 32% w wypadku Polski, aż 60% dla Wielkiej Brytanii i 11,4% wariancji stóp zwrotu indeksu brazylijskiego. Sam rynek niemiecki pozostawał za to obojętny na zachowania innych rynków, ponieważ ponad 96% jego wariancji było wyjaśniane przez jego własne innowacje, a funkcje odpowiedzi na impuls pokazały, że rynek ten słabo reagował na wstrząsy zaobserwowane na pozostałych rynkach.

Rynek USA również odznaczył się dość mocnym wpływem na pozostałe rynki potwierdzają to m.in. przyczynowości w sensie Grangera czy wyestymowane funkcje odpowiedzi na impuls. Pozostałe analizowane rynki tj. polski, brytyjski i brazylijski, miały znikomy wpływ na stopy zwrotu pozostałych analizowanych parkietów.

Otrzymane wyniki różnią się od rezultatów innych badaczy, w których to rynek amerykański dominował inne parkiety. Może być to spowodowane tym, że większość analizowanych w pracy rynków pochodzi z Europy, gdzie to właśnie Niemcy są najmocniejszą gospodarką. Wzięcie pod uwagę większej ilości rynków z większej ilości kontynentów zapewne zmieniłoby wyniki badań.

Wyniki badania dostarczają dowodów na to, że międzynarodowa dywersyfikacja portfeli inwestycyjnych nie przyczynia się do znaczącego zmniejszenia ryzyka inwestycyjnego, ze względu na istniejące wysokie współzależności pomiędzy rynkami finansowymi.

## Literatura

Charemza W., Deadman D., New directions in econometric practice. General to Specific Modelling, Cointegration and Vector Autoregression, Edward Elgar Publishing Limited, 1997, Cheltenham.

Chruściński T., Współzależność giełd papierów wartościowych na świecie w aspekcie procesów globalizacyjnych, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2016

Czapkiewicz A., Determinanty zmian współzależności wybranych giełd papierów wartościowych. Analiza relacji GPW w Warszawie z giełdami na świecie. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2008, Łódź.

Czapkiewicz A., Jamer P., Dynamika współzależności warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych z innymi rynkami finansowym, *Econometrics. Ekonometria. Advances in Applied Data Analytics*, 2015, (2 (48)), s. 100-113.

Domański C., Properties of Jarque-Bera test, *Acta Universitatis Lodzensis. Folia Oeconomica*, 2010, 235, s. 75-86.

Eun C., Shim S., International transmission of stock market movements, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1989, 24, s.241-256.

European Central Bank, How do stock markets react to changes in oil prices?, *Monthly Bulletin*, September 2004.

Fałdziński M., Pietrzak M., The multivariate DCC-GARCH model with interdependence among markets in conditional variances' equations, *Przegląd Statystyczny*, 2015, 62(1), s.397-413.

Garcia E., Coteria D., Mejia S., Ojeda L.A., Interdependence of the Stock Markets around the World Economía: teoría y práctica, 2015, s. 155-181.

Glezakos M., Merika A., Kaligosfiris H., Interdependence of major world stock exchanges: How is the Athens stock exchange affected, *International Research Journal of Finance and Economics*, 2007, 7.1.

- Greene W. H., *Econometric analysis*. Pearson Education Inc., 2003, Saddle River.
- Hilliard E., The relationship between equity indices on world exchanges, *The Journal of Finance* 34.1, 1979, s. 103-114.
- Kozielski P., Australia i jej rola w kształtowaniu procesów integracyjnych w obszarze Azji i Pacyfiku, CeDeWu, 2020.
- Kusideł E., *Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowania: Dane panelowe i modelowanie wielowymiarowe w badaniach ekonomicznych*, t. 3, Absolwent, 2000, Łódź.
- Ljung G., Box G., On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika* 65.2, 1978, s. 297-303.
- Lütkepohl H., *New introduction to multiple time series analysis*, Springer, 2005, Berlin.
- Malliaris A., Urrutia J., The International Crash of October 1987: Causality Tests, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1992, 22, s. 353–364.
- Osińska M., Kośko M., Stempińska J., *Ekonometria współczesna*, wyd. Dom Organizatora, TNO iK, 2007, Toruń.
- Patton A., Copula-based Models for Financial Time Series, *Handbook of financial time series*, Springer, Berlin, 2009, s. 767-785
- Pretorius E., Economic determinants of emerging stock market interdependence, *Emerging Markets Review*, 2002, 3.1, s. 96.
- Tsay R., *Analysis of financial time series*, Wiley-Interscience, 2005, Hoboken.
- Wälti S., Stock market synchronization and monetary integration, “*Journal of International Money and Finance*” 2011, 30.1, s. 96-110.
- Wójcik A., Modele wektorowo-autoregresyjne jako odpowiedź na krytykę strukturalnych wielorównaniowych modeli ekonometrycznych. *Studia Ekonomiczne*, 193, 2014, s. 112-128.

## Wykaz innych materiałów

Bivariate Granger Causality Test, <https://support.sas.com/rnd/app/ets/examples/granger/index.html>, dostęp z dnia 15.06.2022 r.

Czapkiewicz A., Ekonometria, <https://pages.mini.pw.edu.pl/~estatic/e.mini.pw.edu.pl/sites/default/files/ekonometria.pdf>, dostęp z dnia 15.06.2022 r.

Pfaff B., Stigler M., Package ‘vars’, 2021, s.31, <https://cran.r-project.org/web/packages/vars/vars.pdf>, dostęp z dnia 10.06.2022 r.

## Spis rysunków

Rysunek 1. Wykresy wahań stóp zwrotu badanych indeksów giełdowych .....	26
Rysunek 2. Wykres pierwiastków równania charakterystycznego wyestymowanego modelu VAR(2) .....	30
Rysunek 3. Wykresy funkcji odpowiedzi na impuls .....	33
Rysunek 4. Wykresy dekompozycji wariancji .....	35

## Spis tabel

Tabela 1. Statystyki opisowe stóp zwrotu badanych indeksów giełdowych .....	27
Tabela 2. Korelacje Pearsona pomiędzy stopami zwrotu badanych indeksów .....	27
Tabela 3. Wyniki testów ADF dla badanych stóp zwrotu .....	28
Tabela 4. Wyniki obliczonych kryteriów informacyjnych .....	28
Tabela 5. Wyniki wielowymiarowych testów Ljunga-Boxa i Jarque-Bera dla wyestymowanego modelu VAR(2) .....	29
Tabela 6. Wyniki przyczynowości w sensie Grangera .....	31