Sprawozdanie z zajęć laboratoryjnych nr 1

Tymoteusz Chmielecki, WFiIS AGH 10/06/2020

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda LU

Jest to metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Użyte są w niej dwie macierze trójkątne, dolna i górna (po angielku lower i upper, stąd nazwa LU). Umożliwia ona również wyliczenie wyznacznika macierzy. Dekompozycja dla macierzy A na macierze L, U taka, że:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \tag{1}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.2 Wyznaczanie rozkładu LU metodą Gaussa

Umożliwia ona wyznacznenie macierzy $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ wykorzystując metodę eliminacji Gaussa. Do macierzy którą chcemy zdekomponować, dopisujemy lewostronnie macierz jednostkową. Na prawej stronie (oryginalnej) wykonujemy operację elementarne z metody Gaussa, a po lewej (dopisanej) wpisujmey współczynniki użyte przez nas do eliminacji.

1.3 Obliczanie współczynnika macierzy po rozkładzie LU

Do obliczenia wyznacznika po rozkładzie LU, stosujemy przekształcenie wynikające z twierdzenia Cauchy'ego:

$$\det(\mathbf{LU}) = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} \tag{3}$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej to iloczyn elementów na jej przekątnej więc:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = 1 \cdot \det \mathbf{U} = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \tag{4}$$

1.4 Wskaźnik uwarunkowania

Wskaźnik uwarunkowania określa wpływ danych wejściowych na błąd wyniku. Gdy wskaźnik ma niską wartość, problem jest dobrze uwarunkowany i vice versa. Wskaźnik obliczany jest ze wzoru:

$$K_A = ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{A^{-1}}||; \quad ||\mathbf{A}||_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \tag{5}$$

1.5 Macierz odwrotna

Aby za pomocą macierzy $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ znaleźć $\mathbf{A^{-1}}$ należy rozwiązać n układów równań:

$$\mathbf{LU}\vec{x}^{\,(i)} = \vec{t}^{\,(i)}; \quad i \in [1, n] \tag{6}$$

$$\vec{t}^{\,(i)} = \begin{pmatrix} 0, & \ldots & 1, & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{LUX} = \mathbf{I}; \;\; \mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}}$$

2 Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

2.1 Zadanie

Naszym zadaniem było rozłożenie macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} & \frac{1}{1+4} \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} & \frac{1}{2+4} \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} & \frac{1}{3+4} \\ \frac{1}{4+1} & \frac{1}{4+2} & \frac{1}{4+3} & \frac{1}{4+4} \end{pmatrix} \tag{7}$$

metodą LU, następnie znaleźć jej macierz odwrotną, obliczyć jej wyznacznik oraz wskaźnik uwarunkowania.

2.2 Wyniki

a) Do wykonania zadania użyto programu napisanego w języku C. Użyto biblioteki "Numerical Recipes". Wartości elementów na diagonali $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & -0.083333 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & -0.002381 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & -0.000060 \end{pmatrix};$$

z czego używając wzoru (4) obliczamy wyznacznik:

$$\det \mathbf{A} = 0$$

Wartość macierzy odwrotnej:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 199.991684 & -1199.946899 & 2099.904785 & -1119.950562 \\ -1199.939941 & 8099.618164 & -15119.332031 & w8399.648438 \\ 2099.883057 & -15119.261719 & 29398.708984 & -16799.320312 \\ -1119.933228 & 8399.580078 & -16799.265625 & 9799.614258 \end{pmatrix}$$

Wartość iloczynu $\mathbf{AA^{-1}}$:

$$\mathbf{AA^{-1}} = \begin{pmatrix} 0.999985 & 0.000000 & -0.000977 & 0.000244 \\ -0.000015 & 1.000000 & -0.000732 & 0.000244 \\ 0.000000 & 0.000122 & 0.999756 & 0.000244 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

oraz wskaźnika uwarunkowania macierzy $||\mathbf{A}||$ oraz $||\mathbf{A^{-1}}||$:

$$||\mathbf{A}|| = 0.500000; \quad ||\mathbf{A^{-1}}|| = 29398.708984$$

$$K_A = 14699.354492$$

Wskaźnik uwarunkowania dla macierzy $\mathbf{A}$ jest stosunkowo wysoki, czego rezultat widać przy mnożeniu $\mathbf{AA^{-1}}$. Nie jest to dokładnie macierz jednostkowa, ale jej wartości są bardzo zbliżone.

3 Wnioski

Używając metody rozkładu LU dokonano dekompozycji macierzy $\mathbf{A}$, wyliczono wartość macierzy odwrotnej oraz wskaźników uwarunkowania. Duży wskaźnik uwarunkowania wskazuje na złe uwarunkowanie zadania. Można z tego wnioskować, że oprócz błędów zaokrąglania trzeba również brać pod uwagę na błędy zawarte w danych wejściowych. Metoda LU jest bardzo szybka i ułatwia znacząco obliczenia, można jednak trafić na dane wejściowe które przekreślą szansę numerycznego rozwiązania problemu.