Sprawozdanie z zajęć laboratoryjnych nr 7

Tymoteusz Chmielecki, WFiIS AGH 10/06/2020

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

Interpolacja to wyznaczanie przybliżonych wartości funkcji w punktach które są nam nieznane opierając się na znanych nam węzłach i na oszacowaniu błędu. Oznacza to więc znalezienie funkcji interpolującej $F(x)$, która zgadza się wartościami z funkcją aproksymowaną $f(x)$ w każdym z węzłów.

1.2 Interpolacja metodą Lagrange'a

Numeryczna metoda przybliżenia funkcji wielomianem Lagrange'a danego wzorem:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{k=0 \wedge k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \tag{1}$$

1.3 Wielomiany Czebyszewa

Wielomianami Czebyszewa nazywamy układy wielomianów ortagonalnych, które tworzą bazę w przestrzeni wielomianów:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

Rozwiązując to równanie rekurencyjne otrzymujemy wzór:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k}{2} \tag{2}$$

Wielomian $T_k(x)$ posiada k zer rzeczywistych w przedziale $[-1, 1]$:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j - 1}{2k} \cdot \pi\right), \quad j \in \{1, 2, ..., k\} \tag{3}$$

1.4 Efekt Rungego

Zwiększanie liczby węzłów interpolacji nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Takie zjawisko nazywamy efektem Rungego. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co szczególnie nasila się na końcach przedziałów. Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Takimi węzłami mogą być na przykład miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa n-tego stopnia.

2 Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów

2.1 Zadanie

Naszym zadaniem jest znalezienie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a dla funkcji:

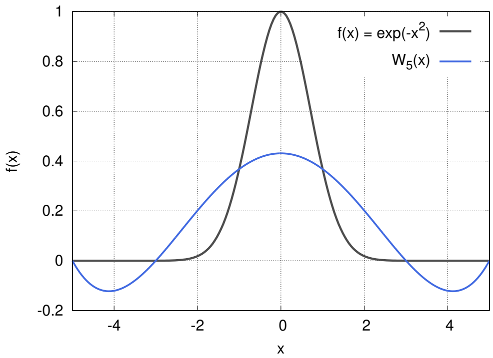
$$f(x) = exp(-x^2); \quad x \in [-5, 5] \tag{4}$$

dla $n \in 5, 10, 15, 20$ węzłów

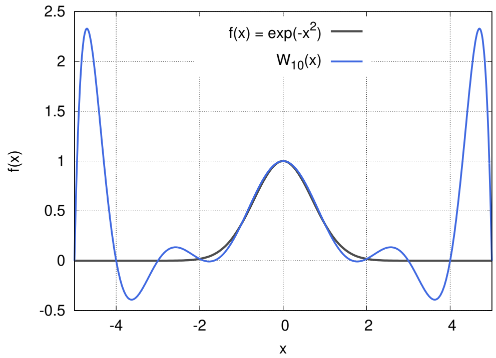
- równoodległych
- zer wielomianu Czebyszewa

2.2 Wyniki

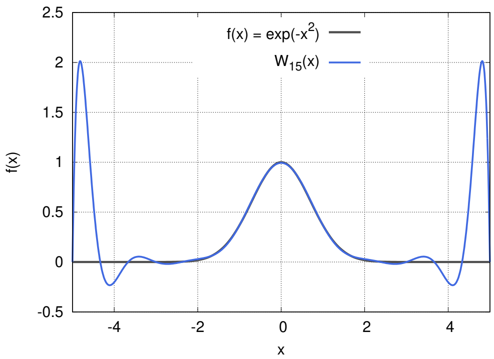
Do wykonania zadania użyto programu napisanego w języku C. Nie użyto żadnej dodatkowej biblioteki. Oto wyniki interpolacji dla n równoodległych punktów na przedziale $[-5, 5]$ dla $n \in 5, 10, 15, 20$



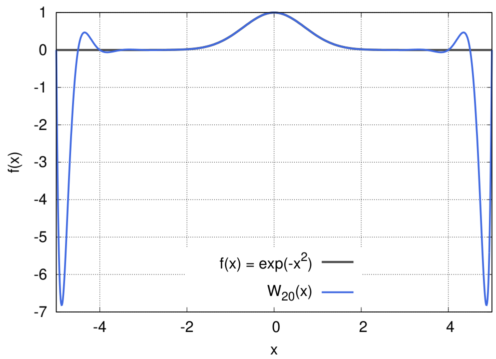
(a) Wynik interpolacji dla $n = 5$



(b) Wynik interpolacji dla $n = 10$



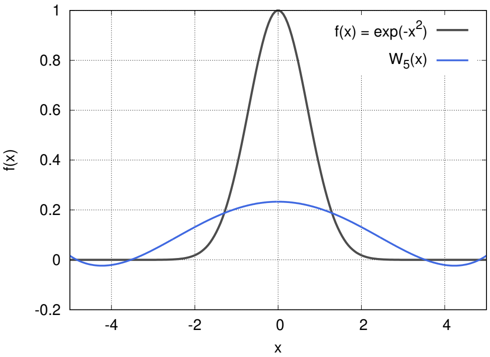
(c) Wynik interpolacji dla $n = 15$



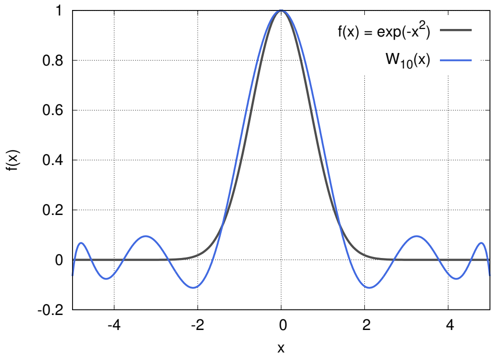
(d) Wynik interpolacji dla $n = 20$

Wykres 1: Wyniki interpolacji dla $n \in 5, 10, 15, 20$

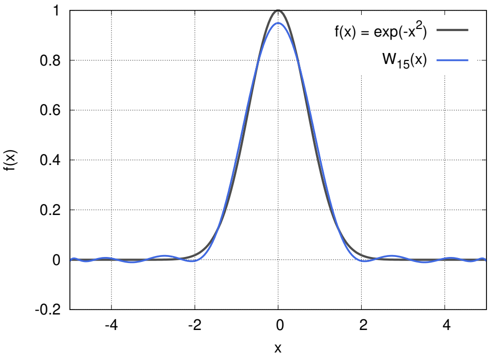
Widać, że zwiększenie ilości węzłów znacząco poprawia dopasowanie funkcji w środku przedziału, powiększając jednak błąd na jego krańcach. Jest to skutek efektu Rungego. Następnie zmieniono węzły interpolacyjne na zera wielomianu Czebyszewa (5). Oto wyniki interpolacji dla n w przedziale $[-5, 5]$ dla $n \in 5, 10, 15, 20$



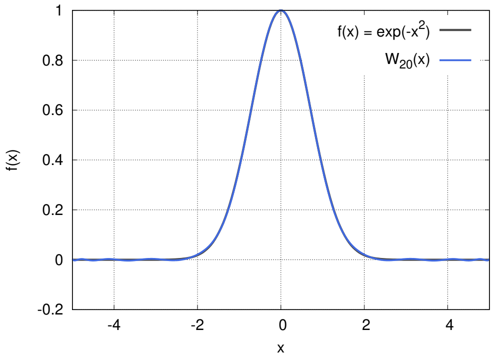
(a) Wynik interpolacji dla $n = 5$



(b) Wynik interpolacji dla $n = 10$



(c) Wynik interpolacji dla $n = 15$



(d) Wynik interpolacji dla $n = 20$

Wykres 2: Wyniki interpolacji dla $n \in 5, 10, 15, 20$

Wyraźnie widać, że interpolacja jest dużo dokładniejsza, szczególnie na końcach przedziału. Jest to oczekiwany efekt, gdyż węzły są lepiej dobrane do przeprowadzenie interpolacji.

3 Wnioski

Interpolacja wielomianowa metodą Lagrange'a jest skuteczna, lecz ważny jest dobór węzłów interpolacyjnych. Patrząc na wyniki efekt Rungego jest zdecydowanie bardziej widoczny dla tych równoodległych niż wybranych z zer wielomianu Czebyszewa. Można dostrzec pewną oscylację funkcji między węzłami, ale jest to naturalny efekt przybliżenia wielomianami.