# SPRAWOZDANIE Z ZAJĘĆ LABORATORYJNYCH № 15

Tymoteusz Chmielecki, WFiIS AGH 15/06/2020

## 1 Wstęp teoretyczny

### 1.1 Metoda Monte Carlo

Jest to metoda stosowana do matematycznego modelowanie procesów zbyt złożonych ( takich jak obliczanie całek lub łańcuchów procesów statystycznych), aby można było przewidzieć ich wyniki za pomocą podejścia analitycznego. Polega ona na losowaniu wielkości charakteryzujących proces, przy czym losowanie dokonywane jest zgodnie z ze znanym nam wcześniej rozkładem. Dokładność wyniku uzyskanego tą metodą jest zależna od liczby sprawdzeń i jakości użytego generatora liczb pseudolosowych. Zwiększanie liczby prób nie zawsze zwiększa dokładność wyniku, ponieważ generator liczb pseudolosowych ma skończony cykl. Przykładem zastosowania tej metody są obliczenia inżynierskie w których szybkość otrzymania wyniku jest ważniejsza od jego dokładności

### 1.2 Schemat Boxa-Mullera

To metoda generowania liczb losowych o rozkładzie normalnym, na bazie dwóch zmiennych o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1]. Dla $U_1$ i $U_2$ będącymi niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na (0,1], niech zmienne $R, \Theta$ dane w odpowiednim układzie współrzędnych polarnych spełniają warunki

$$\begin{aligned} R^2 &= -2 \cdot \ln U_1 \\ \Theta &= 2\pi U_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R\cos\Theta = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2) \\ Z_2 &= R\sin\Theta = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2) \end{aligned} \tag{2}$$

## 2 Całkowanie w czterech wymiarach metodą Monte Carlo

### 2.1 Zadanie

Całkę z której mieliśmy numerycznie wyznaczyć wartość określamy jako:

$$V = \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 \frac{\rho_1(\vec{r}_1)\rho_2(\vec{r}_2)}{r_{12}} \tag{3}$$

gdzie:

$$\rho_1(\vec{r}_1) = exp(-\frac{(\vec{r}_1 - \vec{R}_{10})^2}{2\sigma^2}) = exp(-\frac{(x_1 - X_{10})^2 + (y_1 - Y_{10})^2}{2\sigma^2}) \tag{4}$$

$$\rho_2(\vec{r}_2) = exp(-\frac{(\vec{r}_2 - \vec{R}_{20})^2}{2\sigma^2}) = exp(-\frac{(x_2 - X_{20})^2 + (y_2 - Y_{20})^2}{2\sigma^2}) \tag{5}$$

$$r_{12} = ||\vec{r}_1 - \vec{r}_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{6}$$

Gdy dokonamy podstawienia w całce (3) i wydzielimy funkcje wagowe (5, 6) zmianie ulega postać funkcji podcałkowej:

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2 + x_{20})^2 + (y_1 - y_2)^2}} \tag{7}$$

A więc wartość całki liczymy wykonując $n = 10^i; \;\; i \in \{2, 3, 4, 5\}$ prób, w której w każdej losujemy współrzędne $x_1, y_1, x_2, y_2$ ze wzoru Boxa-Mullera (2). Wtedy wartość funkcji podcałkowej wynosi:

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2 + x_{20})^2 + (y_1 - y_2)^2}} \tag{8}$$

Zaś wartość numeryczna całki:

$$V_{num} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i \tag{9}$$

Wyznaczamy również estymator wariancji:

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} c_i)^2) \tag{10}$$

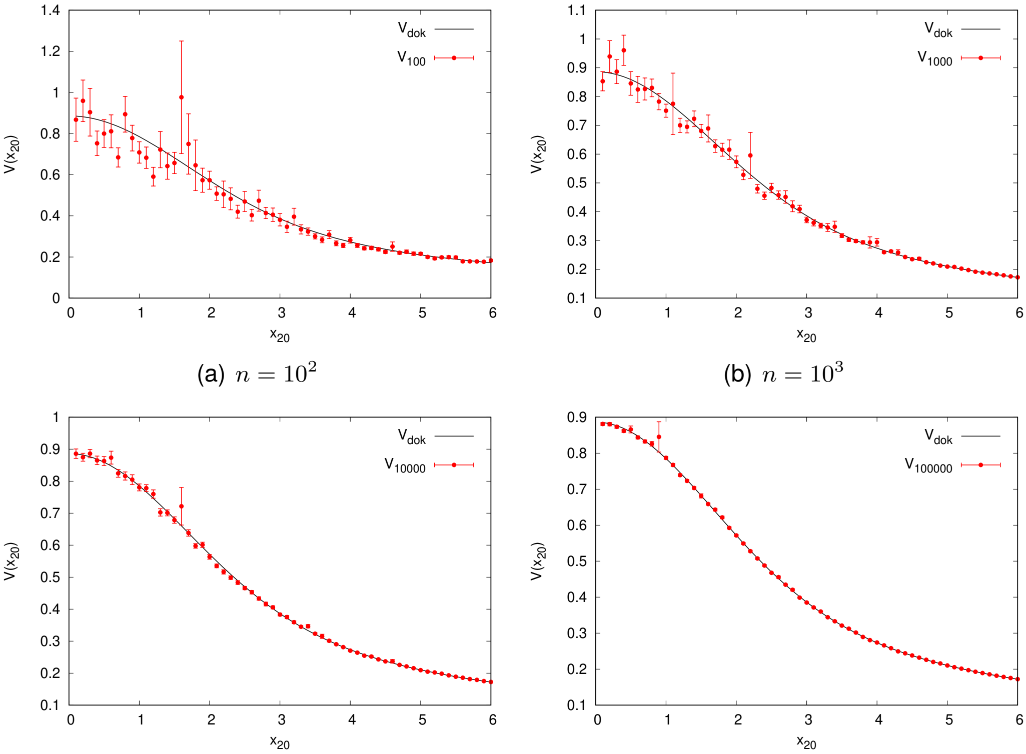
i odchylenie standardowe średniej:

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{\sigma_V^2}{n}} \tag{11}$$

Wartość $x_{20}$ przemiatamy w zakresie $[0, 6]$ z krokiem $0.1$ i dla każdej z wartości wykonujemy $n = 10^i$ prób.

## 2.2 Wyniki

Do wykonania zadania użyto programu napisanego w języku C++. Na wykresach widzimy wartości otrzymane dla każdej z wartości $x_20$ zależnie od ilości iteracji. Na każdy punkt zostało nałożona również otrzymana wartość odchylenia standardowego.




(a) $n = 10^2$ (b) $n = 10^3$

(c) $n = 10^4$ (d) $n = 10^5$

Wykres 1: Wartość obliczonej przez nas całki z zaznaczonym odchyleniem standardowym dla każdego z testowanych punktów.

Wyraźnie widać, że zwiększenie ilości iteracji dla każdego z punktów, zwiększa dokładność jego przybliżenia oraz zmniejsza odchylenie standardowe. Jest to oczekiwany wynik.

# 3 Wnioski

Obliczenie całki przy pomocy metody Monte Carlo jest stosunkowo proste w implementacji i bardzo skuteczne. Zwiększenie liczby iteracji znacząco zwiększyło dokładność aproksymacji dla punktu. Bardzo ważny jest jednak generator liczb losowy użyty do kalkulacji. Obliczenia były bardzo wydajne i nawet dla $10^5$ prób dla każdego punktu program wykonał się bardzo szybko. Oznacza to, że jest to dobra metoda, gdy chcemy zależy nam na szybkości obliczeń a nie ich dokładności.