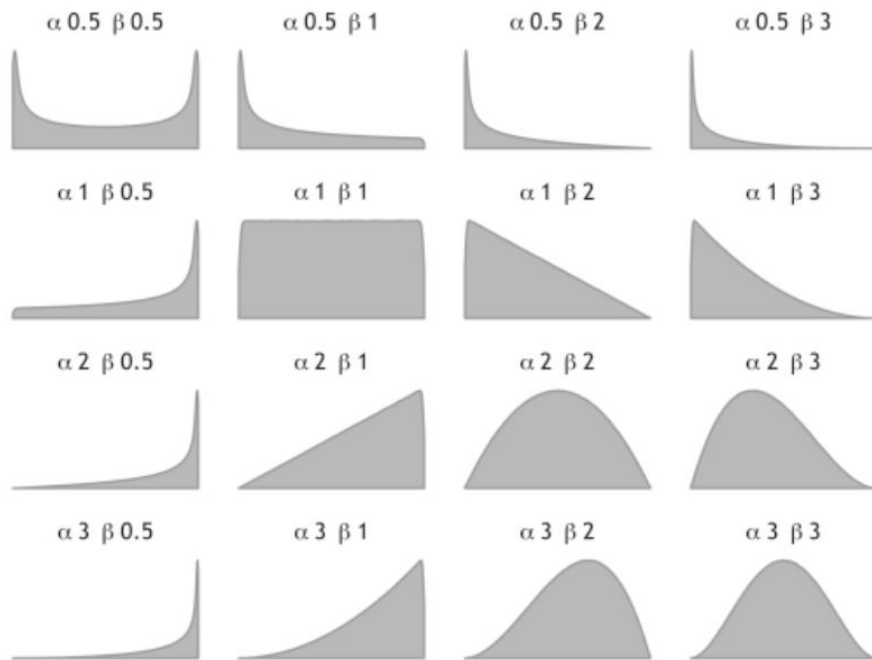


Популярные вероятностные распределения

Много копипаста из Википедии и других источников

Бета распределение

$$p(q|\alpha, \beta) \propto q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}, \quad \alpha, \beta > 0$$



**Математическое
ожидание**

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Мода

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \text{ для } \alpha > 1, \beta > 1$$

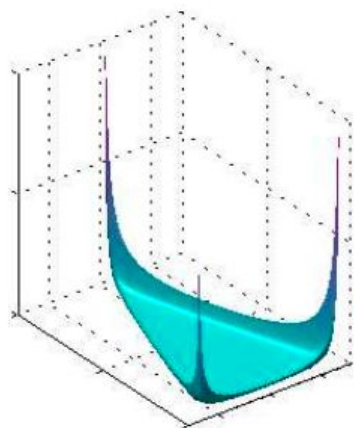
Дисперсия

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

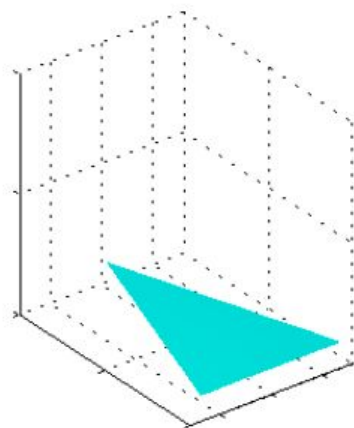
Распределение Дирихле

$$f(x_1, \dots, x_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i - 1}$$

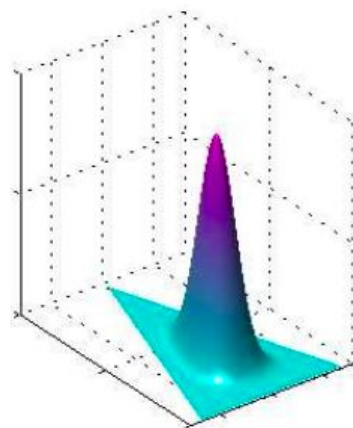
где $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^K x_i = 1$, $\alpha_i > 0$, а $B(\alpha) = \frac{\prod_{i=1}^K \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^K \alpha_i)}$ — многомерная бета-функция, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$.



(a)



(b)

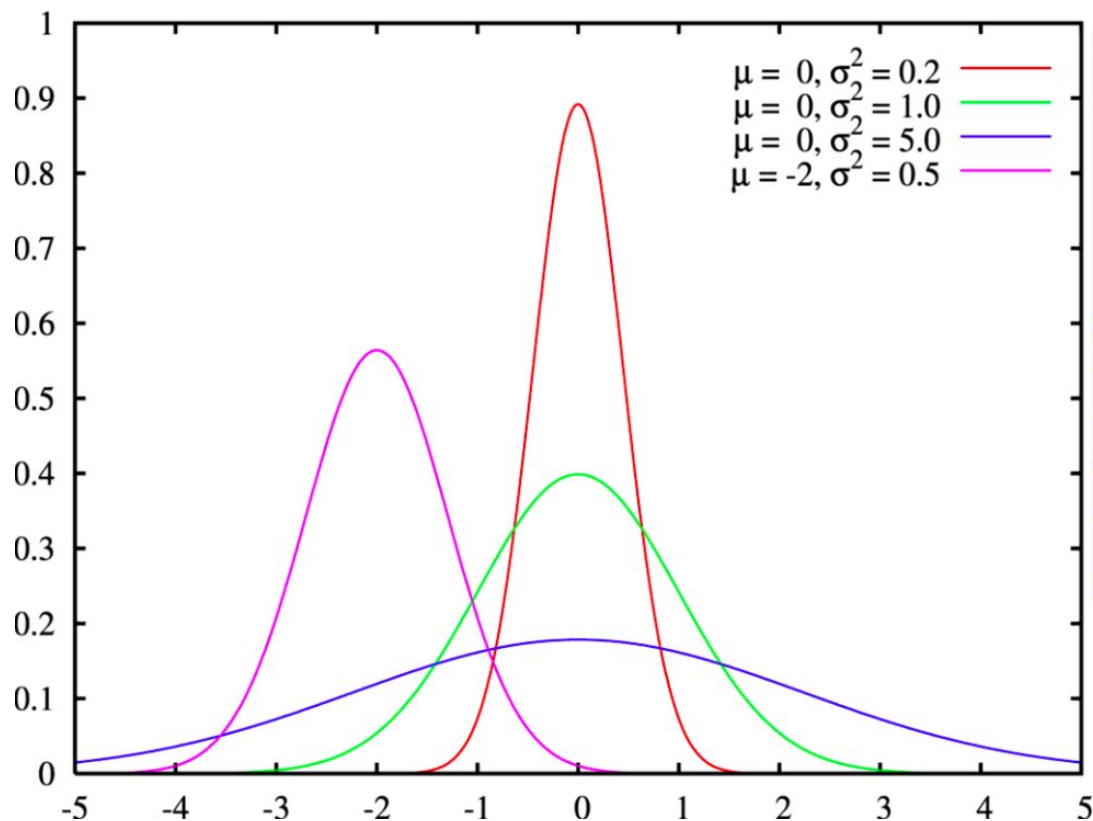


(c)

$$E[X_i | \alpha] = \frac{\alpha_i}{\alpha_0},$$

$$\text{Var}[X_i | \alpha] = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)},$$

Нормальное распределение



Обозначение

$N(\mu, \sigma^2)$

Параметры

μ — коэффициент сдвига
(вещественный)

$\sigma > 0$ — коэффициент
масштаба (вещественный,
строго положительный)

Носитель

$x \in (-\infty; +\infty)$

Математическое
ожидаие

μ

Медиана

μ

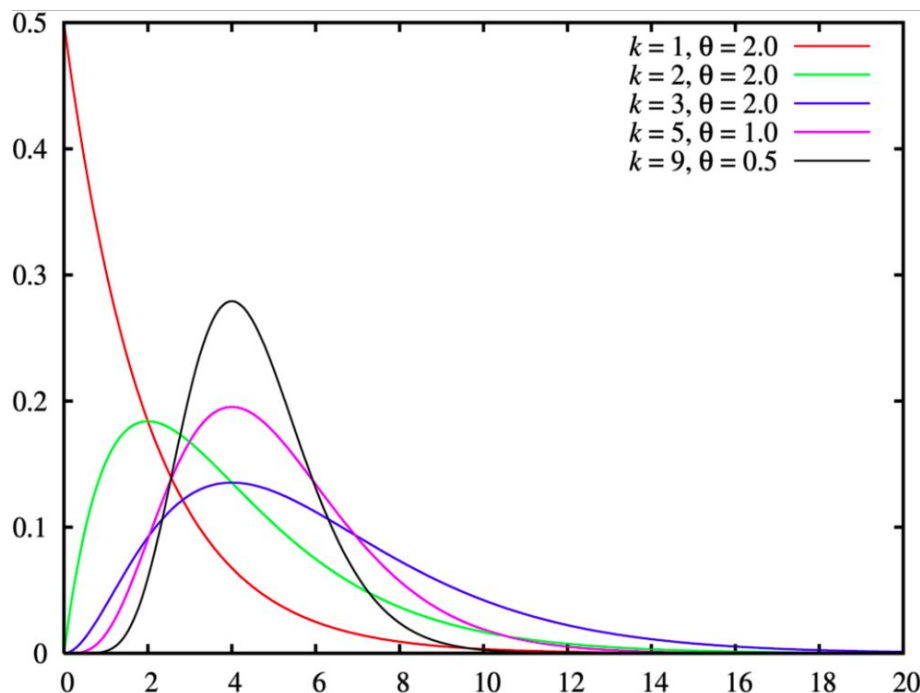
Мода

μ

Дисперсия

σ^2

Гамма распределение



Носитель $x \in [0; \infty)$

Плотность вероятности $x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k}$

**Математическое
ожидание** $k\theta$

Мода $(k-1)\theta$, когда $k \geq 1$

Дисперсия $k\theta^2$

Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения:

$$\Gamma(1, \lambda) \equiv \text{Exp}(\lambda).$$

Непрерывные распределения

Популярные распределения для разных носителей (все можно усложнять, делая смеси):

Носитель	Распределение
$[-\infty, \infty]$	Нормальное
$(0, \infty)$	Гамма
$(0, 1)$	Бета
многомерный симплекс	Дирихле

Сопряженные к дискретным распределениям

Функция правдоподобия	Параметр	Сопряжённое семейство распределений	Гиперпараметры априорного распределения	Гиперпараметры апостериорного распределения
Бернулли	p	Бета	α, β	$\alpha + \sum_{i=1}^n x_i, \beta + n - \sum_{i=1}^n x_i$
Биномиальное	p	Бета	α, β	$\alpha + \sum_{i=1}^n x_i, \beta + \sum_{i=1}^n N_i - \sum_{i=1}^n x_i$
Отрицательное биномиальное	p	Бета	α, β	$\alpha + rn, \beta + \sum_{i=1}^n x_i$
Пуассона	λ	Гамма	k, θ	$k + n, \frac{\theta}{\theta \sum_{i=1}^n x_i + 1}$
Пуассона	λ	Гамма	$\alpha, \beta^{[1]}$	$\alpha + n, \beta + \sum_{i=1}^n x_i$
Мультиномиальное	\mathbf{p} (вектор вероятностей)	Дирихле	$\vec{\alpha}$	$\vec{\alpha} + \sum_{i=1}^n \vec{x}^{(i)}$
Геометрическое	p_0 (вероятность)	Бета	α, β	$\alpha + n, \beta + \sum_{i=1}^n x_i$

Сопряженные к непрерывным распределениям

Функция правдоподобия	Параметр	Сопряжённое семейство распределений	Гиперпараметры априорного распределения	Гиперпараметры апостериорного распределения
Равномерное	$U(0, \theta)$	Парето	x_m, k	$\max\{x_{(n)}, x_m\}, k + n$
Экспоненциальное	λ	Гамма	$\alpha, \beta^{[2]}$	$\alpha + n, \beta + \sum_{i=1}^n x_i$
Нормальное с известной дисперсией σ^2	μ	Нормальное	μ_0, σ_0^2	$\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right) / \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right), \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1}$
Нормальное с известным $\tau = 1/\sigma^2$	μ	Нормальное	μ_0, τ_0	$\left(\tau_0 \mu_0 + \tau \sum_{i=1}^n x_i\right) / (\tau_0 + n\tau), \tau_0 + n\tau$
Нормальное с известным средним μ	σ^2	Scaled inverse chi-square	ν, σ_0^2	$\nu + n, \frac{\nu \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\nu + n}$
Нормальное с известным средним μ	$\tau (= 1/\sigma^2)$	Гамма	$\alpha, \beta^{[2]}$	$\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}$
Нормальное с известным средним μ	σ^2	Обратное гамма-распределение	α, β	$\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}$
Парето	k	Гамма	α, β	$\alpha + n, \beta + \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_m}$
Парето	x_m	Парето	x_0, k_0	$x_0, k_0 - kn$ при условии $k_0 > kn$.
Гамма с известной $\alpha^{[1]}$	β (inverse scale)	Гамма	α_0, β_0	$\alpha_0 + n\alpha, \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i$