

## 1 Chapter 1.C

13. 若对于  $\forall i = 1, \dots, m$ , 都有  $U_i$  为  $V$  的子空间,

求证:  $\bigcup_{i=1}^m U_i$  仍是  $V$  的子空间与  $\exists j = 1, \dots, m$ , 使得  $\forall i = 1, \dots, m, U_i \subseteq U_j$  等价.

*Proof* 充分性的证明非常显然.

若  $\forall i = 1, \dots, m, U_i \subseteq U_j$ , 则  $\bigcup_{i=1}^m U_i = U_j$ , 而  $U_j$  是  $V$  的一个子空间, 证毕.

必要性: 先来根据二元情况证明一个引理.

*lemma* 若  $V_1, V_2$  是  $V$  的子空间且  $V_1 \cup V_2$  仍为  $V$  的子空间, 则必然有  $V_1 \subseteq V_2$  或  $V_2 \subseteq V_1$ .

*Proof* 任取  $v_1 \in V_1 \setminus V_2$  和  $v_2 \in V_2 \setminus V_1$ , 考虑  $v_1 + v_2$ .

由于  $V_1 \cup V_2$  仍为  $V$  的子空间, 故有  $v_1 + v_2 \in V_1$  或  $v_1 + v_2 \in V_2$ .

若  $v_1 + v_2 \in V_1$ , 则  $v_2 = (v_1 + v_2) + (-v_1) \in V_1$ , 与  $v_2 \notin V_1$  矛盾;

若  $v_1 + v_2 \in V_2$ , 则  $v_1 = (v_1 + v_2) + (-v_2) \in V_2$ , 与  $v_1 \notin V_2$  矛盾.

因此必有  $V_1 \subseteq V_2$  或  $V_2 \subseteq V_1$ .

现在使用数学归纳法应用该引理, 先考虑  $i = 1$  的情况. 令  $V_1 = U_1, V_2 = \bigcup_{i=2}^m U_i$ .

则必有 1°  $\bigcup_{i=1}^m U_i \subseteq U_1$  或 2°  $U_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^m U_i$ .

若为 1° 则  $U_1$  即为所求, 若为 2° 则  $\bigcup_{i=2}^m U_i$  是  $V$  的子空间, 归纳继续.

设  $i = j$  时归纳继续, 即  $U_j \subseteq \bigcup_{i=j+1}^m U_i$ . 则当  $i = j + 1$  时, 令  $V_1 = U_{j+1}, V_2 = \bigcup_{i=j+2}^m U_i$ ,

仍有  $\bigcup_{i=j+2}^m U_i \subseteq U_{j+1}$  或  $U_{j+1} \subseteq \bigcup_{i=j+2}^m U_i$ , 即  $U_{j+1}$  是所求子集, 或者归纳可以继续.

由于子空间个数有限, 因此进程一定可以在某一步结束, 下证结束时找到的  $U_j$  即为所求.

不妨假设第  $j$  步找到了满足条件的  $U_j$ , 即  $U_j$  满足  $\bigcup_{i=j+1}^m U_i \subseteq U_j$ .

此时回到第  $j - 1$  步, 由于该步必定出现了 2°, 因此有  $U_{j-1} \subseteq \bigcup_{i=j}^m U_i = U_j$ , 即  $U_{j-1} \subseteq U_j$ .

随即  $\bigcup_{i=j-1}^m U_i = U_j$ , 进而  $U_{j-2} \subseteq \bigcup_{i=j-1}^m U_i = U_j$ . 以此类推,  $\forall i = 1, \dots, j - 1, U_i \subseteq U_j$ .

结合  $\bigcup_{i=j+1}^m U_i \subseteq U_j$ , 得  $\forall i = 1, \dots, m, U_i \subseteq U_j$ , 证毕.

## 2 Chapter 2.A

10. 设 $v_1, \dots, v_m$ 在 $V$ 中线性无关且 $w \in V$ .

求证: 若 $v_1 + w, \dots, v_m + w$ 线性相关, 则 $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ .

*Proof* 若 $v_1 + w, \dots, v_m + w$ 线性相关, 则有 $\sum_{i=1}^m a_i(v_i + w) = 0, \exists i = 1, \dots, m, a_i \neq 0$ .

从而 $\sum_{i=1}^m a_i v_i + w \sum_{i=1}^m a_i = 0$ .

1° 若 $\sum_{i=1}^m a_i \neq 0$ , 则 $w = -\frac{\sum_{i=1}^m a_i v_i}{\sum_{i=1}^m a_i} \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 命题得证.

2° 若 $\sum_{i=1}^m a_i = 0$ , 则 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ . 而 $v_1, \dots, v_m$ 在 $V$ 中线性无关, 故 $a_1 = \dots = a_m = 0$ .

从而 $\forall i = 1, \dots, m, a_i = 0$ , 与假设矛盾. 该情况不存在, 证毕.

14. 求证:  $V$ 是无限维向量空间等价于 $V$ 中存在无限多线性无关的向量.

*Proof* 必要性的证明是显然的, 以下使用数学归纳法证明充分性.

先看 $n = 1$ 的情况并设 $v_1 \neq 0 \in V$ .

由于 $V$ 是无限维的, 故一定存在 $v_2 \in V \notin \text{span}\{v_1\}$ , 从而 $v_1, v_2$ 线性无关.

再假设 $n = m$ 时情况成立, 即 $V$ 中存在 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关.

考虑 $n = m + 1$ 时的情况. 由于 $V$ 是无限维的, 故一定存在 $v_{m+1} \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ .

根据2.A.11,  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ 线性无关. 因此命题对任意的自然数 $m$ 均成立, 证毕.

### 3 Chapter 2.B

8. 设 $U$ 和 $W$ 都是 $V$ 的子空间, 且满足 $V = U \oplus W$ .

$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ 分别是 $U, W$ 的一组基. 求证:  $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ 是 $V$ 的一组基.

*Proof* 先证明 $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ 线性无关.

设 $\exists a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i w_i = 0$ , 即 $v = \sum_{i=1}^m a_i u_i = -\sum_{i=1}^n b_i w_i$ .

这表明 $U$ 中的某元素与 $W$ 中的某元素相等, 即 $v \in U \cap W$ .

而 $V = U \oplus W$ , 即 $V \cap W = \{0\}$ , 得 $\sum_{i=1}^m a_i u_i = -\sum_{i=1}^n b_i w_i = 0$ .

由 $u_1, \dots, u_m$ 和 $w_1, \dots, w_n$ 分别线性无关, 有 $u_1 = \dots = u_m = w_1 = \dots = w_n = 0$ , 得证.

再证 $V = \text{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ , 且 $\text{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n) \subseteq V$ 是显然的.

由 $V = U \oplus W$ , 得 $\forall v \in V, \exists u \in \text{span}(u_1, \dots, u_m), w \in \text{span}(w_1, \dots, w_n), v = u + w$ .

因此 $\forall v \in V, v \in \text{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ , 即 $V \subseteq \text{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ .

结合 $\text{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n) \subseteq V$ , 得到 $V = \text{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ , 证毕.

## 4 Chapter 2.C

10. 设  $p_0, p_1, \dots, p_m \in P(F)$ , 其中  $p_j$  是次数为  $j$  的多项式.

求证:  $p_0, p_1, \dots, p_m$  是  $P_m(F)$  的一组基.

*Proof* 使用数学归纳法. 先验证  $m = 0$  的情况, 显然成立.

随后假设  $j = m$  时结论成立, 需证  $\text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1}) = \text{span}(1, x, \dots, x^m, x^{m+1})$ .

下证  $1^\circ \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1}) \subseteq \text{span}(1, x, \dots, x^m, x^{m+1})$

并且  $2^\circ \text{span}(1, x, \dots, x^m, x^{m+1}) \subseteq \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1})$ .

$1^\circ$  的证明是显然的.  $\forall p \in \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1}), p \in P_{m+1}(F)$ .

即  $\text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1}) \subseteq \text{span}(1, x, \dots, x^m, x^{m+1})$ .

下证  $2^\circ$  成立. 设选定的  $p_{m+1} = a_{m+1}x^{m+1} + \sum_{i=0}^m a_i x^i (a_{m+1} \neq 0)$ .

变形得到  $x^{i+1} = \frac{p_{m+1} - \sum_{i=0}^m a_i x^i}{a_{m+1}} \in \text{span}(1, x, \dots, x^m, p_{m+1})$ .

而  $\text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m) = \text{span}(1, x, \dots, x^m)$ ,

故  $\text{span}(1, x, \dots, x^m, p_{m+1}) = \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1})$ .

从而  $x^{m+1} \in \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1})$ ,

进而  $\text{span}(1, x, \dots, x^m, x^{m+1}) \subseteq \text{span}(p_0, p_1, \dots, p_m, p_{m+1})$ .

如此  $1^\circ$  和  $2^\circ$  均成立且向量均线性无关, 即该张成组确实是  $P_m(F)$  的一组基.

14. 设  $U_1, \dots, U_m$  都是  $V$  的有限维子空间, 且  $U_1, \dots, U_m$  相互独立.

求证:  $\sum_{i=1}^m U_i$  是有限维向量空间, 且  $\dim \sum_{i=1}^m U_i = \sum_{i=1}^m \dim U_i$ .

*Proof* 设  $U_i$  的一组基为  $u_1^i, \dots, u_{a_i}^i$ , 则  $\sum_{i=1}^m U_i = \text{span}(u_1^1, \dots, u_{a_1}^1, \dots, u_{a_m}^1, \dots, u_{a_m}^m)$ .

因而  $\dim \sum_{i=1}^m U_i \leq \sum_{i=1}^m \dim U_i$ , 即  $\sum_{i=1}^m U_i$  是有限维向量空间.

下面使用数学归纳法, 先验证  $U_1 + U_2$  的情况.

由于  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$  且  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ,

故  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ , 从而  $n = 2$  的情况成立.

随后假设  $n = m$  时结论成立, 则当  $n = m + 1$  时,

有  $\dim(\sum_{i=1}^m U_i + U_{m+1}) = \dim \sum_{i=1}^m U_i + \dim U_{m+1} - \dim(\sum_{i=1}^m U_i \cap U_{m+1})$ .

由于  $n = m$  时结论成立, 故  $\dim \sum_{i=1}^m U_i = \sum_{i=1}^m \dim U_i$ .

又由于  $U_i$  相互独立, 故  $\sum_{i=1}^m U_i \cap U_{m+1} = \{0\}$ . 故  $\dim \sum_{i=1}^m U_i = \sum_{i=1}^m \dim U_i$ , 证毕.

## 5 Chapter 3.A

11. 设 $V$ 是有限维向量空间. 设 $U$ 是 $V$ 的一个子空间且 $S \in L(U, W)$ .

求证: 存在 $T \in L(V, W)$ , 对所有 $u \in U$ 满足 $Tu = Su$ .

*Proof* 设 $u_1, \dots, u_m$ 是 $U$ 的一组基. 由于 $U$ 是 $V$ 的一个子空间,

故存在 $v_1, \dots, v_n$ , 使得 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ 是 $V$ 的一个子空间.

随后证明 $T$ 的存在性. 设 $w_{m+1}, \dots, w_{m+n} \in W$ , 令

$$Tu_i = Su_i, i = 1, \dots, m \quad Tv_i = 0, i = m+1, \dots, m+n$$

定理3.5保证了线性变换 $T$ 的存在性. 从而对于任意的 $u = \sum_{i=1}^m a_i u_i$ , 有

$$Tu = T \sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{i=1}^m a_i Tu_i = \sum_{i=1}^m a_i Su_i = S \sum_{i=1}^m a_i u_i = Su$$

12. 设 $V$ 是维数大于0的有限维向量空间且 $W$ 是无限维向量空间.

求证:  $L(V, W)$ 是无限维向量空间.

*Proof* 根据2.A.14,

$W$ 中存在一系列向量 $w_1, w_2, \dots$ 满足对于任意的正数 $m$ , 都有 $w_1, \dots, w_m$ 线性无关.

设存在一些 $T_i$ 满足 $T_i v = w_i, i = 1, \dots, m$ .

我们需要证明对于任意的正数 $m$ , 都有 $T_1, \dots, T_m$ 线性无关.

考虑 $(\sum_{i=1}^m a_i T_i)v = 0$ , 则有 $\sum_{i=1}^m a_i (T_i v) = \sum_{i=1}^m a_i w_i = 0$ .

根据2.A.14, 有 $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 从而 $T_1, \dots, T_m$ 线性无关, 证毕.

13. 设 $v_1, \dots, v_m$ 是 $V$ 中一系列线性相关的向量且 $W \neq \{0\}$ .

求证:  $W$ 中存在 $w_1, \dots, w_m$ , 使得没有 $T \in L(V, W)$ 能满足 $\forall i = 1, \dots, m, Tv_i = w_i$ .

*Proof* 由于 $v_1, \dots, v_m$ 线性相关, 不妨令 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ 且 $a_t \neq 0$ .

下面构造 $w_1, \dots, w_m$ . 令其中 $w_t \neq 0$ , 且 $w_i = 0$ 若 $i \neq t$ .

利用反证法. 若 $Tv_i = w_i$ 对于任意的 $i = 1, \dots, m$ 均成立, 则

$$0 = T \sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i Tv_i = \sum_{i=1}^m a_i w_i = a_t w_t \neq 0$$

矛盾. 假设不成立, 原命题得证.

## 6 Chapter 3.B

3. 设  $v_1, \dots, v_m \in V$ , 定义  $T \in L(F^m, V)$  为  $T(z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^m z_i v_i$ .

(a) 若  $V = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 则  $T$  具有怎样的性质?

(b) 若  $v_1, \dots, v_m$  线性无关, 则  $T$  具有怎样的性质?

*a.Proof* 由于  $\text{Im } T = \text{span}(v_1, \dots, v_m) = V$ , 故  $T$  满射.

*b.Proof* 令  $T(z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^m z_i v_i = 0$ .

由于  $v_1, \dots, v_m$  线性无关, 故  $z_1 = \dots = z_m = 0$ , 即  $\text{Ker } T = \{0\}$ , 从而  $T$  单射.

9. 设  $T \in L(V, W)$  是单射的, 且  $v_1, \dots, v_m$  是  $V$  中一系列线性无关的向量.

求证:  $Tv_1, \dots, Tv_m$  在  $W$  中线性无关.

*Proof* 令  $\sum_{i=1}^m a_i Tv_i = T \sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ , 由于  $T$  是单射变换, 故  $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ .

而  $v_1, \dots, v_m$  线性无关, 则  $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 证毕.

10. 设  $V = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$  且  $T \in L(V, W)$ , 求证:  $\text{Im } T = \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_m)$ .

*Proof*  $\text{Im } T = \{Tv | v \in V\} = \{Tv | v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)\}$ .

$\forall u = T \sum_{i=1}^m a_i v_i \in \text{Im } T, u = \sum_{i=1}^m a_i Tv_i \in \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_m)$ ;

$\forall u = \sum_{i=1}^m a_i Tv_i \in \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_m), u = T \sum_{i=1}^m a_i v_i \in \text{Im } T$ .

因而有  $\text{Im } T \subseteq \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_m), \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_m) \subseteq \text{Im } T$ .

即  $\text{Im } T = \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_m)$ , 证毕.

12. 设  $V$  是有限维向量空间且  $T \in L(V, W)$ .

求证: 存在  $V$  的一个子空间  $U$ , 满足  $U \cap \text{Ker } T = \{0\}$  且  $\text{Im } T = \{Tu | u \in U\}$ .

*Proof* 令  $v_1, \dots, v_m$  为  $\text{Ker } T$  的一组基, 故存在线性无关的  $u_1, \dots, u_n$ ,

使得  $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n$  为  $V$  的一组基.

令  $U = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ , 则  $U \cap \text{Ker } T = \{0\}$  显然成立, 下证  $\text{Im } T = \{Tu | u \in U\}$ .

令  $\forall w \in V, \exists u \in U, v \in \text{Ker } T, w = u + v$ , 从而

$$\text{Im } T = \{Tw | w \in V\} = \{T(u + v) | u \in U, v \in \text{Ker } T\} = \{Tu | u \in U\}$$

从而  $\text{Im } T = \{Tu | u \in U\}$ , 证毕.

17. 设 $V$ 和 $W$ 是有限维的.求证: 当且仅当 $\dim V \leq \dim W$ , 存在单射的 $T \in L(V, W)$ .

*Proof* 必要性: 若存在单射的 $T \in L(V, W)$ ,

则 $\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim \text{Im } T \leq \dim W$ , 证毕.

充分性: 设 $v_1, \dots, v_m$ 和 $w_1, \dots, w_n$ 分别为 $V$ 和 $W$ 的一组基.

有 $\dim V = m \leq n = \dim W$ , 从而定义 $Tv_i = w_i, i = 1, \dots, m$ .

定理3.5保证了线性变换 $T$ 的存在性, 下证 $T$ 是单射的.

令 $T \sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i Tv_i = \sum_{i=1}^m a_i w_i = 0$ , 从而 $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 证毕.

19. 设 $V$ 和 $W$ 是有限维的,  $U$ 是 $V$ 的一个子空间.

求证: 当且仅当 $\dim U \geq \dim V - \dim W$ , 存在 $T \in L(V, W)$ , 满足 $\text{Ker } T = U$ .

*Proof* 必要性: 原式等价于 $\dim U = \dim \text{Ker } T = \dim V - \dim \text{Im } T \geq \dim V - \dim W$ , 即 $\dim \text{Im } T \leq \dim W$ , 证毕.

充分性: 设 $v_1, \dots, v_m$ 是 $U$ 的一组基.由于 $U$ 是 $V$ 的一个子空间,

故存在线性无关的 $v_{m+1}, \dots, v_{m+n}$ 使得 $v_1, \dots, v_{m+n}$ 是 $V$ 的一组基.

从而原式等价于 $m \geq (m+n) - \dim W$ , 即 $\dim W \geq n$ .令

$$Tv_i = 0, i = 1, \dots, m \quad Tv_i = w_i, i = m+1, \dots, m+n$$

定理3.5保证了线性变换 $T$ 的存在性.

$\text{Ker } T = U$ 显然成立, 同时 $\text{Im } T = \text{span}(Tv_{m+1}, \dots, Tv_{m+n})$ .

由于 $\dim \text{Im } T \leq \dim W$ , 这要求 $n \leq \dim W$ , 与条件相符.

20. 设 $V$ 和 $W$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V, W)$ .

求证:  $T$ 是单射变换与存在 $S \in L(W, V)$ 满足 $ST$ 是在 $V$ 上的单位变换等价.

*Proof* 必要性: 利用反证法.设 $T$ 不是单射变换, 即 $\exists v_\alpha, v_\beta \in V$ 满足 $Tv_\alpha = Tv_\beta$ 且 $v_\alpha \neq v_\beta$ .

$\exists S, ST = I$ , 因而有 $v_\alpha = S(Tv_\alpha) = S(Tv_\beta) = v_\beta$ .构成矛盾, 即 $T$ 为单射变换, 证毕.

充分性: 设 $v_1, \dots, v_m$ 是 $V$ 的一组基.

由于 $T$ 是单射变换, 根据3.B.9,  $Tv_1, \dots, Tv_m$ 线性无关.

因而存在 $w_1, \dots, w_n$ , 使得 $Tv_1, \dots, Tv_m, w_1, \dots, w_n$ 是 $W$ 的一组基.定义

$$S(Tv_i) = v_i, i = 1, \dots, m \quad Sw_j = 0, j = 1, \dots, n$$

定理3.5保证了线性变换 $S$ 的存在性.下证 $ST = I$ .

$$\forall v = \sum_{i=1}^m a_i v_i \in V, (ST)v = S\left(\sum_{i=1}^m a_i Tv_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i S(Tv_i) = \sum_{i=1}^m a_i v_i = v$$

21. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V, W)$ .

求证:  $T$ 是满射变换与存在 $S \in L(W, V)$ 满足 $TS$ 是在 $W$ 上的单位变换等价.

*Proof* 必要性: 利用反证法. 设 $T$ 不是满射变换, 即 $\exists w \in W, w \notin \text{Im } T$ .

$\exists S, TS = I$ , 从而 $T(Sw) = w, w \in \text{Im } T$ , 矛盾, 必要性得证.

充分性: 设 $w_1, \dots, w_m$ 是 $W$ 的一组基. 由于 $T$ 是满射变换,  $\text{Im } T = \text{span}(w_1, \dots, w_m)$ .

设 $v_1, \dots, v_m \in V, V = \text{span}(v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n)$ , 则定义

$$Sw_i = v_i, i = 1, \dots, m \quad Tv_i = w_i, i = 1, \dots, m \quad Tu_j = 0, j = 1, \dots, n$$

定理3.5保证了线性变换 $S$ 的存在性. 下证 $TS = I$ .

$$\forall w = \sum_{i=1}^m a_i w_i \in W, (TS)w = T\left(\sum_{i=1}^m a_i Sw_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i Tv_i = \sum_{i=1}^m a_i w_i = w$$

24. 设 $W$ 是有限维向量空间且 $T_1, T_2 \in L(V, W)$ .

求证:  $\text{Ker } T_1 \subseteq \text{Ker } T_2$ 的充要条件是 $\exists S \in L(W)$ , 使得 $T_2 = ST_1$ .

*Proof* 必要性: 设 $\forall v \in \text{Ker } T_1$ , 有 $T_2 v = ST_1 v = 0$ .

故 $\forall v \in \text{Ker } T_1, v \in \text{Ker } T_2$ , 即 $\text{Ker } T_1 \subseteq \text{Ker } T_2$ , 必要性得证.

充分性:  $W$ 是有限维向量空间且 $\text{Im } T_1 \subseteq W$ , 故 $\text{Im } T_1$ 也是有限维向量空间.

令 $T_1 v_1, \dots, T_1 v_m$ 是 $\text{Im } T_1$ 的一组基且 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ , 根据3.A.4,

有 $\sum_{i=1}^m a_i T_1 v_i = T_1(\sum_{i=1}^m a_i v_i) = 0$ , 得 $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 从而 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关.

令 $K = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 从而 $V = K \oplus \text{Ker } T$ . 现在定义线性变换 $S$ .

由于 $T_1 v_1, \dots, T_1 v_m$ 线性无关, 故将其补充为 $W$ 的一组基 $T_1 v_1, \dots, T_1 v_m, w_1, \dots, w_n$ .

$$S(T_1 v_i) = T_2 v_i, i = 1, \dots, m \quad Sw_j = 0, j = 1, \dots, n$$

定理3.5保证了线性变换 $S$ 的存在性. 下证 $ST_1 = T_2$ .

由于 $\forall v \in V, v = v_0 + \sum_{i=1}^m a_i v_i$ , 其中 $v_0 \in \text{Ker } T_1$ , 故

$$S(T_1 v) = S(T_1 v_0) + \sum_{i=1}^m a_i S(T_1 v_i) = \sum_{i=1}^m a_i T_2 v_i = T_2 v_0 + \sum_{i=1}^m a_i T_2 v_i = T_2 v$$

由 $\text{Ker } T_1 \subseteq \text{Ker } T_2$ , 上式成立. 因此 $\forall v \in V, ST_1 v = T_2 v$ , 证毕.



25. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T_1, T_2 \in L(V, W)$ .

求证:  $\text{Im } T_1 \subseteq \text{Im } T_2$  的充要条件是  $\exists S \in L(V)$ , 使得  $T_1 = T_2 S$ .

*Proof* 必要性: 设  $\forall v \in V$ , 有  $T_1 v = T_2 S v \in \text{Im } T_2$ .

故  $\forall v \in \text{Im } T_1, v \in \text{Im } T_2$ , 即  $\text{Im } T_1 \subseteq \text{Im } T_2$ , 必要性得证.

充分性: 设  $u_1, \dots, u_m$  是  $V$  的一组基, 从而  $\text{Im } T_1 = \text{span}(u_1, \dots, u_m) \subseteq \text{Im } T_2$ .

因此  $\exists v_1, \dots, v_m \in V$ , 使得  $T_1 u_i = T_2 v_i, i = 1, \dots, m$ . 定义  $S$  为

$$S u_i = v_i, i = 1, \dots, m$$

定理3.5保证了线性变换 $S$ 的存在性.

$$\forall u = \sum_{i=1}^m a_i u_i \in V, T_2 S \sum_{i=1}^m a_i u_i = T_2 \sum_{i=1}^m a_i (S u_i) = \sum_{i=1}^m a_i T_2 v_i = \sum_{i=1}^m a_i T_1 u_i = T_1 \sum_{i=1}^m a_i u_i$$

即  $\forall u \in V, T_1 = T_2 S$ , 充分性得证.

28. 设  $T \in L(V, W)$ , 且  $w_1, \dots, w_m$  是  $\text{Im } T$  的一组基.

求证:  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_m \in L(V, F)$ , 故  $\forall v \in V$  均满足  $T v = \sum_{i=1}^m \varphi_i(v) w_i$ .

*Proof* 由于  $w_1, \dots, w_m$  是  $\text{Im } T$  的一组基, 故  $\forall T v \in \text{Im } T, \exists ! a_i \in F$ , 使得  $T v = \sum_{i=1}^m a_i w_i$ .

因此定义  $\varphi_i(v) = a_i$  即可, 下证  $\forall i = 1, \dots, m, \varphi_i \in L(V, F)$ .

即证  $\forall i = 1, \dots, m, \forall v_\alpha, v_\beta \in V, \varphi_i(\lambda v_\alpha + \mu v_\beta) = \lambda \varphi_i(v_\alpha) + \mu \varphi_i(v_\beta)$ .

$$T(\lambda v_\alpha + \mu v_\beta) = \sum_{i=1}^m \lambda \varphi_i(v_\alpha) w_i + \sum_{i=1}^m \mu \varphi_i(v_\beta) w_i = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\lambda v_\alpha + \mu v_\beta) w_i = \lambda T v_\alpha + \mu T v_\beta$$

综上,  $\forall i = 1, \dots, m, \varphi_i \in L(V, F)$ .

29. 设  $\varphi \in L(V, F)$ . 设  $u \in V \notin \text{Ker } \varphi$ . 求证:  $V = \text{Ker } \varphi \oplus \{a u | a \in F\}$ .

*Proof* 根据3.B.12, 存在 $V$ 的一个子空间 $K$ ,

使得  $V = \text{Ker } \varphi \oplus K$  且  $\text{Im } \varphi = \{\varphi(v) | v \in K\}$ , 因此只需证明  $K = \{a u | a \in F\}$  即可.

对于  $\forall v \in K, \varphi(v) \in F$ . 而  $\varphi(u) \neq 0 \in F$ , 故  $\exists a \in F$ , 使得  $\varphi(v) = a \varphi(u) = \varphi(a u), a \neq 0$ .

所以  $\text{Im } \varphi = \{\varphi(a u) | a \in F\}$ , 即  $K = \{a u | a \in F\}$ , 证毕.

30. 设  $\varphi_1, \varphi_2 \in L(V, F)$  且  $\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2$ . 求证: 存在常数  $c \in F$ , 使得  $\varphi_1 = c \varphi_2$ .

*Proof* 若  $\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2 = V$ , 则  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , 故  $c$  可以为任意常数.

若  $\exists u \notin \text{Ker } \varphi, u \in V$ , 则根据3.B.29,  $\forall v \in V, v = v_0 + a_v u, v_0 \in \text{Ker } \varphi, a_v \in F$ .

从而  $\varphi_1(v) = \varphi_1(v_0 + a_v u) = a_v \varphi_1(u)$  并且  $\varphi_2(v) = \varphi_2(v_0 + a_v u) = a_v \varphi_2(u)$ .

$$\frac{\varphi_1(v)}{\varphi_2(v)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} = \text{cons.}$$

由于  $u \notin \text{Ker } \varphi_2$ , 故  $\varphi_2(u) \neq 0$ , 该式恒成立, 证毕.

## 7 Chapter 3.C

6. 设 $V$ 和 $W$ 都是有限维向量空间且 $T \in L(V, W)$ .

求证:  $\dim \operatorname{Im} T = 1$  等价于分别存在 $V$ 和 $W$ 的一组基, 使得 $M(T)_{i,j} = 1$ .

*Proof* 必要性: 设 $v_1, \dots, v_m$ 和 $w_1, \dots, w_n$ 分别为 $V$ 和 $W$ 的一组基,

且这两组基可以使得 $M(T)$ 中所有元素均为1.

从而有 $\forall i = 1, \dots, m, Tv_i = \sum_{i=1}^n w_i$ , 即 $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(\sum_{i=1}^m w_i)$ ,  $\dim \operatorname{Im} T = 1$ , 证毕.

充分性: 设 $\mu_1, \dots, \mu_m$ 为 $V$ 任意的一组基.

由于 $\dim \operatorname{Im} T = 1$ , 不妨设 $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(T\mu_1)$ , 即 $T\mu_2 = \dots = T\mu_m = 0$ .

则一定存在线性无关的 $w_2, \dots, w_n$ , 使得 $T\mu_1, w_2, \dots, w_n$ 是 $W$ 的一组基.

令 $w_1 = T\mu_1 - \sum_{i=2}^n w_i$ , 则 $w_1, w_2, \dots, w_n$ 也是 $W$ 的一组基.

再令 $v_1 = \mu_1, v_i = \mu_i + \mu_1, i = 2, \dots, m$ , 因而 $Tv_i = T(\mu_1 + \mu_i) = T\mu_1 = \sum_{i=1}^n w_i$ .

从而 $v_1, \dots, v_m$ 和 $w_1, \dots, w_n$ 是满足条件的基.

7. 已知 $S, T \in L(V, W)$ , 求证:  $M(S + T) = M(S) + M(T)$ .

*Proof* 设 $v_1, \dots, v_m$ 和 $w_1, \dots, w_n$ 分别为 $V$ 和 $W$ 的一组基, 并令 $M(S) = A, M(T) = C$ .

$$Sv_j = \sum_{i=1}^m A_{i,j} w_i, Tv_j = \sum_{i=1}^m C_{i,j} w_i \quad Sv_j + Tv_j = \sum_{i=1}^m (A_{i,j} + C_{i,j}) w_i = (S + T)v_j$$

$$\forall j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n, (M(S + T))_{i,j} = M(S)_{i,j} + M(T)_{i,j}$$

即 $M(S + T) = M(S) + M(T)$ , 证毕.

13. 证明矩阵加法和乘法的分配律成立.

*Proof* 即证明  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(D + E)F = DF + EF$ .

设  $A, D, E$  是  $m - n$  矩阵,  $B, C, F$  是  $n - p$  矩阵.

$$\begin{aligned}
 1^\circ (A(B + C))_{i,j} &= \sum_{k=1}^n A_{i,k}(B + C)_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}(B_{k,j} + C_{k,j}) \\
 (AB + AC)_{i,j} &= (AB)_{i,j} + (AC)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j} + \sum_{k=1}^n A_{i,k}C_{k,j} \\
 (A(B + C))_{i,j} &= (AB + AC)_{i,j} \Rightarrow A(B + C) = AB + AC \\
 2^\circ ((D + E)F)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n (D + E)_{i,k}F_{k,j} = \sum_{k=1}^n (D_{i,k} + E_{i,k})F_{k,j} \\
 (DF + EF)_{i,j} &= (DF)_{i,j} + (EF)_{i,j} = \sum_{k=1}^n D_{i,k}F_{k,j} + \sum_{k=1}^n E_{i,k}F_{k,j} \\
 ((D + E)F)_{i,j} &= (DF + EF)_{i,j} \Rightarrow (D + E)F = DF + EF
 \end{aligned}$$

15. 设  $A$  是一个  $n - n$  矩阵, 且  $1 \leq i, j \leq n$ . 求证:  $A_{i,j}^3 = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n A_{i,k}A_{k,p}A_{p,j}$ .

*Proof*

$$A_{i,j}^3 = \sum_{p=1}^n A_{i,p}^2 A_{p,j} = \sum_{p=1}^n \left( \sum_{k=1}^n A_{i,k}A_{k,p} \right) A_{p,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n A_{i,k}A_{k,p}A_{p,j}$$

## 8 Chapter 3.D

1. 设  $T \in L(U, V), S \in L(V, W)$  均可逆. 求证:  $ST \in L(U, W)$  可逆, 且  $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ .

*Proof* 先证明  $ST$  是单射变换. 令  $(ST)(u) = 0$ , 则  $S(Tu) = 0$ .

而  $\text{Ker } S = \{0\}$ , 故  $Tu = 0$ . 由于  $\text{Ker } T = \{0\}$ , 故  $u = 0$ , 得  $\text{Ker } ST = \{0\}$ , 证毕.

再证明  $ST$  是满射变换. 由于  $\text{Im } S = W$ , 故对于  $\forall w \in W$ ,  $\exists v \in V$ , 使得  $Sv = w$ .

又由于  $\text{Im } T = V$ , 故对于  $\forall v \in V$ ,  $\exists u \in U$ , 使得  $Tu = v$ .

因此,  $\forall w \in W$ ,  $\exists u \in U$ , 使得  $(ST)u = S(Tu) = Sv = w$ , 即  $\text{Im } ST = W$ .

可得  $ST$  是满射变换, 因此  $ST$  是可逆变换, 证毕.

再证  $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ . 两边同乘  $ST$ , 得

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = I = (ST)(ST)^{-1}$$

2. 设  $V$  是有限维向量空间且  $\dim V \geq 1$ .

求证  $L(V)$  中所有不可逆算子构成的集合不是  $L(V)$  的一个子空间.

*Proof* 设  $v_1, \dots, v_m$  是  $V$  的一组基. 定义

$$T_1v_1 = 0, T_1v_i = v_i, i = 2, \dots, m \quad T_2v_i = v_i, T_2v_m = 0, i = 1, \dots, m-1$$

很显然  $T_1, T_2$  都不是可逆变换, 但是  $T_1 + T_2$  是一个可逆变换, 证毕.

3. 设  $V$  是有限维向量空间且  $U$  是  $V$  的一个子空间,  $S \in L(U, V)$ .

求证:  $S$  是单射变换的充要条件是  $\exists T \in L(V)$ , 使得  $\forall u \in U, Tu = Su$ .

*Proof* 必要性的证明是显然的.

由于  $T$  是单射变换, 而  $\forall u \in U, Tu = Su$ , 故  $S$  也是单射变换.

充分性: 设  $u_1, \dots, u_m$  是  $U$  的一组基.

故存在线性无关的  $v_1, \dots, v_n$ , 使得  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  是  $V$  的一组基.

由于  $S$  是单射变换, 根据 3.B.9,  $Su_1, \dots, Su_m$  在  $V$  中线性无关.

故存在线性无关的  $w_1, \dots, w_n$ , 使得  $Su_1, \dots, Su_m, w_1, \dots, w_n$  是  $V$  的一组基.

定义线性算子  $T$ .

$$Tu_i = Su_i, i = 1, \dots, m \quad Tv_j = w_j, j = 1, \dots, n$$

很显然  $T$  是单射变换且  $T \in L(V)$ , 故  $T$  是可逆变换. 下证  $Tu = Su$ .

$$\forall u = \sum_{i=1}^m a_i u_i, Tu = T \sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{i=1}^m a_i Tu_i = \sum_{i=1}^m a_i Su_i = S \sum_{i=1}^m a_i u_i = Su$$

4. 设 $W$ 是有限维向量空间且 $T_1, T_2 \in L(V, W)$ .

求证:  $\text{Ker } T_1 = \text{Ker } T_2$ 的充要条件是存在可逆算子 $S \in L(W)$ , 使得 $T_1 = ST_2$ .

*Proof* 必要性:  $\forall \mu \in \text{Ker } T_1, T_1\mu = ST_2\mu = 0$ .

由于 $S$ 是单射变换, 故 $ST_2\mu = 0 \Rightarrow T_2\mu = 0$ , 即 $\mu \in \text{Ker } T_2$ .

综上,  $\forall \mu \in \text{Ker } T_1, \mu \in \text{Ker } T_2$ , 即 $\text{Ker } T_1 \subseteq \text{Ker } T_2$ .

同时由于 $S$ 是可逆变换, 故而可以相同方法证明 $\text{Ker } T_2 \subseteq \text{Ker } T_1$ , 得到 $\text{Ker } T_1 = \text{Ker } T_2$ .

充分性:  $W$ 是有限维向量空间且 $\text{Im } T_2 \subseteq W$ , 故 $\text{Im } T_2$ 也是有限维向量空间.

令 $T_2v_1, \dots, T_2v_m$ 是 $\text{Im } T_2$ 的一组基. 根据3.B.24和3.A.4,

令 $K = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 则 $V = \text{Ker } T \oplus K$ , 且 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关.

下证 $T_1v_1, \dots, T_1v_m$ 也线性无关. 令 $\sum_{i=1}^m a_i T_1v_i = T_1 \sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ .

由于 $\text{Ker } T_1 = \text{Ker } T_2$ 且 $\text{Ker } T \cap \text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{0\}$ , 故 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ .

结合 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关得到 $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 即 $T_1v_1, \dots, T_1v_m$ 也线性无关.

现在将 $T_2v_1, \dots, T_2v_m$ 和 $T_1v_1, \dots, T_1v_m$ 分别补充为 $W$ 的一组基

$T_2v_1, \dots, T_2v_m, w_1^\alpha, \dots, w_n^\alpha$ , 其中 $w_1^\alpha, \dots, w_n^\alpha$ 线性无关;

$T_1v_1, \dots, T_1v_m, w_1^\beta, \dots, w_n^\beta$ , 其中 $w_1^\beta, \dots, w_n^\beta$ 线性无关.

现在定义线性变换 $S$ . 令

$$S(T_2v_i) = T_1v_i, i = 1, \dots, m \quad Sw_j^\alpha = Sw_j^\beta, j = 1, \dots, n$$

定理3.5保证了线性变换的存在性.

现在证明 $S$ 是单射变换. 令 $S(\sum_{i=1}^m a_i T_2v_i + \sum_{j=1}^n b_j w_j^\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i T_1v_i + \sum_{j=1}^n b_j w_j^\beta = 0$ .

由 $T_1v_1, \dots, T_1v_m, w_1^\beta, \dots, w_n^\beta$ 线性无关, 故 $a_1 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_n = 0$ ,

即 $\text{Ker } S = \{0\}$ . 结合 $S \in L(W)$ , 根据定理3.69,  $S$ 是可逆变换.

下证 $T_1 = ST_2$ . 由于 $V = \text{Ker } T \oplus K$ , 故 $\forall v \in V, v = v_0 + \sum_{i=1}^m a_i v_i$ , 其中 $v_0 \in \text{Ker } T$ .

$$\begin{aligned} (ST_2)v &= (ST_2)(v_0 + \sum_{i=1}^m a_i v_i) = \sum_{i=1}^m a_i S(T_2v_i) = \sum_{i=1}^m a_i T_1v_i \\ &= T_1 \sum_{i=1}^m a_i v_i = T_1(\sum_{i=1}^m a_i v_i + v_0) = T_1v \end{aligned}$$

从而对于 $\forall v \in V$ ,  $T_1v = (ST_2)v$ , 即 $T_1 = ST_2$ , 证毕.

5. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T_1, T_2 \in L(V, W)$ .

求证:  $\text{Im } T_1 = \text{Im } T_2$  的充要条件是存在可逆算子 $S \in L(V)$ , 使得 $T_1 = T_2 S$ .

*Proof* 必要性:  $\forall \mu \in V$ ,  $T_1 \mu = T_2 S \mu \in \text{Im } T_2$ , 即 $\text{Im } T_1 \subseteq \text{Im } T_2$ .

又 $T_1 = T_2 S \Rightarrow T_1 S^{-1} = T_2$ , 故 $\forall \mu \in V$ ,  $T_2 \mu = T_1 S^{-1} \mu \in \text{Im } T_1$ , 即 $\text{Im } T_2 \subseteq \text{Im } T_1$ .

综上 $\text{Im } T_1 = \text{Im } T_2$ , 证毕.

充分性: 令 $w_1, \dots, w_m$ 为 $\text{Im } T$ 的一组基.

找到 $v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_m^\beta$ , 使得 $\forall i = 1, \dots, m, T_1 v_i^\alpha = w_i, T_2 v_i^\beta = w_i$ .

根据3.A.4,  $v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_m^\beta$ 分别线性无关.

现在将 $v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_m^\beta$ 分别补充成 $V$ 的一组基

$v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha, u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha$ , 其中 $u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha$ 线性无关;

$v_1^\beta, \dots, v_m^\beta, u_1^\beta, \dots, u_n^\beta$ , 其中 $u_1^\beta, \dots, u_n^\beta$ 线性无关.

根据3.B.24,  $\text{Ker } T_1 = \text{span}(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha), \text{Ker } T_2 = \text{span}(u_1^\beta, \dots, u_n^\beta)$ .

现在定义线性变换 $S$ . 令

$$S v_i^\beta = v_i^\alpha, i = 1, \dots, m \quad S u_j^\beta = u_j^\alpha, j = 1, \dots, n$$

定理3.5保证了线性变换的存在性.

现在证明 $S$ 是单射变换. 令 $S(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\beta = 0$ .

由 $v_1^\beta, \dots, v_m^\beta, u_1^\beta, \dots, u_n^\beta$ 线性无关, 故 $a_1 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_n = 0$ ,

即 $\text{Ker } S = \{0\}$ . 结合 $S \in L(V)$ , 根据定理3.69,  $S$ 是可逆变换.

下证 $T_1 = T_2 S$ .  $\forall v = \sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha \in V$ , 有

$$\begin{aligned} (T_2 S)v &= (T_2 S)\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha\right) = T_2\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\beta\right) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i T_2 v_i^\beta = T_2 \sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta = \sum_{i=1}^m a_i w_i = \sum_{i=1}^m a_i T_1 v_i^\alpha \\ &= T_1\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha\right) = T_1 v \end{aligned}$$

从而对于 $\forall v \in V$ ,  $T_1 v = (T_2 S)v$ , 即 $T_1 = T_2 S$ , 证毕.

6. 设 $V$ 和 $W$ 是有限维向量空间且 $T_1, T_2 \in L(V, W)$ .

求证:  $\dim \text{Ker } T_1 = \dim \text{Ker } T_2$  等价于存在可逆算子 $R \in L(V), S \in L(W)$ , 使得 $T_1 = ST_2R$ .

*Proof* 必要性:  $T_1 = ST_2R \Rightarrow S^{-1}T_1 = T_2R$ .

根据3.D.4,  $\text{Ker } T_1 = \text{Ker } T_2R$ . 根据3.D.5,  $\text{Im } S^{-1}T_1 = \text{Im } T_2$ .

$$\begin{aligned}\dim \text{Ker } T_1 &= \dim \text{Ker } T_2R = \dim V - \dim \text{Im } T_2R \\ &= \dim V - \dim \text{Im } T_2 = \dim \text{Ker } T_2\end{aligned}$$

充分性: 令 $v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_m^\beta$  分别为 $\text{Ker } T_1$ 和 $\text{Ker } T_2$ 的一组基.

将 $v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_m^\beta$ 分别补充成 $V$ 的一组基

$v_1^\alpha, \dots, v_m^\alpha, u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha$ , 其中 $u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha$ 线性无关;

$v_1^\beta, \dots, v_m^\beta, u_1^\beta, \dots, u_n^\beta$ , 其中 $u_1^\beta, \dots, u_n^\beta$ 线性无关.

根据3.B.9和3.B.12,  $T_1u_1^\alpha, \dots, T_1u_n^\alpha$ 是 $\text{Im } T_1$ 的一组基,  $T_2u_1^\beta, \dots, T_2u_n^\beta$ 是 $\text{Im } T_2$ 的一组基.

由于 $\text{Im } T_1, \text{Im } T_2 \subseteq W$ , 将 $T_1u_1^\alpha, \dots, T_1u_n^\alpha$ 和 $T_2u_1^\beta, \dots, T_2u_n^\beta$ 分别补充成 $W$ 的一组基

$T_1u_1^\alpha, \dots, T_1u_n^\alpha, w_1^\alpha, \dots, w_p^\alpha$ , 其中 $w_1^\alpha, \dots, w_p^\alpha$ 线性无关;

$T_2u_1^\beta, \dots, T_2u_n^\beta, w_1^\beta, \dots, w_p^\beta$ , 其中 $w_1^\beta, \dots, w_p^\beta$ 线性无关.

现在定义线性变换 $R$ 和 $S$ .令

$$\begin{aligned}Rv_i^\alpha &= v_i^\beta, i = 1, \dots, m & Ru_j^\alpha &= u_j^\beta, j = 1, \dots, n \\ S(T_2u_j^\beta) &= T_1u_j^\alpha, j = 1, \dots, m & Sw_k^\beta &= w_k^\alpha, k = 1, \dots, p\end{aligned}$$

参考3.D.4和3.D.5的证明, 显然 $R$ 和 $S$ 都是可逆变换.

下证 $T_1 = ST_2R$ .  $\forall v = \sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha$ ,

$$\begin{aligned}(ST_2R)v &= (ST_2R)\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha\right) = (ST_2)\left(\sum_{i=1}^m a_i Rv_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j Ru_j^\alpha\right) \\ &= (ST_2)\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\beta\right) = S\left(\sum_{i=1}^m a_i T_2v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_j T_2u_j^\beta\right) \\ &= \sum_{j=1}^n b_j S(T_2u_j^\beta) = \sum_{j=1}^n b_j T_1u_j^\alpha = T_1\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_j u_j^\alpha\right) = T_1v\end{aligned}$$

故 $\forall v \in V, T_1v = (ST_2R)v$ , 即 $T_1 = ST_2R$ , 证毕.

8. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V, W)$ 是一个满射变换.

求证: 存在 $V$ 的一个子空间 $U$ , 使得 $T|_U$ 是一个可逆变换.

*Proof* 令 $w_1, \dots, w_m$ 为 $\text{Im } T$ 的一组基. 找到 $v_1, \dots, v_m$ , 使得 $\forall i = 1, \dots, m, T v_i = w_i$ .

根据3.A.4,  $v_1, \dots, v_m$ 线性无关. 令 $U = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ .

下证 $T|_U$ 是一个可逆变换. 先证 $\text{Ker } T|_U = \{0\}$ . 令 $Tv = T \sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i w_i = 0$ .

由于 $w_1, \dots, w_m$ 线性无关, 故 $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 从而 $\text{Ker } T|_U = \{0\}$ , 证毕.

又因为 $\text{Im } T|_U = \text{Im } T = \text{span}(w_1, \dots, w_m)$ , 故 $T|_U$ 是满射变换. 综上,  $T|_U$ 是可逆变换.

14. 设 $v_1, \dots, v_n$ 是 $V$ 的一组基. 定义 $T \in L(V, F^{n,1})$ 为 $Tv = M(v)$ .

求证:  $T$ 是一个可逆变换.

*Proof*  $\forall v \in V, \exists c_1, \dots, c_n \in F$ , 使得 $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ . 从而

$$T \sum_{i=1}^n c_i v_i = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T$$

下证 $T$ 是单射变换. 令 $M(v) = 0$ , 则 $c_1 = \dots = c_n = 0$ , 即 $v = 0$ , 从而 $T$ 是单射变换.

再证 $T$ 是满射变换.  $\forall c_i \in F, \exists v \in V$ , 使得 $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ . 因此 $T$ 是满射变换, 证毕.

15. 证明: 若 $T \in L(F^{n,1}, F^{m,1})$ , 则存在一个 $m - n$ 矩阵 $A$ , 使得 $\forall x \in F^{n,1}, Tx = Ax$ .

*Proof* 使用 $F^{n,1}$ 和 $F^{m,1}$ 的标准基.

定义 $T$ 为 $T(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^m A_{1,i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m A_{n,i} x_i)$ . 在该定义下, 矩阵 $A$ 为

$$\begin{matrix} & x_1 & \cdots & x_n \\ \begin{matrix} T x_1 \\ \vdots \\ T x_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

因此总是存在这样的 $A_{i,j}$ , 证毕.



17. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $\varepsilon$ 是 $L(V)$ 的一个子空间,

其对所有 $S \in L(V)$ 和 $T \in \varepsilon$ 满足 $ST \in \varepsilon$ 和 $TS \in \varepsilon$ . 求证:  $\varepsilon = \{0\}$ 或 $\varepsilon = L(V)$ .

*Proof* 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $V$ 的一组基. 当 $\varepsilon = \{0\}$ 时,  $ST = TS = 0 \in \varepsilon$ 是显然的;

若 $\varepsilon \neq \{0\}$ , 则 $\exists T \in \varepsilon, T \neq 0$ . 从而 $\exists s, t \in \{1, \dots, n\}, Te_s = \sum_{i=1}^n a_i e_i, Te_s \neq 0, a_t \neq 0$ .

现在定义 $L(V)$ 的一组基. 令 $E_{i,j}e_k = \delta_{i,k}e_j$ , 其中 $\delta_{i,k}$ 是Kronecker函数.

从而当 $E_{i,j}$ 中 $i, j$ 分别取遍 $\{1, \dots, n\}$ 中每一个值时,  $E_{i,j}$ 成为 $L(V)$ 的一组基.

$$E_{t,i}TE_{i,s}e_j = E_{t,i}T(\delta_{i,j}e_s) = \delta_{i,j}E_{t,i}a_te_t = a_t\delta_{i,j}e_i$$

由于 $E_{t,i}TE_{i,s} \in \varepsilon$ 且 $\varepsilon$ 是 $L(V)$ 的子空间, 故 $\sum_{i=1}^n E_{t,i}TE_{i,s}e_j = a_t \sum_{i=1}^n \delta_{i,j}e_i$ .

由于只有 $i = j$ 时,  $\delta_{i,j} = 1$ , 因此除 $i = j$ 的其它项被消去, 得 $\sum_{i=1}^n E_{t,i}TE_{i,s}e_j = a_te_j$ .

即 $\sum_{i=1}^n E_{t,i}TE_{i,s} = a_tI$ . 因此 $a_tI \in \varepsilon \Rightarrow I \in \varepsilon$ , 故而 $\forall S \in L(V), S = SI \in \varepsilon$ , 即 $\varepsilon = L(V)$ .

19. 设 $T \in L(P(R))$ 满足 $T$ 是单射变换, 且 $\forall p \neq 0 \in P(R)$ 满足 $\deg Tp \leq \deg p$ .

(a)证明:  $T$ 是满射变换.

(b)证明: 对于任意非零多项式 $p \in P(R)$ 都有 $\deg Tp = \deg p$ .

*a.Proof* 由 $T \in L(P(R))$ 单射结合3.D.3得到 $\forall n \in N^*, T|_{P_n(R)}$ 单射.

结合定理3.69,  $T|_{P_n(R)}$ 是一个满射变换, 从而 $T$ 也是一个满射变换.

*b.Proof* 运用数学归纳法和反证法, 设 $\deg p = n + 1, \deg Tp < n + 1$ .

由3.D.19.a,  $T|_{P_n(R)}$ 满射, 故 $\exists q \in P_n(R), Tp = T|_{P_n(R)}q$ .

由 $T$ 为单射得 $p = q$ , 假设不成立, 原命题得证.

## 9 Chapter 3.E

1. 设 $T$ 是从 $V$ 到 $W$ 的映射. $T$ 的像是 $V \times W$ 的子集, 并被定义为

$$\text{graph of } T = \{(v, Tv) \in V \times W | v \in V\}$$

求证:  $T$ 是线性变换和 $\text{graph of } T$ 是 $V \times W$ 的子空间等价.

*Proof* 设 $v_1, v_2 \in V$ , 则 $(v_1, Tv_1), (v_2, Tv_2) \in \text{graph of } T$ .

若 $\text{graph of } T$ 是 $V \times W$ 的子空间, 则 $(v_1 + v_2, Tv_1 + Tv_2) \in \text{graph of } T$ .

而 $(v_1 + v_2, T(v_1 + v_2)) \in \text{graph of } T$ .

对于同一向量 $v_1 + v_2$ , 其在 $W$ 中的像必然相同, 即 $Tv_1 + Tv_2 = T(v_1 + v_2)$ .

同理 $(\lambda v, \lambda Tv) = (\lambda v, T(\lambda v))$ , 即 $T(\lambda v) = \lambda Tv$ . 因此 $T$ 是一个线性变换, 反之亦然.

4. 证明:  $\prod_{i=1}^m L(V_i, W)$ 和 $L(\prod_{i=1}^m V_i, W)$ 同构.

*Proof* 定义 $v = (v_1, \dots, v_m) \in \prod_{i=1}^m V_i$ , 其中 $v_i \in V_i$ .

定义投影映射 $R_j^P \in L(\prod_{i=1}^m V_i, V_j)$ 为 $R_j^P(v) = v_j$ . 验证 $R_j^P$ 的线性性.

$$R_j^P(c^\alpha v^\alpha + c^\beta v^\beta) = c^\alpha v_j^\alpha + c^\beta v_j^\beta = c^\alpha R_j^P v^\alpha + c^\beta R_j^P v^\beta.$$

定义 $S = (S_1, \dots, S_m) \in \prod_{i=1}^m L(V_i, W)$ , 其中 $S_j \in L(V_j, W)$ .

定义 $\Gamma \in L(\prod_{i=1}^m L(V_i, W), L(\prod_{i=1}^m V_i, W))$ 为 $\Gamma(S) = \sum_{i=1}^m S_i \circ R_i^P$ . 验证 $\Gamma$ 的线性性.

$$\Gamma(c^\alpha S^\alpha + c^\beta S^\beta) = c^\alpha \sum_{i=1}^m (S_i^\alpha \circ R_i^P) + c^\beta \sum_{i=1}^m (S_i^\beta \circ R_i^P) = c^\alpha \Gamma(S^\alpha) + c^\beta \Gamma(S^\beta)$$

定义嵌入映射 $R_j^I \in L(V_j, \prod_{i=1}^m V_i)$ 为 $R_j^I(v_j) = (0, \dots, v_j, \dots, 0)$ . 验证 $R_j^I$ 的线性性.

$$R_j^I(c^\alpha v_j^\alpha + c^\beta v_j^\beta) = (0, \dots, c^\alpha v_j^\alpha + c^\beta v_j^\beta, \dots, 0) = c^\alpha R_j^I v_j^\alpha + c^\beta R_j^I v_j^\beta.$$

$\forall v_i \in V_i$ , 定义 $S_i \in L(V_i, W)$ 为 $S_i = T \circ R_i^I$ , 其中 $T \in L(\prod_{i=1}^m V_i, W)$ .

定义 $\psi \in L(L(\prod_{i=1}^m V_i, W), L(\prod_{i=1}^m V_i, W))$ 为 $\psi(T) = (S_1, \dots, S_m) = S$ . 验证 $\psi$ 的线性性.

$$\psi(c^\alpha T^\alpha + c^\beta T^\beta) = c^\alpha S^\alpha + c^\beta S^\beta = c^\alpha \psi(T^\alpha) + c^\beta \psi(T^\beta)$$

下面验证 $\psi \circ \Gamma$ 和 $\Gamma \circ \psi$ 是单位变换.

$$(\psi \circ \Gamma)(S) = \psi \sum_{i=1}^m S_i \circ R_i^P = \psi \sum_{i=1}^m T \circ R_i^I \circ R_i^P = \psi(T) = S$$

$$(\Gamma \circ \psi)(T) = \Gamma(S) = \sum_{i=1}^m S_i \circ R_i^P = \sum_{i=1}^m T \circ R_i^I \circ R_i^P = T$$

这里的嵌入映射和投影映射相当于 $\Gamma$ 和 $\psi$ 的“受体”.

6. 证明:  $V^n$ 和 $L(F^n, V)$ 同构.

*Proof* 定义 $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ , 其中 $v_i \in V_i$ ; 定义 $x = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$ , 其中 $x_i \in F$ .

定义投影映射 $R_j \in (F^n, V)$ 为 $R_j(x) = x_j v_j$ . 验证 $R_j$ 的线性性.

$$R_j(c^\alpha x^\alpha + c^\beta x^\beta) = (c^\alpha x_j^\alpha + c^\beta x_j^\beta) v_j = c^\alpha R_j(x^\alpha) + c^\beta R_j(x^\beta).$$

定义 $\Gamma \in L(V^n, L(F^n, V))$ 为 $\Gamma(v) = \sum_{i=1}^n R_i$ . 验证 $\Gamma$ 的线性性.

$$\Gamma(c^\alpha v^\alpha + c^\beta v^\beta) = \sum_{i=1}^n (c^\alpha R_i^\alpha + c^\beta R_i^\beta) = c^\alpha \sum_{i=1}^n R_i^\alpha + c^\beta \sum_{i=1}^n R_i^\beta = c^\alpha \Gamma(v^\alpha) + c^\beta \Gamma(v^\beta)$$

下面证明 $\Gamma$ 是单射变换. 令 $\sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$ . 定义 $e_1, \dots, e_n \in F^n$ 是 $F^n$ 的标准基.

令 $x_i = e_i$ , 则可得 $\forall i = 1, \dots, n, v_i = 0$ , 即 $v = 0$ .

下面证明 $\Gamma$ 是满射变换.  $\forall R \in L(F^n, V)$ , 定义 $v \in V^n$ 为 $v = (Re_1, \dots, Re_n)$ , 考虑 $(\Gamma(v))(x)$ .

$$\forall x \in F^n, (\Gamma(v))(x) = (\sum_{i=1}^n Re_i)(x) = R \sum_{i=1}^n x_i e_i = R(x).$$

因此 $\forall R \in L(F^n, V), \exists v = (Re_1, \dots, Re_n)$ , 使得 $\Gamma(v) = R$ , 证毕.

7. 设 $U$ 和 $W$ 是 $V$ 的子空间,  $v \in V, u \in U, v + U = u + W$ , 求证:  $U = W$ .

*Proof*  $U = (u - v) + W$ 是 $V$ 的子空间, 即 $u - v \in W \Rightarrow U = W$ .

8. 证明:  $V$ 的非空子集 $A$ 是 $V$ 的仿射集的充要条件是 $\forall v, w \in A, \lambda \in F, \lambda v + (1 - \lambda)w \in A$ .

*Proof* 充分性: 设 $A = a + U$ , 其中 $a \in A$ 且 $U$ 是 $V$ 的一个子空间.

故存在 $v, w \in A$ , 满足 $v = a + u_1, w = a + u_2$ ,

$$\text{得 } \lambda(a + u_1) + (1 - \lambda)(a + u_2) = a + (\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \in A.$$

必要性: 即存在 $a \in A$ 和 $V$ 的一个子空间 $U$ , 使得 $v - a \in U, w - a \in U$ .

$$\text{从而 } \forall c_1, c_2 \in F, \frac{c_1}{c_1 + c_2}(v - a) + \frac{c_2}{c_1 + c_2}(w - a) \in U.$$

$$\text{令 } \frac{c_1}{c_1 + c_2} = \lambda, \text{ 则 } \frac{c_2}{c_1 + c_2} = 1 - \lambda, \text{ 有 } \lambda(v - a) + (1 - \lambda)(w - a) = \lambda v + (1 - \lambda)w - a \in U.$$

从而 $\lambda v + (1 - \lambda)w \in a + U = A$ , 即 $A$ 是 $V$ 的一个仿射集.

这是仿射集的第二定义.

9. 设 $A_1$ 和 $A_2$ 是 $V$ 的仿射集.求证:  $A_1 \cap A_2 = \phi$ 或也是仿射集.

*Proof*  $A_1 \cap A_2 = \phi$ 的情况是平凡的.

考虑 $A_1 \cap A_2 \neq \phi$ .若 $A_1 \cap A_2 = \{v\}$ , 则 $A_1 \cap A_2$ 是仿射集.

若交集不止一点, 则取 $v, w \in A_1 \cap A_2$ , 根据3.E.8,

$\forall v, w \in A_1(A_2), \lambda \in F, \lambda v + (1 - \lambda)w \in A_1(A_2)$ , 从而 $\lambda v + (1 - \lambda)w \in A_1 \cap A_2$ .

即 $A_1 \cap A_2$ 是仿射集, 证毕.

11. 设 $v_1, \dots, v_m \in V$ , 令 $A = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$ .

(a)证明:  $A$ 是 $V$ 的一个仿射集.

(b)证明:  $V$ 中任意包含 $v_1, \dots, v_m$ 的仿射集都必然包含 $A$ .

(c)证明:  $V$ 中存在某个向量 $v$ 和某个满足 $\dim U \leq m - 1$ 的子空间 $U$ , 使得 $A = v + U$ .

*a.Proof* 取 $A$ 中的两点 $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$ , 考虑 $\gamma \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$ .

由于 $\gamma \sum_{i=1}^m \lambda_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ , 故根据3.E.8,

$\gamma \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^m \mu_i v_i \in A$ , 即 $A$ 是 $V$ 的一个仿射集.

*b.Proof* 根据3.E.11.a,  $A$ 是一个仿射集,

因此存在 $u_0 \in V$ 和 $V$ 的一个子空间 $U$ , 满足 $A = u_0 + U$ .

因此 $\forall i = 1, \dots, m$ , 都有 $u_i \in U$ , 使得 $v_i = u_0 + u_i$ . 考虑 $\forall v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in A$ .

将 $v_i = u_0 + u_i$ 代入, 有 $\sum_{i=1}^m \lambda_i (u_0 + u_i) = u_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i$ . 因此 $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in U$ .

同时,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in \text{span}(u_1, \dots, u_m)$ , 因此 $U \subseteq \text{span}(u_1, \dots, u_m)$ .

根据定理2.7,  $\text{span}(u_1, \dots, u_m)$ 是能包含 $u_1, \dots, u_m$ 的最小子空间.

能够包含 $u_1, \dots, u_m$ 的子空间必然包含 $U$ , 也即能够包含 $v_1, \dots, v_m$ 的仿射集必然包含 $A$ .

*c.Proof* 将3.E.11.a中的 $u_0$ 替换成 $v_1$ , 则 $\forall i = 2, \dots, m, u_i = v_i - v_1$ .

因此 $A = u_0 + U = u_0 + \text{span}(u_1, \dots, u_m) = v_1 + \text{span}(v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1)$ .

显然,  $U$ 就是满足要求的子空间.

12. 设 $U$ 是 $V$ 的一个子空间且 $V/U$ 是有限维向量空间, 求证:  $V$ 和 $U \times (V/U)$ 同构.

*Proof* 根据定理2.34, 存在 $V$ 的一个子空间 $W$ , 使得 $V = U \oplus W$ ,

从而 $\forall v \in V, \exists! u \in U, w \in W, v = u + w$ .

现在定义 $T \in L(V, U \times (V/U))$ 为 $Tv = (u, v + U)$ , 令 $Tv = 0$ , 则 $u = 0$ 且 $v + U = 0 + U$ .

由于 $v + U = w + u + U = w + U$ 且 $w \notin U$ , 得 $w = 0$ , 从而 $\text{Ker } T = \{0\}$ , 即 $T$ 为单射变换.

由 $\dim(U \times (V/U)) = \dim V$ 得到 $T$ 是满射变换.综上,  $T$ 为可逆变换, 证毕.

13. 设 $U$ 是 $V$ 的一个子空间且 $v_1 + U, \dots, v_m + U$ 是 $V/U$ 的一组基,  
 $u_1, \dots, u_n$ 是 $U$ 的一组基. 求证:  $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n$ 是 $V$ 的一组基.

*Proof* 先证 $V = \text{span}(v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n)$ .

$\forall v + U \in V/U, \exists a_i \in F$ , 使得 $v + U = \sum_{i=1}^m a_i(v_i + U) = \sum_{i=1}^m a_i v_i + U$ .

从而 $v - \sum_{i=1}^m a_i v_i \in U$ , 即 $\exists u \in \text{span}(u_1, \dots, u_n) \in U, v - \sum_{i=1}^m a_i v_i = u$ .

最终 $v = \sum_{i=1}^m a_i v_i + u \in \text{span}(v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n)$ , 证毕.

再证 $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n$ 线性无关. 由于 $v_1 + U, \dots, v_m + U$ 是 $V/U$ 的一组基,

故 $\sum_{i=1}^m a_i(v_i + U) = U \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$ .

因此 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关且 $\text{span}(v_1, \dots, v_m) \cap U = \{0\}$ .

根据定理2.34和2.B.8,  $V = \text{span}(v_1, \dots, v_m) \oplus U$ , 即 $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n$ 是 $V$ 的一组基.

14. 设 $U = \{(x_1, x_2, \dots) \in F^\infty | x_i \neq 0\}$ 只对有限多的 $i$ 成立.

(a) 证明 $U$ 是 $F^\infty$ 的一个子空间.

(b) 证明 $F^\infty/U$ 是无限维向量空间.

*a.Proof*  $U$ 中任意元素的加法或数乘都不会使得其中的非零元素增加到无限多个.

*b.Proof* 我们的目标是构造一系列无限长的向量 $e_1, \dots, e_m, \dots \notin U$ ,

使得 $e_1 + U, \dots, e_m + U, \dots$ 线性无关. 从而根据2.A.14,  $F^\infty/U$ 是无限维向量空间.

令 $e(p)$ 是 $e$ 中第 $p$ 个槽里的数字. 构造向量列 $e_m(p)$

$$\begin{aligned} e_m(p) &= 1, \text{ if } (p-1) \bmod m = 0 \\ &= 0, \text{ otherwise} \end{aligned}$$

可以证明这些向量线性无关, 从而完成证明.

18. 设 $U$ 是 $V$ 的一个子空间且 $V/U$ 是有限维向量空间.

求证: 存在 $V$ 的另一个子空间 $W$ , 使得 $\dim W = \dim V/U$ 且 $V = U \oplus W$ .

*Proof* 由于 $V/U$ 是有限维向量空间, 设 $v_1 + U, \dots, v_m + U$ 是 $V/U$ 的一组基.

从而 $\forall v + U \in V/U, v + U = \sum_{i=1}^m a_i(v_i + U) = \sum_{i=1}^m a_i v_i + U$ .

即 $v - \sum_{i=1}^m a_i v_i = u \in U, v = \sum_{i=1}^m a_i v_i + u$ , 得到 $V = \text{span}(v_1, \dots, v_m) + U$ .

下证 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关且 $\text{span}(v_1, \dots, v_m) \cap U = \{0\}$ .

$\sum_{i=1}^m a_i(v_i + U) = \sum_{i=1}^m a_i v_i + U = U \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$ , 即 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关.

使用反证法. 若 $v_0 \neq 0 \in \text{span}(v_1, \dots, v_m) \cap U$ , 即存在至少一个 $a_i \neq 0$ , 使得 $v_0 = \sum_{i=1}^m a_i v_i$ .

然而 $v_0 \in U \Rightarrow v_0 + U = U \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$ .

矛盾, 假设不成立, 令 $W = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 原命题即得证.

19. 设 $T \in L(V, W)$ 且 $U$ 是 $V$ 的一个子空间. 令 $\pi$ 指代从 $V$ 到 $V/U$ 的商变换.

求证: 存在 $S \in L(V/U, W)$ 满足 $T = S \circ \pi$ 是 $U \subseteq \text{Ker } T$ 的充要条件.

*Proof* 必要性: 设存在 $S \in L(V/U, W)$ 满足 $T = S \circ \pi$ ,

则对于 $\forall u \in U$ , 都有 $Tu = S \circ \pi(u) = S(0) = 0$ . 即 $\forall u \in U, u \in \text{Ker } T$ , 证毕.

充分性: 定义 $S \in L(V/U, W)$ 为 $S(v + U) = Tv$ .

为了验证定义的合法性, 设 $v_1 + U = v_2 + U$ , 需证明 $Tv_1 = Tv_2$ .

$v_1 + U = v_2 + U \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \subseteq \text{Ker } T$ , 因此 $T(v_1 - v_2) = 0$ , 即 $Tv_1 = Tv_2$ .

因此,  $S \circ \pi(v) = S(v + U) = Tv$ , 证毕.

20. 设 $U$ 是 $V$ 的一个子空间. 定义 $\Gamma \in L(L(V/U, W), L(V, W))$ 为 $\Gamma(S) = S \circ \pi$ .

(a) 证明 $\Gamma$ 是线性变换.

(b) 证明 $\Gamma$ 是单射变换.

(c) 证明 $\text{Im } \Gamma = \{T \in L(V, W) | \forall u \in U, Tu = 0\}$ .

*a.Proof*

$$\Gamma(\lambda S_1 + \mu S_2) = (\lambda S_1 + \mu S_2) \circ \pi$$

$$\lambda S_1 \circ \pi + \mu S_2 \circ \pi = \lambda \Gamma(S_1) + \mu \Gamma(S_2)$$

*b.Proof* 令 $\Gamma(S)(v) = S \circ \pi(v) = S(v + U) = 0$ .

由于对于 $\forall v + U \in V/U, S(v + U) = 0$ , 故 $S = 0$ , 即 $\text{Ker } \Gamma = 0$ , 证毕.

*c.Proof* 若 $T \in \text{Im } \Gamma$ , 则 $\exists S \in L(V/U, W)$ , 使得 $T = S \circ \pi$ .

根据3.E.18,  $U \subseteq \text{Ker } T$ . 因此对于 $\forall T \in \text{Im } \Gamma$ , 有 $\forall u \in U, Tu = 0$ .

## 10 Chapter 4

*Theorem 4.8.* 设  $p, s \in P(F), s \neq 0$ , 则存在唯一的  $q, r \in P(F)$  使得  $p = sq + r, \deg r < \deg s$ .

*Proof* 令  $\deg p = n, \deg s = m$ . 由  $\deg p = \deg s + \deg q, \deg r < \deg s$ .

因此  $q \in P_{n-m}(F), r \in P_{m-1}(F)$ . 定义  $T : P_{n-m}(F) \times P_{m-1}(F) \rightarrow P_n(F)$  为

$$T(q, r) = sq + r = p$$

首先验证该变换是线性变换.

$$\begin{aligned} T(c_1q_1 + c_2q_2, c_1r_1 + c_2r_2) &= s(c_1q_1 + c_2q_2) + (c_1r_1 + c_2r_2) \\ &= c_1(sq_1 + r_1) + c_2(sq_2 + r_2) = c_1T(q_1, r_1) + c_2T(q_2, r_2) \end{aligned}$$

如果该变换是一个单射变换, 则对于任意给定的  $p, s$ , 其商多项式和余数多项式均唯一;  
如果该变换是一个满射变换, 则对于任意给定的  $p, s$ , 都有对应的商多项式和余数多项式.  
下面将证明两条性质都是成立的, 先从单射开始.

令  $sq + r = p = 0$ . 由于  $\deg r < \deg sq$ , 因此  $sq \neq -r \Rightarrow sq = 0 \wedge r = 0 \Rightarrow q = 0 \wedge r = 0$ .

即  $T$  是单射变换, 且下证该变换是满射变换.

$$\begin{aligned} \dim (P_{n-m}(F) \times P_{m-1}(F)) &= \dim P_{n-m}(F) + \dim P_{m-1}(F) \\ &= (n - m + 1) + (m - 1 + 1) = n + 1 = \dim P_n(F) \end{aligned}$$

两者采用的标准基一致, 因此根据定理2.41,  $\dim \text{Im } T = \dim P_n(F)$ , 从而  $T$  是满射变换.  
于是  $T$  是可逆变换, 存在性和唯一性均得证.

## 11 Chapter 5.A

1. 设  $T \in L(V)$  且  $U$  是  $V$  的一个子空间.

(a) 证明: 若  $U \subseteq \text{Ker } T$ , 则  $U$  是  $T$  的不变子空间.

(b) 证明: 若  $\text{Im } T \subseteq U$ , 则  $U$  是  $T$  的不变子空间.

a. Proof  $\forall u \in U, Tu = 0 \in U$ .

b. Proof  $\forall u \in U, Tu \in \text{Im } T \subseteq U$ .

2. 设  $S, T \in L(V)$  满足  $ST = TS$ .

(a) 证明:  $\text{Ker } S$  是  $T$  的不变子空间.

(b) 证明:  $\text{Im } S$  是  $T$  的不变子空间.

a. Proof  $\forall v \in \text{Ker } S, Sv = 0 \Rightarrow STv = TSv = 0 \Rightarrow Tv \in \text{Ker } S$ .

b. Proof  $\forall Sv \in \text{Im } S, T(Sv) = S(Tv) \in \text{Im } S$ .

4. 设  $T \in L(V)$  且  $U_1, \dots, U_m$  都是  $V$  的不变子空间. 求证:  $\sum_{i=1}^m U_i$  是  $V$  的不变子空间.

Proof 由于  $\forall u \in \sum_{i=1}^m U_i, \exists u_i \in U_i, u = \sum_{i=1}^m u_i$  且  $U_1, \dots, U_m$  都是  $V$  的不变子空间, 得到  $\forall i = 1, \dots, m, Tu_i \in U_i, Tu = \sum_{i=1}^m Tu_i \in \sum_{i=1}^m U_i$ .

5. 设  $T \in L(V)$  且  $U_1, \dots, U_m$  都是  $V$  的不变子空间. 求证:  $\bigcap_{i=1}^m U_i$  是  $V$  的不变子空间.

Proof 设  $u \in \bigcap_{i=1}^m U_i$ , 则  $\forall i = 1, \dots, m, Tu \in U_i$ . 因此  $\forall u \in \bigcap_{i=1}^m U_i, Tu \in \bigcap_{i=1}^m U_i$ , 证毕.

6. 证明或给出反例: 若  $V$  是有限维向量空间且  $V$  是  $U$  的一个子空间.

若  $U$  满足对于  $V$  上的任意算子  $T$ ,  $U$  都是  $T$  的不变子空间, 则有  $U = \{0\}$  或  $U = V$ .

Proof 由于  $U$  是  $V$  的一个子空间且  $V$  是有限维向量空间, 不妨设  $\{0\} \subset U \subset V$ .

令  $u_1, \dots, u_m$  为  $U$  的一组基,  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$  是  $V$  的一组基.

故一定存在  $T \in L(V)$ , 使得  $Tu_i = v_j \notin U, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

从而  $U$  不是不变子空间, 因此  $U$  只能为  $\{0\}$  或  $V$ .

8. 定义  $T \in L(F^2)$  为  $T(w, z) = (z, w)$ . 给出  $T$  的所有特征值和特征向量.

Proof 设  $T(w, z) = \lambda(w, z)$ , 得到  $\lambda w = z$  且  $\lambda z = w$ , 联立得到  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .

当  $\lambda = 1$  时, 对应的特征向量为  $(1, 1)$ ; 当  $\lambda = -1$  时, 对应的特征向量为  $(1, -1)$ .



10. 定义  $T \in L(F^n)$  为  $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, nx_n)$ .

(a) 给出  $T$  的所有特征值和特征向量.

(b) 给出  $T$  的所有不变子空间.

*a.Proof*  $T(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (x_1, \dots, nx_n)$ . 因此只能有  $\lambda_i = i, x_{j \neq i} = 0$ .  
故  $T$  共有  $n$  个特征值  $1, \dots, n$ , 第  $i$  个特征值对应的特征向量是  $(0, \dots, 1^i, \dots, 0)$ .

*b.Proof* 设  $e_1, \dots, e_n$  是  $F^n$  的标准基.

根据 5.A.10.a,  $\forall i = 1, \dots, n, U_i = \text{span}(e_i)$  都是  $T$  的不变子空间.

又根据 5.A.4, 其中任意若干  $U_i$  之和都是  $T$  的不变子空间.

12. 定义  $T \in P_4(R)$  为  $(Tp)(x) = xp'(x)$ . 给出  $T$  的所有特征值和特征向量.

*Proof*  $(Tp)(x) = xp'(x) = \sum_{i=1}^4 ia_i x^i = \lambda p(x) = \lambda \sum_{i=0}^m a_i x^i$ .

得到  $a_0 = 0$  且  $\lambda a_i = ia_i$ . 因此  $\lambda = 1, 2, 3, 4$ , 对应的特征向量为  $a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3, a_4 x^4$ .

14. 设  $V = U \oplus W$ , 其中  $U$  和  $W$  都是  $V$  的非零子空间.

定义  $P \in L(V)$  为  $P(u + w) = u, u \in U, w \in W$ . 给出  $T$  的所有特征值和特征向量.

*Proof*  $P(u + w) = \lambda(u + w) = u \Rightarrow \lambda = 1, w = 0$  或  $\lambda = 0, u = 0$ .

因此  $T$  有 0 和 1 两个特征值, 对应的特征向量分别是  $W$  和  $U$  中所有非零向量.

15. 设  $T \in L(V)$  且  $S \in L(V)$  是可逆变换.

(a) 证明:  $T$  和  $S^{-1}TS$  有相同的特征值.

(b) 给出  $T$  和  $S^{-1}TS$  的特征向量之间的关系.

*a.Proof* 设  $\lambda \in F$  和  $v \in V$  满足  $Tv = \lambda v$ . 考虑  $S^{-1}v$ . 有  $(S^{-1}TS)(S^{-1}v) = (S^{-1}T)v = \lambda S^{-1}v$ .

因此  $Tv = \lambda v \Rightarrow (S^{-1}TS)(S^{-1}v) = \lambda S^{-1}v$ .

*b.Proof* 根据 5.A.15.a,  $S^{-1}v$  是  $S^{-1}TS$  的特征向量等价于  $v$  是  $T$  的特征向量.

21. 设  $T \in L(V)$  是可逆变换.

(a) 设  $\lambda \in F$  且  $\lambda \neq 0$ . 证明:  $\lambda$  是  $T$  的特征值和  $\lambda^{-1}$  是  $T^{-1}$  的特征值等价.

(b) 证明  $T$  和  $T^{-1}$  有相同的特征向量.

*a.Proof*  $Tv = \lambda v \Rightarrow T^{-1}Tv = \lambda T^{-1}v \Rightarrow T^{-1}v = \lambda^{-1}v$ .

*b.Proof* 根据 5.A.21.a, 若  $v$  是  $T$  的一个特征向量, 则  $v$  也是  $T^{-1}$  的一个特征向量.

23. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $S, T \in L(V)$ . 求证:  $ST$ 和 $TS$ 有相同的特征值.

*Proof* 设 $(ST)v = \lambda v$ . 考虑 $Tv$ , 有 $(TS)(Tv) = T((ST)v) = T(\lambda v) = \lambda Tv$ .

若 $v \notin \text{Ker } T$ , 原式得证; 若 $v \in \text{Ker } T$ , 则 $ST$ 和 $TS$ 都有特征值0.

24. 设 $A$ 是 $n - n$ 矩阵. 定义 $T \in L(F^n)$ 为 $Tx = Ax$ .

(a) 矩阵每行元素之和均为1. 证明1是矩阵的特征值.

(b) 矩阵每列元素之和均为1. 证明1是矩阵的特征值.

*a. Proof* 不妨先猜测特征向量. 定义 $x \in F^n$ 为 $(1, \dots, 1)^T$ .

$$(A - I)x = \left( \sum_{j=1}^n A_{1,j} - 1 \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n A_{n,j} - 1 \right)^T = 0$$

因此1确实是 $T$ 的特征值.

*b. Proof*

$$x^T(A - I) = \left( \sum_{i=1}^n A_{i,1} - 1 \quad \dots \quad \sum_{i=1}^n A_{i,n} - 1 \right) = 0$$

因此1确实是 $T$ 的特征值.

28. 设 $V$ 是有限维向量空间.

$T \in L(V)$ 满足任意维数为 $\dim V - 1$ 的子空间都是不变子空间. 求证:  $T = \lambda I, \lambda \in F$ .

*Proof* 设 $v_1, \dots, v_m$ 是 $V$ 的一组基. 则 $\exists a_i^j \in F, Tv_j = \sum_{i=1}^m a_i^j v_i$ .

我们不妨先考虑所有包含 $\text{span}(v_1)$ 的且维数为 $\dim V - 1$ 的子空间.

设 $U_i = \text{span}(v_i)$ , 这些子空间的统一形式可以被写作 $\sum_{i=1}^m U_i (i \neq k, k \neq 1)$ .

由于该子空间不变, 故 $Tv_1 = \sum_{i=1}^m a_i^1 v_i \in \sum_{i=1}^m U_i (i \neq k)$ .

因此 $a_k = 0$ . 由于 $k$ 可以取遍每一个不为1的值, 故 $a_2^1 = \dots = a_n^1 = 0$ , 即 $Tv_1 = a_1^1 v_1$ .

同理,  $\forall i = 1, \dots, m, Tv_i = a_i^i v_i$ 均成立, 可以推断任意非零向量均为 $T$ 的特征向量.

根据5.A.26,  $T = \lambda I, \lambda \in F$ .

30. 设 $T \in L(R^3)$ 且 $-4, 5, \sqrt{7}$ 是 $T$ 的特征值. 求证: 存在 $x \in R^3$ , 使得 $(T - 9I)x = (-4, 5, \sqrt{7})$ .

*Proof*  $T \in L(R^3)$ 最多拥有3个特征值, 即9不是 $T$ 的特征值. 从而 $T - 9I$ 可逆, 即满射, 证毕.

31. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $v_1, \dots, v_m \in V$ .

求证:  $v_1, \dots, v_m$ 线性无关等价于 $v_1, \dots, v_m$ 是某 $T \in L(V)$ 对应不同特征值的特征向量.

*Proof* 必要性: 根据定理5.10证毕.

充分性: 由于 $v_1, \dots, v_m$ 线性无关, 可以令 $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ 为 $V$ 的一组基.

定义 $Tv_i = iv_i, 1 = 1, \dots, n$ 即可.

32. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ . 求证:  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ 在由实值函数组成的函数空间中线性无关.

*Proof* 令 $V = \text{span}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})$ , 并定义 $T \in L(V)$ 为 $Tf = f'$ .

由于 $(e^{\lambda_i x})' = \lambda_i e^{\lambda_i x}$ , 即 $Tf_i = \lambda_i f_i$ , 故 $e^{\lambda_i x}$ 是 $T$ 的特征向量.

根据定理5.10,  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ 线性无关.

33. 设 $T \in L(V)$ . 证明:  $T/(\text{Im } T) = 0$ .

*Proof*  $\forall v \in V, (T/(\text{Im } T))(v + (\text{Im } T)) = Tv + \text{Im } T = \text{Im } T$ .

## 12 Chapter 5.B

*Theorem 5.27.* 对于任意的有限维复向量空间 $V$ 和任意的 $T \in L(V)$ , 总存在 $V$ 的一组基, 使得线性算子 $T$ 的矩阵是上三角矩阵.

*Proof* 使用数学归纳法. $\dim V = 1$ 的情况显然成立.

现在假设对于任意的 $W$ 满足 $\dim W < \dim V$ ,  $W$ 都满足条件.

根据定理5.21, 该复向量空间必存在一个特征值 $\lambda$ 及对应的特征向量 $v_1$ .

令 $U = \text{span}(v_1)$ , 考虑商空间 $V/U$ ,  $\dim V/U = n - 1$ , 因此可以对其使用假设.

构造 $T$ 在 $V/U$ 上的诱导变换 $T/U$ 满足 $\forall v + U \in V/U, (T/U)(v + U) = Tv + U$ .

根据假设,  $V/U$ 存在一组基 $v_2 + U, \dots, v_n + U$ 满足 $(T/U)(v_i + U) \in \text{span}(v_2 + U, \dots, v_n + U)$ .

根据3.E.13,  $v_1, \dots, v_n$ 是 $V$ 的一组基, 且满足 $\forall i = 1, \dots, n, Tv_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_i)$ .

1. 设 $T \in L(V)$ 且存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $T^n = 0$ . 求证:  $I - T$ 是可逆, 且 $(I - T)^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} T^i$ .

*Proof*  $(I - T) \sum_{i=0}^{n-1} T^i = \sum_{i=0}^{n-1} T^i - \sum_{i=1}^n T^i = I - T^n = I$ .

3. 设 $T \in L(V)$ , 满足 $T^2 = I$ 且 $-1$ 不是 $T$ 的特征值. 证明 $T = I$ .

*Proof*  $T^2 = I \Rightarrow (T + I)(T - I) = 0$ , 因此 $1$ 和 $-1$ 至少有一个是 $T$ 的特征值.

而 $-1$ 不是 $T$ 的特征值, 因此 $T = I$ .

4. 设 $P \in L(V)$ 满足 $P^2 = P$ . 证明 $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$ .

*Proof* 对于 $\forall v \in V, v = Pv + (v - Pv)$ .

显然 $Pv \in \text{Im } P$ , 且 $P(v - Pv) = (P - P^2)v = 0 \Rightarrow v - Pv \in \text{Ker } P$ , 因此 $V = \text{Im } P + \text{Ker } P$ .

再考虑 $v \in \text{Ker } P \cap \text{Im } P$ , 因此 $\exists u \in V$ , 使得 $Pu = v$ , 得 $v = Pu = P^2u = Pv = 0$ , 证毕.

5. 设 $S, T \in L(V)$ 且 $S$ 是可逆变换. 设 $p \in P(F)$ 是一个多项式.

求证:  $p(STS^{-1}) = Sp(T)S^{-1}$

*Proof* 对于 $Sv \in V$ , 有 $(STS^{-1})^m(Sv) = (STS^{-1})^{m-1}(S(Tv)) = \dots = (ST^m)v$ .

$$p(STS^{-1})(Sv) = \sum_{i=0}^m a_i (STS^{-1})^i(Sv) = \sum_{i=0}^m a_i (ST^i)v = Sp(T)v = Sp(T)S^{-1}(Sv)$$

6. 设  $T \in L(V)$  且  $U$  是  $T$  下的不变子空间.

求证: 对于任意多项式  $p \in P(F)$ ,  $U$  都是  $p(T)$  下的不变子空间.

*Proof* 使用数学归纳法. 先验证  $n = 1$  的情况.

$\forall u \in U, (a_0I + a_1T)u = a_0u + a_1(Tu) \in U$ , 情况成立.

接着假设结论在次数为  $n$  时成立, 即  $\forall u \in U, p_n(T)u = \sum_{i=0}^n a_i T^i u \in U$ .

下面验证次数为  $n + 1$  的情况.  $\forall u \in U, p_{n+1}(T)u = \sum_{i=0}^{n+1} a_i T^i u = \sum_{i=0}^n a_i T^i u + a_{n+1} T^{n+1} u$ .

由于  $\sum_{i=0}^n a_i T^i u \in U, a_{n+1} T^{n+1} u \in U$ , 故  $p_{n+1}(T)u \in U$ , 证毕.

9. 设  $V$  是有限维向量空间且  $T \in L(V)$ , 存在  $v \neq 0 \in V$ .

令  $p$  是使得  $p(T)v = 0$  的次数最低的多项式. 求证:  $p$  的所有零点都是  $T$  的特征值.

*Proof* 使用反证法. 设  $\exists \lambda \in F, p(\lambda) = 0$  但  $T - \lambda I$  可逆.

根据代数基本定理, 存在  $q(T) \in L(V)$ , 使得  $p(T) = (T - \lambda I)q(T)$ ,  $\deg q < \deg p$ .

因此  $q(T)$  不能满足  $q(T)v = 0$ . 但是  $v \neq 0$ , 因而  $(T - \lambda I)v \neq 0$ .

因此  $p(T)v = (T - \lambda I)q(T)v \neq 0$ , 矛盾, 从而原命题得证.

11. 设  $T \in L(V)$  和一个多项式  $p \in P(C)$ ,  $\alpha \in C$ .

求证:  $\alpha$  是  $p(T)$  的特征值和存在  $T$  的特征值  $\lambda$  使得  $\alpha = p(\lambda)$  等价.

*Proof* 必要性: 若  $Tv = \lambda v$  且  $\alpha = p(\lambda)$ , 则  $p(T)v = \sum_{i=0}^n a_i T^i v = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i v = p(\lambda)v$ .

充分性:  $\exists v \neq 0, Tv = \alpha v \Rightarrow (p(T) - \alpha I)$  不可逆.

因此  $p(T) - \alpha I = c \prod_{i=1}^n (T - \lambda_i I)$  不可逆, 即至少存在一个  $\lambda_i$  使得  $T - \lambda_i I$  不可逆,

即  $\lambda_i$  是  $T$  的特征值, 因此  $p(T)v = p(\lambda_i)v = \alpha v$ .

13. 设  $W$  是复向量空间且  $T \in L(W)$  没有特征值.

求证: 若  $U$  在  $T$  下不变, 则  $U = \{0\}$  或者  $U$  为无限维向量空间.

*Proof*  $\{0\}$  的情况显然成立. 现在假设  $U$  是非零有限维复向量空间.

则  $T|_U \in L(U)$  必有特征值  $\lambda$ , 即  $T|_U u = \lambda u$ . 从而  $T \in L(W)$  实际上有一个特征值  $\lambda$ , 矛盾.

16. 令  $\varphi: P_n(C) \rightarrow V$  为  $\varphi p = p(T)v$ , 以此证明定理 5.21.

*Proof* 先证明  $\varphi$  是线性变换.

$$\varphi(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)(T)v = (\lambda p(T) + \mu q(T))v = \lambda p(T)v + \mu q(T)v = \lambda(\varphi p) + \mu(\varphi q)$$

由于  $\dim P_n(C) = n + 1, \dim V = n$ , 因此该变换不是单射变换,

也即存在  $v \neq 0$  使得  $p(T)v = \sum_{i=0}^n a_i (T^i v) = 0$ , 后文证明与原文相同.

### 13 Chapter 5.C

1. 设  $T \in L(V)$  可对角化. 证明  $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$ .

*Proof* 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $T$  的所有非零特征值.

由于  $T$  可对角化, 故根据定理 5.41,  $V = E(0, T) + \bigoplus_{i=1}^m E(\lambda_i, T)$ .

考虑  $v_i \in E(\lambda_i, T)$ , 有  $Tv_i = \lambda_i v_i, v_i = \frac{1}{\lambda_i} Tv_i$ .

因此  $T(E(\lambda_i, T)) \subseteq E(\lambda_i, T), E(\lambda_i, T) \subseteq T(E(\lambda_i, T))$ .

即  $\text{Im } T = \bigoplus_{i=1}^m E(\lambda_i, T)$  且  $\text{Ker } T = E(0, T)$ , 证毕.

3. 设  $V$  是有限维向量空间且  $T \in L(V)$ . 证明以下三个命题等价:

(a)  $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$  (b)  $V = \text{Ker } T + \text{Im } T$  (c)  $\text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$

*Proof* 下证  $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$ .  $a \Rightarrow b$  是显然的.

假设  $b$  成立. 根据定理 2.43 和 3.22,

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T - \dim (\text{Im } T \cap \text{Ker } T)$$

得到  $\dim (\text{Im } T \cap \text{Ker } T) = 0 \Rightarrow \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$ .

假设  $c$  成立, 令  $u_1, \dots, u_m$  和  $w_1, \dots, w_n$  分别为  $\text{Ker } T$  和  $\text{Im } T$  的一组基.

根据 2.B.8,  $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$  是  $V$  的一组基. 从而  $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$ , 证毕.

5. 设  $V$  是有限维复向量空间且  $T \in L(V)$ . 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $T$  的不同特征值.

证明: 若  $\forall i = 1, \dots, m, V = E(\lambda_i, T) \oplus \text{Im } (T - \lambda_i I)$ , 则  $T$  可对角化.

*Proof* 使用数学归纳法, 当  $\dim V = 1$  时,  $V = E(\lambda_1, T), \text{Im } (T - \lambda_1 I) = \{0\}$ , 显然成立.

现假设对于任意的  $W$  满足  $\dim W < \dim V$ , 结论均成立.

由于  $\text{Im } (T - \lambda_1 I)$  是  $T$  下的不变子空间且  $\dim \text{Im } (T - \lambda_1 I) < \dim V$ , 故可以对其使用归纳.

令  $\text{Im } (T - \lambda_1 I) = U$ .  $T|_U$  的特征值为  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 故  $U = \bigoplus_{i=2}^m E(\lambda_i, T|_U)$ .

以下将证明  $\forall i = 2, \dots, m, E(\lambda_i, T) \subseteq E(\lambda_i, T|_U)$ , 设  $\forall i = 2, \dots, m, v_i^\alpha \in E(\lambda_i, T) \subseteq V$ .

由于  $V = E(\lambda_1, T) \oplus U = E(\lambda_1, T) \oplus \bigoplus_{j=2}^m E(\lambda_j, T|_U)$ ,

故  $\exists v_j^\beta \in E(\lambda_j, T|_U), v_i^\alpha = v_1^\alpha + \sum_{j=2}^m v_j^\beta$ . 因而  $v_i^\alpha - v_i^\beta = v_1^\alpha + \sum_{j=2}^m v_j^\beta (j \neq i)$ .

根据定理 5.10, 若这些向量为  $T$  的特征向量, 那么它们必须线性无关.

然而它们的系数均为 1, 因此它们只能为零向量, 这表明  $v_i^\alpha - v_i^\beta = v_1^\alpha = v_j^\beta = 0$ .

因此  $v_i^\alpha = v_i^\beta \in E(\lambda_i, T|_U)$ , 即  $E(\lambda_i, T) \subseteq E(\lambda_i, T|_U)$ .

结合  $E(\lambda_i, T|_U) \subseteq E(\lambda_i, T)$ , 得到  $E(\lambda_i, T|_U) = E(\lambda_i, T)$ .

于是  $U = \bigoplus_{i=2}^m E(\lambda_i, T), V = E(\lambda_1, T) \oplus U = \bigoplus_{i=1}^m E(\lambda_i, T)$ , 证毕.

6. 设 $V$ 是有限维向量空间.

$T \in L(V)$ 有 $\dim V$ 个不同的特征向量,  $S \in L(V)$ 有和 $T$ 相同的特征向量. 求证:  $ST = TS$ .

*Proof* 令 $\dim V = n$ , 设 $v_1, \dots, v_n$ 是 $S, T$ 的特征向量.

根据特征向量的独立性,  $v_1, \dots, v_n$ 是 $V$ 的一组基.

设 $\forall i = 1, \dots, n, Tv_i = \lambda_i^\alpha v_i, Sv_i = \lambda_i^\beta v_i$ .

$$\begin{aligned}(ST)v &= (ST) \sum_{i=1}^n a_i v_i = S \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^\alpha v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^\beta \lambda_i^\alpha v_i \\(TS)v &= (TS) \sum_{i=1}^n a_i v_i = T \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^\beta v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^\alpha \lambda_i^\beta v_i\end{aligned}$$

显然 $ST = TS$ .

12. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $\dim V = n$ .  $R, T \in L(V)$ 都有特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

求证: 存在可逆变换 $S \in L(V)$ , 使得 $R = S^{-1}TS$ .

*Proof* 根据定理5.44, 显然 $R, T$ 均可对角化.

设 $v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_n^\beta$ 分别是 $R, T$ 与 $\lambda_i$ 对应的特征向量.

根据定理5.10和2.39,  $v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha$ 和 $v_1^\beta, \dots, v_n^\beta$ 分别是 $V$ 的一组基.

定义线性变换 $S$ 为 $Sv_i^\alpha = v_i^\beta, i = 1, \dots, n$ , 故有

$$\begin{aligned}(S^{-1}TS)v &= (S^{-1}TS) \sum_{i=1}^n a_i v_i^\alpha = (S^{-1}T) \sum_{i=1}^n a_i v_i^\beta \\&= S^{-1} \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i^\beta = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i^\alpha = \sum_{i=1}^n a_i Rv_i^\alpha = Rv\end{aligned}$$

因而 $R = S^{-1}TS$ , 证毕.

16. 斐波那契数列  $F_1, F_2, \dots$  定义如下:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, n \geq 3$$

并定义  $T \in L(R^2)$  为  $T(x, y) = (y, x + y)$ .

(a) 证明  $\forall n \in N^+, T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$ .

(b) 给出  $T$  的特征值.

(c) 给出一组以  $T$  的特征向量所构成的  $R^2$  的基.

(d) 利用 (c) 部分的结论给出  $T^n(0, 1)$ , 并证明

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

(e) 利用 (d) 部分的结论证明斐波那契数  $F_n$  是最接近  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$  的整数.

(a.Proof): 使用数学归纳法.  $n = 1$  时,  $T(0, 1) = (1, 1) = (F_1, F_2)$ .

下设  $n = k$  时结论成立. 则  $n = k + 1$  时,

$$T^{k+1}(0, 1) = T(F_k, F_{k+1}) = (F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) = (F_{k+1}, F_{k+2})$$

(b.Proof): 令  $T(x, y) = \lambda(x, y) = (y, x + y)$ , 则  $y = \lambda x$  且  $x + y = \lambda y$ .

得到  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ , 故  $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

(c.Proof):  $T(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$ ,  $T(1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} (1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$ .

(d.Proof): 设  $v_1 = (1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}), v_2 = (1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$ .

对于  $\forall v \in R^2, \exists a_1, a_2 \in R, v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ ,

从而  $Tv = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2, T^n v = a_1 \lambda_1^n v_1 + a_2 \lambda_2^n v_2$ .

令  $v = (0, 1), v = a_1 v_1 + a_2 v_2 = (a_1 + a_2, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_2)$ .

得到  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . 根据 5.C.16.a,  $T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$ . 故

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

(e.Proof): 即证  $\left| F_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right|$ .

由于  $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$ , 故  $\left| \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < 1$ . 得到  $\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ .

因此两数的差始终小于  $\frac{1}{2}$ , 证毕.



## 14 Chapter 6.A

5. 设  $T \in L(V)$  满足  $\forall v \in V, \|Tv\| \leq \|v\|$ . 求证:  $T - \sqrt{2}I$  可逆.

*Proof* 假设  $T - \sqrt{2}I$  不可逆, 则  $\exists u \in V, Tu = \sqrt{2}I$ . 从而  $\|Tu\| = \|\sqrt{2}u\| \leq \|u\|$ , 矛盾.

7. 设  $u, v \in V, a, b \in R$ . 证明:  $\|au + bv\| = \|bu + av\|$  和  $\|u\| = \|v\|$  等价.

*Proof* 两边平方, 得到

$$\begin{aligned} a^2 \|u\|^2 + \langle au, bv \rangle + \langle bv, au \rangle + b^2 \|v\|^2 &= b^2 \|u\|^2 + \langle bu, av \rangle + \langle av, bu \rangle + a^2 \|v\|^2 \\ \langle au, bv \rangle &= ab \langle u, v \rangle, \langle bv, au \rangle = ab \langle v, u \rangle, \langle bu, av \rangle = ab \langle u, v \rangle, \langle av, bu \rangle = ab \langle v, u \rangle \\ a^2 \|u\|^2 + b^2 \|v\|^2 &= b^2 \|u\|^2 + a^2 \|v\|^2, (a^2 - b^2)(\|u\|^2 - \|v\|^2) = 0 \end{aligned}$$

由  $a, b$  的任意性, 只能有  $\|u\| = \|v\|$ .

9. 设  $u, v \in V$  满足  $\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1$ . 证明:  $\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - |\langle u, v \rangle|$ .

*Proof* 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} &\leq 1 - \|u\| \|v\| \leq 1 - |\langle u, v \rangle| \\ (1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2) &\leq (1 - \|u\| \|v\|)^2 \\ \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \|u\| \|v\| &\geq 0, (\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

12. 证明:  $\forall n \in N^*, x_1, \dots, x_n \in R, (\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

*Proof* 考虑  $(x_1, \dots, x_n), (1, \dots, 1) \in R^n$ . 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$(x_1 \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 1)^2 \leq (1^2 + \dots + 1^2)(x_1^2 + \dots + x_n^2), (\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

14. 设  $u, v \in R^n$ . 证明:  $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$ , 其中  $\theta$  是  $u, v$  的夹角.

*Proof* 注意到  $x, y, x - y$  构成三角形, 根据余弦定理, 有

$$\cos \theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{\|x\| \|y\|} = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2)}{\|x\| \|y\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

因此该定义是合法的.

20. 设 $V$ 是复内积空间且 $u, v \in V$ . 证明:

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \|u+iv\|^2 i - \|u-iv\|^2 i}{4}$$

*Proof* 直接将等式右边展开即可.

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle, \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle \\ \|u+iv\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Im} \langle u, v \rangle, \|u-iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Im} \langle u, v \rangle \\ \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= 4\operatorname{Re} \langle u, v \rangle, \|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 = 4\operatorname{Im} \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle &= \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + i\operatorname{Im} \langle u, v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} + i \frac{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2}{4} \end{aligned}$$

23. 设 $V_1, \dots, V_m$ 是内积空间. 证明:  $\prod_{i=1}^m V_i$ 上一个合法的内积定义是

$$\langle (u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle = \sum_{i=1}^m \langle u_i, v_i \rangle$$

*Proof* 正定性: 由于 $\forall i = 1, \dots, m, \langle v_i, v_i \rangle \geq 0$ , 故 $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v_i \rangle \geq 0$ .

当 $\sum_{i=1}^m \langle v_i, v_i \rangle = 0$ 时, 有 $\forall i = 1, \dots, m, \langle v_i, v_i \rangle = 0$ , 从而 $v_i = 0$ .

左变元线性: 设 $u^\alpha = (u_1^\alpha, \dots, u_m^\alpha), u^\beta = (u_1^\beta, \dots, u_m^\beta), v = (v_1, \dots, v_m) \in \prod_{i=1}^m V_i$ .

$$\langle \lambda u^\alpha + \mu u^\beta, v \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \lambda u_i^\alpha + \mu u_i^\beta, v_i \rangle = \lambda \sum_{i=1}^m \langle u_i^\alpha, v_i \rangle + \mu \sum_{i=1}^m \langle u_i^\beta, v_i \rangle = \lambda \langle u^\alpha, v \rangle + \mu \langle u^\beta, v \rangle$$

共轭对称性: 设 $u = (u_1, \dots, u_m), v = (v_1, \dots, v_m) \in \prod_{i=1}^m V_i$ ,

从而 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m), \bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ .

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^m \langle u_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^m \overline{\langle v_i, u_i \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle}$$

26. 设  $f, g$  都是从  $R$  到  $R^n$  的可微函数.

(a) 证明:  $\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$ .

(b) 设  $c > 0$  且  $\forall t \in R, \|f(t)\| = c$ , 证明:  $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ .

*a.Proof*

$$\begin{aligned}\langle f(t), g(t) \rangle' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) \rangle - \langle f(t+h), g(t) \rangle + \langle f(t+h), g(t) \rangle - \langle f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h), g(t+h) - g(t) \rangle}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(t+h) - f(t), g(t) \rangle}{h} \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle\end{aligned}$$

*b.Proof* 根据 6.A.26.a,  $\langle f(t), f(t) \rangle' = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$ .

由于  $\langle f(t), f(t) \rangle$  是常值函数, 故  $\langle f(t), f(t) \rangle' = 0$ , 即  $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ .

28. 设  $C$  是  $V$  的一个子集, 具有如下性质: 若  $u, v \in C$ , 则  $\frac{1}{2}(u+v) \in C$ .

求证: 离  $w \in V$  最近的向量至多只有一个.

*Proof* 使用反证法. 若有  $u \neq v$  满足  $\|w - u\| = \|w - v\| = c$ , 则考虑  $\left\|w - \frac{1}{2}(u+v)\right\|$ .

$$\begin{aligned}\left\|w - \frac{1}{2}(u+v)\right\|^2 &= \frac{1}{4} \|(w-u) + (w-v)\|^2 = \frac{1}{4} \langle (w-u) + (w-v), (w-u) + (w-v) \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\|w-u\|^2 + \|w-v\|^2 + \langle w-u, w-v \rangle + \langle w-v, w-u \rangle) \\ \langle w-u, w-v \rangle &= \langle w-v + v-u, w-v \rangle = \|w-v\|^2 + \langle v-u, w-v \rangle \\ \langle w-v, w-u \rangle &= \langle w-u + u-v, w-u \rangle = \|w-u\|^2 + \langle u-v, w-u \rangle \\ \langle v-u, w-v \rangle + \langle u-v, w-u \rangle &= \langle v-u, w-v \rangle - \langle v-u, w-u \rangle \\ &= \langle v-u, (w-v) - (w-u) \rangle = \langle v-u, u-v \rangle = -\|u-v\|^2 \\ \left\|w - \frac{1}{2}(u+v)\right\|^2 &= \frac{1}{4} (2\|w-u\|^2 + 2\|w-v\|^2 - \|u-v\|^2)\end{aligned}$$

而  $\|w-u\|^2 = \|w-v\|^2 = c^2$ , 得到  $\left\|w - \frac{1}{2}(u+v)\right\|^2 = c^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 < c^2$ .

于是导出矛盾, 即离  $w \in V$  最近的向量至多只有一个.

有高等背景的 29 和 30 题将单独列出.

## 15 Chapter 6.B

*Theorem 6.31 Gram-Schmidt 正交化*

设  $v_1, \dots, v_m$  是内积空间  $V$  中线性无关的向量组, 构造正交向量组  $u_1, \dots, u_m$ .

$$u_1 = v_1, \forall i = 2, \dots, m, u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$$

令  $\forall i = 1, \dots, m, e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ , 则  $e_1, \dots, e_m$  规范正交.

*Proof* 由于  $\forall i = 1, \dots, m, v_i \notin \text{span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ , 故  $u_i \neq 0, \|u_i\| \neq 0$ .

因此  $\forall i = 1, \dots, m, \|e_i\| = 1$ , 故只需证明  $u_1, \dots, u_m$  正交即可.

根据定理 6.14 呈现的正交分解,  $\forall j = 1, \dots, i-1, \left\langle v_i - \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j, u_j \right\rangle = 0$ .

因此  $\forall j = 1, \dots, i-1, \langle u_i, u_j \rangle = 0$ . 因此  $u_1, \dots, u_m$  两两正交, 证毕.

进一步, 有  $\forall i = 1, \dots, m, v_i = u_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j \in \text{span}(u_1, \dots, u_i)$ .

从而  $\text{span}(v_1, \dots, v_i) \subseteq \text{span}(u_1, \dots, u_i)$ . 由于两组向量均线性无关且长度相等,

故  $\text{span}(v_1, \dots, v_i) = \text{span}(u_1, \dots, u_i) = \text{span}(e_1, \dots, e_i)$ .

*Theorem 6.42 Riesz 表示定理* 设  $V$  是有限维内积空间且  $\varphi$  是  $V$  上的线性泛函.

求证: 存在唯一的  $u \in V$ , 使得对于任意的  $v \in V$ , 都有  $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$ .

*Proof* 存在性: 设  $e_1, \dots, e_m$  是  $V$  的一组正交基, 从而

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^m \langle v, e_i \rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^m \langle v, e_i \rangle \varphi(e_i) = \left\langle v, \sum_{i=1}^m \overline{\varphi(e_i)} e_i \right\rangle = \langle v, u \rangle$$

因此只需令  $u = \sum_{i=1}^m \overline{\varphi(e_i)} e_i$  即可, 存在性得证.

唯一性: 若存在  $u_1, \dots, u_2 \in V$  满足  $\varphi(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle$ , 则

$$0 = \langle v, u_1 \rangle - \langle v, u_2 \rangle = \langle v, u_1 - u_2 \rangle$$

由  $V$  的任意性, 取  $v = u_1 - u_2$  时得到  $u_1 - u_2 = 0, u_1 = u_2$ , 唯一性得证.

1\*. <sup>1</sup> 设  $e_1, \dots, e_m$  是  $V$  中的一向量组, 使得  $\forall a_i \in F, \|\sum_{i=1}^m a_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^m |a_i|^2$ .

证明:  $e_1, \dots, e_m$  是规范正交组.

*Proof*

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle a_i e_i, a_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^m |a_i|^2$$

令  $\forall i \neq k, a_i = 0$ , 可得  $|a_k|^2 \|e_k\|^2 = |a_k|^2, \|e_k\| = 1$ . 因此  $\forall i = 1, \dots, m, \|e_i\| = 1$ .

令  $\forall i \neq j, k, a_i = 0$ , 可得  $\langle a_j e_j, a_k e_k \rangle + \langle a_k e_k, a_j e_j \rangle = 0$ .

从而  $\operatorname{Re}(a_j \overline{a_k} \langle e_j, e_k \rangle) = 0$ . 由  $a_j, a_k$  的任意性, 必有  $\langle e_j, e_k \rangle = 0$ .

从而  $e_1, \dots, e_m$  是规范正交组, 证毕.

4. 设  $n \in N^*$ . 求证: 向量空间  $C[-\pi, \pi]$  中的

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

规范正交, 其内积定义为  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ .

*Proof* 先证明其范数均为1.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \quad \left\| \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} \quad = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2kx}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin 2k(\pi - \pi)}{2k} + 2\pi \right) = 1 \quad = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin 2k(\pi - \pi)}{2k} + 2\pi \right) = 1 \end{aligned}$$

随后证明这些函数两两正交.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\cos k_1 x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos k_2 x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((k_1 + k_2)x) + \cos((k_1 - k_2)x)) dx = 0 \\ \left\langle \frac{\sin k_1 x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin k_2 x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos((k_1 + k_2)x) + \cos((k_1 - k_2)x)) dx = 0 \\ \left\langle \frac{\cos k_1 x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin k_2 x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin((k_1 + k_2)x) + \sin((k_1 - k_2)x)) dx = 0 \\ \left\langle \frac{\sin k_1 x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos k_2 x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((k_1 + k_2)x) + \sin((k_1 - k_2)x)) dx = 0 \end{aligned}$$

因此它们确实是两两正交且范数为1的函数, 即构成一组规范正交基.

---

<sup>1</sup> 标\*的为第四版上的习题.

8. 给出  $q \in P_2(R)$  满足  $\forall p \in P_2(R), \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 p(x) \cos(\pi x)dx$ .

*Proof* 定义  $P_2(R)[0, 1]$  上的内积为  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ .

定义  $\varphi \in L(V, F)$  为  $\varphi(p) = \int_0^1 p(x) \cos(\pi x)dx$ , 验证  $\varphi$  是线性泛函.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda p_1 + \mu p_2) &= \int_0^1 (\lambda p_1 + \mu p_2)(x) \cos(\pi x)dx = \int_0^1 [\lambda p_1(x) + \mu p_2(x)] \cos(\pi x)dx \\ &= \lambda \int_0^1 p_1(x) \cos(\pi x)dx + \mu \int_0^1 p_2(x) \cos(\pi x)dx = \lambda \varphi(p_1) + \mu \varphi(p_2)\end{aligned}$$

接下来令  $\varphi(p) = \langle p, q \rangle$ . 根据定理 6.42, 可以找到这样的  $q$ .

根据 5.B.5,  $P_2(R)$  的一组正交基是  $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}$ .

从而  $q(x) = \varphi(1) + \varphi(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \varphi(x^2 - x + \frac{1}{6})(x^2 - x + \frac{1}{6}) = -\frac{2}{\pi^2}x + \frac{1}{\pi^2}$ .

12. 设  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$  是  $V$  上的两个内积定义, 其正交条件相同.

求证: 存在正常数  $c$ , 使得  $\forall v, w \in V, \langle v, w \rangle_1 = c \langle v, w \rangle_2$ .

*Proof* 给出  $\varphi_1, \varphi_2 \in L(V, F), w_0 \in V$  满足  $\forall v \in V, \varphi_1(v) = \langle v, w_0 \rangle_1, \varphi_2(v) = \langle v, w_0 \rangle_2$ .

由于两种内积的正交条件相同, 因此  $\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2$ .

根据 3.B.30, 存在常数  $c$ , 使得  $\varphi_1 = c\varphi_2$ , 取  $v = w_0$  可得  $c > 0$ .

下证  $c$  不依赖于  $w$  的选取. 考虑  $\langle v, w_1 \rangle_1 = c_1 \langle v, w_1 \rangle_2, \langle v, w_2 \rangle_1 = c_2 \langle v, w_2 \rangle_2$ , 要证  $c_1 = c_2$ .

由  $v$  的任意性, 第一处  $v$  取  $w_2$ , 第二处  $v$  取  $w_1$ , 得到

$$c_2 \langle w_1, w_2 \rangle_2 = \langle w_1, w_2 \rangle_1 = \overline{\langle w_2, w_1 \rangle_1} = \overline{c_1 \langle w_2, w_1 \rangle_2} = \overline{c_1} \overline{\langle w_2, w_1 \rangle_2} = \overline{c_1} \langle w_1, w_2 \rangle_2$$

因此  $c_1 = \overline{c_2}$ . 由前面  $c > 0$ , 得  $c_1 = c_2$ , 因此任意的  $w$  均对应相同的  $c$ .

14. 设  $e_1, \dots, e_n$  为  $V$  的一组规范正交基. 设  $v_1, \dots, v_n$  满足  $\forall i = 1, \dots, n, \|e_i - v_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

求证:  $v_1, \dots, v_n$  是  $V$  的一组基.

*Proof* 令  $a_1, \dots, a_n \in F$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$ , 下证  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . 考虑  $\|a_i(e_i - v_i)\|^2$ .

$$\sum_{i=1}^n \|a_i(e_i - v_i)\|^2 < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i|^2, n \sum_{i=1}^n \|a_i(e_i - v_i)\|^2 < \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

根据 6.A.12,  $n \sum_{i=1}^n \|a_i(e_i - v_i)\|^2 \geq (\sum_{i=1}^n \|a_i(e_i - v_i)\|)^2 = (\sum_{i=1}^n \|a_i e_i\|)^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$ .

若  $\exists i = 1, \dots, n, a_i \neq 0$ , 则出现矛盾, 因此  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

因此  $v_1, \dots, v_n$  线性无关, 且具有正确的维数, 因此是  $V$  的一组基.

17. 对于  $u \in V$ , 定义  $V$  上的线性泛函  $\varphi_u$  为  $\varphi_u(v) = \langle v, u \rangle, \varphi(u) = \varphi_u$ .

(a) 求证: 若  $V$  是在  $R$  上的向量空间, 则  $\varphi \in L(V, V')$ .

(b) 求证: 若  $V$  是在  $C$  上的非零向量空间, 则  $\varphi$  不是线性变换.

(c) 求证:  $\varphi$  是单射变换.

(d) 求证: 若  $V$  是在  $R$  上的有限维向量空间, 则  $\varphi$  是双射变换.

*a.Proof*

$$\begin{aligned} \forall v \in V, (\varphi(\lambda u_1 + \mu u_2))(v) &= \varphi_{\lambda u_1 + \mu u_2}(v) = \langle v, \lambda u_1 + \mu u_2 \rangle \\ &= \lambda \langle v, u_1 \rangle + \mu \langle v, u_2 \rangle = \lambda(\varphi(u_1))(v) + \mu(\varphi(u_2))(v) \end{aligned}$$

*b.Proof*

$$\forall v \in V, (\varphi(\lambda u))(v) = \bar{\lambda} \langle v, u_1 \rangle = \bar{\lambda}(\varphi(u))(v) \neq \lambda(\varphi(u))(v)$$

*c.Proof* 令  $\varphi_u = 0$ , 则  $\forall v \in V, \varphi_u(v) = \langle v, u \rangle = 0$ . 取  $v = u$ , 则  $\langle u, u \rangle = 0, u = 0$ .

因此  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ , 即  $\varphi$  是单射变换.

*d.Proof* 设  $e_1, \dots, e_n$  是  $V$  的一组规范正交基,  $\psi_1, \dots, \psi_n$  是其对偶基.

下证  $\forall i = 1, \dots, n, \varphi(e_i) = \psi_i$ . 考虑任意的  $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$ , 有

$$\psi_i(\sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i) = \langle v, e_i \rangle, (\varphi(e_i))(\sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i) = \langle v, e_i \rangle$$

因此  $\dim \text{Im } \varphi = n = \dim V = \dim V'$ , 即  $\varphi$  为满射, 证毕.

7.A.20 在 6.B.17.d 的情况下设  $T \in L(V, W)$ . 求证:  $T' \circ \varphi_W = \varphi_V \circ T^*$ .

*Proof* 设  $\forall v \in V, w \in W$ , 有  $(T' \circ \varphi_W)w = \varphi_w \circ T, (\varphi_V \circ T^*)w = \varphi_{T^*w}$ .

$$((T' \circ \varphi_W)w)v = (\varphi_w \circ T)v = \langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle = \varphi_{T^*w}v = ((\varphi_V \circ T^*)w)v$$

6.B.17 和 7.A.20 将对偶变换  $T'$  和伴随变换  $T^*$  通过 *Riesz* 表示定理结合起来.

有奇异值分解背景的 16 题将单独列出.

## 16 Chapter 6.C

1. 设  $v_1, \dots, v_m \in V$ . 证明:  $\{v_1, \dots, v_m\}^\perp = \text{span}(v_1, \dots, v_m)^\perp$ .

*Proof* 由  $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 故  $\text{span}(v_1, \dots, v_m)^\perp \subseteq \{v_1, \dots, v_m\}^\perp$ .

下证  $\{v_1, \dots, v_m\}^\perp \subseteq \text{span}(v_1, \dots, v_m)^\perp$ , 考虑  $v \in \{v_1, \dots, v_m\}^\perp$ .

$\forall i = 1, \dots, m, \langle v_i, v \rangle = 0$ , 则  $\langle \sum_{i=1}^m a_i v_i, v \rangle = \sum_{i=1}^m a_i \langle v_i, v \rangle = 0$ .

而  $\forall a_1, \dots, a_m \in F, \sum_{i=1}^m a_i v_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ , 从而  $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)^\perp$ .

即  $\forall v \in \{v_1, \dots, v_m\}^\perp, v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)^\perp$ , 证毕.

3. 设  $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$  是  $V$  的一组基, 且  $U = \text{span}(u_1, \dots, u_m)$ .

对其应用 *Gram-Schmidt* 正交化, 得到  $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$ .

证明:  $f_1, \dots, f_n$  是  $U^\perp$  的一组规范正交基.

*Proof* 考虑  $\forall a_i, b_i \in F, \sum_{i=1}^m a_i e_i \in \text{span}(e_1, \dots, e_m) = U, \sum_{i=1}^n b_i f_i \in \text{span}(f_1, \dots, f_n)$ .

$\langle \sum_{i=1}^m a_i e_i, \sum_{i=1}^n b_i f_i \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \langle e_i, f_i \rangle = 0$ , 因此  $\forall f \in \text{span}(f_1, \dots, f_n), f \in U^\perp$ .

得到  $\text{span}(f_1, \dots, f_n) \subseteq U^\perp$ , 结合  $\dim U^\perp = n = \dim \text{span}(f_1, \dots, f_n)$ ,

有  $U^\perp = \text{span}(f_1, \dots, f_n)$ .

5. 设  $V$  是有限维内积空间且  $U$  是  $V$  的一个子空间. 证明:  $P_U + P_{U^\perp} = I$ .

*Proof* 由于  $V = U \oplus U^\perp$ , 故  $\forall v \in V, v = u + u', u \in U, u' \in U^\perp$ .

$\forall v \in V, (P_U + P_{U^\perp})(v) = P_U(v) + P_{U^\perp}(v) = u + u' = v = Iv$ .

8. 设  $V$  是有限维内积空间且  $P \in L(V)$  满足  $P^2 = P, \forall v \in V, \|Pv\| \leq \|v\|$ .

求证: 存在  $V$  的一个子空间  $U$ , 使得  $P = P_U$ .

*Proof* 根据 5.B.4,  $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$ . 猜想  $U = \text{Im } P$ .

令  $\forall v \in V, P_U v = u$ , 则  $P_U^2 v = P_U u = u$ , 且  $\|P_U v\| = \|(P_U v - v) + v\| \leq \|P_U v - v\| + \|v\|$ .

因此  $P_{\text{Im } P}$  满足  $P$  要求的一切性质.

9. 设  $V$  是内积空间且  $T \in L(V)$ ,  $U$  是  $V$  的有限维子空间.

证明:  $U$  是  $T$  下的不变子空间和  $P_U T P_U = T P_U$  等价.

*Proof* 充分性:  $\forall v \in V, v = u + u', u \in U, u' \in U^\perp$ , 且  $\forall u \in U, Tu \in U$ .

$\forall v \in V, (P_U T P_U)v = (P_U T)u = Tu = T(P_U v) = (T P_U)v$ .

必要性:  $\forall u \in U, P_U(Tu) = (P_U T P_U)u = T(P_U u) = Tu$ .

根据正交投影的性质,  $Tu \in U$ , 即  $U$  是  $T$  下的不变子空间.



10. 设 $V$ 是有限维内积空间且 $T \in L(V)$ ,  $U$ 是 $V$ 的一个子空间.

求证:  $U$ 和 $U^\perp$ 都是 $T$ 下的不变子空间和 $P_U T = T P_U$ 等价.

*Proof* 充分性:  $\forall v \in V, v = u + u', u \in U, u' \in U^\perp$ , 且 $\forall u \in U, u' \in U^\perp, Tu \in U, Tu' \in U^\perp$ .

$\forall v \in V, T(P_U v) = Tu = P_U(Tu) = P_U(Tu + Tu') = (P_U T)v$ .

必要性:  $\forall u \in U, P_U(Tu) = T(P_U u) = Tu$ , 故 $Tu \in U$ ,  $U$ 是 $T$ 的不变子空间;

$\forall u' \in U, P_U(Tu') = T(P_U u') = 0$ , 故 $Tu' \in U^\perp$ ,  $U^\perp$ 是 $T$ 的不变子空间.

11. 在 $R^4$ 中, 令 $U = \text{span}((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2)), u \in U$ , 给出能使 $\|(1, 2, 3, 4) - u\|$ 最小的 $u$ .

*Proof* 定义 $R^4$ 上的内积为 $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ .

应用正交化, 易得 $U$ 的一组规范正交基是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, 1, 2)$ .

根据定理6.56和正交投影的性质 $i$ , 有

$$\begin{aligned} u = P_U(1, 2, 3, 4) &= \left\langle (1, 2, 3, 4), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0) \right\rangle \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0) \right) \\ &+ \left\langle (1, 2, 3, 4), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, 1, 2) \right\rangle \left( \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, 1, 2) \right) = \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{11}{5}, \frac{22}{5} \right) \end{aligned}$$

## 17 Chapter 7.A

*Theorem 7.10* 伴随算子的矩阵  $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$  分别是  $V, W$  的规范正交基.

设  $T \in L(V, W)$ , 则在这两组基下的  $M(T)$  是  $M(T^*)$  的共轭转置, 即  $\overline{M(T)}^T = M(T^*)$ .

*Proof* 考虑  $M(T)_{i,j}$ . 由于  $Te_j = \sum_{i=1}^n \langle Te_j, f_i \rangle f_i$ , 从而  $M(T)_{i,j} = \langle Te_j, f_i \rangle$ .

再考虑  $M(T^*)_{j,i}$ . 由于  $T^*f_i = \sum_{j=1}^m \langle T^*f_i, e_j \rangle e_j$ , 从而  $M(T^*)_{j,i} = \langle T^*f_i, e_j \rangle$ .

$$M(T^*)_{j,i} = \langle T^*f_i, e_j \rangle = \langle f_i, Te_j \rangle = \overline{\langle Te_j, f_i \rangle} = \overline{M(T)_{i,j}}$$

于是  $\overline{M(T)}^T = M(T^*)$ , 证毕.

2. 设  $V$  是有限维内积空间且  $T \in L(V)$ . 证明:  $\lambda$  是  $T$  的特征值和  $\bar{\lambda}$  是  $T^*$  的特征值等价.

*Proof* 利用  $\dim \text{Ker}(T^*) = \dim \text{Ker}(T)$ , 有

$$0 < \dim \text{Ker}(T - \lambda I) = \dim \text{Ker}(T - \lambda I)^* = \dim \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I)$$

因此  $E(\bar{\lambda}, T^*) \neq \{0\}$ , 即  $\bar{\lambda}$  是  $T^*$  的一个特征值.

3. 设  $V$  是有限维内积空间且  $T \in L(V)$ ,  $U$  是  $V$  的一个子空间.

求证:  $U$  在  $T$  下不变和  $U^\perp$  和  $T^*$  下不变等价.

*Proof* 由  $\forall u \in U, u' \in U^\perp$ , 则  $\langle u, u' \rangle = 0$ , 考虑  $\langle Tu, u' \rangle$  和  $\langle u, T^*u' \rangle$ .

由  $\langle Tu, u' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, T^*u' \rangle = 0$ , 得到  $Tu \in U$  和  $T^*u' \in U^\perp$  等价.

4. 设  $T \in L(V, W)$ . 求证: a.  $T$  单射和  $T^*$  满射等价. b.  $T$  满射和  $T^*$  单射等价.

*a.Proof*  $\text{Ker } T = \{0\} \Leftrightarrow (\text{Ker } T)^\perp = V \Leftrightarrow \text{Im } T^* = V$ .

*b.Proof*  $\text{Im } T = V \Leftrightarrow (\text{Im } T)^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im } T^* = \{0\}$ .

11. 设  $P \in L(V)$  满足  $P^2 = P$ . 求证:  $T$  是自伴算子等价于存在  $V$  的子空间  $U$ , 使得  $P = P_U$ .

*Proof* 必要性: 考虑  $U$  和  $U^\perp$ .  $\forall v, w \in V, v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2, v_1, w_1 \in U, v_2, w_2 \in U^\perp$ .

$$\langle Pv, w \rangle = \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle = \langle v, Pw \rangle$$

充分性: 根据 5.B.4,  $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$ . 考虑  $\forall v = v_1 + v_2, v_1 \in \text{Ker } P, v_2 \in \text{Im } P$ .

$$\langle Pv, v \rangle = \langle v_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2 = \langle v_1, v_2 \rangle + \|v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_2 \rangle = \langle v, Pv \rangle$$

因此  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ , 即  $\text{Ker } P$  和  $\text{Im } P$  互为正交补, 取  $U = \text{Im } P$  即可.

14. 设  $T \in L(V)$  是正规算子, 且  $v, w \in V$  满足  $Tv = 3v, Tw = 4w, \|v\| = \|w\| = 2$ .

*Proof* 根据定理7.22,  $\langle v, w \rangle = 0$ , 从而  $\|T(v+w)\|^2 = \|3v+4w\|^2 = \|3v\|^2 + \|4w\|^2 = 100$ .  
根据范数的正定性, 显然有  $\|T(v+w)\| = 10$ .

15. 给定  $u, x \in V$ , 定义  $T \in L(V)$  为  $\forall v \in V, Tv = \langle v, u \rangle x$ .

(a) 当  $F = R$  时, 证明:  $T$  是自伴算子等价于  $\exists \lambda \neq 0 \in R, x = \lambda u$ .

(b) 证明:  $T$  是正规算子等价于  $\exists \lambda \neq 0, x = \lambda u$ .

*a.Proof*

$$\langle v, T^*w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle v, u \rangle \langle x, w \rangle = \langle v, \langle x, w \rangle u \rangle, T^*w = \langle x, w \rangle u$$

必要性:  $\langle Tv, w \rangle = \langle \lambda \langle v, u \rangle, w \rangle u = \lambda \langle v, u \rangle \langle u, w \rangle = \langle v, \lambda \langle u, w \rangle u \rangle = \langle v, Tw \rangle$ .

充分性:  $\langle x, w \rangle u = T^*w = Tw = \langle w, u \rangle x$ . 取  $w = u$ , 得  $\lambda = \frac{\langle x, x \rangle}{\langle x, u \rangle}$ .

*b.Proof*

$$(T^*T)v = T^*(\langle v, u \rangle x) = \langle v, u \rangle T^*x = \|x\|^2 \langle v, u \rangle u$$

$$(TT^*)v = T(\langle x, v \rangle u) = \langle x, v \rangle Tu = \|u\|^2 \langle x, v \rangle x$$

必要性:  $(T^*T)v = \|\lambda u\|^2 \langle v, u \rangle u = \lambda \bar{\lambda} \|u\|^2 \langle v, u \rangle u = \|u\|^2 \langle v, \lambda u \rangle \lambda u = (TT^*)v$ .

充分性:  $\|x\|^2 \langle v, u \rangle u = \|u\|^2 \langle x, v \rangle x$ . 取  $v = x$ , 得  $\lambda = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$ .

16. 设  $T \in L(V)$  是正规算子. 求证:  $\text{Ker } T^* = \text{Ker } T, \text{Im } T^* = \text{Im } T$ .

*Proof*  $\forall v \in V, Tv = 0 \Leftrightarrow \|Tv\| = 0 \Leftrightarrow \|T^*v\| = 0 \Leftrightarrow T^*v = 0$ .

$\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp = (\text{Ker } T^*)^\perp = \text{Im } T$ .

$V = \text{Ker } T \oplus (\text{Ker } T)^\perp = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T^* = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$ .

17. 设  $T \in L(V)$  是正规算子. 求证:  $\forall n \in N^*, \text{Ker } T^n = \text{Ker } T, \text{Im } T^n = \text{Im } T$ .

*Proof* 先证明  $\text{Ker } T^2 \subseteq \text{Ker } T$ . 考虑  $v \in \text{Ker } T^2$ , 则  $\langle T^2v, T^2v \rangle = 0$ .

$$\langle T^2v, T^2v \rangle = \langle Tv, T^*T^2v \rangle = \langle Tv, T^2T^*v \rangle = \langle T^*Tv, TT^*v \rangle = 0 \Rightarrow T^*Tv = 0$$

$$\langle T^*Tv, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = 0 \Rightarrow Tv = 0 \Rightarrow v \in \text{Ker } T$$

结合显然的  $\text{Ker } T \subseteq \text{Ker } T^2$  有  $\text{Ker } T^2 = \text{Ker } T$ .

根据定理8.3和8.A.17, 有  $\forall n \in N^*, \text{Ker } T^n = \text{Ker } T, \text{Im } T^n = \text{Im } T$ .

## 18 Chapter 8.A

*Theorem 5.10/8.13* 特征向量/广义特征向量的独立性 设 $V$ 是有限维向量空间,  $T \in L(V)$ .

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的特征值,  $v_1, \dots, v_m$ 是分别与之对应的(广义)特征向量.

求证:  $v_1, \dots, v_m$ 线性无关.

*5.10 Proof* 令 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ , 下证 $a_1 = \dots = a_m = 0$ .

设 $k \in \{1, \dots, m\}$ . 对等式两边施加算子 $\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)$  ( $i \neq k$ ).

$$0 = a_k \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I) v_k = a_k \prod_{i=1}^m (\lambda_k - \lambda_i) v_k$$

由于这些特征值各不相同, 故 $\forall i = 1, \dots, m, \lambda_i - \lambda_k \neq 0$ . 从而只能有 $a_k = 0$ .

让 $k$ 依次等于 $1, \dots, m$ , 则 $a_1 = \dots = a_m = 0$ , 证毕.

*8.13 Proof* 令 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ , 下证 $a_1 = \dots = a_m = 0$ .

设 $k \in \{1, \dots, m\}$ . 令 $k$ 为最大的使 $(T - \lambda_k)^k v_k \neq 0$ 的自然数.

令 $v_0 = (T - \lambda_k)^k v_k$ , 则 $(T - \lambda_k)^{k+1} v_k = 0$ . 从而 $T v_0 = \lambda_k v_0$ , 进一步有

$$(T - \lambda_i) v_0 = (\lambda_k - \lambda_i) v_0 \Rightarrow (T - \lambda_i)^{\dim V} v_0 = (\lambda_k - \lambda_i)^{\dim V} v_0$$

对等式两边施加算子 $\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{\dim V} (T - \lambda_k)^k$  ( $i \neq k$ ).

$$0 = a_k \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{\dim V} (T - \lambda_k)^k v_k = a_k \prod_{i=1}^m (\lambda_k - \lambda_i)^{\dim V} v_0$$

由于这些特征值各不相同, 故 $\forall i = 1, \dots, m, (\lambda_i - \lambda_k)^{\dim V} \neq 0$ . 从而只能有 $a_k = 0$ .

两者的证明思路大体相似, 但定理8.13需要多乘以一个算子来构造一个“狭义”特征向量, 以使得定理5.10所施加的算子可操作.

*Theorem 8.19* 幂零算子的矩阵 设 $N \in L(V)$ 是一个幂零算子, 则存在 $V$ 的一组基, 使得 $M(N)$ 是对角线元素均为0的上三角矩阵.

*Proof* 设 $\dim V = n$ , 并令 $B_1$ 是 $\text{Ker } N$ 的一组基.

由于 $\text{Ker } N^i \subseteq \text{Ker } N^{i+1}$ , 因此该基可以被依次扩充成 $\text{Ker } N^2, \dots, \text{Ker } N^n$ 的一组基.

不妨设 $B_2, \dots, B_n$ 是依次扩充所得的基.

由于 $N$ 是幂零算子, 因此 $\text{Ker } N^n = V$ , 所以 $B_1, \dots, B_n$ 就是 $V$ 的一组基.

由于 $N B_{i+1} \in \text{Ker } B_i$ , 因此 $B_i$ 中的所有向量均可表示成 $B_1, \dots, B_i$ 中向量的线性组合, 也即该列后面的元素均为0.特别地,  $N B_1 = 0$ , 因此 $B_1$ 列的所有元素均为0.

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2. 定义  $T \in L(C^2)$  为  $T(w, z) = (-z, w)$ . 给出  $T$  的所有广义特征空间.

*Proof* 先给出  $T$  的所有特征值. 令  $T(w, z) = \lambda(w, z) = (-z, w)$ , 得到  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ .

因此  $(T - iI)^2(w, z) = -2(w - iz, z + iw), (T + iI)^2(w, z) = (w + iz, z - iw)$ .

最后  $G(i, T) = \text{Ker } (T - iI)^2 = (iz, z), G(-i, T) = \text{Ker } (T + iI)^2 = (-iz, z)$ .

3. 设  $T \in L(V)$  是可逆变换. 证明:  $\forall \lambda \neq 0, G(\lambda, T) = G(\lambda^{-1}, T^{-1})$ .

*Proof* 设  $\dim V = n$ , 则  $G(\lambda, T) = \text{Ker } (T - \lambda I)^n, G(\lambda^{-1}, T^{-1}) = \text{Ker } (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^n$ .

使用数学归纳法.  $n = 1$  时, 根据 5.C.9,  $E(\lambda, T) = E(\lambda^{-1}, T^{-1})$ , 命题成立.

接着假设  $\text{Ker } (T - \lambda I)^{n-1} = \text{Ker } (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{n-1}$ , 考虑  $\forall v \in \text{Ker } (T - \lambda I)^n$ .

即  $(T - \lambda I)^n v = (T - \lambda I)^{n-1} (T - \lambda I) v = 0$ .

利用归纳假设, 有  $(T - \lambda I) v \in \text{Ker } (T - \lambda I)^{n-1} = \text{Ker } (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{n-1}$ .

根据定理 5.20, 有  $(T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{n-1} (T - \lambda I) v = (T - \lambda I) (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{n-1} v = 0$ .

利用  $n = 1$  时的结论, 有  $(T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{n-1} v \in \text{Ker } (T - \lambda I) = \text{Ker } (T^{-1} - \lambda^{-1} I)$ .

得到  $(T^{-1} - \lambda^{-1} I) (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^{n-1} v = (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^n v = 0$ ,

因此  $v \in \text{Ker } (T^{-1} - \lambda^{-1} I)^n \Rightarrow G(\lambda, T) \subseteq G(\lambda^{-1}, T^{-1})$ .

$G(\lambda^{-1}, T^{-1}) \subseteq G(\lambda, T)$  的过程完全一致. 综上,  $G(\lambda, T) = G(\lambda^{-1}, T^{-1})$ .

5. 设  $T \in L(V), v \in V, m \in \mathbb{Z}^+$ , 且满足  $T^{m-1}v \neq 0, T^m v = 0$ .

求证:  $v, Tv, \dots, T^{m-1}v$  线性无关.

*Proof* 令  $\sum_{i=0}^{m-1} a_i T^i v = 0$ . 对等式两边施加算子  $T^{m-1}$ ,

得到  $\sum_{i=0}^{m-1} a_i T^{i+m-1} v = a_0 T^{m-1} v = 0$ , 因此  $a_0 = 0$ .

接着依次对该等式两边施加算子  $T^{m-2}, \dots, T$ , 得到  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-2} = 0$ .

而  $T^{m-1}v \neq 0$ , 因此必有  $a_{m-1} = 0$ , 从而  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ , 证毕.

9. 设  $S, T \in L(V)$  且  $ST$  是幂零算子, 证明  $TS$  也是幂零算子.

*Proof*

$$\text{Ker } (TS)^{\dim V} = \text{Ker } (TS)^{\dim V+1} = \text{Ker } T(ST)^{\dim V} S = V$$

其中  $(ST)^{\dim V} = 0$ , 因此第三个等号成立.

11. 证明或给出反例: 若  $T \in L(V)$  且  $\dim V = n$ , 则  $T^n$  可对角化.

*Proof* 反例: 设  $V = C^2, T(z_1, z_2) = (z_1, 0)$ , 则  $T^2(z_1, z_2) = (z_1, 0)$ .

因此  $T^2$  只有一个特征值, 无法对角化.

12. 设  $N \in L(V)$  满足存在  $V$  的一组基, 使得  $M(N)$  是对角元素均为 0 的上三角矩阵.  
求证:  $N$  是幂零算子.

*Proof* 设  $v_1, \dots, v_m$  是满足条件的一组基.

由于该矩阵是三角矩阵, 则根据定理 5.26 有  $Nv_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_i)$ .

进一步, 由于对角线元素均为 0, 因此  $Nv_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ .

因此  $\forall i = 1, \dots, m, N^m v_i = 0$ , 即  $N$  是幂零算子, 证毕.

15. 设  $N \in L(V)$  满足  $\text{Ker } N^{\dim V-1} \neq \text{Ker } N^{\dim V}$ .

求证:  $N$  是幂零算子且  $\forall i = 1, \dots, \dim V, \dim \text{Ker } N^i = i$ .

*Proof*

$$\text{Ker } N^{\dim V-1} \neq \text{Ker } N^{\dim V} \Rightarrow \forall i < j \in \{1, \dots, \dim V\}, \dim \text{Ker } N^i < \dim \text{Ker } N^j$$

因此  $\dim \text{Ker } N < \dots < \dim \text{Ker } N^{\dim V} \leq \dim V$ .

得到  $\dim \text{Ker } N^{\dim V} = \dim V$ , 即  $N$  是幂零算子, 且  $\dim \text{Ker } N^i = i$ .

16. 设  $T \in L(V)$ . 求证

$$V = \text{Im } T^0 \supset \text{Im } T^1 \supset \dots$$

*Proof*  $\forall v \in V, T^{i+1}v \in \text{Im } T^{i+1}, T^{i+1}v = T^i(Tv) \in \text{Im } T^i$ .

因此  $\forall i \in N^*, \text{Im } T^{i+1} \subseteq \text{Im } T^i$ . 特别地,  $T^0 = I, \text{Im } I = V$ .

17. 设  $T \in L(V), m \in N^*$  满足  $\text{Im } T^m = \text{Im } T^{m+1}$ .

求证:  $\forall i \in N^*, \text{Im } T^{m+i} = \text{Im } T^m$ .

*Proof* 根据定理 3.22,  $\dim V = \dim \text{Ker } T^i + \dim \text{Im } T^i$ . 根据定理 8.3,

$$\begin{aligned} \text{Ker } T^m &= \text{Ker } T^{m+1} \Rightarrow \forall i \in N^*, \text{Ker } T^{m+i} = \text{Ker } T^m \\ \Rightarrow \dim \text{Ker } T^{m+i} &= \dim \text{Ker } T^m \Rightarrow \dim \text{Im } T^m = \dim \text{Im } T^{m+1} = \dots \end{aligned}$$

根据 2.C.1 和 8.A.16,  $\forall i \in N^*, \text{Im } T^{i+1} = \text{Im } T^i$ .

18. 设  $T \in L(V), \dim V = n$ . 求证:

$$\text{Im } T^n = \text{Im } T^{n+1} = \dots$$

*Proof* 根据定理 3.22 和定理 8.4,  $\forall i > n \in N^*, \dim \text{Im } T^{i+1} = \dim \text{Im } T^i$ .

根据 2.C.1 和 8.A.16,  $\forall i \in N^*, \text{Im } T^{i+1} = \text{Im } T^i$ .

## 19 Chapter 8.B

*Theorem 8.21* 广义特征空间分解

设 $V$ 是有限维复向量空间且 $T \in L(V)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 所有的不同特征值. 求证:

(a)  $\forall i = 1, \dots, m, G(\lambda_i, T)$ 是 $T$ 下的不变子空间.

(b)  $\forall i = 1, \dots, m, (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$ 是幂零算子.

(c)  $V = \bigoplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ .

*lemma/Theorem 8.20*  $\text{Ker } p(T)$ 和 $\text{Im } p(T)$ 是 $T$ 下的不变子空间.

*Proof* 对 $\text{Ker } p(T)$ 和 $\text{Im } p(T)$ 逐一验证即可.

$$\forall v \in \text{Ker } p(T), p(T)(Tv) = T(p(T)v) = 0 \Rightarrow Tv \in \text{Ker } p(T)$$

$$\forall v \in \text{Im } p(T), \exists u \in V, p(T)u = v \Rightarrow Tv = T(p(T)u) = p(T)(Tu), Tv \in \text{Im } p(T)$$

*a.Proof* 考虑 $p(z) = (z - \lambda_i)^n$ , 从而 $\text{Ker } p(T) = G(\lambda_i, T)$ .

根据引理,  $G(\lambda_i, T)$ 是 $T$ 下的不变子空间.

*b.Proof*  $\text{Ker } (T - \lambda_i I)^n = G(\lambda_i, T)$ , 显然 $(T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$ 是幂零算子.

*c.Proof* 使用第二数学归纳法. 当 $n = 1$ 时,  $V = G(\lambda, T)$ , 命题成立.

现在给出假设: 对于任意有限维复向量空间 $U$ 和 $R \in L(U)$ 满足 $\dim U < \dim V = n$ ,

$R$ 的所有特征值分别为 $\mu_1, \dots, \mu_\zeta$ , 都有 $U = \bigoplus_{i=1}^\zeta G(\mu_i, R)$ .

则当 $\dim V = n$ 时, 首先有 $V = \text{Ker } (T - \lambda_1 I)^n \oplus \text{Im } (T - \lambda_i I)^n$ . 不妨令 $U = \text{Im } (T - \lambda_i I)^n$ .

根据引理,  $U$ 是 $T$ 下的不变子空间, 且满足 $\dim U < \dim V$ , 因此 $T|_U$ 存在.

这满足我们的归纳假设, 由于 $T|_U$ 的所有特征值是 $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 得到 $U = \bigoplus_{i=2}^m G(\lambda_i, T|_U)$ .

以下将证明 $\forall i = 2, \dots, m, G(\lambda_i, T) \subseteq G(\lambda_i, T|_U)$ , 设 $\forall i = 2, \dots, m, v_i^\alpha \in G(\lambda_i, T) \subseteq V$ .

由于 $V = G(\lambda_1, T) \oplus U = G(\lambda_1, T) \oplus \bigoplus_{j=2}^m G(\lambda_j, T|_U)$ ,

故 $\exists v_j^\beta \in G(\lambda_j, T|_U), v_i^\alpha = v_1^\alpha + \sum_{j=2}^m v_j^\beta$ . 因而 $v_i^\alpha - v_i^\beta = v_1^\alpha + \sum_{j=2}^m v_j^\beta (j \neq i)$ .

根据定理8.19, 若这些向量为 $T$ 的广义特征向量, 那么它们必须线性无关.

然而它们的系数均为1, 因此它们只能为零向量, 这表明 $v_i^\alpha - v_i^\beta = v_1^\alpha = v_j^\beta = 0$ .

因此 $v_i^\alpha = v_i^\beta \in G(\lambda_i, T|_U)$ , 即 $G(\lambda_i, T) \subseteq G(\lambda_i, T|_U)$ .

结合 $G(\lambda_i, T|_U) \subseteq G(\lambda_i, T)$ , 得到 $G(\lambda_i, T|_U) = G(\lambda_i, T)$ .

于是 $U = \bigoplus_{i=2}^m G(\lambda_i, T), V = G(\lambda_1, T) \oplus U = \bigoplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ , 证毕.

*Theorem 8.33* 可逆算子的平方根 设 $V$ 是有限维复向量空间,  $T \in L(V)$ 是可逆算子.

证明:  $T$ 存在一个平方根 $R$ , 使得 $R^2 = T$ .

*lemma/Theorem 8.31* 若 $N \in L(V)$ 是幂零算子, 则 $I + N$ 有一个平方根 $R$ .

*Proof* 根据 $\sqrt{1+x} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, a_0 = 1$ , 可以猜想 $I + N$ 的平方根具有类似形式

$$R = \sum_{i=1}^{m-1} a_i N^i, a_0 = 1, N^m = 0$$

因此尝试对左右两边平方, 得到

$$I + N = \left( \sum_{i=1}^{m-1} a_i N^i \right)^2 = I + 2a_1 N + \sum_{i=2}^{m-1} (2a_i + f(a_1, \dots, a_{i-1})) N^i$$

显然 $a_1 = \frac{1}{2}$ . 对于第 $i$ 项, 其中的 $f(a_1, \dots, a_{i-1})$ 是已知的.

因此只需解出 $a_i$ , 使得 $2a_i + f(a_1, \dots, a_{i-1}) = 0$ 即可.

*Theorem.Proof* 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的所有不同特征值.

根据 *Theorem 8.21.b*,  $N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$ 是幂零算子.

因此可以将 $T|_{G(\lambda_i, T)}$ 分解为

$$\forall i = 1, \dots, m, T|_{G(\lambda_i, T)} = \lambda_i \left( I + \frac{N_i}{\lambda_i} \right)$$

由于 $T$ 是可逆变换, 因而 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$ , 该等式始终有意义.

因此根据引理,  $T|_{G(\lambda_i, T)}$ 有平方根 $R_i$ .

由于 $V = \oplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ , 因此 $\forall v \in V, \exists u_i \in G(\lambda_i, T), v = \sum_{i=1}^m u_i$ . 定义 $R$ 为

$$Rv = \sum_{i=1}^m R_i u_i, i = 1, \dots, m \Rightarrow R^2 v = \sum_{i=1}^m R_i^2 u_i = \sum_{i=1}^m T|_{G(\lambda_i, T)} u_i = Tv$$

因此 $R$ 是 $T$ 的一个平方根.



3. 设  $T, S \in L(V)$ , 且  $S$  是可逆算子. 证明:  $T$  和  $S^{-1}TS$  的相同特征值有相同的重数.

*Proof* 根据 5.A.15,  $T$  和  $S^{-1}TS$  拥有相同的特征值, 设  $\lambda$  是其中之一.

现在考虑  $(S^{-1}TS - \lambda I)^{\dim V}$ . 根据 5.B.5,

$$\begin{aligned}(S^{-1}TS - \lambda I)^{\dim V} &= (S^{-1}TS - \lambda S^{-1}S)^{\dim V} = (S^{-1}(TS - \lambda S))^{\dim V} \\ &= (S^{-1}(T - \lambda I)S)^{\dim V} = S^{-1}(T - \lambda I)^{\dim V}S\end{aligned}$$

对于  $v \in \text{Ker } G(\lambda, T)$ , 考虑  $S^{-1}v$ , 有  $(S^{-1}(T - \lambda I)^{\dim V}S)(S^{-1}v) = S((T - \lambda I)^{\dim V}v) = 0$ .

因此  $S^{-1}(G(\lambda, T)) \subseteq G(\lambda, S^{-1}TS)$ , 同理  $S(G(\lambda, S^{-1}TS)) \subseteq G(\lambda, T)$ .

从而  $\dim G(\lambda, T) = \dim G(\lambda, S^{-1}TS)$ .

5. 设  $V$  是复向量空间且  $T \in L(V)$ .

求证:  $T$  有由特征向量组成的基等价于  $T$  的所有广义特征向量都是特征向量.

*Proof* 必要性: 根据定理 8.23,  $T$  有一组由广义特征向量组成的基, 而  $T$  的所有广义特征向量都是特征向量, 从而  $T$  有由特征向量组成的基.

充分性: 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $T$  的不同特征值.

根据定理 5.41,  $T$  有由特征向量组成的基等价于  $V = \bigoplus_{i=1}^m E(\lambda_i, T)$ .

根据定理 8.21,  $V = \bigoplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ .

由定理 8.13 指出的广义特征向量的无关性, 得  $\forall i = 1, \dots, m, G(\lambda_i, T) = E(\lambda_i, T)$ .

即  $T$  的所有广义特征向量都是特征向量, 证毕.

7. 设  $V$  是复向量空间且  $T \in L(V)$ , 求证:  $\forall T \in L(V), \exists S \in L(V), S^3 = T$ .

*Proof* 参考引理 8.31 的证明, 猜想  $I + N$  的立方根也具有形式

$$R = \sum_{i=1}^{m-1} a_i N^i, a_0 = 1, N^m = 0$$

令  $R^3 = I + N$ , 得到

$$I + N = I + 3a_1 N + \sum_{i=2}^{m-1} (2a_i + f(a_1, \dots, a_{i-1})) N^i$$

得到  $a_1 = \frac{1}{3}$ , 依次解出剩下的  $a_2, \dots, a_{m-1}$  即可, 下设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $T$  的不同特征值.

考虑幂零算子  $N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$ , 将  $T|_{G(\lambda_i, T)}$  分解为  $\lambda_i(I + \frac{N_i}{\lambda_i})$ .

从而  $\forall i = 1, \dots, m, N_i$  都有立方根  $R_i$ .

由于  $V = \bigoplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ , 因此  $\forall v \in V, \exists! u_i \in G(\lambda_i, T), v = \sum_{i=1}^m u_i$ .

定义  $R$  为  $Rv = \sum_{i=1}^m R_i u_i$ , 则  $R$  是  $T$  的一个立方根, 证毕.

10. 设 $V$ 是有限维复向量空间且 $T \in L(V)$ .

求证: 存在 $D, N \in L(V)$ 满足 $T = D + N$ 且 $D$ 可对角化,  $N$ 是幂零算子,  $DN = ND$ .

*Proof* 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的不同特征值, 考虑 $T|_{G(\lambda_i, T)}$ .

令 $D_i = \lambda_i I|_{G(\lambda_i, T)}$ ,  $N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$ , 显然 $D_i$ 可对角化,  $N_i$ 是幂零算子.

根据定理8.21,  $V = \bigoplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ . 因此 $\forall v \in V, \exists! v_i \in G(\lambda_i, T), v = \sum_{i=1}^m v_i$ .

分别定义 $D$ 和 $N$ 为 $Dv = \sum_{i=1}^m D_i v_i, Nv = \sum_{i=1}^m N_i v_i$ .

$M(D)$ 只有对角线元素不为0, 即 $D$ 可对角化;  $M(N)$ 的对角线元素均为0, 即 $N$ 是幂零算子.

下证 $DN = ND$ . 考虑 $\forall v \in V$ , 有

$$(ND)v = N \sum_{i=1}^m D_i v_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i N_i v_i = (DN)v$$

11. 设 $V$ 是有限维复向量空间且 $T \in L(V)$ .

设 $v_1, \dots, v_n$ 是 $V$ 的一组基, 并满足 $M(T, (v_1, \dots, v_n))$ 是上三角矩阵.

求证:  $T$ 的每个特征值 $\lambda$ 在矩阵对角线上出现的次数即为 $\lambda$ 作为 $T$ 的特征值的重数.

*Proof* 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的不同特征值, 并设矩阵对角线元素依次为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

由于 $M(T)$ 是上三角矩阵, 故 $\forall j = 1, \dots, m, \exists i = 1, \dots, n, \alpha_j = \lambda_i$ .

将 $\lambda_i$ 在矩阵对角线上出现的次数记为 $d_i$ , 则 $\sum_{i=1}^m d_i = n$ .

现在考虑 $(T - \lambda_i I)^n$ . 显然 $M((T - \lambda_i I)^n)$ 也是上三角矩阵,

且其对角线元素依次为 $(\alpha_1 - \lambda_i)^n, \dots, (\alpha_n - \lambda_i)^n$ . 显然, 其中有 $d_i$ 个元素为0.

将剩下的非零元素标记为 $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-d_i}$ , 其对应的基向量也标记为 $v'_1, \dots, v'_{n-d_i}$ .

另将 $\forall k = 1, \dots, n - d_i, v'_k$ 的前一个基向量依次标记为 $v''_k$ .

因此 $(T - \lambda_i)^n v'_k = \alpha'_k v'_k + u_k$ , 其中 $u_k \in \text{span}(v_1, \dots, v''_k)$ , 即 $(T - \lambda_i)^n v'_k \notin \text{span}(v_1, \dots, v''_k)$ .

根据2.A.11,  $(T - \lambda_i)^n v'_1, \dots, (T - \lambda_i)^n v'_{n-d_i}$ 线性无关.

故 $\text{span}((T - \lambda_i)^n v'_1, \dots, (T - \lambda_i)^n v'_{n-d_i}) \subseteq \text{Im}(T - \lambda_i)^n$ , 得 $\dim \text{Im}(T - \lambda_i)^n \geq n - d_i$ .

由 $V = \text{Ker}(T - \lambda_i)^n \oplus \text{Im}(T - \lambda_i)^n, \dim V = \dim \text{Ker}(T - \lambda_i)^n \oplus \dim \text{Im}(T - \lambda_i)^n$ ,

得到 $\forall i = 1, \dots, m, \dim \text{Ker}(T - \lambda_i)^n \leq d_i$ , 从而 $\sum_{i=1}^m \dim \text{Ker}(T - \lambda_i)^n \leq \sum_{i=1}^m d_i = n$ .

因此只能有 $\forall i = 1, \dots, m, \dim G(\lambda_i, T) = d_i$ .

## 20 Chapter 8.C

*Theorem 8.46* 极小多项式的决定 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V)$ .

设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的不同特征值,  $k_1, \dots, k_m$ 分别是 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 对应的最大Jordan块的维数.

求证:  $T$ 的极小多项式是 $p_m(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{k_i}$ .

*Proof* 先证 $\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i} = 0$ . 根据定理8.21,  $V = \oplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$ ,

因此分别考虑 $\forall i = 1, \dots, m, (T - \lambda_i I)^{k_i}|_{G(\lambda_i, T)}$ , 并令 $N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$ .

根据定理8.55,  $G(\lambda_i, T)$ 存在一组Jordan基 $N_i^{m_1}v_1, \dots, v_1, \dots, N_i^{m_n}v_n, \dots, v_n$ .

因此 $\max\{m_1, \dots, m_n\} = k_i$ , 并令 $U_j = \text{span}(N_i^{m_j}v_j, \dots, v_j)$ , 则 $G(\lambda_i, T) = \oplus_{j=1}^n U_j$ .

根据定理8.55的证明,  $\forall j = 1, \dots, n, U_j$ 都是 $N_i$ 下的不变子空间, 且有 $N_i^{m_j}|_{U_j} = 0$ .

因此 $\forall j = 1, \dots, n, N_i^{\max\{m_1, \dots, m_n\}}|_{U_j} = 0$ , 即 $(T - \lambda_i I)^{k_i}|_{G(\lambda_i, T)} = 0$ .

对于 $\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i}$ , 根据算子的可交换性, 总是可以把因子 $(T - \lambda_i I)^{k_i}$ 移至最后,

从而 $\forall i = 1, \dots, m, \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i}|_{G(\lambda_i, T)} = 0$ , 即 $\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i} = 0$ .

下证其确为能使 $p(T) = 0$ 的幂次最低的首一多项式, 考虑 $p'_m(z) = \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k'_i}$ .

其中,  $\forall i = 1, \dots, m, k'_i \leq k_i$ , 且 $\exists r = 1, \dots, m, k'_r < k_r$ .

由于 $(T - \lambda_r I)$ 的幂指数 $k'_r < k_r$ , 那么对于 $k_r$ 所对应的 $U_j$ , 必然有 $N_r^{k'_r}|_{U_j} \neq 0$ .

因此 $p_m(z)$ 的幂次已然最低, 即 $p_m(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{k_i}$ 就是 $T$ 的极小多项式.

2. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V)$ 只有两个特征值5, 6.

求证:  $(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1} = 0$ , 其中 $n = \dim V$ .

*Proof*  $T$ 有两个特征值, 故每个特征值的重数最多为 $n - 1$ .

因而 $T$ 的特征多项式是 $(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1}$ 的因子, 即 $(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1} = 0$ .

7. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $P \in L(V)$ 满足 $P^2 = P$ .

求证:  $P$ 的特征多项式是 $z^m(z - 1)^n$ , 其中 $m = \dim \text{Ker } P, n = \dim \text{Im } P$ .

*Proof* 根据5.B.4,  $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$ .

$\forall u \in \text{Ker } P, u \in E(0, T); \forall Pv \in \text{Im } P, P(Pv) = Pv \in \text{Im } P$ , 即 $Pv \in E(1, T)$ .

因此 $V = E(0, P) \oplus \text{Im } P, \text{Im } P \subseteq E(1, P) \subseteq G(1, P)$ .

由空间维数的限制, 只能有 $E(0, P) = G(0, P), \text{Im } P = E(1, P) = G(1, P)$ .

因此 $P$ 的特征多项式为 $p_c(z) = z^{\dim G(0, P)}(z - 1)^{\dim G(1, P)} = z^m(z - 1)^n$ .

10. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V)$ 是可逆算子.

令 $p, q$ 分别指代 $T, T^{-1}$ 的特征多项式, 证明:  $q(z) = \frac{1}{p(0)} z^{\dim V} p(\frac{1}{z})$ .

*Proof* 根据8.A.3和5.A.21,

$\lambda$ 是 $T$ 的特征值和 $\lambda^{-1}$ 是 $T^{-1}$ 的特征值等价, 且 $\dim G(\lambda, T) = \dim G(\lambda^{-1}, T^{-1})$ .

设 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的不同特征值,  $d_1, \dots, d_m$ 是其对应的重数,

则 $p(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{d_i}, q(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i^{-1})^{d_i}$ .

$$q(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i^{-1})^{d_i} = \prod_{i=1}^m \frac{z^{d_i}}{\lambda_i^{d_i}} (\lambda_i - \frac{1}{z})^{d_i} = \prod_{i=1}^m \frac{z^{d_i}}{-\lambda_i^{d_i}} (\frac{1}{z} - \lambda_i)^{d_i} = \frac{z^{\dim V}}{p(0)} p(\frac{1}{z})$$

12. 设 $V$ 是有限维向量空间且 $T \in L(V)$ .

求证:  $T$ 的极小多项式没有重根等价于 $T$ 有由特征向量组成的基.

*Proof* 根据定理8.46,  $T$ 的极小多项式 $p_m(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{k_i}$ ,

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 $T$ 的不同特征值,  $k_1, \dots, k_m$ 是 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 对应的最大Jordan块的维数.

由于 $p_m(z)$ 没有重根, 故 $k_1 = \dots = k_m = 1$ , 因此 $G(\lambda_i, T)$ 存在一组基 $v_1, \dots, v_n$ ,

其中 $(T - \lambda_i I)v_1 = \dots = (T - \lambda_i I)v_n = 0$ , 即 $v_1, \dots, v_n \in \text{Ker}(T - \lambda_i I) = E(\lambda_i, T)$ ,

因此 $T$ 的所有广义特征向量都是特征向量.

根据8.B.5, 这等价于 $T$ 有由特征向量组成的基, 证毕.

18. 设 $a_0, \dots, a_{n-1} \in C$ . 给出以下矩阵的特征多项式和极小多项式.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

*Proof* 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $C^n$ 的一组标准基. 注意到 $\forall i = 1, \dots, n-1, Te_i = Te_{i+1}$ .

因此 $T^n e_1 = Te_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i e_1$ , 整理得 $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i + T^n)e_1 = 0$ .

从而矩阵的极小多项式为 $\sum_{i=0}^n a_i T^i, a_n = 1$ .

由于 $\dim p_m(z) = \dim V$ , 根据8.C.17, 其特征多项式与极小多项式相同.

## 21 Chapter 8.D

*Theorem 8.55 Jordan基的存在性* 考虑有限维复向量空间 $V$ 和幂零算子 $N \in L(V)$ .

证明:  $V$ 存在一些线性无关的向量 $v_1, \dots, v_n$ ,

满足 $N^{m_1}v_1, \dots, v_1, \dots, N^{m_n}v_n, \dots, v_n$ 是 $V$ 的一组基, 且 $N^{m_1+1}v_1 = \dots = N^{m_n+1}v_n = 0$ .

*Proof* 使用数学归纳法. 考虑 $\dim V = 1$ 的情况. 取 $\forall v \in V, m = 0$ , 则 $v$ 即为 $V$ 的基.

现在假设对于任意的 $W$ 满足 $\dim U < \dim V$ , 都存在一组如上形式的基.

任取 $v_1 \in V$ , 考虑一系列向量 $v_1, \dots, N^{m_1}v_1$ , 其中 $N^{m_1+1}v_1 = 0$ .

根据8.A.5,  $v_1, \dots, N^{m_1}v_1$ 线性无关. 令 $U = \text{span}(v_1, \dots, N^{m_1}v_1)$ ,

则 $N(U) = \text{span}(Nv_1, \dots, N^{m_1}v_1) \subset U$ , 因此 $U$ 是 $N$ 下的不变子空间.

考虑商空间 $V/U$ ,  $\dim(V/U) = \dim V - \dim U < \dim V$ , 因此可以对 $V/U$ 使用归纳.

构造 $N$ 在 $V/U$ 上的诱导变换 $(N/U) \in L(V/U)$ 满足 $\forall v + U \in V/U, (N/U)(v + U) = Nv + U$ .

下面验证这个构造的合法性. 考虑 $v_1 + U = v_2 + U \in V/U$ , 于是 $v_1 - v_2 \in U$ .

由于 $U$ 是 $N$ 下的不变子空间, 因而 $N(v_1 - v_2) = Nv_1 - Nv_2 \in U$ ,

得到 $Nv_1 + U = Nv_2 + U$ , 即 $(N/U)(v_1 + U) = (N/U)(v_2 + U)$ .

随后验证 $(N/U)$ 是线性变换, 依旧考虑 $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$ .

$$\begin{aligned} (N/U)(c_1(v_1 + U) + c_2(v_2 + U)) &= (N/U)((c_1v_1 + c_2v_2) + U) = N(c_1v_1 + c_2v_2) + U \\ &= c_1Nv_1 + c_2Nv_2 + U = c_1(Nv_1 + U) + c_2(Nv_2 + U) \\ &= c_1(N/U)(v_1 + U) + c_2(N/U)(v_2 + U) \end{aligned}$$

另外,  $(N/U)$ 也是幂零算子. 考虑 $\forall v + U \in V/U$ , 则 $(N/U)^m(v + U) = N^m v + U$ .

由 $N$ 是幂零算子得 $\forall v \in V, N^{\dim V} v \in U = 0$ ,  $(N/U)^{\dim V}(v + U) = 0 + U \in \text{Ker}(N/U)^{\dim V}$ .

对 $V/U$ 使用归纳, 即 $(N/U)^{m_2}(v_2 + U), \dots, v_2 + U, \dots, (N/U)^{m_n}(v_n + U), \dots, v_n + U$

是 $V/U$ 的一组基, 且满足 $(N/U)^{m_2+1}(v_2 + U) = \dots = (N/U)^{m_n+1}(v_n + U) = 0$ .

根据3.E.13,  $N^{m_1}v_1, \dots, v_1, \dots, N^{m_n}v_n, \dots, v_n$ 即为 $V$ 的一组基.