1 *Chapter 1.C*

13. 若对于$\forall i=1,\cdots,m$，都有U_i为V的子空间，

求证:$\bigcup_{i=1}^m U_i$仍是V的子空间与$\exists j=1,\cdots,m$，使得$\forall i=1,\cdots,m$，$U_i\subseteq U_j$等价.

$Proof$: 充分性的证明非常显然.

若$\forall i=1,\cdots,m$，$U_i\subseteq U_j$，则$\bigcup_{i=1}^m U_i=U_j$，而U_j是V的一个子空间，证毕.

必要性:先来根据二元情况证明一个引理.

$lemma$: 若V_1,V_2是V的子空间且$V_1\cup V_2$仍为V的子空间，则必然有$V_1\subseteq V_2$或$V_2\subseteq V_1$.

$Proof$: 任取$v_1\in V_1\backslash V_2$和$v_2\in V_2\backslash V_1$，考虑v_1+v_2.

由于$V_1\cup V_2$仍为V的子空间，故有$v_1+v_2\in V_1$或$v_1+v_2\in V_2$.

若$v_1+v_2\in V_1$，则$v_2=(v_1+v_2)+(-v_1)\in V_1$，与$v_2\notin V_1$矛盾；

若$v_1+v_2\in V_2$，则$v_1=(v_1+v_2)+(-v_2)\in V_2$，与$v_1\notin V_2$矛盾.

因此必有$V_1\subseteq V_2$或$V_2\subseteq V_1$.

现在使用数学归纳法应用该引理，先考虑$i=1$的情况.令$V_1=U_1,V_2=\bigcup_{i=2}^m U_i$.

则必有$1^\circ\bigcup_{i=1}^m U_i\subseteq U_1$或$2^\circ U_1\subseteq\bigcup_{i=j+1}^m U_i$.

若为1°则U_1即为所求，若为2°则$\bigcup_{i=2}^m U_i$是V的子空间，归纳继续.

设$i=j$时归纳继续，即$U_j\subseteq\bigcup_{i=j+1}^m U_i$. 则当$i=j+1$时，令$V_1=U_{j+1},V_2=\bigcup_{i=j+2}^m U_i$，

仍有$\bigcup_{i=j+2}^m U_i\subseteq U_{j+1}$或$U_{j+1}\subseteq\bigcup_{i=j+2}^m U_i$，即$U_{j+1}$是所求子集，或者归纳可以继续.

由于子空间个数有限，因此进程一定可以在某一步结束，下证结束时找到的U_j即为所求.

不妨假设第j步找到了满足条件的U_j，即U_j满足$\bigcup_{i=j+1}^m U_i\subseteq U_j$.

此时回到第$j-1$步，由于该步必定出现了2°，因此有$U_{j-1}\subseteq\bigcup_{i=j}^m U_i=U_j$，即$U_{j-1}\subseteq U_j$.

随即$\bigcup_{i=j-1}^m U_i=U_j$，进而$U_{j-2}\subseteq\bigcup_{i=j-1}^m U_i=U_j$. 以此类推，$\forall i=1,\cdots,j-1$，$U_i\subseteq U_j$.

结合$\bigcup_{i=j+1}^m U_i\subseteq U_j$，得$\forall i=1,\cdots,m,U_i\subseteq U_j$，证毕.

2 *Chapter 2.A*

10. 设$v_1, \cdots, v_m$在V中线性无关且$w \in V$.
求证：若$v_1 + w, \cdots, v_m + w$线性相关，则$w \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m)$.
Proof: 若$v_1 + w, \cdots, v_m + w$线性相关，则有$\sum_{i=1}^m a_i(v_i + w) = 0, \exists i = 1, \cdots, m, a_i \neq 0$.
从而$\sum_{i=1}^m a_i v_i + w \sum_{i=1}^m a_i = 0$.
$1°$若$\sum_{i=1}^m a_i \neq 0$，则$w = -\dfrac{\sum_{i=1}^m a_i v_i}{\sum_{i=1}^m a_i} \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m)$，命题得证.
$2°$若$\sum_{i=1}^m a_i = 0$，则$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$. 而$v_1, \cdots, v_m$在V中线性无关，故$a_1 = \cdots = a_m = 0$.
从而$\forall i = 1, \cdots, m, a_i = 0$，与假设矛盾.该情况不存在，证毕.

14. 求证：V是无限维向量空间等价于V中存在无限多线性无关的向量.
Proof: 必要性的证明是显然的，以下使用数学归纳法证明充分性.
先看$n = 1$的情况并设$v_1 \neq 0 \in V$.
由于V是无限维的，故一定存在$v_2 \in V \notin \operatorname{span}\{v_1\}$，从而$v_1, v_2$线性无关.
再假设$n = m$时情况成立，即V中存在$v_1, \cdots, v_m$线性无关.
考虑$n = m + 1$时的情况.由于V是无限维的，故一定存在$v_{m+1} \notin \operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_m\}$.
根据*2.A.11*，$v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}$线性无关. 因此命题对任意的自然数$m$均成立，证毕.

3 *Chapter 2.B*

8. 设U和W都是V的子空间，且满足$V = U \oplus W$.

$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n$分别是$U, W$的一组基. 求证：$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n$是$V$的一组基.

Proof: 先证明$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_m$线性无关.

设$\exists a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n, \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i w_i = 0$，即$v = \sum_{i=1}^m a_i u_i = -\sum_{i=1}^n b_i w_i$.

这表明U中的某元素与W中的某元素相等，即$v \in U \cap W$.

而$V = U \oplus W$，即$V \cap W = \{0\}$，得$\sum_{i=1}^m a_i u_i = -\sum_{i=1}^n b_i w_i = 0$.

由$u_1, \cdots, u_m$和$w_1, \cdots, w_m$分别线性无关，有$u_1 = \cdots = u_m = w_1 = \cdots = w_n = 0$，得证.

再证$V = \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n)$，且$\mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n) \subseteq V$是显然的.

由$V = U \oplus W$，得$\forall v \in V, \exists u \in \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m), w \in \mathrm{span}(w_1, \cdots, w_n), v = u + w$.

因此$\forall v \in V, v \in \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n)$，即$V \subseteq \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n)$.

结合$\mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n) \subseteq V$，得到$V = \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n)$，证毕.

4 *Chapter 2.C*

10. 设$p_0, p_1, \cdots, p_m \in P(F)$，其中$p_j$是次数为$j$的多项式.
求证：$p_0, p_1, \cdots, p_m$是$P_m(F)$的一组基.
Proof: 使用数学归纳法.先验证$m = 0$的情况，显然成立.
随后假设$j = m$时结论成立，需证$\mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1}) = \mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, x^{m+1})$.
下证$1°\mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1}) \subseteq \mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, x^{m+1})$
并且$2°\mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, x^{m+1}) \subseteq \mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1})$.
$1°$的证明是显然的.$\forall p \in \mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1}), p \in P_{m+1}(F)$.
即$\mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1}) \subseteq \mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, x^{m+1})$.
下证$2°$成立.设选定的$p_{m+1} = a_{m+1}x^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i (a_{m+1} \neq 0)$.
变形得到$x^{i+1} = (p_{m+1} - \sum_{i=0}^{m} a_i x^i)/a_{m+1} \in \mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, p_{m+1})$.
而$\mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m) = \mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m)$，
故$\mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, p_{m+1}) = \mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1})$.
从而$x^{m+1} \in \mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1})$，
进而$\mathrm{span}(1, x, \cdots, x^m, x^{m+1}) \subseteq \mathrm{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m, p_{m+1})$.
如此$1°$和$2°$均成立且向量均线性无关，即该张成组确实是$P_m(F)$的一组基.

14. 设$U_1, \cdots, U_m$都是V的有限维子空间，且$U_1, \cdots, U_m$相互独立.
求证：$\sum_{i=1}^{m} U_i$是有限维向量空间，且$\dim\ \sum_{i=1}^{m} U_i = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$.
Proof: 设U_i的一组基为$u_1^i, \cdots, u_{a_i}^i$，则$\sum_{i=1}^{m} U_i = \mathrm{span}(u_1^1, \cdots, u_{a_1}^1, \cdots, u_{a_m}^1, \cdots, u_{a_m}^m)$.
因而$\dim\ \sum_{i=1}^{m} U_i \leq \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$，即$\sum_{i=1}^{m} U_i$是有限维向量空间.
下面使用数学归纳法，先验证$U_1 + U_2$的情况.
由于$\dim\ (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim\ (U_1 \cap U_2)$且$U_1 \cap U_2 = \{0\}$，
故$\dim\ (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$，从而$n = 2$的情况成立.
随后假设$n = m$时结论成立，则当$n = m + 1$时，
有$\dim\ (\sum_{i=1}^{m} U_i + U_{m+1}) = \dim\ \sum_{i=1}^{m} U_i + \dim U_{m+1} - \dim\ (\sum_{i=1}^{m} U_i \cap U_{m+1})$.
由于$n = m$时结论成立，故$\dim\ \sum_{i=1}^{m} U_i = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$.
又由于U_i相互独立，故$\sum_{i=1}^{m} U_i \cap U_{n+1} = \{0\}$. 故$\dim\ \sum_{i=1}^{m} U_i = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$，证毕.

5 *Chapter 3.A*

11. 设V是有限维向量空间.设U是V的一个子空间且$S \in L(U, W)$.
求证：存在$T \in L(V, W)$，对所有$u \in U$满足$Tu = Su$.
Proof: 设$u_1, \cdots, u_m$是U的一组基.由于U是V的一个子空间，
故存在$v_1, \cdots, v_n$，使得$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$是$V$的一个子空间.
随后证明T的存在性.设$w_{m+1}, \cdots, w_{m+n} \in W$，令

$$Tu_i = Su_i, i = 1, \cdots, m \quad Tv_i = 0, i = m+1, \cdots, m+n$$

定理3.5保证了线性变换T的存在性.从而对于任意的$u = \sum_{i=1}^m a_i u_i$，有

$$Tu = T\sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{i=1}^m a_i Tu_i = \sum_{i=1}^m a_i Su_i = S\sum_{i=1}^m a_i u_i = Su$$

12. 设V是维数大于0的有限维向量空间且W是无限维向量空间.
求证：$L(V, W)$是无限维向量空间.
Proof: 根据*2.A.14*，
W中存在一列向量$w_1, w_2, \cdots$满足对于任意的正数m，都有$w_1, \cdots, w_m$线性无关.
设存在一些T_i满足$T_i v = w_i, i = 1, \cdots, m$.
我们需要证明对于任意的正数m，都有$T_1, \cdots, T_m$线性无关.
考虑$(\sum_{i=1}^m a_i T_i)v = 0$，则有$\sum_{i=1}^m a_i(T_i v) = \sum_{i=1}^m a_i w_i = 0$.
根据*2.A.14*，有$a_1 = \cdots = a_m = 0$，从而$T_1, \cdots, T_m$线性无关，证毕.

13. 设$v_1, \cdots, v_m$是V中一列线性相关的向量且$W \neq \{0\}$.
求证：W中存在$w_1, \cdots, w_m$，使得没有$T \in L(V, W)$能满足$\forall i = 1, \cdots, m, Tv_i = w_i$.
Proof: 由于$v_1, \cdots, v_m$线性相关，不妨令$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$且$a_t \neq 0$.
下面构造$w_1, \cdots, w_m$.令其中$w_t \neq 0$，且$w_i = 0$若$i \neq t$.
利用反证法.若$Tv_i = w_i$对于任意的$i = 1, \cdots, m$均成立，则

$$0 = T\sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i Tv_i = \sum_{i=1}^m a_i w_i = a_t w_t \neq 0$$

矛盾.假设不成立，原命题得证.

6 *Chapter 3.B*

3. 设$v_1,\cdots,v_m\in V$，定义$T\in L(F^m,V)$为$T(z_1,\cdots,z_m)=\sum_{i=1}^m z_iv_i$.
(a)若$V=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$，则$T$具有怎样的性质？
(b)若$v_1,\cdots,v_m$线性无关，则T具有怎样的性质？
a.Proof: 由于$\operatorname{Im}T=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)=V$，故$T$满射.
b.Proof: 令$T(z_1,\cdots,z_m)=\sum_{i=1}^m z_iv_i=0$.
由于$v_1,\cdots,v_m$线性无关，故$z_1=\cdots=z_m=0$，即$\operatorname{Ker}T=\{0\}$，从而$T$单射.

9. 设$T\in L(V,W)$是单射的，且$v_1,\cdots,v_m$是V中一列线性无关的向量.
求证：$Tv_1,\cdots,Tv_m$在W中线性无关.
Proof: 令$\sum_{i=1}^m a_iTv_i=0$，$Tv_1,\cdots,Tv_m$在W中线性无关即要证$a_1=\cdots=a_m=0$.
对于$\sum_{i=1}^m a_iTv_i=T\sum_{i=1}^m a_iv_i=0$，由于$T$是单射变换，故$\sum_{i=1}^m a_iv_i=0$.
而$v_1,\cdots,v_m$线性无关，则$a_1=\cdots=a_m=0$，证毕.

10. 设$V=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$且$T\in L(V,W)$，求证：$\operatorname{Im}T=\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_m)$.
Proof: $\operatorname{Im}T=\{Tv|v\in V\}=\{Tv|v\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)\}$.
$\forall u=T\sum_{i=1}^m a_iv_i\in\operatorname{Im}T,u=\sum_{i=1}^m a_iTv_i\in\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_m)$;
$\forall u=\sum_{i=1}^m a_iTv_i\in\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_m),u=T\sum_{i=1}^m a_iv_i\in\operatorname{Im}T$.
因而有$\operatorname{Im}T\subseteq\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_m),\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_m)\subseteq\operatorname{Im}T$.
即$\operatorname{Im}T=\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_m)$，证毕.

12. 设V是有限维向量空间且$T\in L(V,W)$.
求证：存在V的一个子空间U，满足$U\cap\operatorname{Ker}T=\{0\}$且$\operatorname{Im}T=\{Tu|u\in U\}$.
Proof: 令$v_1,\cdots,v_m$为$\operatorname{Ker}T$的一组基，故存在线性无关的$u_1,\cdots,u_n$，
使得$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$为$V$的一组基.
令$U=\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_n)$，则$U\cap\operatorname{Ker}T=\{0\}$显然成立，下证$\operatorname{Im}T=\{Tu|u\in U\}$.
令$\forall w\in V,\exists u\in U,v\in\operatorname{Ker}T,w=u+v$，从而

$$\operatorname{Im}T=\{Tw|w\in V\}=\{T(u+v)|u\in U,v\in\operatorname{Ker}T\}=\{Tu|u\in U\}$$

从而$\operatorname{Im}T=\{Tu|u\in U\}$，证毕.

17. 设V和W是有限维的.求证：当且仅当$\dim V \le \dim W$，存在单射的$T \in L(V, W)$.

Proof: 必要性：若存在单射的$T \in L(V, W)$，

则$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim \text{Im } T \le \dim W$，证毕.

充分性：设$v_1, \cdots, v_m$和$w_1, \cdots, w_n$分别为V和W的一组基.

有$\dim V = m \le n = \dim W$，从而定义$Tv_i = w_i, i = 1, \cdots, m$.

定理3.5保证了线性变换T的存在性，下证T是单射的.

令$T\sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i T v_i = \sum_{i=1}^m a_i w_i = 0$，从而$a_1 = \cdots = a_m = 0$，证毕.

19. 设V和W是有限维的，U是V的一个子空间.

求证：当且仅当$\dim U \ge \dim V - \dim W$，存在$T \in L(V, W)$，满足$\text{Ker } T = U$.

Proof: 必要性：原式等价于$\dim U = \dim \text{Ker } T = \dim V - \dim \text{Im } T \ge \dim V - \dim W$，

即$\dim \text{Im } T \le \dim W$，证毕.

充分性：设$v_1, \cdots, v_m$是U的一组基.由于U是V的一个子空间，

故存在线性无关的$v_{m+1}, \cdots, v_{m+n}$使得$v_1, \cdots, v_{m+n}$是V的一组基.

从而原式等价于$m \ge (m+n) - \dim W$，即$\dim W \ge n$.令

$$Tv_i = 0, i = 1, \cdots, m \quad Tv_i = w_i, i = m+1, \cdots, m+n$$

定理3.5保证了线性变换T的存在性.

$\text{Ker } T = U$显然成立，同时$\text{Im } T = \text{span}(Tv_{m+1}, \cdots, Tv_{m+n})$.

由于$\dim \text{Im } T \le \dim W$，这要求$n \le \dim W$，与条件相符.

20. 设V和是有限维向量空间且$T \in L(V, W)$.

求证：T是单射变换与存在$S \in L(W, V)$满足ST是在V上的单位变换等价.

Proof: 必要性：利用反证法.设T不是单射变换，即$\exists v_\alpha, v_\beta \in V$满足$Tv_\alpha = Tv_\beta$且$v_\alpha \ne v_\beta$.

$\exists S, ST = I$，因而有$v_\alpha = S(Tv_\alpha) = S(Tv_\beta) = v_\beta$.构成矛盾，即$T$为单射变换，证毕.

充分性：设$v_1, \cdots, v_m$是V的一组基.

由于T是单射变换，根据*3.B.9*，$Tv_1, \cdots, Tv_m$线性无关.

因而存在$w_1, \cdots, w_n$，使得$Tv_1, \cdots, Tv_m, w_1, \cdots, w_n$是$W$的一组基.定义

$$S(Tv_i) = v_i, i = 1, \cdots, m \quad Sw_j = 0, j = 1, \cdots, n$$

定理3.5保证了线性变换S的存在性.下证$ST = I$.

$$\forall v = \sum_{i=1}^m a_i v_i \in V, (ST)v = S(\sum_{i=1}^m a_i T v_i) = \sum_{i=1}^m a_i S(Tv_i) = \sum_{i=1}^m a_i v_i = v$$

21. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V,W)$.
求证：T是满射变换与存在$S \in L(W,V)$满足TS是在W上的单位变换等价.
Proof: 必要性：利用反证法.设T不是满射变换，即$\exists w \in W, w \notin \operatorname{Im} T$.
$\exists S, TS = I$，从而$T(Sw) = w, w \in \operatorname{Im} T$，矛盾，必要性得证.
充分性：设$w_1, \cdots, w_m$是W的一组基.由于T是满射变换，$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(w_1, \cdots, w_m)$.
设$v_1, \cdots, v_m \in V, V = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_n)$，则定义

$$Sw_i = v_i, i = 1, \cdots, m \quad Tv_i = w_i, i = 1, \cdots, m \quad Tu_j = 0, j = 1, \cdots, n$$

定理3.5保证了线性变换S的存在性.下证$TS = I$.

$$\forall w = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i \in W, (TS)w = T(\sum_{i=1}^{m} a_i S w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i T v_i = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i = w$$

24. 设W是有限维向量空间且$T_1, T_2 \in L(V,W)$.
求证：$\operatorname{Ker} T_1 \subseteq \operatorname{Ker} T_2$的充要条件是$\exists S \in L(W)$，使得$T_2 = ST_1$.
Proof: 必要性：设$\forall v \in \operatorname{Ker} T_1$，有$T_2 v = ST_1 v = 0$.
故$\forall v \in \operatorname{Ker} T_1, v \in \operatorname{Ker} T_2$，即$\operatorname{Ker} T_1 \subseteq \operatorname{Ker} T_2$，必要性得证.
充分性：W是有限维向量空间且$\operatorname{Im} T_1 \subseteq W$，故$\operatorname{Im} T_1$也是有限维向量空间.
令$T_1 v_1, \cdots, T_1 v_m$是$\operatorname{Im} T_1$的一组基且$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$，根据*3.A.4*，
有$\sum_{i=1}^{m} a_i T_1 v_i = T_1(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i) = 0$，得$a_1 = \cdots = a_m = 0$，从而$v_1, \cdots, v_m$线性无关.
令$K = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m)$，从而$V = K \oplus \operatorname{Ker} T$.现在定义线性变换$S$.
由于$T_1 v_1, \cdots, T_1 v_m$线性无关，故将其补充为W的一组基$T_1 v_1, \cdots, T_1 v_m, w_1, \cdots, w_n$.

$$S(T_1 v_i) = T_2 v_i, i = 1, \cdots, m \quad Sw_j = 0, j = 1, \cdots, n$$

定理3.5保证了线性变换S的存在性.下证$ST_1 = T_2$.
由于$\forall v \in V, v = v_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$，其中$v_0 \in \operatorname{Ker} T_1$，故

$$S(T_1 v) = S(T_1 v_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i S(T_1 v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i T_2 v_i = T_2 v_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i T_2 v_i = T_2 v$$

由$\operatorname{Ker} T_1 \subseteq \operatorname{Ker} T_2$，上式成立.因此$\forall v \in V, ST_1 v = T_2 v$，证毕.

25. 设V是有限维向量空间且$T_1, T_2 \in L(V, W)$.

求证：$\mathrm{Im}\ T_1 \subseteq \mathrm{Im}\ T_2$的充要条件是$\exists S \in L(V)$，使得$T_1 = T_2 S$.

Proof: 必要性：设$\forall v \in V$，有$T_1 v = T_2 S v \in \mathrm{Im}\ T_2$.

故$\forall v \in \mathrm{Im}\ T_1, v \in \mathrm{Im}\ T_2$，即$\mathrm{Im}\ T_1 \subseteq \mathrm{Im}\ T_2$，必要性得证.

充分性：设$u_1, \cdots, u_m$是V的一组基，从而$\mathrm{Im}\ T_1 = \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_m) \subseteq \mathrm{Im}\ T_2$.

因此$\exists v_1, \cdots, v_m \in V$，使得$T_1 u_i = T_2 v_i, i = 1, \cdots, m$.定义$S$为

$$Su_i = v_i, i = 1, \cdots, m$$

定理3.5保证了线性变换S的存在性.

$$\forall u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in V, T_2 S \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = T_2 \sum_{i=1}^{m} a_i (Su_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i T_2 v_i = \sum_{i=1}^{m} a_i T_1 u_i = T_1 \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

即$\forall u \in V, T_1 = T_2 S$，充分性得证.

28. 设$T \in L(V, W)$，且$w_1, \cdots, w_m$是$\mathrm{Im}\ T$的一组基.

求证：$\exists \varphi_1, \cdots, \varphi_m \in L(V, F)$，故$\forall v \in V$均满足$Tv = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(v) w_i$.

Proof: 由于$w_1, \cdots, w_m$是$\mathrm{Im}\ T$的一组基，故$\forall Tv \in \mathrm{Im}\ T, \exists ! a_i \in F$，使得$Tv = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i$.

因此定义$\varphi_i(v) = a_i$即可，下证$\forall i = 1, \cdots, m, \varphi_i \in L(V, F)$.

即证$\forall i = 1, \cdots, m, \forall v_\alpha, v_\beta \in V$, $\varphi_i(\lambda v_\alpha + \mu v_\beta) = \lambda \varphi_i(v_\alpha) + \mu \varphi_i(v_\beta)$.

$$T(\lambda v_\alpha + \mu v_\beta) = \sum_{i=1}^{m} \lambda \varphi_i(v_\alpha) w_i + \sum_{i=1}^{m} \mu \varphi_i(v_\beta) w_i = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\lambda v_\alpha + \mu v_\beta) w_i = \lambda T v_\alpha + \mu T v_\beta$$

综上，$\forall i = 1, \cdots, m, \varphi_i \in L(V, F)$.

29. 设$\varphi \in L(V, F)$.设$u \in V \notin \mathrm{Ker}\ \varphi$.求证：$V = \mathrm{Ker}\ \varphi \oplus \{au | a \in F\}$.

Proof: 根据*3.B.12*，存在V的一个子空间K，

使得$V = \mathrm{Ker}\ \varphi \oplus K$且$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(v) | v \in K\}$，因此只需证明$K = \{au | a \in F\}$即可.

对于$\forall v \in K$，$\varphi(v) \in F$.而$\varphi(u) \neq 0 \in F$，故$\exists a \in F$，使得$\varphi(v) = a\varphi(u) = \varphi(au), a \neq 0$.

所以$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(au) | a \in F\}$，即$K = \{au | a \in F\}$，证毕.

30. 设$\varphi_1, \varphi_2 \in L(V, F)$且$\mathrm{Ker}\ \varphi_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi_2$. 求证：存在常数$c \in F$，使得$\varphi_1 = c\varphi_2$.

Proof: 若$\mathrm{Ker}\ \varphi_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi_2 = V$，则$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$，故$c$可以为任意常数.

若$\exists u \notin \mathrm{Ker}\ \varphi, u \in V$，则根据*3.B.29*，$\forall v \in V$，$v$可以被唯一分解为$v_0 + a_v u$.

其中$v_0 \in \mathrm{Ker}\ \varphi, a_v \in F$.

从而$\varphi_1(v) = \varphi_1(v_0 + a_v u) = a_v \varphi_1(u)$ 并且$\varphi_2(v) = \varphi_2(v_0 + a_v u) = a_v \varphi_2(u)$.

$$\frac{\varphi_1(v)}{\varphi_2(v)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} = \mathrm{cons.}$$

由于$u \notin \mathrm{Ker}\ \varphi_2$，故$\varphi_2(u) \neq 0$，该式恒成立，证毕.

7 *Chapter 3.C*

6. 设V和W都是有限维向量空间且$T \in L(V, W)$.
求证：$\dim \operatorname{Im} T = 1$等价于分别存在$V$和$W$的一组基，使得$M(T)_{i,j} = 1$.
Proof: 必要性：设$v_1, \cdots, v_m$和$w_1, \cdots, w_n$分别为V和W的一组基，
且这两组基可以使得$M(T)$中所有元素均为1.
从而有$\forall i = 1, \cdots, m, Tv_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$，即$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(\sum_{i=1}^{m} w_i), \dim \operatorname{Im} T = 1$，证毕.
充分性：设$\mu_1, \cdots, \mu_m$为V任意的一组基.
由于$\dim \operatorname{Im} T = 1$，不妨设$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(T\mu_1)$，即$T\mu_2 = \cdots = T\mu_m = 0$.
则一定存在线性无关的$w_2, \cdots, w_n$，使得$T\mu_1, w_2, \cdots, w_n$是W的一组基.
令$w_1 = T\mu_1 - \sum_{i=2}^{m} w_i$，则$w_1, w_2, \cdots, w_n$也是$W$的一组基.
再令$v_1 = \mu_1, v_i = \mu_i + \mu_1, i = 2, \cdots, m$，因而$Tv_i = T(\mu_1 + \mu_i) = T\mu_1 = \sum_{i=1}^{m} w_i$.
从而$v_1, \cdots, v_m$和$w_1, \cdots, w_m$是满足条件的基.

7. 已知$S, T \in L(V, W)$，求证：$M(S + T) = M(S) + M(T)$.
Proof: 设$v_1, \cdots, v_m$和$w_1, \cdots, w_n$分别为V和W的一组基，并令$M(S) = A, M(T) = C$.

$$Sv_j = \sum_{i=1}^{m} A_{i,j} w_i, Tv_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,j} w_i \quad Sv_j + Tv_j = \sum_{i=1}^{m} (A_{i,j} + C_{i,j}) w_i = (S + T)v_j$$
$$\forall j = 1, \cdots, m, i = 1, \cdots, n, (M(S + T))_{i,j} = M(S)_{i,j} + M(T)_{i,j}$$

即$M(S + T) = M(S) + M(T)$，证毕.

13. 证明矩阵加法和乘法的分配律成立.

Proof: 即证明$A(B+C)=AB+AC,(D+E)F=DF+EF$.

设A,D,E是$m-n$矩阵，B,C,F是$n-p$矩阵.

$$\begin{aligned}
&1^\circ(A(B+C))_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}(B+C)_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}(B_{k,j}+C_{k,j})\\
&(AB+AC)_{i,j}=(AB)_{i,j}+(AC)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}B_{k,j}+\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}C_{k,j}\\
&(A(B+C))_{i,j}=(AB+AC)_{i,j}\Rightarrow A(B+C)=AB+AC\\
&2^\circ((D+E)F)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}(D+E)_{i,k}F_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}(D_{i,k}+E_{i,k})F_{k,j}\\
&(DF+EF)_{i,j}=(DF)_{i,j}+(EF)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}D_{i,k}F_{k,j}+\sum_{k=1}^{n}E_{i,k}F_{k,j}\\
&((D+E)F)_{i,j}=(DF+EF)_{i,j}\Rightarrow(D+E)F=DF+EF
\end{aligned}$$

15. 设A是一个$n-n$矩阵，且$1\leq i,j\leq n$. 求证：$A^3_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}A_{i,k}A_{k,p}A_{p,j}$.

Proof:

$$A^3_{i,j}=\sum_{p=1}^{n}A^2_{i,p}A_{p,j}=\sum_{p=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}A_{k,p})A_{p,j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}A_{i,k}A_{k,p}A_{p,j}$$

8 *Chapter 3.D*

1. 设$T \in L(U,V), S \in L(V,W)$均可逆. 求证：$ST \in L(U,W)$可逆，且$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
Proof: 先证明ST是单射变换.令$(ST)(u) = 0$，则$S(Tu) = 0$.
而Ker $S = \{0\}$，故$Tu = 0$.由于Ker $T = \{0\}$，故$u = 0$，得Ker $ST = \{0\}$，证毕.
再证明ST是满射变换. 由于Im $S = W$，故对于$\forall w \in W$，$\exists v \in V$，使得$Sv = w$.
又由于Im $T = V$，故对于$\forall v \in V$，$\exists u \in U$，使得$Tu = v$.
因此，$\forall w \in W$，$\exists u \in U$，使得$(ST)u = S(Tu) = Sv = w$，即Im $ST = W$.
可得ST是满射变换，因此ST是可逆变换，证毕.
再证$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.两边同乘ST，得

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = I = (ST)(ST)^{-1}$$

2. 设V是有限维向量空间且$\dim V \geq 1$.
求证$L(V)$中所有不可逆算子构成的集合不是$L(V)$的一个子空间.
Proof: 设$v_1, \cdots, v_m$是V的一组基.定义

$$T_1v_1 = 0, T_1v_i = v_i, i = 2, \cdots, m \quad T_2v_i = v_i, T_2v_m = 0, i = 1, \cdots, m-1$$

很显然T_1, T_2都不是可逆变换，但是$T_1 + T_2$是一个可逆变换，证毕.

3. 设V是有限维向量空间且U是V的一个子空间，$S \in L(U,V)$.
求证：S是单射变换的充要条件是$\exists T \in L(V)$，使得$\forall u \in U, Tu = Su$.
Proof: 必要性的证明是显然的.
由于T是单射变换，而$\forall u \in U, Tu = Su$，故S也是单射变换.
充分性：设$u_1, \cdots, u_m$是U的一组基.
故存在线性无关的$v_1, \cdots, v_n$，使得$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$是$V$的一组基.
由于S是单射变换，根据*3.B.9*，$Su_1, \cdots, Su_m$在V中线性无关.
故存在线性无关的$w_1, \cdots, w_n$，使得$Su_1, \cdots, Su_m, w_1, \cdots, w_n$是$V$的一组基.
定义线性算子T.

$$Tu_i = Su_i, i = 1, \cdots, m \quad Tv_j = w_j, j = 1, \cdots, n$$

很显然T是单射变换且$T \in L(V)$，故T是可逆变换.下证$Tu = Su$.

$$\forall u = \sum_{i=1}^{m} a_iu_i, Tu = T\sum_{i=1}^{m} a_iu_i = \sum_{i=1}^{m} a_iTu_i = \sum_{i=1}^{m} a_iSu_i = S\sum_{i=1}^{m} a_iu_i = Su$$

4. 设W是有限维向量空间且$T_1, T_2 \in L(V, W)$.
求证：$\mathrm{Ker}\ T_1 = \mathrm{Ker}\ T_2$的充要条件是存在可逆算子$S \in L(W)$，使得$T_1 = ST_2$.
Proof: 必要性：$\forall \mu \in \mathrm{Ker}\ T_1, T_1\mu = ST_2\mu = 0$.
由于S是单射变换，故$ST_2\mu = 0 \Rightarrow T_2\mu = 0$，即$\mu \in \mathrm{Ker}\ T_2$.
综上，$\forall \mu \in \mathrm{Ker}\ T_1, \mu \in \mathrm{Ker}\ T_2$，即$\mathrm{Ker}\ T_1 \subseteq \mathrm{Ker}\ T_2$.
同时由于S是可逆变换，故而可以相同方法证明$\mathrm{Ker}\ T_2 \subseteq \mathrm{Ker}\ T_1$，得到$\mathrm{Ker}\ T_1 = \mathrm{Ker}\ T_2$.
充分性：W是有限维向量空间且$\mathrm{Im}\ T_2 \subseteq W$，故$\mathrm{Im}\ T_2$也是有限维向量空间.
令$T_2v_1, \cdots, T_2v_m$是$\mathrm{Im}\ T_2$的一组基.根据*3.B.24*和*3.A.4*，
令$K = \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_m)$，则$V = \mathrm{Ker}\ T \oplus K$，且$v_1, \cdots, v_m$线性无关.
下证$T_1v_1, \cdots, T_1v_m$也线性无关.令$\sum_{i=1}^m a_iT_1v_i = T_1\sum_{i=1}^m a_iv_i = 0$.
由于$\mathrm{Ker}\ T_1 = \mathrm{Ker}\ T_2$且$\mathrm{Ker}\ T \cap \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_m) = \{0\}$，故$\sum_{i=1}^m a_iv_i = 0$.
结合$v_1, \cdots, v_m$线性无关得到$a_1 = \cdots = a_m = 0$，即$T_1v_1, \cdots, T_1v_m$也线性无关.
现在将$T_2v_1, \cdots, T_2v_m$和$T_1v_1, \cdots, T_1v_m$分别补充为W的一组基
$T_2v_1, \cdots, T_2v_m, w_1^\alpha, \cdots, w_n^\alpha$，其中$w_1^\alpha, \cdots, w_n^\alpha$线性无关；
$T_1v_1, \cdots, T_1v_m, w_1^\beta, \cdots, w_n^\beta$，其中$w_1^\beta, \cdots, w_n^\beta$线性无关.
现在定义线性变换S.令

$$S(T_2v_i) = T_1v_i, i = 1, \cdots, m \quad Sw_j^\alpha = Sw_j^\beta, j = 1, \cdots, n$$

定理3.5保证了线性变换的存在性.
现在证明S是单射变换. 令$S(\sum_{i=1}^m a_iT_2v_i + \sum_{j=1}^n b_jw_j^\alpha) = \sum_{i=1}^m a_iT_1v_i + \sum_{j=1}^n b_jw_j^\beta = 0$.
由$T_1v_1, \cdots, T_1v_m, w_1^\beta, \cdots, w_n^\beta$线性无关，故$a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0$，
即$\mathrm{Ker}\ S = \{0\}$.结合$S \in L(W)$，根据定理3.69，S是可逆变换.
下证$T_1 = ST_2$.由于$V = \mathrm{Ker}\ T \oplus K$，故$\forall v \in V, v = v_0 + \sum_{i=1}^m a_iv_i$，其中$v_0 \in \mathrm{Ker}\ T$.

$$\begin{aligned}(ST_2)v &= (ST_2)(v_0 + \sum_{i=1}^m a_iv_i) = \sum_{i=1}^m a_iS(T_2v_i) = \sum_{i=1}^m a_iT_1v_i \\ &= T_1\sum_{i=1}^m a_iv_i = T_1(\sum_{i=1}^m a_iv_i + v_0) = T_1v\end{aligned}$$

从而对于$\forall v \in V$，$T_1v = (ST_2)v$，即$T_1 = ST_2$，证毕.

5. 设V是有限维向量空间且$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$.
求证：$\mathrm{Im}\ T_1 = \mathrm{Im}\ T_2$的充要条件是存在可逆算子$S \in \mathcal{L}(V)$，使得$T_1 = T_2 S$.
Proof: 必要性：$\forall \mu \in V$，$T_1\mu = T_2 S\mu \in \mathrm{Im}\ T_2$，即$\mathrm{Im}\ T_1 \subseteq \mathrm{Im}\ T_2$.
又$T_1 = T_2 S \Rightarrow T_1 S^{-1} = T_2$，故$\forall \mu \in V$，$T_2\mu = T_1 S^{-1}\mu \in \mathrm{Im}\ T_1$，即$\mathrm{Im}\ T_2 \subseteq \mathrm{Im}\ T_1$.
综上$\mathrm{Im}\ T_1 = \mathrm{Im}\ T_2$，证毕.
充分性：令$w_1, \cdots, w_m$为$\mathrm{Im}\ T$的一组基.
找到$v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta$，使得$\forall i = 1, \cdots, m, T_1 v_i^\alpha = w_i, T_2 v_i^\beta = w_i$.
根据*3.A.4*， $v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta$分别线性无关.
现在将$v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta$分别补充成$V$的一组基
$v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha, u_1^\alpha, \cdots, u_n^\alpha$，其中$u_1^\alpha, \cdots, u_n^\alpha$线性无关；
$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta, u_1^\beta, \cdots, u_n^\beta$，其中$u_1^\beta, \cdots, u_n^\beta$线性无关.
根据*3.B.24*， $\mathrm{Ker}\ T_1 = \mathrm{span}(u_1^\alpha, \cdots, u_m^\alpha), \mathrm{Ker}\ T_2 = \mathrm{span}(u_1^\beta, \cdots, u_n^\beta)$.
现在定义线性变换S.令

$$S v_i^\beta = v_i^\alpha, i = 1, \cdots, m \quad S u_j^\beta = u_j^\alpha, j = 1, \cdots, n$$

定理3.5保证了线性变换的存在性.
现在证明S是单射变换. 令$S(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_i u_i^\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_i u_i^\beta = 0$.
由$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta, u_1^\beta, \cdots, u_n^\beta$线性无关，故$a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 0$，
即$\mathrm{Ker}\ S = \{0\}$.结合$S \in \mathcal{L}(V)$，根据定理3.69，S是可逆变换.
下证$T_1 = T_2 S$.$\forall v = \sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_i u_i^\alpha \in V$，有

$$\begin{aligned}(T_2 S)v &= (T_2 S)(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_i u_i^\alpha) = T_2(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_i u_i^\beta) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i T_2 v_i^\beta = T_2 \sum_{i=1}^m a_i v_i^\beta = \sum_{i=1}^m a_i w_i = \sum_{i=1}^m a_i T_1 v_i^\alpha \\ &= T_1(\sum_{i=1}^m a_i v_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_i u_i^\alpha) = T_1 v\end{aligned}$$

从而对于$\forall v \in V$，$T_1 v = (T_2 S)v$，即$T_1 = T_2 S$，证毕.

6. 设V和W是有限维向量空间且$T_1, T_2 \in L(V, W)$.

求证：$\dim \text{Ker } T_1 = \dim \text{Ker } T_2$等价于存在可逆算子$R \in L(V), S \in L(W)$，使得$T_1 = ST_2R$.

Proof: 必要性：$T_1 = ST_2R \Rightarrow S^{-1}T_1 = T_2R$.

根据*3.D.4*，$\text{Ker } T_1 = \text{Ker } T_2R$. 根据*3.D.5*，$\text{Im } S^{-1}T_1 = \text{Im } T_2$.

$$\begin{aligned}\dim \text{Ker } T_1 &= \dim \text{Ker } T_2R = \dim V - \dim \text{Im } T_2R \\ &= \dim V - \dim \text{Im } T_2 = \dim \text{Ker } T_2\end{aligned}$$

充分性：令$v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta$ 分别为$\text{Ker } T_1$和$\text{Ker } T_2$的一组基.

将$v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta$分别补充成$V$的一组基

$v_1^\alpha, \cdots, v_m^\alpha, u_1^\alpha, \cdots, u_n^\alpha$，其中$u_1^\alpha, \cdots, u_n^\alpha$线性无关；

$v_1^\beta, \cdots, v_m^\beta, u_1^\beta, \cdots, u_n^\beta$，其中$u_1^\beta, \cdots, u_n^\beta$线性无关.

根据*3.B.9*和*3.B.12*，

$T_1u_1^\alpha, \cdots, T_1u_n^\alpha$是$\text{Im } T_1$的一组基， $T_2u_1^\beta, \cdots, T_2u_n^\beta$是$\text{Im } T_2$的一组基.

由于$\text{Im } T_1, \text{Im } T_2 \subseteq W$，将$T_1u_1^\alpha, \cdots, T_1u_n^\alpha$和$T_2u_1^\beta, \cdots, T_2u_n^\beta$分别补充成$W$的一组基

$T_1u_1^\alpha, \cdots, T_1u_n^\alpha, w_1^\alpha, \cdots, w_p^\alpha$，其中$w_1^\alpha, \cdots, w_p^\alpha$线性无关；

$T_2u_1^\beta, \cdots, T_2u_n^\beta, w_1^\beta, \cdots, w_p^\beta$，其中$w_1^\beta, \cdots, w_p^\beta$线性无关.

现在定义线性变换R和S.令

$$\begin{aligned}&Rv_i^\alpha = v_i^\beta, i = 1, \cdots, m \quad Ru_j^\alpha = u_j^\beta, j = 1, \cdots, n \\ &S(T_2u_j^\beta) = T_1u_j^\alpha, j = 1, \cdots, m \quad Sw_k^\beta = w_k^\alpha, k = 1, \cdots, p\end{aligned}$$

参考*3.D.4*和*3.D.5*的证明，显然R和S都是可逆变换.

下证$T_1 = ST_2R$.$\forall v = \sum_{i=1}^m a_iv_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_ju_j^\alpha$，

$$\begin{aligned}(ST_2R)v &= (ST_2R)(\sum_{i=1}^m a_iv_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_ju_j^\alpha) = (ST_2)(\sum_{i=1}^m a_iRv_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_jRu_j^\alpha) \\ &= (ST_2)(\sum_{i=1}^m a_iv_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_ju_j^\beta) = S(\sum_{i=1}^m a_iT_2v_i^\beta + \sum_{j=1}^n b_jT_2u_j^\beta) \\ &= \sum_{j=1}^n b_jS(T_2u_j^\beta) = \sum_{j=1}^n b_jT_1u_j^\alpha = T_1(\sum_{i=1}^m a_iv_i^\alpha + \sum_{j=1}^n b_ju_j^\alpha) = T_1v\end{aligned}$$

故$\forall v \in V, T_1v = (ST_2R)v$，即$T_1 = ST_2R$，证毕.

8. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V,W)$是一个满射变换.
求证：存在V的一个子空间U，使得$T|_U$是一个可逆变换.
Proof: 令$w_1,\cdots,w_m$为$\mathrm{Im}\ T$的一组基.找到$v_1,\cdots,v_m$，使得$\forall i=1,\cdots,m,T_1v_i=w_i$.
根据*3.A.4*，$v_1,\cdots,v_m$线性无关.令$U=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_m)$.
下证$T|_U$是一个可逆变换.先证$\mathrm{Ker}\ T|_U=\{0\}$.令$Tv=T\sum_{i=1}^m a_iv_i=\sum_{i=1}^m a_iw_i=0$.
由于$w_1,\cdots,w_m$线性无关，故$a_1=\cdots=a_m=0$，从而$\mathrm{Ker}\ T|_U=\{0\}$，证毕.
又因为$\mathrm{Im}\ T|_U=\mathrm{Im}\ T=\mathrm{span}(w_1,\cdots,w_m)$，故$T|_U$是满射变换.综上，$T|_U$是可逆变换.

14. 设$v_1\cdots,v_n$是V的一组基.定义$T\in L(V,F^{n,1})$为$Tv=M(v)$.
求证：T是一个可逆变换.
Proof: $\forall v\in V,\exists c_1,\cdots,c_n\in F$，使得$v=\sum_{i=1}^n c_iv_i$.从而

$$T\sum_{i=1}^n c_iv_i=\begin{pmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{pmatrix}^T$$

下证T是单射变换.令$M(v)=0$，则$c_1=\cdots=c_n=0$，即$v=0$，从而T是单射变换.
再证T是满射变换.$\forall c_i\in F,\exists v\in V$，使得$v=\sum_{i=1}^n c_iv_i$.因此$T$是满射变换，证毕.

15. 证明：若$T\in L(F^{n,1},F^{m,1})$，则存在一个$m-n$矩阵A，使得$\forall x\in F^{n,1},Tx=Ax$.
Proof: 使用$F^{n,1}$和$F^{m,1}$的标准基.
定义T为$T(x_1,\cdots,x_n)=(\sum_{i=1}^m A_{1,i}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^m A_{n,i}x_i)$. 在该定义下，矩阵$A$为

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline Tx_1 & A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Tx_n & A_{m,1} & \cdots & A_{m,n}\end{array}$$

因此总是存在这样的$A_{i,j}$，证毕.

17. 设V是有限维向量空间且ε是$L(V)$的一个子空间，
其对所有$S \in L(V)$和$T \in \varepsilon$满足$ST \in \varepsilon$或$TS \in L(V)$. 求证：$\varepsilon = \{0\}$或$\varepsilon = L(V)$.
Proof: 设$e_1, \cdots, e_n$是V的一组基. 当$\varepsilon = \{0\}$时，$\forall ST = TS = 0 \in \varepsilon$是显然的；
若$\varepsilon \neq \{0\}$，则$\exists T \in \varepsilon, T \neq 0$. 从而$\exists s, t \in \{1, \cdots, n\}, Te_s = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, Te_s \neq 0, a_t \neq 0$.
现在定义$L(V)$的一组基.令$\varepsilon_{i,j} e_k = \delta_{i,k} e_j$，其中$\delta_{i,k} = 0, i \neq k, \delta_{i,k} = 1, i = k$.
从而当$\varepsilon_{i,j}$中i, j分别取遍$\{1, \cdots, n\}$中每一个值时，$\varepsilon_{i,j}$成为$L(V)$的一组基.

$$\varepsilon_{t,i} T \varepsilon_{i,s} e_j = \varepsilon_{t,i} T(\delta_{i,j} e_s) = \delta_{i,j} \varepsilon_{t,i} a_t e_t = a_t \delta_{i,j} e_i$$

由于$\varepsilon_{t,i} T \varepsilon_{i,s} \in \varepsilon$且$\varepsilon$是$L(V)$的子空间，故$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{t,i} T \varepsilon_{i,s} e_j = a_t \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i$.
由于只有$i = j$时，$\delta_{i,j} = 1$，因此除$i = j$的其它项被消去，得$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{t,i} T \varepsilon_{i,s} e_j = a_t e_j$.
即$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{t,i} T \varepsilon_{i,s} = a_t I$. 因此$a_t I \in \varepsilon \Rightarrow I \in \varepsilon$.
故而$\forall S \in L(V), S = SI \in \varepsilon$，即$\varepsilon = L(V)$.

19. 设$T \in L(P(R))$满足T是单射变换，
且对于任意非零多项式$p \in P(R)$满足$\deg Tp \leq \deg p$.
(a)证明：T是满射变换.
(b)证明：对于任意非零多项式$p \in P(R)$都有$\deg Tp = \deg p$.
$(a.$*Proof*$)$: 由$T \in L(P(R))$单射结合*3.D.3*得到$\forall n \in N^*, T|_{P_n(R)}$单射.
结合定理3.69，$T|_{P_n(R)}$是一个满射变换，从而T也是一个满射变换.
$(b.$*Proof*$)$: 运用数学归纳法和反证法，设$\deg p = n+1, \deg Tp < n+1$.
由*3.D.19.a*，$T|_{P_n(R)}$满射，故$\exists q \in P_n(R), Tp = T|_{P_n(R)} q$.
由T为单射得$p = q$，假设不成立，原命题得证.

9 *Chapter 3.E*

1. 设T是从V到W的映射.T的像是$V\times W$的子集，并被定义为

$$graph\ of\ T=\{(v,Tv)\in V\times W|v\in V\}$$

求证：T是线性变换和$graph\ of\ T$是$V\times W$的子空间等价.
Proof: 设$v_1,v_2\in V$，则$(v_1.Tv_1),(v_2,Tv_2)\in graph\ of\ T$.
若$graph\ of\ T$是$V\times W$的子空间，则$(v_1+v_2,Tv_1+Tv_2)\in graph\ of\ T$.
而$(v_1+v_2,T(v_1+v_2))\in graph\ of\ T$.
对于同一向量v_1+v_2，其在W中的像必然相同，即$Tv_1+Tv_2=T(v_1+v_2)$.
同理$(\lambda v,\lambda Tv)=(\lambda v,T(\lambda v))$，即$T(\lambda v)=\lambda Tv$. 因此$T$是一个线性变换，反之亦然.

4. 证明：$\prod_{i=1}^m L(V_i,W)$和$L(\prod_{i=1}^m V_i,W)$同构.
Proof: 定义$v=(v_1,\cdots,v_m)\in\prod_{i=1}^m V_i$，其中$v_i\in V_i$.
定义$R_j\in L(\prod_{i=1}^m V_i,V_j)$为$R_j(v)=v_j$.验证$R_j$的线性性.
$R_j(c^\alpha v^\alpha+c^\beta v^\beta)=c^\alpha v_j^\alpha+c^\beta v_j^\beta=c^\alpha R_jv^\alpha+c^\beta R_jv^\beta$.
定义$S=(S_1,\cdots,S_m)\in\prod_{i=1}^m L(V_i,W)$，其中$S_j\in L(V_j,W)$.
定义$\Gamma\in L(\prod_{i=1}^m L(V_i,W),L(\prod_{i=1}^m V_i,W))$为$\Gamma(S)=\sum_{i=1}^m(S_i\circ R_i)$. 验证$\Gamma$的线性性.

$$\begin{aligned}\Gamma(c^\alpha S^\alpha+c^\beta S^\beta)&=\sum_{i=1}^m((c^\alpha S_i^\alpha+c^\beta S_i^\beta)\circ R_i)\\&=c^\alpha\sum_{i=1}^m(S_i^\alpha\circ R_i)+c^\beta\sum_{i=1}^m(S_i^\beta\circ R_i)=c^\alpha\Gamma(S^\alpha)+c^\beta\Gamma(S^\beta)\end{aligned}$$

考虑构造其逆变换.定义$R_j'\in L(V^n)$为$R_j'(v)=(0,\cdots,v_j,\cdots,0)$.验证$R_j'$的线性性.
$R_j'(c^\alpha v^\alpha+c^\beta v^\beta)=(0,\cdots,c^\alpha v_j^\alpha+c^\beta v_j^\beta,\cdots,0)=c^\alpha R_j'v^\alpha+c^\beta R_j'v^\beta$.
定义$S_j\in L(V_j,W)$为$S_jv_j=(T\circ R_j)(v)$，其中$T\in L(\prod_{i=1}^m V_i,W)$.
定义$\psi\in L(L(\prod_{i=1}^m V_i,W),L(\prod_{i=1}^m V_i,W))$为$\psi(T)=(S_1,\cdots,S_m)=S$.验证$\psi$的线性性.

$$\psi(c^\alpha T^\alpha+c^\beta T^\beta)=c^\alpha S^\alpha+c^\beta S^\beta=c^\alpha\psi(T^\alpha)+c^\beta\psi(T^\beta)$$

下面验证$\psi\circ\Gamma$和$\Gamma\circ\psi$是单位变换.

$$\psi(\Gamma(S))=\psi(\sum_{i=1}^m S_i\circ R_i)=\psi\sum_{i=1}^m(T(R_i'v))=\psi(\sum_{i=1}^m T\circ R_i')=\psi(T)=S$$
$$(\Gamma(\psi(T)))v=(\Gamma(S))v=\sum_{i=1}^m S_iv_i=\sum_{i=1}^m(T\circ R_i')(v)=T\sum_{i=1}^m(R_i'v)=Tv$$

6. 证明：V^n和$L(F^n,V)$同构.

Proof: 定义$v=(v_1,\cdots,v_n)\in V^n$，其中$v_i\in V_i$；定义$x=(x_1,\cdots,x_n)\in F^n$，其中$x_i\in F$.
定义$R_j\in(F^n,V)$为$R_j(x)=x_jv_j$.验证R_j的线性性.
$R_j(c^\alpha x^\alpha+c^\beta x^\beta)=c^\alpha x_j^\alpha+c^\beta x_j^\beta=c^\alpha R_j(x^\alpha)+c^\beta R_j(x^\beta)$.
定义$\Gamma\in L(V^n,L(F^n,V))$为$\Gamma(v)=\sum_{i=1}^n R_i$.验证$\Gamma$的线性性.

$$\Gamma(c^\alpha v^\alpha+c^\beta v^\beta)=\sum_{i=1}^n(c^\alpha R_i^\alpha+c^\beta R_i^\beta)=c^\alpha\sum_{i=1}^n R_i^\alpha+c^\beta\sum_{i=1}^n R_i^\beta=c^\alpha\Gamma(v^\alpha)+c^\beta\Gamma(v^\beta)$$

下面证明Γ是单射变换.令$\sum_{i=1}^n R_i=\sum_{i=1}^n x_iv_i=0$.
由于x_i是任意选取的，只能有$v_1=\cdots=v_n=0$，即$v=0$.
下面证明Γ是满射变换.定义$e_1,\cdots,e_n\in F^n$是F^n的标准基.
$\forall R\in L(F^n,V)$，定义$v\in V^n$为$v=(Re_1,\cdots,Re_n)$，考虑$(\Gamma(v))(x)$.
$\forall x\in F^n,(\Gamma(v))(x)=(\sum_{i=1}^n Re_i)(x)=R\sum_{i=1}^n x_ie_i=R(x)$，证毕.

7. 设U和W是V的子空间，$v\in V,u\in U,v+U=u+W$，求证：$U=W$.

Proof: $U=(u-v)+W$是V的子空间，即$u-v\in W\Rightarrow U=W$.

8. 证明：V的非空子集A是V的仿射集的充要条件是$\forall v,w\in A,\lambda\in F,\lambda v+(1-\lambda)w\in A$.

Proof: 充分性：设$A=a+U$，其中$a\in A$且U是V的一个子空间.
故存在$v,w\in A$，满足$v=a+u_1,w=a+u_2$，
得$\lambda(a+u_1)+(1-\lambda)(a+u_2)=a+(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\in A$.
必要性：即存在$a\in A$和V的一个子空间U，使得$v-a\in U,w-a\in U$.
从而$\forall c_1,c_2\in F,\dfrac{c_1}{c_1+c_2}(v-a)+\dfrac{c_2}{c_1+c_2}(w-a)\in U$.
令$\dfrac{c_1}{c_1+c_2}=\lambda$，则$\dfrac{c_2}{c_1+c_2}=1-\lambda$，有$\lambda(v-a)+(1-\lambda)(w-a)=\lambda v+(1-\lambda)w-a\in U$.
从而$\lambda v+(1-\lambda)w\in a+U=A$，即$A$是$V$的一个仿射集.
这是仿射集的第二定义.

9. 设A_1和A_2是V的仿射集.求证：$A_1\cap A_2=\phi$或也是仿射集.

Proof: $A_1\cap A_2=\phi$的情况是平凡的.

考虑$A_1\cap A_2\neq\phi$.若$A_1\cap A_2=\{v\}$，则$A_1\cap A_2$是仿射集.

若交集不止一点，则取$v,w\in A_1\cap A_2$，根据*3.E.8*，

$\forall v,w\in A_1(A_2),\lambda\in F,\lambda v+(1-\lambda)w\in A_1(A_2)$，从而$\lambda v+(1-\lambda)w\in A_1\cap A_2$.

即$A_1\cap A_2$是仿射集，证毕.

11. 设$v_1,\cdots,v_m\in V$，令$A=\{\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i|\sum_{i=1}^m\lambda_i=1\}$.

(a)证明：A是V的一个仿射集.

(b)证明：V中任意包含$v_1,\cdots,v_m$的仿射集都必然包含A.

(c)证明：V中存在某个向量v和某个满足$\dim U\leq m-1$的子空间U，使得$A=v+U$.

a.Proof: 取A中的两点$\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i,\sum_{i=1}^m\mu_iv_i$，考虑$\gamma\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i+(1-\gamma)\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i$.

由于$\gamma\sum_{i=1}^m\lambda_i+(1-\gamma)\sum_{i=1}^m\mu_i=1$，故根据*3.E.8*，

$\gamma\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i+(1-\gamma)\sum_{i=1}^m\mu_iv_i\in A$，即$A$是$V$的一个仿射集.

b.Proof: 根据*3.E.11.a*，A是一个仿射集，

因此存在$u_0\in V$和V的一个子空间U，满足$A=u_0+U$.

因此$\forall i=1,\cdots,m$，都有$u_i\in U$，使得$v_i=u_0+u_i$. 考虑$\forall v=\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i\in A$.

将$v_i=u_0+u_i$代入，有$\sum_{i=1}^m\lambda_i(u_0+u_i)=u_0+\sum_{i=1}^m\lambda_iu_i$. 因此$\sum_{i=1}^m\lambda_iu_i\in U$.

同时，$\sum_{i=1}^m\lambda_iu_i\in\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_m)$，因此$U\subseteq\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_m)$.

根据定理2.7，$\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_m)$是能包含$u_1,\cdots,u_m$的最小子空间.

能够包含$u_1,\cdots,u_m$的子空间必然包含U，也即能够包含$v_1,\cdots,v_m$的仿射集必然包含A.

c.Proof: 将*3.E.11.a*中的u_0替换成v_1，则$\forall i=2,\cdots,m,u_i=v_i-v_1$.

因此$A=u_0+U=u_0+\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_m)=v_1+\operatorname{span}(v_2-v_1,\cdots,v_m-v_1)$.

显然，U就是满足要求的子空间.

12. 设U是V的一个子空间且V/U是有限维向量空间，求证：V和$U\times(V/U)$同构.

Proof: 根据定理2.34，存在V的一个子空间W，使得$V=U\oplus W$，

从而$\forall v\in V,\exists!u\in U,w\in W,v=u+w$.

现在定义$T\in L(V,U\times(V/U))$为$Tv=(u,v+U)$，令$Tv=0$，则$u=0$且$v+U=0+U$.

由于$v+U=w+u+U=w+U$且$w\notin U$，得$w=0$，从而$\operatorname{Ker}T=\{0\}$，即$T$为单射变换.

由$\dim\,(U\times(V/U))=\dim V$得到$T$是满射变换.综上，$T$为可逆变换，证毕.

13. 设U是V的一个子空间且$v_1+U,\cdots,v_m+U$是V/U的一组基，
$u_1,\cdots,u_n$是U的一组基.求证：$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$是$V$的一组基.
Proof: 先证$V=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n)$.
$\forall v+U\in V/U,\exists a_i\in F$，使得$v+U=\sum_{i=1}^m a_i(v_i+U)=\sum_{i=1}^m a_iv_i+U$.
从而$v-\sum_{i=1}^m a_iv_i\in U$，即$\exists u\in\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_n)\in U,v-\sum_{i=1}^m a_iv_i=u$.
最终$v=\sum_{i=1}^m a_iv_i+u\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n)$，证毕.
再证$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$线性无关.由于$v_1+U,\cdots,v_m+U$是$V/U$的一组基，
故$\sum_{i=1}^m a_i(v_i+U)=U\Rightarrow a_1=\cdots=a_m=0$.
因此$v_1,\cdots,v_m$线性无关且$\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)\cap U=\{0\}$.
根据定理2.34和*2.B.8*，$V=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)\oplus U$，即$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$是$V$的一组基.

14. 设$U=\{(x_1,x_2,\cdots)\in F^\infty|x_i\neq 0\}$只对有限多的$i$成立.
(a)证明U是F^∞的一个子空间.
(b)证明F^∞/U是无限维向量空间.
a.Proof: U中任意元素的加法或数乘都不会使得其中的非零元素增加到无限多个.
b.Proof: 我们的目标是构造一列无限长的向量$e_1,\cdots,e_m,\cdots\notin U$，
使得$e_1+U,\cdots,e_m+U,\cdots$线性无关. 从而根据*2.A.14*，$F^\infty/U$是无限维向量空间.
令$e(p)$是e中第p个槽里的数字.构造向量列$e_m(p)$

$$\begin{aligned} e_m(p)&=1, \mathit{if}\ (p-1) \bmod m=0\\ &=0, \mathit{otherwise}\end{aligned}$$

可以证明这些向量线性无关，从而完成证明.

18. 设U是V的一个子空间且V/U是有限维向量空间.

求证：存在V的另一个子空间W，使得$\dim W = \dim V/U$且$V = U \oplus W$.

Proof: 由于V/U是有限维向量空间，设$v_1+U,\cdots,v_m+U$是V/U的一组基.

从而$\forall v+U \in V/U, v+U = \sum_{i=1}^m a_i(v_i+U) = \sum_{i=1}^m a_iv_i + U$.

即$v - \sum_{i=1}^m a_iv_i = u \in U, v = \sum_{i=1}^m a_iv_i + u$，得到$V = \operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m) + U$.

下证$v_1,\cdots,v_m$线性无关且$\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m) \cap U = \{0\}$.

$\sum_{i=1}^m a_i(v_i+U) = \sum_{i=1}^m a_iv_i + U = U \Rightarrow a_1 = \cdots = a_m = 0$，即$v_1,\cdots,v_m$线性无关.

使用反证法.若$v_0 \neq 0 \in \operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m) \cap U$，即存在至少一个$a_i \neq 0$，使得$v_0 = \sum_{i=1}^m a_iv_i$.

然而$v_0 \in U \Rightarrow v_0 + U = U \Rightarrow a_1 = \cdots = a_m = 0$.

矛盾，假设不成立，令$W = \operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$，原命题即得证.

19. 设$T \in L(V,W)$且U是V的一个子空间.令π指代从V到V/U的商变换.

求证：存在$S \in L(V/U,W)$满足$T = S\circ\pi$是$U \subseteq \operatorname{Ker} T$的充要条件.

Proof: 必要性：设存在$S \in L(V/U,W)$满足$T = S\circ\pi$，

则对于$\forall u \in U$，都有$Tu = S\circ\pi(u) = S(0) = 0$. 即$\forall u \in U, u \in \operatorname{Ker} T$，证毕.

充分性：定义$S \in L(V/U,W)$为$S(v+U) = Tv$.

为了验证定义的合法性，设$v_1+U = v_2+U$，需证明$Tv_1 = Tv_2$.

$v_1+U = v_2+U \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \subseteq \operatorname{Ker} T$，因此$T(v_1-v_2) = 0$，即$Tv_1 = Tv_2$.

因此，$S\circ\pi(v) = S(v+U) = Tv$，证毕.

20. 设U是V的一个子空间.定义$\Gamma \in L(L(V/U,W),L(V,W))$为$\Gamma(S) = S\circ\pi$.

(a)证明Γ是线性变换.

(b)证明Γ是单射变换.

(c)证明$\operatorname{Im}\Gamma = \{T \in L(V,W) | \forall u \in U, Tu = 0\}$.

a.Proof:

$$\Gamma(\lambda S_1 + \mu S_2) = (\lambda S_1 + \mu S_2)\circ\pi$$
$$\lambda S_1\circ\pi + \mu S_2\circ\pi = \lambda\Gamma(S_1) + \mu\Gamma(S_2)$$

b.Proof: 令$\Gamma(S)(v) = S\circ\pi(v) = S(v+U) = 0$.

由于对于$\forall v+U \in V/U$，$S(v+U) = 0$，故$S = 0$，即$\operatorname{Ker}\Gamma = 0$，证毕.

c.Proof: 若$T \in \operatorname{Im}\Gamma$，则$\exists S \in L(V/U,W)$，使得$T = S\circ\pi$.

根据*3.E.18*，$U \subseteq \operatorname{Ker} T$. 因此对于$\forall T \in \operatorname{Im}\Gamma$，有$\forall u \in U, Tu = 0$.

Theorem 4.8. 设$p, s \in P(F), s \neq 0$，则存在唯一的$q, r \in P(F)$使得$p = sq + r, \deg r < \deg s$.
Proof: 令$\deg p = n, \deg s = m$.由$\deg p = \deg s + \deg q, \deg r < \deg s$.
因此$q \in P_{n-m}(F), r \in P_{m-1}(F)$. 定义$T : P_{n-m}(F) \times P_{m-1}(F) \to P_n(F)$为

$$T(q, r) = sq + r = p$$

首先验证该变换是线性变换.

$$\begin{aligned} &T(c_1q_1 + c_2q_2, c_1r_1 + c_2r_2) = s(c_1q_1 + c_2q_2) + (c_1r_1 + c_2r_2) \\ &= c_1(sq_1 + r_1) + c_2(sq_2 + r_2) = c_1T(q_1, r_1) + c_2T(q_2, r_2) \end{aligned}$$

如果该变换是一个单射变换，则对于任意给定的p, s，其商多项式和余数多项式均唯一；
如果该变换是一个满射变换，则对于任意给定的p, s，都有对应的商多项式和余数多项式.
下面将证明两条性质都是成立的，先从单射开始.
令$sq + r = p = 0$.由于$\deg r < \deg sq$，因此$sq \neq -r \Rightarrow sq = 0 \wedge r = 0 \Rightarrow q = 0 \wedge r = 0$.
即T是单射变换，且下证该变换是满射变换.

$$\begin{aligned} &\dim\,(P_{n-m}(F) \times P_{m-1}(F)) = \dim\,P_{n-m}(F) + \dim\,P_{m-1}(F) \\ &= (n - m + 1) + (m - 1 + 1) = n + 1 = \dim\,P_n(F) \end{aligned}$$

两者采用的标准基一致，因此根据定理2.41，$\dim\,\mathrm{Im}\,T = \dim\,P_n(F)$，从而$T$是满射变换.
于是T是可逆变换，存在性和唯一性均得证.

11 *Chapter 5.A*

1. 设$T \in L(V)$且U是V的一个子空间.
(a)证明：若$U \subseteq \mathrm{Ker}\ T$，则$U$是$T$的不变子空间.
(b)证明：若$\mathrm{Im}\ T \subseteq U$，则$U$是$T$的不变子空间.
a.Proof: $\forall u \in U, Tu = 0 \in U$.
b.Proof: $\forall u \in U, Tu \in \mathrm{Im}\ T \subseteq U$.

2. 设$S, T \in L(V)$满足$ST = TS$.
(a)证明：$\mathrm{Ker}\ S$是T的不变子空间.
(b)证明：$\mathrm{Im}\ S$是T的不变子空间.
a.Proof: $\forall v \in \mathrm{Ker}\ S, Sv = 0 \Rightarrow STv = TSv = 0 \Rightarrow Tv \in \mathrm{Ker}\ S$.
b.Proof: $\forall Sv \in \mathrm{Im}\ S, T(Sv) = S(Tv) \in \mathrm{Im}\ S$.

4. 设$T \in L(V)$且$U_1, \cdots, U_m$都是V的不变子空间.求证：$\sum_{i=1}^m U_i$是 V的不变子空间.
Proof: 由于$\forall u \in \sum_{i=1}^m U_i, \exists u_i \in U_i, u = \sum_{i=1}^m u_i$且$U_1, \cdots, U_m$都是$V$的不变子空间，
得到$\forall i = 1, \cdots, m, Tu_i \in U_i, Tu = \sum_{i=1}^m Tu_i \in \sum_{i=1}^m U_i$.

5. 设$T \in L(V)$且$U_1, \cdots, U_m$都是V的不变子空间. 求证：$\bigcap_{i=1}^m U_i$是 V的不变子空间.
Proof: 设$u \in \bigcap_{i=1}^m U_i$，则$\forall i = 1, \cdots, m, Tu \in U_i$. 因此$\forall u \in \bigcap_{i=1}^m U_i, Tu \in \bigcap_{i=1}^m U_i$，证毕.

6. 证明或给出反例：若V是有限维向量空间且V是U的一个子空间.
若U满足对于V上的任意算子T，U都是T的不变子空间，则有$U = \{0\}$或$U = V$.
Proof: 由于U是V的一个子空间且V是有限维向量空间，不妨设$\{0\} \subset U \subset V$.
令$u_1, \cdots, u_m$为U的一组基，$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$是$V$的一组基.
故一定存在$T \in L(V)$，使得$Tu_i = v_j \notin U, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$.
从而U不是不变子空间，因此U只能为$\{0\}$或V.

8. 定义$T \in L(F^2)$为$T(w, z) = (z, w)$.给出T的所有特征值和特征向量.
Proof: 设$T(w, z) = \lambda(w, z)$，得到$\lambda w = z$且$\lambda z = w$，联立得到$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.
当$\lambda = 1$时，对应的特征向量为$(1, 1)$；当$\lambda = -1$时，对应的特征向量为$(1, -1)$.

10. 定义$T \in L(F^n)$为$T(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,nx_n)$.

(a)给出T的所有特征值和特征向量.

(b)给出T的所有不变子空间.

a.Proof: $T(x_1,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)=(x_1,\cdots,nx_n)$. 因此只能有$\lambda_i=i, x_{j\neq i}=0$.

故T共有n个特征值$1,\cdots,n$，第i个特征值对应的特征向量是$(0,\cdots,1^i,\cdots,0)$.

b.Proof: 设$e_1,\cdots,e_n$是F^n的标准基.

根据*5.A.10.a*，$\forall i=1,\cdots,n, U_i=\mathrm{span}(e_i)$都是$T$的不变子空间.

又根据*5.A.4*，其中任意若干U_i之和都是T的不变子空间.

12. 定义$T \in P_4(R)$为$(Tp)(x)=xp'(x)$.给出T的所有特征值和特征向量.

Proof: $(Tp)(x)=xp'(x)=\sum_{i=1}^4 ia_ix^i=\lambda p(x)=\lambda\sum_{i=0}^m a_ix_i$.

得到$a_0=0$且$\lambda a_i=ia_i$. 因此$\lambda=1,2,3,4$，对应的特征向量为$a_1x,a_2x^2,a_3x^3,a_4x^4$.

14. 设$V=U\oplus W$，其中U和W都是V的非零子空间.

定义$P\in L(V)$为$P(u+w)=u,u\in U,w\in W$.给出T的所有特征值和特征向量.

Proof: $P(u+w)=\lambda(u+w)=u\Rightarrow\lambda=1,w=0$或$\lambda=0,u=0$.

因此T有0和1两个特征值，对应的特征向量分别是W和U中所有非零向量.

15. 设$T\in L(V)$且$S\in L(V)$是可逆变换.

(a)证明：T和$S^{-1}TS$有相同的特征值.

(b)给出T和$S^{-1}TS$的特征向量之间的关系.

a.Proof: 设$\lambda\in F$和$v\in V$满足$Tv=\lambda v$. 考虑$S^{-1}v$.有$(S^{-1}TS)(S^{-1}v)=(S^{-1}T)v=\lambda S^{-1}v$.

因此$Tv=\lambda v\Rightarrow(S^{-1}TS)(S^{-1}v)=\lambda S^{-1}v$.

b.Proof: 根据*5.A.15.a*， $S^{-1}v$是$S^{-1}TS$的特征向量等价于v是T的特征向量.

21. 设$T\in L(V)$是可逆变换.

(a)设$\lambda\in F$且$\lambda\neq0$. 证明：λ是T的特征值和λ^{-1}是T^{-1}的特征值等价.

(b)证明T和T^{-1}有相同的特征向量.

a.Proof: $Tv=\lambda v\Rightarrow T^{-1}Tv=\lambda T^{-1}v\Rightarrow T^{-1}v=\lambda^{-1}v$.

b.Proof: 根据*5.A.21.a*，若v是T的一个特征向量，则v也是T^{-1}的一个特征向量.

23. 设V是有限维向量空间且$S, T \in L(V)$.求证：ST和TS有相同的特征值.
Proof: 设$(ST)v = \lambda v$.考虑Tv，有$(TS)(Tv) = T((ST)v) = T(\lambda v) = \lambda Tv$.
若$v \notin \mathrm{Ker}\ T$，原式得证；若$v \in \mathrm{Ker}\ T$，则ST和TS都有特征值0.

24. 设A是$n-n$矩阵.定义$T \in L(F^n)$为$Tx = Ax$.
(a)矩阵每行元素之和均为1.证明1是矩阵的特征值.
(b)矩阵每列元素之和均为1.证明1是矩阵的特征值.
a.Proof: 不妨先猜测特征向量.定义$x \in F^n$为$(1, \cdots, 1)^T$.

$$(A-I)x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{n,j} \end{pmatrix} = 0$$

因此1确实是T的特征值.
b.Proof:

$$x^T(A-I) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{i,1} - 1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} A_{i,n} - 1 \end{pmatrix} = 0$$

因此1确实是T的特征值.

28. 设V是有限维向量空间.
$T \in L(V)$满足任意维数为$\dim V - 1$的子空间都是不变子空间.求证：$T = \lambda I, \lambda \in F$.
Proof: 设$v_1, \cdots, v_m$是V的一组基.则$\exists a_i^j \in F, Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_i^j v_i$.
我们不妨先考虑所有包含$\mathrm{span}(v_1)$的且维数为$\dim V - 1$的子空间.
设$U_i = \mathrm{span}(v_i)$，这些子空间的统一形式可以被写作$\sum_{i=1}^{m} U_i (i \neq i_0, i_0 \neq 1)$.
由于该子空间不变，故$Tv_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i^1 v_i \in \sum_{i=1}^{m} U_i (i \neq i_0)$.
因此$a_{i_0} = 0$.由于i_0可以取遍每一个不为1的值，故$a_2^1 = \cdots = a_n^1 = 0$，即$Tv_1 = a_1^1 v_1$.
同理，$\forall i = 1, \cdots, m, Tv_i = a_i^i v_i$均成立，可以推断任意非零向量均为$T$的特征向量.
根据*5.A.26*，$T = \lambda I, \lambda \in F$.

30. 设$T \in L(R^3)$且$-4, 5, \sqrt{7}$是T的特征值. 求证:存在$x \in R^3$，使得$(T - 9I)x = (-4, 5, \sqrt{7})$.
Proof: $T \in L(R^3)$最多拥有3个特征值，即9不是T的特征值.从而$T - 9I$可逆，即满射，证毕.

31. 设V是有限维向量空间且$v_1, \cdots, v_m \in V$.
求证：$v_1, \cdots, v_m$线性无关等价于$v_1, \cdots, v_m$是某$T \in L(V)$对应不同特征值的特征向量.
Proof: 必要性：根据定理5.10证毕.
充分性：由于$v_1, \cdots, v_m$线性无关，可以令$v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n$为$V$的一组基.
定义$Tv_i = iv_i, 1 = 1, \cdots, n$即可.

32. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in R$. 求证：$e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$在由实值函数组成的函数空间中线性无关.
Proof: 令$V = \mathrm{span}(e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x})$，并定义$T \in L(V)$为$Tf = f'$.
由于$(e^{\lambda_i x})' = \lambda_i e^{\lambda_i x}$，即$Tf_i = \lambda_i f_i$，故$e^{\lambda_i x}$是$T$的特征向量.
根据定理5.10，$e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$线性无关.

33. 设$T \in L(V)$.证明：$T/(\mathrm{Im}\, T) = 0$.
Proof: $\forall v \in V, (T/(\mathrm{Im}\, T))(v + (\mathrm{Im}\, T)) = Tv + \mathrm{Im}\, T = \mathrm{Im}\, T$.

12 *Chapter 5.B*

Theorem 5.27. 对于任意的有限维复向量空间V和任意的$T \in L(V)$，总存在V的一组基，使得线性算子T的矩阵是上三角矩阵.

Proof: 使用数学归纳法.$\dim V = 1$的情况显然成立.

现在假设对于任意的W满足$\dim W < \dim V$，W都满足条件.

根据定理5.21，该复向量空间必存在一个特征值λ及对应的特征向量v_1.

令$U = \mathrm{span}(v_1)$，考虑商空间V/U，$\dim V/U = n-1$，因此可以对其使用假设.

构造T在V/U上的诱导变换T/U满足$\forall v + U \in V/U, (T/U)(v+U) = Tv + U$.

根据假设，V/U存在一组基$v_2 + U, \cdots, v_n + U$满足$(T/U)(v_i + U) \in \mathrm{span}(v_2 + U, \cdots, v_n + U)$.

根据*3.E.13*，$v_1, \cdots, v_n$是V的一组基，且满足$\forall i = 1, \cdots, n, Tv_i \in \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_i)$.

1. 设$T \in L(V)$且存在$n \in N^+$使得$T^n = 0$. 求证：$I - T$是可逆，且$(I-T)^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} T^i$.

Proof: $(I-T)\sum_{i=0}^{n-1} T^i = \sum_{i=0}^{n-1} T^i - \sum_{i=1}^{n} T^i = I - T^n = I$.

3. 设$T \in L(V)$，满足$T^2 = I$且-1不是T的特征值.证明$T = I$.

Proof: $T^2 = I \Rightarrow (T+I)(T-I) = 0$，因此1和$-1$至少有一个是$T$的特征值.

而-1不是T的特征值，因此$T = I$.

4. 设$P \in L(V)$满足$P^2 = P$.证明$V = \mathrm{Ker}\ P \oplus \mathrm{Im}\ P$.

Proof: 对于$\forall v \in V, v = Pv + (v - Pv)$.

显然$Pv \in \mathrm{Im}\ P$，且$P(v-Pv) = (P-P^2)v = 0 \Rightarrow v - Pv \in \mathrm{Ker}\ P$，因此$V = \mathrm{Im}\ P + \mathrm{Ker}\ P$.

再考虑$v \in \mathrm{Ker}\ P \cap \mathrm{Im}\ P$，因此$\exists u \in V$，使得$Pu = v$，得$v = Pu = P^2u = Pv = 0$，证毕.

5. 设$S, T \in L(V)$且S是可逆变换.设$p \in P(F)$是一个多项式.

求证：$p(STS^{-1}) = Sp(T)S^{-1}$

Proof: 对于$Sv \in V$，有$(STS^{-1})^m(Sv) = (STS^{-1})^{m-1}(S(Tv)) = \cdots = (ST^m)v$.

$$p(STS^{-1})(Sv) = \sum_{i=0}^{m} a_i (STS^{-1})^m (Sv) = \sum_{i=0}^{m} a_i (ST^m) v = Sp(T)v = Sp(T)S^{-1}(Sv)$$

6. 设$T \in L(V)$且U是T下的不变子空间.
求证：对于任意多项式$p \in P(F)$，U都是$p(T)$下的不变子空间.
Proof: 使用数学归纳法.先验证$n = 1$的情况.
$\forall u \in U, (a_0 I + a_1 T)u = a_0 u + a_1(Tu) \in U$，情况成立.
接着假设结论在次数为n时成立，即$\forall u \in U, p_n(T)u = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i u \in U$.
下面验证次数为$n+1$的情况. $\forall u \in U, p_{n+1}(T)u = \sum_{i=0}^{n+1} a_i T^i u = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i u + a_{n+1} T^{n+1} u$.
由于$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i u \in U, a_{n+1} T^{n+1} u \in U$，故$p_{n+1}(T)u \in U$，证毕.

9. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V)$，存在$v \neq 0 \in V$.
令p是能使得$p(T)v = 0$的次数最低的多项式.求证：p的所有零点都是T的特征值.
Proof: 使用反证法.设$\exists \lambda \in F, p(\lambda) = 0$但$T - \lambda I$可逆.
根据代数基本定理，存在$q(T) \in L(V)$，使得$p(T) = (T - \lambda I)q(T), \deg q < \deg p$.
因此$q(T)$不能满足$q(T)v = 0$.但是$v \neq 0$，因而$(T - \lambda I)v \neq 0$.
因此$p(T)v = (T - \lambda I)q(T)v \neq 0$，矛盾，从而原命题得证.

11. 设$T \in L(V)$和一个多项式$p \in P(C)$，$\alpha \in C$.
求证：α是$p(T)$的特征值和存在T的特征值λ使得$\alpha = p(\lambda)$等价.
Proof: 必要性：若$Tv = \lambda v$且$\alpha = p(\lambda)$，则$p(T)v = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i v = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i v = p(\lambda)v$.
充分性：$\exists v \neq 0, Tv = \alpha v \Rightarrow (p(T) - \alpha I)$不可逆.
因此$p(T) - \alpha I = c \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i I)$不可逆，即至少存在一个$\lambda_i$使得$T - \lambda_i I$不可逆，
即λ_i是T的特征值，因此$p(T)v = p(\lambda_i)v = \alpha v$.

13. 设W是复向量空间且$T \in L(W)$没有特征值.
求证：若U在T下不变，则$U = \{0\}$或者U为无限维向量空间.
Proof: $\{0\}$的情况显然成立.现在假设U是非零有限维复向量空间.
则$T|_U \in L(U)$必有特征值λ，即$T|_U u = \lambda u$. 从而$T \in L(W)$实际上有一个特征值λ，矛盾.

16. 令$\varphi : P_n(C) \to V$为$\varphi p = p(T)v$，以此证明定理5.21.
Proof: 先证明φ是线性变换.

$$\varphi(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)(T)v = (\lambda p(T) + \mu q(T))v = \lambda p(T)v + \mu q(T)v = \lambda(\varphi p) + \mu(\varphi q)$$

由于$\dim P_n(C) = n + 1, \dim V = n$，因此该变换不是单射变换，
也即存在$v \neq 0$使得$p(T)v = \sum_{i=0}^{n} a_i(T^i v) = 0$，后文证明与原文相同.

13 *Chapter 5.C*

1. 设$T \in L(V)$可对角化.证明$V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

Proof: 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的所有非零特征值.

由于T可对角化，故根据定理5.41，$V = E(0, T) + \oplus_{i=1}^{m} E(\lambda_i, T)$.

考虑$v_i \in E(\lambda_i, T)$，有$Tv_i = \lambda_i v_i, v_i = \dfrac{1}{\lambda_i} Tv_i$.

因此$T(E(\lambda_i, T)) \subseteq E(\lambda_i, T), E(\lambda_i, T) \subseteq T(E(\lambda_i, T))$.

即$\text{Im } T = \oplus_{i=1}^{m} E(\lambda_i, T)$且$\text{Ker } T = E(0, T)$，证毕.

3. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V)$.证明以下三个命题等价：

$(a) V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T \quad (b) V = \text{Ker } T + \text{Im } T \quad (c) \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$

Proof: 下证$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$. $a \Rightarrow b$是显然的.

假设b成立.根据定理2.43和3.22，

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$
$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T - \dim (\text{Im } T \cap \text{Ker } T)$$

得到$\dim (\text{Im } T \cap \text{Ker } T) = 0 \Rightarrow \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$.

假设c成立，令$u_1, \cdots, u_m$和$w_1, \cdots, w_n$分别为$\text{Ker } T$和$\text{Im } T$的一组基.

根据*2.B.8*，$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n$是$T$的一组基. 从而$V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$，证毕.

5. 设V是有限维复向量空间且$T \in L(V)$.设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值.

证明：若$\forall i = 1, \cdots, m, V = E(\lambda_i, I) \oplus \text{Im } (T - \lambda_i I)$，则$T$可对角化.

Proof: 使用数学归纳法，当$\dim V = 1$时，$V = E(\lambda_1, T), \text{Im } (T - \lambda_1 I) = \{0\}$，显然成立.

现假设对于任意的W满足$\dim W < \dim V$，结论均成立.

由于$\text{Im } (T - \lambda_1 I)$是$T$下的不变子空间且$\dim \text{Im } (T - \lambda_1 I) < \dim V$，故可以对其使用归纳.

令$\text{Im } (T - \lambda_1 I) = U. T|_U$的特征值为$\lambda_2, \cdots, \lambda_m$，故$U = \oplus_{i=2}^{m} E(\lambda_i, T|_U)$.

以下将证明$\forall i = 2, \cdots, m, E(\lambda_i, T) \subseteq E(\lambda_i, T|_U)$，设$\forall i = 2, \cdots, m, v_i^{\alpha} \in E(\lambda_i, T) \subseteq V$.

由于$V = E(\lambda_1, T) \oplus U = E(\lambda_1, T) \oplus_{j=2}^{m} E(\lambda_i, T|_U)$，

故$\exists v_j^{\beta} \in E(\lambda_i, T|_U), v_i^{\alpha} = v_1^{\alpha} + \sum_{j=2}^{m} v_j^{\beta}$. 因而$v_i^{\alpha} - v_i^{\beta} = v_1^{\alpha} + \sum_{j=2}^{m} v_j^{\beta} (j \neq i)$.

根据定理5.10，若这些向量为T的特征向量，那么它们必须线性无关.

然而它们的系数均为1，因此它们只能为零向量，这表明$v_i^{\alpha} - v_i^{\beta} = v_1^{\alpha} = v_j^{\beta} = 0$.

因此$v_i^{\alpha} = v_i^{\beta} \in E(\lambda_i, T|_U)$，即$E(\lambda_i, T) \subseteq E(\lambda_i, T|_U)$.

结合$E(\lambda_i, T|_U) \subseteq E(\lambda_i, T)$，得到$E(\lambda_i, T|_U) = E(\lambda_i, T)$.

于是$U = \oplus_{i=2}^{m} E(\lambda_i, T), V = E(\lambda_1, T) \oplus U = \oplus_{i=1}^{m} E(\lambda_i, T)$，证毕.

6. 设V是有限维向量空间.

$T \in L(V)$有$\dim V$个不同的特征向量，$S \in L(V)$有和T相同的特征向量. 求证：$ST = TS$.

Proof: 令$\dim V = n$，设$v_1, \cdots, v_n$是S, T的特征向量.

根据特征向量的独立性，$v_1, \cdots, v_n$是V的一组基.

设$\forall i = 1, \cdots, m, Tv_i = \lambda_i^\alpha v_i, Sv_i = \lambda_i^\beta v_i$.

$$(ST)v = (ST)\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = S\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^\alpha v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^\beta \lambda_i^\alpha v_i$$
$$(TS)v = (TS)\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = T\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^\beta v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^\alpha \lambda_i^\beta v_i$$

显然$ST = TS$.

12. 设V是有限维向量空间且$\dim V = n. R, T \in L(V)$都有特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

求证：存在可逆变换$S \in L(V)$，使得$R = S^{-1}TS$.

Proof: 根据定理5.44，显然R, T均可对角化.

设$v_1^\alpha, \cdots, v_n^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_n^\beta$ 分别是R, T与λ_i对应的特征向量.

根据定理5.10和2.39，$v_1^\alpha, \cdots, v_n^\alpha$和$v_1^\beta, \cdots, v_n^\beta$分别是$V$的一组基.

定义线性变换S为$Sv_i^\alpha = v_i^\beta, i = 1, \cdots, n$，故有

$$\begin{aligned}(S^{-1}TS)v &= (S^{-1}TS)\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^\alpha = (S^{-1}T)\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^\beta \\ &= S^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i^\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i^\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i R v_i^\alpha = Rv\end{aligned}$$

因而$R = S^{-1}TS$，证毕.

16. 斐波那契数列$F_1, F_2, \cdots$定义如下：

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, n \geq 3$$

并定义$T \in L(R^2)$为$T(x, y) = (y, x + y)$.
(a)证明$\forall n \in N^+, T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$.
(b)给出T的特征值.
(c)给出一组以T的特征向量所构成的R^2的基.
(d)利用(c)部分的结论给出$T^n(0, 1)$，并证明

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n]$$

(e)利用(d)部分的结论证明斐波那契数F_n是最接近 $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$的整数.
$(a.Proof)$: 使用数学归纳法.$n = 1$时，$T(0, 1) = (1, 1) = (F_1, F_2)$.
下设$n = k$时结论成立.则$n = k + 1$时，

$$T^{k+1}(0, 1) = T(F_k, F_{k+1}) = (F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) = (F_{k+1}, F_{k+2})$$

$(b.Proof)$: 令$T(x, y) = \lambda(x, y) = (y, x + y)$，则$y = \lambda x$且$x + y = \lambda y$.
得到$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$，故$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
$(c.Proof)$: $T(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}), T(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.
$(d.Proof)$: 设$v_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}), v_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
对于$\forall v \in R^2, \exists a_1, a_2 \in R, v = a_1 v_1 + a_2 v_2$，
从而$Tv = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2, T^n v = a_1 \lambda_1^n v_1 + a_2 \lambda_2^n v_2$.
令$v = (0, 1), v = a_1 v_1 + a_2 v_2 = (a_1 + a_2, \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} a_2)$.
得到$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. 根据*5.C.16.a*，$T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$.故

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n]$$

$(e.Proof)$: 即证$\left|F_n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right|$.
由于$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$，故$\left|(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right| < 1$. 得到$\left|\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.
因此两数的差始终小于$\frac{1}{2}$，证毕.

14 *Chapter 8.A*

*Theorem 5.10/8.13*特征向量/广义特征向量的独立性 设V是有限维向量空间，$T \in L(V)$.
$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的特征值，$v_1, \cdots, v_m$是分别与之对应的（广义）特征向量.
求证：$v_1, \cdots, v_m$线性无关.
5.10 Proof: 令$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$，下证$a_1 = \cdots = a_m = 0$.
设$i_0 \in \{1, \cdots, m\}$.对等式两边施加算子$\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)(i \neq i_0)$.

$$0 = a_{i_0} \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I) v_{i_0} = a_{i_0} \prod_{i=1}^m (\lambda_{i_0} - \lambda_i) v_{i_0}$$

由于这些特征值各不相同，故$\forall i = 1, \cdots, m, \lambda_i - \lambda_{i_0} \neq 0$. 从而只能有$a_{i_0} = 0$.
让i_0依次等于$1, \cdots, m$，则$a_1 = \cdots = a_m = 0$，证毕.
8.13 Proof: 令$\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$，下证$a_1 = \cdots = a_m = 0$.
设$i_0 \in \{1, \cdots, m\}$. 令k为最大的使$(T - \lambda_{i_0})^k v_{i_0} \neq 0$的自然数.
令$v_0 = (T - \lambda_{i_0})^k v_{i_0}$，则$(T - \lambda_{i_0})^{k+1} v_{i_0} = 0$. 从而$T v_0 = \lambda_{i_0} v_0$，进一步有

$$(T - \lambda I) v_0 = (\lambda_{i_0} - \lambda_i) v_0 \Rightarrow (T - \lambda I)^{\dim V} v_0 = (\lambda_{i_0} - \lambda_i)^{\dim V} v_0$$

对等式两边施加算子$\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{\dim V} (T - \lambda_{i_0})^k (i \neq i_0)$.

$$0 = a_{i_0} \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{\dim V} (T - \lambda_{i_0})^k v_{i_0} = a_{i_0} \prod_{i=1}^m (\lambda_{i_0} - \lambda_i)^{\dim V} v_0$$

由于这些特征值各不相同，故$\forall i = 1, \cdots, m, (\lambda_i - \lambda_{i_0})^{\dim V} \neq 0$. 从而只能有$a_{i_0} = 0$.
两者的证明思路大体相似，但定理8.13需要多乘以一个算子来构造一个“狭义”特征向量，以使得定理5.10所施加的算子可操作.

*Theorem 8.19*幂零算子的矩阵 设$N \in L(V)$是一个幂零算子，则存在V的一组基，
使得$M(N)$是对角线元素均为0的上三角矩阵.
Proof: 设$\dim V = n$，并令B_1是$\text{Ker } N$的一组基.
由于$\text{Ker } N^i \subseteq \text{Ker } N^{i+1}$，因此该基可以被依次扩充成$\text{Ker } N^2, \cdots, \text{Ker } N^n$的一组基.
不妨设$B_2, \cdots, B_n$是依次扩充所得的基.
由于N是幂零算子，因此$\text{Ker } N^n = V$，所以$B_1, \cdots, B_n$就是V的一组基.
由于$NB_{i+1} \in \text{Ker } B_i$，因此$B_i$中的所有向量均可表示成$B_1, \cdots, B_i$中向量的线性组合，
也即该列后面的元素均为0.特别地，$NB_1 = 0$，因此B_1列的所有元素均为0.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. 定义$T \in L(C^2)$为$T(w,z)=(-z,w)$.给出T的所有广义特征空间.
Proof: 先给出T的所有特征值.令$T(w,z)=\lambda(w,z)=(-z,w)$，得到$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$.
因此$(T-iI)^2(w,z)=-2(w-iz,z+iw),(T+iI)^2(w,z)=(w+iz,z-iw)$.
最后$G(i,T)=\mathrm{Ker}\ (T-iI)^2=(iz,z),G(-i,T)=\mathrm{Ker}\ (T+iI)^2=(-iz,z)$.

3. 设$T \in L(V)$是可逆变换.证明：$\forall \lambda \neq 0, G(\lambda,T)=G(\lambda^{-1},T^{-1})$.
Proof: 设$\dim V=n$，则$G(\lambda,T)=\mathrm{Ker}\ (T-\lambda I)^n, G(\lambda^{-1},T^{-1})=\mathrm{Ker}\ (T^{-1}-\lambda^{-1}I)^n$.
使用数学归纳法.$n=1$时，根据*5.C.9*，$E(\lambda,T)=E(\lambda^{-1},T^{-1})$，命题成立.
接着假设$\mathrm{Ker}\ (T-\lambda I)^{n-1}=\mathrm{Ker}\ (T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{n-1}$，考虑$\forall v \in \mathrm{Ker}\ (T-\lambda I)^n$.
即$(T-\lambda I)^n v=(T-\lambda I)^{n-1}(T-\lambda I)v=0$.
利用归纳假设，有$(T-\lambda I)v \in \mathrm{Ker}\ (T-\lambda I)^{n-1}=\mathrm{Ker}\ (T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{n-1}$.
根据定理5.20，有$(T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{n-1}(T-\lambda I)v=(T-\lambda I)(T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{n-1}v=0$.
利用$n=1$时的结论，有$(T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{n-1}v \in \mathrm{Ker}\ (T-\lambda I)=\mathrm{Ker}\ (T^{-1}-\lambda^{-1}I)$.
得到$(T^{-1}-\lambda^{-1}I)(T^{-1}-\lambda^{-1}I)^{n-1}v=(T^{-1}-\lambda^{-1}I)^n v=0$，
因此$v \in \mathrm{Ker}\ (T^{-1}-\lambda^{-1}I)^n \Rightarrow G(\lambda,T) \subseteq G(\lambda^{-1},T^{-1})$.
$G(\lambda^{-1},T^{-1}) \subseteq G(\lambda,T)$的过程完全一致.综上，$G(\lambda,T)=G(\lambda^{-1},T^{-1})$.

5. 设$T \in L(V), v \in V, m \in Z^+$，且满足$T^{m-1}v \neq 0, T^m v=0$.
求证：$v,Tv,\cdots,T^{m-1}v$线性无关.
Proof: 令$\sum_{i=0}^{m-1} a_i T^i v=0$.对等式两边施加算子$T^{m-1}$，
得到$\sum_{i=0}^{m-1} a_i T^{i+m-1}v=a_0 T^{m-1}v=0$，因此$a_0=0$.
接着依次对该等式两边施加算子$T^{m-2},\cdots,T$，得到$a_0=a_1=\cdots=a_{m-2}=0$.
而$T^{m-1}v \neq 0$，因此必有$a_{m-1}=0$，从而$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0$，证毕.

9. 设$S,T \in L(V)$且ST是幂零算子，证明TS也是幂零算子.
Proof:

$$\mathrm{Ker}\ (TS)^{\dim V}=\mathrm{Ker}\ (TS)^{\dim V+1}=\mathrm{Ker}\ T(ST)^{\dim V}S=V$$

其中$(ST)^{\dim V}=0$，因此第三个等号成立.

11. 证明或给出反例：若$T \in L(V)$且$\dim V=n$，则T^n可对角化.
Proof: 反例：设$V=C^2, T(z_1,z_2)=(z_1,0)$，则$T^2(z_1,z_2)=(z_1,0)$.
因此T^2只有一个特征值，无法对角化.

12. 设$N \in L(V)$满足存在V的一组基，使得$M(N)$是对角元素均为0的上三角矩阵.
求证：N是幂零算子.
Proof: 设$v_1, \cdots, v_m$是满足条件的一组基.
由于该矩阵是三角矩阵，则根据定理5.26有$Nv_i \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_i)$.
进一步，由于对角线元素均为0，因此$Nv_i \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_{i-1})$.
因此$\forall i = 1, \cdots, m, N^m v_i = 0$，即$N$是幂零算子，证毕.

15. 设$N \in L(V)$满足$\text{Ker } N^{\dim V - 1} \neq \text{Ker } N^{\dim V}$.
求证：N是幂零算子且$\forall i = 1, \cdots, \dim V, \dim \text{Ker } N^i = i$.
Proof:

$$\text{Ker } N^{\dim V-1} \neq \text{Ker } N^{\dim V} \Rightarrow \forall i < j \in \{1, \cdots, \dim V\}, \dim \text{Ker } N^i < \dim \text{Ker } N^j$$

因此$\dim \text{Ker } N < \cdots < \dim \text{Ker } N^{\dim V} \leq \dim V$.
得到$\dim \text{Ker } N^{\dim V} = \dim V$，即$N$是幂零算子，且$\dim \text{Ker } N^i = i$.

16. 设$T \in L(V)$.求证

$$V = \text{Im } T^0 \supset \text{Im } T^1 \supset \cdots$$

Proof: $\forall v \in V, T^{i+1}v \in \text{Im } T^{i+1}, T^{i+1}v = T^i(Tv) \in \text{Im } T^i$.
因此$\forall i \in N^*, \text{Im } T^{i+1} \subseteq \text{Im } T^i$.特别地，$T^0 = I, \text{Im } I = V$.

17. 设$T \in L(V), m \in N^*$满足$\text{Im } T^m = \text{Im } T^{m+1}$.
求证：$\forall i \in N^*, \text{Im } T^{m+i} = \text{Im } T^m$.
Proof: 根据定理3.22，$\dim V = \dim \text{Ker } T^i + \dim \text{Im } T^i$. 根据定理8.3，

$$\begin{aligned} \text{Ker } T^m = \text{Ker } T^{m+1} \Rightarrow \forall i \in N^*, \text{Ker } T^{m+i} = \text{Ker } T^m \Rightarrow \dim \text{Ker } T^{m+i} = \dim \text{Ker } T^m \\ \Rightarrow \dim \text{Im } T^m = \dim \text{Im } T^{m+1} = \cdots \end{aligned}$$

根据*2.C.1*和*8.A.16*，$\forall i \in N^*, \text{Im } T^{i+1} = \text{Im } T^i$.

18. 设$T \in L(V), \dim V = n$.求证：

$$\text{Im } T^n = \text{Im } T^{n+1} = \cdots$$

Proof: 根据定理3.22和定理8.4，$\forall i > n \in N^*, \dim \text{Im } T^{i+1} = \dim \text{Im } T^i$.
根据*2.C.1*和*8.A.16*，$\forall i \in N^*, \text{Im } T^{i+1} = \text{Im } T^i$.

15 *Chapter 8.B*

Theorem 8.21 广义特征空间分解

设V是有限维复向量空间且$T \in L(V)$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$所有的不同特征值.求证：

$(a)\forall i = 1, \cdots, m, G(\lambda_i, T)$是$T$下的不变子空间.

$(b)\forall i = 1, \cdots, m, (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$是幂零算子.

$(c)V = \oplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$.

lemma/Theorem 8.20: $\mathrm{Ker}\ p(T)$和$\mathrm{Im}\ p(T)$是T下的不变子空间.

Proof: 对$\mathrm{Ker}\ p(T)$和$\mathrm{Im}\ p(T)$逐一验证即可.

$$\forall v \in \mathrm{Ker}\ p(T), p(T)(Tv) = T(p(T)v) = 0 \Rightarrow Tv \in \mathrm{Ker}\ p(T)$$

$$\forall v \in \mathrm{Im}\ p(T), \exists u \in V, p(T)u = v \Rightarrow Tv = T(p(T)u) = p(T)(Tu), Tv \in \mathrm{Im}\ p(T)$$

a.Proof: 考虑$p(z) = (z - \lambda_i)^n$，从而$\mathrm{Ker}\ p(T) = G(\lambda_i, T)$.

根据引理，$G(\lambda_i, T)$是T下的不变子空间.

b.Proof: $\mathrm{Ker}\ (T - \lambda_i I)^n = G(\lambda_i, T)$，显然$(T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$是幂零算子.

c.Proof: 使用第二数学归纳法.当$n = 1$时，$V = G(\lambda, T)$，命题成立.

现在给出假设：对于任意有限维复向量空间U和$R \in L(U)$满足$\dim U < \dim V = n$，

R的所有特征值分别为$\mu_1, \cdots, \mu_\zeta$，都有$U = \oplus_{i=1}^{\zeta} G(\mu_i, R)$.

则当$\dim V = n$时，首先有$V = \mathrm{Ker}\ (T - \lambda_1 I)^n \oplus \mathrm{Im}\ (T - \lambda_i I)^n$. 不妨令$U = \mathrm{Im}\ (T - \lambda_i I)^n$.

根据引理，U是T下的不变子空间，且满足$\dim U < \dim V$，因此$T|_U$存在.

这满足我们的归纳假设，由于$T|_U$的所有特征值是$\lambda_2, \cdots, \lambda_m$，得到$U = \oplus_{i=2}^m G(\lambda_i, T|_U)$.

以下将证明$\forall i = 2, \cdots, m, G(\lambda_i, T) \subseteq G(\lambda_i, T|_U)$，设$\forall i = 2, \cdots, m, v_i^\alpha \in G(\lambda_i, T) \subseteq V$.

由于$V = G(\lambda_1, T) \oplus U = G(\lambda_1, T) \oplus_{j=2}^m G(\lambda_i, T|_U)$，

故$\exists v_j^\beta \in G(\lambda_i, T|_U), v_i^\alpha = v_1^\alpha + \sum_{j=2}^m v_j^\beta$. 因而$v_i^\alpha - v_i^\beta = v_1^\alpha + \sum_{j=2}^m v_j^\beta (j \neq i)$.

根据定理8.19，若这些向量为T的广义特征向量，那么它们必须线性无关.

然而它们的系数均为1，因此它们只能为零向量，这表明$v_i^\alpha - v_i^\beta = v_1^\alpha = v_j^\beta = 0$.

因此$v_i^\alpha = v_i^\beta \in G(\lambda_i, T|_U)$，即$G(\lambda_i, T) \subseteq G(\lambda_i, T|_U)$.

结合$G(\lambda_i, T|_U) \subseteq G(\lambda_i, T)$，得到$G(\lambda_i, T|_U) = G(\lambda_i, T)$.

于是$U = \oplus_{i=2}^m G(\lambda_i, T), V = G(\lambda_1, T) \oplus U = \oplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$，证毕.

*Theorem 8.33*可逆算子的平方根 设V是有限维复向量空间，$T \in L(V)$是可逆算子.
证明：T存在一个平方根R，使得$R^2 = T$.
lemma/Theorem 8.31: 若$N \in L(V)$是幂零算子，则$I + N$有一个平方根R.
Proof: 根据$\sqrt{1+x} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, a_0 = 1$，可以猜想$I + N$的平方根具有类似形式

$$R = \sum_{i=1}^{m-1} a_i N^i, a_0 = 1, N^m = 0$$

因此尝试对左右两边平方，得到

$$I + N = (\sum_{i=1}^{m-1} a_i N^i)^2 = I + 2a_1 N + \sum_{i=2}^{m-1} (2a_i + f(a_1, \cdots, a_{i-1}))N^i$$

显然$a_1 = 1/2$.对于第i项，其中的$f(a_1, \cdots, a_{i-1})$是已知的.
因此只需解出a_i，使得$2a_i + f(a_1, \cdots, a_{i-1}) = 0$即可.
Theorem.Proof: 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的所有不同特征值.
根据*Theorem 8.21.b*，$N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$是幂零算子.
因此可以将$T|_{G(\lambda_i, T)}$分解为

$$\forall i = 1, \cdots, m, T|_{G(\lambda_i, T)} = \lambda_i (I + N_i/\lambda_i)$$

由于T是可逆变换，因而$\lambda_1, \cdots, \lambda_m \neq 0$，该等式始终有意义.
因此根据引理，$T|_{G(\lambda_i, T)}$有平方根R_i.
由于$V = \oplus_{i=1}^{m} G(\lambda_i, T)$，因此$\forall v \in V, \exists u_i \in G(\lambda_i, T), v = \sum_{i=1}^{m} u_i$.定义$R$为

$$Rv = \sum_{i=1}^{m} R_i u_i i = 1, \cdots, m \Rightarrow R^2 v = \sum_{i=1}^{m} R_i^2 u_i = \sum_{i=1}^{m} T|_{G(\lambda_i, T)} u_i = Tv$$

因此R是T的一个平方根.

3. 设$T, S \in L(V)$，且S是可逆算子.证明：T和$S^{-1}TS$的相同特征值有相同的重数.
Proof: 根据*5.A.15*，T和$S^{-1}TS$拥有相同的特征值，设λ是其中之一.
现在考虑$(S^{-1}TS-\lambda I)^{\dim V}$.根据*5.B.5*，

$$\begin{aligned}&(S^{-1}TS-\lambda I)^{\dim V}=(S^{-1}TS-\lambda S^{-1}S)^{\dim V}=(S^{-1}(TS-\lambda S))^{\dim V}\\&=(S^{-1}(T-\lambda I)S)^{\dim V}=S^{-1}(T-\lambda I)^{\dim V}S\end{aligned}$$

对于$v \in \operatorname{Ker} G(\lambda, T)$，考虑$S^{-1}v$，有 $(S^{-1}(T-\lambda I)^{\dim V}S)(S^{-1}v)=S((T-\lambda I)^{\dim V}v)=0$.
因此$S^{-1}(G(\lambda, T)) \subseteq G(\lambda, S^{-1}TS)$，同理$S(G(\lambda, S^{-1}TS)) \subseteq G(\lambda, T)$.
从而$\dim G(\lambda, T)=\dim G(\lambda, S^{-1}TS)$.

5. 设V是复向量空间且$T \in L(V)$.
求证：T有由特征向量组成的基等价于T的所有广义特征向量都是特征向量.
Proof: 必要性：根据定理8.23，T有一组由广义特征向量组成的基，而T的所有广义特征向量都是特征向量，从而T有由特征向量组成的基.
充分性：设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值.
根据定理5.41，T有由特征向量组成的基等价于$V=\oplus_{i=1}^{m}E(\lambda_i, T)$.
根据定理8.21，$V=\oplus i=1^m G(\lambda_i, T)$.
由定理8.13指出的广义特征向量的无关性，得$\forall i=1, \cdots, m, G(\lambda_i, T)=E(\lambda_i, T)$.
即T的所有广义特征向量都是特征向量，证毕.

7. 设V是复向量空间且$T \in L(V)$，求证：$\forall T \in L(V), \exists S \in L(V), S^3=T$.
Proof: 参考引理8.31的证明，猜想$I+N$的立方根也具有形式

$$R=\sum_{i=1}^{m-1}a_iN^i, a_0=1, N^m=0$$

令$R^3=I+N$，得到

$$I+N=I+3a_1N+\sum_{i=2}^{m-1}(2a_i+f(a_1, \cdots, a_{i-1}))N^i$$

得到$a_1=1/3$，依次解出剩下的$a_2, \cdots, a_{m-1}$即可，下设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值.
考虑幂零算子$N_i=(T-\lambda_iI)|_{G(\lambda, T)}$，将$T|_{G(\lambda_i, T)}$分解为$\lambda_i(I+N_i/\lambda_i)$.
从而$\forall i=1, \cdots, m$，N_i都有立方根R_i.
由于$V=\oplus_{i=1}^{m}G(\lambda_i, T)$，因此$\forall v \in V, \exists! u_i \in G(\lambda_i, T), v=\sum_{i=1}^{m}u_i$.
定义R为$Rv=\sum_{i=1}^{m}R_iu_i$，则R是T的一个立方根，证毕.

10. 设V是有限维复向量空间且$T \in L(V)$.
求证：存在$D, N \in L(V)$满足$T = D + N$且D可对角化，N是幂零算子，$DN = ND$.
Proof: 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值，考虑$T|_{G(\lambda_i, T)}$.
令$D_i = \lambda_i I|_{G(\lambda_i,T)}, N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i,T)}$，显然$D_i$可对角化，$N_i$是幂零算子.
根据定理8.21，$V = \oplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$. 因此$\forall v \in V, \exists! v_i \in G(\lambda_i, T), v = \sum_{i=1}^m v_i$.
分别定义D和N为$Dv = \sum_{i=1}^m D_i v_i, Nv = \sum_{i=1}^m N_i v_i$.
$M(D)$只有对角线元素不为0，即D可对角化；$M(N)$的对角线元素均为0，即N是幂零算子.
下证$DN = ND$.考虑$\forall v \in V$，有

$$(ND)v = N \sum_{i=1}^m D_i v_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i N_i v_i = (DN)v$$

11. 设V是有限维复向量空间且$T \in L(V)$.
设$v_1, \cdots, v_n$是V的一组基，并满足$M(T, (v_1, \cdots, v_n))$是上三角矩阵.
求证：T的每个特征值λ在矩阵对角线上出现的次数即为λ作为T的特征值的重数.
Proof: 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值，并设矩阵对角线元素依次为$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.
由于$M(T)$是上三角矩阵，故$\forall j = 1, \cdots, m, \exists i = 1, \cdots, n, \alpha_j = \lambda_i$.
将λ_j在矩阵对角线上出现的次数记为d_i，则$\sum_{i=1}^m d_i = n$.
现在考虑$(T - \lambda_i I)^n$.显然$M((T - \lambda_i I)^n)$也是上三角矩阵，
且其对角线元素依次为$(\alpha_1 - \lambda_i)^n, \cdots, (\alpha_n - \lambda_i)^n$. 显然，其中有$d_i$个元素为0.
将剩下的非零元素标记为$\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{n-d_i}$，其对应的基向量也标记为$v'_1, \cdots, v'_{n-d_i}$.
另将$\forall k = 1, \cdots, n - d_i, v'_k$的前一个基向量依次标记为$v''_k$.
因此$(T - \lambda_i)^n v'_k = \alpha'_k v'_k + u_k$，其中$u_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v''_k)$，即$(T - \lambda_i)^n v'_k \notin \operatorname{span}(v_1, \cdots, v''_k)$.
根据*2.A.11*，$(T - \lambda_i)^n v'_1, \cdots, (T - \lambda_i)^n v'_{n-d_i}$线性无关.
故$\operatorname{span}((T - \lambda_i)^n v'_1, \cdots, (T - \lambda_i)^n v'_{n-d_i}) \subseteq \operatorname{Im}\,(T - \lambda_i)^n$，得$\dim \operatorname{Im}\,(T - \lambda_i)^n \geq n - d_i$.
由$V = \operatorname{Ker}\,(T - \lambda_i)^n \oplus \operatorname{Im}\,(T - \lambda_i)^n, \dim V = \dim \operatorname{Ker}\,(T - \lambda_i)^n \oplus \dim \operatorname{Im}\,(T - \lambda_i)^n$，
得到$\forall i = 1, \cdots, m, \dim \operatorname{Ker}\,(T - \lambda_i)^n \leq d_i$，从而$\sum_{i=1}^m \dim \operatorname{Ker}\,(T - \lambda_i)^n \leq \sum_{i=1}^m d_i = n$.
因此只能有$\forall i = 1, \cdots, m, \dim G(\lambda_i, T) = d_i$.

16 *Chapter 8.C*

*Theorem 8.46*极小多项式的决定 设V是有限维向量空间且$T \in L(V)$.
设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值， $k_1, \cdots, k_m$分别是$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$对应的最大$Jordan$块的维数.
求证：T的极小多项式是$p_m(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{k_i}$.
Proof: 先证$\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i} = 0$.根据定理8.21，$V = \oplus_{i=1}^m G(\lambda_i, T)$，
因此分别考虑$\forall i = 1, \cdots, m, (T - \lambda_i I)^{k_i}|_{G(\lambda_i, T)}$，并令$N_i = (T - \lambda_i I)|_{G(\lambda_i, T)}$.
根据定理8.55，$G(\lambda_i, T)$存在一组$Jordan$基$N_i^{m_1} v_1, \cdots, v_1, \cdots, N_i^{m_n} v_n, \cdots, v_n$.
因此$\max\{m_1, \cdots, m_n\} = k_i$，并令$U_j = \operatorname{span}(N_i^{m_j} v_j, \cdots, v_j)$，则$G(\lambda_i, T) = \oplus_{j=1}^n U_j$.
根据定理8.55的证明，$\forall j = 1, \cdots, n, U_j$都是$N_i$下的不变子空间，且有$N_i^{m_j}|_{U_j} = 0$.
因此$\forall j = 1, \cdots, n, N_i^{\max\{m_1, \cdots, m_n\}}|_{U_j} = 0$，即$(T - \lambda_i I)^{k_i}|_{G(\lambda_i, T)} = 0$.
对于$\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i}$，根据算子的可交换性，总是可以把因子$(T - \lambda_i I)^{k_i}$移至最后，
从而$\forall i = 1, \cdots, m, \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i}|_{G(\lambda_i, T)} = 0$，即$\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k_i} = 0$.
下证其确为能使$p(T) = 0$的幂次最低的首一多项式，考虑$p'_m(z) = \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i I)^{k'_i}$.
其中，$\forall i = 1, \cdots, m, k'_i \leq k_i$，且$\exists r = 1, \cdots, m, k'_r < k_r$.
由于$(T - \lambda_r I)$的幂指数$k'_r < k_r$，那么对于k_r所对应的U_j，必然有$N_r^{k'_r}|_{U_j} \neq 0$.
因此$p_m(z)$的幂次已然最低，即$p_m(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{k_i}$就是$T$的极小多项式.

2. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V)$只有两个特征值$5, 6$.
求证：$(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1} = 0$，其中$n = \dim V$.
Proof: T有两个特征值，故每个特征值的重数最多为$n - 1$.
因而T的特征多项式是$(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1}$的因子，即$(T - 5I)^{n-1}(T - 6I)^{n-1} = 0$.

7. 设V是有限维向量空间且$P \in L(V)$满足$P^2 = P$.
求证：P的特征多项式是$z^m(z-1)^n$，其中$m = \dim \operatorname{Ker} P, n = \dim \operatorname{Im} P$.
Proof: 根据*5.B.4*，$V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$.
$\forall u \in \operatorname{Ker} P, u \in E(0, T)$； $\forall Pv \in \operatorname{Im} P, P(Pv) = Pv \in \operatorname{Im} P$，即$Pv \in E(1, T)$.
因此$V = E(0, P) \oplus \operatorname{Im} P, \operatorname{Im} P \subseteq E(1, P) \subseteq G(1, P)$.
由空间维数的限制，只能有$E(0, P) = G(0, P), \operatorname{Im} P = E(1, P) = G(1, P)$.
因此P的特征多项式为$p_c(z) = z^{\dim G(0,P)}(z-1)^{\dim G(1,P)} = z^m(z-1)^n$.

10. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V)$是可逆算子.
令p, q分别指代T, T^{-1}的特征多项式，证明：$q(z) = (1/p(0))z^{\dim V}p(1/z)$.
Proof: 根据*8.A.3*和*5.A.21*，
λ是T的特征值和λ^{-1}是T^{-1}的特征值等价，且$\dim G(\lambda, T) = \dim G(\lambda^{-1}, T^{-1})$.
设$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值，$d_1, \cdots, d_m$是其对应的重数，
则$p(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{d_i}, q(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i^{-1})^{d_i}$.

$$q(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i^{-1})^{d_i} = \prod_{i=1}^m \frac{z^{d_i}}{\lambda^{d_i}}(\lambda_i - \frac{1}{z})^{d_i} = \prod_{i=1}^m \frac{z^{d_i}}{-\lambda^{d_i}}(\frac{1}{z} - \lambda_i)^{d_i} = \frac{z^{\dim V}}{p(0)}p(\frac{1}{z})$$

12. 设V是有限维向量空间且$T \in L(V)$.
求证：T的极小多项式没有重根等价于T有由特征向量组成的基.
Proof: 根据定理8.46，T的极小多项式$p_m(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)^{k_i}$，
其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$T$的不同特征值， $k_1, \cdots, k_m$是$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$对应的最大$Jordan$块的维数.
由于$p_m(z)$没有重根，故$k_1 = \cdots = k_m = 1$，因此$G(\lambda_i, T)$存在一组基$v_1, \cdots, v_n$，
其中$(T - \lambda_i I)v_1 = \cdots = (T - \lambda_i I)v_n = 0$，即$v_1, \cdots, v_n \in \text{Ker } (T - \lambda_i I) = E(\lambda_i, T)$，
因此T的所有广义特征向量都是特征向量.
根据*8.B.5*，这等价于T有由特征向量组成的基，证毕.

18. 设$a_0, \cdots, a_{n-1} \in C$.给出以下矩阵的特征多项式和极小多项式.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Proof: 设$e_1, \cdots, e_n$是C^n的一组标准基.注意到$\forall i = 1, \cdots, n-1, Te_i = Te_{i+1}$.
因此$T^n e_1 = Te_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i e_1$，整理得$(\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i + T^n)e_1 = 0$.
从而矩阵的极小多项式为$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i, a_n = 1$.
由于$\dim\ p_m(z) = \dim V$，根据*8.C.17*，其特征多项式与极小多项式相同.

17 *Chapter 8.D*

*Theorem 8.55 Jordan*基的存在性 考虑有限维复向量空间V和幂零算子$N \in L(V)$.
证明：V存在一些线性无关的向量$v_1, \cdots, v_n$，
满足$N^{m_1}v_1, \cdots, v_1, \cdots, N^{m_n}v_n, \cdots, v_n$是$V$的一组基，且$N^{m_1+1}v_1 = \cdots = N^{m_n+1}v_n = 0$.
Proof: 使用数学归纳法.考虑$\dim V = 1$的情况.取$\forall v \in V, m = 0$，则v即为V的基.
现在假设对于任意的W满足$\dim U < \dim V$，都存在一组如上形式的基.
任取$v_1 \in V$，考虑一列向量$v_1, \cdots, N^{m_1}v_1$，其中$N^{m_1+1}v_1 = 0$.
根据*8.A.5*，$v_1, \cdots, N^{m_1}v_1$线性无关.
令$U = \text{span}(v_1, \cdots, N^{m_1}v_1)$，则$N(U) = \text{span}(Nv_1, \cdots, N^{m_1}v_1) \subset U$，
因此U是N下的不变子空间.
考虑商空间$V/U, \dim\,(V/U) = \dim V - \dim U < \dim V$，因此可以对$V/U$使用归纳.
构造N在N/U上的诱导变换$(N/U) \in L(V/U)$满足$\forall v + U \in V/U, (N/U)(v + U) = Nv + U$.
下面验证这个构造的合法性.考虑$v_1 + U = v_2 + U \in V/U$，于是$v_1 - v_2 \in U$.
由于U是N下的不变子空间，因而$N(v_1 - v_2) = Nv_1 - Nv_2 \in U$，
得到$Nv_1 + U = Nv_2 + U$，即$(N/U)(v_1 + U) = (N/U)(v_2 + U)$.
随后验证(N/U)是线性变换，依旧考虑$v_1 + U, v_2 + U \in V/U$.

$$(N/U)(c_1(v_1 + U) + c_2(v_2 + U)) = (N/U)((c_1v_1 + c_2v_2) + U) = N(c_1v_1 + c_2v_2) + U$$
$$= c_1Nv_1 + c_2Nv_2 + U = c_1(Nv_1 + U) + c_2(Nv_2 + U) = c_1(N/U)(v_1 + U) + c_2(N/U)(v_2 + U)$$

另外，(N/U)也是幂零算子.考虑$\forall v + U \in V/U$，则$(N/U)^m(v + U) = N^mv + U$.
由N是幂零算子得$\forall v \in V, N^{\dim V}v \in U = 0, (N/U)^{\dim V}(v + U) = 0 + U \in \text{Ker}\,(N/U)^{\dim V}$.
对V/U使用归纳，即$(N/U)^{m_2}(v_2 + U), \cdots, v_2 + U, \cdots, (N/U)^{m_n}(v_n + U), \cdots, v_n + U$
是V/U的一组基，且满足$(N/U)^{m_2+1}(v_2 + U) = \cdots = (N/U)^{m_n+1}(v_n + U) = 0$.
根据*3.E.13*，$N^{m_1}v_1, \cdots, v_1, \cdots, N^{m_n}v_n, \cdots, v_n$即为$V$的一组基.