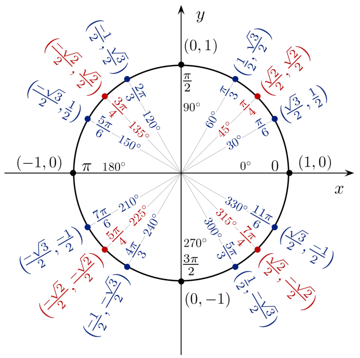
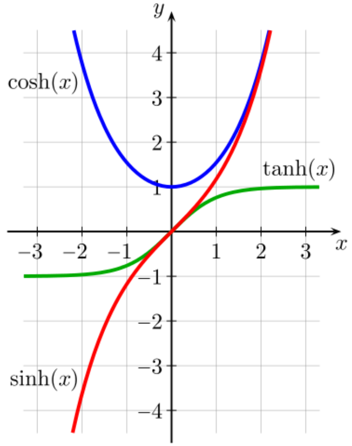
Analysis II

1 Allgemein





Rechenregeln: Rechenregeln Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$
Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, $e^{i\varphi} = \operatorname{cis}(\varphi)$, $|e^{i\varphi}| = 1$

z	$z = x + iy$ { x: Realteil, y: Imaginärteil	$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$
$\overline{z}$	$\overline{z} = x - iy$	$z = r \cdot e^{-i\varphi}$
$\lvert z\rvert$	$\lvert z\rvert = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert z\rvert = r = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
$z_1 + z_2$	$x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$	
$z_1 - z_2$	$x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$	
$z_1 \cdot z_2$	$(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$	$r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2}, z_2 \neq 0$	$\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$\frac{1}{z}, z \neq 0$	$\frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2} = \frac{(x)+iy}{x^2+y^2}$	$\frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$

z^n	$r^n \cdot (\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)) = r^n \cdot e^{in\varphi}$
$\sqrt[n]{z}$	$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, ..., n-1$

i^0	i^1	i^2	i^3
1	i	-1	$-i$

Rechenregeln: Allgemeine Rechenregeln

Betrag:
$|ab| = |a||b|$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $\quad |a+b| \leq |a| + |b|$

Potenzen:
$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow (x^n = a \text{ und } x \geq 0)$ $\quad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a},\ a \geq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$ $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\quad a^x = e^{x\cdot\ln a}$ $\quad \sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $\quad a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $\quad (a^m)^n = a^{mn}$ $\quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\quad a^n b^n = (ab)^n$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Rechenregeln: Sinus und Cosinus

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2(y) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - \sin^2(y)$
- $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos^2(x) - \sin^2(y)$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
- $\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$ $\qquad \cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
- $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ $\qquad \cot(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$
- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^3(x) = \frac{3\sin(x)-\sin(3x)}{4}$ $\qquad \cos^3(x) = \frac{3\cos(x)+\cos(3x)}{4}$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $-\sin(-x) = \sin(x), \cos(-x) = \cos(x), \tan(-x) = -\tan(x)$
- Für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass $a^2+b^2 = 1$, gibt es $x \in \mathbb{R}$, sodass $a = \cos(x)$, $b = \sin(x)$.
- $\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ $\qquad \cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ $\qquad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
- $\int_0^{2\pi} \sin(t)\cdot\cos(t)dt = \int_0^{2\pi}\sin(t)dt = \int_0^{2\pi}\cos(t)dt = 0$
- $\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
- $\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
- $\int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x)$
- $\int x\cos(x)dx = x\sin(x) + \cos(x)$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

- $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\qquad \sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\qquad \tanh x := \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
- $\sinh(z) = -\sinh(-z)$ $\qquad \cosh(z) = \cosh(-z)$
- $\sinh(z) = \sinh(z + 2\pi i)$ $\qquad \cosh(z) = \cosh(z + 2\pi i)$
- $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1)\cdot\cosh(z_2) \pm \sinh(z_2)\cdot\cosh(z_1)$
- $\sinh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1)\cdot\cosh(z_2) \pm \sinh(z_2)\cdot\sinh(z_1)$
- $\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh(z_1)\pm\tanh(z_2)}{1\pm\tanh(z_1)\cdot\tanh(z_2)}$

Rechenregeln: Ableitung

- **Summenregel** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- **Faktorregel** $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- **Produktregel** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Quotientenregel** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} (g \neq 0)$
- **Kettenregel** $(f(g(x)))' = (f \circ g)' = f'(g(x))g'(x)$

Rechenregeln: Integration

- **Summe/Differenz:** $\int_a^b (f(x) +/- g(x))xd = \int_a^b f(x) +/- \int_a^b g(x)$
- **Konstanter Faktor:** $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- **Partielle Integration:** $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$
- **Substitution:** $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$
- $a + c, b + c \in I$ $\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$
- $ca, cb \in I$: $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx$
- **Logarithmus:** (f stetig diffbar) $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(|f(x)|)$, bzw. $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(f(|b|)) - \log(f(|a|))$
- **Partialbruch:** $\frac{2x^6-4x^5+5x^4-3x^3+x^2+3x}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$

Rechenregeln: Limes

- $\lim_{x\to 0}\arctan(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0}\tan(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty}\tan(x) = \infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x) = \infty$
- $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ $\qquad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 = \frac{x}{\sin(x)}$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ $\qquad \lim_{n\to 0}\frac{e^n-1}{n} = 1$ $\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$ $\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

Entscheidbare Situationen $\frac{1}{0} = \infty$ $\quad \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \infty + \infty = \infty$ $\quad 0 + \infty = \infty$ $\quad 0^\infty = 0$ $\quad \infty^\infty = \infty$

Rechenregeln: Reihen

- $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + ... = \frac{a}{1-q}$ (geometrische Reihe)
- $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = 1 + 2q + 3q^2 + ... = \frac{1}{(1-q)^2}, \ |q| < 1$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$
- $\zeta(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ist konvergent $\iff a > 1$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = e$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... = \frac{1}{e}$
- $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp ...$
- $\frac{1}{(1 \pm x)^2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp ...$
- $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm ...$
- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
- $\tan(x) = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ...$
- $\tanh(z) = 1 - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - ...$
- $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ...$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + ...$

Nützliches

- Kreisgleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
- Ellipsengleichung $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Matrix Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Matrix Invertierbarkeit: Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, falls die Determinante $\neq 0$.
- Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- Kreuzprodukt $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, \quad a_3b_1 - a_1b_3, \quad a_1b_2 - a_2b_1)^\top$

Rechenregeln: Stammfunktionen, Ableitungen

differenzierbar $\implies$ **stetig** $\implies$ **integrierbar**

$\mathbf{f'(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
0	c $(c \in \mathbb{R})$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r (r \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\log\|x\|$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = -x^{-2}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\log\|\cos x\|$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot x$	$\log\|\sin x\|$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx}$
$\log a \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$	$x(\log\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\log a \cdot x}$	$\log_a\|x\|$	$\frac{x}{\log a}(\log\|x\| - 1)$
		$= x(\log_a\|x\| - \log_a e)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2}\log\big(1 + x^2\big)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	-
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	-
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$	$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$	$\operatorname{arcosh} x$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$
$\frac{1}{1-x^2} \quad (\|x\| < 1)$	$\operatorname{artanh} x$	$x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2}\ln\left(1 - x^2\right)$
$\frac{1}{1-x^2} \quad (\|x\| > 1)$	$\operatorname{arcoth} x$	$x \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right)$

2 Differentialgleichungen

Definition 1: Ordnung, linear, homogen

Die **Ordnung** einer Gleichung ist die höchste vorkommende Ableitung. Bsp: $y'' \implies 2$.

Eine Differentialgleichung heisst **linear**, falls jeder Term y, y', y'' usw. nur linear vorkommt. Wichtig: Falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der selben Differentialgleichung sind, dass ist auch die Linearkombination $ay_1(x) + by_2(x)$.

Eine Differentialgleichung heisst **homogen**, falls keine Terme vorkommen, die rein von den Funktionsvariablen x abhängen (also kein x, $\sin(x)$, ... enthalten). Sonst heisst die Gleichung **inhomogen**.

Definition 2: Anfangswertproblem

Ein **Anfangswertproblem** n-ter Ordnung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen.

Satz 1: Hauptsatz lineare Differentialgleichung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ an offenes Interval and $k \geq 1$ eine ganze Zahl, $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... \ + a_1y' + a_0y = 0$ eine homogene lineare ODE über I mit stetigen Koeffizienten. Dann sind:

1. Dann ist die Menge S bestehend aus k-fach differenzierbaren Lösungen $f : I \to \mathbb{C}$ ein komplexer Vektorraum der Grösse k.
2. Für alle Anfangswerte $(y_0, ... \ , y_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ gibt es eine eindeutige Lösung $f \in \mathbb{C}$ so dass $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_1, ... \ , f^{(k-1)} = y_{k-1}$
3. Sei b stetig über I. Dann existiert eine Lösung f_p für das inhomogene ODE und $S_b = f + f_p$
4. Für alle Anfangswerte ist die Lösungen eindeutig.
5. Wenn $b \neq 0, S_b$ ist kein Vektorraum

Satz 2: Grundprinzip für lineare, inhomogene Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung hat die Form

$$\underbrace{y(x)}_{\text{Gesamtlösung}} = \underbrace{y_{hom}(x)}_{\text{allg. homogene Lösung}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

Rezept 1: Reduktion der Ordnung

Reduktion einer ODE mit Ordnung k auf Ordnung 1: Man definiere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k \qquad x \longmapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \cdots \\ y^{(k)}(x) \end{pmatrix} \qquad f'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \cdots \\ \text{original equation} \\ \text{solved for } y^{(k)}(m) \end{pmatrix}$$

Für $k = 3$ und $I : y''' = cy'' + by' + ay$:

$$f'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}}_{A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} \qquad I' : f'(x) = A(x) \cdot f(x)$$

Rezept 2: Separation der Variablen

Diese Methode eignet sich für **Differentialgleichungen erster Ordnung** und ist die einfachste Methode.
Für eine Differentialgleichung der Form

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y), \qquad \text{mit } g(y) \neq 0$$

gehen wir folgendermassen vor:

1. Wir nehmen alle Teile mit x und alle mit y auf verschiedene Seiten.
$$\frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx$$
2. Nun integrieren wir direkt
$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx$$
$$y = z \cdot \exp(-H(x)) \quad \text{for some constant } z \in \mathbb{C}$$
3. Durch die Unbestimmtheit der Integrale führen wir eine Konstante C ein. Durch Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ (in einem Anfangswertproblem) kann diese bestimmt werden.

Rezept 3: Variation der Konstanten (1. Ordnung)

Diese Methode eignet sich für **inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung**, der Form
$$y' = h(x)y + b(x).$$
Wir benutzen den Grundsatz für inhomogene Differentialgleichungen. D.h. wir suchen die allgemeine homogene Lösung und eine partikuläre Lösung und addieren diese für die gesamte Lösung. Eine partikuläre Lösung kann manchmal erraten werden, ansonsten nutzen wir folgendes Rezept:

1. Die homogene Lösung $y_{hom}(x)$ suchen wir mit der Methode *Separation der Variablen*.
2. Die Integrationskonstante aus Schritt I fassen wir als eine von x abhängige Funktion auf
$$C \to C(x)$$
3. Die entstandene Funktion $y_p(x)$ (homogene Lösung mit $C(x)$ anstelle von C) setzen wir als Ansatz in die Differentialgleichung ein und lösen nach $C(x)$ auf. Dies gibt uns die partikuläre Lösung.
4. Wir nutzen den Grundsatz für die gesamte Lösung
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$
.

Rezept 4: Euler-Ansatz

Für lineare, homogene Differentialgleichung $n-ter$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten, können wir den **Euler-Ansatz** verwenden. Wir haben eine Gleichung der Form
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0,$$
wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ sind.
Wir wenden folgendes Rezept an:

1. Setze den **Euler-Ansatz** $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ in die Differentialgleichung ein und berechne das **charakteristische Polynom**.
2. Finde die Nullstellen λ_k mit Vielfachheiten m_k des charakteristischen Polynoms und konstruiere daraus die linear unabhängigen Lösungen gemäss
$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}.$$
3. Diese Lösungen bilden ein **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung.
4. Die allgemeinste Lösung ist eine Linearkombination aller Lösungen im Fundamentalsystem. Die Koeffizienten sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Rezept 5: Euler-Ansatz mit vielfachen/komplexen Nullstellen

Richtung: Lösungen der Charakteristischen Gleichung $\lambda_i \to$ Ansatz der **homogenen** Lösung y_h.

Lösung für λ	**Linearkombinationen für $y_h(x)$**
α	$c_1 \cdot e^{\alpha x}$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$	$c_1 \cdot e^{\alpha x} + x \cdot e^{\alpha x} + .. + c_k \cdot x^{k-1} \cdot e^{\alpha x}$
$\alpha + \beta i,\ \beta > 0$	$c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$
$\alpha + \beta i,\ \beta < 0$	$c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$
$\alpha_1 + \beta_1 i = .. = \alpha_k + \beta_k i \quad \beta > 0$	$c_1 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) + .. + c_k x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$
$\alpha_1 + \beta_1 i = .. = \alpha_k + \beta_k i \quad \beta < 0$	$c_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + .. + c_k x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$

Nützliches

Manchmal sind die Terme in $y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ nicht die geeignetste Form und man möchte lieber reelle Funktionen. Dann nutzt man die Formel
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
Damit lassen sich zwei neue Integrationskonstanten definieren:
$$\widetilde{A}\sin x + \widetilde{B}\cos x$$
Rezept: Für kompliziertere Ausdrücke funktioniert:
$$y(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix} = \widetilde{A}\sin(2x) + \widetilde{B}\cos(2x)$$

Rezept 6: Variation der Konstanten (2. Ordnung)

Wir suchen die Lösung für eine Differentialgleichung der Form
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$
1. Die homogene Lösung $y_h(x)$ finden wir mittels **Euler-Ansatz**.
2. Wir suchen nun eine Lösung der Form $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ aus dem Euler-Ansatz stammen und das System
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$
d.h.
$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$
erfüllt sein muss. Wir prüfen also, ob die Determinante
$$\det A = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$
nicht verschwindet, denn aus LinAlg wissen wir, dass genau dann eine eindeutige Lösung existiert.
3. Wir finden nun C_1 und C_2 und somit $y_p(x)$ entweder durch
   (a) Inversion der Matrix
$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$
   und anschliessender Integration $C_1 = \int C_1'(x)dx$, $C_2 = \int C_2'(x)dx$
   (b) oder mit der direkten Formel
$$y_p(x) = -\,y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}dx.$$
4. Die gesamte Lösung erhalten wir aus $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Nützliches: Bei unchilligen Formeln kann $x \mapsto e^t, x^2 \mapsto e^{2t}, \ldots$ substituiert werden und anschliessend durch ein Gleichungssystem aufgelöst werden.

Rezept 7: Substitution

Gleichungen der Form $\boxed{y' = h\left(\frac{y}{x}\right)}$
Substitution
$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = xz(x),$$
dann wird y' durch
$$y' = z + xz'$$
ersetzt.

Gleichungen der Form $\boxed{y' = h(ax + by + c)}$
Substitution
$$z(x) = ax + by(x) + c \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{z - ax - c}{b},$$
dann wird y' durch
$$y' = \frac{z' - a}{b}$$
ersetzt.

Gleichungen der Form $\boxed{y' = h\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)}$
Wir wollen $y(x)$ und x ersetzen. Wir lösen das Gleichungssystem
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$
und wollen eine eindeutige Lösung (x_0, y_0), d.h. wir fordern
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0.$$
Jetzt setzen wir
$$z = y - y_0 \qquad \text{und} \qquad t = x - x_0.$$
Dann werden y' und z' zu
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z + y_0)}{d(t + x_0)} = \frac{dz}{dt} = z'.$$

Gleichungen der Form $\boxed{y' = \frac{y}{x}h(xy)}$

Substitution

$$z(x) = xy(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{z(x)}{x},$$

dann wird y' durch

$$y' = \frac{xz' - z}{x^2}$$

ersetzt.

Beispiel 1: Substitution: Funktion

Sei $xy' = y + x^2$ die DGL. Sei v die neue Variable und die Substitution $v = \frac{y}{x}$ oder $y = vx$.

Lösungsschritt I: Löse nach y auf: $y = v \cdot x$.
Lösungsschritt II: Berechne $\frac{dy}{dx} = y'$: $y' = v + xv'$
Lösungsschritt III: Setze y und y' in die DGL ein: $x(v'x + v) = vx + x^2$ und löse die DGL normal nach v auf (hier Separation der Variablen). Man bekommt $v = x + c$.
Lösungsschritt IV: Setze v zurück in die Substution $y = vx$ ein. Man bekommt $y = (x + c)x$.

Beispiel 2: Substitution: Variable

Sei $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$ die DGL. Sei $x = e^t$ bzw. $t = \log(x)$ die Variablensubstitution.

Lösungsschritt I: Definiere $h(t) = y(e^t)$ und berechne h' und h'':

$$\begin{aligned} h(t) &= y(e^t) = y(x) \\ h'(t) &= y'(e^t)e^t = xy(e^t) \\ h''(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x) \end{aligned}$$

Lösungsschritt II: Löse auf, sodass alle Terme in der DGL (x^2y'', xy', y) durch counterparts in t und $h(t)$ ersetzt werden können. Setze in Diffgleichung ein. Man bekommt

$$h'' - 4h' + 5h = 0$$

Lösungsschritt III: Löse die Gleichung normal mit $h(t)$. Anschliessend, ersetze $t = \log(x)$

Rezept 8: Methode des direkten Ansatzes

Der Ansatz ist geeignet für lineare, inhomogene DGLs n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Also eine DGL der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x).$$

Die homogene Lösung finden wir mit dem Euler-Ansatz. Für die partikuläre Lösung nutzen wir folgende Idee:

Der Ansatz für $y_p(x)$hat dieselbe Form wie der inhomogene Term $b(x)$.

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$
a (const.)	b (const.)
$a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$	$b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$
$ae^{\lambda x}$	$be^{\lambda x}$
$P(x)e^{\lambda x}$	$Q(x)e^{\lambda x}$
$P(x)\sin(mx)$	$Q(x)\sin(mx) + R(x)\cos(mx)$
$P(x)\cos(mx)$	$Q(x)\sin(mx) + R(x)\cos(mx)$
$a\sin(mx)$	$c\sin(mx) + d\cos(mx)$
$a\cos(mx)$	$c\sin(mx) + d\cos(mx)$
$a\sin(mx) + b\cos(mx)$	$c\sin(mx) + d\cos(mx)$
$\sum_{i=0}^m b_ix^i$	$\sum_{i=0}^m A_ix^i$
$e^{\alpha x}\sum_{i=0}^m b_ix^i$	$e^{\alpha x}\sum_{i=0}^m A_ix^i$
$\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m b_ix^i + \cos(\omega x)\sum_{i=0}^m c_ix^i$	$\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m A_ix^i + \cos(\omega x)\sum_{i=0}^m B_ix^i$
$\sinh(\omega x)\sum_{i=0}^m b_ix^i + \cosh(\omega x)\sum_{i=0}^m c_ix^i$	$\sinh(\omega x)\sum_{i=0}^m A_ix^i + \cosh(\omega x)\sum_{i=0}^m B_ix^i$
$e^{\alpha x}\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m b_ix^i + e^{\alpha x}\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m c_ix^i$	$e^{\alpha x}\sin(\omega x)\sum_{i=0}^m A_ix^i + e^{\alpha x}\cos(\omega x)\sum_{i=0}^m B_ix^i$

Bemerkung I: Verschiedene Ansätze können additiv kombiniert werden. So wählt man für $b(x) = 5x + \sin(x)e^{3x}$ als Ansatz

$$y_p(x) = \underbrace{Ax + B}_{\text{Teil I}} + \underbrace{(C + \sin x + D\cos x)e^{3x}}_{\text{Teil II}}.$$

Bemerkung II: Wenn ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählende Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist, wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert. Wenn z.B. die homogene Lösung die Form $y_h(x) = Ax + B$ hat, wählt man anstelle des Ansatzes $y_p(x) = ax + b \Rightarrow y_p(x) = x \cdot (ax + b)$.

Rezept 9: Inhomogene AWP

Wie im Beispiel ($y' + y = 2\sin(x)$ mit $y(0) = 0$) vorgehen:

1. Homogene Lösung finden: $(\lambda + 1)(e^{\lambda x}) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow y_h = c_1 \cdot e^{-x}$
2. Gemäss Störfunktion den Ansatz für y_p wählen und dessen Ableitungen finden:
$$\begin{aligned} y_p &= c \cdot \sin(x) + d \cdot \cos(x) \\ y_p' &= c \cdot \cos(x) - d \cdot \sin(x) \end{aligned}$$
3. Dies in die ursprüngliche DGL einsetzen, um die Koeffizienten des Ansatzes und damit die partikuläre Lösung zu finden:
$$c \cdot \cos(x) - d \cdot \sin(x) + c \cdot \sin(x) + d \cdot \cos(x) \stackrel{!}{=} 2\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow (c + d)\cos(x) + (c - d)\sin(x) \stackrel{!}{=} 2\sin(x) \iff c = 1,\ d = -1$$
4. Anfangswertbedingungen nutzen um c_k aus der homogenen Lösung zu finden
$$y(0) = \underbrace{c_1 \cdot e^{-x}}_{y_h(0)} + \underbrace{\sin(x) - \cos(x)}_{y_p(0)} = c_1 \cdot 1 + 0 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$$
5. $$y(x) = 1 + sin(x) - cos(x)$$

3 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^d$

3.1 Allgemein

Definition 3: Mengen

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist:
Beschränkt (bounded) Falls $||x||$ beschränkt für alle $x \in M$.
Geschlossen (closed) Jede Folge (x_n) mit $x_n \in M$ ist $\lim(x_n) \in M$.
Kompakt (compact) Falls beschränkt und geschlossen.
Offen M ist offen, wenn $\forall x \in X, \exists r > 0$, so dass $\{y \in \mathbb{R}^n | ||y - x|| < r\} = B_r(x) \subset X$. Oder X ist offen $\iff$ das Komplement $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin X\}$ geschlossen.

Satz 3: Unkehrfunktion

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Für jede geschlossene Menge $Y \subset \mathbb{R}^m$. Ist $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$ geschlossen.
Gleiches für offen.

Satz 4: Min-Max

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer und kompakt und $f : X \to y$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und hat ein Maximum und Minimum in $f(X)$.

Definition 4: Norm

Die Norm $||x|| = \sqrt{x_1^2 + ...x_n^2}$ erfüllt:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||tx|| = |t|||x||$ für alle $t \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung)

3.2 Stetigkeit

Definition 5: Stetigkeit (Continuity)

Normale Definition:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition Stetigkeit mit Folgen: Für jede Folge (x_n) sodass $x_n \to x$ für $x \to \infty$:

$$(f(x_n)) \to f(x)$$

Satz 5: Stetige Funktionen

Sei f, g stetig: $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ stetig.
Falls f stetig, gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$$

f diffbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar
f nicht integrierbar $\Rightarrow$ f nicht stetig $\Rightarrow$ f nicht diffbar.
Sei $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und L stetig in x_0. Dann ist L überall stetig.

Rezept 10: Polarkoordinatentrick (Change of Variable, Coordinates)

Ziel: Zeige oder widerlege Stetigkeit. Seien $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Berechne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(x,y)$$

Hängt das Resultat von φ ab $\Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht $\Rightarrow$ nicht stetig an dieser Stelle.

Rezept 11: Linientrick

Ziel: Stetigkeit widerlegen. Suche zwei Linien, die einen unterschiedlichen lim haben. Zeigt, dass ein lim nicht existieren kann. Sei $f(x,y) = \frac{y}{x+1}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ für $(x,y) \to (-1,0)$. Linie $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = 0 \cap x \neq 1\} = 0$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = x+1\} = 1$.

Bemerkung: Meistens à la: $f(x,y)$ verschwindet auf der Linie $\{x = ...\}$, dann müsste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, aber für $x = ...y...$ sehen wir, dass $f(x,y) =$ fancy Expression $= 1 \neq 0$. Da $x = ...$ auf der Linie liegt, folgt der Widerspruch. **Todo: Quasi Ausnahme finden! intuitiv erläutern!**

Beispiel 3: Linientrick

$$\text{Gegeben } f(x,y) = \frac{y}{x-1} \quad \text{existiert} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) \quad ?$$

Lösung: Wir sehen f auf der Linie $\{(x,y)|y = 0,\ x \neq 1\}$ verschwindet. Hätte also f einen Grenzwert für $(x,y) \to (1,0)$ wäre dieser gleich 0. Aber die Linie $y = x-1$ geht durch $(1,0)$ und auf dieser Linie ist f gleich 1. Also existiert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ nicht.

Beispiel 4: Vergleichstrick / Sandwich

$$\text{Gegeben } f(x,y) = \frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{existiert} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) \quad ?$$

Lösung:

$$|f(x,y)| = \frac{|(x-1)^2|}{|(x-1)^2 + y^2|}\,|ln(x)| \quad \leq |ln(x)|$$

Wegen $\lim_{x\to 1} ln(x) = 0$ sehen wir, dass

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} |f(x,y) \leq |\lim_{x\to 1}| \ln(x)| = 0$$

und damit ist auch der gesuchte Grenzwert $= 0$.

Rezept 12: Stetigkeit prüfen

Sei f die zu prüfende Funktion. 1) f muss überall definiert sein. 2) $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert. 3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3.3 Differenzierbarkeit

Definition 6: Differenzierbarkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$. f heisst **differenzierbar an Stelle** x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) =: \frac{df}{dx}$$

existiert. Wir nennen $f'(x_0)$ die Ableitung (das **Differential**) von f an der Stelle x_0. Eine solche Funktion heisst dann **differenzierbar auf** Ω, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

Satz 6: Differenzierbare Funktionen

f diffbar $\Leftrightarrow$ alle Teil-f sind diffbar.
f, g diffbar $\Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ g\circ f$ diffbar Gilt auch für partielle Ableitung.

Sei $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $dL(x) = L$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$

Satz 7: Kettenregel

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und die Ableitung ist

$$d(g\circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

und die Jakobi-Matrix ist

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))J_f(x_0)$$

Speziell für $X \subset R$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$(g\circ f)'(t) = \nabla g(f(t)) \cdot f'(t)$$

Definition 7: Partielle Differenzierbarkeit

f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, falls:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

oder generell für alle Einheitsvektoren e_i zusammengefasst in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} =: D_v f(x_0)$$

Dieser lim existiert $\Leftrightarrow$ in Richtung e_i an Stelle x_0 partiell differenzierbar.

Definition 8: Totale Differenzierbarkeit

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. f heisst differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert (also eine $m \times n$ Matrix), sodass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

Dann heisst $df(x_0) := A$ das Differenzial von f in Punkt x_0.
Diese Matrix $A = Df(x_0)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{D}f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

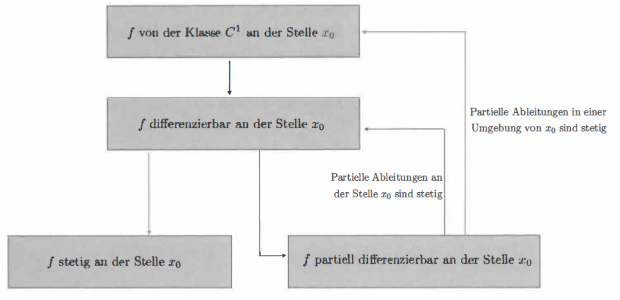
3.4 Stetigkeit vs Differenzierbarkeit

Rezept 13: Prüfen, ob f differenzierbar an x_0

f stetig an x_0? Nein $\Rightarrow f$ nicht diffbar.
$\Downarrow$ Ja
Ist f in x_0 partiell diffbar, existiert $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$? Nein $\Rightarrow f$ nicht diffbar.
$\Downarrow$ Ja
Ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ stetig? Ja $\Rightarrow f$ ist diffbar! mit $Df(x_0) = J_f(x_0)$
$\Downarrow$ Nein
Existiert eine lineare Abbildung A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sodass $A = Df(x_0)$, also existert:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - Df(x - x_0)|}{||x - x_0||}$$

? Ja $\Rightarrow f$ ist diffbar!
Nein $\Rightarrow f$ ist nicht diffbar.



3.5 Partielle Ableitung (Partial Derivative)

Definition 9: Partielle Ableitung

f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an Stelle a nach x_i

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Wichtig: Alle anderen x_i werden als konstante behandelt bei Ableitung.

Definition 10: Höhere Ableitung

f ist in der Klasse C^1 wenn f differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind.
f ist in der Klasse C^k wenn alle partiellen Ableitungen in der Klasse C^{k-1} sind.

Satz 8: Satz von Schwarz

$f \in C^2$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} \forall i, j \in \{1, ..., n\}$$

Gleiches gilt for mehr Variablen.

Definition 11: Gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient eines Skalarfeldes: Richtung des steilsten Anstiegs; Betrag: Stärke des Anstiegs.

Definition 12: Richtungsableitung

f heisst an der Stelle a in Richtung u differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu)-f(a)}{h} = \frac{d}{dh} f(a+hu)\Big|_{h=0} =: D_v f(a) = J_f \cdot v$$

existiert. Ist $||u|| = 1$ (normiert), heisst dieser Grenzwert Richtungsableitung.

Rezept 14: Richtungsableitung $D_u f(a)$ existiert:

Falls $t \mapsto f(a+tu)$ differenzierbar ist bei $t=0$, dann existiert $D_u f(a)$.

Die Richtungsableitung existiert für **jede Richtung**, falls $\frac{d}{dh} f(a+hu)\big|_{h=0}$ NICHT von φ abhängt (wenn mal $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ substituiert).

Rezept 15: Richtungsableitung $D_u f(a)$

Falls f in a differenzierbar ist: Für f in Richtung u in Punkt a: 1) u normieren: $\tilde{u} = \frac{u}{||u||}$ 2) Jakobi Matrix berechnen berechnen, dann:

$$D_u f(a) = J_f(a) \cdot \tilde{u} = < \nabla f, \tilde{u} >$$

Definition 13: Hessematrix

$$\textbf{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

3.6 Taylorpolynome

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a)(x-a)^3 + ...$$

In $\mathbb{R}^2$: $\Delta x = (x - x_0), \quad \Delta y = (y - y_0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 \Delta y \right. \\ &\qquad \left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)\Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)(\Delta y)^3\right) \\ &+ ... \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^n$: $\Delta x_i = x_i - x_i^0$

$$Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^n f(x_1,...,x_n)\Big|_{(x_1^0,...,x_n^0)}$$

In $\mathbb{R}^n$ bis Grad 2:

$$T_2 f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^\top \text{Hess}_f(x_0)(x-x_0)$$

Satz 9: Taylorpolynom

Sei $k > 1$ eine ganze Zahl, X offen und $f \in C^k$. Für $x_0 \in X$ definieren wir $E_k f(x;x_0) = T_k f(x-x_0;x) + E_k f(x;x_0)$ dann gilt $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{E_k f(x;x_0)}{||x-x_0||^k} = 0$

Definition 14: Tangentialebene

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: X \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Sei $x_0 \in X$ und $u = df(x_0)$. Der Graph der affinen linearen Approximation $g(x) = f(x_0) + u(x-x_0)$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ is der Tangentialraum an x_0 zum Graph von f.

Rezept 16: Tangentialebene (Variante I)

Tangentialebene der Fläche $f(x,y)$ finden in Punkt (x_0,y_0).
Lösungsschritt I: Erstelle $F(x,y) = (x,y,f(x,y))^\top$ und berechne die Basisvektoren für die Tangentialebene

$$dF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

(x_0 und y_0 einsetzen).
Lösungsschritt II: Berechne Normalvektor:

$$n = u \times v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Berechne d mit $p = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$d = p \cdot n$$

Lösungsschritt III: Konstruiere Gleichung, sodass:

$$ax + by + cz = d$$

Rezept 17: Tangentialebene (Variante II)

Idee: Annäherung von f im Punkt (x_0,y_0) durch Taylorpolynom I. Grades

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

kann direkt umgeformt werden in die Normalform der Ebenengleichung.

Rezept 18: Variablenwechsel

Sei $g: U \to X$ und $f: X \to \mathbb{R}$ und $h = f \circ g : U \to \mathbb{R}$
$\partial_{y_1} h = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial y_1}$

Definition 15: Variablenwechsel für Inverse

Sei X offen und f eine differenzierbare Funktion. f ist ein Varaiblenwechsel um x_0 wenn es ein Radius $r > 0$ gibt so dass, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < r\}$ die Eigenschaft hat, dass das Bild $Y = f(B)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$ und $g: Y \to B$ is differenzierbar mit $f \circ g = Id_Y$ und $g \circ f = Id_B$

Satz 10: Inverse Funktion

Sei X offen und f eine differenzierbare Funktion und $det(J_f(x_0) \neq 0)$, dann ist f ein Variablenwechsel um x_0 und $J_g(f(x_0)) = J_f(x_0)^{-1}$, zusätzlich gilt $f \in C^k \implies g \in C^k$

3.7 Extremstellen (Kritische Punkte)

Satz 11: Extremalstellen

Sei X offen und $f: X \to \mathbb{R}$ Wenn für x_0
$f(y) \leq f(x_0)$ für alle y in der Nähe von x_0 **(lokales Maximum an x_0)**
$f(y) \geq f(x_0)$ für alle y in der Nähe von x_0 **(lokales Minimum an x_0)**
Dann $df(x_0) = 0$, $\nabla f(x_0) = 0$ oder $\partial_{x_i} f(x_0) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Definition 16: Kritische und reguläre Punkte

Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ein Punkt $p_0 \in \Omega$ heisst **kritischer Punkt von** f, falls $df(p_0) = 0$. Ist der Punkt nicht kritisch, heisst er **regulär**.

Satz 12: Maximas und Minimas

Wenn f auf einer kompakten Menge $\bar{X} = X \cup B$ mit X offen und B die Grenzen. Dann sind die Maximas und Minimas ein kritischer Punkt oder auf den Grenzen von f.

Definition 17: Degenerierte Punkte

Sei X offen und $f: X \to \mathbb{R}$ in der Klasse C^2. Ein kritischer Punkt x_0 ist nicht-degeneriert wenn die Hessematrix keine Nulldeterminante hat.

Satz 13: Extremwerte in mehreren Variablen (Corollary 3.8.7)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: X \to \mathbb{R} \in C^2$. Sei x_0 ein **nicht-degenerierender kritischer Punkt** von f. Sei p und q die Anzahl der positiven resp. negativen Eigenwerte von $\mathbf{Hess_f}(x_0)$.

1. Falls $p = n$, bzw. $q = 0$ ($\text{Hess}_f(x_0)$ ist **positiv definit**), besitzt f ein lokales **Minimum** an x_0
2. Falls $q = n$, bzw. $p = 0$ ($\text{Hess}_f(x_0)$ ist **negativ definit**), besitzt f ein lokales **Maximum** an x_0
3. Ansonsten, bzw. $pq \neq 0$, besitzt f kein Extremum an x_0. Man sagt deshalb, f besitzt einen **Sattelpunkt** an x_0.

Rezept 19: Eigenwerte finden

Charakteristisches Polynom mittels $\det(A - \lambda I)$ berechnen. Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte.

Satz 14: Eigenwert-Kriterium

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte einer reellen, symmetrischen $n \times n$ Matrix A. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i > 0, \\ A \text{ ist positiv semi-definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i \geq 0, \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i < 0, \\ A \text{ ist negativ semi-definit} &\iff \text{Alle } \lambda_i \leq 0 \end{aligned}$$

Definition 18: Hauptminoren

Die Hauptminor einer symmetrischen, reellen Matrix A sind die nordwestlichen Unterdeterminanten der Matrix A. Sie werden mit A_i bezeichnet, wobei i die Grösse der Teilmatrix A_i ist.
Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dann sind die n Hauptminoren $A_1, ..., A_n$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A_1 &= \det(a_{11}) = a_{11}, \\ A_2 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ A_n &= \det(A) \end{aligned}$$

Satz 15: Sylvester-Kriterium

NUR FÜR GROSSE MATRIZEN VERWENDEN. Sind $A_1, ..., A_n$ die Hauptminoren der reellen, symmetrischen $n \times n$ Matrix A, dann gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \text{Alle } A_i > 0, \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \text{ungerade negativ, gerade positiv: } A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 \\ A \text{ ist indefinit} &\iff \text{Weder alle } A_i \leq 0 \text{ noch } A_i \geq 0 \end{aligned}$$

Rezept 20: Kritische Punkte finden in Skalarfeld (nicht abgegrenzt)

Lösungsschritt I: Gradient berechnen; Gradient $= 0$ setzen $\implies$ kritische Punkte.
Lösungsschritt II: Hessematrix berechnen; für jeden kritischen Punkt: Falls die Hessematrix positiv definit ist $\implies$ lokales Minimum; falls Hessematrix negativ definit ist $\implies$ lokales Maximum; sonst Sattelpunkt.

Rezept 21: Kritische Punkte finden in Skalarfeld (abgegrenzt)

Lösungsschritt I: Inneres Skalarfeld nach kritischen Punkten untersuchen nach Rezept 20. ($\nabla f \overset{!}{=} 0$)
Lösungsschritt II: Alle Begrenzungen des Skalarfeldes einzeln nach kritischen Punkten untersuchen. Beispiel Dreieck: alle Seiten parametrisieren und **alle Eckpunkte einzeln untersuchen**. Parametrisierungen ableiten und die Extrempunkte der Stücke untersuchen; Eckpunkte notieren. $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1) \overset{!}{=} 0$, also t, resp. die kritischen Punkte so finden.
Lösungsschritt III: Alle gefundenen Punkte miteinander vergleichen und herausfinden, welches die Extrema sind (jeweils die Funktionswerte der Extrempunkte berechnen).

Rezept 22: Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Ω offen (d.h. ohne Rand) und f von der Klasse C^2.
Gesucht: Extremalstellen von f in Ω.

Lösungsschritt I:
Finde die kritischen Punkte $\{x_0\} \in \Omega$. D.h. alle Punkte, für die gilt

$$df(x_0) = 0$$

und $x_0 \in \Omega$.
Lösungsschritt II:
Untersuche die Hesse-Matrix von f in den Punkten $\{x_0\}$ um über die Art der Extremum zu entscheiden.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_f(x_0) \text{ ist positiv definit} &\quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ ist ein lokales Minimum von} f \\ \mathrm{H}_f(x_0) \text{ ist negativ definit} &\quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ ist ein lokales Maximum von} f \\ \mathrm{H}_f(x_0) \text{ ist indefinit} &\quad\Rightarrow\quad x_0 \text{ ist ein Sattelpunkt von} f \end{aligned}$$

Wenn die Hesse-Matrix keine klare Aussage ergibt (degenerierte kritische Punkte), muss man die Funktion in einer Umgebung abschätzen (um ein Max/Min zu zeigen) oder konkrete Gegenbeispiele finden.

Rezept 23: Extremwerteaufgaben mit "einfachen" Nebenbedingungen

Gegeben: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Rand $\partial\Omega$ und f von der Klasse C^2.
Gesucht: Extremalstellen von f in Ω.

Lösungsschritt I:
Wir untersuchen das Innere $\overset{\circ}{\Omega}$ analog zu Rezept 22.

Lösungsschritt II:
Wir parametrisieren den Rand $\partial\Omega$ durch $\gamma(t)$. Die kritischen Punkte sind dann die Punkte $\gamma(t)$ für die gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t) = 0.$$

Lösungsschritt III:
Bestimme die Art der kritischen Punkte.

- Variante 1 (nur kleinstes Min/ grösstes Max):
  Werte alle kritischen Punkte auf dem Rand explizit aus. D.h. berechne $f(\gamma(t))$.
- Variante 2 (Min/Max/Sattelpunkt):
  Die Funktion $f(\gamma(t))$ ist nur von einer Variable abhängig. Bestimme die Art der kritischen Punkte anhand der Kriterien für 1D-Funktionen.

Lösungsschritt IV:
Ist der Rand stückweise parametrisiert durch $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, muss die Funktion zusätzlich an allen Anfangs- und Endpunkten der γ_i explizit ausgewertet werden.

Bemerkung: Das Wort "einfach" bedeutet hier, dass wir eine Parametrisierung für den Rand finden können.

4 Integration in $\mathbb{R}^d$

4.1 Wegintegrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, d.h. für

$$f(t) = (f_1(t),\ \dots,\ f_n(t))$$

jedes f_i stetig, dann ist

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt,\ \dots,\ \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

Für eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$, d.h. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, s.d.

1. γ stückweise stetig
2. 2. $\exists t_0, \dots, t_k$, s.d. $t_0 = a < t_i < t_k = b$, s.d. $\gamma \mid]t_i, t_{i-1}[\in C^1$

nennen wir γ einen Pfad zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

Satz 16: Länge einer Kurve

Sei γ eine reguläre Kurve $t \to \gamma(t)$ sei $|.|$ die euklidische Norm: Die Länge ist

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'| dt$$

Rezept 24: Wegintegrale

Gegeben: Vektorfeld f von der Klasse C^1 und eine Kurve $\gamma \in C^1_{pw}$.
Gesucht: Wegintegral $\int_\gamma f \cdot ds$.

Lösungsschritt I:
Parametrisiere γ, d.h. finde eine Abbildung $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \to \gamma(t)$.
Lösungsschritt II:
Berechne $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$. Dabei wird jede Komponente des Vektors γ einzeln nach t abgeleitet.
Lösungsschritt III:
Das Wegintegral von f entlang γ ist definiert als

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_a^b \underbrace{\underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}} \ dt \ \in \mathbb{R}$$

und ist unabhängig der gewählten Parametrisierung!

Definition 19: Vektorfeld

Für $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ wird **Vektorfeld** genannt.

Satz 17: Orientierte Reparametriesierung

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ eine orientierte Reparametriesierung so dass $\sigma = \gamma \circ \varphi$, wobei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar auf $]a,b[$ ist und zudem streng monoton steigend und $\varphi(a) = c$ sowie $\varphi(b) = d$.

Sei X das Bild von γ, oder ist das equivalente Bild von σ und f stetig. Dann gilt $\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_\sigma f(s) \cdot d\vec{s}$

4.2 Potential

Intuition: Stärke der Änderung der Richtung der Vektoren in einem Vektorfeld.

Definition 20: Potentialfelder und Potentiale

Ein Vektorfeld $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst **Potentialfeld**, falls eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\vec{v} = \nabla\Phi$$

gilt. Das skalare Feld Φ heisst dann **Potential** von $\vec{v}$. **Wichtig:** Es gibt sehr viele Vektorfelder, die sich nicht als Gradient eines skalaren Feldes schreiben lassen (also keine Potentialfelder sind)!

Rezept 25: Potential finden

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Dann muss für das Potential Φ stimmen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

4.3 Konservative Vektorfelder (= Potentialfelder)

Satz 18: Wegintegrale für Potentialfelder

Sei $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit Potential Φ. Dann gilt für jedes Wegintegrale entlang γ, dass

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a))$$

Wir müssen also nur die Potentiale am Anfangs- und Endpunkt der Kurve auswerten! Damit sieht man auch gerade, dass für jede geschlossene Kurve das Wegintegrale eines Potentialfeldes gleich 0 ist.

Nützliches: Zusammenfassung

Sei $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und Ω einfach zusammenhängend. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\vec{v}$ ist konservatives Vektorfeld
- $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld
- Für alle geschlossene Kurven gilt $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$
- Das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ist unabhängig vom Weg

Satz 19: Konservativität und Integrabilitätsbedingungen

Sei $V : (x,y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$ ein Vektorfeld das konservativ ist (= ein Potentialfeld) und $V \in C^1$. Dann gelten die **Integrabilitätsbedingungen**.

Für $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Für $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \; \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \; \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$$

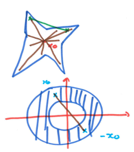
Für $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall i \neq j, \quad i,j \in \{1,...,n\}$$

Definition 21: Sternförmig

Eine Menge X ist sternförmig, wenn es ein $x_0 \in X$ gibt, so dass für $x \in X$ gilt, dass das Linienstück das x_0 und x verbindet in X ist.

Ex.



X is star-shaped but not convex

Ex.

X = {(x,y) | 1 < x²+y² < 2}

not star-shaped

Konvex $\implies$ Sternförmig

Satz 20: Sternförmig

Sei X sternförmig und offen. Und f ein C^1 Vektorfeld. Und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

auf X für alle $i \neq j$. Dann ist f konservativ.

Definition 22: Curl oder Rotation eines Vektorfeldes

Sie $X \subset \mathbb{R}^3$ und $f : X \to \mathbb{R}^3$ ein C^1 Vektorfeld.

$$\text{curl}(f) = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

Oder mittelhilfe det Determinante

$$\text{curl}(f) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

4.4 Das Riemann Integral

Rechenregeln: Riemann Integral

Das Riemann Integral über ein Quader $Q = [a_1, a_2] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ wird mittel Partitionen Unter und Obersummen, wie im 1-Dimensionalen Fall definiert. Das Untere und Obere Riemann Integral ist:

$$\int_Q f(x) d\mu = \underline{I}(f) := \sup \{U_f(P) \mid P \in \mathcal{P}(Q)\}$$

$$\left(\text{resp .,} \int_Q f(x) d\mu = \bar{I}(f) := \inf \{O_f(P) \mid P \in \mathcal{P}(Q)\}\right)$$

f heisst integrierbar wenn, $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$

Satz 21: Eigenschaften des Riemann Integrals

1. **Compatibility:** If $n = 1$ and $X = [a,b]$ with $a \leq b$, then $\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.
2. **Linearity:** If f and g are continuous on X and $a, b \in \mathbb{R}$, then $\int_X (af_1(x) + bf_2(x)) dx = a \int_X f_1(x) dx + b \int_X f_2(x) dx$.
3. **Positivity:** If $f \leq g$, then $\int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$ and especially, if $f \geq 0$, then $\int_X f(x) dx \geq 0$. Moreover, if $Y \subset X$ is compact and $f \geq 0$, then $\int_Y f(x) dx \leq \int_X f(x) dx$.
4. **Upper bound and triangle inequality:** In particular, since $-|f| \leq f \leq |f|$, we have $\left|\int_X f(x) dx\right| \leq \int_X |f(x)| dx$, and since $|f+g| \leq |f|+|g|$, we have $\left|\int_X (f(x) + g(x)) dx\right| \leq \int_X |f(x)| dx + \int_X |g(x)| dx$.
5. **Volume:** If $f = 1$, then the integral of f is the *volume* in $\mathbb{R}^\times$ of the set X, and if $f \geq 0$ in general, the integral of f is the volume of the set $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. In particular, if X is a bounded *rectangle*, say $X = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ and if $f = 1$, then $\int_X dx = (b_n - a_n) \cdots (b_1 - a_1)$. We write Vol$(X)$

Satz 22: Satz von Fubini

Reduzierung von mehrdimensionalen Integralen auf eine Dimension. Sei $f : [a,b] \times [c,d]$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) d\mu(x,y)$$

Es sei der Quader $Q = [a_1, a_2] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ mit $f \in C^0(Q)$ gegeben. Dann gilt

$$\int_Q f(x) d\mu(x) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden.

Rechenregeln: Domain additivity

omain additivity: $A_1 \cup A_2 + A_1 \cap A_2 = A_1 + A_2$
$\int_{A_1 \cup A_2} f + \int_{A_1 \cap A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$

Definition 23: Vernachlässigbare Mengen

1. Let $1 \leq m \leq n$ be an integer. A parameterised m-set in $\mathbb{R}^n$ is a continuous map $f : [a_1, b_1] \times ... \times [a_m, b_m] \to \mathbb{R}^n$ which is C^1 on $]a_1, b_1[\times ... \times]a_m, b_m[$.
2. A subset $B \subset \mathbb{R}^n$ is negligible if there exists an integer $k \geq 0$ and parameterised m_i-sets $f_i : X_1 \to \mathbb{R}^n$, with $1 \leq i \leq k$ and $m_i < n$, such that $X \subset f_1(X_1) \cup ... \cup f_k(X_k)$.
3. Satz: Wenn X vernachlässigbar ist gilt: $\int_X f(x) dx = 0$

Definition 24: Divergenz

$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ $\quad \operatorname{div}(\nabla g) = \Delta g \quad \int_X \Delta g(x,y) \partial x \partial y = \int_{\partial x} \nabla g \partial \vec{n}$
$\vec{n} \perp \gamma'(t)$ and $\vec{n}$ points toward the outside of X

Definition 25: Uneigentliche Integrale

Sei X nicht kompakt. Und X_k eine Reihe von kompakten Mengen sodass $X_k \subset X_{k+1}$ und $\cup_{k=1}^{\infty} = X$. Dann konvergiert $\int_X f dx$ wenn

$$\int_X f dx = \lim_{k \to \infty} \int_X f dx$$

Im 2-Dimensionalen Fall, wenn die Anwendung von Fubini gleich ist.

Satz 23: Substitutionsregeln in einer Dimension

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion. Für die Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx$$

führt die Substitution $x \to g(u)$ zu $dx = g'(u) du$ und damit wird das Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) g'(u) du$$

Das heisst wir haben das Integrationselement dx durch $g'(u)du$ ersetzt und die Grenzen entsprechend angepasst.

Satz 24: Substitutionsregel in $\mathbb{R}^2$

$$\int_\Omega f(x,y)\, dxdy = \int_{\tilde{\Omega}} f(g(u,v),\ h(u,v)) \left| \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}}_{d\Phi = \nabla \Phi} \right| dudv$$

Satz 25: Substitutionsregeln in n Dimensionen

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und die Koordinatentransformation (Substitution)

$$(x_1, \dots, x_n) = \Phi(u_1, \dots, u_n)$$

oder in Komponenten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi(u) = \begin{pmatrix} g_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ g_n(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

ist ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_1 = \int_{\tilde{\Omega}} f(g_1(u), \dots, g_n(u)) \cdot |\det d\Phi|\ du_1 \dots du_n$$

wobei das Gebiet $\tilde{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$ ist. $|\det d\Phi|$ ist die **Funktionaldeterminante** (Jakobi-Determinante).

Rechenregeln: Koordinatentransformationen und Funktionaldet.

Wichtige Koordinatentransformationen und Funktionaldeterminanten

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & 0 \le r < \infty & \quad dxdy = r \cdot drd\varphi \\ y &= r\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi & \end{aligned}$$

Elliptische Koordinaten $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot a\cos\varphi & 0 \le r < \infty & \quad dxdy = a \cdot b \cdot r \cdot drd\varphi \\ y &= r \cdot b\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi & \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot a\cos\varphi & 0 \le r < \infty & \quad dxdydz = r \cdot drd\varphi dz \\ y &= r \cdot b\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi & \\ z &= z & \infty \le z < \infty & \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\theta\cos\varphi & 0 \le r < \infty & \quad dxdydz = r^2 \sin\theta \cdot drd\theta d\varphi \\ y &= r \cdot \sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta < \pi & \\ z &= r\cos\theta & 0 \le \varphi < 2\pi & \end{aligned}$$

4.5 Geometrische Anwendungen von Integralen

Rezept 26: Area(D) - Vol(D) - Volumen eines Normalbereichs in $\mathbb{R}^n$

Analog zum Integrieren über Normalbereich:

$$\operatorname{Vol}(D) = \int_D 1\ dX = \underbrace{\int\int \dots \int}_{n} 1\ dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^n$$

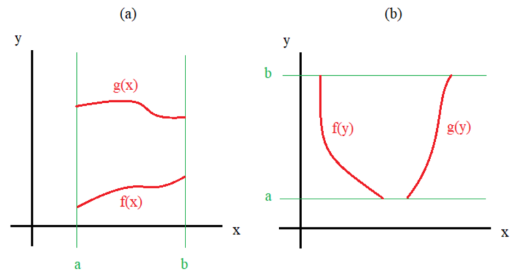
4.5.1 Normalbereiche in R^2

Definition 26: Normalbereiche in zwei Dimensionen

Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Ω heisst **y-Normalbereich**, falls sich Ω wie folgt darstellen lässt:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$$

wobei f, g stetige Funktionen der Variable x sind. Die Rolle von x und y darf vertauscht werden (es existiert also auch ein x-Normalbereich).



(a): y-Normalbereich, (b): x-Normalbereich

Satz 26: Integration auf Normalbereichen

Sei

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$$

ein **y-Normalbereich** mit stetigen Funktionen f, g und sei die zu integrierende Funktion $F \in C^0(\Omega)$, dann gilt:

$$\int_\Omega F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x,y)$$

Das innere Integral wird zuerst ausgewertet.

Rezept 27: Integrieren über Normalbereichen

Am folgenden Beispiel:

$$\int_D f(x,y)\, dxdy \quad \text{wobei} \quad D = \mathbb{R}^2 \cap \{(x,y) \mid y \ge 0 \wedge x - y + 1 \ge 0 \wedge x + 2y - 4 \le 0\}$$

1. Es hilft, sich den Normalbereich visuell vorzustellen, um die Grenzen zu finden. Bedingungen nutzen:

   $$y \ge 0 \ \wedge (y - 1 \le x \le 4 - 2y)$$

   Damit x nicht leer ist, muss $y - 1 \le 4 - 2y$ sein, resp. $y \le \frac{5}{3}$

2. Für das äussere Integral sind die Integrationsgrenzen nun fest vorgegeben. Die inneren Grenzen werden abhängig von der äusseren Variable gewählt:

   $$\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\frac{5}{3}} \int_{y-1}^{4-2y} f(x,y)\, dxdy$$

4.5.2 Satz von Green

Dieser Satz erlaubt uns, eindimensionale Wegintegrale in zweidimensionale Gebietsintegrale umzuwandeln. D.h. wir rechnen dann jeweils die Variante aus, die einfacher geht. Idee: Beziehung Linienintegral und Flächenintegral.

Satz 27: Satz von Green in der Ebene

Sei $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $C \subset \Omega$ ein beschränkter Bereich mit C^1_{pw} Rand ∂C, der sich nicht selbst schneidet. Dann gilt

$$\int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Wenn die Region durch eine Vereinigung von Kurven eingeschlossen ist:

$$\int_X \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f \cdot d\vec{s}$$

Bemerkung I: Der Rand ∂C muss im positiven mathematischen Sinn durchlaufen werden. D.h. das Gebiet C muss jeweils links vom Rand sein, für ein Beobachter, der auf dem Rand läuft.

Bemerkung II: Der Satz von Green ist die zweidimensionale Version des Satzes von Stokes
Bemerkung III: $\gamma = \partial C$ muss den gesamten Rand abdecken. Evtl. Gebietsadditivität nutzen und gewisse Bereiche (Ränder) einzeln parametrisieren.

Definition 27: Divergence

Sie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, die divergence ist

$$\text{div} f = \partial x_1 + ... + \partial x_n$$

Satz 28: Green andere Formen

$$\int_X \int \text{div} f dx dy = \int_{\partial X} f_0 d\vec{n}$$

$$\int_X \int \text{curl} f dx dy = \int_{\partial X} \vec{f} d\vec{s}$$

Rezept 28: Flächen berechnen mit Satz von Green

Gegeben: Gebiet $C \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt mit C^1_{pw} Rand ∂C.
Gesucht: Fläche $F(C)$

Lösungsschritt I:
Parametrisiere den Rand von C mit einer Kurve

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

Beachte, dass die Parametrisierung in positiver mathematischer Richtung verläuft. D.h. das Gebiet muss jeweils links der Kurve sein.
Lösungsschritt II:
Berechne γ'
Lösungsschritt III:
Wähle ein geeignetes Vektorfeld: $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1$ Zum Beispiel $\vec{v} = (0, x)$ oder $\vec{v} = (-y/2, x/2)$ oder $\vec{v} = (-y, 0)$. Wende dafür den Satz von Green an,

$$F(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$Vol(X) = \int_a^b v(\gamma) \cdot \gamma' dt$$

Satz 29: Masse und Schwerpunkt und Oberfläche

Sei Ω ein zweidimensionales Gebiet mit Massendichte $\rho(x,y)$, welche die Massenverteilung auf Ω beschreibt. Die **Masse** von Ω ist dann

$$M(\Omega) = \int_\Omega \rho(x,y) dx dy$$

Der **Schwerpunkt** $S = (x_s, y_s)$ von Ω ist gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{M} \int_\Omega x\rho(x,y) dx dy$$

$$y_s = \frac{1}{M} \int_\Omega y\rho(x,y) dx dy$$

Analog berechnen sich Masse, Schwerpunkt von dreidimensionalen Gebieten. Oberfläche: Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ in C^1. Sei $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [a,b] \times [c,d], z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ der Graph von f. This ist eine Oberfläche und hat Fläche: $\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + (\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2} dx dy$ Analog Formel für die Länge der Kurve einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Satz 30: Satz von Stokes

Sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $C \subset \Omega$ eine offene Fläche durch die geschlossene C^1_{pw} Kurve $\gamma = \partial C$ berandet:

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\, do$$

$$\text{curl}(\vec{v}) = \text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{n}$ der nach aussen gerichtete Normalenvektor entlang C und do das zweidimensionale Integrationselement über die Fläche bezeichnen. Der Weg γ muss positiv orientiert sein.

4.5.3 Satz von Gauss

Satz 31: Satz von Gauss

Sei V ein beschränkter räumlicher Bereich mit Rand $\partial V \in C^1_{pw}$ gegeben. Sei das Vektorfeld $\vec{v}$ auf ganz V definiert und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n}\, do = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, d\mu$$

wobei $\vec{n}$ der nach aussen gerichtete Normalenvektor entlang ∂V, do das zweidimensionale Integrationselement über die Fläche und $d\mu$ das dreidimensionale Integrationselement über das Volumen bezeichnen.

5 Tricks und Umformungen

Rezept 29: $f(b) - f(a)$

Falls irgendwo die Differenz einer Funktion auftaucht, kann oft der Fundamentalsatz genutzt werden

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Rezept 30: Beweise, dass z(t) konstant ist

$$z(t) \text{ konstant} \iff z'(t) = 0 \text{ bzw } \nabla z(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ also}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

6 Integrale

6.1 Spezielle unbestimmte Integrale

$\int (ax+b)^s\, dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1} + C,\ s \neq -1$
$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} log|ax+b| + C$
$\int (ax^p+b)^s x^{p-1}\, dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)} + C,\ s \neq -1, a \neq 0$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\, dx = \frac{1}{ap} log|ax^p+b| + C,\ a \neq 0, p \neq 0$
$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} log|cx+d| + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctan(\frac{x}{a}) + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} log(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = log(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$
$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
$\int a^{kx}\, dx = \frac{1}{k*log(a)} a^{kx} + C$
$\int e^{ax} p(x)\, dx = e^{ax}(a^{-1}p(x) - a^{-2}p'(x) + a^{-3}p''(x) - \dots$
$+(-1)^n a^{-n-1} p^{(n)}(x)) + C,\ a \neq 0$, p: Polynom n-ten Grades
$\int e^{kx} sin(ax+b)\, dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}\Big(k\ sin(ax+b) - a\ cos(ax+b)\Big) + C$
$\int e^{kx} cos(ax+b)\, dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}\Big(k\ cos(ax+b) + a\ sin(ax+b)\Big) + C$
$\int log|x|\, dx = x(log|x| - 1) + C$
$\int x^k log(x)\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big(log(x) - \frac{1}{k+1}\Big) + C,\ k \neq -1$
$\int x^{-1} log(x)\, dx = \frac{1}{2}(log(x))^2 + C$
$\int sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} cos(ax+b) + C$
$\int cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} sin(ax+b) + C$
$\int tan^2(x)\, dx = tan(x) - x + C$
$\int \frac{1}{sin(x)}\, dx = log\left|tan\frac{x}{2}\right| + C$
$\int \frac{1}{cos(x)}\, dx = log\left|tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
$\int \frac{1}{tan(x)}\, dx = log|sin(x)| + C$
$\int coth\, dx = log|sinh(x)| + C$
$\int \sin^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(ax)\cdot\cos(ax)}{2a}$
$\int \sin^3(ax)\, dx = -\frac{\cos(ax)}{a} - \frac{\cos^3(ax)}{3a}$
$\int x^2 \cdot \sin(ax)\, dx = \frac{2x\cdot\sin(ax)}{a^2} - \frac{a^2x^2 - 2\cdot\cos(ax)}{a^3}$
$\int \frac{dx}{\sin(ax)}\, dx = -\frac{\cot(ax)}{a}$
$\int x \cdot \sin^2(ax)\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\cdot\sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$
$\int \frac{x\, dx}{\sin^2(ax)} = -\frac{x\cdot\cot(ax)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln|\sin(ax)|$
$\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} = \frac{x}{2} + \frac{\sin(ax\cdot\cos(ax))}{2a}$
$\int \cos^3(ax)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a} - \frac{\sin^3(ax)}{3a}$
$\int x \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\cdot\sin(ax)}{a}$
$\int x^2 \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{2x\cdot\cos(ax)}{a^2} + \frac{(a^2x^2-2)\cdot\sin(ax)}{a^3}$
$\int \frac{dx}{\cos(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$
$\int \frac{dx}{\cos^2(ax)} = \frac{\tan(ax)}{a}$
$\int x \cdot \cos^2(ax)\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\cdot\sin(2ax)}{4a} + \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$
$\int \frac{x\, dx}{\cos^2(ax)} = \frac{x\cdot\tan(ax)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln|\cos(ax)|$

6.2 Spezielle bestimmte Integrale

$\int_0^{2\pi} sin(mx) cos(nx)\, dx = 0,\ m,n \in \mathbb{Z}$
$\int_0^\infty \frac{sin(ax)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},\ a > 0$
$\int_0^\infty sin(x^2)\, dx = \int_0^\infty cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^\infty e^{-ax} x^n\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}},\ a > 0$
$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$