HOCHSCHULE KONSTANZ TECHNIK, WIRTSCHAFT UND GESTALTUNG
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Signale, Systeme und Sensoren

Fourieranalyse und Akustik

Th. Gnädig, F. Gendusa

Konstanz, 7. Dezember 2015

Zusammenfassung (Abstract)

Thema:	Fourieranalyse und Akustik	
Autoren:	Th. Gnädig	thgnaedi@htwg-konstanz.de
	F. Gendusa	fagendus@htwg-konstanz.de
Betreuer:	Prof. Dr. Matthias O. Franz	mfranz@htwg-konstanz.de
	Jürgen Keppler	juergen.keppler@htwg-konstanz.de
	Martin Miller	martin.miller@htwg-konstanz.de

In diesem Versuch wird eine Fourieranalyse auf einen Ton einer Mundharmonika gemacht. Weiter wird eine Reihe von Sequenzen an jeweils zwei verschiedenen Lautsprechern angelegt, mit einem Mikrophon gemessen, um den Amplituden und den Phasengang der Lautsprecher zu bestimmen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Listingverzeichnis

1

Einleitung

Diese Laborübung beschäftigt sich mit dem Umgang von Lautsprechern und Mikrofonen. Dabei soll ein praktisches Verständnis der Fourierreihe und der Fourieranalyse erlernt und verfestigt werden. Dazu verwenden wir zwei Versucht. Der erste Versuch befasst sich mit dem Signal einer Mundharmonika, welches Fouriertransformiert und anschließend interpretiert wird. Der Zweite Versuch befasst sich mit reinen Sinussignalen, welche durch Lautsprecher akustisch ausgegeben und durch ein Mikrophon aufgenommen werden.

- Bestimmung der Tonhöhe eines Akustischen Signals
- Frequenzgang von Lautsprechern bestimmen.

2

Bestimmung der Tonhöhe eines akustischen Signals

Bestimmen der Frequenz eines Tones und Anwendung der Fouriertransformation.

2.1 Fragestellung, Messprinzip, Aufbau, Messmittel

In diesem ersten Versuch soll die Tonhöhe eines akustischen Signals bestimmt werden. Als akustischer Signalgeber wird eine Mundharmonika verwendet. Bei jener werden Töne durch einzelne dicht aneinander liegende Luftkanäle erzeugt.Deshalb ist es für einen Laien nicht auf Anhieb möglich einen Ton einzelnen zu spielen. Damit für den Versuch genau ein Ton zu hören ist, werden alle Luftkanäle bis auf einen mit Klebeband verschlossen. Der Ton der Mundharmonika wird mit einem Mikrophon aufgenommen, welches an einem Oszilloskop angeschlossen ist. Da die Signale in analoger Form vorliegen, muss für die weitere Verarbeitung des Signals eine Digitalisierung vorgenommen werden. Dabei ist das Abtastintervall Δt gerade der zeitliche Abstand zwischen zwei Messungen. Die Abtastfrequenz ist gerade der Kehrwert zum Abtastintervall $\frac{1}{\Delta t}$. Diese Werte können im Unterabschnitt Messwerte in der Tabelle 2.1 entnommen werden. Die Digitalisierung erfolgt durch das Oszilloskop.
Um einen Signalausschnitt aufzunehmen wird der "*Single Sequence*"Modus im Oszilloskop eingestellt. Mit einem Pythonskript wird anschließend 2500 Messwerte vom Oszilloskop ausgelesen. Aus diesem Signal im Zeitbereich wird das Spektrum mit Hilfe der Fouriertransformation berechnet. Die Umrechnung in das Amplitudenspektrum erfolgt mit Hilfe der Numpy Funktion $np.fft.fft()$, die auf der X-Achse jedoch nicht die Frequenz aufträgt, sondern die Einheit *Anzahl Schwingungen innerhalb der gesamten Signaldauer*. Interessant

ist jedoch die Frequenz. Deshalb muss diese noch mit folgender Formel errechnet werden.

$$f = \frac{n}{M \cdot \Delta t} \tag{2.1}$$

2.2 Messwerte

Eigenschaft	Wert
Grundfrequenz in Hz	917.43
Grundperiode in ms	1.09
Abtastfreq in kHz	100
Signaldauer in s	0.025
Abtastinterval Δt in s	$1 \cdot 10^{-5} s$
Signalänge M Abtastungen	2500

Tabelle 2.1: Eigenschaften der Messung und Grundfrequenz des Tones

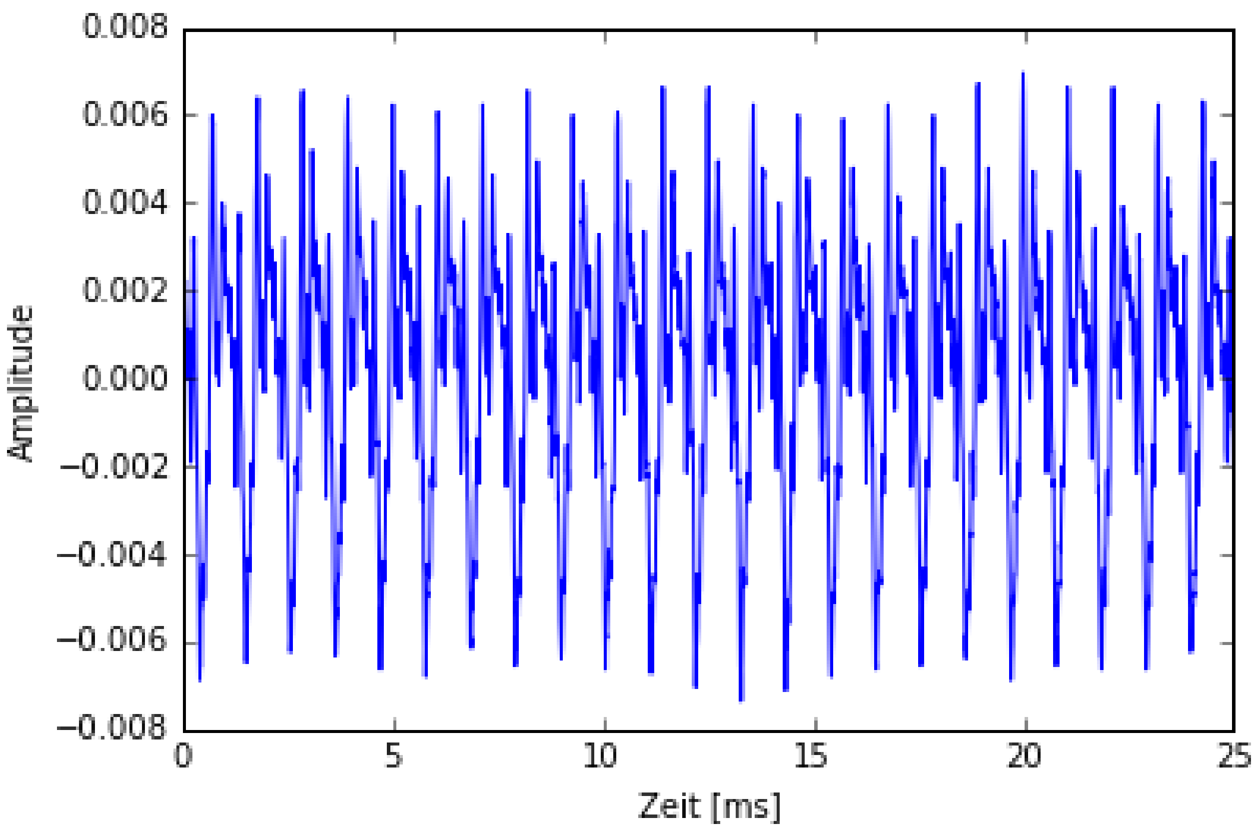


Abbildung 2.1: Signal im Zeitbereich

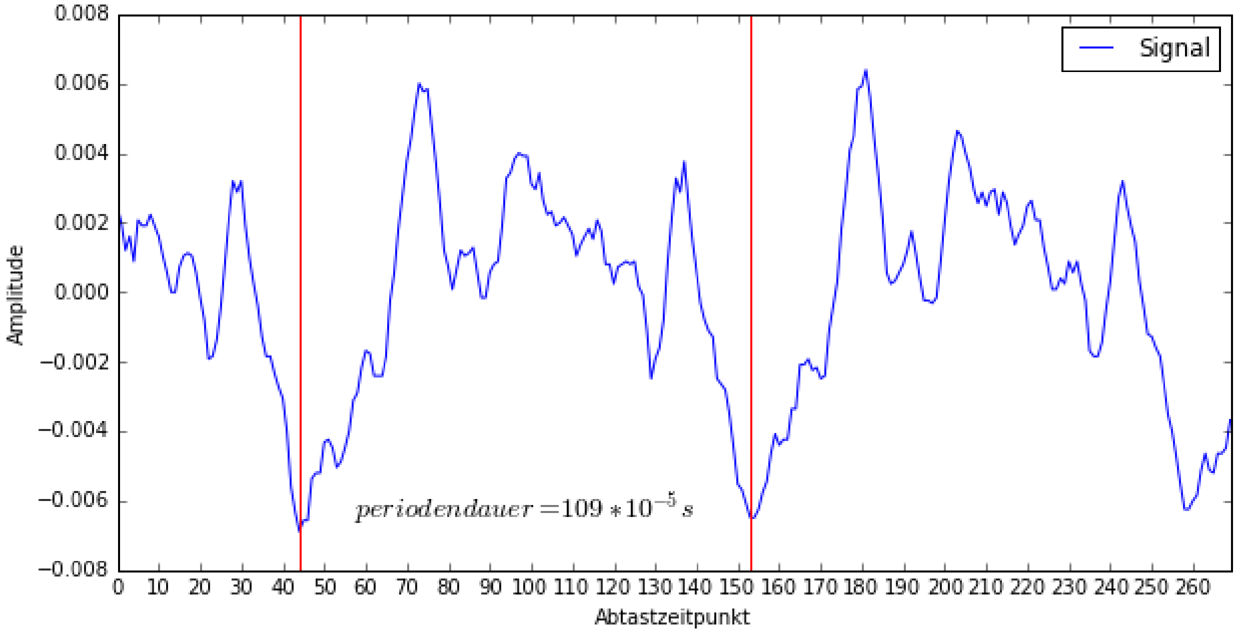


Abbildung 2.2: Ausschnitt Signal im Zeitbereich mit eingezeichneter Periode

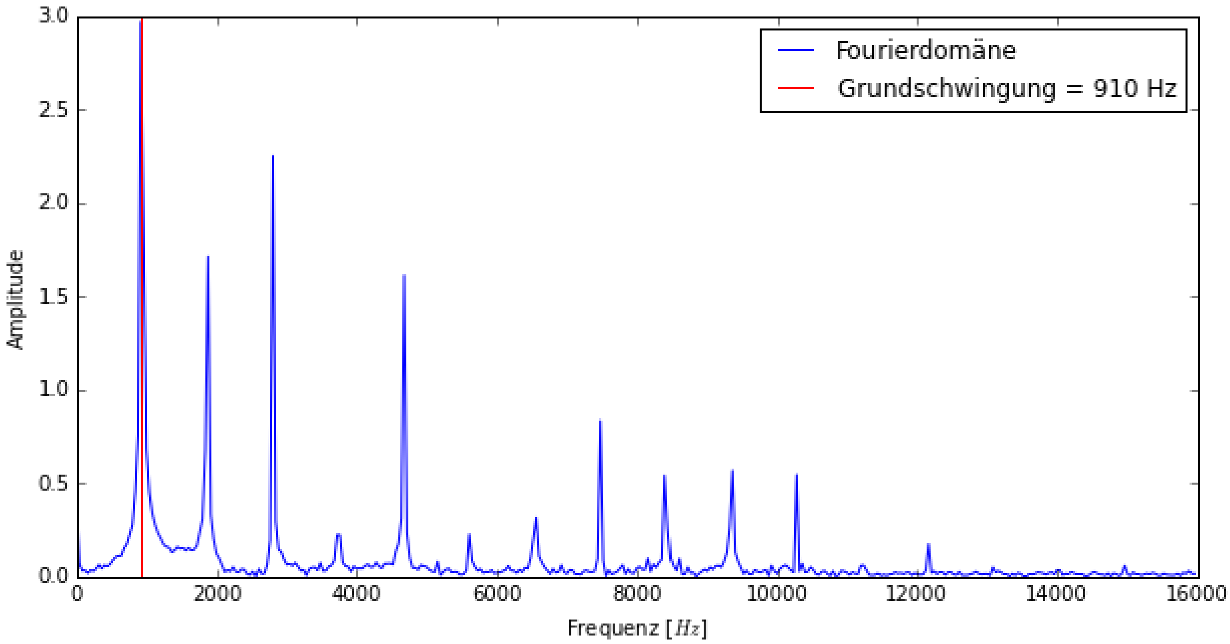


Abbildung 2.3: Signal in der Fourierdomäne

2.3 Auswertung und Interpretation

In Bild 2.1 ist das Signal der Mundharmonika im Zeitbereich zu sehen. Auf den ersten Blick scheint es sich wie erwartet um ein periodisches Signal zu handeln. Auf der X-Achse ist die Zeit in Millisekunden und auf der Y-Achse die Amplitude in Volt aufgetragen. Nun soll die Grundfrequenz, sowie die Grundperiodendauer aus dem Signal im Zeitbereich bestimmt werden. Dafür wird ein vergrößerter Signalausschnitt unter die Lupe genommen. Dieser Bereich ist in Bild 2.2 zu sehen. Diesmal sind auf der X-Achse jedoch die einzelnen Abtastzeitpunkte aufgetragen. Die Y-Achse bleibt wie gehabt die Amplitude. Eine Periode beginnt mit einem äbsolutem"Minima und endet mit einem äbsolutem"Minima. Die Zeit die dazwischen vergeht ist die Periodendauer. Um an diese Zeit zu kommen wird das Abtastintervall Δt und die Anzahl an Abtastungen benötigt. Die Periodendauer ergibt sich aus der Formel $T = n \cdot \Delta t$, wobei T die Periodendauer, n die Anzahl an Abtastungen und Δt das Abtastintervall ist. Die korrespondierende Frequenz ist auf die übliche Weise zu berechnen. Die Grundfrequenz und die Grundperiode können in Tabelle 2.1 abgelesen werden. Die Grundfrequenz von 917.43 Hz liegt zwischen den Frequenzen der Töne a” und b”. Es handelt sich bei dem Signal nicht um einen Reinen Sinuston, was man an dem Ausschnitt aus Bild 2.2 erkennen kann. Es handelt sich um eine Mischung verschiedener Frequenzen, welche ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind. Dies sind die sogenannten Obertöne, welche gerade die Melodie einer Mundharmonika ausmachen. So unterscheiden sich Instrumente, die den selben Ton spielen bei exakter Stimmung nicht in Ihrer Grundfrequenz, sondern lediglich im Bereich der höheren Harmonischen. Diese Obertöne können am besten in der Fourierdomäne erkannt werden. Das Spektrum des Signals ist in Bild 2.3 zu sehen. Der erste Peak im Spektrum ist die Grundfrequenz. Alle weiteren Peaks sollten ganzzahlige Vielfache dieser sein, gut erkennbar sind $1 bis 10 und 12$, zu beachten ist, dass das in der Grafik gezeigte Diagramm bei 16000 Hz endet, die Funktion $fft.fft()$ liefert noch deutlich mehr werte, welche allerdings keine Peaks mehr enthalten und somit für uns uninteressant sind. Aus dem Spektrum kann die Grundfrequenz mit 910 Hz bestimmt werden $(rote Linie in der Grafik)$. Die aus dem Zeitbereich abgelesene Grundfrequenz unterscheidet sich zu der im Amplitudenspektrum abgelesenen um $\approx 1\%$.

3

Frequenzgang von Lautsprechern

Es gilt für zwei Lautsprecher die Amplitude und Phasenverschiebung eines akustischen Signales festzustellen.

3.1 Fragestellung, Messprinzip, Aufbau, Messmittel

Lineare Systeme modifizieren ein Eingangssignal lediglich in seiner Phase und Amplitude. Die Frequenzen bleiben gleich. Die Auswirkung eines solchen Systems auf ein Signal kann man mit dem sogenannten Frequenzgang beschreiben. Der Frequenzgang $H(\omega)$ ist ein Faktor, den man mit dem Spektrum des Eingangssignals multiplizieren kann. Das Ergebnis entspricht gerade dem Ausgangssignal des Systems. Der Frequenzgang teilt sich in einen Faktor zur Amplitudenmodifikation und einen Faktor zur Phasenverschiebung auf. Der Frequenzgang beschreibt also gerade die Arbeitsweise eines Systems in der Fourierdomäne. Die Fouriertransformierte der Impulsantwort eines Systems ist gerade der Frequenzgang des selbigen. Die Impulsantwort beschreibt also das System in der Zeitdomäne und der Frequenzgang das Signal in der Frequenzdomäne. Lautsprecher sind ebenfalls lineare Systeme und modifizieren Amplitude und Phasengang. Würde man die Sprungantwort dieses Systems ermitteln und diese anschließend differenzieren hätte man die Impulsantwort des Systems. Diese kann man Fouriertransformieren und hat dann den Frequenzgang für alle möglichen Frequenzen. Da das Anlegen eines Sprungsignals jedoch zum Defekt eines Lautsprechers führt muss ein anderes Verfahren angewandt werden. Um den Frequenzgang eines Lautsprechers zu ermitteln werden nacheinander Sinussignale mit verschiedenen Frequenzen an diesen angelegt. Die Amplitude der verschiedenen Frequenzen sollte stets dieselbe sein. Das Signal wird mit einem Sinusgenerator erzeugt und an den Lautsprecher angelegt. Dieses Signal wird auch an einem Kanal im Oszilloskop gemessen. Der Ton der dabei entsteht wird

100	850	3000
200	1000	4000
300	1200	5000
400	1500	6000
500	1700	10000
700	2000	

Tabelle 3.1: Frequenzen zur Frequenzgangmessung

mit einem Mikrofon aufgenommen und ebenfalls an einem Kanal des Oszilloskops gemessen. Das Mikrofon sollte möglichst stets den gleichen Abstand zum Lautsprecher haben. Für diesen Versuch werden 17 Messungen, mit unterschiedlichen Frequenzen pro Lautsprecher, gemacht. Das erzeugte Sinussignal gilt als Referenzwert welches bei jeder Messung eine Amplitude von ≈1,5V besitzt. Beim Vergleichen beider Werte sollte sowohl eine Phasenverschiebung als auch ein Amplitudenunterschied festgestellt werden. Dazu später mehr. Die einzelnen Messungen werden mit folgenden Frequenzen durchgeführt: Die Messungen werden im SSingle Sequence Mode"durchgeführt, um einen Signalausschnitt zu erlangen. Das Mikrofon hat laut Datenblatt einen Arbeitsbereich von 70 - 13.000Hz die Messungen in diesem Versuch beschränken sich auf einen Bereich von 100 - 10.000 Hz. Das bedeutet, dass dieser Messbereich voll im Bereich des Mikrofons liegt und Messungen in diesem sinnvoll sein sollten. Bei jeder Messung wird sowohl die Amplitude des Ausgangssignals, als auch die Phasenverschiebung gemessen und protokolliert. Abbildung 4.8

3.2 Messwerte

Frequenz in Hz	Amplitude in mV	Phasenverschiebung in
100	50.2	−3.60
200	134.0	−578.88
300	95.2	−547,20
400	60.4	−504
500	49.2	−493.2
700	39.6	−490.03
850	43.2	−482.40
1000	42.0	−469.44
1200	35.2	−460.22
1500	33.6	−444.24
1700	30.8	−437.11
2000	32.0	−421.92
3000	37.6	−414.00
4000	46.0	−1054.008
5000	26.8	−982.80
6000	19.4	−974.88
10000	15.4	−752.40

Tabelle 3.2: Messwerte Lautsprecher groß

Frequenz in Hz	Amplitude in mV	Phasenverschiebung in
100	6.6	−50.40
200	10.4	−380.16
300	15.0	−409.68
400	23.8	−436.32
500	34.6	−442.80
700	70.0	−501.12
850	68.0	−574.20
1000	50.0	−471.60
1200	40.0	−463.68
1500	52.8	−509.04
1700	53.6	−445.68
2000	51.2	−432.00
3000	50.4	−394.56
4000	52.0	−1028.16
5000	12.8	−1022.4
6000	8.2	−914.40
10000	19.4	−727.20

Tabelle 3.3: Messwerte Lautsprecher klein

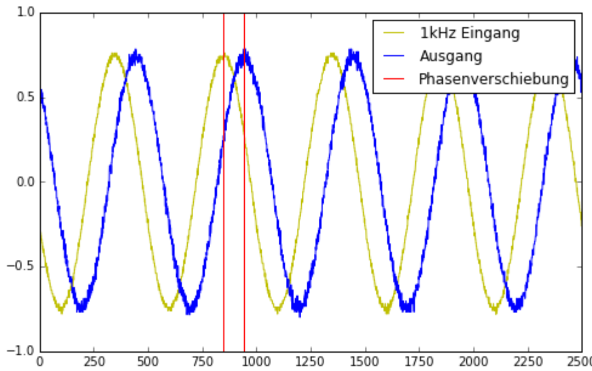


Abbildung 3.1: Eingangsignal Lautsprecher und Ausgangssignal Mikrofon

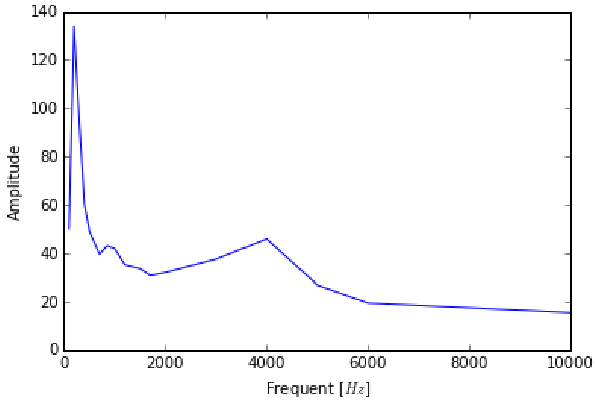


Abbildung 3.2: Amplitude Lautsprecher gross

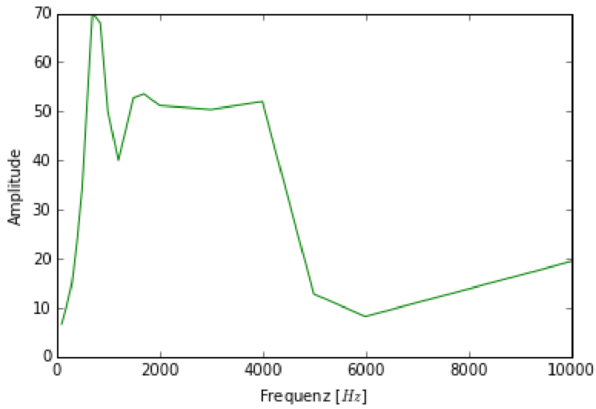


Abbildung 3.3: Amplitude Lautsprecher klein

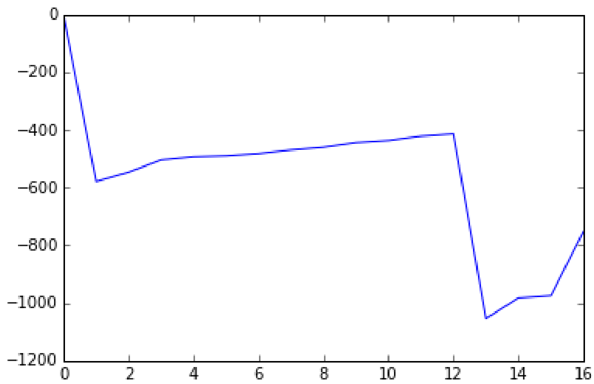


Abbildung 3.4: Phase Lautsprecher Gross

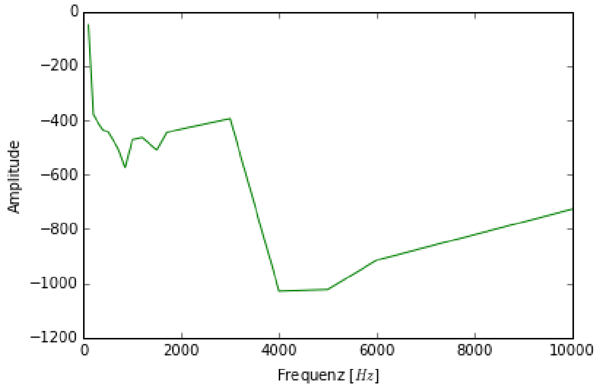


Abbildung 3.5: Phase Lautsprecher klein

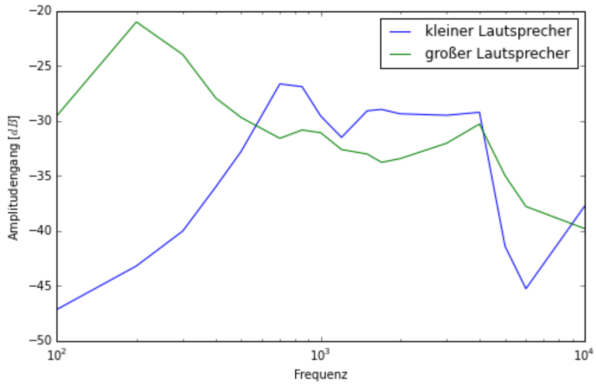


Abbildung 3.6: Bode-Diagramm Amplitudengang

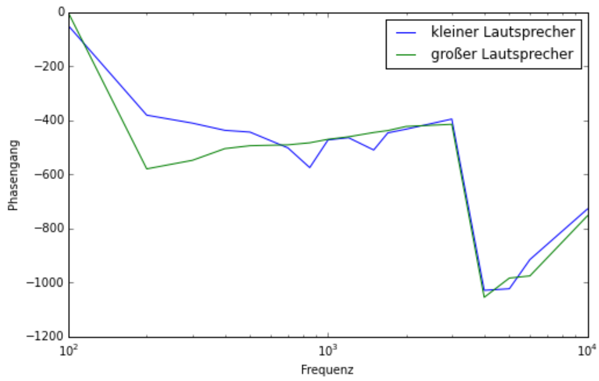


Abbildung 3.7: Bode-Diagramm Phasengang

3.3 Auswertung und Interpretation

In Abbildung 3.1 ist das Signal vom Sinusgenerator in Gelb und das Aufgenommene Signal in Blau zu sehen. Die Vertikalen Linien zeigen die Phasenverschiebung der beiden Signale an. Auf diesem Bild scheinen sich die Amplituden nicht zu unterscheiden. Dies hängt lediglich von der Skalierung der einzelnen Kurven im Oszilloskop ab. Die eigentlichen Amplituden sind den Tabellen **??** und **??** zu entnehmen. Bei der Abbildung handelt es sich nur um eine Beispielhaftes Signal, welche nachträglich zum Versuch aufgenommen wurde. Leider ist auf dieser Abbildung kein Unterschied der Amplituden zu sehen.

Um den Frequenzgang des linearen Systems Lautsprecher zu bestimmen interessiert der jeweilige Amplitudengang, sowie der Phasengang. Da der Amplitudengang nicht in Abhängigkeit der Eingangsspannung von 1.5 V bestimmt werden soll, wird für das Bode-Diagramm das Verhältnis bestimmt. In Abbildung 3.2 bzw. 3.3 sind trotzdem nochmal die Amplitudenverläufe für die entsprechenden Frequenzen zu sehen. Die Messung der Phasenverschiebungen sind ebenfalls in zwei Diagrammen aufgetragen, so dass man für jede gemessene Frequenz sehen kann, wie sich die Phasenverschiebung verhält. Das Verhalten der Lautsprecher im Bezug auf die Amplitude und die Phase soll im Kontext mit den Bode-Diagrammen diskutiert werden.

Im Bode-Diagramm für die Amplituden wird die Frequenz auf der X-Achse zur Basis 10 logarithmiert. Der Betrag des Wertebereiches wird ebenfalls logarithmiert und mit Zwanzig multipliziert. Damit erhält man einen Amplitudenfaktor in Dezibel. Es handelt sich nicht um eine bestimmte Amplitude zu einer gewissen Frequenz in diesem Schaubild, sondern viel mehr um einen Faktor, der mit dem Eingangssignal des Systems multipliziert wird. Dieses Signal erhält je nach Frequenz eine andere Anpassung der Amplitude durch diesen Faktor. Dieser Faktor heißt, in Abhängigkeit von der Frequenz, Amplitudengang. In Schaubild 3.6 ist der Amplitudengang des großen, sowie auch des kleinen Lautsprechers zu sehen. Es kann nun das Verhalten beider Lautsprecher miteinander verglichen werden. In beiden Fällen findet keine Verstärkung des Signals statt. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da es sich bei Lautsprechern um passive Elemente handelt. Daher würde jedes andere Verhalten den Hauptsätzen der Thermodynamik widersprechen.

Der große Lautsprecher hat seine geringste Dämpfung im gemessenen Bereich von 100 bis ≈ 500 Hertz. In diesem Bereich findet sich der Breakevenpoint von großem und kleinem Lautsprecher wieder. Im Bereich von ≈ 500 bis ≈ 1300 Hertz hat der kleine Lautsprecher den höheren Wirkungsgrad. Danach sinkt der Wirkungsgrad des kleinen rapide ab und steigt dann wieder. Dieses Verhalten könnte auch auf einen Messfehler zurückzuführen sein. Ab

≈ 1300 sinkt der Faktor für den großen Lautsprecher in diesem Diagramm streng monoton. Hier wird ersichtlich, das der große Lautsprecher für die tieferen Frequenzen den höheren Wirkungsgrad hat und der kleine in den höheren Frequenzen. Bekanntlich werden im Hifi Bereich kleine Lautsprecher als Hochtöner benutzt und große als Tieftöner. Es zeigt sich also kein Widerspruch zu den Messergebnissen dieses Versuches.

Bei Betrachtung des Bode-Diagramms der Phasen Abbildung 3.7 ist zu erkennen, dass der große und kleine Lautsprecher eine sehr ähnliche Verschiebung der Phase aufweisen. Die kleineren Ausschläge der blauen Linie sind auf Messfehler zurückzuführen, da von einem Bezugspunkt aus nicht immer in die selbe Richtung gemessen wurde. Der große Sprung zwischen 3 und $4kHz$ sowie der Sprung von 100 auf $200Hz$ sind auf Fehler bei der Aufrechnung einer neuen Phase zurückzuführen. Jeweils bei diesen Werten wurde die Phase um eine weitere Periode überholt, siehe Anlage 4.8 Bei der Verschiebung schlechthin handelt es sich um eine Verzögerung, was an den negativen Werten der Phase zu erkennen ist. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da ein Lautsprecher ein kausales System ist.

Anhang

A.1 Quellcode

A.1.1 Quellcode Versuch 1

```python
import numpy as np
from TekTDS2000 import *

scope = TekTDS2000()

input()
scope.saveCsv(filename='mic1000Hz.csv', ch=2)
scope.saveCsv(filename='sig1000Hz.csv', ch=1)
scope.plot(filename='mic1000Hz.png', ch=2)
scope.plot(filename='sig1000Hz.png', ch=1)
scope.getSamplingInterval()
scope.getRecordLength()
# ausgabe bei nachmessung:
#TekTDS2000: Sampling interval: 2e-06 s
#TekTDS2000: Record length: 2500

```

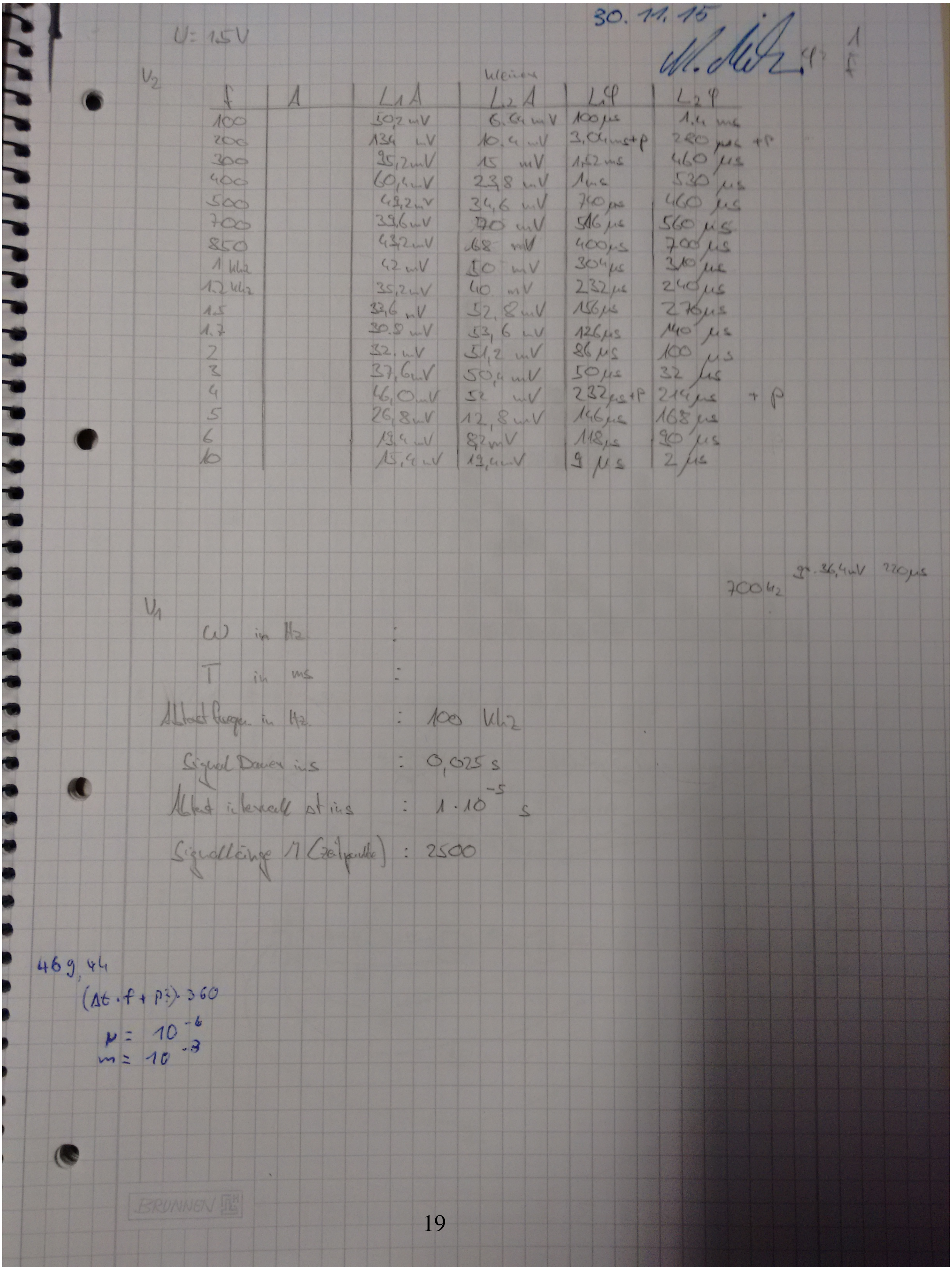
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Periodendauer
def periodendauer():
    input_data = np.genfromtxt('tone.csv', delimiter=',')
    my_data = input_data[:,1:2];

    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=800)
    plt.xticks(range(0,271,10))
    plt.plot(my_data[0:270], label='Signal')
    plt.plot((44, 44), (-0.008, 0.008), 'k--', color='red')     # anfang Periode
    plt.plot((153, 153), (-0.008, 0.008), 'k--', color='red')    # ende Periode
    plt.ylabel("Amplitude")
    plt.xlabel("Abtastzeitpunkt")
    plt.text(57, -0.0065, '$periodendauer = 109 * 10^{-5} s$', fontsize=14)
    plt.legend()
    plt.show()


# Fouriertransformation
def mach_fft(data):
    fft = np.abs(np.fft.fft(data, axis=0))
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=800)
    plt.xlabel("Frequenz [$Hz$]")
    plt.ylabel("Amplitude")
    plt.plot(range(0,16000,40), fft[:400], label="Fourierdomaene")
    plt.plot((910, 910), (3, 0), 'k--', color='red',label="Grundschwingung = 910 Hz") # Grundfrequenz
    #plt.plot((1820, 1820), (3, 0), 'k--', color='red') # 1 Harmonische
    #plt.plot((2730, 2730), (3, 0), 'k--', color='red') # 2 Harmonische
    plt.legend()
    plt.show()

```

A.1.2 Quellcode Versuch 2

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# vergleich der Eingangsspannung zum mikrophon Signal
def ein_ausgang():
    input_sig = np.genfromtxt('sig1000Hz.csv', delimiter=',')
    input_mic = np.genfromtxt('mic1000Hz.csv', delimiter=',')

    plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=800)
    plt.xticks(range(0,2501,250))
    plt.ylabel("Amplitude")
    plt.xlabel("Abtastzeitpunkt")
    resize_mic = input_mic[:,1:2] * 40  # mal 40, da mikrophonsignal etwa 40 mal schwaecher ist
    plt.plot(input_sig[:,1:2], color='y', label='1kHz Eingang')
    plt.plot(resize_mic, color='b', label='Ausgang')
    plt.plot((845, 845), (-1, 1), '-', color='red',label='Phasenverschiebung')
    plt.plot((940, 940), (-1, 1), '-', color='red')
    plt.legend()
    plt.show()

def amplitude(datak, datag, x):
    datak = datak / 1500   # normierung
    datak = np.log10(np.abs(datak))
    datak = datak * 20    # dB
    datag = datag / 1500   # normierung
    datag = np.log10(np.abs(datag))
    datag = datag * 20    # dB
    plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=800)
    plt.semilogx(x, datak, label="kleiner Lautsprecher")
    plt.semilogx(x, datag, label="grosser Lautsprecher")
    plt.xlabel("Frequenz")
    plt.ylabel("Amplitudengang [$dB$]")
    plt.legend()
    plt.show()

def phase(datak, datag, x):
    plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=800)
    plt.semilogx(x, datak, label="kleiner Lautsprecher")
    plt.semilogx(x, datag, label="grosser Lautsprecher")
    plt.xlabel("Frequenz")
```

```
    plt.ylabel("Phasengang")
    plt.legend()
    plt.show()

# Beispielaufruf:
# x = alle Messwerte, amplitude_gross = alle gemessenen Amplitudenwerte
# zur jeweiligen frequenz, siehe Tabelle im Bericht

#x = np.array([100,200,300,400,500,700,850,1000,1200,1500,1700,2000,3000,4000,5000,6000,10000])

#amplitude_gross = np.array([50.2,134.0,95.2,60.4,49.2,
#                39.6,43.2,42.0,35.2,33.6,
#                30.8,32.0,37.6,46.0,26.8,
#                19.4,15.4])

#amplitude_klein = np.array([6.6,10.4,15.0,23.8,34.6,
#                70.0,68.0,50.0,40.0,52.8,
#                53.6,51.2,50.4,52.0,12.8,
#                8.2,19.4])

#amplitude(amplitude_klein, amplitude_gross, x)
```

A.2 Messergebnisse



30. 11. 15

U: 1.5V

V_2

f	A	L_1 A	kleiner L_2 A	L_1 φ	L_2 φ
100		50,2 mV	6.64 mV	100 µs	1.4 ms
200		134 mV	10.4 mV	3,04 ms+p	280 µs +p
300		95,2 mV	15 mV	1,52 ms	460 µs
400		60,4 mV	23,8 mV	1 ms	530 µs
500		49,2 mV	34,6 mV	740 µs	460 µs
700		39,6 mV	70 mV	516 µs	560 µs
850		43,2 mV	68 mV	400 µs	700 µs
1 kHz		42 mV	50 mV	304 µs	310 µs
1.2 kHz		35,2 mV	40 mV	232 µs	240 µs
1.5		33,6 mV	52,8 mV	156 µs	270 µs
1.7		30.8 mV	53,6 mV	126 µs	140 µs
2		32. mV	51,2 mV	86 µs	100 µs
3		37,6 mV	50,4 mV	50 µs	32 µs
4		46,0 mV	52 mV	232 µs+p	214 µs + p
5		26,8 mV	12,8 mV	146 µs	168 µs
6		19,4 mV	8,2 mV	118 µs	90 µs
10		15,4 mV	19,4 mV	9 µs	2 µs

700 Hz gr. 36,4 mV 220 µs

V_1

ω in Hz :

T in ms :

Abtastfrequ. in Hz : 100 kHz

Signal Dauer in s : 0,025 s

Abtastintervall Δt in s : $1 \cdot 10^{-5}$ s

Signallänge N (Zeitpunkte) : 2500

469,44

$(\Delta t \cdot f + p:) \cdot 360$

$\mu = 10^{-6}$

$m = 10^{-3}$

Abbildung 4.8: Protokoll