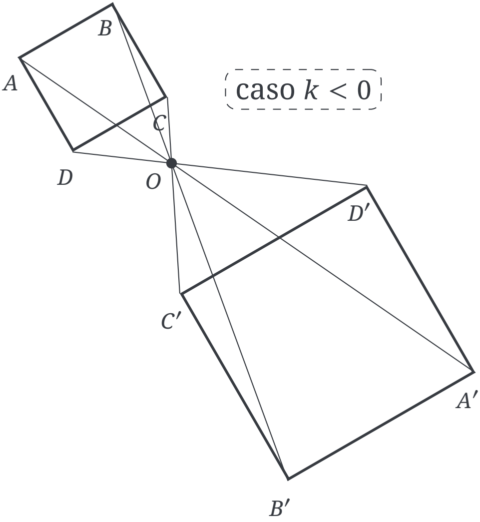
Homotecia y semejanza
Unidad de geometría

Por Prof. Fernando Halabi (`fhalabi@cdplf.cl`)

Para Colegio Divina Pastora

23/09/2022

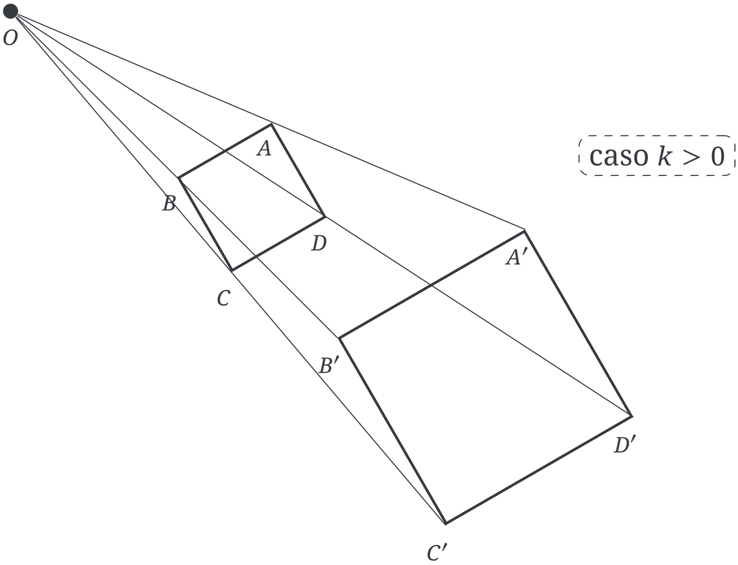
Homotecia



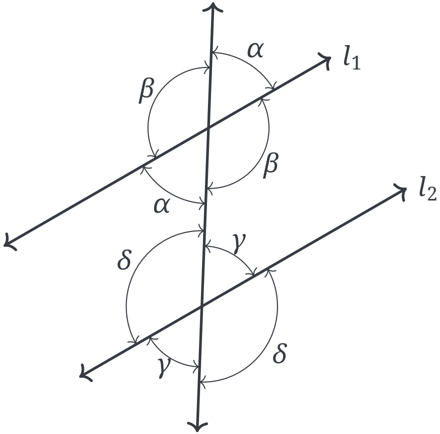
caso $k < 0$

Se cumple que:

- $\overline{OA} \cdot k = \overline{OA'}$
- $\overline{OB} \cdot k = \overline{OB'}$
- $\overline{OC} \cdot k = \overline{OC'}$
- $\overline{OD} \cdot k = \overline{OD'}$
- $\overline{AB} \cdot k = \overline{A'B'}$
- $\overline{BC} \cdot k = \overline{B'C'}$
- $\overline{CD} \cdot k = \overline{C'D'}$
- $\overline{DA} \cdot k = \overline{D'A'}$


O
A
B
C
D
A′
B′
C′
D′
caso k > 0

Rectas y ángulos

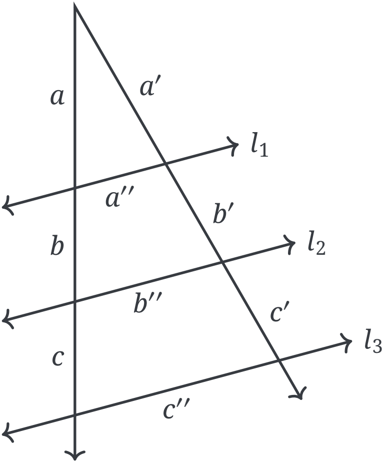


- $\alpha + \beta = 180°$
- $\gamma + \delta = 180°$

Si $l_1 \parallel l_2$, entonces:

- $\alpha = \gamma$
- $\beta = \delta$

Teorema de Tales

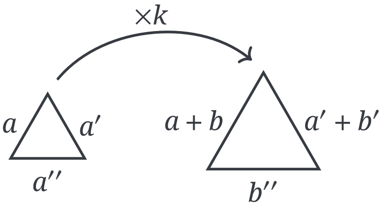


$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$$

Si $l_1 \parallel l_2$ Si $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$

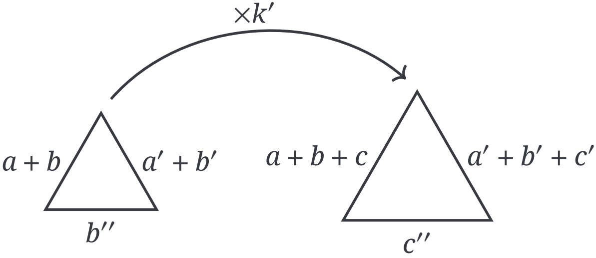
$$\boxed{\frac{a}{a''} = \frac{a+b}{b''} = \frac{a+b+c}{c''}}$$

Demostración: Si $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, los triángulos involucrados comparten sus ángulos y son homotéticos.



Así,

$$\left.\begin{array}{rcl} a \cdot k & = & a+b \\ a' \cdot k & = & a'+b' \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a+b}{a'+b'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$



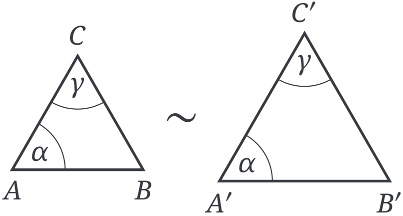
Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned}(a+b)\cdot k' &= a+b+c\\ (a'+b')\cdot k' &= a'+b'+c'\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{a+b}{a'+b'} = \frac{c}{c'} \qquad \square$$

Semejanza

Si dos figuras tienen la misma forma (ángulos), se dicen semejantes (proporcionales). Se denota como:

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(A'B'C') \quad \Leftrightarrow$$

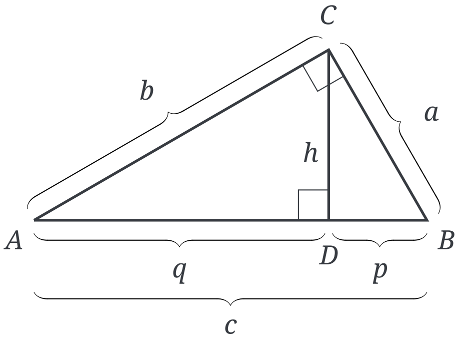


Para triángulos semejantes se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

Teorema de Euclides

Para triángulos rectángulos con altura en la hipotenusa, se cumple que:



$a^2 = p \cdot c$

$b^2 = q \cdot c$

$h^2 = p \cdot q$

Demostración: Hay tres triángulos rectos que comparten sus ángulos internos, por lo tanto, son semejantes entre ellos:

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(CBD) \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{p}$$

Así

$$a^2 = p \cdot c \quad \square$$

Por otro lado

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(ACD) \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{q}$$

$$b^2 = q \cdot c \quad \square$$

Finalmente

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(ACD) \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{h} = \frac{b}{q}$$

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(CBD) \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{h}$$

En conclusión

$$h^2 = (h) \cdot (h) = \left(\frac{p \cdot b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a \cdot q}{b}\right) = p \cdot q \quad \square$$