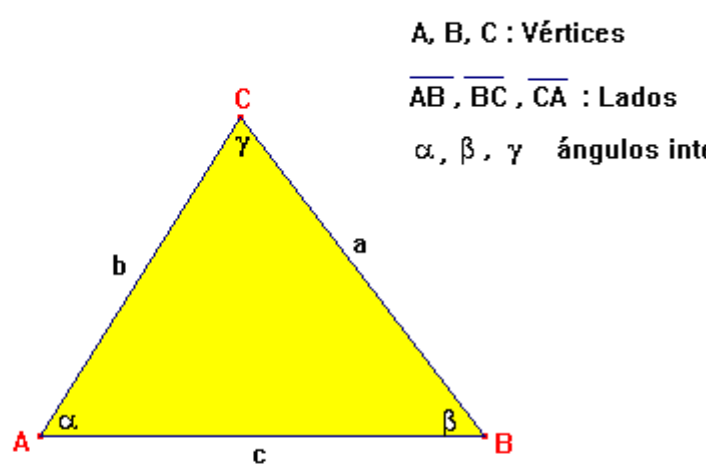
DEFINICIÓN

Un triángulo lo podemos entender como la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales. Estos tres puntos se denominan **vértices**, y los segmentos, **lados** del triángulo; además, se determinan tres ángulos, cuyos lados son los lados del triángulo, y se denominan **ángulos interiores** del triángulo

Se acostumbra usar letras minúsculas para los lados, de acuerdo al vértice al que se oponen.



Teorema fundamental: "En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180°"

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

DEFINICIÓN

Ángulo Exterior

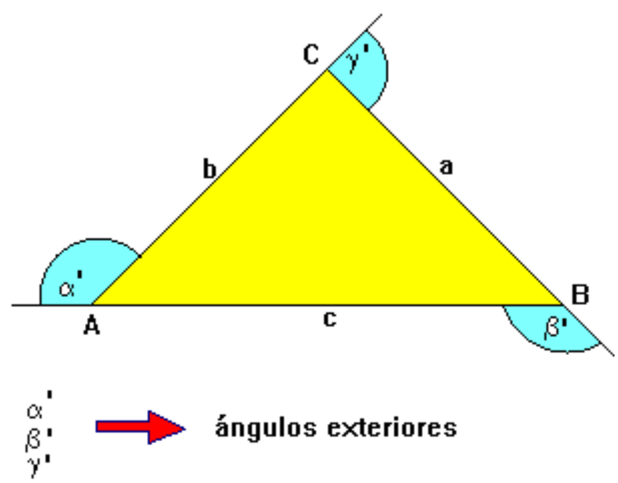
Se llama ángulo exterior de un triángulo, al ángulo formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.

$\alpha';\beta';\gamma'$ ángulos exteriores

Propiedades

(1) La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

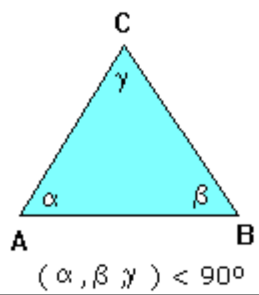
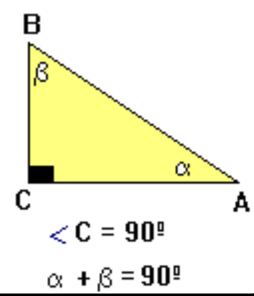
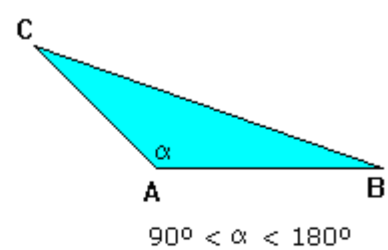


(2) La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°

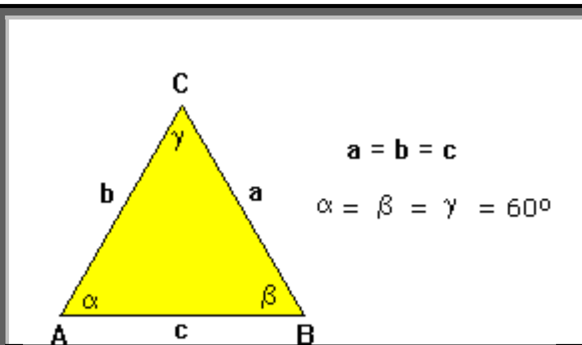
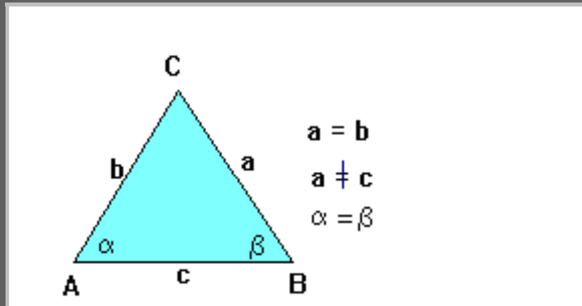
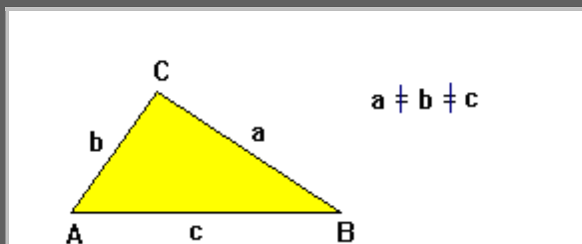
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

- *Clasificación de los triángulos*

Los triángulos los podemos clasificar según la medida de sus lados y de sus ángulos

Según la medida de sus ángulos	
Acutángulo: es aquel que tiene sus tres ángulos interiores agudos	
Rectángulo: es aquel que tiene un ángulo recto. Los otros dos ángulos interiores son agudos y complementarios. Los lados que forman el ángulo recto se denominan "catetos" y el lado opuesto al ángulo recto "hipotenusa"	
Obtusángulo: es aquel que tiene un ángulo interior obtuso	

Según la medida de sus lados

Equilátero: tiene sus tres lados congruentes; por lo tanto, sus tres ángulos interiores también lo son, y como la suma de sus medidas es 180°, cada uno mide 60°	
Isósceles: es aquel que tiene dos lados congruentes, llamados "lados", y el tercero se llama "base" Se puede demostrar que los ángulos opuestos a los "lados" son también congruentes. A estos ángulos se les llama "ángulos basales"	
Escaleno: es aquel cuyos tres lados tienen distinta medida, y por ende, sus ángulos también	

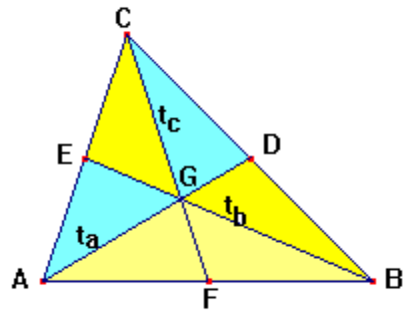
ELEMENTOS DEL TRIÁNGULO

Se denominan "**Elementos Primarios**" del triángulo a sus lados y ángulos. Los "Elementos secundarios" del triángulo son los llamados "Puntos Notables" y "Rectas notables"

- Rectas Notables: Se llaman así a las transversales de gravedad, alturas, bisectrices, simetrales y medianas.
- Puntos notables: Son los puntos que surgen de la intersección de un mismo tipo de rectas notables, ellos son: el centro de gravedad (Baricentro), el ortocentro, el incentro y el circuncentro.

DEFINICIÓN

1. **Transversal de gravedad**.-
Es la recta que une un vértice, con el punto medio del lado opuesto. Se denominan t_a, t_b, t_c, donde el subíndice indica el vértice por el cual pasa. Las tres transversales de gravedad se intersectan en un mismo punto llamado Centro de Gravedad (o baricentro)



D,E, F : Puntos medios de los lados

$\overline{AD} = t_a$; $\overline{BE} = t_b$; $\overline{CF} = t_c$

$t_a \cap t_b \cap t_c = \{G\}$

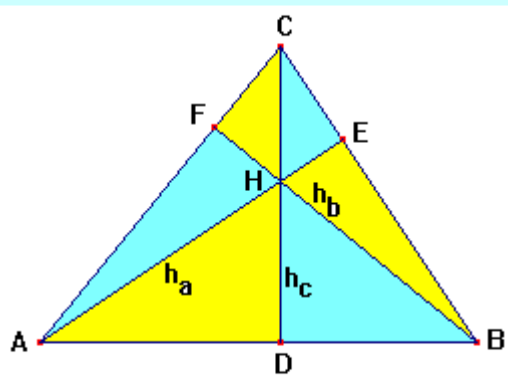
G : Centro de Gravedad (o Baricentro)

$$\Rightarrow \quad \frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

Propiedad: El baricentro divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos que están en la razón 2: 1. El segmento que va desde el vértice al Baricentro mide el doble que el segmento que va del Baricentro al lado

DEFINICIÓN

2.- **Altura**.
Es la perpendicular bajada desde un vértice al lado opuesto. Se denominan ha , hb , hc ; donde el subíndice indica el vértice por el cual pasa. Las tres alturas se intersectan en un mismo punto llamado Ortocentro.



$\overline{AE} \perp \overline{BC}$; $\overline{BF} \perp \overline{AC}$; $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\overline{AE} = h_a$; $\overline{BF} = h_b$; $\overline{CD} = h_c$

$h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$

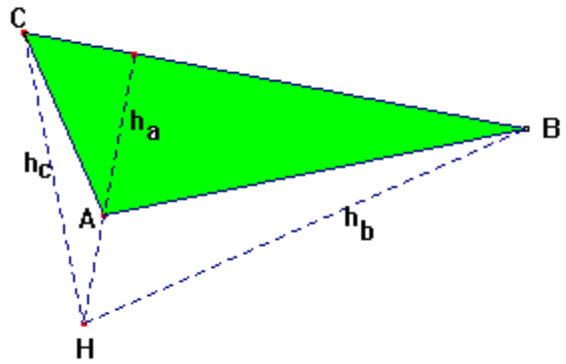
H : Ortocentro

Propiedad: Las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a los lados

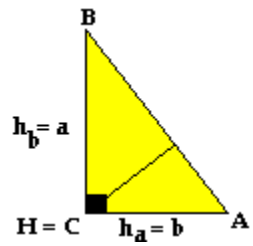
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = k$$

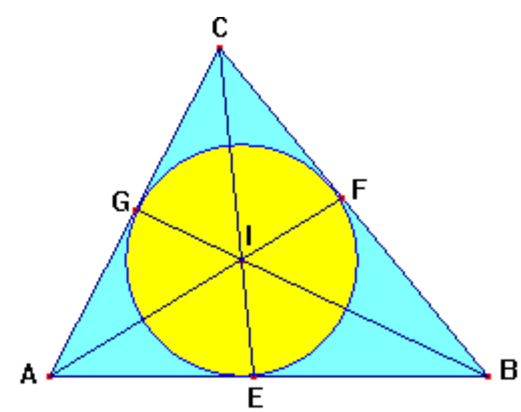
Observaciones:

∗ En un triángulo obtusángulo el ortocentro queda en el exterior del triángulo



∗ En un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto, puesto que los catetos se confunden con las alturas.



DEFINICIÓN	
3.- **Bisectriz**.- Es la recta que pasa por un vértice y divide al ángulo en dos ángulos congruentes. Se denominan: b_α ; b_β ; b_γ ; donde el subíndice indica el ángulo que dimidia. Las tres bisectrices se intersectan en un mismo punto llamado Incentro, el cual corresponde al centro de la circunferencia inscrita al triángulo, es decir, el incentro equidista de los lados del triángulo. El radio de esta circunferencia se designa por la letra griega "ρ". $\overline{AF} = b\alpha$; $\overline{BG} = b_\beta$; $\overline{CE} = b\gamma$ $b_\alpha \cap b_\beta \cap b_\gamma = \{I\}$ I: Incentro P, Q, R : Puntos de tangencia	 $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$; $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{CG}{GA} = \frac{BC}{BA}$ **Propiedad**: Las bisectrices dividen al lado opuesto en la razón de las medidas de los lados que forman el ángulo

Observaciones:

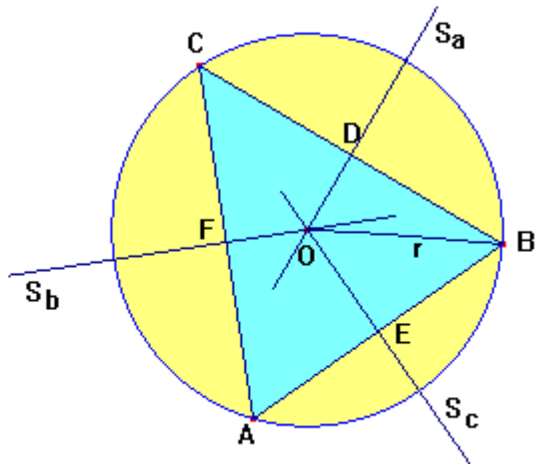
∗ En general, los puntos de tangencia de los lados con la circunferencia inscrita al triángulo no coinciden con los pies de las bisectrices

∗ Si se dibujan las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo, se determinan tres puntos que equidistan de los lados del triángulo. Dichos puntos son los "Excentros" o centros de las circunferencias exinscritas al triángulo.

DEFINICIÓN

4.- **Simetral**

Es la recta perpendicular a un lado del triángulo, en su punto medio. Las simetrales se designan por: S_a , S_b , S_c , donde el subíndice indica el lado al cual es perpendicular.
El punto de intersección de las simetrales se denomina Circuncentro y corresponde al centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, es decir, el circuncentro es un punto que equidista de los tres vértices del triángulo. Su radio se designa por "r"



$\overline{OD} = S_a$; $\overline{OF} = S_b$; $\overline{OE} = S_c$

$S_a \cap S_b \cap S_c = \{O\}$

O: Circuncentro

Observación: En general, las simetrales no pasan por los vértices del triángulo.

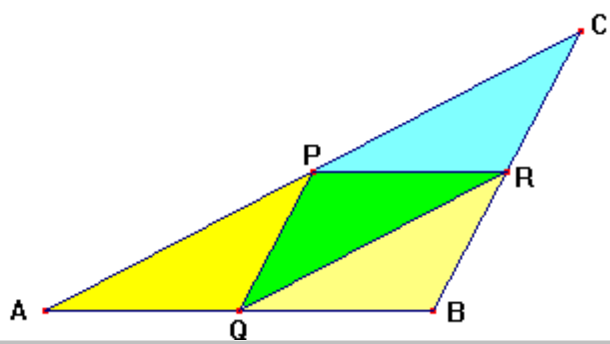
DEFINICIÓN

5.- **Mediana**

Es el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados del triángulo

P, Q, R : Puntos medios de los lados

$\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$: Medianas



Propiedades:

- La mediana es paralela al tercer lado:

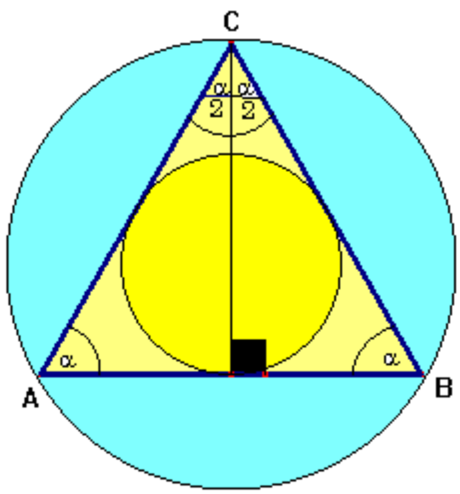
$\overline{RP} // \overline{AB}$; $\overline{QR} // \overline{AC}$; $\overline{PQ} // \overline{BC}$

- La mediana mide la mitad del lado al cual es paralela:
  $\overline{AB} = 2\overline{PR}$; $\overline{BC} = 2\overline{PQ}$; $\overline{AC} = 2\overline{QR}$
- Cuando se dibujan las tres medianas de un triángulo, se forman cuatro triángulos congruentes

Nota: En general, las cuatro primeras rectas notables no coinciden, excepto en los triángulos equiláteros e isósceles.

Observación: **TRIÁNGULO EQUILÁTERO**

PROPIEDADES



(1) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$

(2) ángulos iguales a 60° cada uno,

$\alpha = 60°$

(3) Las transversales de gravedad, alturas y bisectrices son una misma recta

$t_a = t_b = t_c = h_a = h_b = h_c = b_\alpha = b_\beta = b_\gamma$

(4) $\overline{AM} = \overline{MB}$ M; punto medio

(5) $\text{Altura} = \frac{\text{lado}\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

(6) $\text{Área} = \frac{(\text{lado})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

(7) Radio de la circunferencia inscrita

$$= \frac{\text{lado}\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(8) Radio de la circunferencia circunscrita

$$= \frac{\text{lado}\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

TRIÁNGULO ISÓSCELES

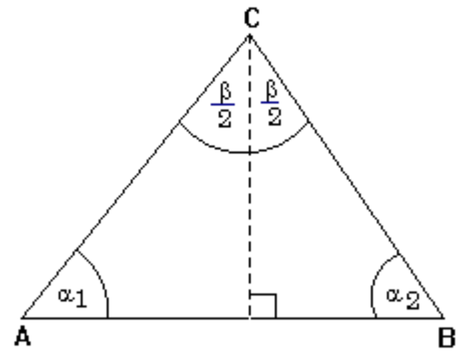
PROPIEDADES

(1) $\overline{AC} = \overline{BC}$; $\overline{AB}$ base

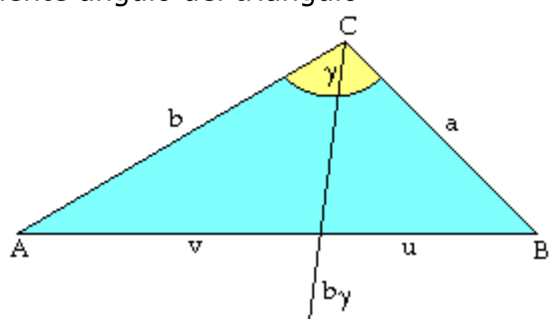
(2) $\alpha_1 = \alpha_2$ ángulos basales

(3) β ángulo del vértice

(4) La altura, bisectriz, simetral y transversal trazadas desde el vértice del ángulo distinto o trazadas a la base son una misma recta. Para los otros vértices y lados no ocurre lo Mismo $h_c = t_c = b_\beta = \overline{CM}$

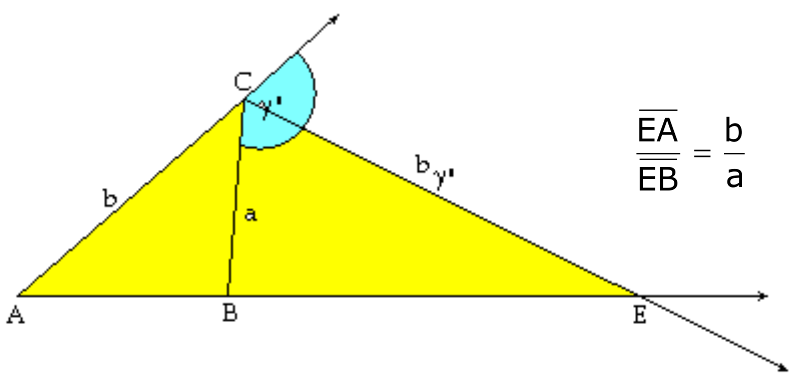


La bisectriz de un ángulo interior del triángulo divide interiormente el lado opuesto en dos segmentos, cuyas medidas son proporcionales a las de los lados del correspondiente ángulo del triángulo



$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} \text{ o bien } \frac{v}{u} = \frac{b}{a}$$

La **bisectriz de un ángulo exterior** divide exteriormente el lado opuesto en dos segmentos, cuyas medidas son proporcionales a las de los lados del correspondiente ángulo interior del triángulo.

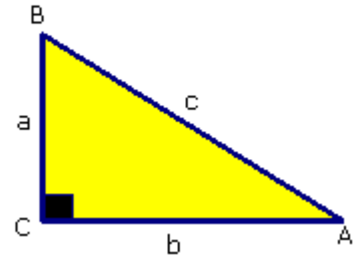


$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{b}{a}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

"El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos"

"En todo triángulo ABC rectángulo en C se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir $a^2 + b^2 = c^2$"



RECÍPROCO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

"Sea un triángulo ABC cualquiera, con lados menores a y b y lado mayor c, tales que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo"

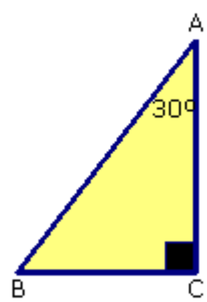
· **Tríos pitagóricos: (a – b – c)**

a	b	c
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37

TEOREMAS RELATIVOS AL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Teorema:
"Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 30º, entonces el lado opuesto a dicho ángulo es igual a la mitad de la medida de la hipotenusa"

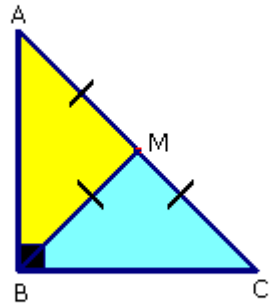
Tesis: $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$



Teorema:

"En un triángulo rectángulo la medida de la transversal de gravedad correspondiente a la hipotenusa, es igual a la mitad de la medida de dicha hipotenusa"

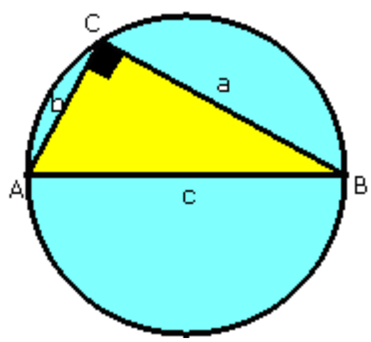
Tesis: $\overline{BM} = \frac{\overline{AC}}{2}$



Corolario:
"En un triángulo rectángulo, el **circuncentro** coincide con el punto medio de la hipotenusa"
Nota: Un triángulo rectángulo queda determinado por solo dos datos: la medida de un lado y la de uno de sus ángulos agudos o la medida de dos lados. El otro dato es propio de su condición de triángulo rectángulo (ángulo de 90º)

CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

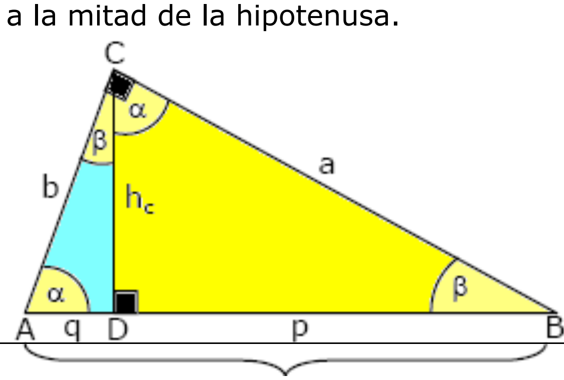
Sabemos que la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que abarcan sus lados. Por esta razón, si el triángulo es rectángulo, el arco que abarcan los dos catetos es de 180º



Por tanto, se cumplirá:
a. La hipotenusa es el diámetro de la circunferencia.
b. El triángulo rectángulo de mayor área cuya hipotenusa mide c es el isósceles de base c.
c. La mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la hipotenusa.

TEOREMAS DE EUCLIDES

El triángulo de la figura es rectángulo en C y CD es altura.



a y **b**: catetos
c: hipotenusa
p y **q**: proyecciones de los catetos **a** y **b**, respectivamente.
Los triángulos ACB, ADC y CDB son semejantes.

Referente a la altura: En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

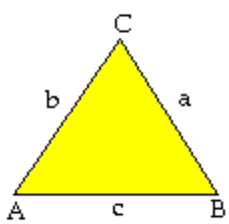
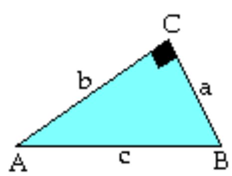
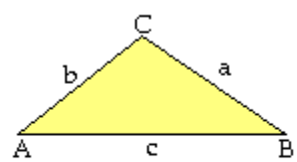
$$\boxed{h_c^2 = p \bullet q}$$

Referente a los catetos: En todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional
Geométrica entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

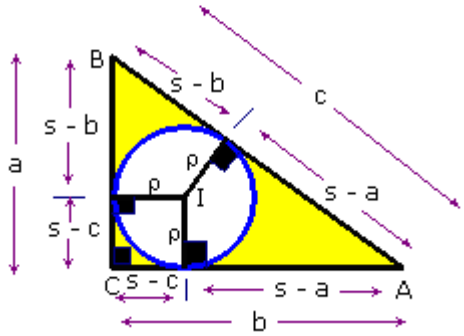
$$\boxed{a^2 = p \bullet c} \qquad \boxed{b^2 = q \bullet c}$$

$$\boxed{h_c = \frac{a \bullet b}{c}}$$

Clasificación angular de un triángulo conocidas las medidas de sus lados

ACUTÁNGULO	RECTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
		
$c^2 < a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 > a^2 + b^2$

OBSERVACIÓN:
"En todo triángulo rectángulo, el radio de la circunferencia inscrita en él, es igual al cociente entre el producto de los catetos y el perímetro del triángulo"

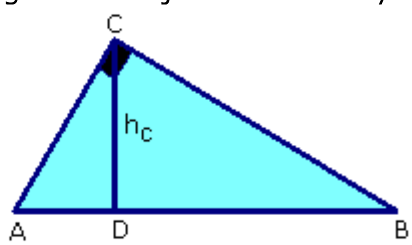


$$\rho = \frac{a \cdot b}{a + b + c}$$

$$s = \frac{a + b + c}{2}; \quad s : \text{semiperímetro}$$

PROPIEDAD DE LA ALTURA CORRESPONDIENTE A LA HIPOTENUSA

En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa determina dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo inicial



EJEMPLO PSU-1: En el triángulo ABC rectángulo en C, $\overline{BC} =$ 5 cm y $\overline{BD} =$ 4 cm. La medida del segmento $\overline{AD}$ es:

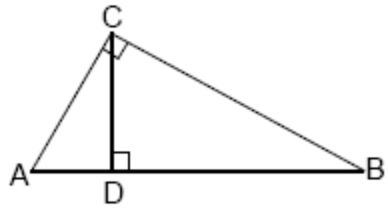
A) $\frac{3}{2}$ cm

B) $\frac{9}{4}$ cm

C) $\frac{3}{4}$ cm

D) 4 cm

E) 9 cm

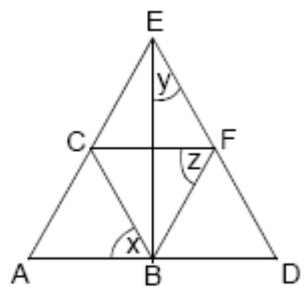


EJEMPLO PSU-2: En la figura, si ABC y BDF son triángulos equiláteros y BFEC es un rombo, entonces ¿cuál(es) de las expresiones siguientes es(son) verdadera(s) ?

I) $x = z$

II) $x + y = EBD$

III) $x + y - z = 60°$



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

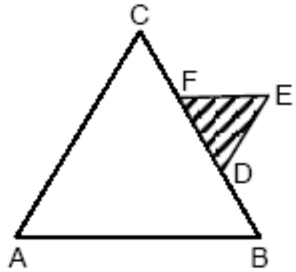
EJEMPLO PSU-3: Si en un triángulo equilátero se dibuja una de sus alturas, entonces se forman dos triángulos

A) isósceles rectángulos congruentes.
B) acutángulos escalenos congruentes.
C) acutángulos congruentes.
D) escalenos rectángulos congruentes.
E) equiláteros congruentes.

EJEMPLO PSU-4: Si sobre el tercio central de uno de los lados del triángulo equilátero ABC se construye otro triángulo equilátero, como se muestra en la figura, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

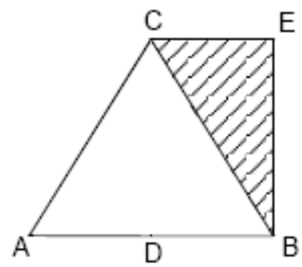
I) El área del Δ DEF es la sexta parte del área del ΔABC.
II) El lado $\overline{FE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$.
III) El lado $\overline{FE}$ es perpendicular al lado $\overline{AC}$.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III



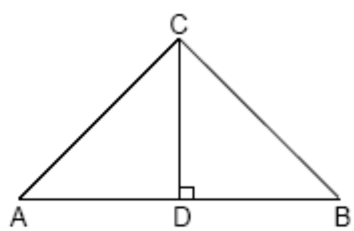
EJEMPLO PSU-5: En la figura, ABC es un triángulo equilátero de 18 cm de perímetro y DBEC es un rectángulo. El área de la región achurada es:

A) $9\ cm^2$
B) $9\sqrt{3}\ cm^2$
C) $9\sqrt{5}\ cm^2$
D) $\frac{9}{2}\sqrt{5}\ cm^2$
E) $\frac{9}{2}\sqrt{3}\ cm^2$

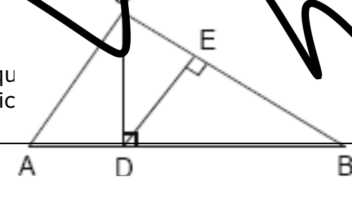


EJEMPLO PSU-6: En la figura, si el Δ ABC es rectángulo en C y $\overline{AC} = \overline{BC} = 2\sqrt{6}$, entonces $\overline{CD}$ es

A) $2\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{6}$
C) 3
D) 6
E) 12



EJEMPLO PSU-7: Si en el triángulo ABC de la figura, $\overline{CE} = 3$ cm y $\overline{BE} = 12$ cm, entonces la medida de $\overline{CD}$ es:



A) 6 cm
B) $3\sqrt{5}$ cm
C) $3\sqrt{2}$ cm
D) 9 cm
E) Indeterminable con los datos dados

EJEMPLO PSU-8: ¿Qué pasa con el área de un triángulo si su altura se divide por dos y se mantiene su base?

A) Se reduce en media unidad cuadrada
B) Se reduce a la mitad
C) Se reduce a la cuarta parte
D) Se reduce en un cuarto de unidad cuadrada
E) Falta información para decir que ocurre con el

EJEMPLO PSU-9: En la figura, el D ABC es rectángulo en C. D y E son puntos que dividen a $\overline{BC}$ en tres segmentos iguales. Si $\overline{B'C'} // \overline{BC}$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{AC'} = 4$ y $\overline{B'C'} = 3$, entonces $\dfrac{\text{área } \Delta AB'D'}{\text{área} \Delta ACE}$

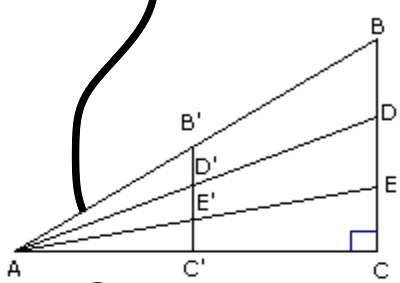
A) $\dfrac{1}{18}$

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{1}{4}$

D) $\dfrac{1}{6}$

E) $\dfrac{1}{9}$

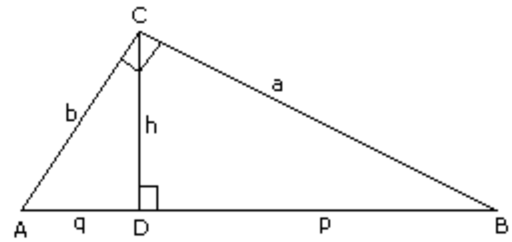


EJEMPLO PSU-10: En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en C. Si $\dfrac{p}{q} = \dfrac{4}{1}$ y p + q = 10, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)

I) $a + b = 6\sqrt{5}$
II) $h = 4$

III) El área del triángulo ABC = 20

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

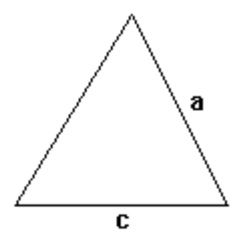


EJEMPLO PSU-11: Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles aumenta su largo en un 20% y el otro disminuye en el mismo porcentaje, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para el área del triángulo rectángulo resultante, respecto del área original?

A) Se mantiene igual
B) Aumenta en un 4%
C) Disminuye en un 4%
D) Aumenta al doble
E) Disminuye a la mitad

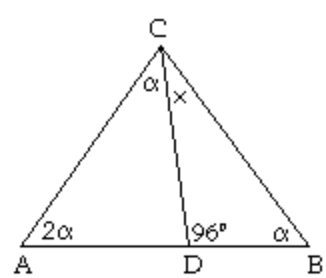
EJEMPLO PSU-12: El perímetro del triángulo isósceles de la figura es **2s**. Si uno de sus lados iguales mide **a**, entonces la base **c** mide:

A) $\frac{s-a}{2}$
B) $\frac{2s-a}{2}$
C) $s-a$
D) $2s-a$
E) $2(s-a)$



EJEMPLO PSU-13: ¿Cuánto mide el ángulo x en el triángulo ABC de la figura?

A) 32º
B) 39º
C) 45º
D) 52º
E) No se puede determinar, faltan datos

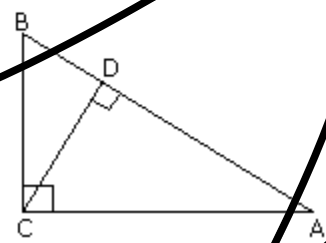


EJEMPLO PSU-14: El triángulo ABC es rectángulo en C. $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ = 9 y $\overline{DB}$ = 4 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\overline{CD} = \sqrt{6}$

II) $\overline{AC} = \sqrt{117}$

III) $\overline{BC} = \sqrt{52}$



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

EJEMPLO PSU-15: Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 0,25 cm y $\frac{1}{3}$ cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Su hipotenusa es igual a $\frac{5}{3}$ del cateto menor.

II) El área del triángulo es $\frac{5}{12}$ cm^2

III) Su perímetro es igual a 1 cm.

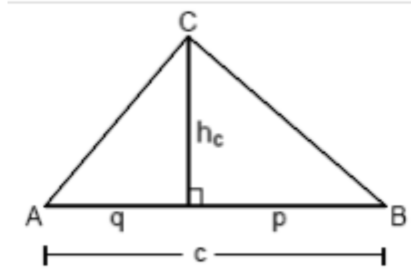
A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

EJEMPLO PSU-16: En la figura, el Δ ABC es rectángulo en C y $h_c = \frac{c}{2}$.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $(p + q)^2 = 4pq$

II) $q = \frac{p}{2}$ ó $p = \frac{q}{2}$

III) El Δ ABC es isósceles.



A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo I y II

D) Sólo I y III
E) I, II y III

EJEMPLO PSU-17. En un triángulo rectángulo de catetos 3 y 6 cm, ¿Cuál es la razón entre las longitudes de las proyecciones de las alturas correspondientes de los catetos?

A) $1:2$
B) $1:4$
C) $3:\sqrt{45}$
D) $1:6$
E) No se puede determinar

EJEMPLO PSU-18. Las medidas de los lados de un triángulo son a, b y c, donde c es el lado mayor. Para que el triángulo sea rectángulo debe ocurrir que

A) $a = b$ y $c = 2a$
B) $c = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
C) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$
D) $(a + b)^2 = c^2$
E) $c = \sqrt{a + b}$

XIII. CONGRUENCIA DE TRIANGULOS:

DEFINICIÓN
Dos triángulos son congruentes si y sólo si existe una correspondencia entre sus vértices, de modo que **cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes.**