

# HOMOTECIA Y SEMEJANZA

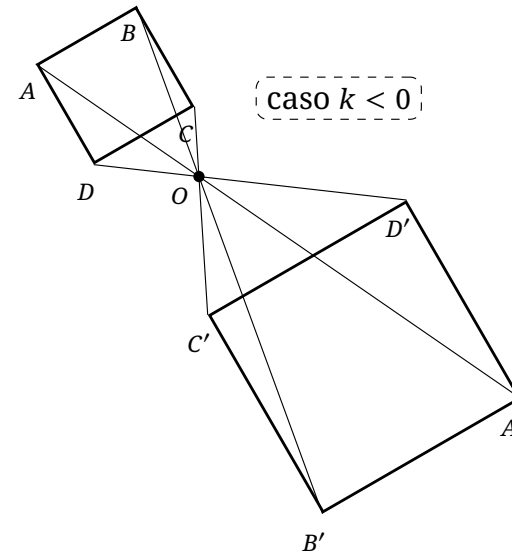
## Unidad de geometría

**POR** Prof. Fernando Halabi (fhalabi@cdplf.cl)

**PARA** Colegio Divina Pastora

24/09/2022

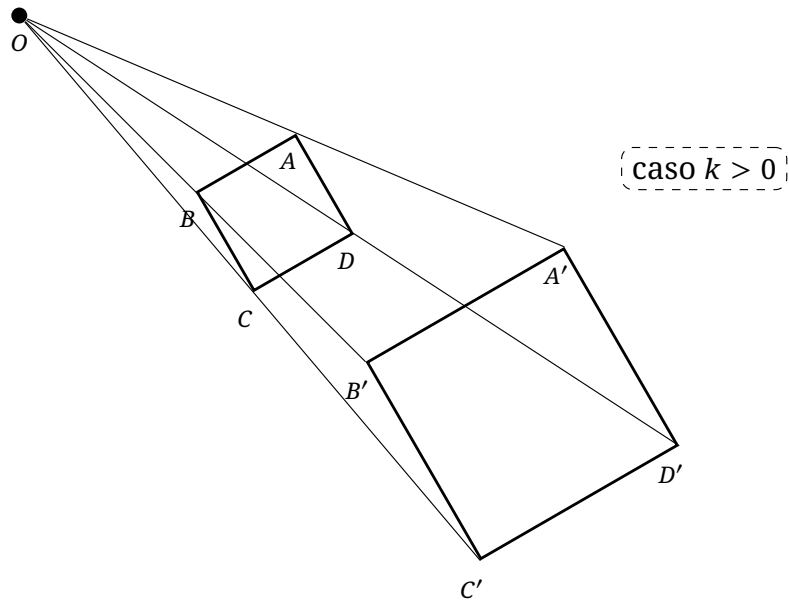
## Homotecia



caso  $k < 0$

Se cumple que:

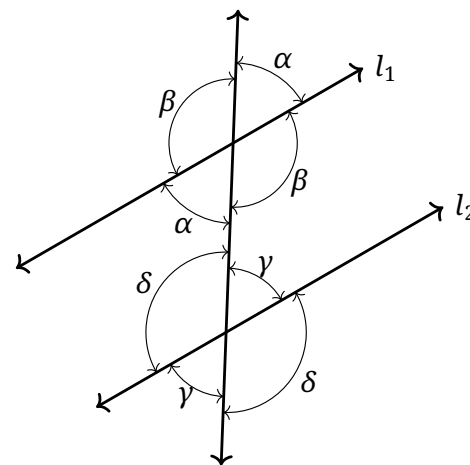
- $\overline{OA} \cdot k = \overline{OA'}$
- $\overline{OB} \cdot k = \overline{OB'}$
- $\overline{OC} \cdot k = \overline{OC'}$
- $\overline{OD} \cdot k = \overline{OD'}$
- $\overline{AB} \cdot k = \overline{A'B'}$
- $\overline{BC} \cdot k = \overline{B'C'}$
- $\overline{CD} \cdot k = \overline{C'D'}$
- $\overline{DA} \cdot k = \overline{D'A'}$



caso  $k > 0$



## Rectas y ángulos



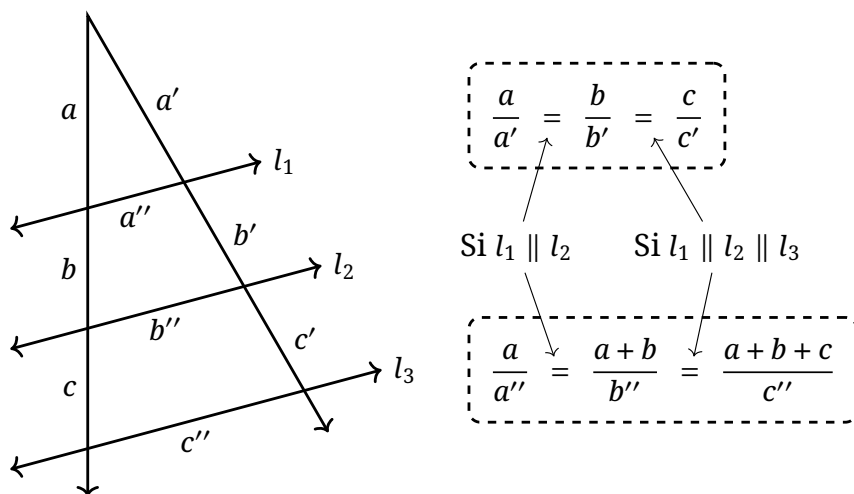
- $\alpha + \beta = 180^\circ$
- $\gamma + \delta = 180^\circ$

Si  $l_1 \parallel l_2$ , entonces:

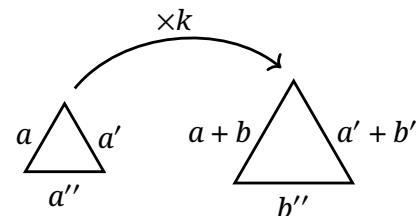
- $\alpha = \gamma$
- $\beta = \delta$



## Teorema de Tales

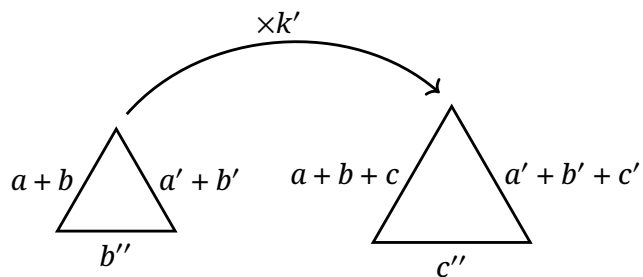


**Demostración:** Si  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ , los triángulos involucrados comparten sus ángulos y son homotéticos.



Así,

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot k = a+b \\ a' \cdot k = a' + b' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+b}{a' + b'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

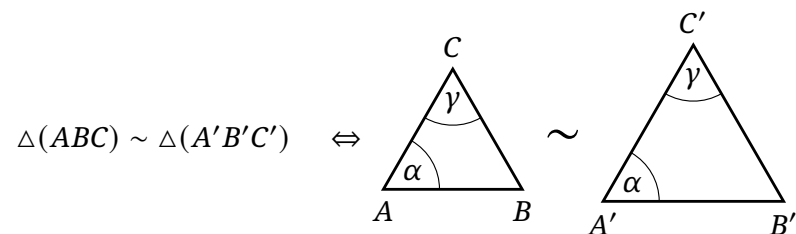


Por lo tanto,

$$\left. \begin{array}{l} (a+b) \cdot k' = a+b+c \\ (a'+b') \cdot k' = a' + b' + c' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+b}{a' + b'} = \frac{c}{c'} \quad \square$$

## Semejanza

Si dos figuras tienen la misma forma (ángulos), se dicen semejantes (proporcionales). Se denota como:

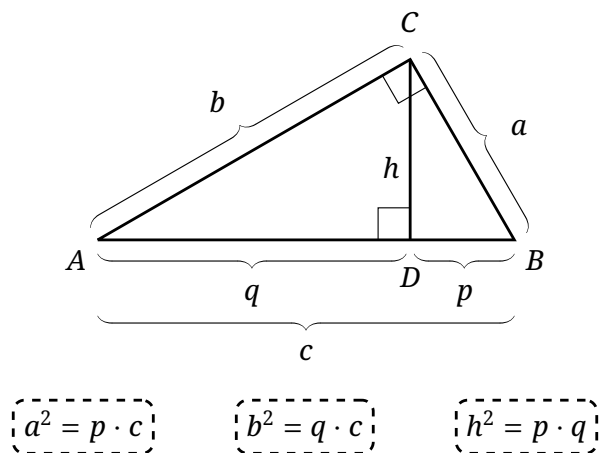


Para triángulos semejantes se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

## Teorema de Euclides

Para triángulos rectángulos con altura en la hipotenusa, se cumple que:



**Demostración:** Hay tres triángulos rectos que comparten sus ángulos internos, por lo tanto, son semejantes entre ellos:

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(CBD) \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{p}$$

Así

$$a^2 = p \cdot c \quad \square$$

Por otro lado

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(ACD) \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{q}$$

$$b^2 = q \cdot c \quad \square$$

Finalmente

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(ACD) \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{b}{q}$$

$$\triangle(ABC) \sim \triangle(CBD) \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{h}$$

En conclusión

$$h^2 = (h) \cdot (h) = \left( \frac{p \cdot b}{a} \right) \cdot \left( \frac{a \cdot q}{b} \right) = p \cdot q \quad \square$$