

## GUÍA - Elementos secundarios del triángulo

NOMBRE

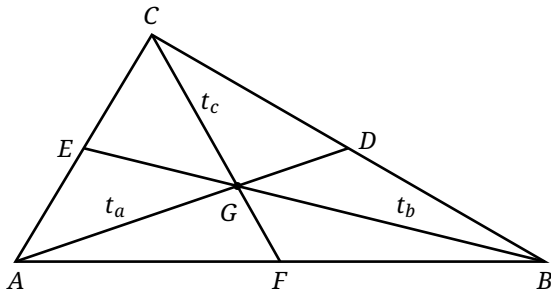
CURSO

FECHA

PROFESOR

### Transversal de gravedad

Es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Se denominan  $t_a$ ,  $t_b$  y  $t_c$ ; donde el subíndice indica el vértice por el cual pasa. Las tres transversales de gravedad se interceptan en un mismo punto llamado Centro de Gravedad (o Baricentro).



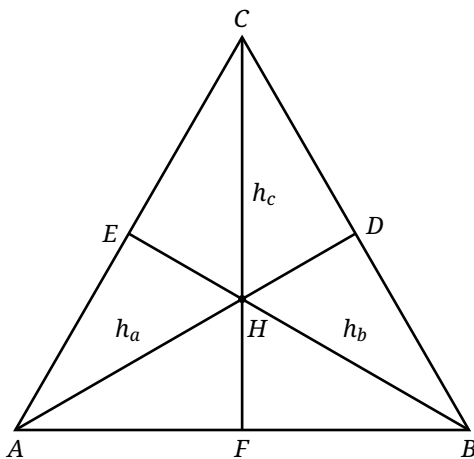
- D, E, F: Puntos medios de los lados.
- $\overline{AD} = t_a$ ;  $\overline{BE} = t_b$ ;  $\overline{CF} = t_c$ .
- $t_a \cap t_b \cap t_c = \{G\}$ .
- G: Centro de Gravedad (o Baricentro).

### Propiedad

El Baricentro divide cada transversal de gravedad en dos segmentos que están en la razón 2:1. El segmento que va desde el vértice al Baricentro mide el doble que el segmento va desde el Baricentro al lado.

### Altura

Es la perpendicular bajada desde un vértice al lado opuesto. Se denomina  $h_a$ ,  $h_b$ , y  $h_c$ ; donde el subíndice indica el vértice por el cual pasa. Las tres alturas se interceptan en un mismo punto llamado Ortocentro.



- $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ;  $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ ;  $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ .
- $\overline{AD} = h_a$ ;  $\overline{BE} = h_b$ ;  $\overline{CF} = h_c$ .
- $h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$ .
- H: Ortocentro.

---

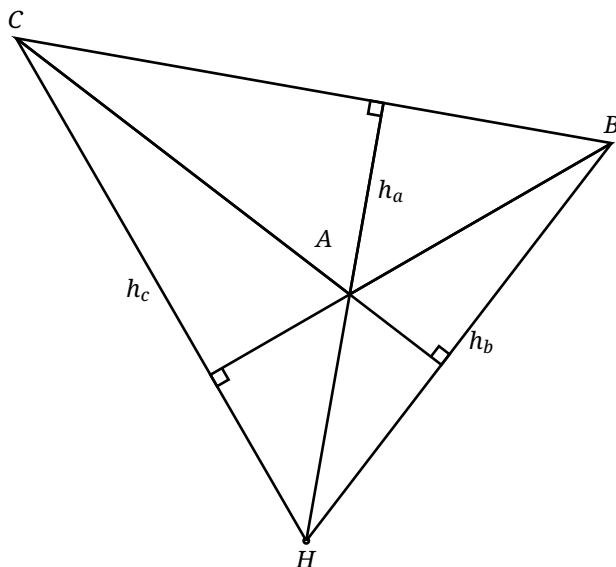
## Propiedad

Las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a los lados. Es decir,

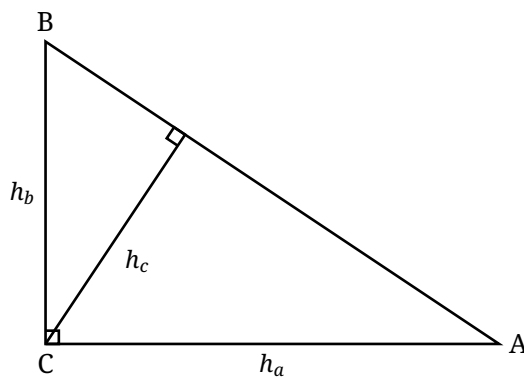
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = k .$$

## Observaciones

- En un triángulo obtusángulo, el ortocentro queda en el exterior del triángulo.

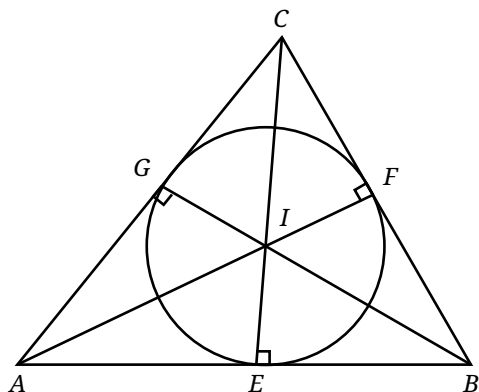


- En un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto, puesto que los catetos se confunden con las alturas.



## Bisectriz

Es la recta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos partes iguales. Se denominan  $b_a$ ,  $b_b$  y  $b_c$ ; donde el subíndice indica el ángulo que divide. Las tres Bisectrices se interceptan en un mismo punto llamado Incentro, el cual corresponde al centro de la circunferencia inscrita al triángulo, es decir, el incentro equidista de los lados del triángulo.



- $\overline{AF} = b_a$ ;  $\overline{BG} = b_b$ ;  $\overline{CE} = b_c$ .
- $b_a \cap b_b \cap b_c = \{I\}$ .
- $I$ : Incentro.
- $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ ;  $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BC}}$ ;  $\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}}$ ;

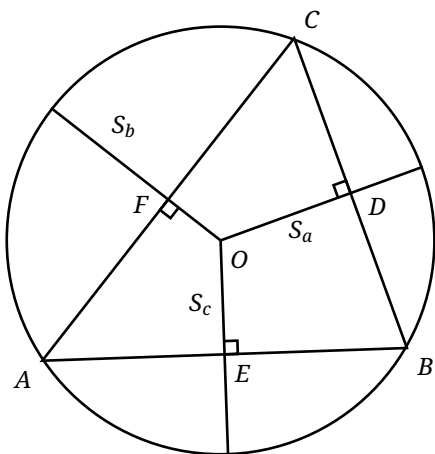
## Observación

En general, los puntos de tangencia de los lados con la circunferencia inscrita al triángulo no coinciden con los pies de las Bisectrices.

## Simetral

Es una recta perpendicular al lado del triángulo que pasa por su punto medio. Las simetrales se designan por:  $s_a$ ,  $s_b$  y  $s_c$ ; donde el subíndice indica el lado al cual es perpendicular.

El punto de intersección se denomina Circuncentro y corresponde al centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, es decir, el circuncentro es un punto que equidista de los tres vértices del triángulo.



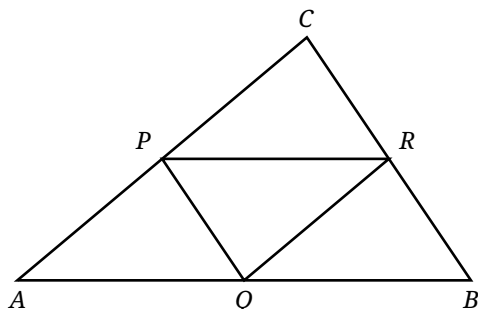
- $\overline{OD} = s_a$ ;  $\overline{OF} = s_b$ ;  $\overline{OE} = s_c$ .
- $s_a \cap s_b \cap s_c = \{O\}$ .
- $O$ : Circuncentro.

## Observación

En general, las simetrales no pasan por los vértices del triángulo.

## Mediana

Es el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados del triángulo.



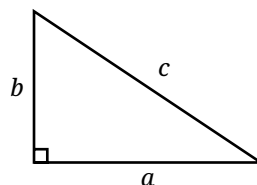
- $P, Q, R$ : Puntos medios de los lados.
- $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$ : Medianas

## Propiedades

- La mediana es paralela al tercer lado:  $\overline{RP} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$  y  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ .
- La mediana mide la mitad del lado al cual es paralela:  $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{PR}$ ,  $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{PQ}$  y  $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{QR}$ .
- Cuando se dibujan las tres medianas de un triángulo, se forman cuatro triángulos congruentes.

## Teorema de Pitágoras

“ En todo triángulo  $ABC$  rectángulo en  $C$ , se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir,  $a^2 + b^2 = c^2$  .”



## Recíproco del Teorema de Pitágoras

“ Sea un triángulo  $ABC$  cualquiera, con lados menores  $a$  y  $b$  y lado mayor  $c$ , tales que  $c^2 = a^2 + b^2$ , entonces el triángulo  $ABC$  es un triángulo rectángulo. ”

Tríos Pitagóricos

$a$	3	5	8	7	20	12
$b$	4	12	15	24	21	35
$c$	5	13	17	25	29	37

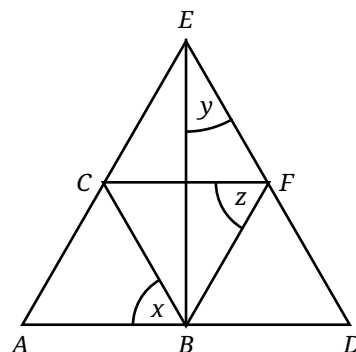
## Ejercicios

1. En el triángulo  $ABC$  rectángulo en  $C$ ,  $\overline{BC} = 5$  [cm] y  $\overline{BD} = 4$  [cm]. La medida de la altura  $h_c$  es:

- (a)  $\frac{3}{2}$  [cm]    (b)  $\frac{9}{4}$  [cm]    (c)  $\frac{3}{4}$  [cm]    (d) 4 [cm]    (e) 9 [cm]

2. En la figura, si  $ABC$  y  $BDF$  son triángulos equiláteros y  $BFEC$  es un rombo, entonces ¿Cuál(es) de las expresiones siguientes es(son) verdadera(s)?

- (I)  $x = z$   
 (II)  $x + y = \angle EBD$   
 (III)  $x + y - z = 60^\circ$



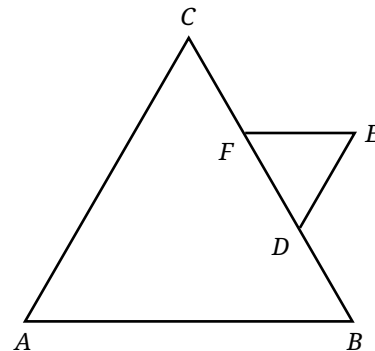
- (a) Solo I    (b) Solo II    (c) Solo III    (d) Solo I y II    (e) I, II y III

3. Si en un triángulo equilátero se dibuja una de sus alturas, entonces se forman dos triángulos

- (a) Isósceles rectángulos congruentes.  
 (b) Acutángulos escalenos congruentes.  
 (c) Acutángulos congruentes.  
 (d) Escalenos rectángulos congruentes.  
 (e) Equiláteros congruentes.

4. Si sobre el tercio central de uno de los lados del triángulo equilátero  $ABC$  se construye otro triángulo equilátero, como se muestra en la figura, ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

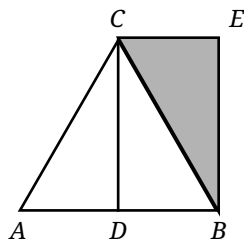
- (I) El área del  $\triangle DEF$  es la sexta parte del área del  $\triangle ABC$ .  
 (II) El lado  $\overline{FE}$  es paralelo al lado  $\overline{AB}$ .  
 (III) El lado  $\overline{FE}$  es perpendicular al lado  $\overline{AC}$ .



- (a) Solo I    (b) Solo II    (c) Solo I y II    (d) Solo I y III    (e) Solo II y III

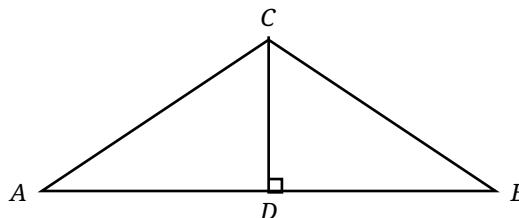
5. En la figura,  $ABC$  es un triángulo equilátero de 18 cm de perímetro y  $DBEC$  es un rectángulo. El área de la región sombreada es:

- (a) 9 [cm<sup>2</sup>]  
 (b)  $9\sqrt{3}$  [cm<sup>2</sup>]  
 (c)  $9\sqrt{5}$  [cm<sup>2</sup>]  
 (d)  $\frac{9}{2}\sqrt{5}$  [cm<sup>2</sup>]  
 (e)  $\frac{9}{2}\sqrt{3}$  [cm<sup>2</sup>]



6. En la figura, si el  $\triangle ABC$  es rectángulo en  $C$  y  $\overline{AC} = \overline{BC} = 2\sqrt{6}$  [cm], entonces  $\overline{CD}$  mide:

- (a)  $2\sqrt{3}$  [cm]
- (b)  $2\sqrt{6}$  [cm]
- (c) 3 [cm]
- (d) 6 [cm]
- (e) 12 [cm]

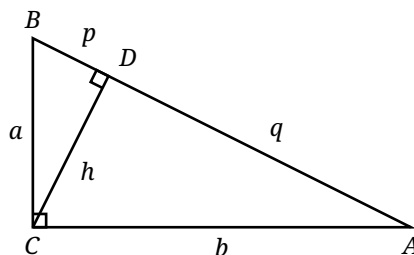


7. ¿Qué pasa con el área de un triángulo si su altura se divide por dos y se mantiene su base?

- (a) Se reduce en media unidad cuadrada
- (b) Se reduce a la mitad
- (c) Se reduce a la cuarta parte
- (d) Se reduce en un cuarto de unidad cuadrada
- (e) Falta información para decir que ocurre con el área

8. En la figura, el triángulo  $ABC$  es rectángulo en  $C$ . Si  $p : q = 4 : 1$  y  $p + q = 10$ , entonces ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- (I)  $a + b = 6\sqrt{5}$
- (II)  $h = 4$
- (III) Área( $\triangle ABC$ ) = 20



- (a) Solo I
- (b) Solo II
- (c) Solo III
- (d) Solo II y III
- (e) I, II y III

9. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles aumenta su largo en un 20% y el otro disminuye en el mismo porcentaje, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para el área del triángulo rectángulo resultante, respecto del área original?

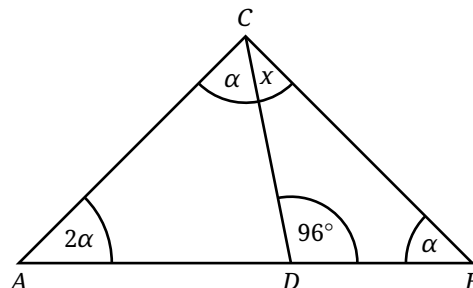
- (a) Se mantiene igual
- (b) Aumenta en un 4%
- (c) Disminuye en un 4%
- (d) Aumenta al doble
- (e) Disminuye a la mitad

10. El perímetro de un triángulo isósceles es  $2s$ . Si uno de los lados iguales mide  $a$ , entonces la base mide:

- (a)  $(s - a)/2$
- (b)  $(2s - a)/2$
- (c)  $s - a$
- (d)  $2s - a$
- (e)  $2(s - a)$

11. ¿Cuánto mide el ángulo  $x$  en el triángulo  $ABC$  de la figura?

- (a)  $32^\circ$
- (b)  $39^\circ$
- (c)  $45^\circ$
- (d)  $52^\circ$
- (e) Faltan datos



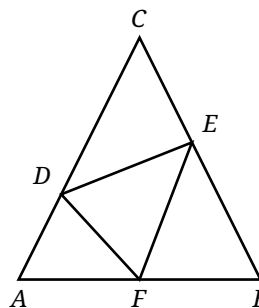
12. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 0.25 [cm] y  $1/3$  [cm], ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- (I) Su hipotenusa es igual a  $5/3$  del cateto menor.
- (II) El área del triángulo es  $5/12$  [cm<sup>2</sup>]
- (III) Su perímetro es igual a 1 [cm]

- (a) Solo I
- (b) Solo II
- (c) Solo III
- (d) Solo I y III
- (e) Solo II y III

13. En la figura, el triángulo  $ABC$  es isósceles de base  $\overline{AB}$ , y en él se ha inscrito el triángulo equilátero  $DEF$ . Si  $\alpha = \angle AFD$ ,  $\beta = \angle EDC$  y  $\gamma = \angle FEB$ , entonces ¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

- (a)  $\beta = (\alpha + \gamma)/2$
- (b)  $\beta = (\alpha - \gamma)/2$
- (c)  $\alpha = (\beta - \gamma)/2$
- (d)  $\alpha = (\beta + \gamma)/2$
- (e)  $\gamma = (\alpha + \gamma)/2$



14. En la figura,  $\triangle ABC$  es isósceles de base  $\overline{AB} = b$  y altura  $\overline{CF} = h$ . ¿Cuál es el área del rectángulo  $DEHG$  si  $\overline{EF} = x$ ?

- (a)  $bx(h - x)/h$
- (b)  $hx(b - x)/b$
- (c)  $2hx(b - 2x)/b$
- (d)  $x(b - x)$
- (e)  $x(h - x)$

