

Leavitt Yol Cebirleri ve İlgili Konular  
Yaz Okulu

5-8 Temmuz 2023

Mersin



# Yaz Okulu Hakkında

Bu yaz okulunun amacı, ülkemizde 6 Şubat 2023 tarihinde meydana gelen depremlerin etkilediği 11 ildeki (bu illerde ikamet eden veya bu illerdeki üniversitelerde eğitim görmekte olan) Matematik lisans tercihen yüksek lisans ve doktora öğrencilerine özgür bir matematik ortamında düşünmeleri, etkileşimde bulunmaları ve yeniden matematik yapmaları için bir fırsat sunabilmektir. Soyut cebirin en temel konularından biri olan halkalar ve modüller kuramındaki yeni gelişmeler son yıllarda aktif bir araştırma alanı olan Leavitt yol cebirleri örneğiyle verilecektir. Katılımcıların bu alandaki güncel araştırmalar ve sonuçlar hakkında bilgi edinmeleri sağlanarak, bu ve benzeri konularda araştırma yapmak isteyenler için gerekli altyapı hazırlanacaktır. Dersler Türkiye’de Leavitt yol cebiri konusunda ilk çalışmaları yapan ve halen aktif olarak bu konuda araştırma yapmaya devam eden uzmanlar tarafından verilecektir. Bu etkinlik deprem bölgesindeki öğrencilerin akademik gelişmelerine katkıda bulunma hareketinin bir başlangıcı olacağına inanıyoruz.

\* Bu Etkinlik **London Mathematical Society**, **Bilişim Vadisi** ve **Türk Matematik Derneği** yanısıra **TUBİTAK** 2237 Programı tarafından da kısmen desteklenmektedir.



# Contents

<b>Yaz Okulu Hakkında</b>	<b>i</b>
<b>Dizi Konuşmalar</b>	<b>1</b>
Temel Tanım ve Kavramlar ( <i>Ayten KOÇ</i> <i>Murad ÖZAYDIN</i> ) . . . . .	1
Galois Bağlantıları ( <i>Ayten KOÇ</i> ) . . . . .	1
İdealler ( <i>Songül ESİN</i> ) . . . . .	1
Leavitt Yol Cebirlerinde Socle, Jacobson Radikal ve Merkez Kavramları ( <i>Vural CAM</i> ) . . . . .	2
Artinian ve Noetherian Halkalar ( <i>Ayşe Tuğba GÜROĞLU</i> ) . . . . .	2
Ok Temsilleri ve Modül Kategorileri* ( <i>Ayten KOÇ</i> <i>Murad ÖZAYDIN</i> ) . . . . .	3
<b>Posterler</b>	<b>5</b>
Classification of Finite Dimensional Representations of Leavitt Path Algebras* ( <i>Ayten KOÇ</i> <i>Murad ÖZAYDIN</i> ) . . . . .	5
Functorial Constructions for Graph Algebras ( <i>Ayten KOÇ*</i> , <i>Hatice Nur KOLCU</i> ) . . . . .	5
Galois Bağlantıları ve Leavitt Yol Cebirlerine Uygulaması* ( <i>Ayten KOÇ</i> , <i>Esmanur ÖZKUL</i> ) . . . . .	6
Ok Temsilleri ve Leavitt Yol Cebirlerinin Modülleri* ( <i>Büşra Deniz İÇİN</i> , <i>Ayten KOÇ</i> ) . . . . .	6
<b>Yazar İndeksi</b>	<b>7</b>



# Dizi Konuşmalar

## Temel Tanım ve Kavramlar

Ayten KOÇ  
Gebze Teknik Üniversitesi

Murad ÖZAYDIN  
Oklahoma Üniversitesi

5 Temmuz  
09:00-16:30  
4+2

Leavitt Yol Cebiri (Leavitt Path Algebra, kısaca LPA)  $L_{\mathbb{F}}(\Gamma)$ , üreteçleri ve bağıntıları  $\Gamma$  yönlü çizgesi ile kodlanan birleşmeli bir cebirdir. İlk günkü derslere yönlü çizgi tanımıyla başlanıp köşelerin üzerindeki ön-sıralama, sonlu ve sonsuz yollar, bataklık, döngü, bukle, kalıtsal ve doygun köşe kümeleri, K, L ve benzeri koşullar ve çizgenin yarı grubu anlatıldıktan sonra LPA tanımı verilip temel özellikler ispatlanacaktır. Örneklerle bilinen bazı cebirlerin (matris cebirleri, Laurent polinom cebiri, Jacobson-Toeplitz cebiri,  $L(1, n)$  Leavitt cebirleri gibi) hangi çizgelerden geldiği gösterilecektir. Son olarak da çizgesel ve cebirsel özellikler arasındaki sözlük ile bu ders serisi tamamlanacaktır. Çizgeler sonlu ve cebirin katsayıları bir cisim olarak alınacaktır.

## Galois Bağlantıları

Ayten KOÇ  
Gebze Teknik Üniversitesi

6 Temmuz  
09:00-09:50

Galois bağlantıları ve Leavitt yol cebirlerindeki uygulamaları açıklanacaktır.

## İdealler

Songül ESİN  
İstanbul Kültür Üniversitesi

6 Temmuz  
10:00-15:20

Bu dersin amacı Leavitt yol cebirlerinin ideallerini incelemek olduğu için öncelikle bir halkanın iki taraflı idealleri, maksimal idealleri, asal idealleri ve ilkel ideallerinden bahsedilecektir. Leavitt yol cebirleri  $\mathbb{Z}$ -dereceli olduğundan dereceli ideallerinin yapısı ve üreteçlerini belirlemek önemlidir. Ayrıca basit dereceli Leavitt yol cebirlerinin dereceli olmayan idealleri vardır. Leavitt yol cebirlerinin herhangi bir idealinin üreteçlerinin çizgenin köşeleri ve köşelerinden elde edilen kalıtsal doymuş küme ile olan ilişkisi verilecektir. Leavitt yol cebirlerinin maksimal ideallerinin yapısı incelenecek ve asal ideallerinin karakterizasyonu ifade edilecektir. Dereceli bir idealin ilkel ideallerin kesişimi olduğu ispatlanacaktır.

## Leavitt Yol Cebirlerinde Socle, Jacobson Radikal ve Merkez Kavramları

6 Temmuz  
15:40-16:30  
7 Temmuz  
09:00-12:00

Vural CAM  
Selçuk Üniversitesi

Bir kombinatorik nesne olan yönlü çizgelere karşılık gelen bir cebirsel yapı olan Leavitt yol cebirleri 2004 senesinden bu yana bir çok matematikçinin ilgi alanı olmuştur. Eğer elimizde bir cebirsel yapı varsa, bu yapının cebirsel özelliklerini merak ederiz. Bu dersimizde Leavitt yol cebirlerinin minimal (sol)- idealleri üzerinde duracağız ve bu ideallerin toplamı olan socle kavramını Leavitt yol cebirlerinde ird-eleyeceğiz. Benzer şekilde, maximal (sol)-ideallerin kesişimi ile tanımlı olan Jacobson radikal kavramı ele alınacak ve Leavitt yol cebirleri üzerinde incelenecektir. Son olarak da Leavitt yol cebirlerinin merkezleri hakkında bilgiler vereceğiz.

---

## Artinian ve Noetherian Halkalar

7 Temmuz  
13:30-16:30  
8 Temmuz  
09:00-09:50

Ayşe Tuğba GÜROĞLU  
Celal Bayar Üniversitesi

Artan zincir koşulu (ACC), ilk olarak Emmy Noether tarafından matematik literatürüne kazandırılmış ve daha sonra azalan zincir koşulu (DCC) Emil Artin tarafından ortaya atılmıştır. Artinian ve Noetherian halkalar, idealler üzerinde ACC ve DCC şartlarını sağlayan ve halkaların sonluluğunu ölçen halkalardır. Artinian halkalar minimum koşulunu sağlarken Noetherian halkalar maksimum koşulunu sağlar ve bu koşullar bazı durumlarda çakışık. Bu derste halkaların karakterizasyonlarını vermek için öncesinde maksimum, minimum şartlarından bahsedilecek ve bu konudaki tanım, teorem ve örneklere yer verilerek bu halkalar ayrı ayrı incelenecektir. Daha sonra “Artinian ve Noetherian halkalar arasında bir ilişki var mıdır?”, “Bu iki halka arasında ilişki varsa hangi koşullar altında sağlanır?” “Artinian ve Noetherian halka olma özelliği alt halka ve bölüm halkaları için de geçerli midir?” gibi sorulara yanıt aranacaktır. Ayrıca Leavitt yol cebirlerinin (LPA) Artinian ve Noetherian halka olma şartları  $\Gamma$  yönlü çizgesinin çizge özellikleri kullanılarak verilmeye çalışılacak yani halkanın cebirsel yapısı çizgenin çizge-teorik özellikleri ile karakterize edilecektir. Halkalar için sorulan soruların Leavitt yol cebirlerinde ne kadarının karşılık bulduğu tartışılacaktır. Son olarak çizge örnekleri verilerek bu çizgelerin Leavitt yol cebirlerinin Artinian ve Noetherian yapısı çizge üzerinden açıklanarak konu daha anlaşılır kılınacaktır.

---



## Ok Temsilleri ve Modül Kategorileri\*

Ayten KOÇ  
Gebze Teknik Üniversitesi

Murad ÖZAYDIN  
Oklahoma Üniversitesi

8 Temmuz  
10:00-16:30  
1+4

Modern yaklaşımda yönlü bir çizgenin yol kategorisinden vektör uzaylarına bir fonktor olarak tanımlanan ama sadece lineer dönüşümlerle de ifade edilebilen ok temsilleri (quiver representations) 1970'lerde Gabriel'in ve Auslander'in çalışmalarından itibaren halkalar ve modüller kuramının temel kavramlarından biri olmuştur. Bir yönlü çizgesinin ok temsilleri,  $\Gamma$  çizgesinin yol cebirinin modüllerine denktir. Aynı yönlü çizgenin tanımladığı Leavitt yol cebirinin modülleri ise doğal bir izomorfizma koşulunu sağlayan ok temsillerine karşı gelir. Bu derste (sonlu üretilmiş) projektif, basit, ayrıştırılamaz modüller gibi önemli kavramlar tanımlanacak ve yukarıda bahsedilen teoremler aracılığıyla bunların Leavitt yol cebirlerindeki örnekleri ve bilinen sınıflandırılmaları anlatılacaktır. Ayrıca 122F414 nolu TÜBİTAK 1001 projesi kapsamında elde edilen sonuçlardan bahsedilecektir. Zaman kalırsa, katılımcıların ilgi ve bilgi düzeylerine bağlı olarak, kategorik yaklaşım ve Morita kuramına giriş gibi konular da işlenecektir.

\* TÜBİTAK ARDEB 1001 programı kapsamında 122F414 nolu proje ile kısmen desteklenmektedir.



# Posterler

## Classification of Finite Dimensional Representations of Leavitt Path Algebras\*

5-8 Temmuz  
09:00-16:30

Ayten KOÇ

Murad ÖZAYDIN

Gebze Technical University

University of Oklahoma

When  $\Gamma$  is a finite digraph, we classify all finite dimensional modules of the Leavitt path algebra  $L(\Gamma)$  via an explicit Morita equivalence given by an effective combinatorial (reduction) algorithm on the digraph  $\Gamma$ . The category of (unital)  $L(\Gamma)$ -modules is equivalent to a full subcategory of quiver representations of  $\Gamma$ . However, the category of finite dimensional representations of  $L(\Gamma)$  is tame, in contrast to the finite dimensional quiver representations of  $\Gamma$  which are almost always wild.

\* Partially supported by TUBITAK ARDEB 1001 Grant 115F511 and TUBITAK ARDEB 1001 Grant 122F414

---

## Functorial Constructions for Graph Algebras

Ayten KOÇ\*, Hatice Nur KOLCU

Gebze Technical University

5-8 Temmuz  
09:00-16:30

The celebrated Gelfand-Naimark Theorem states that the category of compact Hausdorff topological spaces is equivalent to the opposite category of commutative unital  $C^*$ -algebras. Topological constructions such as obtaining the sphere by gluing two discs (corresponding to the northern and southern hemispheres) along their boundaries (the equator) or obtaining the real projective space as the quotient of a sphere by antipodal identification, have their counterparts in contravariant  $C^*$ -algebra constructions. We present noncommutative (algebraic) analogues of these constructions via dense finitely generated subalgebras, (co)functorially. The cofunctor  $L_{\mathbb{F}}$  assigns to each digraph  $\Gamma$  its Leavitt path algebra  $L_{\mathbb{F}}(\Gamma)$  with coefficients in the field  $\mathbb{F}$ .

\* Partially supported by TUBITAK ARDEB 1001 Grant 122F414

---

## Galois Bağlantıları ve Leavitt Yol Cebirlerine Uygulaması\*

5-8 Temmuz  
09:00-16:30

Ayten KOÇ, Esmanur ÖZKUL  
Gebze Technical University

Kısmi sıralı kümeler arasındaki Galois bağlantıları matematiğin bir çok alt disiplininde kullanılabilen temel bir kavramdır. İyi bilinen örneklerinden bazıları cisimler kuramında Galois teorisi, topolojide temel (fundamental) grup, değişmeli cebir/cebirsal geometride Hilbert Nullstellensatz teoremidir.

Bu çalışmada bir Leavitt yol cebiri  $L_{\mathbb{F}}(\Gamma)$  nın idealleri ile cebiri tanımlayan  $\Gamma$  yönlü çizgesinin köşelerinin alt kümeleri arasındaki Galois bağlantısı incelenip dereceli idealler ile kalıtsal doygun köşe kümeleri arasındaki bire-bir eşleme gösterilecektir.

\* TUBITAK ARDEB 1001 programı kapsamında 122F414 nolu proje ile kısmen desteklenmektedir.

---

## Ok Temsilleri ve Leavitt Yol Cebirlerinin Modülleri\*

5-8 Temmuz  
09:00-16:30

Büşra Deniz İÇİN, Ayten KOÇ  
Adıyaman Üniversitesi Gebze Technical University

Bir sonlu  $\Gamma$  yönlü çizgesinin  $\mathbb{F}$  cismi üzerindeki ok temsilleri kategorisinin,  $\mathbb{F}\Gamma$  yol cebirinin modül kategorisine denk olduğu klasik bir sonuçtur [DW17]. Bu sonucun yakın zamanda ispatlanmış bir versiyonu olan " $\Gamma$  nın ok temsillerinin doğal bir izomorfizma koşulunu sağlayan alt kategorisinin, Leavitt yol cebiri  $L_{\mathbb{F}}(\Gamma)$  nın modül kategorisine denktir [KÖ18]" teoremini açıklamak bu sunumun amacıdır.

\* TUBITAK ARDEB 1001 programı kapsamında 122F414 nolu proje ile 2247 BİÇABA-Birlikte Çalışıp Birlikte Başaracağız Burs Programı tarafından kısmen desteklenmektedir.

---

# Yazar İndeksi

Ayten Koç, 1, 3, 5, 6

Büşra Deniz İçin, 6

Esmanur Özkul, 6

Hatice Nur Kolcu, 5

Murad Özaydın, 1, 3, 5

Songül Esin, 1

Tuğba Güroğlu, 2

Vural Cam, 2