فصل سوم

۳

معرفی و دسته‌بندی مسایل بهینه‌سازی

فهرست مطالب این فصل

بهینه‌سازی[1] هنر یافتن بهترین جواب در بین وضعیت‌های موجود است. بهینه‌سازی در طراحی و نگه‌داری بسیاری از سیستم‌های مهندسی، اقتصادی و حتی اجتماعی به منظور می‌نیمم کردن هزینه لازم و یا ماکزیمم کردن سود کاربرد دارد. به دلیل کاربرد وسیع بهینه‌سازی در علوم متفاوت، این مبحث رشد بسیاری کرده است، به طوری که در ریاضیات، مدیریت، صنایع و بسیاری از شاخه‌های علوم مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. به همین علت، نام‌های متفاوتی از قبیل **برنامه‌ریزی ریاضی**[2] و تحقیق در عملیات[3] برای اشاره به مباحث بهینه‌سازی به کار می‌رود.

در این فصل به طور اجمالی به معرفی مبحث بهینه‌سازی می‌پردازیم و سعی می‌شود که مسایل بهینه‌سازی و انواع آن به طور اجمالی معرفی گردد. هدف از این فصل صرفا یک معرفی کلی و ارایه یک دید کلی در مسایل بهینه‌سازی می‌باشد و برخی از مفاهیم مطرح شده در این فصل به طور مفصل‌تر در فصل‌های بعد مطالعه و بررسی می‌شوند.

۱.۳ مدل‌سازی در بهینه‌سازی

مدل‌سازی ریاضی[4] اولین گام در بهینه‌سازی است. مدل‌سازی به معنی توصیف مساله با کمک متغیرها و روابط ریاضی است. برای آشنایی اولیه با مدل‌سازی، در مثال زیر، یک مساله بهینه‌سازی ساده مطرح می‌شود و مدل ریاضی آن استخراج می‌گردد.

مثال ۳-۱ (یک مثال ساده از مدل‌سازی ریاضی)

یک فروشنده می‌خواهد اجناسی را برای فروشگاه خود خریداری کند. لیست اجناس به همراه قیمت آن‌ها و سود حاصل از آن‌ها در جدول زیر آورده شده است. همچنین حجمی که اجناس اشغال می‌کنند نیز در جدول آورده شده است.

#	نام کالا	واحد	قیمت هر واحد	سود فروش هر واحد	حجم هر واحد
۱	شکر	کیلو	۱۲۰	۱۰	۲۰
۲	پنیر فله‌ای	کیلو	۳۵۰	۲۵	۴۰
۳	پنیر بسته‌ای	بسته	۴۱۰	۲۷	۵۲
۴	برنج	کیلو	۴۵۰	۲۰	۴۵
۵	چای بسته‌ای	بسته	۱۰۰۰	۵۰	۷۴
۶	زعفران	بسته	۲۰۰۰	۱۲۰	۲
۷	نوشابه	بسته	۲۳۰	۳۰	۹۰

هدف فروشنده، تهیه اقلام فوق به اندازه‌ای است که سود حاصل از فروش اجناس ماکزیمم شود و در ضمن موارد زیر باید در نظر گرفته شود:

الف) سرمایه فروشنده صدهزار تومان است و لذا هزینه کلیه اقلام خریداری شده نباید از صدهزار تومان بیشتر شود.

ب) به خاطر ملاحظات بهداشتی، مقدار خریداری شده پنیر فله‌ای نباید از ۳۰ کیلو بیشتر باشد.

ج) به علت محدودیت فضای انبار، حجم کالاهای خریداری شده نباید از ۴۰۰۰ واحد بیشتر شود.

مساله مطرح شده در بالا، یک مساله بسیار ساده بهینه‌سازی می‌باشد. برای حل این مساله ابتدا لازم است مدل ریاضی مساله استخراج شود. برای این منظور متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

[1] Optimization
[2] Mathematical programming
[3] Operation research
[4] Mathematical modeling

مقدار واحد خریداری شده از کالای شماره i در جدول فوق : x_i

به عنوان نمونه x_2 مقدار کیلوی خریداری شده پنیر فله‌ای می‌باشد و x_3 تعداد بسته خریداری شده پنیر می‌باشد. توجه شود که دامنه متغیر x_2 هر عدد حقیقی نامنفی می‌باشد، اما دامنه متغیر x_3 اعداد طبیعی و صفر می‌باشد و نمی‌تواند یک مقدار کسری مانند 2.3 را داشته باشد. به عبارت دیگر داریم

$$x_2 \in [0, \infty),$$
$$x_3 \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

در مورد متغیرهای دیگر نیز به طور مشابه می‌توان دامنه را تعریف کرد.
با در نظر گرفتن تعریف متغیرهای x_i، می‌توان سود را تابعی از متغیرهای $x_1, \ldots, x_7$ و به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x_1, \ldots, x_7) := 10x_1 + 25x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 50x_5 + 120x_6 + 30x_7$$

هدف ماکزیمم کردن تابع فوق می‌باشد. البته محدودیت‌های (الف)، (ب) و (ج) در فوق نیز باید در نظر گرفته شود. این محدودیت‌ها را به ترتیب به صورت نامعادلات زیر می‌توان بیان کرد:

برای شرط (الف): $120x_1 + 350x_2 + 410x_3 + 450x_4 + 1000x_5 + 2000x_6 + 230x_7 \leq 100000,$

برای شرط (ب): $x_2 \leq 30,$

برای شرط (ج): $20x_1 + 40x_2 + 52x_3 + 45x_4 + 74x_5 + 2x_6 + 90x_7 \leq 4000,$

از کنار هم قرار دادن تابع هدف و قیود، در نهایت مدل ریاضی مساله فروشنده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{x_1,x_2,x_4\in[0,\infty),\\ x_3,x_5,x_6,x_7\in\{0,1,\ldots\}}}{\text{maximize}} & 10x_1 + 25x_2 + 27x_3 + 20x_4 + 50x_5 + 120x_6 + 30x_7 \\ \text{subject to} & 120x_1 + 350x_2 + 410x_3 + 450x_4 + 1000x_5 + 2000x_6 + 230x_7 \leq 10^5, \\ & x_2 \leq 30, \\ & 20x_1 + 40x_2 + 52x_3 + 45x_4 + 74x_5 + 2x_6 + 90x_7 \leq 4000. \end{array}$$

در مثال فوق، فرایند مدل‌سازی یک مساله ساده مطرح گردید. همان‌گونه که در این مثال دیده شد، برای استخراج مدل ریاضی یک مساله بهینه‌سازی باید چهار مولفه زیر به طور کامل مشخص گردد.

۱. یک مجموعه از متغیرها $x_1, \ldots, x_n$ موسوم به **متغیر تصمیم**[۵]. متغیرهای تصمیم همان مجهولات مساله می‌باشند.

۲. یک تابع موسوم به **تابع هدف**[۶] که برحسب متغیرهای تصمیم تعریف می‌شود و یک مقدار حقیقی را برمی‌گرداند. در مساله بهینه‌سازی هدف می‌نیمم یا ماکزیمم (بهینه) کردن تابع هدف است.

۳. مجموعه‌ای از معادلات و نامعادلات جبری موسوم به **قیدهای جبری**[۷] که روی متغیرهای تصمیم اعمال می‌شوند.

۴. مجموعه‌های $S_1, \ldots, S_n$ که به عنوان دامنه‌های متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ در نظر گرفته می‌شوند. مجوعه‌های S_i به **مجموعه‌های دامنه‌ای** موسوم می‌باشند و همچنین قیدهای $x_i \in S_i$ به **قیود مجموعه‌ای**[۸] موسوم می‌باشند.

متغیرهای تصمیم به **متغیرهای بهینه‌سازی**[۹] و **متغیر طراحی**[۱۰] نیز موسوم هستند. همچنین، تابع هدف به **تابع معیار**[۱۱] و

[5] Decision variable
[6] Objective function
[7] Algebraic Constraints
[8] Set constraints
[9] Optimization variable
[10] Design variable
[11] Criterion function

تابع زیان[۱۲] نیز موسوم است. در برخی منابع، قیدهای جبری به **قیدهای تابعی**[۱۳] موسوم می‌باشند.

هر مساله بهینه‌سازی را با مشخص کردن چهار مولفه فوق می‌توان به طور کامل توصیف نمود. البته ممکن است که در یک مساله بهینه‌سازی هیچ قید تابعی یا جبری نداشته باشیم ولی مساله‌ای بدون تابع هدف، قیود مجموعه‌ای و متغیرهای تصمیم وجود ندارد.

در ادامه سه مثال ساده دیگر از مدل‌سازی ارایه می‌شود و چهار مولفه فوق در آن‌ها مشخص می‌گردد.

مثال ۳-۲ (مدل‌سازی ریاضی یک مساله بهینه‌سازی‌ـ ۱)

می‌خواهیم از بین مکعب مستطیل‌هایی که دارای مساحت برابر با α می‌باشند، ابعاد آن مکعب مستطیلی را بیابیم که دارای بیشترین حجم باشد. در واقع ابعاد مکعب مستطیل همان متغیرهای تصمیم می‌باشند و آن‌ها را a، b و c می‌نامیم. در این صورت مساحت و حجم مکعب مستطیل به ترتیب برابر $2(ab+ac+bc)$ و abc می‌باشد. توجه شود که دامنه متغیرهای تصمیم عبارت است از مجموعه اعداد حقیقی نامنفی. بنابراین مدل ریاضی این مثال به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \underset{a,b,c\in[0,\infty)}{\text{maximize}} \quad & f(a,b,c) := abc \\ \text{subject to} \quad & 2(ab+ac+bc) = \alpha. \end{aligned}$$

توجه شود که در این مدل، α یک **پارامتر** معلوم محسوب می‌شود و مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم با توجه به مقدار آن به دست می‌آیند.

مثال ۳-۳ (مدل‌سازی ریاضی یک مساله بهینه‌سازی‌ـ ۲)

فرض کنیم که مختصات دکارتی k نقطه در یک صفحه مسطح عبارت باشد از

$$(a_i, b_i), i = 1, \ldots, k$$

می‌خواهیم دایره‌ای با کمترین شعاع را بیابیم که شامل تمامی نقاط فوق باشد. یک دایره با مختصات مرکز و اندازه شعاع آن مشخص می‌گردد. اگر مختصات مرکز را با (v, w) و شعاع را با r نشان دهیم، آن‌گاه متغیرهای تصمیم عبارتند از: v، w و r. دامنه متغیرهای v و w عبارت است از کل اعداد حقیقی و دامنه متغیر r عبارت است از مجموعه اعداد حقیقی نامنفی. حال مدل ریاضی مساله به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} \underset{v,w\in\mathbb{R},\ r\in[0,\infty)}{\text{minimize}} \quad & f(v,w,r) := r \\ \text{subject to} \quad & \sqrt{(v-a_1)^2 + (w-b_1)^2} \le r, \\ & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ & \sqrt{(v-a_k)^2 + (w-b_k)^2} \le r. \end{aligned}$$

مثال ۳-۴ (مدل‌سازی ریاضی یک مساله بهینه‌سازی‌ـ ۳)

همان مثال قبل را در نظر می‌گیریم، با این تفاوت که مختصات مرکز دایره و همچنین شعاع دایره باید اعدادی صحیح

[12] Loss function
[13] Functional Constraints

باشند. در این حالت تابع هدف و قیود جبری همانند مثال قبل است ولی قیود مجموعه‌ای به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$v, w \in \mathbb{Z},$$
$$r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

نهایتا مساله به صورت زیر مدل می‌شود

$$\begin{aligned}
\underset{v,w\in\mathbb{Z}\, r\in\{0,1,2,\ldots\}}{\text{minimize}} \quad & f(v,w,r) := r \\
\text{subject to} \quad & \sqrt{(v-a_1)^2+(w-b_1)^2} \leq r, \\
& \quad\vdots \qquad \vdots \\
& \sqrt{(v-a_k)^2+(w-b_k)^2} \leq r,
\end{aligned}$$

در انتها متذکر می‌شویم در برخی موارد، یک محدودیت را می‌توان در قالب قیود تساوی یا نامساوی و یا در قالب قیود مجموعه‌ای اعمال کرد. به عنوان نمونه، در مثال ۳-۳، دیدیم که محدودیت نامنفی بودن شعاد دایره را با قید دامنه‌ای $r \in [0, \infty)$ اعمال کردیم. اما این محدودیت را می‌توان در قالب یک قید جبری نامساوی به صورت $r \geq 0$ نیز اعمال نمود. در این حالت مدل مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\underset{v,w,r\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad & f(v,w,r) := r \\
\text{subject to} \quad & \sqrt{(v-a_1)^2+(w-b_1)^2} \leq r, \\
& \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\
& \sqrt{(v-a_k)^2+(w-b_k)^2} \leq r, \\
& r \geq 0.
\end{aligned}$$

معمولا، قیود مجموعه‌ای $x_i \in S_i$ برای اعمال شرایط خاصی روی متغیرهای تصمیم از قبیل صحیح بودن مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مدل‌سازی اولین گام در بهینه‌سازی می‌باشد و البته برخلاف مثال‌های ساده فوق، این مرحله می‌تواند چالشی باشد. مدل‌سازی را نمی‌توان مطابق یک الگوریتم و یا دستورالعمل انجام داد. اصولا در مدل‌سازی به تجربه و ابتکار نیاز است. به همین دلیل گفته می‌شود که مدل‌سازی یک هنر است. آشنایی با مدل‌های معروف و رایج و همین‌طور مطالعه نحوه مدل‌سازی می‌تواند مهارت ما را در مدل‌سازی بالا ببرد.

فرم کانونی و فرم برداری مسایل بهینه‌سازی

در مثال‌های قبل دیدیم که یک مساله بهینه‌سازی ممکن است از نوع ماکزیمم‌سازی و یا می‌نیمم‌سازی باشد. همچنین قیود جبری نامساوی می‌توانند به صورت کوچک‌تر یا بزرگ‌تر باشد. برای سادگی در مطالعه مسایل بهینه‌سازی یک فرم از مسایل موسوم به **فرم کانونی**[۱۴] در نظر گرفته می‌شود (قرارداد می‌شود) و کلیه تعاریف، قضایا و روش‌های حل روی آن فرم توضیح داده می‌شود. البته فرم کانونی باید به گونه‌ای باشد که هر مساله را بتوان به فرم کانونی تبدیل نمود. در این کتاب،

[14] Canonical form

فرم کانونی برای مسایل بهینه‌سازی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\underset{x_i \in \mathcal{S}_i}{\text{minimize}} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\
\text{subject to} \quad & g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \\
& \quad \vdots \\
& g_p(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \\
& h_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\
& \quad \vdots \\
& h_q(x_1, \ldots, x_n) = 0.
\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در فرم کانونی، مسایل از نوع می‌نیمم‌سازی هستند و قیود نامساوی از نوع کوچک‌تر یا مساوی می‌باشند. همچنین سمت راست قیود تساوی و نامساوی 0 می‌باشد. خاطر نشان می‌شود که در منابع دیگر، ممکن است فرم کانونی به شکل دیگری در نظر گرفته شود.

در صورتی که در یک مساله بهینه‌سازی، قیود نامساوی به صورت بزرگ‌تر از صفر باشند و یا مساله از نوع ماکزیمم‌سازی باشد، آن‌گاه به سادگی با دستکاری‌های جبری، می‌توان مساله را در نهایت به فرم کانونی فوق تبدیل نمود. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳-۵ (به فرم کانونی در آوردن یک مساله بهینه‌سازی (۱))

مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
\underset{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}}{\text{maximize}} \quad & x_1^2 + 25x_1x_2 - 2x_3^3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 3x_2 \geq 4, \\
& 3x_1 + x_2^3 - x_3 = 30.
\end{aligned}$$

مساله فوق به فرم کانونی (۱.۳) نمی‌باشد، چرا که تابع هدف باید ماکزیمم (و نه می‌نیمم) شود. همچنین قید اول به صورت بزرگ‌تر مساوی است و نه کوچک‌تر مساوی صفر. علاوه بر آن، سمت راست قیود صفر نمی‌باشد. اما با دستکاری‌های ساده می‌توان مساله را به فرم کانونی زیر تبدیل نمود

$$\begin{aligned}
\underset{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad & -\left(x_1^2 + 25x_1x_2 - 2x_3^3\right) \\
\text{subject to} \quad & -x_1 - 3x_2 + 4 \leq 0, \\
& 3x_1 + x_2^3 - x_3 - 30 = 0.
\end{aligned}$$

توجه شود که ماکزیمم تابع f همان می‌نیمم تابع $-f$ می‌باشد و از این نکته در تبدیل فوق استفاده گردیده است.

مثال ۳-۶ (به فرم کانونی در آوردن یک مساله بهینه‌سازی (۲))

مدل استخراج شده در مثال ۳-۳ به فرم کانونی نمی‌باشد. با تغییر نام متغیرهای تصمیم به x_1، x_2 و x_3 و دستکاری جبری، می‌توان مساله را به فرم کانونی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
\underset{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\ x_3 \in [0, \infty)}}{\text{minimize}} \quad & f(x_1, x_2, x_3) := x_3 \\
\text{subject to} \quad & \sqrt{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2} - x_3 \leq 0, \quad i = 1, \ldots, k.
\end{aligned}$$

فرم برداری

غالبا، به منظور ساده و خلاصه نویسی در نوشتن مدل ریاضی یک مساله بهینه‌سازی از **فرم برداری** مدل استفاده می‌شود. مساله بهینه‌سازی در فرم کانونی (۱.۳) را می‌توان به فرم برداری زیر نیز بیان کرد

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

به‌طوری که

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

به بردار متغیرهای تصمیم یا به طور خلاصه **بردار تصمیم**[۱۵] موسوم می‌باشد. توابع $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ و $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ به ترتیب متناظر با قیود تساوی و نامساوی به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} g_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ g_p(x_1,\ldots,x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} h_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ h_q(x_1,\ldots,x_n) \end{bmatrix}$$

همچنین $\mathcal{S}$ دامنه بردار تصمیم $\mathbf{x}$ می‌باشد که

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_n$$

مثال ۳-۷ (فرم برداری یک مساله بهینه‌سازی)

مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \underset{\substack{x_1,x_3,x_5\in\mathbb{R}, \\ x_2\in\{0,1\},\, x_4\in\mathbb{N}}}{\text{minimize}} \quad & x_1^2 + 25x_1x_2 - 2x_3^3 + x_1x_4 - x_5 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 + x_5 + 4 \leq 0, \\ & x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \\ & x_5 + 3x_3 \geq 0, \\ & x_1x_2 + x_2^3 - x_5x_3 = 0, \\ & x_1x_2x_3 + x_2x_5 = 5. \end{aligned}$$

فرم برداری مساله فوق و هر مساله بهینه‌سازی به صورت (۲.۳) است و باید بردار تصمیم $\mathbf{x}$، مجموعه دامنه $\mathcal{S}$ و توابع $\mathbf{h}$ و $\mathbf{g}$ را برای مساله فوق مشخص کنیم.

بردار متغیرهای تصمیم به صورت

$$\mathbf{x} := [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top$$

می‌باشد و دامنه آن عبارت است از

$$\mathcal{S} := \mathbb{R} \times \{0,1\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$$

[15] Decision vector

به عبارت دیگر هر عضو $\mathcal{S}$ یک بردار پنج‌تایی است که مولفه دوم آن یا صفر است و یا یک و مولفه چهارم آن یک عدد طبیعی است و بقیه مولفه‌ها هر عدد دلخواه حقیقی می‌تواند باشد. تابع متناظر با قیود تساوی و نامساوی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند. دقت شود که در تعریف این توابع در ابتدا مساله به فرم کانونی تبدیل شده و سپس ضابطه این توابع نوشته شده است

$$\mathbf{h} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{h}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_1x_2 + x_2^3 - x_5x_3 \\ x_1x_2x_3 + x_2x_5 - 5 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} -x_1 + x_5 + 4 \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 \\ -x_5 - 3x_3 \end{bmatrix}$$

۲.۳ جواب شدنی، جواب بهینه سراسری و موضعی برای مسایل بهینه‌سازی

در مسایل بهینه‌سازی، تعاریف و مفاهیم متفاوتی برای جواب وجود دارد، که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- جواب شدنی
- جواب سراسری (اکید و غیراکید)
- جواب موضعی (اکید و غیراکید)

در ادامه این مفاهیم و مفاهیم وابسته به آن‌ها تعریف می‌شود.

جواب شدنی

در مساله بهینه‌سازی (۲.۳)، بردار متغیرهای تصمیم $\mathbf{x} := [x_1, \ldots, x_n]^\top$ که $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$، یک **جواب شدنی**[۱۶] یا **نقطه شدنی** برای مساله نامیده می‌شوند، هرگاه در تمامی قیود جبری مساله صدق کند. مجموعه تمامی جواب یا نقاط شدنی به **ناحیه شدنی**[۱۷] یا **مجموعه شدنی** موسوم می‌باشد. غالبا، ناحیه شدنی را با Ω نشان می‌دهیم. برای مساله (۲.۳)، ناحیه شدنی به قرار زیر است:

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

با این نگاه، مساله بهینه‌سازی را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

این امکان وجود دارد که Ω فقط دارای، هیچ، یک، دو، چند یا بی‌نهایت عضو باشد. عموما Ω یک مجموعه با بی‌نهایت و یا تعداد زیادی عضو می‌باشد و می‌خواهیم از بین این اعضا بهترین(ها) را انتخاب کنیم. اگر در یک مساله بهینه‌سازی Ω تهی باشد، آن‌گاه گوییم که **مساله نشدنی**[۱۸] است. نشدنی بودن یک مساله به علت **ناسازگار** بودن قیود مساله می‌باشد.

[16] Feasible solution
[17] Feasible region (set)
[18] Infeasible

جواب بهینه سراسری

جواب بهینه سراسری[۱۹] یا به‌طور خلاصه **جواب بهینه** مساله بهینه‌سازی، نقطه یا نقاطی در Ω می‌باشد که دارای کمترین مقدار تابع هدف در Ω می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر $\mathbf{x}^\star \in \Omega$ را یک جواب بهینه برای مساله می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\mathbf{x} \in \Omega$ داشته باشیم:

$$f(\mathbf{x}^\star) \leq f(\mathbf{x}).$$

واژه "سراسری" به این دلیل به کار رفته که تابع f در $\mathbf{x}^\star$ با تمامی اعضای Ω مقایسه گردید و مقدار تابع f در $\mathbf{x}^\star$ از تمامی اعضای دیگر Ω نابیشتر است.

جواب بهینه سراسری $\mathbf{x}^\star$ را یک **جواب بهینه سراسری اکید**[۲۰] گوییم، هر گاه به ازای هر $\mathbf{x} \in \Omega$ که $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^\star$ داشته باشیم:

$$f(\mathbf{x}^\star) < f(\mathbf{x}).$$

به عبارت دیگر، مقدار f در جواب سراسری از بقیه نقاط شدنی کوچک‌تر (و نه مساوی) است.

لازم به ذکر است که ممکن است یک مساله بهینه‌سازی اصلا جواب سراسری نداشته باشد و یا ممکن است دارای چندین جواب سراسری باشد.

جواب بهینه موضعی

برای مسایل بهینه‌سازی نوع دیگری از جواب‌ها موسوم به **جواب بهینه موضعی**[۲۱] یا محلی نیز در نظر گرفته می‌شود. جواب بهینه موضعی یا به طور خلاصه جواب موضعی یک جواب شدنی است که در یک **همسایگی** از خود بهینه است و نه در کل ناحیه شدنی Ω. به عبارت دقیق‌تر $\mathbf{x}^*$ را یک جواب موضعی می‌نامیم هرگاه $\varepsilon > 0$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر $\mathbf{x} \in \Omega \cap \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$، داشته باشیم:

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}).$$

به طور مشابه، هنگامی که نامساوی فوق به صورت اکید برقرار باشد، جواب موضعی را **جواب موضعی اکید** می‌نامند. هر جواب بهینه سراسری یک جواب بهینه موضعی می‌باشد. ولی عکس آن درست نیست.

حالات وجود جواب

در مورد وجود جواب موضعی یا سراسری یک مساله بهینه‌سازی، حالات زیر ممکن است اتفاق بیافتد.

۱. ممکن است مساله نشدنی باشد. در این صورت، مساله اصلا جواب بهینه‌ی سراسری و موضعی ندارد.
۲. ممکن است یک مساله جواب موضعی داشته باشد ولی جواب سراسری نداشته باشد. ولی اگر جواب سراسری داشته باشد، آن‌گاه آن جواب یک جواب موضعی است و ممکن است که جواب‌های موضعی دیگر هم داشته باشد.
۳. ممکن است مساله شدنی باشد اما جواب سراسری و یا موضعی نداشته باشد.
۴. ممکن است مساله یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.
۵. ممکن است مساله به تعداد متناهی جواب داشته باشد.
۶. ممکن است مساله بی‌نهایت جواب داشته باشد.

[19] Global optimal solution
[20] Global strict optimal solution
[21] Local optimal solution

۳.۳ دسته‌بندی مسایل بهینه‌سازی

یک دسته‌بندی جامع از مسایل بهینه‌سازی وجود ندارد. فقط می‌توان مسایل بهینه‌سازی را از دیدگاه‌های متفاوت دسته‌بندی نمود. در این بخش به برخی از این دسته‌بندی‌ها می‌پردازیم.

دسته بندی برحسب خطی، درجه دوم و یا غیرخطی بودن توابع هدف و قیود

مساله بهینه‌سازی (۱.۳) با تابع هدف f و توابع قیود $g_i, i = 1, \dots, p$ و $h_j, j = 1, \dots, q$ ساخته می‌شود. بسته به این که این توابع از نوع آفینی، دوخطی، کوادراتیک و یا غیرخطی باشند، می‌توان یک دسته‌بندی برای مسایل بهینه‌سازی ارایه نمود. در این بخش به این دسته‌بندی پرداخته می‌شود. خاطر نشان می‌شود که توابع آفینی، دوخطی و کوادراتیک در بخش ؟؟ (صفحه ؟؟) معرفی شده است.

مسایل بهینه‌سازی خطی و غیرخطی

اگر در یک مساله بهینه‌سازی تابع هدف و تابع متناظر با قیود تساوی و نامساوی جملگی آفینی (خطی) باشند، آن‌گاه مساله به یک مساله **بهینه‌سازی خطی**[22] یا مساله **برنامه‌ریزی خطی**[23] موسوم می‌باشد. ولی اگر حداقل یک قید یا تابع هدف خطی نباشد، آن‌گاه مساله را یک مساله **برنامه‌ریزی غیرخطی**[24] می‌نامند. برای خلاصه نویسی، از LP برای اشاره به مسایل برنامه‌ریزی خطی و از NLP برای اشاره به مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده می‌شود.

فرم کلی یک مساله خطی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
\underset{x_i \in \mathcal{S}}{\text{minimize}} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + d \\
\text{subject to} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + u_1 \leq 0, \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + u_m \leq 0, \\
& b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + v_1 = 0, \\
& \qquad \vdots \\
& b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{kn}x_n + v_k = 0
\end{aligned}$$

فرم برداری مسایل خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{d} \\
\text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} \leq \mathbf{0}, \\
& \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

مسایل برنامه‌ریزی کوادراتیک

دسته‌ای از مسایل بهینه‌سازی غیرخطی که در مرز مسایل خطی و غیرخطی قرار دارند، عبارت است از مسایل **برنامه‌ریزی کوادراتیک**[25]. برای اشاره به مسایل برنامه ریزی کوادراتیک از QP استفاده می‌شود. مسایل برنامه‌ریزی کوادراتیک، بعضا به مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم و یا برنامه‌ریزی مجذوری نیز موسوم می‌باشند.

در مسایل کوادراتیک، تابع هدف یک تابع کوادراتیک است و قیود نامساوی و تساوی آفینی می‌باشند. فرم برداری و

[22] Linear optimization
[23] Linear programming(LP)
[24] NonLinear Programming(NLP)
[25] Quadratic Programming(QP)

کانونی مسایل کوادراتیک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\top\mathbf{x} + d \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} \le \mathbf{0}, \\ & \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

مسایلی که علاوه بر تابع هدف، قیود نامساوی آن‌ها نیز درجه دوم باشند ولی قیود تساوی آن‌ها به صورت آفینی است، به مسایل **برنامه‌ریزی درجه دوم با قیود درجه دوم**[۲۶] موسوم می‌باشد که برای اشاره به آن‌ها از QCQP استفاده می‌شود. فرم کلی این مسایل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\top\mathbf{x} + d \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^\top\mathbf{x} + u_i \le 0, \quad i = 1,\dots,p \\ & \mathbf{f}_j^\top\mathbf{x} + v_j = 0, \quad j = 1,\dots,q. \end{aligned}$$

مسایل برنامه‌ریزی دوخطی

دسته دیگری از مسایل بهینه‌سازی که در مرز مسایل خطی و غیرخطی واقع هستند عبارت است از مسایل **برنامه‌ریزی دوخطی**[۲۷]. این مسایل که ساده‌تر از مسایل برنامه‌ریزی کوادراتیک هستند، به فرم کلی زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n_1},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n_2}}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}_1^\top\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top\mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{c}_2^\top\mathbf{y} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{u}_1 \le \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_2\mathbf{y} + \mathbf{u}_2 \le \mathbf{0}, \\ & \mathbf{B}_1\mathbf{x} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_2\mathbf{y} + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

توجه شود که قیود تساوی و نامساوی متناظر با متغیرهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از هم جدا هستند و این دو متغیر تنها تابع هدف با هم‌دیگر ظاهر می‌شوند.

جمع‌بندی

برمبنای توضیحات فوق، یک دسته‌بندی از مسایل بهینه‌سازی برحسب نوع توابع ظاهر شده در مساله به صورت است:

۱. مسایل برنامه‌ریزی خطی (LP)
۲. مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP)
   (آ) مسایل دوخطی
   (ب) مسایل درجه دوم (QP)
   (ج) مسایل درجه دوم با قیود درجه دوم (QCQP)
   (د) مسایل غیرخطی کلی

دسته‌بندی بر مبنای پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای تصمیم

در مساله بهینه‌سازی اگر تمامی S_iها (دامنه‌های متغیرها) برابر $\mathbb{R}$ و یا زیربازه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه مساله را یک مساله **بهینه‌سازی پیوسته**[۲۸] گوییم. مثال‌های ۳–۲ و ۳–۳ نمونه‌هایی از مسایل پیوسته را ارایه کرده‌اند.

[26] Quadraticaly Constrained Quadratic Programming (QCQP)
[27] Bilinear programming
[28] Continuous optimization

اما اگر S_i برابر مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یا مجموعه دودویی $\{0,1\}$ و یا هر مجموعه با تعداد عضو متناهی باشد، آن‌گاه مساله را یک **مساله گسسته**[۲۹] می‌نامیم. مساله مطرح شده در مثال ۳–۴ یک مساله گسسته می‌باشد.

در حالت خاصی که تمامی S_iها برابر $\mathbb{Z}$ باشند و یا دارای بی‌نهایت ولی **شمارا** عضو باشند، آن‌گاه مساله را یک مساله **برنامه‌ریزی اعداد صحیح**[۳۰]، یا به اختصار IP، می‌نامند. درحالتی که تمامی S_iها برابر $\{0,1\}$ باشد، آن‌گاه مساله را یک مساله **برنامه‌ریزی دودویی**[۳۱]، یا به اختصار BP، می‌نامند. در برخی منابع، وقتی که S_iها مجموعه‌هایی متناهی باشند، آن‌گاه مساله را یک مساله **بهینه‌سازی ترکیباتی**[۳۲] نامگذاری می‌کنند. برخی از منابع دیگر، اگر منشا مساله از بهینه‌سازی در گراف‌ها و یا ساختارهای شمارشی باشد، از واژه بهینه‌سازی ترکیباتی استفاده می‌کنند.

همچنین ممکن است ناحیه شدنی به‌صورت ترکیبی باشد. یعنی برخی از متغیرهای تصمیم پیوسته و برخی دیگر گسسته باشند. در این حالت مساله را یک مساله **بهینه‌سازی مخلوط**[۳۳] و یا مساله بهینه‌سازی **آمیخته** می‌نامیم. مساله‌های ارایه شده در مثال‌های ۳–۱ و ۳–۷ نمونه‌هایی از یک مساله مخلوط می‌باشند.

دسته‌بندی برمبنای وجود یا عدم وجود قیود

در یک مساله بهینه‌سازی پیوسته اگر قیود تساوی و نامساوی موجود نباشند و همچنین $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ آن‌گاه مساله به **مساله بهینه‌سازی نامقید**[۳۴] موسوم می‌باشد. به این ترتیب، مساله بهینه‌سازی نامقید پیوسته به‌فرم کلی زیر است:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{x})$$

در صورتی که حداقل یک قید تساوی یا نامساوی وجود داشته باشد و یا این‌که $\mathcal{S} \neq \mathbb{R}^n$ (مجموعه‌ای باز نباشد)، آن‌گاه مساله را یک **مساله بهینه‌سازی مقید**[۳۵] می‌نامیم.

برای مسایل گسسته نیز تقسیم‌بندی مقید و نامقید مطرح می‌باشد. به عنوان نمونه، فرم کلی یک مساله برنامه‌ریزی صحیح نامقید را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{x})$$

دسته‌بندی بر مبنای محدب بودن توابع هدف و قیود مساله

در فصل ؟؟ مجموعه‌های محدب و توابع محدب معرفی و تشریح شد. در این بخش به معرفی مسایل **بهینه‌سازی محدب**[۳۶] و یا **برنامه‌ریزی محدب**[۳۷] می‌پردازیم. مساله بهینه‌سازی

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}{\text{minimize}} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1,\ldots,p, \\ &&& h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1,\ldots,q. \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

را یک مساله بهینه‌سازی محدب می‌نامیم، هرگاه

۱. مجموعه دامنه $\mathcal{S}$ یک مجموعه محدب باشد.

۲. تابع f محدب باشد.

۳. توابع متناظر با قیود نامساوی، یعنی $g_1,\ldots,g_p$، محدب باشند.

---

[29] Discrete problem
[30] Integer Programming(IP)
[31] Binary Programming(BP)
[32] Combinatorial Optimization
[33] Mixed optimization problem
[34] Unconstraint optimization problem
[35] Constrained optimization problem
[36] Convex optimization
[37] Convex programming

۴. توابع متناظر با قیود تساوی، یعنی $h_1, \ldots, h_q$، آفینی باشند.

پیرو تعریف فوق، مسایل بهینه‌سازی به دو دسته محدب و غیرمحدب دسته‌بندی می‌شوند. در نگاه اول، این دسته‌بندی ممکن است بی‌مسمی به نظر می‌رسد. اما این دسته‌بندی یکی از مهم‌ترین دسته‌بندی‌ها در مسایل بهینه‌سازی می‌باشد. چرا که مسایل محدب دارای خواص بسیار مناسبی می‌باشند که آن‌ها را در میان مسایل بهینه‌سازی بسیار جذاب کرده است. از مهم‌ترین خواص مفید این مسایل، می‌توان به این نکته اشاره کرد که در مسایل بهینه‌سازی محدب هر می‌نیمم موضعی یک می‌نیمم سراسری می‌باشد.

دسته‌بندی برمبنای متناهی یا نامتناهی بودن بعد مساله

کلیه مسایلی که تا اینجا معرفی و بررسی نمودیم، مجموعه‌های دامنه‌ای S_i زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ بودند. لذا دامنه بردار تصمیم زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. اما می‌دانیم که $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری با بعد n می‌باشد. به این علت، این گونه مسایل را مسایل بهینه‌سازی **متناهی‌البعد**[۳۸] نام‌گذاری می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر اگر مجموعه دامنه‌ای یک مساله بهینه‌سازی زیرمجموعه‌ای از یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد، آن‌گاه مساله را یک مساله بهینه‌سازی متناهی‌البعد نام‌گذاری می‌کنیم.

در مقابل مسایل متناهی‌البعد، مسایل دیگری وجود دارد که در آن‌ها مجموعه دامنه‌ای متغیرهای تصمیم از یک فضای برداری نامتناهی‌البعد انتخاب می‌شود. این گونه مسایل به مسایل بهینه‌سازی **نامتناهی‌البعد**[۳۹] موسوم می‌باشند. در مثال زیر، نمونه‌ای از این مسایل آورده می‌شود.

مثال ۳-۸ (نمونه‌ای از یک مساله بهینه‌سازی نامتناهی‌البعد)

فرض کنیم می‌خواهیم از بین تمامی **توابع هموار** که از نقاط (a, α) و (b, β) می‌گذرند آن تابعی را بیابیم که از دوران آن حول محور xها سطحی با مساحت می‌نیمم حاصل گردد.
در این‌جا، مجموعه دامنه‌ای عبارت است از توابع هموار در بازه $[a, b]$ که آن را با نماد $\mathcal{C}^2[a, b]$ نشان دهیم. همچنین، از هندسه می‌دانیم که مساحت سطح حاصل از دوران تابع $y(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ مساوی است با

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \dot{y}^2}\mathrm{d}x.$$

بنابراین تابع مورد نظر ما از حل مساله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} \underset{y \in \mathcal{C}^2[a,b]}{\text{minimize}} & J(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \dot{y}^2}\mathrm{d}x \\ \text{subject to} & y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{array} \qquad (۵.۳)$$

در مساله فوق، مجموعه دامنه‌ای برابر $\mathcal{C}^2[a, b]$ است، که یک فضای برداری نامتناهی‌البعد می‌باشد. بنابراین این مساله یک مساله نامتناهی‌البعد می‌باشد.

لازم به ذکر است که مسایل بهینه‌سازی متناهی‌البعد به مسایل بهینه‌سازی **پارامتری**[۴۰] یا مسایل بهینه‌سازی **ایستا**[۴۱] نیز موسوم می‌باشند. همچنین، مسایل نامتناهی‌البعد به مسایل بهینه‌سازی **تراجکتوری**[۴۲] و یا مسایل بهینه‌سازی **دینامیکی(پویا)**[۴۳] نیز موسوم می‌باشند.

---
[38] Finite dimensional
[39] Infinite dimensional
[40] Parameter optimization problems
[41] Static optimization problems
[42] Trajectory optimization problems
[43] Dynamic optimization problems

دسته‌بندی برمبنای تصادفی یا قطعی بودن مساله

در مثال‌هایی که در ابتدای فصل آورده شدند، کلیه پارامترهای مساله و متغیرهای تصمیم و همچنین شرایط و محدودیت‌های مساله کاملا مشخص و قابل پیش‌بینی می‌باشد. این گونه مسایل به مسایل بهینه‌سازی **قطعی**[۴۴] موسوم می‌باشند. اما در عمل با مواردی سروکار داریم که پارامترها و تعریف مساله به صورت کامل قابل تعیین و یا پیش‌بینی نمی‌باشد. این گونه مسایل، به مسایل **بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت**[۴۵] و یا **بهینه‌سازی تصادفی**[۴۶] موسوم می‌باشند. در این مسایل، داده‌ها (پارامترهای) مساله، متغیرهای تصمیم و یا تعریف مساله غیرقطعی و تصادفی می‌باشند.

مساله فروشنده در مثال ۳-۱ را در نظر بگیرید. در این مثال فرض شد که فروشنده از فروش کالای iام مقدار مشخص و معینی سود می‌کند. در واقع پارامتر سود را قطعی فرض کردیم. همچنین، با متغیر تصمیم x_i به طور قطعی مشخص کردیم که از هر کالا چه مقدار خریداری می شود. به این ترتیب، مساله فروشنده یک مساله بهینه‌سازی قطعی می‌باشد. حال فرض کنید قیمت کالاها و یا سود حاصل از فروش کالاها به طور دقیق و مشابه جدول مثال ۳-۱ قابل پیش‌بینی نباشد. همچنین، فرض کنید که امکان خرید کالا به هر مقدار مقدور نباشد و مقدار کالایی که فروشنده می‌تواند بخرد به صورت تصادفی باشد. با وجود چنین فرض‌هایی (که واقع‌بینانه هم هستند) گوییم که مساله دارای عدم قطعیت است و مدل‌سازی آن با لحاظ کردن این عدم قطعیت‌ها باید انجام شود.

دسته‌بندی براساس تعداد توابع هدف

تا اینجا، یک تابع هدف برای مساله بهینه‌سازی در نظر گرفتیم. اما، معمولا در عمل، معمولا بهینه شدن چند تابع مطلوب نظر می‌باشد. به عنوان مثال وقتی بخواهیم از یک دستگاه طوری استفاده کنیم که هزینه مصرف انرژی دستگاه می‌نیمم و میزان تولید آن ماکزیمم شود، آن‌گاه با یک مساله دو هدفه روبرو هستیم. در این راستا، بسته به تعداد توابع هدف مورد نظر، مسایل بهینه‌سازی به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند

۱. **مسایل بهینه‌سازی تک‌هدفه**[۴۷]،
۲. **مسایل بهینه‌سازی چندهدفه**[۴۸] و یا مسایل **بهینه‌سازی برداری**[۴۹].

البته همواره امکان بهینه شدن تمامی توابع هدف به طور همزمان وجود ندارد. لذا جواب یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه لزوما تمامی توابع هدف را می‌نیمم نمی‌کند. در این راستا، برای مسایل بهینه‌سازی چندهدفه تعاریف دیگری از جواب و یا جواب‌ها مطرح می‌شود.

دسته بندی بر مبنای به فرم بسته بودن تابع هدف و توابع قیود مساله

مسایل بهینه‌سازی بر مبنای به فرم بسته بودن داده‌های مساله به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند [؟]

۱. مسایلی که مدل ریاضی آن‌ها به **فرم بسته**[۵۰] قابل بیان هستند،
۲. مسایلی که دارای توابع یا داده‌هایی هستند که به فرم بسته قابل ارایه نمی‌باشند، بلکه به صورت **جعبه سیاه**[۵۱] یا **اوراکل**[۵۲] هستند.

[44] Deterministic
[45] Optimization problem under uncertainty
[46] Stochastic optimization
[47] Single objective problem
[48] Multi-objective programing problem
[49] Vector optimization
[50] Closed form
[51] Black box
[52] Oracle

معمولا در مسایل بهینه‌سازی ضابطه تابع هدف و یا توابع قیود به صورت تحلیلی یا به فرم بسته مشخص می‌باشد. به عبارت دیگر این توابع با فرمول‌ها و یا عبارات ریاضی مشخص شده‌اند. این نوع مسایل به مسایل با فرم بسته موسوم می‌باشند.

در مقابل مسایلی وجود دارند که تابع هدف و یا توابع قیود مساله به صورت جعبه سیاه و یا زیر برنامه‌های کامپیوتری می‌باشند که ضابطه آن‌ها به طور کامل مشخص نمی‌باشد. بلکه فقط می‌توان مقدار آن‌ها را به ازای هر ورودی دلخواه به دست آورد. این نوع مسایل در بسیاری از کاربردها ظاهر می‌شوند.

مسایل بهینه‌سازی هموار و ناهموار

در یک مساله بهینه‌سازی، تابع هدف f و توابع قیود g_i و h_j ظاهر می‌شود. حال اگر حداقل یکی از این توابع هموار (پیوسته مشتق‌پذیر) نباشد، آن‌گاه مساله بهینه‌سازی به یک مساله **بهینه‌سازی ناهموار**[۵۳] موسوم می‌باشد. به عنوان مثال می‌دانیم که تابع قدرمطلق یک تابع ناهموار است، لذا وجود تابع قدرمطلق در تابع هدف و یا قیود مدل یک مساله، نشانه ناهموار بودن مدل مساله است.

دسته‌بندی به مسایل تک‌سطحی، دوسطحی و چندسطحی

اگر در قیود یک مساله بهینه‌سازی، یک مساله بهینه‌سازی دیگر ظاهر شود، آن‌گاه مساله را یک مساله بهینه‌سازی **دوسطحی**[۵۴] می‌نامیم. به عبارت دقیق‌تر، مساله‌ای به صورت:

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{x}\in\mathcal{S}_u}{\text{minimize}} \quad f_u(\mathbf{x},\mathbf{y})\\
&\text{subject to} \quad \mathbf{g}_u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \mathbf{0},\\
&\qquad\qquad\quad\ \mathbf{h}_u(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0},\\
&\qquad\qquad\quad\ \underset{\mathbf{y}\in\mathcal{S}_l}{\text{minimize}} \quad f_l(\mathbf{x},\mathbf{y})\\
&\qquad\qquad\quad\ \text{subject to} \quad \mathbf{g}_l(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \mathbf{0},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \mathbf{h}_l(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

یک مساله دوسطحی می‌باشد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در مدل فوق دو مساله بهینه‌سازی داریم که یکی از این مسایل در درون قیود مساله دیگر است. مساله درونی به مساله سطح پایین و مساله بیرونی به مساله سطح بالا موسوم است. در مدل فوق، f_u تابع هدف مساله سطح بالا و f_l تابع هدف سطح پایین می‌باشد. همچنین، هر مساله توابع قیود خاص خود را دارد. $\mathbf{x}$ متغیر تصمیم مساله سطح بالا و $\mathbf{y}$ متغیر تصمیم مساله سطح پایین می‌باشد. $\mathbf{y}$ همان جواب مساله سطح پایین می‌باشد و البته چون $\mathbf{x}$ در مساله سطح پایین ظاهر شده، لذا $\mathbf{y}$ به $\mathbf{x}$ وابسته است. به عبارت دیگر با تغییر $\mathbf{x}$ جواب $\mathbf{y}$ نیز تغییر می‌کند. نکته قابل توجه این است که دو مساله سطح پایین و سطح بالا به صورت تو در تو هستند و نمی‌توان آن‌ها را از هم تفکیک نمود.

برای درک ساختار این مساله، فرض کنید که $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}_u$. حال فرض کنید که جواب مساله سطح پایین به ازای $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ برابر $\bar{\mathbf{y}}$ باشد. حال اگر $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})$ قیود مساله سطح بالا را برآورده کند، یعنی $\mathbf{g}_u(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}) \le \mathbf{0}$ و $\mathbf{h}_u(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$، آن‌گاه $\bar{\mathbf{x}}$ یک جواب شدنی برای مساله سطح بالا می‌باشد. اما اگر $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}})$ قیود مساله سطح بالا را برآورده نکند، آن‌گاه $\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه نشدنی برای مساله سطح بالا است. همچنین، اگر مساله سطح پایین به ازای $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ نشدنی باشد، آن‌گاه $\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه نشدنی برای مساله اولیه است. به این ترتیب، برای تشخیص این که آیا $\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه شدنی برای مساله سطح بالا است،

[53] Non-smooth optimization

[54] Bilevel optimization

لازم است یک مساله بهینه‌سازی حل شود و همچنین قیود نامساوی و تساوی بررسی شوند.

مسایل **بهینه‌سازی چندسطحی**[۵۵] نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. در این مسایل چندین مساله بهینه‌سازی به صورت تو در تو قرار دارند، به طوری که یک مساله سطح بالا وجود دارد و بقیه مسایل در قیدهای مسایل دیگر ظاهر می‌شوند.

مسایل دوسطحی و چندسطحی در برخی کاربردها ظاهر می‌شوند، از جمله در **نظریه بازی‌ها**[۵۶] که بیش از یک تصمیم‌گیرنده با منافع متضاد وجود دارد.

مسایل خوش‌حالت و بدحالت

هر مساله دارای داده‌ها یا پارامترهای ورودی می‌باشد و جواب مساله را می‌توان به عنوان تابعی از این داده‌ها در نظر گرفت. حال اگر با تغییر کوچکی در داده‌ها یا پارامترهای ورودی جواب مساله تغییر زیادی کند، آن‌گاه گوییم که مساله **بدحالت**[۵۷] است. در غیر این صورت مساله **خوش‌حالت**[۵۸] است. در واقع مسایل بدحالت حساسیت بالایی به تغییر داده‌های خود دارند.

در مسایل بهینه‌سازی نیز، بدحالتی تعریف می‌شود. یک مساله بهینه‌سازی بدحالت است اگر تغییر کوچک در داده‌ها یا پارامترهای مساله منجر به تغییرات بزرگی در جواب مساله شود. به عنوان نمونه مساله QP نامقید زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad q(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

در این مساله داده‌ها یا پارامترهای مساله عبارت است از: ماتریس $\mathbf{H}$ و بردار $\mathbf{c}$. حال اگر تغییرهای کوچک در مولفه‌های ماتریس $\mathbf{H}$ و یا بردار $\mathbf{c}$ باعث شود که جواب مساله تغییر زیادی کند، آن‌گاه این مساله یک مساله بدحالت است. طی مطالعه این مساله، نشان داده شده است که به ازای انتخاب‌هایی برای ماتریس $\mathbf{H}$ ممکن است مساله بدحالت و یا خوش‌حالت باشد.

لازم به ذکر است که بدحالتی یک نمره(درجه) است که به مسایل داده می‌شود و بسته به این نمره و بسته به این که چگونه و با چه روشی می‌خواهیم مساله را حل کنیم، آن‌گاه مساله را خوش‌حالت و یا بدحالت در نظر می‌گیریم. برای تشخیص درجه بدحالتی یک مساله بهینه‌سازی از **آنالیز حساسیت**[۵۹] مساله استفاده می‌شود. در مسایل QP نامقید، با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{H}$، آنالیز حساسیت انجام می‌شود و به این ترتیب می‌توان در خصوص خوش‌حالتی یا بدحالتی مساله نظر داد. اما آنالیز حساسیت و تشخیص درجه بدحالتی مسایل کاملا غیرخطی می‌تواند بسیار پیچیده باشد.

نکته قابل توجه در مورد مسایل بدحالت آن است که در حل و تحلیل این مسایل باید دقت و ملاحظات بیشتری لحاظ شود. اگر یک مساله بدحالت را بخواهیم با یک الگوریتم کامپیوتری حل کنیم، آن‌گاه جواب حاصل با خطای زیادی همراه است. هرچند که از یک الگوریتم کارا و دقیق استفاده کنیم.

۴.۳ برخی مسایل خاص در بهینه‌سازی

در حین دسته‌بندی مسایل بهینه‌سازی، برخی مسایل خاص، مانند LP ، QP و غیره معرفی شدند. در این بخش، به معرفی برخی مسایل بهینه‌سازی دیگر می‌پردازیم که در قالب دسته‌بندی‌های قبلی قرار نمی‌گیرند.

---

[55] Multi-level optimization
[56] Games theory
[57] Ill-posed(ill-conditioned)
[58] Well-posed(well-conditioned)
[59] Sensitivity analysis

مسایل کمترین مربعات

مسایل **برنامه‌ریزی کمترین مربعات** [۶۰] (به اختصار LSP) یک دسته از مسایل بهینه‌سازی هستند به طوری که تابع هدف در آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} [r_k(\mathbf{x})]^2$$

به‌طوری‌که $r_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = 1, \cdots, m$ به توابع **مانده** [۶۱] موسوم هستند. به عبارت دیگر، تابع هدف در مسایل LSP از مجموع مربعات m تابع تشکیل شده است. این نوع توابع هدف را می‌توان با نرم دو نیز توصیف کرد. برای این منظور، با تعریف تابع $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ به صورت:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) := [r_1(\mathbf{x}), \cdots, r_m(\mathbf{x})]^\top$$

می‌توان تابع هدف را به فرم

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2^2$$

توصیف نمود. به این ترتیب، فرم کلی مسایل LSP نامقید به صورت زیر است:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{m} [r_k(\mathbf{x})]^2 \tag{۷.۳}$$

همچنین، فرم کلی مسایل LSP مقید به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}{\text{minimize}} \quad & \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_2^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{m} [r_k(\mathbf{x})]^2 \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

مسایل کمترین مربعات در مدل کردن بسیاری از مسایل اقتصادی و مهندسی ظاهر می‌گردند. در بین مسایل غیرخطی ظاهر شده در کاربردها بیشترین آن‌ها از نوع مسایل بهینه‌سازی کمترین مربعات می‌باشد. به‌عنوان نمونه مساله **رگرسیون** [۶۲] و یا **برازش منحنی** [۶۳] که ابزاری پراستفاده در علوم مهندسی است، در نهایت به یک مساله بهینه‌سازی کمترین مربعات تبدیل می‌شود. همچنین، مدل ریاضی اکثر مسایل در مبحث یادگیری ماشین با نظارت از نوع LSP است.

مسایل کمترین مربعات خطی

در مسایل LSP نامقید، اگر تمامی r_kها آفینی و به صورت $r_k(\mathbf{x}) := \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x} - b_k$ باشند، آن‌گاه مساله LSP به مساله **کمترین مربعات خطی** [۶۴] نامقید موسوم می‌باشد و به فرم کلی زیر است:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \textstyle\sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{w}_k^\top \mathbf{x} - b_k\right]^2 \tag{۹.۳}$$

حال اگر $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریسی با سطرهای $\mathbf{w}_1^\top, \ldots, \mathbf{w}_m^\top$ و $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ برداری با مولفه‌های $b_1, \ldots, b_m$ باشند، آن‌گاه تابع هدف در LSP فوق را می‌توان به فرم برداری $\|\mathbf{W}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ بیان نمود. بنابراین، مساله LSP نامقید خطی در فرم برداری به صورت زیر است:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{W}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \tag{۱۰.۳}$$

مسایل LSP مقید را خطی گوییم هرگاه r_kها آفینی باشند و همچنین قیود جبری نیز آفینی باشند. به این ترتیب، فرم

---

[60] Least Square Programming(LSP)
[61] Residual
[62] Regression
[63] Curve fitting
[64] Linear Least Square Programming(LLSP)

کلی یک LSP مقید خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \|\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2 \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

توجه شود که مسایل LSP خطی، برخلاف نام‌گذاری آن‌ها، در خانواده مسایل غیرخطی قرار دارند. در واقع، مسایل LSP خطی جزو خانواده مسایل QP محدب می‌باشند. چرا که تابع هدف $\|\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2$ یک تابع کوادراتیک محدب می‌باشد. برای اثبات این ادعا روابط زیر را ببینید:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2 &= [\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{b}]^\top [\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{b}] \\ &= \left[\mathbf{x}^\top\mathbf{W}^\top - \mathbf{b}^\top\right][\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{b}] \\ &= \mathbf{x}^\top\mathbf{W}^\top\mathbf{W}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top\mathbf{W}^\top\mathbf{b} - \mathbf{b}^\top\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top\mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}^\top\left[\mathbf{W}^\top\mathbf{W}\right]\mathbf{x} - \left[2\mathbf{b}^\top\mathbf{W}\right]\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top\mathbf{b} \end{aligned}$$

توجه شود که $\mathbf{W}^\top\mathbf{W}$ ماتریسی نیمه‌معین مثبت است، لذا محدب بودن تابع هدف نتیجه می‌شود.

مسایل بهینه‌سازی مخروطی و بهینه‌سازی مخروطی مرتبه دو

یک مساله بهینه‌سازی را یک مساله **برنامه‌ریزی مخروطی**[۶۵] می‌نامیم، هرگاه:

- تابع هدف محدب باشد.
- ناحیه شدنی مساله اشتراک مجموعه آفینی و یک مخروط محدب باشد.

با توجه به تعریف فوق، می‌توان نتیجه گرفت که در مسایل برنامه‌ریزی مخروطی، قیود تساوی لزوما از نوع آفینی هستند و قیود نامساوی باید به گونه‌ای باشند که یک مخروط محدب را القا کنند. به این ترتیب، فرم کلی یک مساله برنامه‌ریزی مخروطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{x} \in C, \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

به طوری که f یک تابع محدب و C یک مخروط محدب در $\mathbb{R}^n$ است. واضح است که مسایل برنامه‌ریزی مخروطی زیرشاخه‌ای از مسایل محدب می‌باشند.

برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم

برای تعریف مساله **برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم**[۶۶] لازم است که ابتدا **مخروط مرتبه دو**[۶۷] را تعریف کنیم. مجموعه

$$C_{n+1}^{\text{so}} := \left\{(\mathbf{x}, t) \;\middle|\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\right\} \tag{۱۳.۳}$$

که یک مخروط محدب در $\mathbb{R}^{n+1}$ است به مخروط مرتبه دو موسوم است.

---

[65] Conic programming
[66] Second order cone program
[67] Second order cone

مساله برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو (به اختصار SOCP) به فرم کلی زیر است:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{H}_i\mathbf{x} - \mathbf{r}_i \in C_{k_i}^{\text{so}}, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

به طوری که $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$، $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times n}$، $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^q$، $k_i \in \mathbb{N}$، $\mathbf{H}_i \in \mathbb{R}^{k_i\times n}$، و $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ و همچنین، $C_{k_i}^{\text{so}}$ همان مخروط مرتبه دو در $\mathbb{R}^{k_i}$ است.

با فرض:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_i \\ \hat{\mathbf{q}}_i^\top \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{(k_i-1)\times n}, \ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{r} := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i \\ s_i \end{bmatrix}, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{k_i-1}, \ s_i \in \mathbb{R},$$

می‌توان قید $\mathbf{H}_i\mathbf{x} - \mathbf{r}_i \in C_{k_i}^{\text{so}}$ را به صورت معادل زیر بازنویسی کرد:

$$\|\mathbf{Q}_i\mathbf{x} + \mathbf{u}_i\|_2 \leq \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + s_i.$$

به عبارت دیگر، قیود تعلق به مخروط مرتبه دو را می‌توان به صورت جبری و با کمک نرم دو بیان نمود. به این ترتیب، مساله SOCP را می‌توان به فرم معادل زیر نیز بیان نمود:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{Q}_i\mathbf{x} + \mathbf{u}_i\|_2 \leq \mathbf{q}_i^\top \mathbf{x} + s_i, \ i = 1, \ldots, p, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

خاطرنشان می‌شود که اگر $\mathbf{Q}_i = \mathbf{0}$ و $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$، آن‌گاه مساله SOCP به مساله LP تبدیل می‌شود. همچنین، در فصل ؟؟، نشان خواهیم داد که مسایل QP و QCQP را می‌توان به فرم SOCP تبدیل نمود. بنابراین، مسایل LP ، QP و QCQP حالت خاصی از مساله SOCP می‌باشند.

ارتباط بین مسایل SOCP و برنامه‌ریزی مخروطی

چنین به نظر می‌رسد که مساله SOCP حالت خاصی از مساله برنامه‌ریزی مخروطی است. اما لازم به ذکر است که مجموعه نقاطی که در شرط $\mathbf{H}_i\mathbf{x} - \mathbf{r}_i \in C_{k_i}^{\text{so}}$ صدق می‌کنند، لزوما یک مخروط محدب نمی‌باشد(تمرین ؟؟؟ را ببینید). بنابراین، ناحیه شدنی مساله SOCP لزوما اشتراک یک مجموعه آفینی و یک مخروط محدب نمی‌باشد. به این ترتیب، در نگاه اول چنین برداشت می‌شود که مساله SOCP یک مساله برنامه‌ریزی مخروطی نمی‌باشد. اما می‌توان مساله SOCP را به صورت معادل زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{y}_i\in\mathbb{R}^{k_i}}{\text{minimize}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{y}_i \in C_{k_i}^{\text{so}}, \\ & \mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i\mathbf{x} - \mathbf{r}_i, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

که یک مساله برنامه‌ریزی مخروطی است. بنابراین، مساله SOCP در فرم (۱۴.۳) یک مساله برنامه‌ریزی مخروطی محسوب نمی‌شود ولی می‌توان یک فرم معادل از آن استخراج نمود که آن فرم یک برنامه‌ریزی مخروطی باشد.

مسایل بهینه‌سازی جدایی‌پذیر

تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را یک تابع **جدایی‌پذیر**[۶۸] گوییم، هرگاه f به صورت مجموع توابع یک‌متغیره باشد. به عبارت ریاضی، f جدایی‌پذیر است هر گاه به فرم زیر باشد:

$$f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n).$$

تابع $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := \mathrm{e}^{x_1} + \sin(x_2) + x_3^2 + \frac{1+x_4}{1+x_4^2}$ یک تابع جدایی‌پذیر می‌باشد. همچنین، هر تابع آفینی یک تابع جدایی‌پذیر است.

هر مساله بهینه‌سازی که تابع هدف، توابع قیود تساوی و توابع قیود نامساوی جدایی‌پذیر باشند به مساله **بهینه‌سازی جدایی‌پذیر**[۶۹] موسوم است.

توجه شود که مساله جدایی‌پذیر نامقید را می‌توان به n مساله بهینه‌سازی یک‌متغیره تقسیم کرد و با حل مسایل یک‌متغیره به حواب مساله جدایی‌پذیر رسید. به عبارت دقیق‌تر، مساله بهینه‌سازی جدایی‌پذیر و نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\underset{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$$

متناظر با مساله فوق، n مساله یک‌متغیره و نامقید زیر را در نظر می‌گیریمم:

$$i\text{ام مساله} : \underset{x_i \in \mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad f_i(x_i)$$

اگر x_i^* جواب مساله iام باشد، آن‌گاه $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ جواب مساله اصلی است.

۵.۳ نامگذاری مسایل بهینه‌سازی برمبنای نوع آن‌ها

دیدیم که هر مساله بهینه‌سازی از دیدگاه‌های متفاوتی دسته‌بندی می‌شوند. به عنوان مثال یک مساله بهینه‌سازی ممکن است از یک دیدگاه ممکن است خطی باشد و از دیدگاه دیگر یک مساله گسسته اعداد صحیح باشد. در این صورت، این مساله را یک مساله اعداد صحیح خطی نام‌گذاری می‌کنیم و با نماد ILP مشخص می‌کنیم. در جدول زیر برخی از این نام‌گذاری‌ها به همراه واژه خلاصه آن‌ها ارایه شده است.

---

[68] Separable

[69] Separable optimization

نام مساله به فارسی	نام مساله به انگلیسی	نام خلاصه
برنامه‌ریزی خطی	Linear Programming	LP
برنامه‌ریزی درجه دوم	Quadratic Programming	QP
برنامه‌ریزی درجه دوم با قیود درجه دو	Qudratically Constrained Quadratic Prog.	QCQP
برنامه‌ریزی غیرخطی	Non-Linear Programming	NLP
برنامه‌ریزی اعداد صحیح خطی	Integer Linear Programming	ILP
برنامه‌ریزی دودویی خطی	Binary Linear Programming	BLP
برنامه‌ریزی اعداد صحیح مخلوط خطی	Mixed Integer Linear Programming	MILP
برنامه‌ریزی مخلوط خطی	Mixed Linear Programming	MLP
برنامه‌ریزی اعداد صحیح مخلوط درجه دو	Mixed Integer Quadratic Programming	MIQP
برنامه‌ریزی اعداد صحیح غیرخطی	Integer Non-Linear Programming	INLP
برنامه‌ریزی دودویی غیرخطی	Binary Non-Linear Programming	BNLP
برنامه‌ریزی اعداد صحیح مخلوط غیرخطی	Mixed Integer Non-Linear Programming	MINLP
برنامه‌ریزی خطی تصادفی	Stochastic Linear Programming	SLP
برنامه‌ریزی درجه دوم تصادفی	Stochastic Quadratic Programming	SQP
برنامه‌ریزی درجه دوم چندهدفه	Multi-Objective Quadratic Programming	MOQP
برنامه‌ریزی محدب	Convex Programming	CP
مسایل کمترین مربعات	Least-Square Poblems	LSP
برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دو	Second-Order Cone Programming	SOCP

END