HW3 第 6 题舍选法 Gauss-Lorentz 报告

王启骅 PB20020580

2022 年 10 月 7 日

1 题目

对两个函数线型（Gauss 分布和类 Lorentz 型分布），设其一为 p(x)，另一为 F(x)，其中常数 $a \neq b \neq 1$，用舍选法对 p(x) 抽样。将计算得到的归一化频数分布直方图与理论曲线 p(x) 进行比较，讨论差异，讨论抽样效率。

其中 $Gauss \sim\ exp(-ax^2)$，$Loretz \sim\ \frac{1}{1+bx^4}$

2 算法原理

根据计算分析得取 a=3,b=2,c=1.5 可以使 $c/(1+bx^4) \geq \sqrt{\frac{a}{\pi}} exp(-ax^2)$ 在实轴上全部成立，其中 $\sqrt{\frac{a}{\pi}}$ 为归一化因子，并令

$$F(x) = \frac{c}{1+bx^4} \tag{1}$$

$$p(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-ax^2) \tag{2}$$

产生在 [0,1] 均匀分布的随机数列 ξ_1, ξ_2

$$\xi_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\xi_x} F(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx} = \frac{\ln(\frac{\sqrt{2}\xi_x^2+2^{0.75}\xi_x+1}{\sqrt{2}\xi_x^2-2^{0.75}\xi_x+1}) + 2\arctan(2^{0.75}\xi_x+1) - 2\arctan(1-2^{0.75}\xi_x)}{4\pi} + 0.5 \tag{3}$$

$$\xi_y = \xi_2 F(\xi_x) = \frac{1.5\xi_2}{1+2\xi_x^4} \tag{4}$$

使用二分法解方程 (3) 即可得到 $\xi_x(\xi_1)$, 并判断条件 $\xi_y < p(\xi_x)$, 则取 $x = \xi_x$，否则舍去该点。之后将点数据 x 输入到 txt 文件，并用 python 读取统计画图。

3 结果

取 10^6 个随机数点绘图如图 1 所示，统计结果与原 Gaussian 曲线基本吻合。

图 2 为舍选法抽样效率的输出结果，可见舍选法效率达到 0.356 以上。

4 结论

所存在的差异主要来源于首先由于结果是统计结果，取点数量不是无穷大，得到的只是频数的相对分布，所以不能和标准曲线完全吻合。其次在统计过程中，由于是连续变量的统计，只能将一定区域划分为小的统计区间逐个区间进行

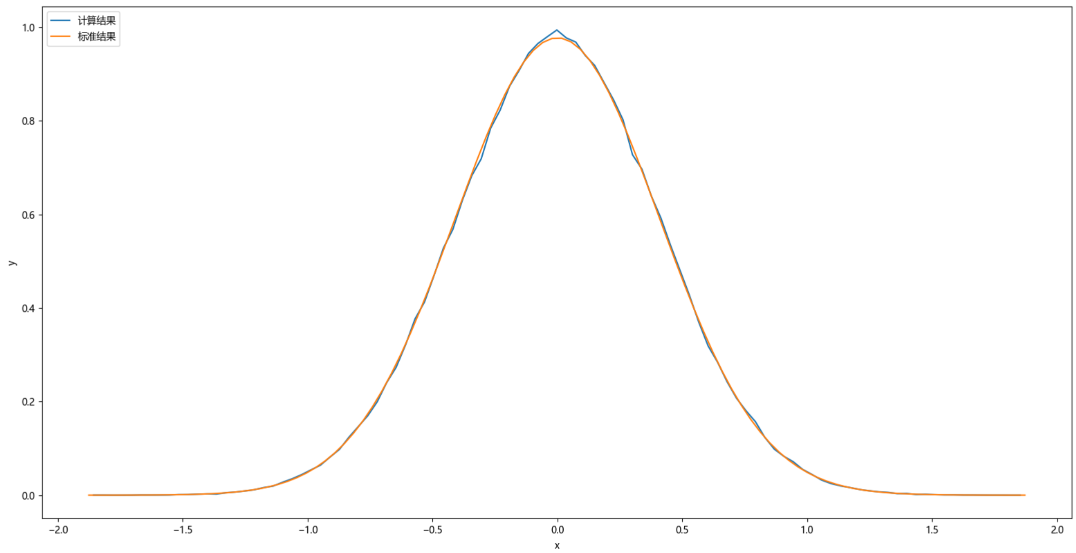

图 1: 舍选法结果与标准曲线对比图

图 2: 舍选法抽样效率

计数，由于实际上概率密度分布应该是对无穷小区间的统计结果，则应该为区间越小，则曲线越平滑，越接近标准曲线。

舍选法的效率与初始设定的 a,b,c 值有关。c 越小，lorentz 函数越贴近 gauss 函数达到相切的位置，在 x 较大处 gauss 函数与 lorentz 函数的比例越大，既 F(x)>p(x) 允许的情况下 b 越大 a 越小，则抽样效率越高。