HW4 第 8 题 Monte Carlo 积分

王启骅 PB20020580

2022 年 10 月 7 日

1 题目

用 Monte Carlo 方法计算如下定积分，并讨论有效数字位数。

1.$\int_0^5 \sqrt{x^2+2\sqrt{x}}$

2.$\int_0^{7/10} dx \int_0^{4/7} dy \int_0^{9/10} dz \int_0^2 du \int_0^{13/11} dv(5+x^2-y^2+3xy-z^2+u^3-v^3)$

2 算法原理

第一题采用掷石法，由于被积函数 f(x) 在 [0,5] 单调递增，有最大值 M=$\sqrt{25+2\sqrt{5}}$, 产生位于 $x \in [0,5], y \in [0,\sqrt{25+2\sqrt{5}}]$ 各 n 个均匀分布随机数，对于每一点，$y < f(x)$ 则记录，满足的点数除以总点数并乘以区间面积即为积分结果。

第二题采用平均值方法，生成 $x \in [0,7/10], y \in [0,4/7], z \in [0,2], u \in [0,2], v \in [0,13/11]$ 的各 n 个均匀分布随机数

$$\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} g(x_i,y_i,z_i,u_i,v_i) \tag{1}$$

为函数在区间内的均值，再乘以区间总体积得到积分值。

3 结果

如图 1 是积分结果与标准结果的对比，分别取 $n = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$。对比得到在 $n = 10^4$, 两题的积分有效位数都只有 2 位，$n = 10^5, 10^6$ 都有 3 位有效数字，$n = 10^7$ 时第一题掷石法 4 位有效数字，第二题平均值法仍为 3 位有效数字，$n = 10^8$ 第一题有 4 位有效数字，第二题 5 位有效数字

4 结论

有计算结果可得随着总点数 n 的量级增大，积分结果的精度有效数字增多，但当 n 较大是有效位数的增加并不明显，精度变化较慢。并且实验得到在相同总点数 n 的情况下的计算结果有效数字位数并不是每次都完全一致，具有一定的随机性。

```
1.
Monte Carlo (n=       10000 )   15.328286106605519
standard      15.439010735567484
2.
Monte Carlo (n=       10000 )   5.6882819557675672
standard    5.67712092
```

(a) $n = 10^4$

```
1.
Monte Carlo (n=      100000 )   15.466992573764639
standard      15.439010735567484
2.
Monte Carlo (n=      100000 )   5.6809504492298428
standard    5.67712092
```

(b) $n = 10^5$

```
1.
Monte Carlo (n=     1000000 )   15.427416442821782
standard      15.439010735567484
2.
Monte Carlo (n=     1000000 )   5.6734517246593077
standard    5.67712092
```

(c) $n = 10^6$

```
1.
Monte Carlo (n=    10000000 )   15.434511916503856
standard      15.439010735567484
2.
Monte Carlo (n=    10000000 )   5.6768713725616839
standard    5.67712092
```

(d) $n = 10^7$

```
1.
Monte Carlo (n=   100000000 )   15.437383764688871
standard      15.439010735567484
2.
Monte Carlo (n=   100000000 )   5.6771819872746274
standard    5.67712092
```

(e) $n = 10^8$

图 1: Monte Carlo 积分结果