

HW2 第 4 题 pdf 函数

王启骅 PB20020580

2022 年 10 月 7 日

1 题目

设 pdf 函数满足关系式

$$p'(x) = a\delta(x) + b \exp(-cx), x \in [-1, 1], a \neq 0$$

讨论该函数性质并给出抽样方法。

2 算法原理

对 $p'(x)$ 积分得到

$$p(x) = a\theta(x) - \frac{b}{c} \exp(-cx) + Const \quad (1)$$

再次积分得到

$$\xi = \int_{-1}^x p(x)dx = \begin{cases} \frac{b}{c^2}[\exp(-cx) - \exp(c)] + Const(x+1) & , x < 0 \\ ax + \frac{b}{c^2}[\exp(-cx) - \exp(c)] + Const(x+1) & , x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

将其归一化, 得到

$$Const = \frac{1 - \frac{b}{c^2}[e^{-c} - e^c] - a}{2} \quad (3)$$

该方程为一个超越方程, 没有解析解, 之后可以通过二分法反解方程 (2) 得到 $x(\xi)$, 其中 ξ 对应均匀分布在 $[0,1]$ 的随机数列, 产生的数列 x 即为所求的抽样序列。

或者通过舍选法, 由于 $p(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为有界函数, 故一定有上界 M , 当 a, b, c 均 >0 时有 $M = a - \frac{b}{c} \exp(-c) + Const$, 并取

$$g(x, y) = \frac{1}{2M} \quad (4)$$

$$\xi_1 = \frac{\xi_x + 1}{2} \quad (5)$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_y}{M} \quad (6)$$

其中 ξ_1, ξ_2 为在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机数序列, 得到

$$\xi_x = 2\xi_1 - 1 \quad (7)$$

$$\xi_y = M\xi_2 \quad (8)$$

判断随机数列中的每一点

$$M\xi_2 \leq p(2\xi_1 - 1) \tag{9}$$

若成立，则取 $x = 2\xi_1 - 1$