HW11 第 17 题 DLA 分形维数

王启骅 PB20020580

2022 年 12 月 1 日

1 题目

进行单中心 DLA 模型的模拟 (可以用圆形边界，也可以用正方形边界)，并用两种方法计算模拟得到的 DLA 图形的分形维数，求分形维数时需要作出双对数图。

2 算法原理

首先使用 DLA 方法产生生长模型，生长方法如下。运用 2 维 DLA 模型，首先生成一个二维 $L \times L = 1001 \times 1001$ 的 mesh 网格，用 1 作为生长点，0 作为未生长的点。在网格中心 $(\frac{L+1}{2}, \frac{L+1}{2})$ 放置结晶核设置为 1。

在模拟的每次记录新结晶点到原点的距离，与当前最大半径进行比对，得到当前图形的最大半径 r_{max}。n 为已产生的粒子数。则在这里在半径为 $start = r_{max} + \delta r$ 的圆上，通过生成 $[0\ 2\pi]$ 均匀分布的随机数生成在圆上均匀产生的粒子。设定在粒子游走到 $edge = 2 * (r_{max} + \delta r)$ 的圆外时认为消失，进行下一次模拟。当 edge 达到 mesh 网格的边界处时，即 $2 * (r_{max} + \delta r) > \frac{L-1}{2} - 1$ 时，直接设定 $edge = \frac{L-1}{2} - 1$。如果游走到周围有格点为 1 时，则将该粒子所在的格点设为 1，认为生长，并进行下一次模拟。

接下来计算图形的分形维数，一下使用两种方法。

首先使用 sandbox 法，在已经生成好的图形中，使用边长为 $r = 2 * i$ 的正方形网格，以 $(\frac{L+1}{2}, \frac{L+1}{2})$ 为中心，记录网格中的像素数 N，对结果 $\ln N \sim \ln r$ 线性拟合得到的斜率即为分形维数 D。

接下来使用面积-回转半径法。这里可以对于生长过程中的各个时间的单个结晶结果认为是多个结晶生长的平均，从而将该方法推广至单个生长的情况。对于每个新生长的质点，计算构型的回转半径

$$R_g^2 = \frac{\sum r_i^2}{N} \tag{1}$$

之后线性拟合 $\ln N \sim \ln R_g$ 得到斜率即为该分形维数。

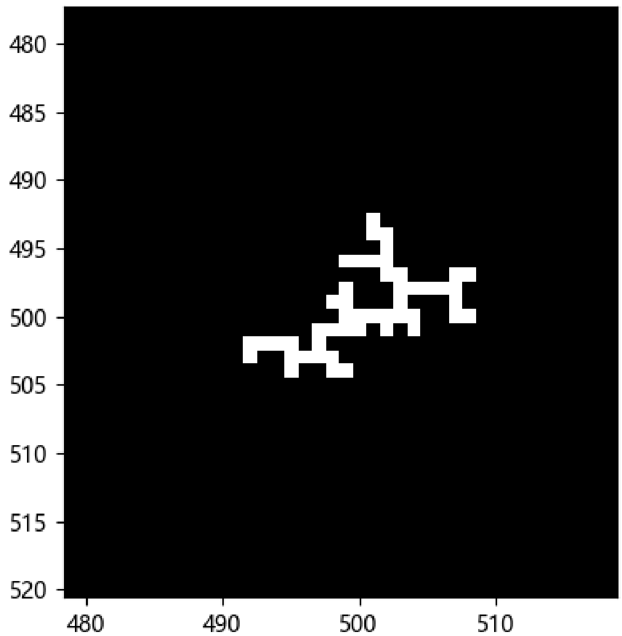
3 结果

3.1 DLA 结果

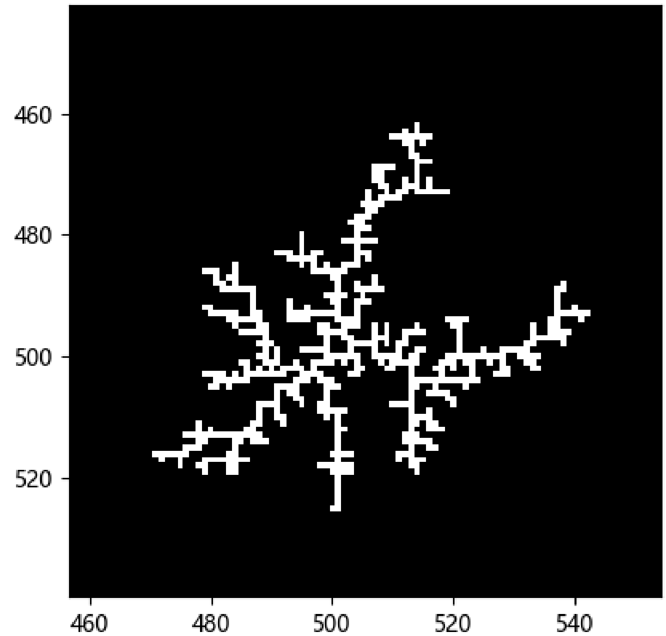
以下是 DLA 生长在 n=100, $10^3, 10^4, 10^5$ 下的结果。如图1

3.2 Sandbox 计数法

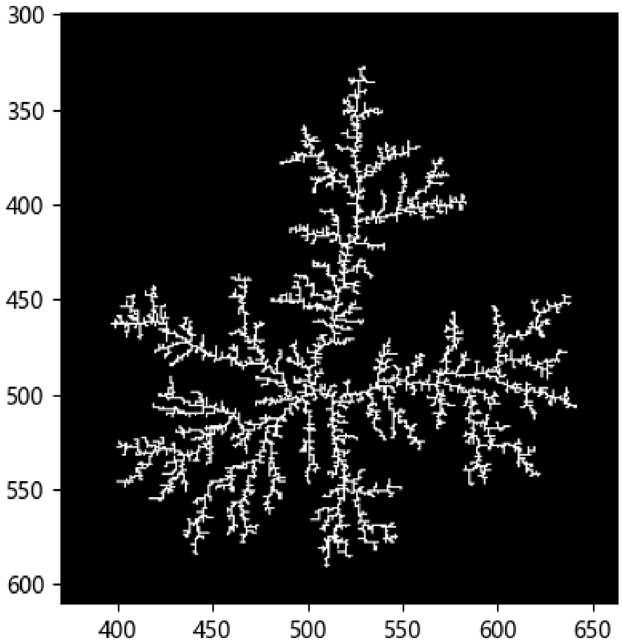
这里采用正方形边长为 $r = 2 - 2^9$ 进行计数。计算得到的拟合曲线如图2 由图可得拟合结果斜率即分形维数为 D=1.65318±0.01322, 与标准结果二维下分形维数结果 D=1.65 较为接近。



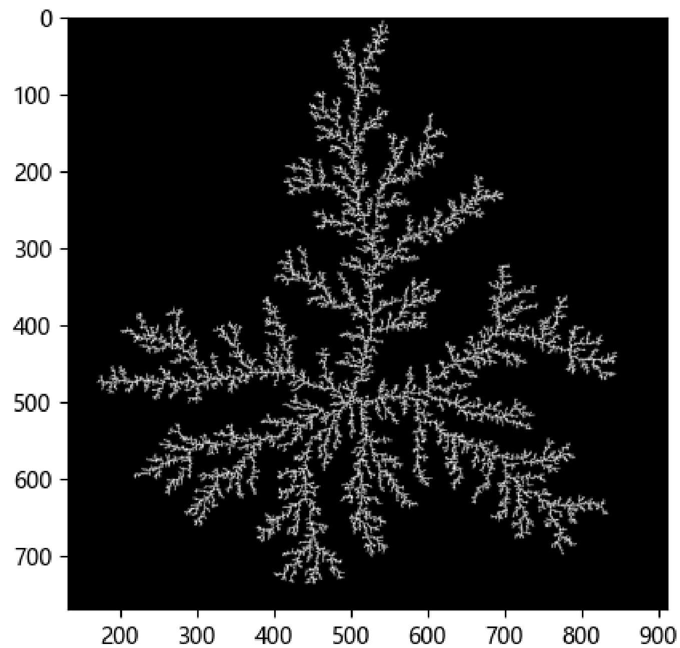
(a) $n = 100$



(b) $n = 10^3$



(c) n=10^4



(d) n=10^5

图 1: DLA **生长结果**

3.3 面积-回转半径法

接下来讨论面积-回转半径法取粒子数等于 $N = 2 - 2^{15}$ 下，拟合结果如图 3 可见结果 D=1.83075 $\pm$ 0.03726, 与标准结果相差较大。由于在开始阶段点数较少的情况下误差较大，可以将开始的点舍弃，得到的结果为 可见结果 D=1.69124 $\pm$ 0.01511, 结果更接近标准结果，拟合也更接近线性。

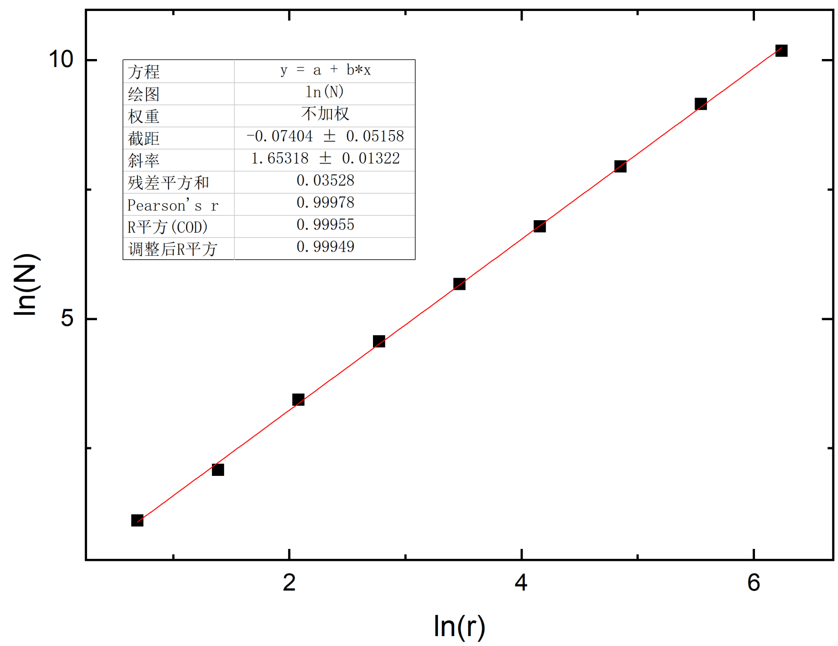


图 2: Sandbox 拟合结果

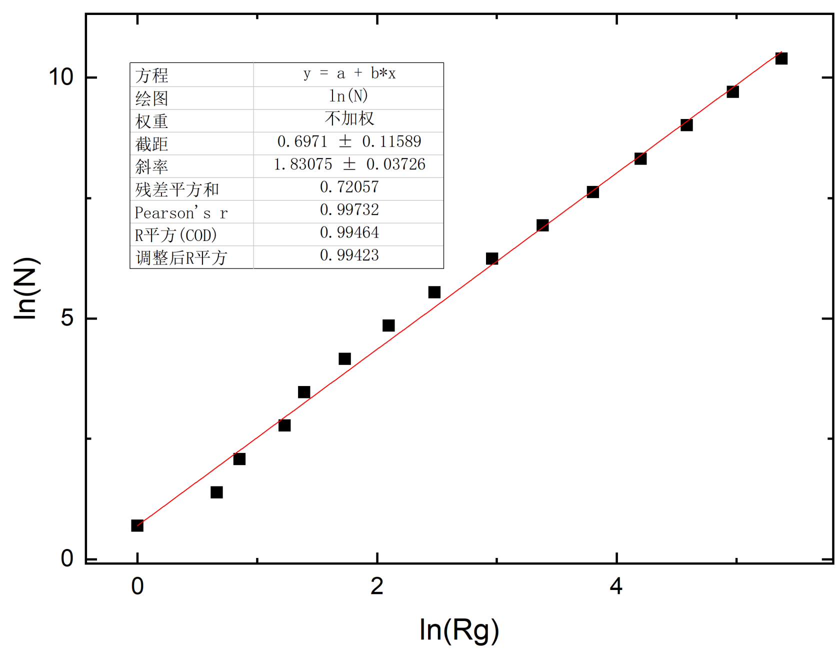


图 3: 面积-回转半径法拟合结果

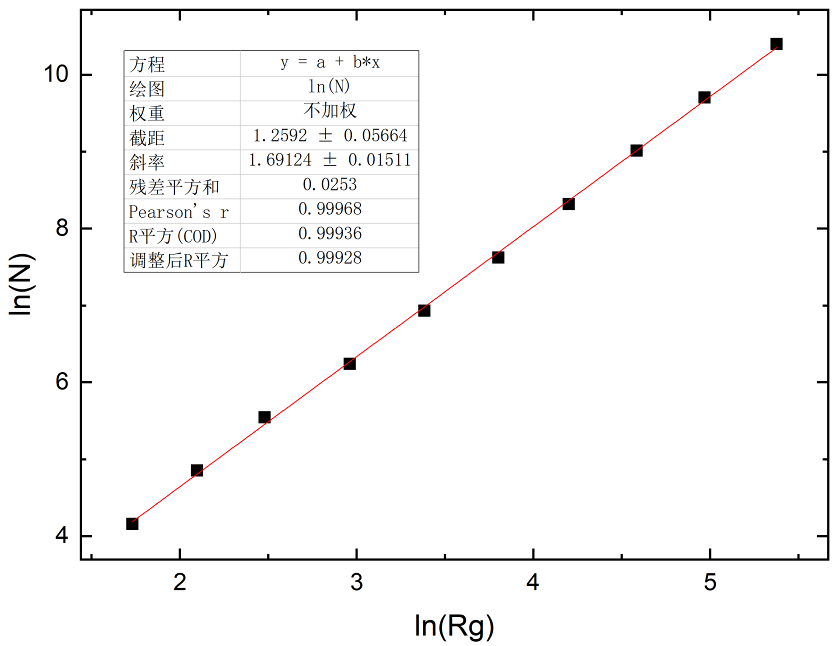


图 4: 面积-回转半径法舍去初始点拟合结果

4 结论

根据模拟的结果，可以得到对于中心单核生长的 DLA，Sandbox 计数法的结果更加准确，适合单中心生长的分形维数计算。而面积-回旋半径计数法的误差相对更大，可能是由于这里推广模型，将同一平面上的多个生长推广为同一中心生长的不同时间段，导致结果的偶然性更大，实际分形是受之间时间的生长情况影响的，而平面上多个核生长则是相对独立的结果进行平均，因此该方法有较大的误差。