

HW2 第 5 题验证 Marsaglia 抽样方法

王启骅 PB20020580

2022 年 10 月 7 日

1 题目

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在 (x, y) 平面上投影的几率分布函数。并由此验证 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1 - 2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样。

2 算法原理

由于在球面上产生，故取 $\rho = 1$ ， u, v 为两个 $[-1, 1]$ 的均匀分布随机数序列，对于该均匀球面分布有

$$dN = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\phi d\theta \quad (1)$$

则可得在 xy 平面上的投影，面积元变为原来的 $\cos\theta$ 倍，为则分布函数

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 2 \times \frac{1}{4\pi \times \cos\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

再根据 xy 与 uv 的关系式得到

$$\left| \frac{\partial x, y}{\partial u, v} \right| = \begin{vmatrix} 2\sqrt{1-u^2-v^2} - \frac{2u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & -\frac{2uv}{1-u^2-v^2} \\ -\frac{2uv}{1-u^2-v^2} & 2\sqrt{1-u^2-v^2} - \frac{2v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = 4 - 8u^2 - 8v^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} g(x, y) dx dy &= g(u, v) \left| \frac{\partial x, y}{\partial u, v} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}} (4 - 8u^2 - 8v^2) du dv \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2}} du dv \\ &= \frac{2}{\pi} du dv \end{aligned} \quad (4)$$

3 结果

使用 Marsaglia 抽样方法给出的结果导入到 txt 文件后用 python 画图得到球面上的均匀分布点如图

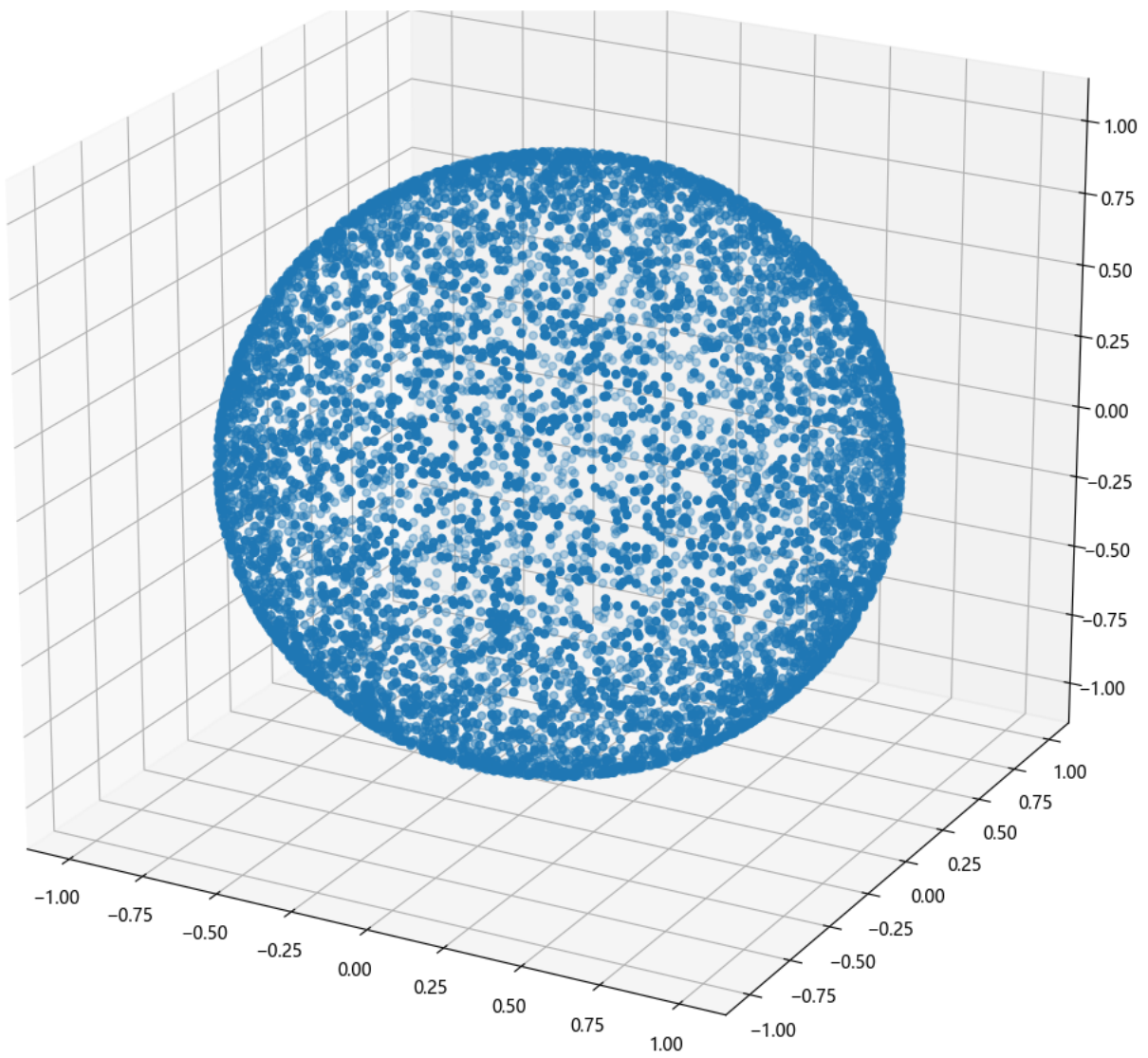


图 1: 半球面均匀随机分布

4 结论

根据 u, v 的分布函数为常数可得该 Marsaglia 抽样方法的确为球面上的随机抽样。根据图 1 可得球面上点是均匀分布的。