HW4 第 9 题中心极限定理验证

王启骅 PB20020580

2022 年 10 月 19 日

1 题目

考虑泊松分布、指数分布，并再自设若干个随机分布（它们有相同或不同的 μ, σ），通过 Monte Carlo 模拟，验证中心极限定理成立（N =2、5、10）。

2 算法原理

泊松分布，首先产生满足泊松分布的随机数，根据泊松实验，对于一个 [0,1] 均匀随机数列 u, 计算该数列依次相乘，当刚好乘积小于 $e^{-\lambda}$ 时，返回上一个所乘的次数 k 即为满足泊松分布 $p(k) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ 的随机数。对于该泊松分布 $\mu = \lambda$。

指数分布，对于一个 [0,1] 均匀随机数列 u, 根据直接抽样法,$x = -\mu\ln(1-u)$, 由于均匀分布 u 等效于 $x = -\mu\ln(u)$, 即为 $p(x) = \frac{1}{\mu}\exp(-\frac{x}{\mu})$ 的抽样。对于该指数分布 $\mu = \mu$。

均匀分布，在直接以 [0,1] 均匀随机数列 u 作为分布计算。对于该均匀分布 $\mu = 0.5$。

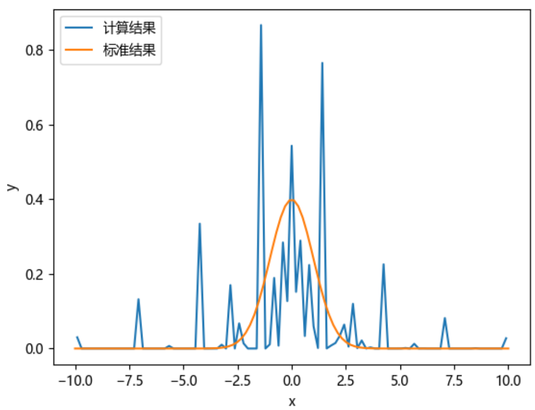
最后取高斯分布，根据 Box-Muller 法，对于 [0,1] 均匀随机数列 u,v, 抽样方法为 $x = \sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v)$。对于高斯分布 $\mu = 0$。

3 结果

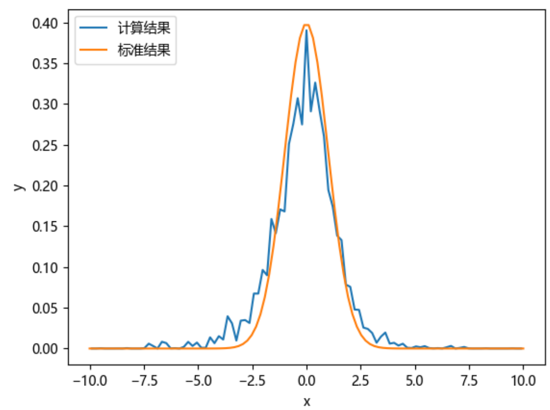
这里取总点数 k=10^5, 泊松分布 $\lambda = 5$, 指数分布 $\mu = 5$, 均匀分布位于 [0,1]。绘制出了 $\frac{\langle f\rangle - \mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}$ 的分布函数图

4 结论

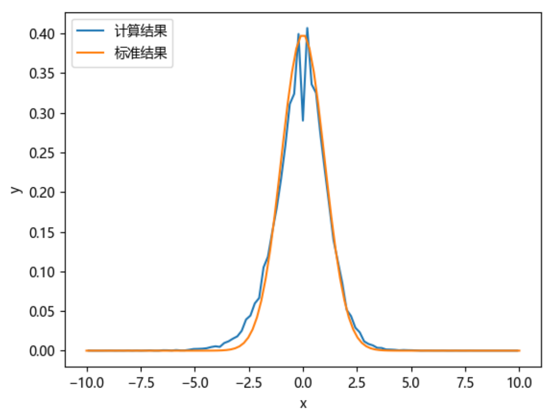
根据各个分布的误差统计图与标准正态分布图的对比得到，当 N=2 时，明显与标准正态有较大误差，而且对于泊松分布，由于是离散性分布，且 N 很小，产生的误差分布也较为离散。由于中心极限定理是在 $N \to \infty$ 时误差分布达到的极限为标准正态，可见在 N 从 2 到 5 到 10 增大时，误差分布曲线逐渐趋近于标准正态分布函数。



(a) N=2

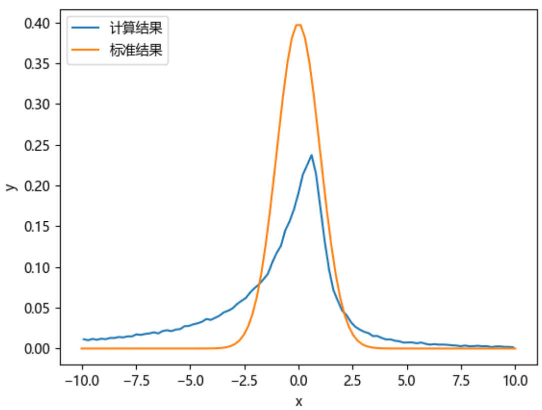


(b) N=5

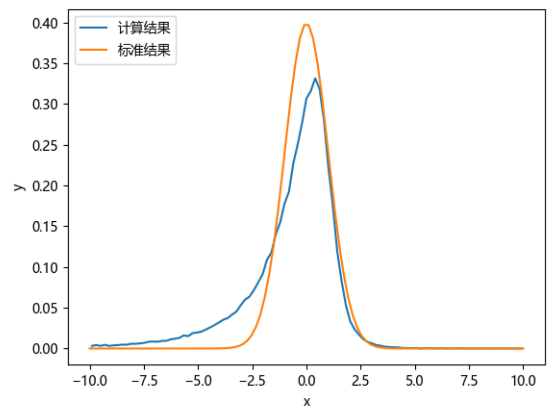


(c) N=10

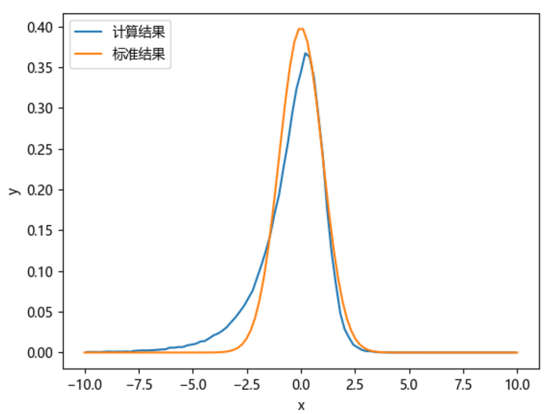
图 1: Poisson



(a) N=2

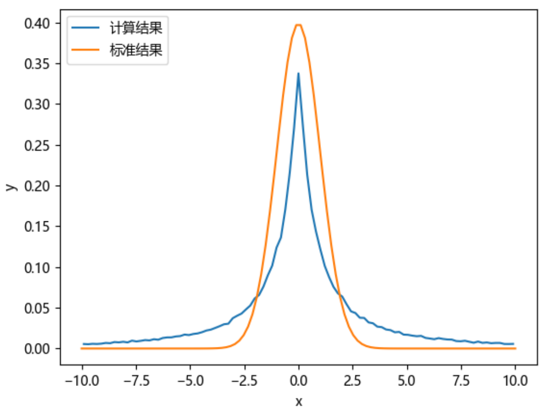


(b) N=5

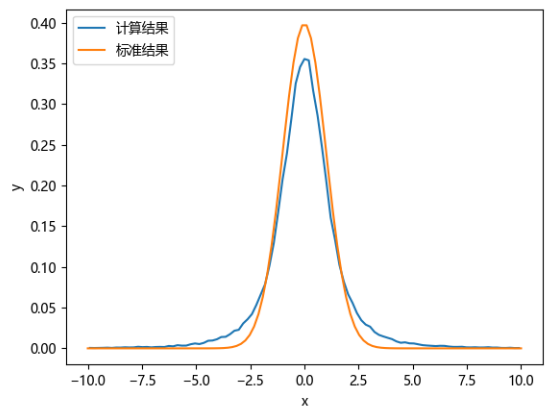


(c) N=10

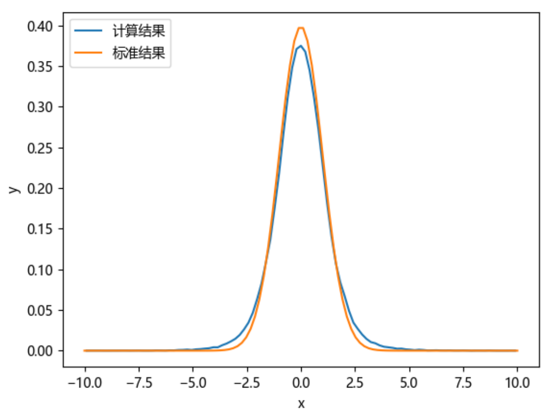
图 2: 指数分布



(a) N=2

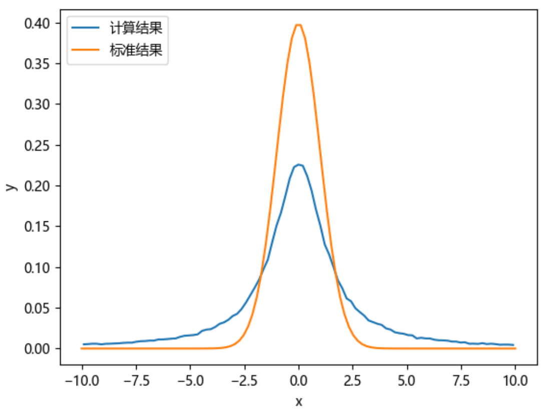


(b) N=5

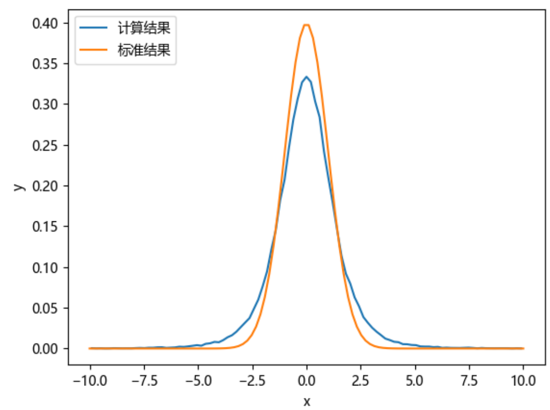


(c) N=10

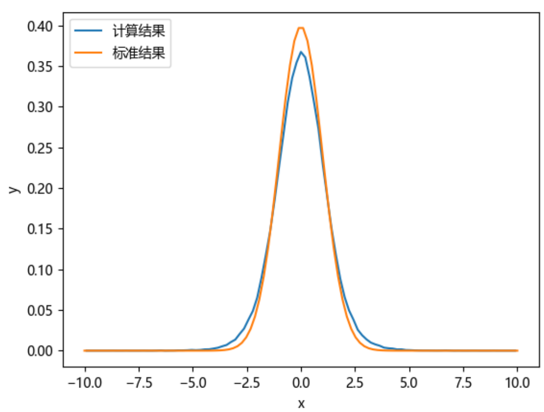
图 3: 均匀分布



(a) N=2



(b) N=5



(c) N=10

图 4: 高斯分布