漫谈Fourier 分析与偏微分方程

张平

中国科学院数学与系统科学研究院

河南省科学院数学研究所

2024年7月4日

university-logo-fi

- 经典的Fourier方法
- 拟微分算子和Fourer积分算子
- Bony的仿微分分解
- FBI 变换和Wigner变换

university-logo-fi

定义

$f(x) \in C([-\pi,\pi])$, 则称

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

为f的Fourier级数,其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

定义

$f(x) \in C([-\pi, \pi])$, 则称

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big)$$

为f的Fourier级数,其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

定义

- $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 则称

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

为f的Fourier变换;

- $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则称

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi$$

为f的Fourier逆变换;

定义

- $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 则称

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

为f的*Fourier*变换;

- $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则称

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi$$

为f的*Fourier*逆变换;

一维热传导方程的混合型问题

Fourier (1822):《*Théorie Analytique de la Chaleur*》中提出了公认的Fourier方法.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, & 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = \phi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{1}$$

university-logo-fi

一维热传导方程的混合型问题

Fourier (1822):《*Théorie Analytique de la Chaleur*》中提出了公认的Fourier方法.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, & 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{1}$$

求解: $u(t,x) = T(t)X(x)$ 并代入(1)得:

$$T'X - a^2TX'' = 0 \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

以及

$$T(t)X(0) = X(l)T(t) = 0.$$

Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

和

$$\frac{d}{dt}T(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

求解: $u(t,x)=T(t)X(x)$ 并代入(1)得:

$$T'X-a^2TX''=0\Leftrightarrow\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

以及

$$T(t)X(0)=X(l)T(t)=0.$$

Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X(l)=0,\end{cases}\tag{2}$$

和

$$\frac{d}{dt}T(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

解(2)得特征值: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 和特征函数:$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$.

寻求(1)的解:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

特别地当$t = 0$ 时:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

university-logo-fi

解(2)得特征值: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 和特征函数:$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x.$

寻求(1)的解:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

特别地当$t=0$时:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

解(2)得特征值: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 和特征函数:$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$.

寻求(1)的解:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

特别地当$t = 0$ 时:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

全体特征函数集$\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}$ 组成$L^2(0,l)$ 上的完备正交基,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \phi_n = \frac{2}{l} \int_0^1 \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

求解$T_n(t)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} T_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(t)|_{t=0} = \phi_n, \end{cases} \tag{3}$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

全体特征函数集$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 组成$L^2(0,l)$ 上的完备正交基,

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \phi_n=\frac{2}{l}\int_0^1\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

求解$T_n(t)$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}T_n(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0,\\ T_n(t)|_{t=0}=\phi_n,\end{cases}\tag{3}$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n e^{-\lambda_n a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

university-logo-fi

全体特征函数集$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 组成$L^2(0,l)$ 上的完备正交基,

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \phi_n=\frac{2}{l}\int_0^1\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

求解$T_n(t)$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}T_n(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0,\\ T_n(t)|_{t=0}=\phi_n,\end{cases}\tag{3}$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n e^{-\lambda_n a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

一般地,设$f \in L^1(-\infty,\infty)$, 则对任意$l > 0$, $f(x)$ 可展开成Fourier级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\Big),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy.$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}(x-y)\,dy.$$

一般地,设$f \in L^1(-\infty,\infty)$, 则对任意$l > 0$, $f(x)$ 可展开成Fourier级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\Big),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy.$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}(x-y)\,dy.$$

一般地,设$f \in L^1(-\infty,\infty)$, 则对任意$l > 0$, $f(x)$ 可展开成Fourier级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\Big),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy.$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}(x-y)\,dy.$$

记$\xi_1=\frac{\pi}{l},\cdots,\xi_n=\frac{n\pi}{l},\cdots,\Delta\xi_n=\xi_{n+1}-\xi_n=\frac{\pi}{l}$. 上述积分的极限:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{l\to\infty}\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\xi_n\int_{-l}^{l}f(y)\cos\xi_n(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\xi(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{i\xi(x-y)}\,dy.
\end{aligned}$$

上式称为实形式的Fourier积分公式.

定义

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

- $$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \tag{4}$$

  为f 的Fourier变换,

- $$f^{\vee}(x) = \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

  为f 的逆Fourier变换.

问题：1 的Fourier变换和Fourier逆变换?

university-logo-fi

定义

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

- $$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \tag{4}$$

  为f的Fourier变换,

- $$f^{\vee}(x) = \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

  为f的逆Fourier变换.

问题：1 的Fourier变换和Fourier逆变换?

定义

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

-
$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \tag{4}$$

  为f 的Fourier变换,

-
$$f^{\vee}(x) = \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

  为f 的逆Fourier变换.

问题: 1 的Fourier变换和Fourier逆变换?

university-logo-fi

定义

- 急减函数空间S是由满足

$$\sup_{R^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

的$C^\infty(R^n)$函数所构成的空间;

- S空间上的连续线性泛函称为S'广义函数.

定义

- 急减函数空间S是由满足

$$\sup_{R^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

  的$C^\infty(R^n)$函数所构成的空间;

- S空间上的连续线性泛函称为S'广义函数.

命题

- 若$\phi \in \mathcal{S}$, 则$\hat{\phi}(\xi) \in \mathcal{S}$ 且$\widehat{(D^\alpha \phi)}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, $\widehat{(x^\alpha \phi)}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, 其中$D = \frac{1}{i}\nabla$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$;
- Parseval 公式: 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

命题

- 若$\phi \in \mathcal{S}$, 则$\hat{\phi}(\xi) \in \mathcal{S}$ 且$(D^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, $(x^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, 其中$D = \frac{1}{i}\nabla$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$;
- Parseval 公式: 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

命题

- 若$\phi \in \mathcal{S}$, 则$\hat{\phi}(\xi) \in \mathcal{S}$ 且$(D^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, $(x^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, 其中$D = \frac{1}{i}\nabla$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$;
- Parseval 公式: 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

university-logo-fi

命题

- 若$\phi \in \mathcal{S}$, 则$\hat{\phi}(\xi) \in \mathcal{S}$ 且$(D^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, $(x^\alpha \phi)\hat{}(\xi) = (-D_\xi)^\alpha \hat{\phi}(\xi)$, 其中$D = \frac{1}{i}\nabla$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$;
- *Parseval* 公式: 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\bar{\hat{g}}$;
- 若$f, g \in \mathcal{S}$, 则$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

university-logo-fi

定义

设$f \in \mathcal{S}'$，定义其Fourier变换如下：

$$< \mathcal{F}(f), \phi > = < f, \mathcal{F}(\phi) >, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

命题

若$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，则$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$，

- $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$. (Parseval 公式)

问题回答：$\hat{1} = \delta$.

定义

设$f \in \mathcal{S}'$, 定义其Fourier变换如下:

$$<\mathcal{F}(f), \phi> = < f, \mathcal{F}(\phi)>, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

命题

若$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

- $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$. (*Parseval* 公式)

问题回答: $\hat{1} = \delta$.

定义

设$f \in \mathcal{S}'$, 定义其Fourier变换如下:

$$<\mathcal{F}(f), \phi> = < f, \mathcal{F}(\phi)>, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

命题

若$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

- $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$. (Parseval 公式)

问题回答: $\hat{1} = \delta$.

定义

设$P(\partial)=\sum_{|p|\le m} a_p D^p$ 是R^n中常系数偏微分算子.若$E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$满足$P(\partial)E=\delta$, 称$E$是$P(\partial)$的基本解.

求解:$P(\partial)u=f$ 则$u=E*f$.

例子1. Laplace 算子Δ: $E=C_n|x|^{2-n}$ 若$n>2$; $E=\frac{1}{2\pi}\log|x|$ 若$n=2$;

例子2. 热传导算子$\partial_t-\Delta$: $E(t,x)=(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}H(t)\exp(-|x|^2/4t)$.

定义

设$P(\partial)=\sum_{|p|\le m} a_p D^p$ 是R^n中常系数偏微分算子.若$E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$满足$P(\partial)E=\delta$, 称$E$是$P(\partial)$的基本解.

求解:$P(\partial)u=f$ 则$u=E*f$.

例子1. Laplace 算子Δ: $E=C_n|x|^{2-n}$ 若$n>2$; $E=\frac{1}{2\pi}\log|x|$ 若$n=2$;

例子2. 热传导算子$\partial_t-\Delta$: $E(t,x)=(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}H(t)\exp(-|x|^2/4t)$.

定义

设$P(\partial)=\sum_{|p|\le m}a_pD^p$ 是R^n中常系数偏微分算子.若$E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$满足$P(\partial)E=\delta$, 称$E$是$P(\partial)$的基本解.

求解:$P(\partial)u=f$ 则$u=E*f$.

例子1. Laplace 算子Δ: $E=C_n|x|^{2-n}$ 若$n>2$; $E=\frac{1}{2\pi}\log|x|$ 若$n=2$;

例子2. 热传导算子$\partial_t-\Delta$: $E(t,x)=(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}H(t)\exp(-|x|^2/4t)$.

定义

设$P(\partial)=\sum_{|p|\le m} a_p D^p$ 是R^n中常系数偏微分算子.若$E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$满足$P(\partial)E=\delta$, 称$E$是$P(\partial)$的基本解.

求解:$P(\partial)u=f$ 则$u=E*f$.

例子1. Laplace 算子Δ: $E=C_n|x|^{2-n}$ 若$n>2$; $E=\frac{1}{2\pi}\log|x|$ 若$n=2$;

例子2. 热传导算子$\partial_t-\Delta$: $E(t,x)=(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}H(t)\exp(-|x|^2/4t)$.

定义

$P(D)=\sum_{|p|\le m} a_p D^p$是椭圆算子若存在常数$C_0>0$使得

$$\Big|\sum_{|p|=m} a_p \xi^p\Big| \ge C_0|\xi|^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

形式上,

$$P(D)E=\delta \Rightarrow P(\xi)\cdot \hat{E}=1 \Rightarrow \hat{E}=\frac{1}{P(\xi)}.$$

但由于$P(\xi)$的是零点,首先要证明$U(\xi)=\frac{1}{P(\xi)}$确定一个缓增广义函数,从而其Fourier逆变换即为P的基本解.

university-logo-fi

定义

$P(D)=\sum_{|p|\le m} a_p D^p$是椭圆算子若存在常数$C_0>0$使得

$$\Big|\sum_{|p|=m} a_p\xi^p\Big|\ge C_0|\xi|^m,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

形式上,

$$P(D)E=\delta\Rightarrow P(\xi)\cdot\hat{E}=1\Rightarrow\hat{E}=\frac{1}{P(\xi)}.$$

但由于$P(\xi)$的是零点,首先要证明$U(\xi)=\frac{1}{P(\xi)}$确定一个缓增广义函数,从而其Fourier逆变换即为P的基本解.

定义

$P(D)=\sum_{|p|\le m}a_pD^p$是椭圆算子若存在常数$C_0>0$使得

$$\Big|\sum_{|p|=m}a_p\xi^p\Big|\ge C_0|\xi|^m,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

形式上,

$$P(D)E=\delta\Rightarrow P(\xi)\cdot\hat{E}=1\Rightarrow\hat{E}=\frac{1}{P(\xi)}.$$

但由于$P(\xi)$的是零点,首先要证明$U(\xi)=\frac{1}{P(\xi)}$确定一个缓增广义函数,从而其Fourier逆变换即为P的基本解.

Malgrange 和Ehrenpreis (1954)独立证明了

定理

$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解E在$\mathcal{D}'(n+1)$.

- L. Hörmander 于1958年证明了$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解在$\mathcal{S}'$.
- J. 巴罗斯-尼托,广义函数引论,欧阳光中,朱学炎译,上海科技出版社,1981.
- 张平和邵瑞杰, 广义函数论和函数空间导论, 科学出版社, 2024.

Malgrange 和Ehrenpreis (1954)独立证明了

定理

$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解E在$\mathcal{D}'^{(n+1)}$.

- L. Hörmander 于1958年证明了$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解在$\mathcal{S}'$.
- J. 巴罗斯-尼托,广义函数引论,欧阳光中,朱学炎译,上海科技出版社,1981.
- 张平和邵瑞杰, 广义函数论和函数空间导论, 科学出版社, 2024.

Malgrange 和Ehrenpreis (1954)独立证明了

定理

$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解E在$\mathcal{D}'^{(n+1)}$.

- L. Hörmander 于1958年证明了$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解在$\mathcal{S}'$.
- J. 巴罗斯-尼托,广义函数引论,欧阳光中,朱学炎译,上海科技出版社,1981.
- 张平和邵瑞杰, 广义函数论和函数空间导论, 科学出版社, 2024.

Malgrange 和Ehrenpreis (1954)独立证明了

定理

$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解E在$\mathcal{D}'^{(n+1)}$.

- L. Hörmander 于1958年证明了$\mathbb{R}^n$ 上的任一常系数偏微分算子都有基本解在$\mathcal{S}'$.
- J. 巴罗斯-尼托,广义函数引论,欧阳光中,朱学炎译,上海科技出版社,1981.
- 张平和邵瑞杰, 广义函数论和函数空间导论, 科学出版社，2024.

university-logo-fi

从20世纪中叶后,由于多自变量线性偏微分方程Cauchy问题解的唯一性,局部可解性等问题的推动, L. Nirenberg, L. Hömander等人引入了拟微分算子.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$系数线性偏微分算子$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$.
$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi$

$$\begin{aligned} P(x,D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi}P(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi = Au(x). \end{aligned}$$

从20世纪中叶后,由于多自变量线性偏微分方程Cauchy问题解的唯一性,局部可解性等问题的推动, L. Nirenberg, L. Hömander等人引入了拟微分算子.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$系数线性偏微分算子$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$.

$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi$

$$\begin{aligned} P(x,D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi}P(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi = Au(x). \end{aligned}$$

从20世纪中叶后,由于多自变量线性偏微分方程Cauchy问题解的唯一性,局部可解性等问题的推动, L. Nirenberg, L. Hömander等人引入了拟微分算子.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$系数线性偏微分算子$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$.
$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi$

$$\begin{aligned}P(x,D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi}P(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi = Au(x).\end{aligned}$$

从20世纪中叶后,由于多自变量线性偏微分方程Cauchy问题解的唯一性,局部可解性等问题的推动, L. Nirenberg, L. Hömander等人引入了拟微分算子.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$系数线性偏微分算子$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$.
$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi$

$$
\begin{aligned}
P(x,D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi}P(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi = Au(x).
\end{aligned}
$$

定义

给定$0 \le \delta < \rho \le 1$及实数$m$, 若$a(x,\xi) \in C^\infty(R_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, 且

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

则称$a \in S_{\rho,\delta}^m$.

$\rho = 1, \delta = 0$ 并简记为S^m.

定义

若$a(x,\xi) \in S^m$, 则称连续线性映射$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$a(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi$$

为拟微分算子,并称$a(x,\xi)$为其象征.

定义

给定$0 \le \delta < \rho \le 1$及实数$m$, 若$a(x,\xi) \in C^\infty(R_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, 且

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

则称$a \in S_{\rho,\delta}^m$.

$\rho = 1, \delta = 0$ 并简记为S^m.

定义

若$a(x,\xi) \in S^m$, 则称连续线性映射$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$a(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi$$

为拟微分算子,并称$a(x,\xi)$为其象征.

定义

给定$0 \le \delta < \rho \le 1$及实数$m$, 若$a(x,\xi) \in C^\infty(R_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, 且

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

则称$a \in S_{\rho,\delta}^m$.

$\rho = 1, \delta = 0$ 并简记为S^m.

定义

若$a(x,\xi) \in S^m$, 则称连续线性映射$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$a(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi$$

为拟微分算子,并称$a(x,\xi)$为其象征.

震荡积分

$$L(\xi, D_y) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+|\xi|^2}(1-\xi\cdot D_y),$$

则

$$L(\xi, D_y)e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

$$I_k(u)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\left({}^{*}L(\xi, D_y)\right)^k u(y)\, dy,\, d\xi,$$

$$a(x,\xi)\left({}^{*}L(\xi, D_y)\right)^k u(y) = O((1+|\xi|)^{m-k}),$$

定义

$$a(x,D)u = I_k(u) \quad k > m+d.$$

震荡积分

$$L(\xi, D_y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+|\xi|^2}(1-\xi\cdot D_y),$$

则

$$L(\xi, D_y)e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

$$I_k(u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\left({}^*L(\xi, D_y)\right)^k u(y)\, dy,\, d\xi,$$

$$a(x,\xi)\left({}^*L(\xi, D_y)\right)^k u(y) = O((1+|\xi|)^{m-k}),$$

定义

$$a(x,D)u = I_k(u) \quad k > m+d.$$

震荡积分

$$L(\xi, D_y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+|\xi|^2}(1-\xi\cdot D_y),$$

则

$$L(\xi, D_y)e^{i(x-y)\cdot\xi} = e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

$$I_k(u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\Big({}^{*}L(\xi, D_y)\Big)^k u(y)\,dy,\,d\xi,$$

$$a(x,\xi)\Big({}^{*}L(\xi, D_y)\Big)^k u(y) = O((1+|\xi|)^{m-k}),$$

定义

$$a(x,D)u = I_k(u) \quad k > m+d.$$

定理

$a(x,D)$ 为$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(R^n)$中连续线性算子,它可唯一扩张为$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$中连续线性算子.

定理

若$a(x,\xi)\in S^m$,则对任意实数s, $a(x,D):H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子.

定理

$a(x,D)$ 为$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(R^n)$中连续线性算子,它可唯一扩张为$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$中连续线性算子.

定理

若$a(x,\xi)\in S^m$,则对任意实数s, $a(x,D):H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$的有界线性算子.

定义

设$a_j(x,\xi)\in S^{m_j}$, m_j单调下降趋于$-\infty$. 若$a(x,\xi)$ 对任意的k成立$a-\sum_{j<k}a_j\in S^{m_k}$, 则称$a(x,\xi)$具有渐近展开式$a\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j$.

应用经典的Borel技巧,

定理

设$a_j(x,\xi)\in S^{m_j}$, m_j单调下降趋于$-\infty$, 必存在$a(x,\xi)\in S^{m_0}$ 使得$a\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j$, 且在允许相差$S^{-\infty}$的意义下,该象征是唯一的.

定义

设$a_j(x,\xi)\in S^{m_j}$, m_j单调下降趋于$-\infty$. 若$a(x,\xi)$ 对任意的k成立$a-\sum_{j<k}a_j\in S^{m_k}$, 则称$a(x,\xi)$具有渐近展开式$a\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j$.

应用经典的Borel技巧,

定理

设$a_j(x,\xi)\in S^{m_j}$, m_j单调下降趋于$-\infty$, 必存在$a(x,\xi)\in S^{m_0}$ 使得$a\sim\sum_{j=1}^{\infty}a_j$, 且在允许相差$S^{-\infty}$的意义下,该象征是唯一的.

拟微分算子代数

定理

设$A = a(x, D), B = b(x, D)$为拟微分算子,则

- A的共轭算子A^*也为拟微分算子,且

$$\sigma_{A^*}(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a}(x, \xi);$$

- A和B 的复合$B \circ A$也是拟微分算子,且它

$$\sigma_{B \circ A}(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha b(x, \xi) D_x^\alpha a(x, \xi).$$

拟微分算子代数

定理

设$A=a(x,D),B=b(x,D)$为拟微分算子,则

- A的共轭算子A^*也为拟微分算子,且

$$\sigma_{A^*}(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\bar{a}(x,\xi);$$

- A和B 的复合$B\circ A$也是拟微分算子,且它

$$\sigma_{B\circ A}(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha b(x,\xi)D_x^\alpha a(x,\xi).$$

拟微分算子的应用

- 一阶严格双曲组

$$PU = D_t U - A(t,x) D_x U = F, \quad U(0,x) = U_0 \tag{6}$$

F和U表示N维向量,$A(t,x)$为$N \times N$矩阵. 如A存在N个互异的特征值, 称(6)为严格双曲组.

定理

设P为严格双曲组且$U_0 \in H^s_c(R^N)$, $F \in L^2([0,T]; H^s_c(\mathbb{R}^n))$, 则(6)存在唯一解$U \in C^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^N))$, 且满足能量不等式

$$\|U(t,\cdot)\|_s^2 \le C\Big(\|U_0\|_s^2 + \int_0^T \|F(\tau,\cdot)\|_s^2 \, d\tau\Big).$$

拟微分算子的应用

- 一阶严格双曲组

$$PU = D_t U - A(t,x) D_x U = F, \quad U(0,x) = U_0 \tag{6}$$

F和U表示N维向量,$A(t,x)$为$N \times N$矩阵. 如A存在N个互异的特征值, 称(6)为严格双曲组.

定理

设P为严格双曲组且$U_0 \in H_c^s(R^N)$, $F \in L^2([0,T]; H_c^s(\mathbb{R}^n))$, 则(6)存在唯一解$U \in C^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^N))$, 且满足能量不等式

$$\|U(t,\cdot)\|_s^2 \le C\Big(\|U_0\|_s^2 + \int_0^T \|F(\tau,\cdot)\|_s^2 \, d\tau\Big).$$

拟微分算子的应用

- 一阶严格双曲组

$$PU = D_tU - A(t,x)D_xU = F, \quad U(0,x) = U_0 \tag{6}$$

F和U表示N维向量,$A(t,x)$为$N\times N$矩阵. 如A存在N个互异的特征值, 称(6)为严格双曲组.

定理

设P为严格双曲组且$U_0 \in H^s_c(R^N)$, $F \in L^2([0,T]; H^s_c(\mathbb{R}^n))$, 则(6)存在唯一解$U \in C^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^N))$, 且满足能量不等式

$$\|U(t,\cdot)\|_s^2 \le C\Big(\|U_0\|_s^2 + \int_0^T \|F(\tau,\cdot)\|_s^2\, d\tau\Big).$$

定义

算子$D_t - A(t,x,D_x)$ 称为可对称化的是指存在$N\times N$ 矩阵$r_0(t,x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$满足

- $r_0(t,x,\xi)$关于ξ正齐零次,且在$|\xi|=1$上各阶导数有界;
- $r_0a_1(t,x,\xi)$为$Hermite$阵;
- $r_0\geq cI$.

r_0 也称为$D_t - A$的对称化子.

定理

若算子$P = D_t - A(t,x)D_x$ 为严格双曲的,则P存在对称化子.

计算:

$$\frac{d}{dt}(r_0(t,x,D)U,U) = (R\partial_t U,U) + (RU,\partial_t U) + (R_t U,U).$$

定义

算子$D_t - A(t,x,D_x)$ 称为可对称化的是指存在$N\times N$ 矩阵$r_0(t,x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$满足

- $r_0(t,x,\xi)$关于ξ正齐零次,且在$|\xi|=1$上各阶导数有界;
- $r_0 a_1(t,x,\xi)$为Hermite阵;
- $r_0\geq cI$.

r_0 也称为$D_t - A$的对称化子.

定理

若算子$P = D_t - A(t,x)D_x$ 为严格双曲的,则P存在对称化子.

计算:

$$\frac{d}{dt}(r_0(t,x,D)U,U) = (R\partial_t U,U) + (RU,\partial_t U) + (R_t U,U).$$

定义

算子$D_t - A(t,x,D_x)$ 称为可对称化的是指存在$N\times N$ 矩阵$r_0(t,x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$满足

- $r_0(t,x,\xi)$关于ξ正齐零次,且在$|\xi|=1$上各阶导数有界;
- $r_0a_1(t,x,\xi)$为$Hermite$阵;
- $r_0\geq cI$.

r_0 也称为$D_t - A$的对称化子.

定理

若算子$P = D_t - A(t,x)D_x$ 为严格双曲的,则P存在对称化子.

计算:

$$\frac{d}{dt}(r_0(t,x,D)U,U) = (R\partial_t U,U) + (RU,\partial_t U) + (R_t U,U).$$

- Taylor, Michael E. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Progress in Mathematics, 100. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- S. Alinhac, P. Gérard, *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*, Graduate Studies in Mathematics, 82. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- 陈恕行,拟微分算子,高等教育出版社,2006.

- Taylor, Michael E. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Progress in Mathematics, 100. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- S. Alinhac, P. Gérard, *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*, Graduate Studies in Mathematics, 82. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- 陈恕行,拟微分算子,高等教育出版社,2006.

- Taylor, Michael E. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Progress in Mathematics, 100. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- S. Alinhac, P. Gérard, *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*, Graduate Studies in Mathematics, 82. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- 陈恕行,拟微分算子,高等教育出版社,2006.

命题

记C是以0为圆心,以3/4为内半经,以8/3为外半径的圆环,则存在两径向函数$\chi \in C_0^\infty(B(0,4/3))$, $\varphi \in C_0^\infty(C)$ 使得

- $\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$
- $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0,$
- $|p-q| \geq 2 \Rightarrow supp\varphi(2^{-q}\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset,$
- $q \geq 1 \Rightarrow supp\chi(\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset.$

命题

记C是以0为圆心,以3/4为内半经,以8/3为外半径的圆环,则存在两径向函数$\chi \in C_0^\infty(B(0,4/3)), \varphi \in C_0^\infty(C)$ 使得

- $\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$
- $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0,$
- $|p-q| \geq 2 \Rightarrow supp\varphi(2^{-q}\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset,$
- $q \geq 1 \Rightarrow supp\chi(\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset.$

命题

记C是以0为圆心,以3/4为内半经,以8/3为外半径的圆环,则存在两径向函数$\chi \in C_0^\infty(B(0,4/3))$, $\varphi \in C_0^\infty(C)$ 使得

- $\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1$,
- $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0$,
- $|p-q| \geq 2 \Rightarrow supp\varphi(2^{-q}\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset$,
- $q \geq 1 \Rightarrow supp\chi(\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset$.

命题

记C是以0为圆心,以3/4为内半经,以8/3为外半径的圆环,则存在两径向函数$\chi \in C_0^\infty(B(0,4/3)), \varphi \in C_0^\infty(C)$ 使得

- $\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$
- $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0,$
- $|p-q| \geq 2 \Rightarrow supp\varphi(2^{-q}\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset,$
- $q \geq 1 \Rightarrow supp\chi(\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset.$

university-logo-fi

命题

记C是以0为圆心,以3/4为内半经,以8/3为外半径的圆环,则存在两径向函数$\chi \in C_0^\infty(B(0,4/3)), \varphi \in C_0^\infty(C)$ 使得

- $\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$
- $\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0,$
- $|p-q| \geq 2 \Rightarrow supp\varphi(2^{-q}\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset,$
- $q \geq 1 \Rightarrow supp\chi(\cdot) \cap supp\varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset.$

定义

$$\Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi)),$$
$$\Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u, \quad S_q u = \sum_{p \le q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q}D)u.$$

引理

(Bernstein引理) 设$b \ge a \ge 1$, 则

- $supp\hat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \le C^k \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|u\|_{L^a}$;
- $supp\hat{u} \subset C(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow C^{-k}\lambda^k \|u\|_{L^a} \le \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \le C^k \lambda^k \|u\|_{L^a}$.

定义

$$\Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi)),$$
$$\Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u, \quad S_q u = \sum_{p\le q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q}D)u.$$

引理

(Bernstein引理) 设$b \ge a \ge 1$, 则

- $supp\hat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \le C^k \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a}$;
- $supp\hat{u} \subset C(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow C^{-k}\lambda^k\|u\|_{L^a} \le \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \le C^k\lambda^k\|u\|_{L^a}$.

定义

$$\Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi)),$$
$$\Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u, \quad S_q u = \sum_{p\le q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q}D)u.$$

引理

(**Bernstein引理**) 设$b \geq a \geq 1$, 则

- $supp\hat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^k \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a}$;
- $supp\hat{u} \subset \mathcal{C}(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow C^{-k}\lambda^k\|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^k\lambda^k\|u\|_{L^a}$.

定理

(Sobolev函数刻划) 设$u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, 则$u = \sum_q \Delta_q u$,

$$\frac{1}{C^{[s]+1}}|u|_s^2 \le \sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 \le C^{[s]+1}|u|_s.$$

可用$\left(\sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$代替$H^s(\mathbb{R}^d)$ 范数

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理

(Sobolev函数刻划) 设$u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, 则$u = \sum_q \Delta_q u$,

$$\frac{1}{C^{[s]+1}}|u|_s^2 \leq \sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 \leq C^{[s]+1}|u|_s.$$

可用$\left(\sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$代替$H^s(\mathbb{R}^d)$ 范数

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理

(Hölder函数刻划) 设$\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $u \in C^\rho(\mathbb{R}^d)$, 则$u = \sum_q \Delta_q u$,

$$\sup_q 2^{q\rho}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \le C^{[\rho]+1}\|u\|_\rho.$$

可用$\sup_q 2^{q\rho}\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$代替$C^\rho(\mathbb{R}^d)$ 范数

$$\sum_{|\alpha|\le[\rho]}\Big(\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y}\frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}}\Big).$$

university-logo-fi

定理

(Hölder函数刻划) 设$\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $u \in C^\rho(\mathbb{R}^d)$, 则$u = \sum_q \Delta_q u$,

$$\sup_q 2^{q\rho} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \le C^{[\rho]+1} \|u\|_\rho.$$

可用$\sup_q 2^{q\rho}\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$代替$C^\rho(\mathbb{R}^d)$ 范数

$$\sum_{|\alpha|\le[\rho]} \Big(\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\rho-[\rho]}} \Big).$$

应用

$u \in C^{\epsilon}$, 则

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0 \log\Big(e + \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\Big).$$

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty} &\leq \sum_{q\leq N-1}\|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q\geq N}\|\Delta_q f\|_{L^\infty}\\ &\leq (N+1)\|f\|_0 + \frac{2^{-(N-1)\epsilon}}{2^\epsilon - 1}\|f\|_\epsilon.\end{aligned}$$

取

$$N = 1 + \Big[\frac{1}{\epsilon}\log_2\frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\Big].$$

应用

$u \in C^{\epsilon}$, 则

$$\|f\|_{L^\infty} \le \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0 \log\Big(e + \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\Big).$$

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty} &\le \sum_{q\le N-1}\|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q\ge N}\|\Delta_q f\|_{L^\infty}\\ &\le (N+1)\|f\|_0 + \frac{2^{-(N-1)\epsilon}}{2^{\epsilon}-1}\|f\|_\epsilon.\end{aligned}$$

取

$$N = 1 + \Big[\frac{1}{\epsilon}\log_2\frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\Big].$$

应用

$u \in C^{\epsilon}$, 则

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0 \log\Big(e + \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\Big).$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &\leq \sum_{q\leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q\geq N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} \\ &\leq (N+1)\|f\|_0 + \frac{2^{-(N-1)\epsilon}}{2^\epsilon - 1}\|f\|_\epsilon. \end{aligned}$$

取

$$N = 1 + \Big[\frac{1}{\epsilon}\log_2 \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\Big].$$

J.M. Bony(1981):

$$
\begin{aligned}
uv &= \sum_{p,q} \Delta_p u \Delta_q v \\
&= \sum_{p\le q-1} \Delta_p u \Delta_q v + \sum_{q\le p-1} \Delta_p u \Delta_q v + \sum_{|p-q|\le 1} \Delta_p u \Delta_q v \\
&= \sum_{q} S_{q-1} u \Delta_q v + \sum_{p} S_{p-1} v \Delta_p u + \sum_{|p-q|\le 1} \Delta_p u \Delta_q v \\
&\overset{\text{def}}{=} T_u v + T_v u + R(u,v).
\end{aligned}
$$

J.M. Bony(1981):

$$
\begin{aligned}
uv &= \sum_{p,q} \Delta_p u \Delta_q v \\
&= \sum_{p\le q-1} \Delta_p u \Delta_q v + \sum_{q\le p-1} \Delta_p u \Delta_q v + \sum_{|p-q|\le 1} \Delta_p u \Delta_q v \\
&= \sum_{q} S_{q-1} u \Delta_q v + \sum_{p} S_{p-1} v \Delta_p u + \sum_{|p-q|\le 1} \Delta_p u \Delta_q v \\
&\overset{\text{def}}{=} T_u v + T_v u + R(u,v).
\end{aligned}
$$

J.M. Bony(1981):

$$
\begin{aligned}
uv &= \sum_{p,q} \Delta_p u \Delta_q v \\
&= \sum_{p\leq q-1} \Delta_p u \Delta_q v + \sum_{q\leq p-1} \Delta_p u \Delta_q v + \sum_{|p-q|\leq 1} \Delta_p u \Delta_q v \\
&= \sum_{q} S_{q-1} u \Delta_q v + \sum_{p} S_{p-1} v \Delta_p u + \sum_{|p-q|\leq 1} \Delta_p u \Delta_q v \\
&\stackrel{\text{def}}{=} T_u v + T_v u + R(u,v).
\end{aligned}
$$

university-logo-fi

对非线性函数F

$$F(u^1(x),\cdots,u^N(x)) = \sum_{j=1}^{N} T_{\frac{\partial F}{\partial z_j}(u^1(x),\cdots,u^N(x))} \cdot u^j(x) + R(x),$$

主要思想:

$$\begin{aligned} F\circ u &= \lim_{k\to\infty} F\circ(S_k u) \\ &= F\circ(S_0 u) + \sum_{k=0}^{\infty}[F\circ(S_{k+1}u) - F\circ(S_k u)]. \end{aligned}$$

类似对非线性偏微分方程$F(x,u(x),\cdots,\partial^\alpha u(x),\cdots)_{|\alpha|\le m} = 0$，可作类似的仿线性化.

对非线性函数F

$$F(u^1(x),\cdots,u^N(x))=\sum_{j=1}^{N}T_{\frac{\partial F}{\partial z_j}(u^1(x),\cdots,u^N(x))}\cdot u^j(x)+R(x),$$

主要思想:

$$\begin{aligned}F\circ u &= \lim_{k\to\infty}F\circ(S_k u)\\ &= F\circ(S_0 u)+\sum_{k=0}^{\infty}[F\circ(S_{k+1}u)-F\circ(S_k u)].\end{aligned}$$

类似对非线性偏微分方程$F(x,u(x),\cdots,\partial^\alpha u(x),\cdots)_{|\alpha|\le m}=0$, 可作类似的仿线性化.

对非线性函数F

$$F(u^1(x),\cdots,u^N(x)) = \sum_{j=1}^{N} T_{\frac{\partial F}{\partial z_j}(u^1(x),\cdots,u^N(x))} \cdot u^j(x) + R(x),$$

主要思想:

$$\begin{aligned} F\circ u &= \lim_{k\to\infty} F\circ(S_k u) \\ &= F\circ(S_0 u) + \sum_{k=0}^{\infty}[F\circ(S_{k+1}u) - F\circ(S_k u)]. \end{aligned}$$

类似对非线性偏微分方程$F(x,u(x),\cdots,\partial^\alpha u(x),\cdots)_{|\alpha|\le m} = 0$, 可作类似的仿线性化.

2维不可压缩Euler方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{7}$$

记$\omega = \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$, 则

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \tag{8}$$

定义

如$\omega_0 = 1_{\Omega_0}$,其中Ω是以$\Sigma \in C^{1+\epsilon}$ 为边界的有界区域,则称(7)的涡块问题.

2维不可压缩Euler方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{7}$$

记$\omega = \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$, 则

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \tag{8}$$

定义

如$\omega_0 = 1_{\Omega_0}$,其中Ω是以$\Sigma \in C^{1+\epsilon}$ 为边界的有界区域,则称(7)的涡块问题.

2维不可压缩Euler方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{7}$$

记$\omega = \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$, 则

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \tag{8}$$

定义

如$\omega_0 = 1_{\Omega_0}$,其中Ω是以$\Sigma \in C^{1+\epsilon}$为边界的有界区域,则称(7)的涡块问题.

- Yudovich 于1963年证明了上述问题存在唯一整体解,且

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))\,ds$$

存在唯一解,

$$\psi(t,x) - I \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^a})}.$$

- A. Majda于1986年提出如下公开问题:涡块问题的边界正则性是否能传播?
- J. Y. Chemin于1993年彻底解决此问题.

- Yudovich 于1963年证明了上述问题存在唯一整体解,且

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))\,ds$$

存在唯一解,

$$\psi(t,x) - I \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^a})}.$$

- A. Majda于1986年提出如下公开问题:涡块问题的边界正则性是否能传播?
- J. Y. Chemin于1993年彻底解决此问题.

- Yudovich 于1963年证明了上述问题存在唯一整体解,且

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))\,ds$$

存在唯一解,

$$\psi(t,x) - I \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^a})}.$$

- A. Majda于1986年提出如下公开问题:涡块问题的边界正则性是否能传播?
- J. Y. Chemin于1993年彻底解决此问题.

困难: $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 由Biot-Sarvart law所决定的向量场$v \in C^1_*(\mathbb{R}^2)$ (Zygumnd类$|v(x+y)+v(x-y)-2v(x)| \le C|y|$).

定义

设Σ是$\mathbb{R}^n$中的光滑超曲目,$\mathcal{V}$为切于Σ的C^∞向量场的全体,$k \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}$. 称集合

$$C^{\rho,k}(\Sigma) = \{u;\ V_1 \cdot V_l u \in C^\rho, V_1, \cdots, V_l \in \mathcal{V},\ l \le k\}$$

称为k余法型C^ρ空间.

设$\epsilon \in (0,1)$, A为$\mathbb{R}^2$中任一闭区域,$X \in C^\epsilon$的散度为0的向量场,记

$$I(A,X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x\in A} |X(x)|.$$

university-logo-fi

困难: $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 由Biot-Sarvart law所决定的向量场$v \in C^1_*(\mathbb{R}^2)$ (Zygumnd类$|v(x+y)+v(x-y)-2v(x)| \le C|y|$).

定义

设Σ是$\mathbb{R}^n$中的光滑超曲目,$\mathcal{V}$为切于Σ的C^∞向量场的全体,$k \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}$. 称集合

$$C^{\rho,k}(\Sigma) = \{u; V_1 \cdot V_l u \in C^\rho, V_1, \cdots, V_l \in \mathcal{V}, \ l \le k\}$$

称为k余法型C^ρ空间.

设$\epsilon \in (0,1)$, A为$\mathbb{R}^2$中任一闭区域,$X \in C^\epsilon$的散度为0的向量场,记

$$I(A,X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in A} |X(x)|.$$

困难： $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 由Biot-Sarvart law所决定的向量场$v \in C^1_*(\mathbb{R}^2)$ (Zygumnd类$|v(x+y)+v(x-y)-2v(x)| \leq C|y|$).

定义

设Σ是$\mathbb{R}^n$中的光滑超曲目,$\mathcal{V}$为切于Σ的C^∞向量场的全体,$k \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}$. 称集合

$$C^{\rho,k}(\Sigma) = \{u;\, V_1 \cdot V_l u \in C^\rho, V_1, \cdots, V_l \in \mathcal{V},\ l \leq k\}$$

称为k余法型C^ρ空间.

设$\epsilon \in (0,1)$, A为$\mathbb{R}^2$中任一闭区域,$X \in C^\epsilon$的散度为0的向量场,记

$$I(A,X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in A} |X(x)|.$$

定理

$p \in (1,2)$, $v = \nabla^{\perp}\Delta^{-1}\omega$, 则

$$\|v\|_{Lip} \le C\|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}\Big(1 + \log N_{\epsilon,p}(A, X, \omega)\Big),$$

其中

$$N_{\epsilon,p}(A,X,\omega) = \frac{\|X\|_\epsilon \|\omega\|_{\epsilon,\mathbb{R}^2\setminus A}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus A)}}\Big(1 + \frac{\|X(x,D)\omega\|_{\epsilon-1}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty\cap L^p}}\Big).$$

公开问题: Vortex sheets problem,即当初始涡度$\omega_0 \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, (7)的解及其结构?

J.M. Delort解决了$\omega_0 \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$.

定理

$p \in (1,2)$, $v = \nabla^{\perp}\Delta^{-1}\omega$, 则

$$\|v\|_{Lip} \le C\|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}\Big(1 + \log N_{\epsilon,p}(A, X, \omega)\Big),$$

其中

$$N_{\epsilon,p}(A, X, \omega) = \frac{\|X\|_\epsilon \|\omega\|_{\epsilon,\mathbb{R}^2\setminus A}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus A)}}\Big(1 + \frac{\|X(x,D)\omega\|_{\epsilon-1}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}}\Big).$$

公开问题: Vortex sheets problem,即当初始涡度$\omega_0 \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, (7)的解及其结构?

J.M. Delort解决了$\omega_0 \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$.

定理

$p \in (1,2)$, $v = \nabla^{\perp}\Delta^{-1}\omega$, 则

$$\|v\|_{Lip} \leq C\|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}\Big(1 + \log N_{\epsilon,p}(A, X, \omega)\Big),$$

其中

$$N_{\epsilon,p}(A, X, \omega) = \frac{\|X\|_{\epsilon}\|\omega\|_{\epsilon,\mathbb{R}^2\setminus A}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus A)}}\Big(1 + \frac{\|X(x,D)\omega\|_{\epsilon-1}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}}\Big).$$

公开问题: Vortex sheets problem,即当初始涡度$\omega_0 \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, (7)的解及其结构?

J.M. Delort解决了$\omega_0 \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{M}^{+}(\mathbb{R}^2)$.

- J. Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 14. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- H. Bahouri, J. Y. Chemin and R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2011.

university-logo-fi

- J. Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 14. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- H. Bahouri, J. Y. Chemin and R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2011.

微局部分析的其它应用

- J. Bourgain, *Geom. Funct. Anal.*, 3 (1993), no. 2, 107-156. 考虑周期区域上的半线性Schrödinger方程的适定性,Vinogradov指数和估计.
- P. Gerard, N. Burq, Tzvetkov, J. M. Delort考虑Riemann流形上的Schrödinger, 波动方程的适定性, 主要工具:谱分析.
- J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Ann. of Math.* (2) 167 (2008), no. 3, 767-865

微局部分析的其它应用

- J. Bourgain, *Geom. Funct. Anal.*, 3 (1993), no. 2, 107-156. 考虑周期区域上的半线性Schrödinger方程的适定性,Vinogradov指数和估计.
- P. Gerard, N. Burq, Tzvetkov, J. M. Delort考虑Riemann流形上的Schrödinger, 波动方程的适定性, 主要工具:谱分析.
- J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Ann. of Math.* (2) 167 (2008), no. 3, 767-865

微局部分析的其它应用

- J. Bourgain, *Geom. Funct. Anal.*, 3 (1993), no. 2, 107-156. 考虑周期区域上的半线性Schrödinger方程的适定性,Vinogradov指数和估计.
- P. Gerard, N. Burq, Tzvetkov, J. M. Delort考虑Riemann流形上的Schrödinger, 波动方程的适定性, 主要工具:谱分析.
- J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Ann. of Math.* (2) 167 (2008), no. 3, 767-865

由于研究量子力学的需要

定义

对$a \in S_{3d}((1+|\xi|)^m)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 定义半经典拟微分算子

$$Op_h(a)u(x:h) \stackrel{def}{=} \frac{1}{(2\pi h)^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\cdot\xi/h} a(x,y,\xi;h)u(y)\,dy\,d\xi.$$

定义

设$a \in S_{2d}((1+|\xi|)^m)$, 对$t \in [0,1]$,

$$Op_h^t(a) = Op_h(a((1-t)x+ty,\xi)).$$

$t=0$称为标准量子化或左量子化; $t=\frac{1}{2}$称为$Weyl$量子化并记为$Op_h^W(a)$, $t=1$称为右量子化;

由于研究量子力学的需要

定义

对$a \in S_{3d}((1+|\xi|)^m)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 定义半经典拟微分算子

$$Op_h(a)u(x:h) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\cdot\xi/h} a(x,y,\xi;h)u(y)\,dy\,d\xi.$$

定义

设$a \in S_{2d}((1+|\xi|)^m)$, 对$t \in [0,1]$,

$$Op_h^t(a) = Op_h(a((1-t)x+ty,\xi)).$$

$t=0$称为标准量子化或左量子化; $t=\frac{1}{2}$称为$Weyl$量子化并记为$Op_h^W(a)$, $t=1$称为右量子化;

定理

(**Calderón-Vaillancourt**) 设$a \in S_{3d}(1)$,则

$$\|Op_h(a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le C_d\Big(\sum_{|\alpha|\le M_d} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty}\Big).$$

定理

(**Gärding 不等式**) 设$a \in S_{2d}(1)$满足$a \ge \frac{1}{C}$, 则对$C_1 > C$, h充分小

$$(Op_h^W(a)u, u)_{L^2} \ge \frac{1}{C_1}\|u\|_{L^2}^2.$$

定理

(**Calderón-Vaillancourt**) 设$a \in S_{3d}(1)$,则

$$\|Op_h(a)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_d\Big(\sum_{|\alpha|\leq M_d} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty}\Big).$$

定理

(**Gärding 不等式**) 设$a \in S_{2d}(1)$满足$a \geq \frac{1}{C}$, 则对$C_1 > C$, h充分小

$$(Op_h^W(a)u, u)_{L^2} \geq \frac{1}{C_1}\|u\|_{L^2}^2.$$

定义

给定$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$Tu(x,\xi;h) = 2^{-\frac{d}{2}}(\pi h)^{-\frac{3d}{4}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi/h - |x-y|^2/2h} u(y)\, dy,$$

称Tu为Fourier-Bros-Iagolnitzer或简称FBI变换.

定理

设$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 则$Tu \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且$\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|u\|_{L^2}$.

university-logo-fi

定义

给定$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$Tu(x,\xi;h) = 2^{-\frac{d}{2}}(\pi h)^{-\frac{3d}{4}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi/h-|x-y|^2/2h} u(y)\,dy,$$

称Tu为Fourier-Bros-Iagolnitzer或简称FBI变换.

定理

设$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 则$Tu \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且$\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|u\|_{L^2}$.

命题

设$p \in S_{2d}(1), t \in (0,1)$, 则存在$\tilde{p}(x,\xi;h) \in S_{2d}(1)$ 以及$\mathcal{R}(h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2d}))$使得对任意$u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(Op_h^t(a)u, v) = \Big((\tilde{p}(x,\xi;h) + \mathcal{R}(h))Tu, Tv\Big),$$

其中

$$\tilde{p}(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j \tilde{p}_j(x,\xi) \quad S_{2d}(1);$$

$$\tilde{p}_0(x,\xi) = p(x,\xi);$$

$$\|\mathcal{R}(h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2d}))} = O(h^\infty).$$

命题

设$p \in S_{2d}(1), t \in (0,1)$, 则存在$\tilde{p}(x,\xi;h) \in S_{2d}(1)$ 以及$\mathcal{R}(h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2d}))$使得对任意$u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(Op_h^t(a)u, v) = \Big((\tilde{p}(x,\xi;h) + \mathcal{R}(h))Tu, Tv\Big),$$

其中

$$\tilde{p}(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j \tilde{p}_j(x,\xi) \quad S_{2d}(1);$$
$$\tilde{p}_0(x,\xi) = p(x,\xi);$$

$$\|\mathcal{R}(h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{2d}))} = O(h^\infty).$$

推论

(强Gärding不等式) 给定$0 \leq p(x,\xi) \in S_{2d}(1)$,则存在$C > 0$使得对任意$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 及h充分小,

$$\left(Op_h^W(p)u, u\right) \geq -Ch\|u\|_{L^2}^2.$$

Fefferman-Phong不等式:

$$\left(Op_h^W(p)u, u\right) \geq -Ch^2\|u\|_{L^2}^2.$$

university-logo-fi

推论

(强Gärding不等式) 给定$0 \le p(x,\xi) \in S_{2d}(1)$,则存在$C > 0$使得对任意$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 及h充分小,

$$\left(Op_h^W(p)u, u\right) \ge -Ch\|u\|_{L^2}^2.$$

Fefferman-Phong不等式:

$$\left(Op_h^W(p)u, u\right) \ge -Ch^2\|u\|_{L^2}^2.$$

其它应用:

- D. Tataru, Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with nonsmooth coefficients. III, *J. Amer. Math. Soc.* 15 (2002), no. 2, 419-442

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_k(a^{kj}\partial_j u) = 0, & x \in \mathbb{R}^d; \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

- G. Staffilani and D. Tataru, Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients, *Comm. Partial Differential Equations* 27 (2002), no. 7-8, 1337-1372.

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_k(a^{kj}\partial_j u) = 0, & x \in \mathbb{R}^d; \\ u(0,x) = u_0(x) & \end{cases}$$

在1932年,Wigner引进如下变换:

$$
\begin{aligned}
W(u)(x,\xi;h) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi h)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi/h}u(x+\frac{y}{2})\overline{u(x-\frac{y}{2})}\,dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi}u(x+\frac{hy}{2})\overline{u(x-\frac{hy}{2})}\,dy.
\end{aligned}
$$

对$a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$,

$$
\begin{aligned}
&\left(a^W(x, hD)u, u\right)_{L^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{-iY\cdot\xi/h} u(X + \frac{Y}{2}) \overline{u(X - \frac{Y}{2})}\, dY a(X, \xi)\, dX\, d\xi \\
&= \left\langle W(u), a \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.
\end{aligned}
$$

university-logo-fi

定理

给定$a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, 则

$$\|a^W(x, hD)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sup_{\mathbb{R}^{2d}} |a| + O(h).$$

推论

给定$L^2(\mathbb{R}^d)$中有界序列$\{u_h\}$, 则存在$\mathbb{R}^{2d}$中Radon测度μ子序列使得

$$\left\langle W(u_{h_i}), a \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \to \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x, \xi)\, d\mu \quad \forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}).$$

定理

给定$a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, 则

$$\|a^W(x, hD)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sup_{\mathbb{R}^{2d}} |a| + O(h).$$

推论

给定$L^2(\mathbb{R}^d)$中有界序列$\{u_h\}$, 则存在$\mathbb{R}^{2d}$中$Radon$测度μ子序列使得

$$\left\langle W(u_{h_i}), a \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \to \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x, \xi)\, d\mu \quad \forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}).$$

给定任意$0 \leq a(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, 由强Gärding不等式知

$$\left\langle W(u_h), a \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left(a^W(x, hD)u_h, u_h \right)_{L^2} \geq -Ch\|u_h\|^2_{L^2},$$

当h充分小时.

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} a\, d\mu = \lim_{i\to\infty} \left(a^W(x, hD)u_{h_i}, u_{h_i} \right)_{L^2} \geq 0.$$

定义

我们称此测度μ为与子列$\{u_{h_i}\}$相关的Wigner测度或半经典测度.

university-logo-fi

给定任意$0 \le a(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, 由强Gärding不等式知

$$\left\langle W(u_h), a \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left(a^W(x,hD)u_h, u_h\right)_{L^2} \ge -Ch\|u_h\|_{L^2}^2,$$

当h充分小时.

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} a \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \left(a^W(x,hD)u_{h_i}, u_{h_i}\right)_{L^2} \ge 0.$$

定义

我们称此测度μ为与子列$\{u_{h_i}\}$相关的Wigner测度或半经典测度.

给定任意$0 \le a(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, 由强Gärding不等式知

$$\left\langle W(u_h), a \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left(a^W(x,hD)u_h, u_h\right)_{L^2} \ge -Ch\|u_h\|_{L^2}^2,$$

当h充分小时.

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} a\, d\mu = \lim_{i\to\infty}\left(a^W(x,hD)u_{h_i}, u_{h_i}\right)_{L^2} \ge 0.$$

定义

我们称此测度μ为与子列$\{u_{h_i}\}$相关的*Wigner*测度或半经典测度.

$$\mathcal{A} = \left\{ \phi \in C^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d),\ (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^d_z; C^0(\mathbb{R}^d_x)) \right\}$$

并记

$$\|\phi\|_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \right| dz.$$

定理

给定$L^2(\mathbb{R}^d)$中有界序列$\{u_h\}$, 存在子列使得

$$W(u_{h_i}) \rightharpoonup \mu \quad in \quad \mathcal{A}'.$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \phi \in C^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d),\ (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^d_z; C^0(\mathbb{R}^d_x)) \right\}$$

并记

$$\|\phi\|_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \right| dz.$$

定理

给定$L^2(\mathbb{R}^d)$中有界序列$\{u_h\}$, 存在子列使得

$$W(u_{h_i}) \rightharpoonup \mu \quad in \quad \mathcal{A}'.$$

定义

给定$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $G_h = (\pi h)^{-d} e^{-|x|^2/h} e^{-|\xi|^2/h}$,

$$\widetilde{W}(u)(x,\xi;h) \stackrel{def}{=} W(u)(\cdot,\cdot;h) * G_h$$

为u的Husimi变换.

命题

$\widetilde{W}(u)(x,\xi;h) = \left|Tu(x,\xi;h)\right|^2$,且

$$\widetilde{W}(u_{h_j})(x,\xi;h) \rightharpoonup \mu \quad in \quad \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{2d}).$$

定义

给定$u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $G_h = (\pi h)^{-d} e^{-|x|^2/h} e^{-|\xi|^2/h}$,

$$\widetilde{W}(u)(x,\xi;h) \stackrel{def}{=} W(u)(\cdot,\cdot;h) * G_h$$

为u的Husimi变换.

命题

$\widetilde{W}(u)(x,\xi;h) = \left|Tu(x,\xi;h)\right|^2$,且

$$\widetilde{W}(u_{h_j})(x,\xi;h) \rightharpoonup \mu \quad in \quad \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{2d}).$$

Wigner测度的应用

- 线性Schrödinger方程的半经典极限

半经典Schrödinger方程

$$\begin{cases} ih\partial_t\psi^h = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi^h + V\psi^h, \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d; \\ \psi^h(0,x) = \psi^h_0(x) \end{cases} \tag{9}$$

T. Kato (1972): 给定ψ^h_0, 如果V满足Kato条件,则(9)存在唯一解$\psi^h\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^d))$使得$\|\psi^h(t)\|_{L^2} = \|\psi^h_0\|_{L^2}$.

Wigner测度的应用

- 线性Schrödinger方程的半经典极限

半经典Schrödinger方程

$$\begin{cases} ih\partial_t\psi^h = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi^h + V\psi^h, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d; \\ \psi^h(0,x) = \psi_0^h(x) \end{cases} \tag{9}$$

T. Kato (1972): 给定ψ_0^h, 如果V满足Kato条件,则(9)存在唯一解$\psi^h \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ 使得$\|\psi^h(t)\|_{L^2} = \|\psi_0^h\|_{L^2}$.

物理观察量: 量子密度,$\rho^h = |\psi^h|^2$,

量子动量,$J^h = h\mathrm{Im}(\overline{\psi^h}\nabla\psi^h)$.

WKB初值$a^h(x)\exp(S(x)/h)$,

$$\rho^h = |a^h|^2, \quad J^h = \rho^h\nabla S.$$

记$f^h(t,x,\xi)$为ψ^h的Wigner变换,则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^h(t,x,\xi)\,d\xi = \rho^h(t,x), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \xi f^h(t,x,\xi)\,d\xi = J^h(t,x).$$

物理观察量： 量子密度, $\rho^h = |\psi^h|^2$,

$$\text{量子动量}, J^h = h\mathrm{Im}(\overline{\psi^h}\nabla\psi^h).$$

WKB初值 $a^h(x)\exp(S(x)/h)$,

$$\rho^h = |a^h|^2, \quad J^h = \rho^h\nabla S.$$

记 $f^h(t,x,\xi)$ 为 ψ^h 的Wigner变换,则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^h(t,x,\xi)\,d\xi = \rho^h(t,x), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \xi f^h(t,x,\xi)\,d\xi = J^h(t,x).$$

物理观察量： 量子密度,$\rho^h = |\psi^h|^2$,

$$\text{量子动量}, J^h = h\mathrm{Im}(\overline{\psi^h}\nabla\psi^h).$$

WKB初值$a^h(x)\exp(S(x)/h)$,

$$\rho^h = |a^h|^2, \quad J^h = \rho^h\nabla S.$$

记$f^h(t,x,\xi)$为ψ^h的Wigner变换,则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^h(t,x,\xi)\,d\xi = \rho^h(t,x), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \xi f^h(t,x,\xi)\,d\xi = J^h(t,x).$$

$$\partial_t f^h + \xi \cdot \nabla_x f^h + \Theta^h(V) f^h = 0$$

其中

$$\Theta^h(V) f^h = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-iz\cdot(\xi-\eta)} \frac{(V(x+hz/2) - V(x-hz/2))}{ih} \times f^h(t,x,\eta)\, dz\, d\eta.$$

形式上

$$\Theta^h(V) f^h \to -\nabla_x V \cdot \nabla_\xi f.$$

$$\partial_t f^h + \xi \cdot \nabla_x f^h + \Theta^h(V) f^h = 0$$

其中

$$\Theta^h(V) f^h = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-iz\cdot(\xi-\eta)} \frac{(V(x+hz/2) - V(x-hz/2))}{ih} \times f^h(t,x,\eta)\, dz\, d\eta.$$

形式上

$$\Theta^h(V) f^h \to -\nabla_x V \cdot \nabla_\xi f.$$

$$\partial_t f^h + \xi \cdot \nabla_x f^h + \Theta^h(V) f^h = 0$$

其中

$$\Theta^h(V) f^h = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-iz\cdot(\xi-\eta)} \frac{(V(x+hz/2) - V(x-hz/2))}{ih} \times f^h(t,x,\eta)\, dz\, d\eta.$$

形式上

$$\Theta^h(V) f^h \to -\nabla_x V \cdot \nabla_\xi f.$$

定理

(Lions and Paul) 如果进一步假设$V \in C^1(\mathbb{R}^d)$, 则存在ψ^h的子列使得其*Wigner*测度满足

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_\xi f = 0; \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

公开问题: 如何考虑非线性Schrödinger方程的半经典极限?

university-logo-fi

定理

(**Lions and Paul**) 如果进一步假设$V \in C^1(\mathbb{R}^d)$, 则存在ψ^h的子列使得其*Wigner*测度满足

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_\xi f = 0; \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

公开问题: 如何考虑非线性Schrödinger方程的半经典极限?

一维Schrödinger-Poisson方程

$$\begin{cases} ih\partial_t\psi^h = -\frac{h^2}{2}\partial_x^2\psi^h + V^h\psi^h, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}; \\ \partial_x^2 V^h = b^h - |\psi^h|^2, \\ \psi^h(0,x) = \psi_0^h(x) \end{cases}$$

$b^h \geq 0$称为doping profile.

Zhang, Zheng, Mauser (2002): 其Wigner测度满足1维Vlasov-Poisson方程

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi\cdot\partial_x f - E\partial_\xi f = 0; \\ \partial_x E = b(x) - \int_{\mathbb{R}} f\,d\xi \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

一维Schrödinger-Poisson方程

$$\begin{cases} ih\partial_t\psi^h = -\frac{h^2}{2}\partial_x^2\psi^h + V^h\psi^h, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}; \\ \partial_x^2 V^h = b^h - |\psi^h|^2, \\ \psi^h(0,x) = \psi_0^h(x) \end{cases}$$

$b^h \geq 0$称为doping profile.

Zhang, Zheng, Mauser (2002): 其Wigner测度满足1维Vlasov-Poisson方程

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi\cdot\partial_x f - E\partial_\xi f = 0; \\ \partial_x E = b(x) - \int_{\mathbb{R}} f\, d\xi \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

其它推广可见: Zhang, Ping, **Wigner measure and semiclassical limits of nonlinear Schrödinger equations.** Courant Lecture Notes in Mathematics, 17. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

谢谢大家!