## 实验目的与要求:

- 1、理解公钥密码的基本思想
- 2、理解 RSA 和数字签名的原理
- 3、掌握 RSA 和数字签名的输入输出格式和密钥格式
- 4、实现 RSA 算法公钥加密会话密钥,然后使用会话密钥和 3DES 加解密各种(word、txt、mp3、jpg)文件。

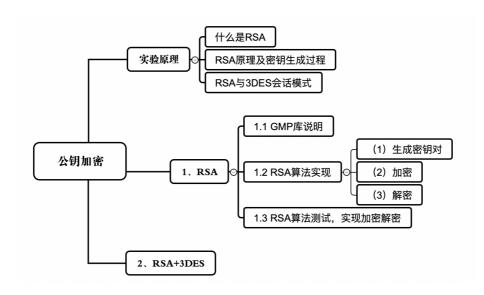
#### 实验环境:

MacOS Visual Studio 2019; C++语言

#### 实验原理:

简单描述 RSA 公钥加密会话密钥方法,然后应用分组密码 3DES 进行加密方案。

本次实验的思维导图如下所示:



#### 1、什么是 RSA

RSA 是最流行的非对称加密算法之一,也被称为公钥加密,于 1977 年提出。

RSA 是非对称加密的一种,即用来加密的密钥和用来解密的密钥不是同一个。和DES 一样也是分组加密算法,不同的是分组大小可以根据密钥的大小而改变。如果加密的数据不是分组大小的整数倍,则会根据具体的应用方式增加额外的填充位。RSA 很重要的一特点是当数据在网络中传输时,用来加密数据的密钥并不需要也和数据一起传送。因此,这就减少了密钥泄露的可能性。RSA 在不允许加密方解密数据时也很有用,加密的

一方使用一个密钥,称为公钥,解密的一方使用另一个密钥,称为私钥,私钥需要保持 其私有性。

RSA 被认为是非常安全的,不过计算速度要比 DES 慢很多。同 DES 一样,其安全性也从未被证明过,但想攻破 RSA 算法涉及的大数 (至少 200 位的大数)的因子分解是一个极其困难的问题。由于缺乏解决大数的因子分解的有效方法,因此,可以推测出目前没有有效的办法可以破解 RSA。

## 2、RSA 原理及密钥生成过程

RSA 算法的原理是:根据数论,寻求两个大素数比较简单,而将它们的乘积进行因式分解却极其困难,因此可以将乘积公开作为加密密钥。

RSA 加密和解密数据围绕着模幂运算,这是取模计算中的一种。取模计算是整数计算中的一种常见形式,比如  $x \mod n$  的 结果就是 x/n 的余数。而模幂运算就是计算  $a^b \mod n$  的过程。

密钥的生成是 RSA 算法的核心, 其密钥对生成过程如下:

- 1. 选择两个不相等的大素数p和q,计算出n = pq,n被称为 RSA 算法的公共模数;
- 2. 计算n的欧拉数 $\phi(n)$ ,  $\phi(n) = (p-1)(q-1)$ ;
- 3. 随机选择一个整数e作为公钥加密密钥指数, $1 < e < \phi(n)$ ,且 $e = \phi(n)$ 互质;
- 4. 利用同余方程  $ed \equiv 1 \pmod{(n)}$  计算 e 对应的私钥解密指数 d。由于  $GCD(e,\phi(n)) = 1$ ,因此同余方程有唯一解, d 就是 e 对于模 $\phi(n)$ 的乘法逆元;
- 5. 将(e,n)封装成公钥,(d,n)封装成私钥,同时销毁p和q。

# 3、RSA与3DES会话模式

实现 RSA 算法后,可以使用 RSA 对 3DES 中的会话密钥进行加密,再用 3DES 对 文件进行加密和解密。

RSA 加密,实现了公开密钥。B可以给所有人发送公钥,其他人把要加密的信息用这把公钥加密后发送给B,B用自己的私钥就可以获得加密的信息了。

如果 A 想要将会话秘钥发给 B, 并且只有 B 可以解开,那么就可以用 B 的公钥加密会话秘钥,然后将加密后的会话秘钥传给 B, B 就可以用自己的私钥解得会话秘钥。 之后 A 如果想给 B 发送私密信息,就可以用会话秘钥并且采用 3DES 算法加密发送,B 使用之前解得的会话秘钥就可以查看 A 所加密的信息。具体流程如图 1 所示。

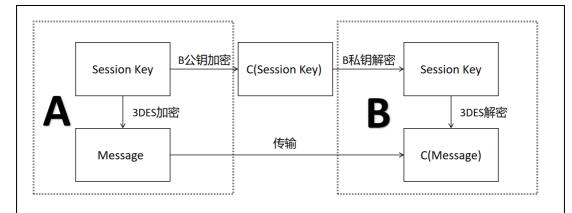


图 1. RSA 与 3DES 会话模式

# 实验内容:

- 1、编程实现 RSA, 并展示 RSA 加解密过程。
- 2、编程实现 RSA 公钥加密会话密钥,并应用分组密码 3DES 加密过程。

#### 实验步骤与结果:

1、编程实现 RSA, 并展示 RSA 加解密过程。

# 1.1 GMP 库说明

RSA 中的密钥长度指的是公钥的长度,目前主流的公钥长度为 1024、2048 和 4096 位。由于已经有 768 位公钥被成功分解的先例,所以低于 1024 位的公钥都被认为是不安全的。而 C++自带的基本类型远远无法满足 RSA 的运算需求,RSA 算法的实现必须依赖于高精度整型运算。

所以在对 RSA 代码编写的过程之中就必须使用到 GMP 大数库,此库是一个基于 C语言的开源库,调用前需要进行安装<sup>1</sup>,其中包含了数种自定义数据类型,包括:

- 1. mpz t //多精度整型
- 2. mpq\_t //多精度有理数
- 3. mpf\_t //多精度浮点型

GMP 中的算术函数通常将保存输出结果的变量作为第一个参数,其后的参数为操作数 $^2$ 。调用时需要包含 $^2$ gmp.h $^2$ 头文件。需要主题的是,根据官方说明:"GMP C++ functions are in a separate libgmpxx library." 所以笔者在 VScode2019 环境中需要使用 g++RSA.cpp -lgmpxx -lgmp 命令进行编译。

#### 1.2 RSA 算法实现

RSA 算法的实现可以分为三个部分: (1) 生成密钥对 (2) 加密 (3) 解密

# (1) 生成密钥对

1 参考: <a href="https://blog.csdn.net/zha\_ojunchen/article/details/89818011">https://blog.csdn.net/zha\_ojunchen/article/details/89818011</a>

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> 参考: <a href="https://gmplib.org/manual/index#Top">https://gmplib.org/manual/index#Top</a>

生成密钥对包括以下 5 个步骤: (1) 随机生成两个足够大的素数 (2) 计算公共模数 n (3) 计算欧拉函数 (4) 选取一较小的与  $\varphi(n)$ 互质的正整数 e 作为公共指数,数对(n,e) 则为密钥对中的公钥 (5) 计算数论倒数 d,数对(n,d)则为密钥对中的私钥。

## 第一步, 随机生成两个足够大的素数

根据著名的素数定理,随机选取一个正整数n,它是素数的概率为1/ln(n),这个概率并不算小,所以笔者在这里这样选取素数:随机选取一个正整数,检测它是否为素数,如果它不是素数,就测试它邻近的正整数,直到找到一个素数为止。

比如,需要生成一个长度为 1024 位的素数,就先随机选取一个长度为 1024 位的正整数,它是素数的概率约为1/ln ( $2^{1024}$ ) ≈ 1/710,将偶数排除掉,即进行 305 次测试就可找到一个素数。这样,问题就转移到如何测试一个正整数是否为素数上了。目前最常用的素性检测方法是米勒-拉窝素性检测法,这里笔者直接使用 GMP 中的素数生成函数:  $void\ mpz\ nextprime\ (mpz\ t\ rop,\ mpz\ t\ op)$ ; (表示将 rop 设置为大于 op 的下一个素数)。

```
mpz_t *gen_primes()
  gmp_randstate_t grt;//随机数生成gmp_randinit_default(grt);//设置随机数生成算法为默认
   gmp_randseed_ui(grt, time(NULL)); //设置随机化种子为当前时间
  mpz_t key_p, key_q; //定义mpz_t类型变量
   mpz_init(key_p);
   mpz_init(key_q); //初始化, 一个mpz_t类型的变量必须在初始化后才能被使用
   mpz_urandomb(key_p, grt, KEY_LENGTH / 2);
  mpz_urandomb(key_q, grt, KEY_LENGTH / 2); //随机生成两个大整数
   mpz_t *result = new mpz_t[2]; // new存储空间
  mpz_init(result[0]);
   mpz_init(result[1]);
   mpz_nextprime(result[0], key_p); //使用GMP自带的素数生成函数
   mpz_nextprime(result[1], key_q);
   mpz_clear(key_p); //释放占用的内存空间
   mpz_clear(key_q);
   return result; //返回生成的两个大素数
```

图 2: 随机生成两个足够大的素数

#### 第二步: 计算公共模数 n

这一步为简单的乘法运算,首先定义并初始化变量,然后直接调用函数 void mpz mul(rop, op1, op2)。

```
//生成密钥对
key_pair *gen_key_pair()

//第一步: 随机生成两个足够大的素数, p,q
mpz_t *primes = gen_primes(); //调用自己定义的函数生成两个大素数

//第二步: 计算公共模数n, n=p*q
mpz_t key_n, key_f; //定义并初始化变量
mpz_init(key_n);
mpz_init(key_f);
mpz_mul(key_n, primes[0], primes[1]); //计算n, 储存在key_n
```

## 图 3: 计算公共模数 n

# 第三步: 计算欧拉函数

计算欧拉函数值也只是简单的减法和乘法运算。

```
//第三步; 计算欧拉函数: q(n)=(p-1)*(q-1)
mpz_sub_ui(primes[0], primes[0], 1); // p=p-1
mpz_sub_ui(primes[1], primes[1], 1); // q=q-1
mpz_mul(key_f, primes[0], primes[1]); //计算欧拉函数, 储存在key_f
```

图 4: 计算欧拉函数

# 第四步: 选取一较小的与 φ(n)互质的正整数 e 作为公共指数

这一步需要选取一个正整数 e,并输出公钥(n, e)。公共指数常取 3,17 和 65537 三个值,这里笔者直接取 e=65537。

```
//第四步: 选取一较小的与φ(n)互质的正整数e作为公共指数。
//数对(n, e)则为密钥对中的公钥
mpz_t key_e;
mpz_init_set_ui(key_e, 65537); //初始化并设置e为65537
// gmp_printf("%s (%ZX, %ZX)\n", "public key is:", key_n, key_e); //输出公钥(n, e)
```

图 5: 选取公共指数 e

# 第五步: 计算数论倒数 d

求e在模 $\phi$ (n)下的乘法逆元(也被称为数论倒数)d,也就是求解末知数为d的模线性方程:  $d \equiv e - 1 \pmod{n}$ ) $\Leftrightarrow ed \equiv 1 \pmod{n}$ 。转化为普通二元一次不定方程,即为 $ed + k\phi(n) = 1$ 。笔者这里使用 GMP 中的求数论倒数的函数:  $int\ mpz\_invert(mpz\_t\ rop, const\ mpz\_t\ op1, const\ mpz\_t\ op2)$ 

```
//第五步: 计算数论倒数 d=e-1(modφ(n))
mpz_t key_d;
mpz_init(key_d);
mpz_invert(key_d, key_e, key_f); //求e的数论倒数d
// gmp_printf("%s (%ZX, %ZX)\n", "private key is:", key_n, key_e); //输出私钥(n, d)
```

图 6: 计算数论倒数 d

#### (2) 加密

加密的原理为:  $C=f_e(M)=M^e \mod n$ , 其中 M 为明文, (n,e)为公钥, C 为密文。主要是对  $M^e \mod n$  函数进行求值。

这种形如  $a^b \mod n$  的运算,称之为模幂运算。模幂运算在密码学中具有十分重要的意义,除了 RSA 加密外,离散对数加密等常用的加密方法里都有模幂运算。通过查找一些资料,笔者发现可以实现快速的模幂运算,下面是快速模幂算法的代码实现:

#### 图 7: 加密函数

# (3)解密

解密的原理为:  $M=f_d(C)=C^d mod n$ , 其中 C 为密文,(n,d)为私钥,M 为明文。同理也是进行模幂运算,这里不再赘述。

图 8: 解密函数

# 1.3 RSA 算法测试

接下来笔者以一个简单例子对 RSA 算法进行测试。编写主函数如下图 9 所示:

图 9: RSA 算法测试主函数

首先对 RSA.cpp 文件进行编译, 然后运行编译程序, 从下图 10 可以看到, RSA 算法实现了成功解密和加密。

图 10: RSA 算法测试结果

# 2、编程实现 RSA 公钥加密会话密钥,并应用分组密码 3DES 加密过程。

实现 RSA 算法后,可以使用 RSA 对 3DES 中的会话密钥进行加密,再用 3DES 对 文件进行加密和解密。关于 RSA 和 3DES 的会话模式,笔者已经在实验原理部分的第 2 点中进行了详细阐述,具体流程见图 1,此处不再赘述。

笔者已经在第一题中实现了 RSA 加解密,且在实验一也实现了 3DES 算法的加解 密操作,因此,本部分只需要对 RSA 和 3DES 的代码进行组合。笔者编写了一个主函 数模拟实现 A 和 B 之间的 RSA 与 3DES 会话模式,逻辑步骤如下:

第一步: B 首先用 RSA 算法,得到公钥(n,e)和私钥(n,d),并将公钥分发给 A (私钥只有 B 自己知道)。这样 A 把要加密的信息用这把公钥加密后发送给 B, B 用自己的私钥就可以获得加密的信息了。

图 12: 模拟会话模式第一步

使用 g++  $RSA_3DES.cpp$  -lgmpxx -lgmp 命令编译程序,并执行编译文件,可以看到第一步的运行结果如下图 13 所示,输出了 RSA 的公钥和私钥信息。

图 13: 第一步运行结果

第二步: A,输入 3 个 3DES 的会话密钥,用来后面对文件进行加密。但是这个 3DES 加密后的文件发给 B,如果 B 要进行解密,也需要使用到这 3 个密钥。为了安全,下一步 A 可以用 RSA 加密这 3 个密钥,再传输给 B 进行解密。这样 A 和 B 就都拥有了 3DES 的密钥,可以进行加密文件的传输了。

```
//第二步: A,输入3个3DES的会话密钥,用来后面对文件进行加密
cout << "A收到B得公钥后,开始输入3个3DES的密钥" << endl;
type key_1[64], key_2[64], key_3[64];
cout << "请输入3DES密钥1" << endl;
cin >> key_1;
cout << "请输入3DES密钥2" << endl;
cin >> key_2;
cout << "请输入3DES密钥3" << endl;
cin >> key_3;
cout << "请输入3DES密钥3" << endl;
cin >> key_4
```

图 14: 模拟会话模式第二步

运行结果如下图 15 所示, 笔者随便了输入了 3 个密钥。

```
A收到B得公钥后,开始输入3个3DES的密钥
请输入3DES密钥1
23234
请输入3DES密钥2
3243245
请输入3DES密钥3
342432432
```

图 15: 第二步运行结果

**第三步:** A 将该会话密钥(3DES 的 3 个密码)使用 RSA 公钥加密,并且将密文直接发送给 B。

```
//第三步: A将该会话密钥(3DES的3个密码)使用RSA公钥加密,并且将密文直接发送给B
cout << "A开始使用B的RSA公钥加密3DES的3个密码,并将密文发给B" << endl;
type *key_1_en = encrypt(key_1, p->n, p->e);
type *key_2_en = encrypt(key_2, p->n, p->e);
type *key_3_en = encrypt(key_3, p->n, p->e);
cout << "加密后的3DES密钥1" << key_1_en << endl;
cout << "加密后的3DES密钥2" << key_2_en << endl;
cout << "加密后的3DES密钥3" << key_3_en << endl;
cout << "加密后的3DES密钥3" << key_3_en << endl;
cout << "加密后的3DES密钥3" << key_3_en << endl;
```

图 16: 模拟会话模式第三步

运行结果如下图 17 所示,使用 RSA 完成了对 3DES 的 3 个密码进行加密。

```
A开始使用B的RSA公租加密3DES的3个密码,并将密文发给B
加密后的3DES密钥 118f01972447888fb3febacc08cbaad8d8f374d1a4ec170ef9c26ae3261292925b00f8fcdc85140f12e7a91dbf797c415bd5cb59e4c1
7a25d6cd0e8d0ecc1170e2e4f23cf3aed9db64941f7b19ee389a23b4ffe1d5cb9f7d25d3d7c586f0077ae5da4730f1a6c28a8b6bf5c3001f0791c022c0b5
40f6d2fed5e8b69d0860ed885b87b70c59c1f62f2c460d251e05e3a09f13d3a29124a1af75916643ca8be025b564ef7f7dfacc36f6f98680d854861d8647
cbb3ee4adef1f5588d5c4e195b9f86se6a3b47792e886fce65ffcf206e797185c14492c8bb96a813bf7349376ae6500f05f5e6c6ca4dfe93f4b0ecb8e5
4e1ea30d76a26c996c5c54d8f2334d50
加密后的3DES密钥2913b7cddfcbf6lec809f671436cd537cb2ccfa8c95ca1a46d998fbd302dda64c23938beccbce49882af1949024706e06676de18de86
370f014f116a80cbea98b98a28f48dedbaea50f9ebc930f1b7e745b065e8b0ebe50f3cbcb5f949caf699290dc66589ab3808c5623dff6c5c3890d15b17d918
312f43a4724a69778442d523c9c05c6584ba1fa7bfddbdebb8fc884b3895f09af2007d3334bad18c80569377e2f56501cb795adcb533d9513fa03a41972
48f71cda2c2580f0899086c3f1a4e54dc8d47d85996ebea4686cb68f3124f7c9a213860917b1227c1751f6913881fc236df16708a974963ac8cda492e85
553c0c07aca97629e500e3fc26011a0b
加密后的3DES密钥3339be58e7176c672cf14cfb76315640b4012c81782b38aae85377f239fa735fdc182773325245a108507c9dc892333d6aaf4cbd116
ba6f54916273c993ae15fcd76c7085fc9cd1470aa094e4ad90858be3a4ddcbec753551044fla3b9697b6e4c96e276dd7fd55245f76feb5489c2ad7215e04a1
234c0e2fc7d94ef64095a6da8bb0aa2a937925cfdd26bd58a89ca8d229fbc2e7fc96e41b87ad45f636b53937102c7d15199d75db78c629b604549bd18
2b49c52dc54ffff2f55982b6e4dbb47c4347c0cafd91547fa32166ebbdf3317faa981498c9c0b167d6b134c241121b69ce36698753c83122fb483ba73854c
12f9484aa464c009f306d14428ed7fbb6
```

图 17: 第三步运行结果

**第四步**: B 收到 A 发来的 3 个 3DES 密钥的密文后,使用自己的 RSA 私钥进行解密。

```
//第四步: B收到A发来的3个3DES密钥后,使用自己的RSA私钥进行解密
cout << "B收到A发来的3个3DES密钥后,使用自己的RSA私钥进行解密" << endl;
type *key_1_de = decrypt(key_1_en, p->n, p->d);
type *key_2_de = decrypt(key_2_en, p->n, p->d);
type *key_3_de = decrypt(key_3_en, p->n, p->d);
cout << "解密后的3DES密钥1" << key_1_de << endl;
cout << "解密后的3DES密钥2" << key_2_de << endl;
cout << "解密后的3DES密钥3" << key_3_de << endl;
cout << "解密后的3DES密钥3" << key_3_de << endl;
cout << "management of the cout of the cout << endl;
```

图 18: 模拟会话模式第四步

运行结果如下图 19 所示,可以看到 B 解密后的 3DES 密钥跟 A 刚开始设置的密钥是一致的。到这里 A 和 B 就都拥有了 3DES 的密钥串,都可以进行加密解密从而传输文件了。

```
Biv 到 A发来的 3个 3DES密 钥后,使用自己的 RSA私 钥进行解密解密后的 3DES密 钥 123234解密后的 3DES密 钥 23243245解密后的 3DES密 钥 3342432432
```

图 19: 第四步运行结果

**第五步:** A 使用 3DES 加密一个图片文件 (testJPG\_org.jpg), 并将加密后的文件 (testJPG\_Encode.jpg) 发给 B。

```
//现在A、B都已经通过RSA机制安全拥有了3DES的3个密钥,都可以进行加密解密从而传输文件了
//离五步: A加密一个图片文件,并将加密后的文件发给B
Treble_DES d;
cout << "开始使用3DES加密文件" << endl;
cout << d.treble_DES_Encrypt("testJPG_org.jpg", key_1, key_2, key_3, "testJPG_Encode.jpg");
cout << endl;
cout << "加密结束,并将加密后的文件发送给对方" << endl;
```

图 20: 模拟会话模式第五步

运行结果如下图 21 所示(输出 1 表示 3DES 加密程序运行成功),可以看到 jpg 文件成功进行了加密。

```
开始使用 3DES加密文件
1
加密结束,并将加密后的文件发送给对方
```

图 21: 第五步运行结果

第六步: B 收到加密后的文件后,同样使用 3DES 的密钥进行解密 (testJPG\_Decode.jpg)。

```
//第六步: B收到加密后的文件后。同样使用3DES的密钥进行解密
cout << "开始使用3DES解密文件" << endl;
cout << d.treble_DES_Decrypt("testJPG_Encode.jpg", key_1_de, key_2_de, key_3_de, "testJPG_Decode.jpg");
cout << endl;
cout << "解密完成、完成加密文件传输流程" << endl;
```

图 22: 模拟会话模式第六步

运行结果如下图 23 所示(输出 1 表示 3DES 解密程序运行成功),可以看到 jpg 文件成功进行了解密。



图 23: 第六步运行结果

到这里就完成了 A 和 B 之间的 RSA 与 3DES 会话模式模拟。接下来查看刚刚加解密的图片文件,如下图 24、25、26 所示。说明对 jpg 文件的加密和解密都成功了,也说明了 RSA 与 3DES 会话模式的成功进行。



图 24: testJPG org.jpg 文件



图 25: testJPG\_Encode.jpg 文件(打不开)



图 26: testJPG Decode.jpg 文件

# 实验结论:

通过本次实验,笔者理解了公钥密码的基本思想以及理解 RSA 和数字签名的原理,掌握了 RSA 和数字签名的输入输出格式和密钥格式,同时,通过与之前实验相结合,实现了使用 RSA 算法公钥加密会话密钥,然后使用会话密钥和 3DES 加解密各种文件。除了巩固课堂中所学的知识的同时,也学到了一些编程技巧,比说,C++中 GMP 库函数的使用等。

RSA 算法基于分解大整数的时间消耗,从而保证安全。因此实现 RSA 算法需要用到很多的数学知识,例如拓展的欧拉公式、米勒-拉宾素数检验等,这样才有利于降低算法的复杂度。但即使如此,RSA 算法由于其大数运算,与 3DES 等对称加密算法相比,在加密信息时其加密时间仍然较高。因此 RSA 算法常常只是作为会话秘钥的加密,而不加密文本信息,本实验充分展示了这一点。

RSA 算法除了做加密还可以进行数字签名的认证,即加密者用自己的私钥加密文档, 其他人可以用他的公钥对该文档进行认证。有了这层属性,RSA 在现代社会也应用的更加广泛。

指导教师批阅意见:	
- 14.7±7.0±7.	
成绩评定:	
	指导教师签字:
	年 月 日
备注:	

- 注: 1、报告内的项目或内容设置,可根据实际情况加以调整和补充。
  - 2、教师批改学生实验报告时间应在学生提交实验报告时间后 10 日内。