粉笔直播课

方法精讲-数量 4

（笔记）

主讲教师：牟立志

授课时间：2022.03.25

方法精讲-数量 4（笔记）

学习任务： 1.课程内容：排列组合与概率问题、容斥原理问题 2.授课时长：3 小时 3.对应讲义：169 页～174 页 4.重点内容： （1）掌握常用的排列组合公式，理解分类讨论与分步计算的区别，正难反易则从反面求解 （2）掌握两种经典方法（捆绑法、插空法）的适用范围和操作步骤 （3）掌握常考的概率问题的两种题型——给情况求概率、给概率求概率 （4）掌握两集合容斥原理公式、三集合容斥原理的标准型和非标准型公式 （5）掌握画图法在容斥原理问题中的运用

【注意】本节课内容两极分化比较严重。排列组合问题难度较大，有些没有基础的同学可能学习起来比较吃力，对于排列组合问题，要忘掉之前的基础，当成一个新的知识点学习，不要妄自菲薄，需要有一个学习的过程，老师会将同学们统一为没基础的状态讲解，能听懂固然好，如果学起来真的很吃力，可以战略性跳过，同学们需要放平心态。

第八节　排列组合与概率问题

一、排列组合问题

【注意】排列组合与概率问题：

1.排列组合：

（1）基础概念。

（2）经典题型：套路题，掌握方法可以解题。

2.概率问题。

（一）基础概念

【知识点】基础概念：两个原理（加法原理、乘法原理）+两个概念。

1. 分类与分步（计数原理）：

（1）分类（要么……要么……）：相加→每一类都可以完成。

例：志哥上班有 3 种方法，即地铁、公交、开车，地铁有 1 号线、2 号线，公交有 101 路、715 路、708 路，开车有三角箭、胜利冲锋，志哥从家到公司可以选择地铁、可以选择公交、可以选择开车，每一类都可以完成想要完成的事情，分类用加法，一共有 2+3+2=7 种方法。

（2）分步（先……后……）：相乘→都发生才算完成。

例：志哥上班需要先从家坐公交到地铁口，再从地铁口坐地铁到公司，公交有 101 路、715 路、708 路，地铁有 1 号线、2 号线，必须都完成才能完成想要完成的事情，分步用乘法，一共有 3*2=6 种方法。

（3）例：志哥 10：45 起床想要出门买早餐，打开衣柜，有 3 件上衣、2 条裤子、2 双鞋子，问志哥今天的服装搭配有多少种？

答：志哥出门不能只穿上衣，也不能只穿裤子，更不能只穿鞋，而是既要穿上衣，又要穿裤子，又要穿鞋子，分步用乘法，所求=3*2*2=12 种。

10:45

3上衣
2裤
2鞋

$3\times2\times2=12$

2. 排列与组合：有序排列、无需组合。“序”指从一堆元素中挑取元素的

顺序，体现调换顺序后对结果有无影响，调换顺序后对结果有影响为“有序”，调换顺序后对结果无影响为“无序”。

（1）排列：与顺序有关，用 A 表示。比如站排、表演节目等。

（2）组合：与顺序无关，用 C 表示。比如选人凑成名单、组成学习小组等。

（3）判定标准：从主体当中任意的挑出两个，调换顺序。

①对结果有影响，与顺序有关（A）。

②对结果无影响，与顺序无关（C）。

③例 1：从七个葫芦娃中，任选两个一起去救爷爷。

答：从 7 个葫芦娃中选出 2 个，先选大娃，再选二娃，调换顺序为先选二娃，再选大娃，均为大娃、二娃一起救爷爷，调换顺序对结果无影响，无序用 C，为 C（7,2）。

④例 2：从七个葫芦娃中，任选两个一起去救爷爷（第一个去探路，第二个去打架）。

答：先选大娃（力大无穷），再选二娃（千里眼、顺风耳），效果不佳，调换顺序为先选二娃，再选大娃，效果变好，调换顺序对结果有影响，有序用 A，为 A（7,2）。

⑤如果从 564 名同学中选 3 名同学和志哥一起吃饭，假设选出的 3 名同学为甲、乙、丙，不管如何调换顺序，结果都是这 3 名同学和志哥一起吃饭，调换顺序对结果无影响，为 C（564,3）。如果选出的第一人吃自助，第二人吃烤肉，第三人吃大葱，有分工，调换顺序对结果有影响，为 A（564,3）。

（4）A 与 C 怎么算？

①排列数：A（n,m）=从 n 开始往下乘 m 个数。例：A（10,4）=10*9*8*7，从下角标 10 开始，依次乘以比前面数小 1 的数，乘 4 个数。

②组合数：C（n,m）=A（n,m）/A（m,m）=从 n 开始往下乘 m 个数/从 m 开始往下乘 m 个数。例：C（10,4）=A（10,4）/A（4,4）=（10*9*8*7）/（4*3*2*1）。

③C（7,3）=A（7,3）/A（3,3）=（7*6*5）/（3*2*1）=35，C（7,4）=A（7,4）/A（4,4）=（7*6*5*4）/（4*3*2*1）=35，发现 C（7,3）=C（7,4）。当下角标相同时，如果两个组合数的上角标之和等于下角标，则结果相同。比

如 C（10,4）=C（10,6）、C（100,98）=C（100,2），当需要计算 C（100,98）时，可以计算 C（100,2）。

【例 1】（2019 广东）小李今天上午有 a、b、c、d 这 4 项工作要完成，下午有 e、f、g 这 3 项工作要完成，每半天内各项工作的顺序可以随意调整，问他今天有多少种完成工作的顺序？

A.30　　B.60

C.72　　D.144

【解析】例 1.问“有多少种完成工作的顺序”，为排列组合问题。已知“上午有 a、b、c、d 这 4 项工作要完成”，上午的工作顺序有 A（4,4）种。已知“下午有 e、f、g 这 3 项工作要完成”，下午的工作顺序有 A（3,3）种。上午、下午工作的顺序不能随意调整，先做上午的工作，再做下午的工作，分步用乘法，所求=A（4,4）*A（3,3）=（4*3*2*1）*（3*2*1）=24*6=144 种，对应 D 项。【选 D】

【注意】已知“每半天内各项工作的顺序可以随意调整”，问的是工作的顺序，abcd、acbd 为两种不同的工作顺序，用 A 而不是 C。

【例 2】（2020 上海）小王等 6 名学生参与了某展览会志愿者活动。他们被安排到两个不同的会场服务。如果要求每个会场都至少有 2 名志愿者，问对小王等人共有多少种不同的安排方式？

A.20　　B.30

C.50　　D.360

【解析】例 2.问“共有多少种不同的安排方式”，为排列组合问题。将 6 人安排到 2 个地方，要求每个会场都至少有 2 人，假设两个会场分别为 A、B，满足条件的情况如下：

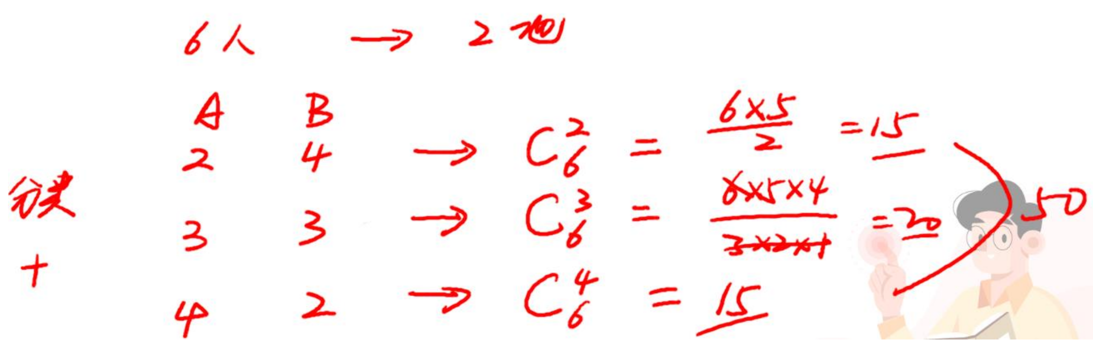
（1）A 会场 2 人、B 会场 4 人：从 6 人中选 2 人去 A 会场，无顺序，为 C（6,2）=（6*5）/2=15，剩余 4 人去 B 会场，只有 1 种情况。

（2）A 会场 3 人、B 会场 3 人：从 6 人中选 3 人去 A 会场，无顺序，为 C（6,3）=（6*5*4）/（3*2*1）=20。

（3）A 会场 4 人、B 会场 2 人：从 6 人中选 4 人去 A 会场，无顺序，为 C（6,4）=C（6,2）=15。

分类用加法，所求=C（6,2）+C（6,3）+C（6,4）=15+20+15=50，对应 C 项。

【选 C】

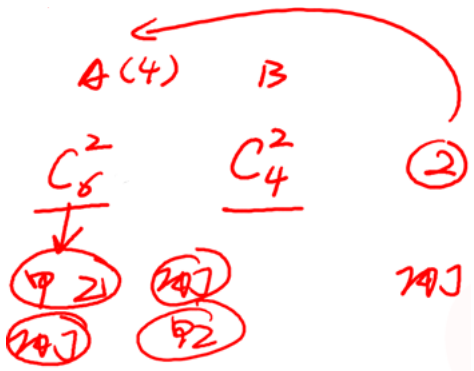


【注意】

1.2 个人去 A、B 两地，可能我去 A 地、你去 B 地，也可能你去 A 地、我去 B 地，一共 2 种方法。从 2 个人中选出 1 个人去 A 地，为 C（2,1），剩下的那个人一定去 B 地，一共 C（2,1）=2 种方法。

2.已知“要求每个会场都至少有 2 名志愿者”，先从 6 人中选出 2 人去 A 会场，剩下的 4 个人一定去 B 会场，即 A 会场的志愿者人数确定之后，B 会场的志愿者人数也就确定了；同理，先从 6 人中选出 3 人去 A 会场，剩下的 3 个人一定去 B 会场；也可以先从 6 人中选出 4 人去 A 会场，剩下的 2 个人一定去 B 会场，分类用加法。

3.错误思路：已知“要求每个会场都至少有 2 名志愿者”，先从 6 人中选出 2 人去 A 会场，再从 4 个人中选 2 个人去 B 会场，最后再将剩余的 2 个人分配。举例否定：假设选甲、乙去 A 会场，剩余的 2 个人为丙、丁，A 会场需要分配 4 个人，可能先选甲、乙去 A 会场，丙、丁后去 A 会场，也可能先选丙、丁去 A 会场，甲、乙后去 A 会场，但是调换顺序前后为同一种情况，出现重复，思路错误。



3. 选人时，同样属性的元素必须一次性选完。比如从 6 个人中选 2 个人去 A 会场，则这 2 个人不能分开，为 C（6，2）=15，但是如果分两次选人，即先从 6 个人中选 1 个人去 A 会场，再从剩余的 5 个人中选 1 个人去 A 会场，为 C（6，1）*C（5，1）=30，分步会出现重复。假设分配甲、乙去 A 会场，如果分两次选人，可能先选甲、后选乙，也可能先选乙、后选甲，调换顺序前后为同一种情况，出现重复，需要除以 2。

【例 3】（2021 联考）某高校开设 A 类选修课四门，B 类选修课三门。小刘从中共选取四门课程，若要求两类课程各至少选一门，则选法有：

A. 18 种　　　　B. 22 种

C. 26 种　　　　D. 34 种

【解析】例 3. 小刘需要从 7 门课中选 4 门课，“两类课程各至少选一门”即 A 类、B 类都需要选课。问选法有多少种，求方法数，为排列组合问题。

方法一：全部情况为从 7 门课程中选出 4 门，无顺序，为 C（7，4）；已知“要求两类课程各至少选一门”，反面情况为只选 A 类课程或者只选 B 类课程，但是 B 类课程只有 3 门，所以反面情况只可能是选出的 4 门课程均为 A 类课程，只有 1 种情况；所求=全部情况数-反面情况数=C(7，4)-1=A(7，4)/A(4，4)-1=(7*6*5*4)/（4*3*2*1）-1=35-1=34 种，对应 D 项。

方法二：正向求解。满足条件的情况如下：

（1）1 门 A 类、3 门 B 类：从 4 门 A 类中选出 1 门，为 C（4，1）；从 3 门 B 类中选出 3 门，为 C（3，3），一共要选 4 门课程，先选 1 门 A 类，再选 3 门 B 类，分步用乘法，所求=C（4，1）*C（3，3）。

（2）2 门 A 类、2 门 B 类：从 4 门 A 类中选出 2 门，为 C（4，2）；从 3 门 B

类中选出 2 门，为 C（3,2），分步用乘法，所求=C（4,2）*C（3,2）。

（3）3 门 A 类、1 门 B 类：从 4 门 A 类中选出 3 门，为 C（4,3）；从 3 门 B 类中选出 1 门，为 C（3,1），分步用乘法，所求=C（4,3）*C（3,1）。

分类用加法，所求=C（4,1）*C（3,3）+C（4,2）*C（3,2）+C（4,3）*C（3,1）=34 种，对应 D 项。【选 D】

【注意】正向分类情况数≥3，考虑反向分类，全部情况数-反向分类情况数=正向分类情况数。

（二）经典题型

【知识点】特定题型： 1. 选项小（枚举法），一般情况下，情况数≤10，考虑枚举法，简单。 2. 要相邻（捆绑法）。 3. 不相邻（插空法）。 4. 错位排列（结论）。

【例 1】（2019 联考）小王在商店消费了 90 元，口袋里只有 1 张 50 元、4 张 20 元、8 张 10 元的钞票，他共有几种付款方式，可以使店家不用找零钱？

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

【解析】例 1. 问“共有几种付款方式”，为排列组合问题。观察选项，情况数均小于 10，考虑枚举法，先枚举面值大的钞票。（1）1 张 50 元，2 张 20 元，0 张 10 元；（2）1 张 50 元，1 张 20 元，2 张 10 元；（3）1 张 50 元，0 张 20 元，4 张 10 元；（4）0 张 50 元，4 张 20 元，1 张 10 元；（5）0 张 50 元，3 张 20 元，3 张 10 元；（6）0 张 50 元，2 张 20 元，5 张 10 元；（7）0 张 50 元，1 张 20 元，7 张 10 元。一共有 7 种方式，对应 C 项。【选 C】

【注意】不能考虑 0 张 50 元、0 张 20 元、9 张 10 元，注意 10 元钞票一共 8 张，不成立。

【知识点】相邻：

1.例：李雷、韩梅梅、路人甲、路人乙、路人丙。

（1）五人站排，李雷和韩梅梅挨着，有几种情况？

答：出现“挨着”，为相邻问题，考虑捆绑法。先将李雷、韩梅梅捆绑，站排存在顺序，为A（2,2）=2；捆绑之后当成一个整体，再与路人甲、路人乙、路人丙站排，相当于4个人站排，为A（4,4）。先捆再排，分步用乘法，所求=2*A（4,4）。

（2）五人站排，路人甲、路人乙、路人丙在同一个班级，要求同一个班级的学生站一起，有几种情况？

答：出现“站一起”，为相邻问题，考虑捆绑法。将路人甲、路人乙、路人丙捆绑，站排存在顺序，为A（3,3）；捆绑之后当成一个整体，再与李雷、韩梅梅站排，相当于3个人站排，为A（3,3）。先捆再排，分步用乘法，所求=A（3,3）*A（3,3）。

2.方法：捆绑法。

（1）先捆：把相邻的捆绑起来，考虑内部顺序。

（2）后排：把捆后的“胖子”与其他排列。

【例2】（2020唐山事业单位）现有七年级的学生1名，八年级的学生4名，九年级的学生5名，需让他们排一排拍一张合照，要求同一年级的学生要挨在一起站，且七年级的学生不站两边，问有多少种不同的排法？

A.3760　　B.4760

C.5760　　D.6760

【解析】例2.出现“挨在一起”，为相邻问题，考虑捆绑法。已知“要求同一年级的学生要挨在一起站”，将七年级的学生捆绑，有1种情况；将八年级的学生捆绑，拍照存在顺序，为A（4,4）；将九年级的学生捆绑，拍照存在顺序，为A（5,5）。已知“七年级的学生不站两边”，七年级的学生只能在中间，要么八年级的学生在左、九年级的学生在右，要么九年级的学生在左、八年级的学生在右，有2种情况。先捆再排，分步用乘法，所求=A（4,4）*A（5,5）*2=（4*3*2*1）

*（5*4*3*2*1）*2=24*120*2=24*240，结果首位为 5，对应 C 项。【选 C】

【例 3】（2020 新疆）某美术馆计划展出 12 幅不同的画，其中有 3 幅油画、4 幅国画、5 幅水彩画，排成一行陈列，要求同一种类的画必须连在一起，并且油画不放在两端，问有多少种不同的陈列方式？

A. 不到 1 万种　　B. 1 万～2 万种之间

C. 2 万～3 万种之间　　D. 超过 3 万种

【解析】例 3. 出现“必须连在一起”，为相邻问题，考虑捆绑法。已知“要求同一种类的画必须连在一起”，将 3 幅油画捆绑，内部有顺序，为 A（3,3）；将 4 幅国画捆绑，内部有顺序，为 A（4,4）；将 5 幅水彩画捆绑，内部有顺序，为 A（5,5）。已知“油画不放在两端”，油画只能在中间，要么国画在左、水彩画在右，要么水彩画在左、国画在右，调换顺序对结果有影响，有 2 种情况。先捆再排，分步用乘法，所求=A（3,3）*A（4,4）*A（5,5）*2=6*24*120*2=288*120＞3 万，对应 D 项。【选 D】

【拓】（2019 四川下）某场科技论坛有 5G、人工智能、区块链、大数据和云计算 5 个主题，每个主题有 2 位发言嘉宾。如果要求每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，问共有多少种不同的发言次序？

A. 120　　B. 240

C. 1200　　D. 3840

【解析】拓. 出现“必须相邻”，为相邻问题，考虑捆绑法。每个主题内部捆绑均为 A（2,2）=2，5 个主题排列为 A（5,5），先捆再排，分步用乘法，所求=2^5*A（5,5）=32*120=3000^+，对应 D 项。【选 D】

【注意】出现“挨着”，为相邻问题，考虑捆绑法，先捆再排，分步用乘法。捆绑时，需要考虑捆绑之后内部的顺序；排列时，需要注意题目要求。

【知识点】不相邻：

1. 例：李雷、韩梅梅、路人甲、路人乙、路人丙，五人站排，李雷和韩梅梅

不挨着，有几种情况？

答：先安排没有要求的路人甲、路人乙、路人丙，A（3,3）；三人站好后产生 4 个空，从中选择 2 个空放李雷和韩梅梅，李雷和韩梅梅调换顺序结果不同，为 A（4,2）；先排再插，用乘法，A（3,3）*A（4,2）。

2. 方法（插空法）：

（1）先将可以相邻的进行排列，排列后形成若干个空位。

（2）再将不相邻的插入到形成的空位中去。

3. 例：李雷、韩梅梅、路人甲、路人乙、路人丙、路人丁，路人甲、路人乙、路人丙三人不挨着，有几种情况？

答：李雷、韩梅梅、路人丁没有要求，先站好，A（3,3）；产生 4 个空位，从中选出 3 个给路人甲、路人乙、路人丙，A（4,3）；分步相乘，A（3,3）*A（4,3）。

【例 4】（2020 联考）某学习平台的学习内容由观看视频、阅读文章、收藏分享、论坛交流、考试答题五个部分组成。某学员要先后学完这五个部分，若观看视频和阅读文章不能连续进行，该学员学习顺序的选择有：

A. 24 种　　　　B. 72 种

C. 96 种　　　　D. 120 种

【解析】例 4. “若观看视频和阅读文章不能连续进行”，不能连续即“不挨着”，考虑插空法，先排再插，收藏分享、论坛交流、考试答题没有要求，先排，A（3,3）；形成 4 个空，再插观看视频和阅读文章，A（4,2）。分步相乘，A（3,3）*A（4,2）=6*12=72。【选 B】

【拓】（2018 浙江事业单位）某地组织 9 名政协委员负责调研农民工子弟小学教学情况。调研结束合影前有 3 名委员因紧急工作已经离开，学校决定安排 3 名小学生代表与委员一起坐在前排。现要求每位小学生的两边都坐着政协委员，一共有（　）种不同的方式。

A. 7200　　　　　　　　　　　　B. 29600

C. 43200　　　　　　　　　　　D. 362880

【解析】拓. “调研结束合影前有 3 名委员因紧急工作已经离开”，离开的 3 个人是确定的，不需要再选，还剩下 6 名委员和 3 名小学生。先安排 6 名政协委员，A（6,6）；产生 7 个空位，但要求“每位小学生的两边都坐着政协委员”，则小学生不能放在政协委员的形成空位的两端，只能放在政协委员之间的 5 个空中，选择 3 个空放小学生，A（5,3）；分步相乘，A（6,6）*A（5,3），对应 C 项。【选 C】

【知识点】错位重排：比如每个厨师做一道菜，每个人都不吃自己的，有几种情况？

1. 你拿出一只袜子，每个人都不闻自己，有几种情况？1 个元素无法错位重排。

2. 你、我一人拿出一只袜子，每个人都不闻自己，有几种情况？只能是你闻我的，我闻你的，2 个元素有 1 种情况。

3. 你、我、他一人拿出一只袜子，每个人都不闻自己，有几种情况？可以是你、我、他闻我、他、你的袜子，也可以是你、我、他闻他、你、我的袜子，共 2 种情况。

元素个数	1	2	3	4	5	6
错排数	0	1	2	9	44	……

4. 考试主要考查 4 个主体的错位重拍书为 9、5 个主体的错位重排数为 44。

5. 6 个主体的错位重排数（考试不会考）：（1+2）*3=9；44=（2+9）*4=44；则 D_6=（9+44）*5=265。即错位重排数=前面两个错位重排数加和*前面元素个数。

【拓】（2015 山东）某单位从下属的 5 个科室各抽调了一名工作人员，交流到其他科室，如每个科室只能接收一个人的话，有多少种不同的人员安排方式？

A. 120　　B. 78

C. 44　　D. 24

【解析】拓. “某单位从下属的 5 个科室各抽调了一名工作人员，交流到其他科室”，即每个人不能回到自己的科室，为 5 个人的错位重排，结果为 D_5=44。【选 C】

【知识点】错位重排变形：

1. A、B、C、D、E、F，6 个人一人拿出一只袜子，只有 A 闻自己的袜子，有几种情况？

答：排列组合问题，只要出现确定的就不用管，相当于是 5 个人的错位重排，对应 44。

2. A、B、C、D、E、F，6 个人一人拿出一只袜子，只有一个人闻自己的袜子，有几种情况？

答：6 个人中选择 1 个人闻自己的袜子，C（6，1），还剩 5 个人，不闻自己的对应 44，C（6，1）*44。

3. A、B、C、D、E、F，6 个人一人拿出一只袜子，有两个人闻自己的袜子，有几种情况？

答：先选择 2 个人闻自己的袜子，没有顺序，C（6，2），剩下 4 个人错位重排，对应 9，C（6，2）*9。

二、概率问题

【知识点】

1.给情况求概率：

（1）例：3 个绿球、2 个黄球、5 个红球，球都一样，随便摸一个。问：摸到绿球的概率？P=满足条件的情况数/全部情况数=3/10。

（2）公式：概率=满足/全部。

（3）注：正难则反，满足概率=1-不满足概率。

2.给概率求概率：

（1）方法：分类加和、分步相乘。

（2）例：某抽奖活动：一等奖（小汽车），中奖概率为 5%；二等奖（摩托车），中奖概率为 10%；三等奖（自行车），中奖概率为 30%。

①甲中奖的概率为多少？中一等奖、二等奖、三等奖都算中奖，分类用加法，5%+10%+30%=45%。

②甲和乙同时中 2 等奖的概率为多少？甲中奖概率为 10%，乙中奖概率为 10%，两人都要发生，为分步的过程，用乘法，10%*10%=1%。

【例 1】(2022 江苏)“双减”政策实施后，某小学下午 5：30 放学，小李 5：00 下班去接孩子回家，当不堵车时，5：30 之前到校；当堵车时，5：30 之前到校的概率为 0.6。若 5：00～5：30 堵车的概率为 0.3，则小李 5：30 之前到校的概率是：

A.0.78　　　　B.0.80

C.0.88　　　　D.0.91

【解析】例 1.方法一：给概率求概率，5：30 之前到校分为（1）不堵车，概率为 1-0.3=0.7，不堵车一定可以 5：30 之前到校，最终概率为 0.7*1=0.7；（2）堵车，概率为 0.3，当堵车时，5：30 之前到校的概率为 0.6，最终概率为 0.3*0.6=0.18。分类相加，0.7+0.18=0.88。

方法二：反面考虑。不堵车一定可以满足 5：30 之前到校，反面一定是堵车且不能 5：30 之前到校，概率为 0.3*0.4=0.12，所求=1-反面情况概率=1-0.12=0.88。【选 C】

【例 2】（2021 山东）进入某比赛四强的选手通过抽签方式随机分成 2 组进行半决赛，已知小王在面对任何对手时获胜的概率都是 60%，小张在面对任何对手时获胜的概率都是 40%。则小王和小张均在半决赛中获胜的概率为：

A. 2/15　　B. 4/15

C. 3/25　　D. 4/25

【解析】例 2. 给概率求概率，假设四强为小王、小张、A、B，比赛情况分为三种情况，（小王、小张）一组、（A、B）一组；（小王、A）一组、（小张、B）一组；（小王、B）一组、（小张、A）一组。要求小王和小张均在半决赛中获胜，则小王和小张不能在同一组，则（小王、小张）一组、（A、B）一组这种情况不满足，还有两种情况，故符合情况的概率有 2/3。小王获胜概率为 60%=3/5，小张获胜概率为 40%=2/5，要都发生，分步相乘，2/3*（3/5）*（2/5）=4/25。【选 D】

王　张　AB

（王　张）（AB）　×

（王　A）（张 B）

（王　B）（张 A）

【例 3】（2018 吉林）某仓库存放三个厂家生产的同一品牌洗衣液，其中甲厂生产的占 20%，乙厂生产的占 30%，剩余为丙厂生产的，且三个厂家的次品率分别为 1%、2%、1%，则从仓库中随机取出一件是次品的概率为：

A. 1.6%　　B. 1.3%

C. 1%　　D. 2%

【解析】例 3. 给概率求概率，用分类、分步的思想。取出一件是次品，次品可能来自甲厂、乙厂、丙厂，分为三类。甲厂：拿到甲厂的概率为 20%，是次品的概率为 1%，分步相乘，20%*1%=0.2%；乙厂：拿到乙厂的概率为 30%，是次品的概率为 2%，分步相乘，30%*2%=0.6%；丙厂：拿到丙厂的概率为 50%，是次品的概率为 1%，分步相乘，50%*1%=0.5%。分类相加，0.2%+0.6%+0.5%=1.3%。【选

B】

【拓展】（2018 国考）某单位的会议室有 5 排共 40 个座位，每排座位数相同。小张和小李随机入座，则他们坐在同一排的概率：

A. 不高于 15%　　　　B. 高于 15%但低于 20%

C. 正好为 20%　　　　D. 高于 20%

【解析】拓展. 两个主体对应相同的目标（同一排），为跟屁虫原理。某单位的会议室有 5 排共 40 个座位，则每排有 8 个座位。先让小张选择一个座位，坐好之后不用再考虑小张，只要看小李即可。小张坐了一个之后还剩 39 个座位，其中和小张同一排的还有 8-1=7 个座位，所求=7/39。【选 B】

【注意】跟屁虫原理：

1. 两个主体有相同的目标（目的），求概率，方法：任意固定一个，只求另外一个满足的概率即可。

2. 如 A、B、C、D 四个选项，甲和乙蒙同一个答案的概率为多少？

答：（1）任意固定一个，甲先选，假设选 B 项。（2）乙选择的时候，有 4 种选择，其中有 1 个 B 项和甲相同，概率为 1/4。

【拓】（2018 辽宁）一张纸上画了 5 排共 30 个格子，每排格子数相同。小王将 1 个红色和 1 个绿色棋子随机放入任意一个格子(2 个棋子不在同一格子)，则 2 个棋子在同一排的概率：

A. 不高于 15%　　　　B. 高于 15%但低于 20%

C. 正好为 20%　　　　D. 高于 20%

【解析】拓. 一张纸上画了 5 排共 30 个格子，则每排 6 个格子。两个主体在同一排（同一目标），求概率。红色先随便放一个格子，还剩下 29 个格子，其中有 5 个格子和红色在同一排，概率为 5/29。【选 B】

【拓】（2018 联考）某单位工会组织桥牌比赛，共有 8 人报名，随机组成 4 队，每队 2 人。那么，小王和小李恰好被分在同一队的概率是：

A. 1/7　　B. 1/14

C. 1/21　　D. 1/28

【解析】拓. 8 个人分为 4 队，小王和小李两个主体在同一队求概率，先确定小王的位置，随便选择一个位置，小李再选择的时候还有 7 个位置可以选，其中有 1 个和小王在同一队，概率为 1/7。【选 A】

【拓】（2019 联考）某学校举行迎新篝火晚会，100 名新生随机围坐在篝火四周，其中，小张与小李是同桌，他俩坐在一起的概率为：

A. 2/97　　B. 2/98

C. 2/99　　D. 2/100

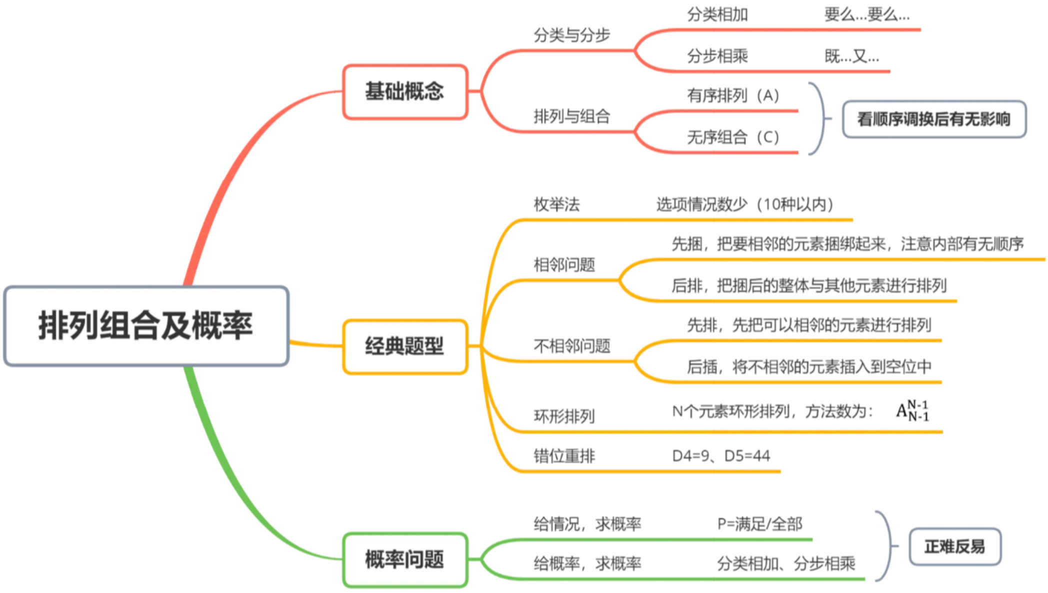
【解析】拓. 两个主体相同目标求概率，共 100 个位置，小张随便选，小李还有 99 个座位可以选，符合条件的是小张的左边、右边，共 2 个，概率=2/99。【选 C】

【例 4】（2021 联考）两个大人带四个孩子去坐只有六个位置的圆形旋转木马，那么两个大人不相邻的概率为：

A. 2/5　　B. 3/5

C. 1/3　　D. 2/3

【解析】例 4. 正面考虑两个大人不相邻，可能隔 1 个、2 个孩子，情况很多，则可以考虑反面（相邻的概率），$1-P_{两个大人相邻}$。其中一个人选择一个位置之后，另一个人还有 2 个位置可以选（在第一个人的左边或者右边），1-2/5=3/5。【选 B】



【注意】排列组合与概率：排列组合的难度比较高，课后不会的地方要反复听。

1. 基础概念：

（1）分类与分步：

①分类相加：要么……要么……。

②分步相乘：既……又……。

（2）排列与组合：看顺序调换后有无影响。

①有序排列（A）。

②无序组合（C）。

2. 经典题型：相对更简单，给出每一种题型要怎么做。

（1）枚举法：选项情况数少（10 种以内）。

（2）相邻问题：

①先捆：把要相邻的元素捆绑起来，注意内部有无顺序。

②后排：把捆后的整体与其他元素进行排列。

（3）不相邻问题：

①先排：先把可以相邻的元素进行排列。

②后插：将不相邻的元素插入到空位中。

（4）环形排列：N 个元素环形排列，方法为：A（N-1，N-1）。

（5）错位重排：$D_4=9$，$D_5=44$。

3.概率问题：正难反易。

（1）给情况，求概率：P=满足/全部。

（2）给概率，求概率：分类相加、分步相乘。

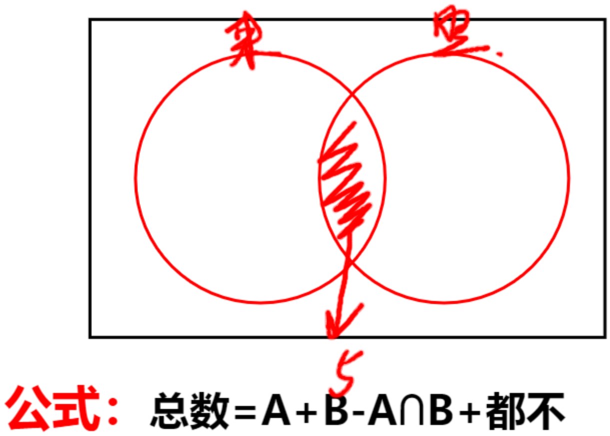
第九节　容斥原理问题

【知识点】容斥问题：几集合，啥方法。

1.两集合：

（1）容斥问题体现的是计数原理，计数的时候先把符合条件的部分全部加在一起，之后减掉重复，过程中如果多减了再补回来。

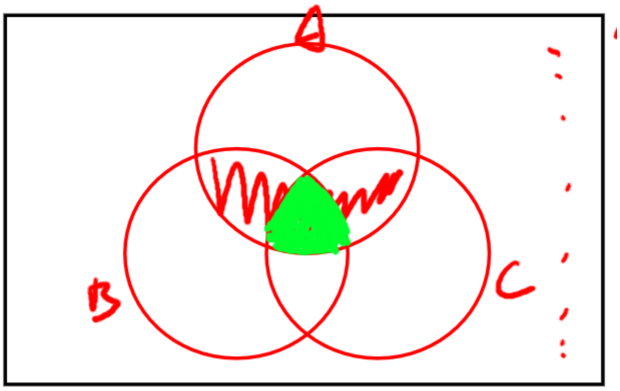
（2）例：班级中有两部分人，一部分人是来来的粉丝（30 人）、一部分是照照的粉丝（35 人），还有一部分同学两个都不喜欢（10 人），求班级总数，不能用 30+35+10，可能存在交集，假设喜欢来来也喜欢照照的有 5 人，这 5 个人在“+30”和“+35”中都加了一次，需要再减去。总人数=30+35+10-5。



（3）公式：总数=A+B-A∩B+都不。

2.三集合标准型（分别给出两两交集）：

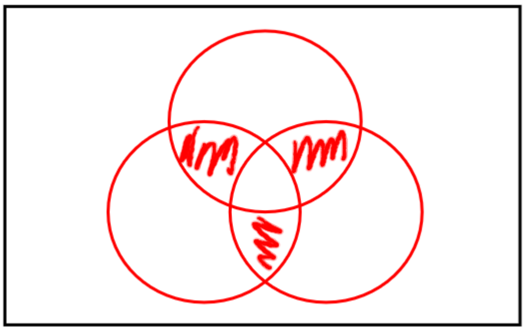
（1）假设有三个主体，且给出 A∩B、A∩C、B∩C，先把各部分加和，A+B+C+都不，其中 A∩B 在“+A”和“+B”中都体现了 1 次，需要减 1 次，同理，还需要减去 A∩C、B∩C。中间 A∩B∩C 在“A+B+C”中加了 3 次，只要 1 次，因此要减 2 次。“-A∩B-A∩C-B∩C”的时候已经减了 3 次，加 3 次减 3 次，中间部分没有了，需要加上一次，得到公式：总数=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C+都不。



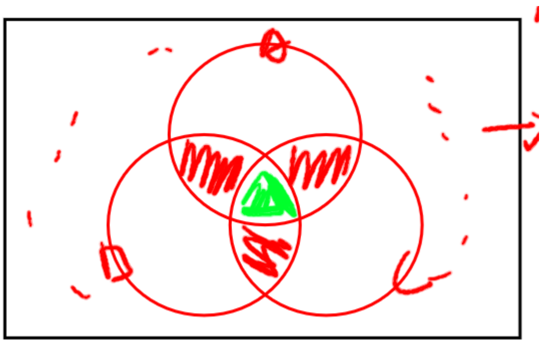
（2）公式：总数=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C+都不。

3.三集合非标准型（统一给出满足两者）：

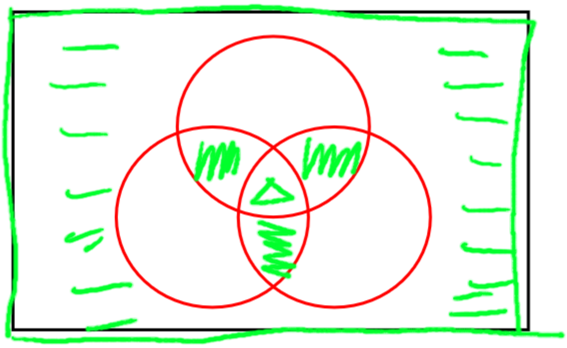
（1）满足两者即只满足两者。比如班级中有玩足球、篮球、排球，说玩两种球，只能是足球篮球，或足球排球，或篮球排球。也可以理解为图中三张纸片盖在一起，即图中“两层”的部分，不包含中间“三层”的部分。



（2）先把各部分加和，A+B+C+都不，其中满足两者的部分加了两次，需要减去一次，中间部分没有减过，有 3 层，需要减去 2 层，得到公式：总数=A+B+C-满足两项-2*满足三项+都不。



（3）如糊窗户纸，用 A、B、C 三张纸糊上之后，又糊上“都不”的部分，撕掉重复的部分，只满足两种的部分是 2 层，需要撕掉 1 层；中间三者都满足的部分有 3 层，需要减去 2 层。



公式：总数=A+B+C-满足两项-2×满足三项+都不

（4）公式：总数=A+B+C-满足两项-2*满足三项+都不。

4.如何区分标准与非标？

（1）标准：总数=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C+都不。

①识别：分别给出两两交集（既……又）。

②题干/问题中分别给出两两交集（既 A 又 B、既 B 又 C、既 A 又 C）。

③……28 人喜欢泰山，30 人喜欢华山，42 人喜欢黄山，8 人既喜欢黄山又喜欢华山，10 人既喜欢泰山又喜欢黄山，5 人既喜欢华山又喜欢泰山，3 人喜欢这三个景点，则不喜欢这三个景点中任何一个的有多少人？识别：分开给出两两交集，标准公式。

（2）非标：总数=A+B+C-满足两项-2*满足三项+都不

①识别：统一给出满足两者（参加两项、喜欢两种）。

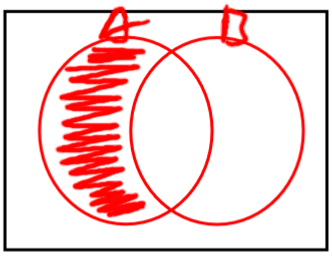
②题干/问题中统一给出满足两种（只满足两种）。

③……参加合唱活动的有 189 人，参加象棋活动的有 152 人，参加羽毛球活动的有 135 人，参加两种活动的有 130 人，参加三种活动的有 69 人，不参加任何一种活动的有 44 人。该单位的职工人数为多少？识别：统一给出满足两者，为非标公式。

5.容斥问题的方法选择：

（1）公式法：题目中所给、所求都是公式中的一部分。

（2）画图法：出现“只 A”。公式中没有，考虑画图。



（3）画图法三步走：

①画图。

②标数字（从交集标、不重不漏）。

③加和求解。

6. 容斥问题中，满足两种和只满足两种是同一个意思。

7. 做题步骤：几集合（2 集合、3 集合）、啥方法（公式、画图）。

【例 1】（2020 福建）学校有 300 个学生选择参加地理兴趣小组、生物兴趣小组或者两个小组同时参加，如果 80%学生参加地理兴趣小组，50%学生参加生物兴趣小组。问同时参加地理和生物兴趣小组的学生人数是多少？

A. 240　　　　B. 150

C. 90　　　　D. 60

【解析】例 1. 300 的 80%是 240，300 的一半是 150。有交叉重复去计数，容斥问题——几集合，啥方法？有地理和生物共 2 个集合，给了总数、A、B，求 A∩B，所给所求均是公式一部分，代公式，“学校有 300 个学生选择参加地理兴趣小组、生物兴趣小组或者两个小组同时参加”，总人数=300，说明不存在都不参加的同学，300=240+150-x→x=90，对应 C 项。【选 C】

【注意】先看例 3。

【例 3】（2020 新疆）某单位共有 240 名员工，其中订阅 A 期刊的有 125 人，订阅 B 期刊的有 126 人，订阅 C 期刊的有 135 人，订阅 A、B 期刊的有 57 人，订阅 A、C 期刊的有 73 人，订阅 3 种期刊的有 31 人，此外，还有 17 人没有订阅这三种期刊中的任何一种。问订阅 B、C 期刊的有多少人？

A. 57　　　　B. 64

C. 69　　　　　　　　D. 78

【解析】例 3. 有交叉重复去计数，容斥问题——几集合，啥方法？有 A 期刊、B 期刊、C 期刊为三个集合，给了 A、B、C、A∩B、A∩C、A∩B∩C、总数、都不，求 B∩C，所给所求均是公式一部分，直接代公式，分开给出两两交集，考虑标准型公式，设 B∩C 为 x，240=125+126+135-57-73-x+31+17，考虑尾数法，有加有减，先约掉减的部分，-57 和+17 的尾数抵消，125+135 的尾数是 0，最后剩下尾数 0=尾数 4-x 的尾数→x 的尾数=4，对应 B 项。【选 B】

【例 4】（2021 福建事业单位）为了解某校乒乓球、篮球、排球三种球类的运动情况，采访了某班的同学，了解到会打乒乓球的 32 人，会打篮球的 25 人，会打排球的 23 人，只会打两种球类的 18 人，三种球类都会打的 8 人，三种球类都不会的 6 人，问这个班共有多少人？

A. 50　　　　　　　　B. 52

C. 60　　　　　　　　D. 76

【解析】例 4. 有交叉重复去计数，容斥问题，3 个球代表 3 个集合，看条件，给了 A、B、C、满足两种、满足三种、都不，所给所求都是公式一部分，笼统给出只满足两项，考虑非标准型公式，代入数据：全部=32+35+23-18-2*8+6，尾数法，+25+23 和-18 的尾数抵消，-2*8 和+6 的尾数抵消，全部尾数为 2，对应 B 项。【选 B】

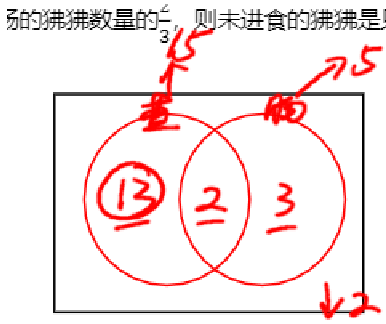
【例 5】（2020 深圳）某科学家做了一项实验，通过向若干只狒狒提供不限量的香蕉和香肠以研究其食性。结果表明，90%的狒狒有进食，其中吃香蕉的狒狒是吃香肠的狒狒数量的 3 倍，而两种食物都吃的狒狒是只吃香肠的狒狒数量的 2/3，则未进食的狒狒是只吃香蕉的狒狒数量的：

A. 1/5　　　　　　　　B. 3/10

C. 2/13　　　　　　　　D. 4/15

【解析】例 5. 有交叉重复去计数，容斥问题——几集合，啥方法？有香蕉、香肠 2 个集合，出现“只吃香蕉”，是只满足某一种情况，考虑画图法，画两个圈代表 2 个集合，方框内、圈外为“都不”，从交集开始标数，图中有 4 个封闭

空间，要求 4 个封闭空间不能重复，但是题目没有给出具体数，给比例求比例，考虑赋值法。设两个都吃的狒狒数量为 2，则只吃香肠的狒狒数量为 3，吃香肠的狒狒数量为 5，已知“吃香蕉的狒狒是吃香肠的狒狒数量的 3 倍”，则吃香蕉的狒狒数量为 15，只吃香蕉的狒狒数量为 13，共有 13+2+3=18 个狒狒进食，已知“90%的狒狒有进食”，则狒狒总数=20，未进食的狒狒数量为 2，所求=2/13，对应 C 项。【选 C】

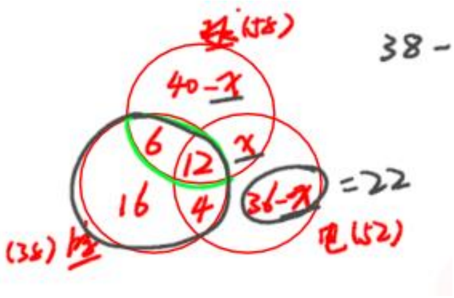


【例 6】（2019 内蒙古事业单位）对 100 名学生进行调查，发现他们喜欢看球赛、电影和打游戏，其中 58 人喜欢看球赛，38 人喜欢打游戏，52 人喜欢看电影，既喜欢看球赛又喜欢打游戏的有 18 人，既喜欢看电影又喜欢打游戏的有 16 人，三种都喜欢的有 12 人，则这些学生中只喜欢看电影的有：

A. 18 人　　B. 22 人

C. 26 人　　D. 32 人

【解析】例 6. 有交叉重复去计数，容斥问题——几集合，啥方法？有球赛、电影、打游戏 3 个集合，出现“只喜欢某一个主体”，画图法，3 个集合画 3 个圈，不存在都不喜欢的，故不画大方框，从交集开始标数，三种都喜欢的有 12 人，喜欢球赛和游戏的是 18 人，则只喜欢球赛和游戏的是 6 人；喜欢看电影、打游戏的是 16 人，则只喜欢看电影和打游戏的是 4 人，设只喜欢球赛和电影的是 x 人，则只喜欢球赛的是 40-x 人，只喜欢游戏的是 16 人，只喜欢电影的是 36-x 人。加和有技巧，黑色圆圈是 38 人，还剩下 40-x、x、36-x，故可列式：38-x+76=100→x=14，问的是只喜欢看电影的，所求=36-x=22，对应 B 项。【选 B】



【注意】若用公式，还需要画图分析，比较麻烦。

【拓】(2018 辽宁)某班在筹备联欢会时发现很多同学都会唱歌和乐器演奏，但有部分同学这 2 种才艺都不会。具体有 4 种情况：只会唱歌、只会乐器演奏、唱歌和乐器演奏都会、唱歌和乐器演奏都不会。现知会唱歌的有 22 人，会乐器演奏的有 15 人，两种都会的人数是两种都不会的 5 倍。这个班至多有（　）人。

A. 27　　　　B. 30

C. 33　　　　D. 36

【解析】拓. 容斥最值问题，先选公式，分析未知量的最值。有唱歌和乐器两个集合，公式：全部=A+B-A∩B+都不，假设都不为 x，则总数=22+15-5x+x→总数=37-4x，要想总数最大，则 x 要尽量小，但是 x 不能为 0（若为 0，不存在都不，也不存在交集，不满足题意），故 x 最小为 1，所求为 33，对应 C 项。【选 C】

【例 2】（2021 四川下）为实现产业振兴，农科院对某县的所有自然村进行了调研，结果发现，适合种植 A 作物的自然村占 4/13，适合种植 B 作物的自然村有 25 个，同时适合种植两种作物的自然村占总数的 1/14，则在该县，不适合种植两种作物的自然村至少有多少个？

A. 57　　　　B. 67

C. 114　　　　D. 134

【解析】例 2. 已知 A/总数=4/13，则总数应该是 13 的倍数；A∩B/总数=1/14，则总数是 14 的倍数，总数是 13、14 的公倍数→总数是 182 的倍数，总数可以表示为 182x。两集合问题，公式：全部=A+B-A∩B+都不，代入数据：182x=56x+25-13x+所求→所求=139x-25，分析所求的最小值，x 要取最小值，x 可以为 1、2、

3，当 x 为 1，所求最小为 114，对应 C 项。【选 C】

【拓】（2019 联考）一次期末考试，某班同学成绩统计如下表：

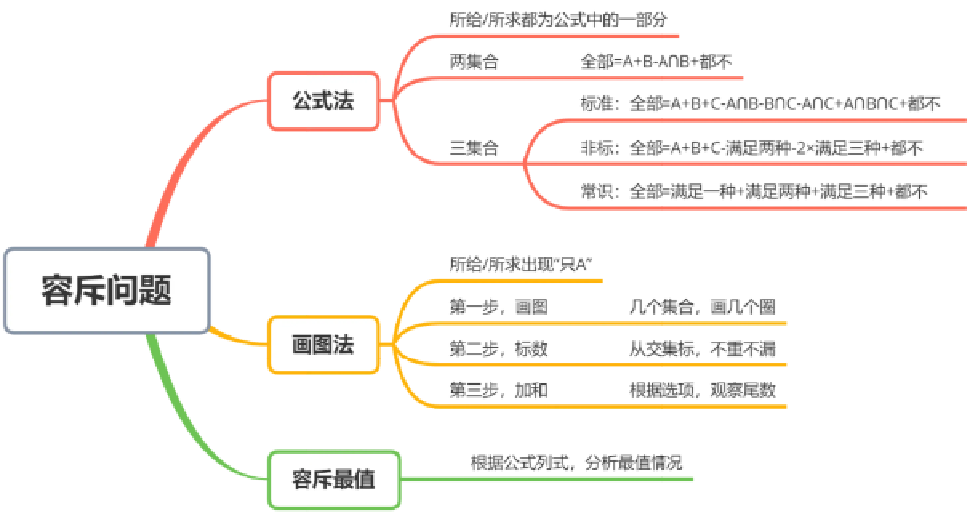
数学 90 分以上	语文 90 分以上	英语 90 分以上	数学和英语 90 分以上	数学和语文 90 分以上	语文和英语 90 分以上	三门功课没有一门 90 分以上
23 人	21 人	20 人	8 人	6 人	10 人	5 人

求：这个班最多有多少人？

A. 45　　B. 51

C. 53　　D. 55

【解析】拓. 交叉重复，容斥问题，问最多，容斥最值，选公式，分析最值量。给出两两之间交集，考虑标准型公式：全部=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C+都不，代入数据：全部=23+21+20-8-6-10+x+5→总数=45+x，要想总数最大，x 要最大，三门功课都 90 分以上的不可能超过 6 人（因为数学和语文 90 分以上才 6 人），x 最大为 6，所求=45+6=51，对应 B 项。【选 B】



【注意】容斥问题：

1. 公式法：

（1）所给/所求都为公式中的一部分。

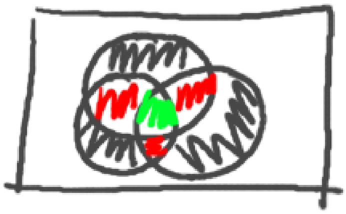
（2）两集合：全部=A+B-A∩B+都不。

（3）三集合：

①标准：全部=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C+都不。

②非标：全部=A+B+C-满足两种-2*满足三种+都不。

③常识：全部=满足一种+满足两种+满足三种+都不。满足一种是黑色部分，满足两种是红色部分，满足三种是绿色部分，外围一圈是都不，加在一起为全部，很好理解。



2.画图法：

（1）所给/所求出现“只 A”。

（2）第一步，画图：几个集合，画几个圈。

（3）第二步，标数：从交集标，不重不漏。

（4）第三步，加和：根据选项，观察尾数。

3.容斥最值：根据公式列式，分析最值情况。

【练】(2018 江西)某高校做有关碎片化学习的问卷调查，问卷回收率为 90%，在调查对象中有 180 人会利用网络课程进行学习，200 人利用书本进行学习，100 人利用移动设备进行碎片化学习，同时使用三种方式学习的有 50 人，同时使用两种方式学习的有 20 人，不存在三种方式学习都不用的人。那么，这次共发放了多少份问卷？

A.360　　　　B.380

C.390　　　　D.400

【解析】练.问卷回收率为 90%可理解为发出一百份问卷收回九十份。容斥问题，所给所求都是公式一部分，考虑公式法，统一给出满足两种，考虑非标准型公式：总数=180+200+100-20-2*50+0=360，不要忘记除以回收率，所求=360/90%=400，对应 D 项。【选 D】

【注意】有 90%以上的同学能够正确选择公式，正常来讲，A 项是 370，若为

370 就没有坑了，老师改成了 360。

【注意】

1. 数量关系备考指导：数量放最后做，做题挑着来，容易熟悉可代入。剩下不会直接猜，10 题做 3 对一半。不建议大家花式猜题，若全选一个选项，正确率只能在 20%～30%，推荐大家做 3 题，假设选了 A、B、C 项，剩下的题目全蒙 D 项，则正确率可以达到 50%，若做的 3 题全都选 A 项，剩下的可以在 B、C、D 项中蒙一个。

2. 复习建议：夯实基础→逐个击破→刷题实战。

3. 拿分题型：最值、容斥、经济利润（特殊、方程）、工程、行程（基础、相对）、和差倍比（方程）、几何（公式、结论）。

【答案汇总】组合问题：基础概念：1-3：DCD；经典题型：1-4：CCDB；概率：1-4：CDBB；容斥问题：1-5：CCBBC；6：B

粉笔直播课

遇见不一样的自己

Be your better self

粉笔