

方法精讲-数量 2

(笔记)

主讲教师：牟立志

授课时间：2022.03.23



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 2（笔记）

数量关系 方法精讲 2

学习任务：

1. 课程内容：工程问题、行程问题

2. 授课时长：3 小时

3. 对应讲义：158 页~162 页

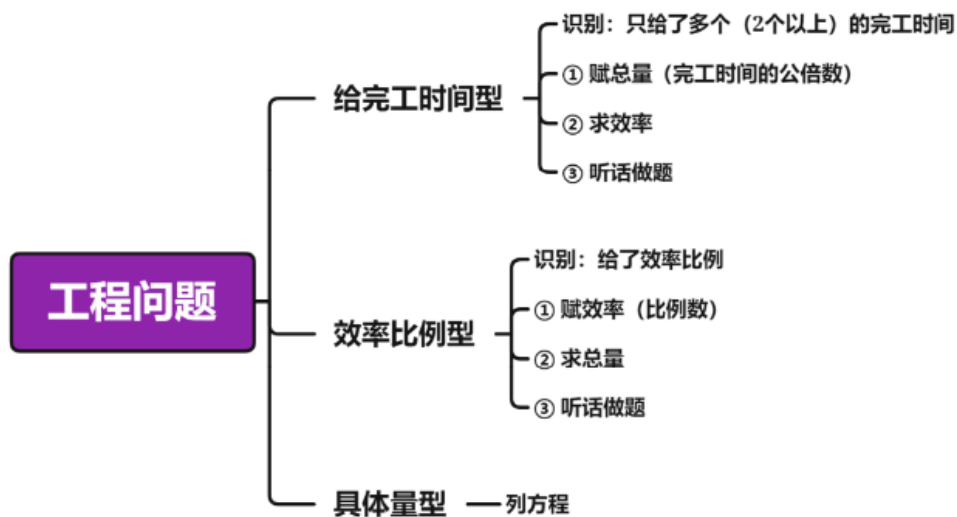
4. 重点内容：

（1）掌握工程问题的三种考法与对应解题步骤，以及常用的赋值方法

（2）掌握行程问题的基础公式与等距离平均速度公式，以及火车过桥问题

（3）掌握线形和环形上的相遇、追及问题的计算公式，用图示理解复杂的运动过程

（4）掌握多次相遇的结论、流水行船的计算公式



【注意】工程问题（工程问题比较简单，也是必考题型，是势在必得的）：判题型，选方法。

1. 给完工时间型：

（1）识别：只给了多个（2 个以上）的完工时间。

(2) 方法:

①赋总量 (完工时间的公倍数)。

②求效率。

③听话做题。

2. 效率比例型:

(1) 识别: 给了效率比例。

(2) 方法:

①赋效率 (比例数)。

②求总量。

③听话做题。

3. 具体量型: 列方程。

第四节 工程问题

一、给完工时间型

【知识点】完工时间型 (只给出时间→总量和效率都未知、多个时间且是完工时间):

1. 方法:

(1) 赋总量→最好为完工时间的最小公倍数 (方便计算)。

(2) 求效率→效率=总量/时间。

(3) 听话做题。

2. 例: 洗一堆袜子, 小来单独需要 3 小时, 小照单独需要 2 小时, 问: 两人合作需要几小时?

答: 只给两个出时间, 且是完成工作的时间, 判定为给完工时间型工程问题。(1) 赋总量: 赋值总量为 2 和 3 的最小公倍数 6; (2) 求效率: 小来=6/3=2, 小照=6/2=3; (3) 听话做题: $t=6/(2+3)=1.2$ 小时。

3. 如何找最小公倍数?

(1) 方法: 短除法。

(2) 例:

①第一组: 25、30: 商 5, 落下 5、6, 最小公倍数=外围所有数字的乘积

$=5*5*6=120$ 。

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 25 \quad 30} \\ \times \quad 5 \quad \times \quad 6 \quad = 150 \end{array}$$

②第二组：12、15、18：商 3，落下 4、5、6；继续商 2，落下 2、5、3，
最小公倍数=外围所有数字的乘积= $3*2*2*5*3=180$ 。

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 12 \quad 15 \quad 18} \\ \times \quad 2 \overline{) 4 \quad 5 \quad 6} \\ \times \quad 2 \quad \times \quad 5 \quad \times \quad 3 \quad = 180 \end{array}$$

③第三组：12、15、24：12 和 24 存在倍数关系，直接找 24 和 15 的最小公倍数即可，因为如果这个数是 24 的倍数，就一定是 12 的倍数。

(3) 注：可以用大数扩大一定的倍数，比如 25 和 30，30 较大， $30*2=60$ ，看 60 是否涵盖 25。

【例 1】（2021 广东）为支持“一带一路”建设，某公司派出甲、乙两队工程人员出国参与一个高铁建设项目。如果由甲队单独施工，200 天可完成该项目；如果由乙队单独施工，则需要 300 天。甲、乙两队共同施工 60 天后，甲队被临时调离，由乙队单独完成剩余任务，问完成该项目共需多少天？

- A. 120
B. 150
C. 180
D. 210

【解析】例 1. 只给出两个完工时间，为给完工时间型工程问题，三步走。

(1) 赋总量：赋值总量为 200 和 300 的最小公倍数 600；(2) 求效率：甲= $600/200=3$ ，乙= $600/300=2$ ；(3) 再做题：假设乙单独做了 t 天， $(3+2)*60+2t=600$ ，解得 $t=150$ ，此时不能选择 B 项，问的是“问完成该项目共需多少天”，所求= $60+150=210$ 天，对应 D 项。【选 D】

需多少天? $60 + 150 = 210$

① 赋值总量 = 600

② 求效率 $\alpha = \frac{600}{200} = 3$ $\beta = \frac{600}{300} = 2$

③ 再做题 $(3 \times 2) \times 60 + 2t = 600$
 $t = 150$

【例 2】（2021 四川下）某项工程，甲、乙、丙三个工程队如单独施工，分别需要 12 小时、10 小时和 8 小时完成。现按“甲—乙—丙—甲……”的顺序让三个工程队轮班，每队施工 1 小时后换班，则该工程完成时，甲工程队的施工时间共计：

A. 2 小时 54 分

B. 3 小时

C. 3 小时 54 分

D. 4 小时

【解析】例 2. 识别题型，只给出三个完工时间，为给完工时间型工程问题。

（1）赋值总量：赋值总量为 12、10、8 的最小公倍数 120（为了好算）；（2）求效率：甲=120/12=10；乙=120/10=12；丙=120/8=15；（3）再做题：已知“现按“甲—乙—丙—甲……”的顺序让三个工程队轮班”，则 3 个小时为 1 个周期，一个周期共工作了 10+12+15=37，120/37=3 个周期……9 个工作量；一个周期中甲干了 1 小时，则 3 个周期甲干 3 小时，当一轮结束后，由甲先做，已知甲 1 小时做 10 个工作量，因此剩余的 9 个工作量甲 1 小时不到就能做完，所求=3h+1h，答案不可能是 A、B、D 项，对应 C 项。【选 C】

① 赋总量 120

② 求效率 $9 = \frac{120}{12} = 10$ $21 = \frac{120}{10} = 12$ $79 = \frac{120}{8} = 15$

③ 再做题 $(9, 2, 79)$
 $10 + 12 + 15 = 37$
 $120 \div 37 = 3 \dots 9$
 $9:3h + 9:1h$

【例 3】（2020 江苏）某小微企业接到三个相同的订单，赵、钱、孙、李四位师傅单独完成一个，分别需 20 小时、20 小时、15 小时和 12 小时。现钱、孙、李各负责一个订单，赵根据需要协助他们完成任务。若要三个订单同时完工且用时最短，则赵协助钱的时间是：

A. 8 小时

B. 7 小时

C. 6 小时

D. 9 小时

【解析】例 3. 要求“同时完工且用时最短”，言外之意是“同时开始且同时结束”，给出多个完工时间，识别题型，为给完工时间型工程问题，三步走。（1）赋总量：赋总量为 20、20、15、12 的最小公倍数 60；（2）求效率：赵=60/20=3；钱：60/20=3；孙：60/15=4；李：60/12=5；（3）再做题：t=3*60/(3+3+4+5)=12，帮谁分析谁，问“赵协助钱的时间”，则分析钱，钱负责一个 60，这 60 个工作量是由钱和赵完成的，钱完成了 3*12=36 个工作量，则赵完成了 60-36=24 个工作量，所求=24/3=8，故赵协助钱的时间为 8 小时，对应 A 项。【选 A】

① 赋总量 60

② 求效率 $赵 = \frac{60}{20} = 3$ $钱 = \frac{60}{20} = 3$ $孙 = \frac{60}{15} = 4$ $李 = \frac{60}{12} = 5$

③ 再做题 $\left\{ \begin{array}{l} ① t = \frac{3 \times 60}{3+3+4+5} = 12 \\ ② 60 < 3 \times 12 = 36 \\ 60 - 36 = 24 \\ 24 \div 3 = 8 \end{array} \right.$

【知识点】同时开始同时结束的工程问题（每个人的工作时间一样）：

1. 方法：

(1) 先总体→ $t_{\text{总}} = \text{总量加和} / \text{效率加和}$ 。

(2) 再分开→帮谁分析谁。

2. 例：A、B、C 三支施工队在王庄和李庄修路，王庄要修路 900 米，李庄要修路 1250 米。已知 A、B、C 队每天分别能修 24 米、30 米、32 米，A、C 队分别在王庄和李庄修路，B 队先在王庄，施工若干天后转到李庄，两地工程同时开始同时结束。问 B 队在王庄工作了几天？

答：识别题型，为同时开始同时结束的工程问题。即每个人的工作时间相同，A 每天修 24 米，则修了 $24t$ ；B 每天修 30 米，修了 $30t$ ；C 每天修 32 米，修了 $32t$ ；C 修了 $32t$ ，不管三人内部怎么干，三人把王庄和李庄的路修完了，则有： $24t + 30t + 32t = 900 + 1250 \rightarrow t * (24 + 30 + 32) = 920 + 1250 \rightarrow t = (900 + 1250) / (24 + 30 + 32) \rightarrow t = 25$ ；帮谁分析谁，问“B 队在王庄工作了几天”，则分析王庄，王庄总共修 900 米，这 900 米是由 B 和 A 完成的，A 完成了 $24 * 25 = 600$ 个工作量，剩下的 $900 - 600 = 300$ 个工作量是由 B 完成的，所求 $= 300 / 30 = 10$ 天，故 B 队在王庄工作了 10 天。

二、给效率比例型

【知识点】给效率比例型（给出效率比例）：

1. 方法：

- (1) 赋效率→最好为比例数。
- (2) 求总量→总量=效率*时间。
- (3) 听话做题。

2. 例：洗一堆袜子，小来和小照的效率比为 2: 1，合作 3 小时完成，现小来先洗 2 小时，再由小照单独洗，问：一共需要几小时洗完？

答：识别题型，给出时间和效率比例，为给效率比例型工程问题。(1) 赋效率：已知“小来和小照的效率比为 2: 1”，赋值小来的效率为 2，小照的效率为 1；(2) 求总量： $(2+1) * 3 = 9$ ；(3) 听话做题：设小照干了 t 小时， $2 * 2 + 1t = 9$ ，解得 $t = 5$ ，问“一共需要几小时洗完”，所求 $= 2 + 5 = 7$ 小时。

3. 给效率比例的几种不同形式：

- (1) 直接型：

①甲：乙=3：2→赋值甲的效率为 3，乙的效率为 2。

②甲的效率比乙高 $\frac{3}{5}$ →甲/乙=8/5，赋值甲的效率为 8，乙的效率为 5。

(2) 间接型：一项工程，甲干 3 天，乙干 7 天可以完成；甲干 2 天，乙干 9 天也可以完成→工程总量=3 甲+7 乙=2 甲+9 乙→甲=2 乙→甲/乙=2/1。

(2) 特殊型——给工作人数、机器数等数量（单位效率相同），如有 30 个工人参加修路，假设每人的效率为 1。

【例 1】（2021 北京）农场使用甲、乙两款收割机各 1 台收割一片麦田。已知甲的效率比乙高 25%，如安排甲先工作 3 小时后乙加入，则再工作 18 小时就可以完成收割任务。问如果增加 1 台效率比甲高 40%的丙，3 台收割机同时开始工作，完成收割任务的用时在以下哪个范围内？

A. 8 小时以内

B. 8~10 小时之间

C. 10~12 小时之间

D. 12 小时以上

【解析】例 1. 已知“已知甲的效率比乙高 25%”，则甲/乙=5/4，识别题型，为给效率比例型工程问题。（1）赋效率：赋值甲的效率为 5，乙的效率为 4，丙的效率为 $5 \times (1+40\%) = 7$ ；（2）求总量： $5 \times 3 + (5+4) \times 18 = 177$ ；（3）再做题：时间=总量/效率， $t = 177 / (5+4+7) = 177/16 = 11.X$ ，在 C 项范围内，选择 C 项。

【选 C】

①赋效率 $\text{甲}=5 \quad \text{乙}=4 \quad \text{丙}=5 \times (1+40\%) = 7$

②求总量 $\text{总}=5 \times 3 + (5+4) \times 18 = 177$

③再做题 $t = \frac{177}{5+4+7=16} = 11.X$

【例 2】（2020 四川下）某企业生产一批产品，计划在 42 天内完成，先由甲、乙车间共同生产，12 天后甲车间完成总任务的 10%，乙车间完成总任务的 15%。乙车间因设备整修，此后只能以 80%的效率工作，为按时完成任务，丙车间此时新加入工作，则其产能至少应是甲车间的：

A. 1

B. 0.8

C. 0.6

D. 0.5

【解析】例 2. 已知“12 天后甲车间完成总任务的 10%”，假设甲干 10%*总量，乙干 15%*总量，说明乙干得快；总量=效率*时间，相同时间内，效率和总量成正比，则甲的效率/乙的效率=10%/15%=2/3，识别题型，为给定效率比例型工程问题。（1）赋效率：甲=2，乙=3，乙’（乙后期）=3*80%=2.4；（2）求总量：2*12=24=10%*总量→总量=240；（3）再做题：240-24-（3*12）=180，或者从比例的角度考虑，已经完成了 10%+15%=25%，还剩下 240*75%=180，剩下的 180 个工作量需要三人合作，则 180=（2+2.4+丙）*（42-12）→丙=1.6，所求=丙/甲=1.6/2=0.8，对应 B 项。【选 B】

① 赋效率 $\text{甲}=2 \quad \text{乙}=3 \quad \text{乙}'=3 \times 80\% = 2.4$

② 求总量 $2 \times 12 = 24 = 10\% \text{总} \quad \text{总} = 240$

③ 再做题

25% ↑ 75% ↑

128 302

42

$240 \times 75\% = 180 = (2 + 2.4 + \text{丙}) \times 30$

$\text{丙} = 1.6$

$\frac{1.6}{2} = 0.8$

【注意】 $A=B \times C$ ，A 和 B 成正比，A 和 C 也成正比，因为 B 一定的情况下，A 大，C 也大。

【例 3】（2018 国考）工程队接到一项工程，投入 80 台挖掘机。如连续施工 30 天，每天工作 10 小时，正好按期完成。但施工过程中遭遇大暴雨，有 10 天时间无法施工。工期还剩 8 天时，工程队增派 70 台挖掘机并加班施工。问工程队若想按期完成，平均每天需多工作多少个小时？

A. 1.5

B. 2

C. 2.5

D. 3

【解析】例 3. 识别题型，为特殊给效率比例型工程问题（用机器的台数体现效率）。（1）赋效率：赋每台挖掘机每小时的工作效率为 1；（2）求总量：80*30*10*1，先不着急计算；（3）再做题：画线段分析，第一段正常工作一段时间，第二段

10 天无法施工，第三段 8 天加速施工，总共施工 30 天，故第一段正常工作时间
为 $30-8-10=12$ 天，假设 8 天加速施工过程中每天做 t 小时，总量= $80*12*10+$
 $(80+70)*8*t=80*30*10 \rightarrow 15t=180 \rightarrow t=12$ 天，所求= $12-10=2$ 小时，对应 B 项。

【选 B】

① 赋效率 每个小时效率为 1

$$12-10=2$$

② 求总量 原. = $80 \times 30 \times 10 \times 1$

③ 再做题

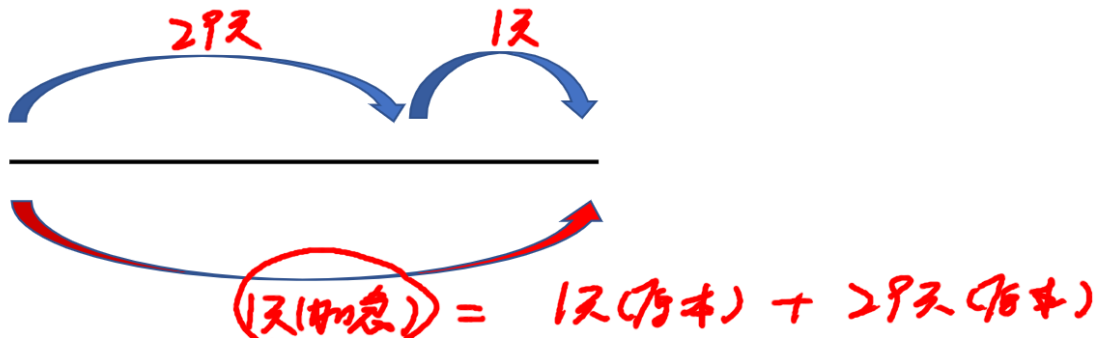
$$\underline{80 \times 12 \times 10} + \underline{(80+70) \times 2 \times t} = \underline{80 \times 30 \times 10}$$

$$15t = 180 \quad t = 12$$

【知识点】误工追赶：

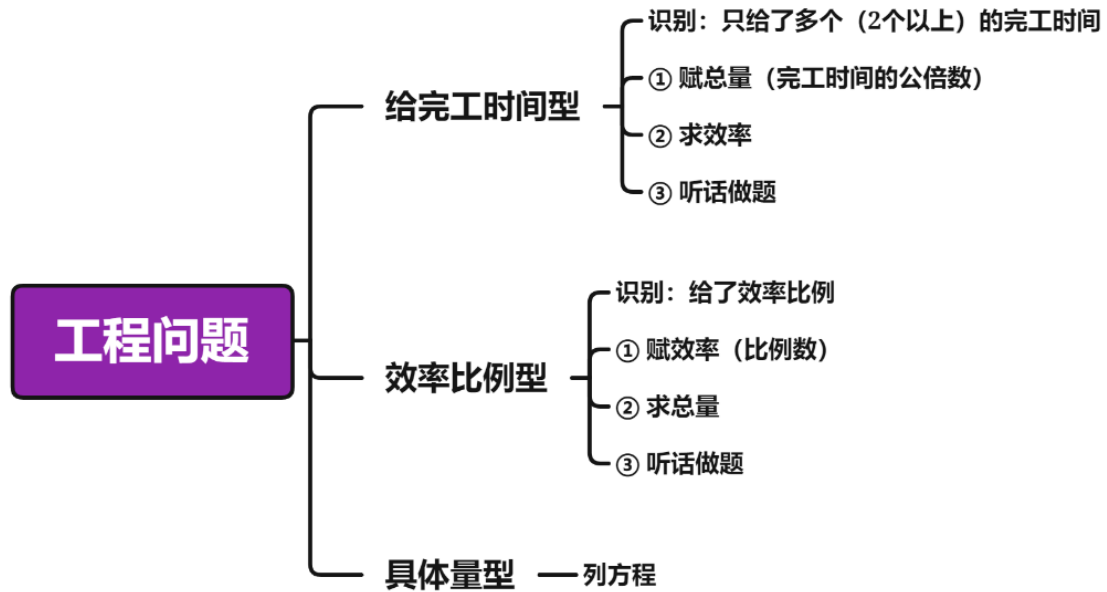
1. 例：志哥好学，儿时，寒假 30 天，前 29 天勤奋玩耍，后 1 天刻苦作业。

答：如图中，左边为 29 天的工作量，右边为 1 天的工作量，1 天加急做的工作量=1 天原本的工作量+29 天原本的工作量，即不仅要把这 1 天的工作做完，还需把之前“欠的债”补上。



2. 方法：加速期工作量=原本工作量+误工期工作量。

3. 注：同理得例 3 中，8 天加速做的工作量=8 天原本的工作量+10 天原本的工作量，即 8 天加速做的工作量= $(8+10)$ 天正常做的工作量 $\rightarrow 8*150t = (8+10)*80*10 \rightarrow 15t=180 \rightarrow t=12$ ，其中“ $(8+10)*80*10$ ”中的第二个“10”代表每天工作 10 小时。



【注意】工程问题：

1. 给完工时间型：

(1) 识别：只给了多个（2 个以上）的完工时间。

(2) 方法：

①赋总量（完工时间的公倍数）。

②求效率。

③听话做题。

2. 效率比例型：

(1) 识别：给了效率比例。

(2) 方法：

①赋效率（比例数）。

②求总量。

③听话做题。

3. 具体量型：列方程。

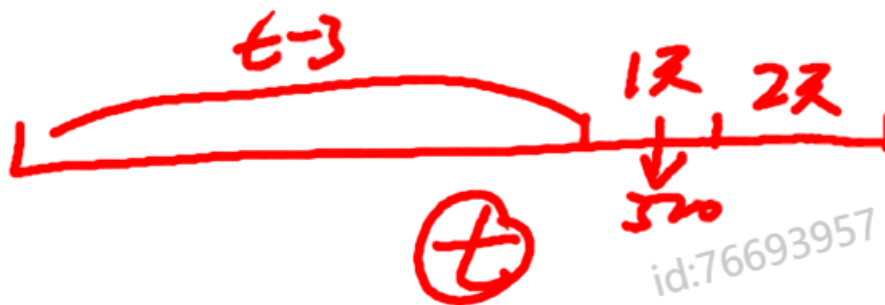
三、给具体单位型

【知识点】给具体量型：列方程。总量=效率*时间，一般情况下，工程问题中，题目会给出时间，在该三量关系中，若再给出总量或销量中的一个值，假设给出效率，则可求出总量，此时不需要再进行赋值，列方程求解即可。

【例】(2021 四川)某工程队计划每天修路 560 米,恰好可按期完成任务。如每天比计划多修 80 米,则可以提前 2 天完成,且最后 1 天只需修 320 米。问如果要提前 6 天完成,每天要比计划多修多少米?

- A. 160
C. 320
- B. 240
D. 400

【解析】例. 给出时间（2 天、6 天）、效率（560 米），使用方程法。设按期完成任务的时间为 t ，根据题意得：工作总量 = $560t = (560 + 80) * (t - 3) + 320$ ，提前 2 天完成，说明最后 2 天没有工作，且最后 1 天只需修 320 米，则前面的天数为 $t - 1 - 2 = t - 3$ ；或从另一个角度思考，工作总量 = $560t = (560 + 80) * (t - 2) - 320$ ，即若按照速度为 640 修路，最后 1 天多修了 320，需要减去。使用“ $560t = (560 + 80) * (t - 3) + 320$ ”计算，则 $560t = 640t - 1920 + 320 \rightarrow 80t = 1600 \rightarrow t = 20$ ，此时总量 = $560 * 20 / (20 - 6) = 560 * 20 / 14 = 800$ ，所求 = $800 - 560 = 240$ ，对应 B 项。【选 B】



【知识点】牛吃草（拓展）：可能在小学奥数中接触过。

1. 识别：排比句式，有增长，有消耗。

2. 方法（套公式）：原草=（牛-草）*时间。假设草原来有 100 份，牛每天吃 30 份，草每天生长的速度为 10 份，草每天生长的数量不够牛吃，则牛每天净消耗=（牛-草）*t=（30-10）*t=100→t=5。

3. 牛吃草（快速解题模板推导，了解即可）：

$$\begin{aligned} \text{原草} &= (\text{牛}_1 - \text{草}) * \text{天}_1 = (\text{牛}_2 - \text{草}) * \text{天}_2 \rightarrow \text{牛}_1 * \text{天}_1 - \text{草} * \text{天}_1 = \text{牛}_2 * \text{天}_2 - \text{草} * \text{天}_2 \\ &\rightarrow \text{草} * \text{天}_1 - \text{草} * \text{天}_2 = \text{牛}_1 * \text{天}_1 - \text{牛}_2 * \text{天}_2 \rightarrow \text{草} * (\text{天}_1 - \text{天}_2) = \text{牛}_1 * \text{天}_1 - \text{牛}_2 * \text{天}_2 \rightarrow \text{草} = \\ &(\text{牛}_1 * \text{天}_1 - \text{牛}_2 * \text{天}_2) / (\text{天}_1 - \text{天}_2)。 \end{aligned}$$

4. 例：牧场上有一片青草，每天都生长的一样快。这片青草供给 10 头牛吃，可以吃 24 天，或者供给 17 头牛吃，可以吃 10 天，如果供给 25 头牛吃，可以吃几天？

答：（1）常规方法：方程法、列表法。方程法最好理解，一般使用方程法解题，每头牛的效率未知，则默认每头牛的效率为 1，把条件代入等式，设草每天生长 x ，原草 = (牛 - 草) * 时间 = $(10 - x) * 24 = (17 - x) * 10 \rightarrow 120 - 12x = 85 - 5x \rightarrow 7x = 35 \rightarrow x = 5$ ，代回公式，则原草 = $(10 - 5) * 24 = 120 = (25 - 5) * \text{所求天数} \rightarrow \text{所求天数} = 6$ 。

（2）快速解题模板：解决牛吃草，心中有“草”、“原”，其中，“草”指“草”的公式，“原”指原有草量；草 = $(\text{牛}_1 * \text{天}_1 - \text{牛}_2 * \text{天}_2) / (\text{天}_1 - \text{天}_2)$ ，即第一句话两数相乘减第二句话两数相乘，再除以天数差（方向一致），根据题意得：草 = $(240 - 170) / 14 = 5$ ，则原草 = (牛 - 草) * 时间 = $(10 - 5) * 24 = 120 = (25 - 5) * \text{所求天数} \rightarrow \text{所求天数} = 6$ 。

【拓展】（2016 四川选调）“六一”儿童节，某海洋公园到检票时间有许多家长和儿童在门口等候，假定每分钟到的游客人数一样多。从开始检票到等候的队伍消失，若同时开 3 个检票口需 40 分钟，若同时开 5 个检票口需 20 分钟，那么同时开 6 个检票口需（ ）分钟。

A. 10

B. 12

C. 15

D. 16

【解析】拓展. 有排比句式，“若同时开 3 个检票口需 40 分钟，若同时开 5 个检票口需 20 分钟，那么同时开 6 个检票口需多少分钟”可类比为“3 头牛吃 40 天，5 头牛吃 20 天，6 头牛可吃几天”；有增长、有消耗，牛吃草问题，心中要有“草”、“原”，草 = $(\text{牛}_1 * \text{天}_1 - \text{牛}_2 * \text{天}_2) / (\text{天}_1 - \text{天}_2) = (3 * 40 - 5 * 20) / (40 - 20) = 20 / 20 = 1$ ，则原 = (牛 - 草) * 时间 = $(3 - 1) * 40 = 80 = (6 - 1) * \text{所求天数} \rightarrow \text{所求天数} = 16$ ，对应 D 项。【选 D】

【拓展】（2019 联考）某河道由于淤泥堆积影响到船只航行安全，现由工程队使用挖沙机进行清淤工作，清淤时上游河水又会带来新的泥沙。若使用 1 台挖

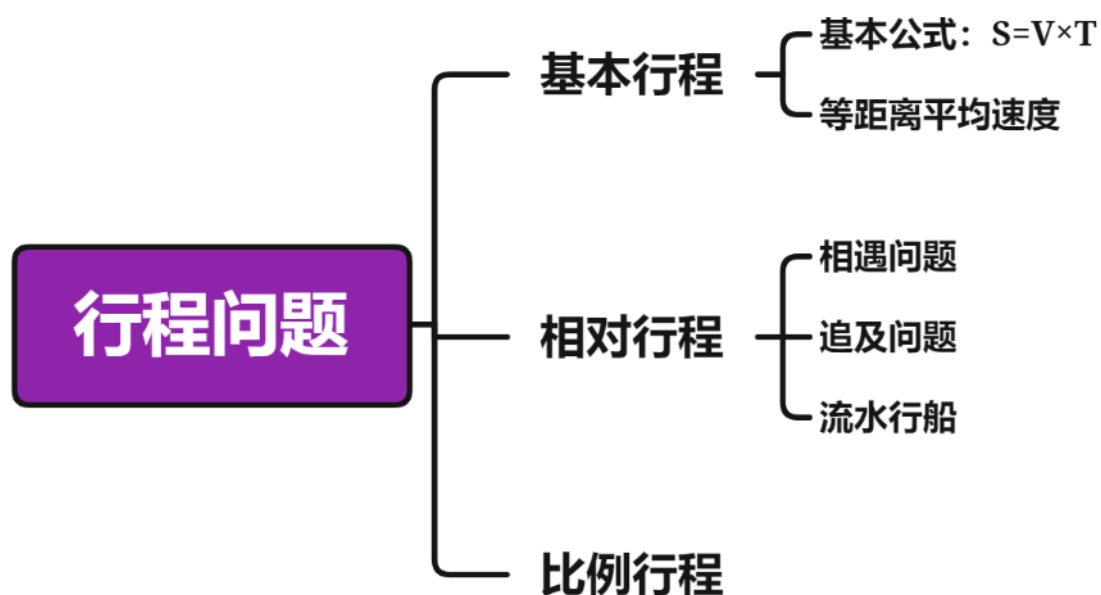
沙机 300 天可完成清淤工作，使用 2 台挖沙机 100 天可完成清淤工作。为了尽快让河道恢复使用，上级部门要求工程队 25 天内完成河道的全部清淤工作，那么工程队至少要有多少台挖沙机同时工作？

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

【解析】拓展. 挖沙机挖沙，沙子会变少，河水带来新的沙子，沙子会变多，有增长、有消耗；出现排比句式，“使用 1 台挖沙机 300 天可完成清淤工作，使用 2 台挖沙机 100 天可完成清淤工作”可类比为“1 头牛吃 300 天，2 头牛吃 100 天”，问题可类比为“25 天内吃完草需多少头牛”， $\text{草} = (\text{牛}_1 \times \text{天}_1 - \text{牛}_2 \times \text{天}_2) / (\text{天}_1 - \text{天}_2) = (300 \times 1 - 100 \times 2) / (300 - 100) = 100 / 200 = 0.5$ ，设至少要有 x 台挖沙机，则原 = (牛 - 草) * 时间 = $(1 - 0.5) \times 300 = 150 = (x - 0.5) \times 25 \rightarrow x = 6.5$ ，6.5 台才能完成，说明 6 台无法完成，取 7 台，对应 D 项。【选 D】

【注意】1 台挖沙机每天的效率为 1（类似于消耗 1 份草），“草”生长的速度为 0.5，故净消耗为 $1 - 0.5 = 0.5$ ，原草量 = $(1 - 0.5) \times 300 = 150$ 。

第五节 行程问题



【注意】行程问题：画图分析（比工程问题难），思维套路。行测中的行程

问题两极分化较严重，难题很难，简单题很简单，故在做题过程中，要辨别难题还是简单题，挑简单题去做。

1. 基本行程：

(1) 基本公式： $S=V \cdot T$ 。

(2) 等距离平均速度。

2. 相对行程：

(1) 相遇问题。

(2) 追及问题。

(3) 流水行船。

3. 比例行程。在三量关系 $S=V \cdot T$ 中， S 一定， V 与 T 成反比； V 一定， S 与 T 成正比； T 一定， S 与 V 成正比。

一、普通行程

【例 1】（2022 江苏）某人以每小时 10 公里的速度从甲地骑车前往乙地，中午 12:30 到达。若以每小时 15 公里的速度行驶，上午 11:00 到达，则他出发的时间是：

A. 上午 7:15

B. 上午 7:30

C. 上午 7:45

D. 上午 8:00

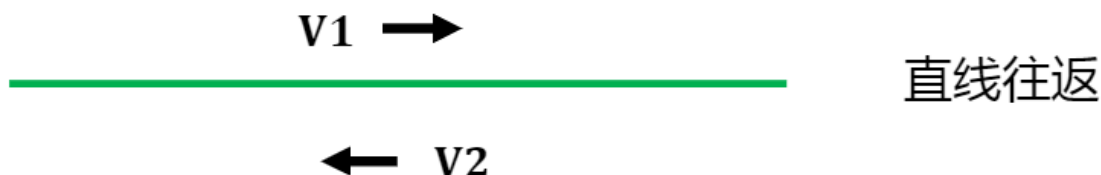
【解析】例 1. 假设以每小时 10 公里的速度骑车所花费时间为 t ，根据题意， $S=V \cdot t=10 \cdot t=15 \cdot (t-1.5) \rightarrow 2t=3t-4.5 \rightarrow t=4.5$ ，12:30 往前推 4.5 个小时，为 8:00，对应 D 项。【选 D】

【知识点】等距离平均速度公式：等距离平均速度 $= \frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ 。

1. 等距离：志哥是 100 米运动员时，前 50 米以速度 V_1 前进，后 50 米以速度 V_2 前进，前半段、后半段距离相等，则平均速度 $\bar{V}=100/t=100 \div (50/V_1+50/V_2) \rightarrow$ 平均速度 $\bar{V}=2V_1V_2/(V_1+V_2)$ 。公式的推导不重要，应用更重要，应用：以速度 V_1 、速度 V_2 走的路程相等，才可称为等距离。



2. 直线往返：去的速度为 V_1 、回的速度为 V_2 ，所走距离相等，为等距离。

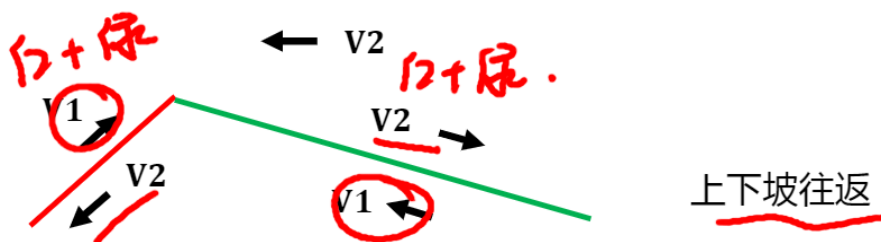


3. 上下坡往返：

(1) 若是单程，上坡距离=下坡距离，则可以使用；上坡距离 \neq 下坡距离，则不可以使用。



(2) 若为上下坡往返，以速度 V_1 行走的路程为红+绿，以速度 V_2 行走的路程也为红+绿，即距离相等，上下坡往返，则可以做。



【例 2】（2020 联考）小明每天从家中出发骑自行车经过一段平路，再经过一道斜坡后到达学校上课。某天早上，小明从家中骑车出发，一到校门口就发现忘带课本，马上返回，从离家到赶回家中共用了 1 个小时，假设小明当天平路骑行速度为 9 千米/小时，上坡速度为 6 千米/小时，下坡速度为 18 千米/小时，那么小明的家距离学校多远？

- A. 3.5 千米
- B. 4.5 千米
- C. 5.5 千米
- D. 6.5 千米

【解析】例 2. 由题可知，平路速度=9，上坡速度=6，下坡速度=18，从家到学校、从学校到家是一个往返， $S=V \cdot t$ ，花费 1 小时，则 $S=1 \cdot \text{整个过程的} \bar{V} / 2$ ，求出整个过程的平均速度即可；有平路、上下坡，先求出上、下坡往返的平均速度（上、下坡一定等距离），即上、下坡平均速度 $= 2V_1V_2 / (V_1 + V_2) = 2 \cdot 6 \cdot 18 / (6 + 18) = 9 = \text{平路速度}$ ，说明整个过程的 $\bar{V} = 9$ ，所求 $S = 1 \cdot \text{整个过程的} \bar{V} / 2 = 9 / 2 = 4.5$ ，对应 B 项。【选 B】



【注意】若上下坡平均速度不是 9，要观察平路路程与上、下坡路程是否相等，若距离相等，可再用一次等距离平均公式；若距离不相等，则需补全条件进行解题，一般情况下不会这样考查，比较麻烦。

【拓展】（2016 云南事业）李大夫去山里给一位病人出诊，他下午 1 点离开诊所，先走了一段平路，然后爬上了半山腰，给那里的病人看病。半小时后，他沿原路下山回到诊所，下午 3 点半回到诊所。已知他在平路步行的速度是每小时 4 千米，上山每小时 3 千米，下山每小时 6 千米。请问李大夫出诊时共走了多少路？

- A. 5 千米
- B. 8 千米
- C. 10 千米
- D. 16 千米

【解析】拓展. 从上山到下山总共经历 2.5 小时，看病花费 0.5 小时，则行走时间 $t = 2.5h - 0.5h = 2h$ ，则总路程 $S = V \cdot t = \text{总体的} \bar{V} \cdot 2$ ，先计算上、下坡平均速度，比较其与平路速度的关系，上、下坡平均速度 $= 2V_1V_2 / (V_1 + V_2) = 2 \cdot 3 \cdot 6 / (3 + 6) = 4$ ，

与平路速度相等，说明总体的 $\bar{v}=4$ ，则 $S=4 \times 2=8$ ，对应 B 项。【选 B】

? $2.5h - 0.5h = (2)$

$\frac{2 \times 3 \times 6}{3+6} = (4)$

$S = 4 \times 2$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 4×2

【注意】考场上遇到有上、下坡与平路的题目，往往都是先求出上、下坡的平均速度，与平路速度相比较，目前出现的考试中，上、下坡的平均速度与平路速度均相等，故在考试中可直接猜测整体的平均速度等于平路速度。本题中，猜测整体平均速度=平路速度=4，则所求 $S=V \times t=4 \times 2=8$ ；例 2 中，猜测整体平均速度=平路速度=9，则所求 $S_{\text{单程}}=1 \times 9/2=4.5$ 。

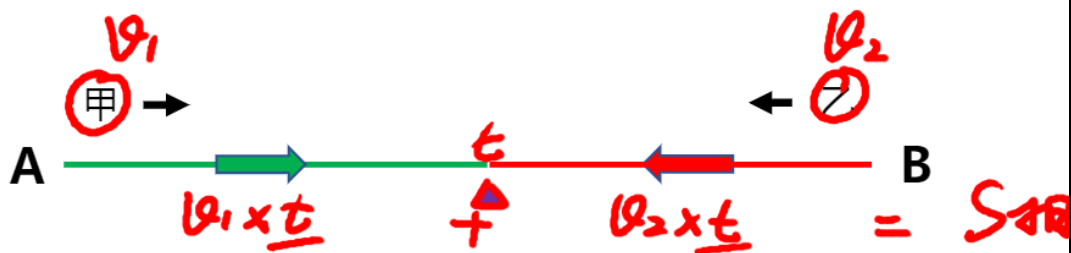


二、相对行程

【注意】相对行程即小学学过的相遇、追及。

【知识点】直线相遇：

1. 描述：甲乙两人从 A、B 两地同时出发，相向而行。假设甲的速度为 V_1 、乙的速度为 V_2 ，二人行走的时间为 t ，则 $S_{\text{相遇}} = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$ 。



2. 公式： $S_{\text{相遇}} = (V_1 + V_2) \cdot T$ ， $S_{\text{相遇}}$ 为相遇过程中，两人所走的路程和。

3. 注：老师在出模考题时的思维：先写出公式 $S_{\text{相遇}} = (V_1 + V_2) \cdot t$ ，若求甲的速度 $V_{\text{甲}}$ ，此时一定会给出其他条件，比如给出总路程（设以丙为参照，求出总路程）、时间、速度之间的关系（如甲比乙速度快了 $2/3$ 或 $1/3$ ），相当于求一个量时，一定要有关于其他量的已知条件，才能求出。故出题人在出题时，一定是先建立等量关系，给出除去所求量之外所有量的相关条件，故做题的核心本质是抓住公式，即相对行程的做题思维：判题型（判断为相遇问题或追及问题）、甩公式、填已知、求未知。

【例 1】（2020 河北）甲、乙两人在相距 1200 米的直线道路上相向而行，一条狗与甲同时出发跑向乙，遇到乙后立即调头跑向甲，遇到甲后再跑向乙，如此反复，已知甲的速度为 40 米/分钟，乙为 60 米/分钟，狗为 80 米/分钟。不考虑狗调头所耗时间，当甲、乙相距 100 米时狗跑了多少米？

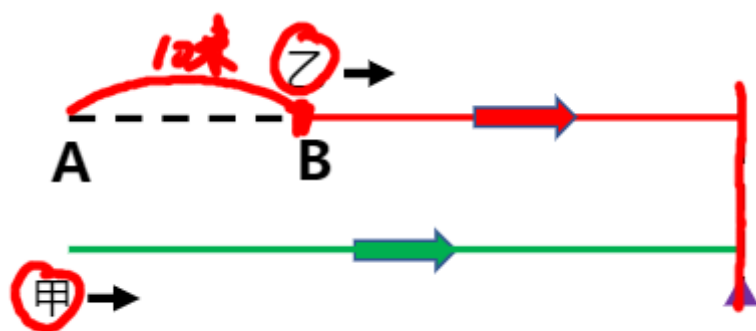
- A. 1100
B. 1000
C. 960
D. 880

【解析】例 1. 行程问题，问狗跑的路程， $S = V_{\text{狗}} \cdot t$ ，已知 $V_{\text{狗}} = 80$ ，求狗走的时间即可。狗和人同时开始，同时停止，则狗的时间和人的时间相同。甲、乙两人相向而行，为相遇的过程，公式： $S_{\text{相遇}} = V_{\text{和}} \cdot t$ ，列式： $1200 - 100 = (40 + 60) \cdot t$ ，解得 $t = 11$ ，则狗走的路程 $S = 80 \cdot 11 = 880$ ，对应 D 项。【选 D】

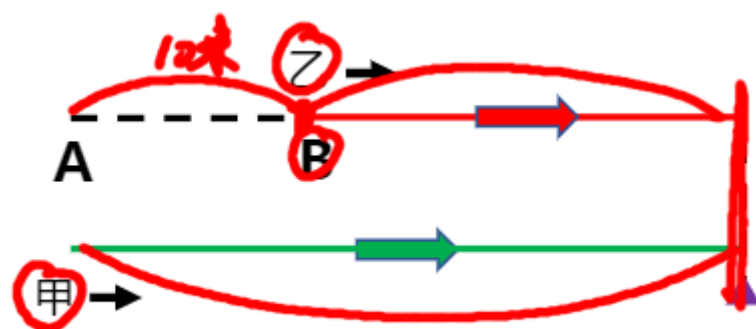
【知识点】直线追及：

1. 描述：甲乙两人从 A、B 两地同时出发，同向而行。例如老师（甲）和队友（乙）一起训练跑步，队友（乙）先跑 10 米，到达 B 地，老师（甲）在后面

追，最终在终点前追上，这个过程就是追及的过程，追上的前提条件是甲的速度比乙大。



2. 公式: $S_{\text{追及}} = (V_1 - V_2) * T$, $S_{\text{追及}}$ 为两者初始相距的距离。追及路程的本质是为了追上而多跑的路程，乙在 B 的时候甲在 A，甲走的是绿色的轨迹，乙走的是红色的轨迹，甲为了追上乙，比乙多走了虚线的部分，虚线部分的本质为在追的时候甲、乙之间初始的距离。 $S_{\text{追及}} = V_1 * t - V_2 * t = (V_1 - V_2) * t$ 。

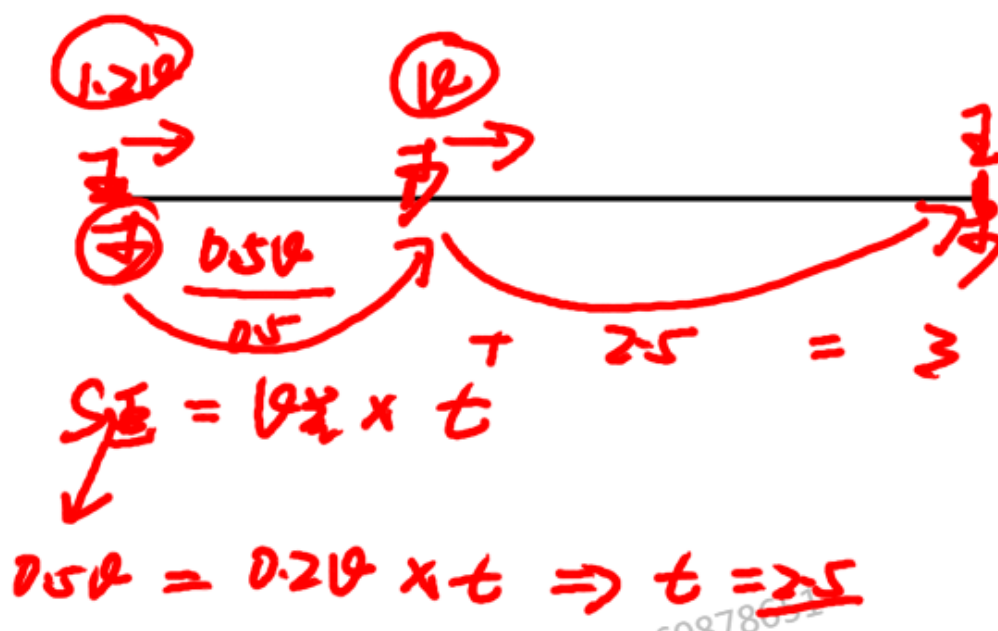
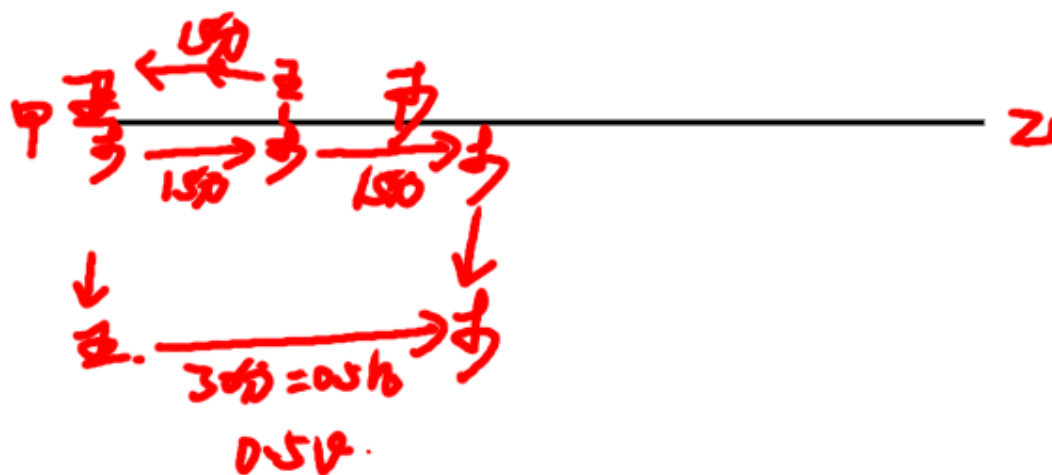


【例 2】(2020 深圳) 小王和小李从甲地去往相距 15km 的乙地调研。两人同时出发且速度相同。15 分钟后，小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回，小李则继续前行；小王取到文件后提速 20% 追赶小李，在小李到达乙地时刚好追上，假设小王取文件的时间忽略不计，问小李的速度为多少 km/h?

- A. 4
B. 4.5
C. 5
D. 6

【解析】例 2. 边读题边画图边分析，小王和小李同时从甲地出发去乙地调研，路程总共 15 千米，两人同时出发且速度相同，假设小王、小李的速度均为 V ，小王出发 15 分钟后，发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回，小王出发和

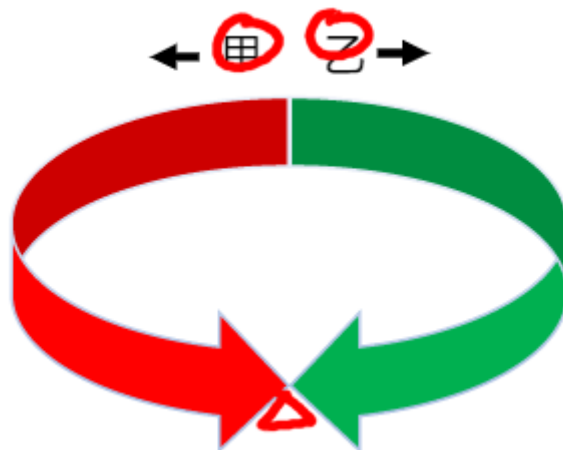
原路返回均为 15 分钟，此时小李继续往前走 15 分钟，小李、小王相差 $15+15=30$ 分钟 $=0.5$ 小时的路程，即两人之间的距离为 $0.5V$ 。已知“小王取到文件后提速 20% 追赶小李”，小王提速后速度变为 $1.2V$ ，小李速度不变还是 V ，为追及过程，公式： $S_{\text{追及}}=V_{\text{差}} \times t$ ，列式： $0.5V=(1.2V-V) \times t=0.2V \times t$ ，解得 $t=2.5$ ，小王追上小李共用了 2.5 小时，小李共走了 $0.5+2.5=3$ 小时，则 $V_{\text{李}}=15\text{km}/t_{\text{李}}=15/3=5\text{km/h}$ ，对应 C 项。【选 C】



【知识点】

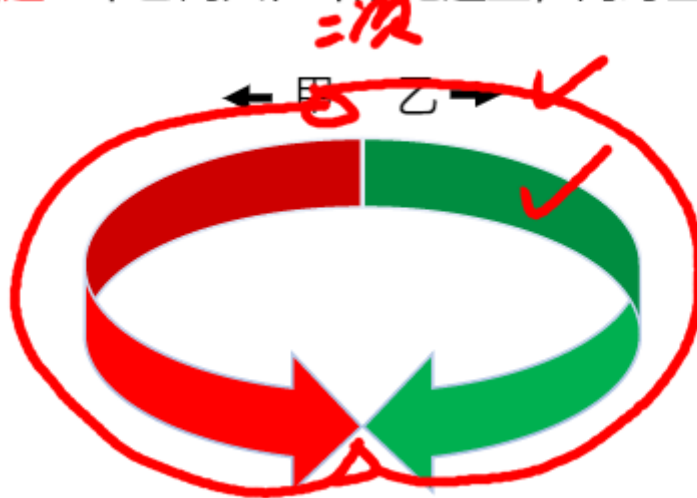
1. 环形相遇：

(1) 描述：甲乙两人在环形跑道上，同时出发，背向而行。



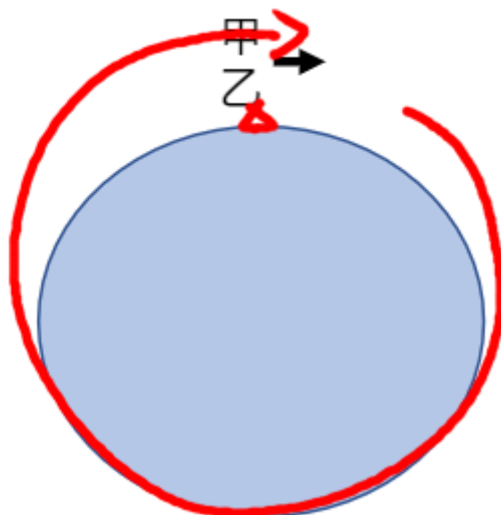
(2) 公式: $S_{\text{相遇}} = (V_1 + V_2) * T$ 。相遇一次, $S_{\text{相遇}} = \text{一圈}$; 每相遇一次, 甲、乙合走一圈, 相遇 N 次, $S_{\text{相遇}} = N \text{ 圈}$ 。

例题: 甲乙两人在环形跑道上, 同时出发, 同向而行,



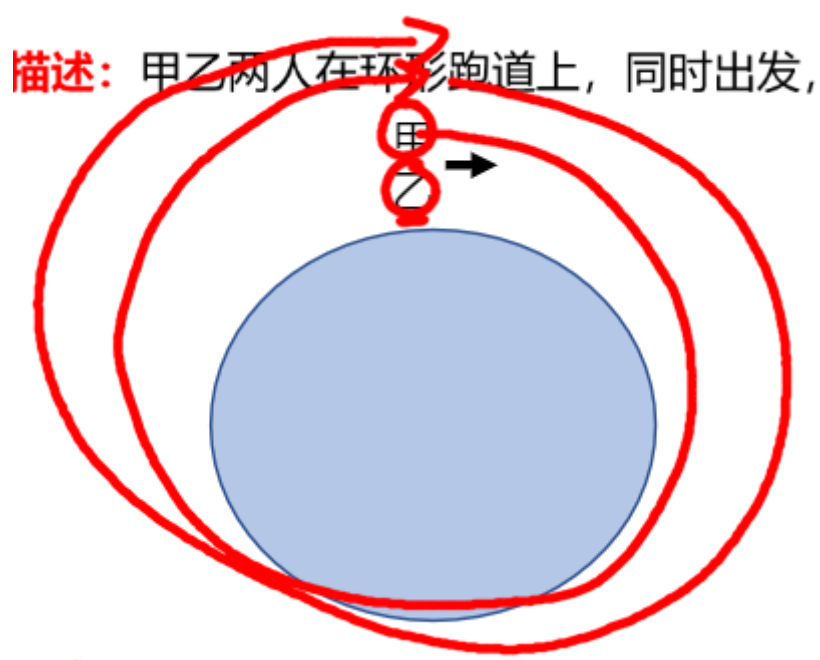
2. 环形追及:

(1) 描述: 甲乙两人在环形跑道上, 同时出发, 同向而行。例如甲乙在同一点同向而行, 甲跑的比乙快, 从后面追上了乙, 即套圈, 从后面追上一次相当于多跑了一圈, 多跑的距离就是追及路程。



(2) 公式: $S_{\text{追及}} = (V_1 - V_2) * T$ 。追及一次, $S_{\text{追及}} = \text{一圈}$; 追及 N 次, $S_{\text{追及}} = N \text{ 圈}$ 。

例如老师参加冬季长跑比赛, 老师被套了 4 圈, 老师决定发奋图强, 刻苦训练, 老师和蜗牛一起跑, 蜗牛速度慢, 老师速度快, 蜗牛速度很慢, 基本可以忽略不计, 老师追上蜗牛一次, 比蜗牛多跑一圈; 老师追上蜗牛两次, 比蜗牛多跑两圈; 以此类推, 追上 N 次, 多跑 N 圈。



【例 3】(2020 山东) 甲、乙两人在一条 400 米的环形跑道上从相距 200 米的位置出发, 同向匀速跑步。当甲第三次追上乙的时候, 乙跑了 2000 米。问甲的速度是乙的多少倍?

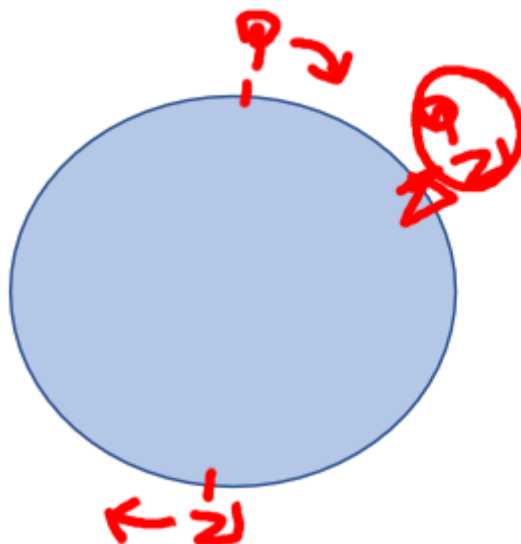
A. 1.2

B. 1.5

C. 1.6

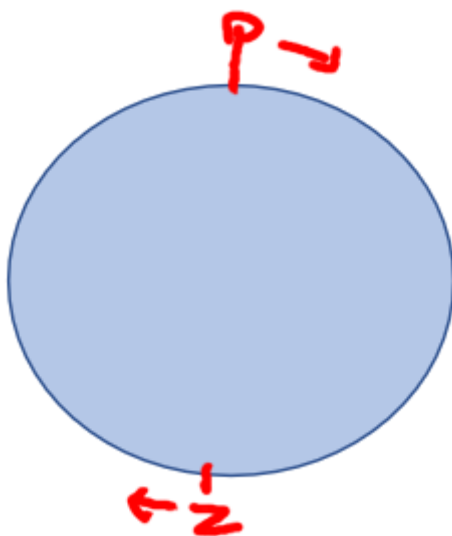
D. 2.0

【解析】例 3. 已知“甲、乙两人在一条 400 米的环形跑道上从相距 200 米的位置出发”，则甲、乙两人在半圈的位置。问的是倍数，里面蕴含了比例，在行程问题中， $S=V*t$ ， t 不变，则 t 一定时，速度与路程成正比，即 $V_{甲}/V_{乙}=S_{甲}/S_{乙}$ 。已知 $S_{乙}=2000$ 米，在运动过程中，甲比乙走的快且走的路程远，第一次追上，原本相距 200 米，第一次追上将这 200 米弥补上了， $S_{追}=200$ 米；第二次、第三次追上，均为套圈， $S_{追}=400$ 米，甲比乙多走了 $200+400+400=1000$ 米， $S_{甲}/S_{乙}=(2000+1000)/2000=1.5$ ，对应 B 项。【选 B】



【注意】

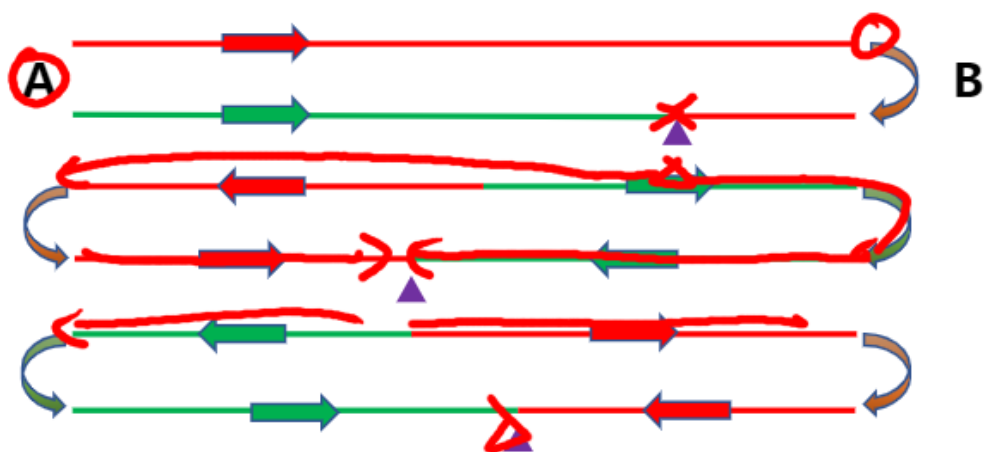
1. 甲与乙相距 200 米，不论向左跑还是向右跑都是相距 200 米。



2. 甲、乙同时出发、同时追上，故甲、乙时间是一样的。

【知识点】“同端出发”的线性多次相遇问题：

1. 举例 1：男生和女生一起出门逛商场（A→B），男生已经到商场后发现女生在后面，立即返回找女生；两人见面后，女生生气了，女生继续向前走到商场，男生继续向前走回家，男生到家后往商场走，两人再次相遇，又吵了一架；男生、女生再次径直向前走，到达彼此的出发点后，再次往回走相遇，又吵了一架。

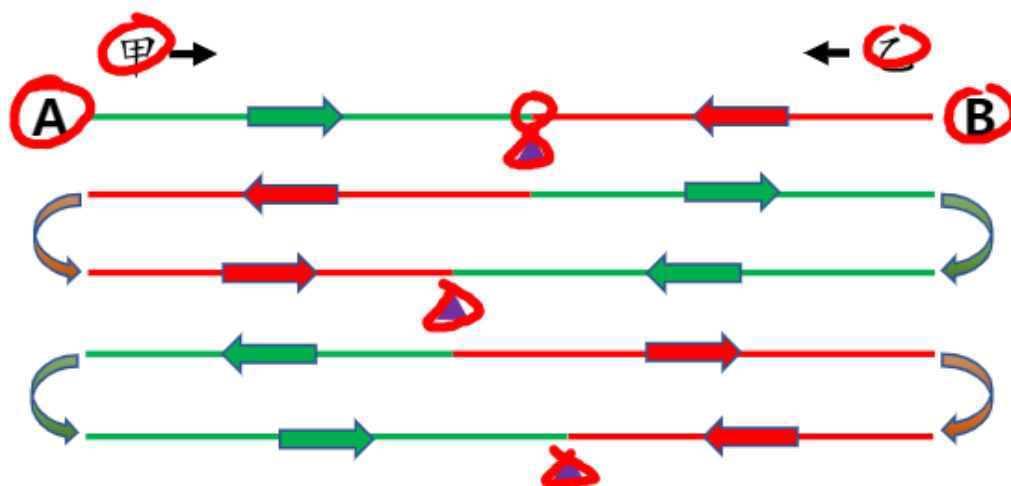


2. 举例 2：甲乙同端出发，乙比甲速度快，乙到达 B 点马上返回，回来的过程中与甲相遇，在这个过程中乙比“ $(2n-1) S_{\text{单程}}$ ”多走了 1 个 S ，则 $S_{\text{相遇}}=2nS$ ；第 1 次相遇， $S_{\text{相遇}}=2S$ ；第 2 次相遇， $S_{\text{相遇}}=4S$ ；第 3 次相遇， $S_{\text{相遇}}=6S$ ；第 n 次相遇， $S_{\text{相遇}}=2nS$ 。

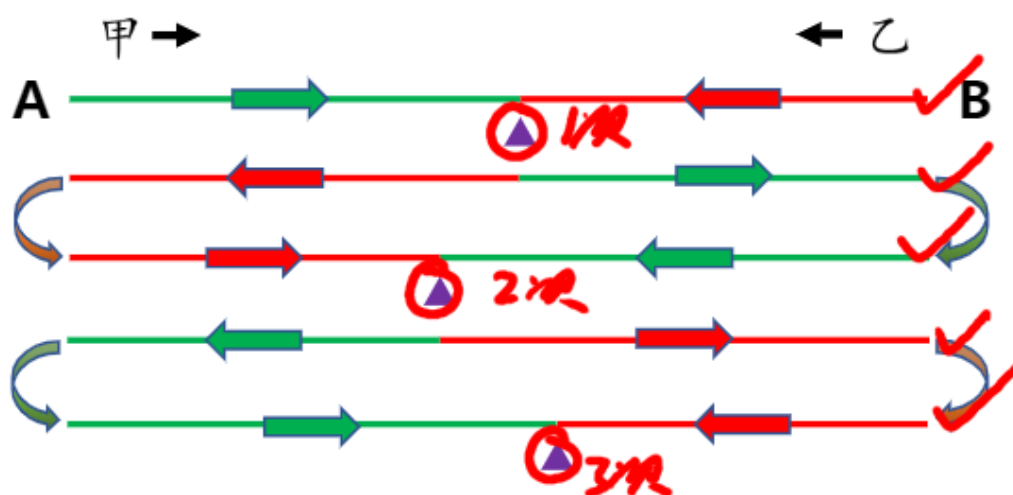
【注意】从小李入手分析： $S_{\text{李}}=4 \times 7=28$ ， $28/6=4 \cdots 4$ ，小李走完 4 个 6 公里到达起点，再走 3 公里到达终点，还需要往回走 1 公里，此时距离起点 $3-1=2$ 公里，选择 D 项。

【知识点】“两端出发”的线性多次相遇问题：

1. 举例：甲、乙见面后吵架，甲、乙均径直向前走，到达彼此的出发点后，马上返回，在途中又相遇；相遇后不停，各自径直向前走，到达出发点后再返回，然后再次相遇。



2. 分析：图中“△”为相遇点，甲与乙第一次相遇的时候，走了一倍的单程，则第一次相遇， $S_{\text{相遇}}=1S$ ；第二次相遇，走了 3 倍的全程， $S_{\text{相遇}}=3S$ ；第三次相遇，走了 5 倍的全程， $S_{\text{相遇}}=5S$ ；以此类推，第 n 次相遇， $S_{\text{相遇}}=(2n-1) \times S_{\text{单程}}$ 。



3. 公式: $S_{\text{相遇}} = (V_1 + V_2) * T = (2n - 1) * S_{\text{单程}}$, n 为相遇次数。例: 第 4 次相遇时, $S_{\text{相遇}} = (2 * 4 - 1) * S = 7S$ 。

【拓展】(2015 河北) 某高校两校区相距 2760 米, 甲、乙两同学从各自校区同时出发到对方校区, 甲的速度为每分钟 70 米, 乙的速度为每分钟 110 米, 在路上两人第一次相遇后继续行进, 到达对方校区后马上返回。那么两人从出发到第二次相遇需要多少分钟?

- A. 32
B. 46
C. 61
D. 64

【解析】拓展. 问“两人从出发到第二次相遇需要多少分钟”, 第二次相遇即多次相遇, 为两端出发的多次相遇问题, 公式: $S_{\text{相遇}} = (2n - 1) * S_{\text{单程}}$, $n = 2$, $(70 + 110) * t = (2 * 2 - 1) * 2760 = 3 * 2760$, 解得 $t = 46$, 对应 B 项。【选 B】

【知识点】流水行船:

1. 公式: $V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$, $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ 。顺流而下, 有水帮忙, 速度快; 逆流而上速度慢。

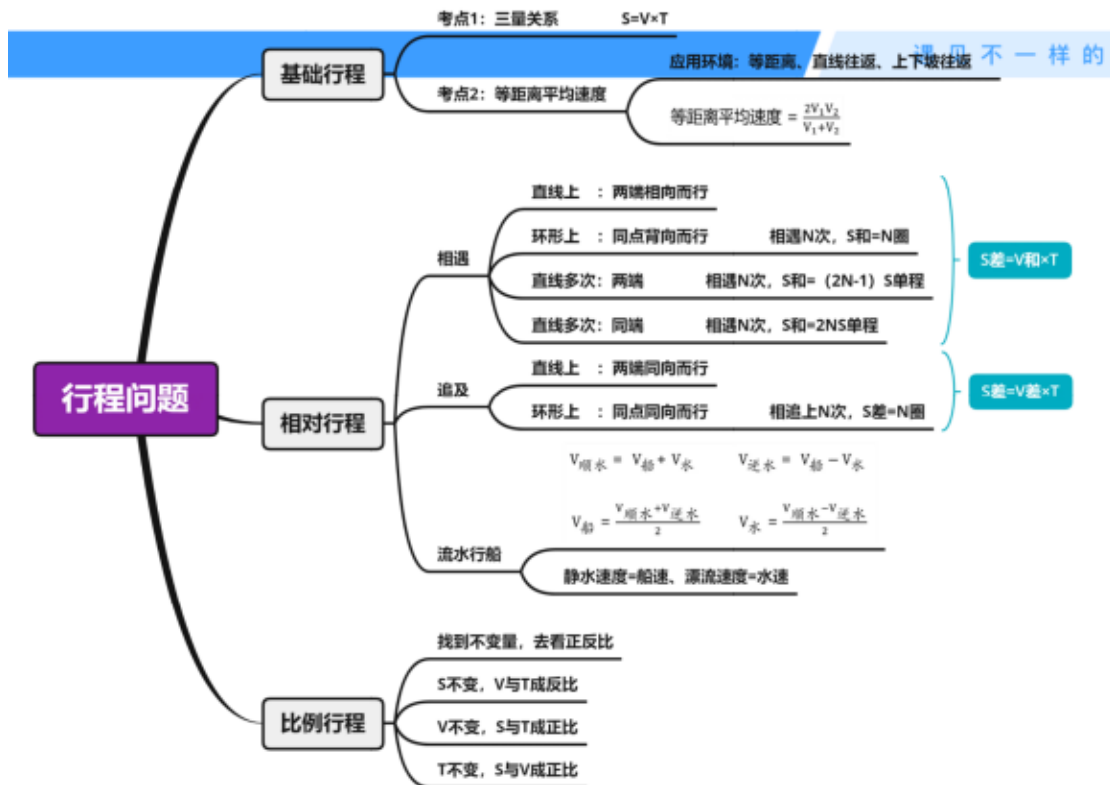
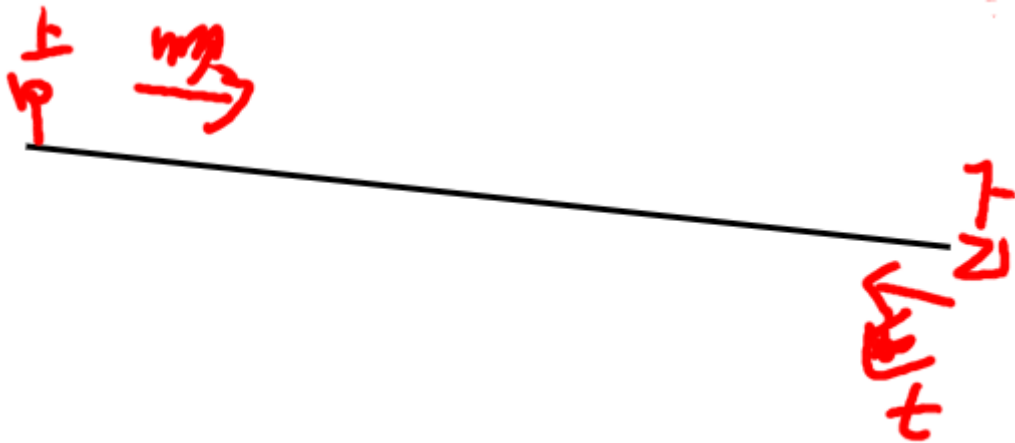
2. $V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}} + V_{\text{船}} - V_{\text{水}} = 2V_{\text{船}} \rightarrow V_{\text{船}} = (V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}) / 2$, $V_{\text{水}} = (V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}}) / 2$ 。记忆: 船的速度比水的速度快, 则分子做加法“ $V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}$ ”; 水的速度慢, 则分子做减法“ $V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}}$ ”。

3. 静水速度=船速, 水流没有速度, 船走的速度就是船本身的速度; 漂流速度=水速, 将一个瓶子放入水中, 瓶子本身没有速度, 漂流速度是水给的, 则漂流速度就是水速。

【例 5】(2021 新疆) 甲、乙两地分别为一条河流的上、下游, 两地相距 360 千米, A 船往返需要 35 小时, 其中从甲地到乙地的时间比从乙地到甲地的时间短 5 小时。B 船在静水中的速度为 12 千米每小时。问其从甲地开往乙地需要多少小时?

- A. 12
B. 20
C. 24
D. 40

【解析】例 5. 已知“甲、乙两地分别为一条河流的上、下游”，说明从甲地到乙地为顺水行驶，从乙地到甲地为逆水行驶；已知“从甲地到乙地的时间比从乙地到甲地的时间短 5 小时”， $t_{\text{顺}} < t_{\text{逆}}$ ；已知“A 船往返需要 35 小时，其中从甲地到乙地的时间比从乙地到甲地的时间短 5 小时”，则甲地到乙地为 15 小时，乙地到甲地为 20 小时，或者列方程， $t_{\text{去}} + t_{\text{回}} = 35$ ， $t_{\text{去}} - t_{\text{回}} = 5$ ，解得 $t_{\text{去}} = 15$ ， $t_{\text{回}} = 20$ 。 $S = 360$ ， $V_{\text{顺}} = 360/15 = 24$ ， $V_{\text{逆}} = 360/20 = 18$ ， $V_{\text{水}} = (24 - 18)/2 = 3$ ，则 B 船的 $V_{\text{顺}} = 12 + 3 = 15$ ， $t = 360/15 = 24$ ，对应 C 项。【选 C】



【注意】行程问题：

1. 基础行程：

(1) 考点 1：三量关系： $S=V \cdot t$ 。

(2) 考点 2：等距离平均速度：

①应用环境：等距离、直线往返、上下坡往返。

②等距离平均速度 $= 2V_1V_2 / (V_1 + V_2)$ 。

2. 相对行程：

(1) 相遇： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} \cdot T$ 。

①直线上：两端相向而行。

②环形上：同点背向而行，相遇 N 次， $S_{\text{和}} = N$ 圈。

③直线多次：两端，相遇 N 次， $S_{\text{和}} = (2N-1) \cdot S_{\text{单程}}$ 。

④直线多次：同端，相遇 N 次， $S_{\text{和}} = 2N \cdot S_{\text{单程}}$ 。

(2) 追及： $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} \cdot t$ 。

①直线上：两端同向而行。

②环形上：同点同向而行，追上 N 次， $S_{\text{差}} = N$ 圈。

(3) 流水行船：

① $V_{\text{顺水}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$ ； $V_{\text{逆水}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ ； $V_{\text{船}} = (V_{\text{顺水}} + V_{\text{逆水}}) / 2$ ； $V_{\text{水}} = (V_{\text{顺水}} - V_{\text{逆水}}) / 2$ 。

②静水速度=船速、漂流速度=水速。

3. 比例行程：

(1) 找到不变量，去看正反比。

(2) S 不变， V 与 T 成正比。

(3) V 不变， S 与 T 成正比。

(4) T 不变， S 与 V 成正比。

【考一个】(2020 联考) 某医疗器械公司为完成一批口罩订单生产任务，先期投产了 A 和 B 两条生产线，A 和 B 的工作效率之比为 2:3，计划 8 天可完成订单生产任务，两天后公司又对这批订单投产了生产线 C，A 和 C 的工作效率之比为 2:1，问该批口罩订单任务将提前几天完成？

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解析】考一个. 工程问题，为给效率比例型工程问题。（1）赋效率：已知 A: B=2: 3，赋值 A 的效率为 2，B 的效率为 3，又已知 A: C=2: 1，A 的效率为 2，则赋值 C 的效率为 1；（2）求总量：总量=（2+3）*8=5*8=40；（3）听话做题：已知 A、B 生产口罩两天后投产了 C，两天前 A、B 正常做，设投产 C 之后的工作时间为 t，（2+3）*2+（2+3+1）*t=40，解得 t=5，共需要 2+5=7 天，提前 8-7=1 天完成，对应 A 项。【选 A】

【注意】有同学选择 C 项，在求总工作时间时忘记加上 A、B 在投产生产线 C 前的工作时间（2 天）。

【考一个】（2015 联考）在一次航海模型展示活动中，甲、乙两款模型在长 100 米的水池两边同时开始相向匀速航行，甲款模型航行 100 米要 72 秒，乙款模型航行 100 米要 60 秒，若调头转身时间略去不计，在 12 分钟内甲、乙两款模型相遇次数是：

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

【解析】考一个. 已知“甲款模型航行 100 米要 72 秒，乙款模型航行 100 米要 60 秒”， $V_{甲}=100/72$ ， $V_{乙}=100/60$ 。问“甲、乙两款模型相遇次数”，为多次相遇问题；已知“甲、乙两款模型在长 100 米的水池两边同时开始相向匀速航行”，为两端出发的多次相遇问题，公式： $S=(2n-1)*S_{单程}$ ， $(100/72+100/60)*720=(2n-1)*100 \rightarrow 1000+1200=2200=(2n-1)*100 \rightarrow 2n=23 \rightarrow n=11.5$ ，相遇次数不到 12 次，对应 C 项。【选 C】

【注意】12 分钟=720 秒。

【注意】同学们在这个阶段先学会基础，才能有后面的不断进步。刚开始考虑不到细节很正常，不要妄自菲薄，只要在算就是在进步的路上。只要在进步、在前行，哪怕每天只进步一点点，也是能够计算出来走到终点的日子。现在的水

平到上岸的水平之间的距离是已知的，只要有速度，就可以计算出上岸的时间。

【答案汇总】工程问题：给完工时间型：1-3：DCA；给效率比例型：1-3：CBB；给具体单位型：B

行程问题：普通行程：1-2：DB；相对行程：1-5：DCBDC

遇见不一样的自己

Be your better self